Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg — Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Wintersemester 2019/20 — Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 6

Besprechung in den Übungsgruppen am 25. November 2019

1. *Hausaufgabe:* Matrizen und Determinanten

Gegeben seien die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Matrixprodukte CD, DC, EF und FE. Was ist mit den Produkten DE und ED?

b) Berechnen Sie die Determinanten $\det(E)$, $\det(F)$ und $\det(EF)$. Was ist mit $\det(C)$, $\det(D)$, $\det(CD)$ und $\det(DC)$?

c) Berechnen Sie die inversen Matrizen E^{-1} und F^{-1}. Was ist mit C^{-1} und D^{-1}?

2. *Hausaufgabe:* Pauli-Matrizen

Jede komplexe Zahl z kann durch ihren Realteil a und ihren Imaginärteil b als $z = a + \mathrm{i}b$ dargestellt werden, wobei i die imaginäre Einheit ist und $a, b \in \mathbb{R}$. Die komplex Konjugierte der Zahl z wird durch einen Stern gekennzeichnet und ist definiert als $z^* \equiv a - \mathrm{i}b$. Die komplex Konjugierte einer Matrix erhält man, indem jede einzelne Komponente komplex konjugiert wird.

Die *unitäre Gruppe* $U(N)$ ist so definiert, dass die Transformationen dieser Gruppe das komplexe Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_i^* y_i$ erhalten, wobei $\vec{x}$ und $\vec{y}$ komplexwertige Vektoren mit N Komponenten sind.

a) Zeigen Sie, dass eine Transformation A das komplexe Skalarprodukt genau dann erhält, wenn die Adjungierte $A^\dagger \equiv A^{*\top}$ genau die Inverse der Transformation ist, $A^\dagger = A^{-1}$.

In der Quantenmechanik wird der Spin eines Teilchens mit Hilfe der drei Pauli-Matrizen beschrieben, die folgendermaßen definiert sind,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

b) …die Pauli-Matrizen selbst-adjungiert sind, $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$,

c) …das Quadrat jeder Pauli-Matrix die Einheitsmatrix ergibt, $\sigma_i^2 = \mathbb{1}_2$,

d) …die Pauli-Matrizen selbst-invers sind, $\sigma_i^{-1} = \sigma_i$,

e) …die Pauli-Matrizen Elemente der $U(2)$, nicht aber der $SU(2)$ sind*,

f) …für die Pauli-Matrizen $\sigma_i \sigma_j = \mathrm{i}\,\sigma_k$ gilt, wenn (i, j, k) eine gerade Permutation von $(1, 2, 3)$ ist.

---

* *Hinweis:* Die $SU(2)$ ist die Untergruppe von $U(2)$ mit positiver Determinante.

3. Präsenzaufgabe: Erhaltung des Skalarprodukts

a) Zeigen Sie, dass Transformationen der orthogonalen Gruppe $O(N)$ das euklidische Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_i y_i$ erhalten.

b) Betrachten Sie das Skalarprodukt der speziellen Relativitätstheorie in einer räumlichen Dimension $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1$. Zeigen Sie, dass sog. *Lorentz-Boosts*, die über die Transformation

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

definiert sind, dieses Skalarprodukt erhalten.

4. Verständnisfragen

a) Begründen Sie, welche Untermenge der quadratischen Matrizen die allgemeine lineare Gruppe $GL(N)$ bildet.

b) Wodurch sind orthonormale Transformationen gekennzeichnet? Was bedeutet das?

c) Was sind polare und axiale Vektoren?

Hinweis:

Liebe Theo-1-Hörer*innen,

in der Woche vom **25. bis 29. November** findet der Klimastreik statt, um auf die besondere Dringlichkeit der Klimakrise aufmerksam zu machen.

In Zusammenarbeit mit sehr vielen Dozent*innen und anderen engagierten Menschen laden wir für diese Woche zu einem alternativen Veranstaltungsprogramm ein, zur sogenannten **Public Climate School**. Die PCS bietet eine Vielfalt an Zugängen zum Thema Klimakrise an, und sie ist offen für jedermensch, ihr dürft also gerne Leute von außerhalb der Uni mitbringen. Es sind Workshops, Vorlesungen und sogar Filmvorführungen dabei. Ihr findet das Programm unter

fridaysforfuture-heidelberg.de/pcs

Wenn ihr euch mal ein interessantes Paper zur Dringlichkeit der Lage anschauen wollt, sei hier ein Vorschlag:

https://www.pnas.org/content/pnas/115/33/8252.full.pdf

Es ist auf Englisch und benötigt natürlich viel Vorwissen, um im Detail verstanden zu werden, aber es gibt einen Ausblick darauf, wie physikalische Begrifflichkeiten (wie z.B. „Trajektorie“) in anderen Zusammenhängen verwendet werden können. Es lohnt sich auch, allein die Titel der zitierten Paper (auf der letzten Seite) zu lesen, sie lassen oft erahnen, woran derzeit geforscht wird.

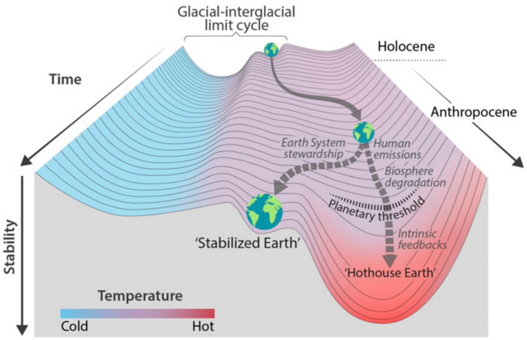

Abbildung 1: Aus: Steffen, Rockström et.al. 2018

Ihr habt Fragen oder Anregungen? Ihr wollt euch engagieren? Wir freuen uns von euch zu hören!

Für die Students for Future Heidelberg — klimawoche@fridaysforfuture-heidelberg.de
Michelangelo Tagliavini (Übungsgruppe 3) — tagliavini@stud.uni-heidelberg.de
Paul Wiesemeyer (Übungsgruppe 2) — wiesemeyer@thphys.uni-heidelberg.de

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg | Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Wintersemester 2019/20 | Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 6: Lösungen

1. *Hausaufgabe:* Matrizen und Determinanten

a) Das Matrixprodukt einer $L \times M$-Matrix A mit einer $M \times N$-Matrix B ergibt eine $L \times N$-Matrix C mit den Matrixelementen $c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$, wobei die Einstein'sche Summenkonvention verwendet wurde. Die Matrixprodukte vom Aufgabenblatt lauten demnach

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad DC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$EF = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad FE = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt DE ist nicht definiert und kann daher nicht berechnet werden, da die Anzahl der Spalten der ersten Matrix nicht mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmt. Das Matrix-Produkt ED ergibt jedoch

$$ED = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Determinante einer 3×3-Matrix A berechnet man gemäß

$$\det(A) = \varepsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}.$$

Die Determinanten $\det(E)$ und $\det(F)$ lauten daher

$$\det(E) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot 0 = 2$$

und

$$\det(F) = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 = 2 + 8 - 4 - 4 = 2.$$

Die Determinante $\det(EF)$ berechnet man dann entweder explizit oder mit Hilfe des Determinantenproduktsatzes,

$$\det(EF) = \det(E)\det(F) = 4.$$

Die Determinanten $\det(C)$ und $\det(D)$ können nicht berechnet werden, da die Determinante nur für quadratische Matrizen definiert ist.

Jedoch ist das Produkt CD eine 2×2-Matrix, für die eine Determinante definiert ist. Allgemein ist die Determinante einer 2×2-Matrix B definiert als

$$\det(B) = b_{11}\, b_{22} - b_{12}\, b_{21},$$

sodass

$$\det(CD) = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8.$$

Das Produkt DC ist eine 3×3-Matrix, für die ebenfalls eine Determinante existiert. Sie lautet

$$\det(DC) = 5 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \cdot 3 = 20 + 36 + 3 - 6 - 8 - 45 = 0.$$

c) Die inverse Matrix einer regulären 3×3-Matrix A lautet

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32} & a_{13}\,a_{32} - a_{12}\,a_{33} & a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22} \\ a_{23}\,a_{31} - a_{21}\,a_{33} & a_{11}\,a_{33} - a_{13}\,a_{31} & a_{13}\,a_{21} - a_{11}\,a_{23} \\ a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31} & a_{12}\,a_{31} - a_{11}\,a_{32} & a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} \end{pmatrix}.$$

Die gefragten inversen Matrizen lauten daher

$$E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inverse Matrizen sind nur für reguläre quadratische Matrizen definiert. Somit existieren die inversen Matrizen C^{-1} und D^{-1} nicht.

2. *Hausaufgabe:* Pauli-Matrizen

a) Für das Skalarprodukt zweier transformierter Vektoren gilt

$$\langle \vec{x}', \vec{y}' \rangle = x_i'^* y_i' = (A_{ia}x_a)^* A_{ib} y_b = A_{ia}^* x_a^* A_{ib} y_b = A_{ia}^* A_{ib}\, x_a^* y_b = A_{ai}^{*\top} A_{ib}\, x_a^* y_b = A_{ai}^\dagger A_{ib}\, x_a^* y_b \overset{!}{=} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Die Forderung, dass das Skalarprodukt erhalten sein muss, ist genau dann erfüllt, wenn

$$A_{ai}^\dagger A_{ib} = \delta_{ab}$$

oder in Matrixschreibweise

$$A^\dagger A = \mathbb{1}.$$

Da laut Definition der Inversen-Matrix gilt, dass $A^{-1}A = \mathbb{1}$, folgt daraus, dass die Adjungierte von A gerade die Inverse von A sein muss, $A^\dagger = A^{-1}$.

b) Die Adjungierten der drei Pauli-Matrizen lauten

$$\sigma_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1^* \\ 1^* & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1^* \\ 1^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1,$$

$$\sigma_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & (-\mathrm{i})^* \\ \mathrm{i}^* & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}^* \\ (-\mathrm{i})^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2,$$

$$\sigma_3^\dagger = \begin{pmatrix} 1^* & 0 \\ 0 & (-1)^* \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1^* & 0 \\ 0 & (-1)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3.$$

Die Adjungierten der Pauli-Matrizen sind gerade die Pauli-Matrizen selbst, diese sind also selbst-adjungiert.

c) Für die Quadrate der Pauli-Matrizen ergibt sich

$$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2,$$

$$\sigma_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}^2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2,$$

$$\sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2.$$

d) Da das Produkt der Pauli-Matrizen mit sich selbst immer die Einheitsmatrix ergibt, sind die Pauli-Matrizen selbst-invers, denn aus

$$\sigma_i^2 = \sigma_i \sigma_i = \mathbb{1}_2 \qquad \text{und} \qquad \sigma_i \sigma_i^{-1} = \mathbb{1}_2$$

folgt sofort, dass $\sigma_i^{-1} = \sigma_i$ gelten muss.

e) In b) – d) wurde bereits gezeigt, dass für die Pauli-Matrizen

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i = \sigma_i^{-1}$$

gilt. Dies ist genau die Eigenschaft, die in a) für die Transformationen der $U(N)$ gefunden wurde. Da die Pauli-Matrizen 2×2-Matrizen sind, sind sie somit Teil der $U(2)$. Sie wären darüber hinaus Teil der $SU(2)$, wenn ihre Determinanten genau eins währen. Für diese gilt jedoch

$$\det(\sigma_1) = 0 - 1 = -1, \qquad \det(\sigma_2) = 0 + \mathrm{i}^2 = -1, \quad \text{und} \quad \det(\sigma_3) = -1 - 0 = -1,$$

sodass die Pauli-Matrizen keine Elemente der $SU(2)$ sind.

f) Für die drei Permutationen gilt

$$\begin{aligned}
\sigma_1\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\sigma_3, \\
\sigma_2\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\sigma_1, \\
\sigma_3\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\sigma_2,
\end{aligned}$$

was genau die zu zeigenden Relationen sind.

3. *Präsenzaufgabe:* Erhaltung des Skalarprodukts

a) Für das euklidische Skalarprodukt in transformierten Koordinaten gilt

$$\langle \vec{x}', \vec{y}' \rangle = x_i' y_i' = R_{ia} x_a \, R_{ib} y_b = R_{ia} R_{ib} \, x_a y_b = R^\top_{ai} R_{ib} \, x_a y_b = \delta_{ab} x_a y_b = x_a y_a = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle,$$

wobei die Eigenschaft der orthogonalen Matrizen, dass die transponierte Matrix gleich der Inversen ist, $R^\top R = \mathbb{1}$, verwendet wurde. Somit ist das Skalarprodukt der transformierten Vektoren gleich dem Skalarprodukt der ursprünglichen Vektoren, d.h. die Transformation erhält das euklidische Skalarprodukt.

b) Das Skalarprodukt der speziellen Relativitätstheorie in einer Dimension in transformierten Koordinaten lautet

$$\begin{aligned}
\langle \vec{x}', \vec{y}' \rangle &= -x_0' y_0' + x_1' y_1' = -\Lambda_{0a}\Lambda_{0b} \, x_a y_b + \Lambda_{1c}\Lambda_{1d} \, x_c y_d \\
&= -\Lambda_{00}\Lambda_{00} \, x_0 y_0 - \Lambda_{01}\Lambda_{00} \, x_1 y_0 - \Lambda_{00}\Lambda_{01} \, x_0 y_1 - \Lambda_{01}\Lambda_{01} \, x_1 y_1 \\
&\quad + \Lambda_{10}\Lambda_{10} \, x_0 y_0 + \Lambda_{11}\Lambda_{10} \, x_1 y_0 + \Lambda_{10}\Lambda_{11} \, x_0 y_1 + \Lambda_{11}\Lambda_{11} \, x_1 y_1 \\
&= -\Lambda_{00}\Lambda_{00} \, x_0 y_0 - \Lambda_{10}\Lambda_{00} \, x_1 y_0 - \Lambda_{00}\Lambda_{10} \, x_0 y_1 - \Lambda_{10}\Lambda_{10} \, x_1 y_1 \\
&\quad + \Lambda_{10}\Lambda_{10} \, x_0 y_0 + \Lambda_{00}\Lambda_{10} \, x_1 y_0 + \Lambda_{10}\Lambda_{00} \, x_0 y_1 + \Lambda_{00}\Lambda_{00} \, x_1 y_1 \\
&= (\Lambda_{00}\Lambda_{00} - \Lambda_{10}\Lambda_{10}) (-x_0 y_0 + x_1 y_1) = \left(\gamma^2 - \beta^2\gamma^2\right)(-x_0 y_0 + x_1 y_1) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 \left(1 - \beta^2\right)(-x_0 y_0 + x_1 y_1) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $\Lambda_{00} = \Lambda_{11}$ und $\Lambda_{10} = \Lambda_{01}$ ist. Somit erhält die gegebene Transformation das Skalarprodukt der speziellen Relativitätstheorie.

4. Verständnisfragen

a) Die quadratischen $N \times N$-Matrizen mit nicht-verschwindender Determinante bilden die $GL(N)$. Jede Matrix $A \in GL(N)$ besitzt somit eine inverse Matrix A^{-1} mit $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_N$.

b) Orthonormale Transformationen können durch eine Matrix A dargestellt werden, deren Transponierte gleich ihrer Inversen ist, also $A^\top = A^{-1}$. Die Determinante von A ist ± 1. Ist $\det(A) = 1$, so handelt es sich um eine eigentliche orthonormale Transformation, bei $\det(A) = -1$ um eine uneigentliche orthonormale Transformation. Im ersten Fall handelt es sich um eine einfache Drehung, im zweiten Fall wird noch die Helizität geändert, d.h. also, dass ein Koordinaten-Rechtssystem in ein Linkssystem überführt wird. Orthonormale Tranformationen überführen einen Vektor in einen neuen Vektor, der denselben Betrag wie der alte aufweist.

c) Ein polarer Vektor $\vec{v}$ transformiert unter einer orthonormalen Transformation R wie $\vec{v}\,' = R\,\vec{v}$ für $\det(R) = \pm 1$, während ein axialer Vektor $\vec{w}$ das Transformationsverhalten $\vec{w}\,' = \det(R)\,R\,\vec{w}$ aufweist, also bei uneigentlichen Transformationen zusätzlich noch gespiegelt wird.