Aufgabe 2. **(4 Punkte)**

Sei μ die Gruppe aller Einheitswurzeln in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$ und sei $K/\mathbb{Q}$ eine endliche Erweiterung. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\chi\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \widehat{\mathbb{Z}}^\times$, so dass für jedes $\zeta \in \mu$ und jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ gilt, dass $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}$. *Hinweis:* Benutzen Sie Aufgabe 1.

(b) Es ist $\ker(\chi) = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K(\mu))$.

(c) Ist $K = \mathbb{Q}$, so ist χ surjektiv und induziert einen Isomorphismus $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu)/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ pro-endlicher Gruppen.

a) Es gilt $\overline{K} \supseteq K(\mu)$

Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dann ex. für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutig bestimmtes $a_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ so dass für alle $\zeta_n \in \mu$ mit $\mathrm{ord}(\zeta_n) = n$ $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{a_n}$ gilt.

Definiere χ durch $\chi(\sigma) = (a_n + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \mid n$ dann ist ζ_k auch n-te Einheitswurzel und damit muss $a_n = a_k \mod k$ gelten. Da $a_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $\chi(\sigma) \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$ $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.

Es gilt: $\chi(\sigma \circ \tilde{\sigma}) = (a_n \cdot \tilde{a}_n + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (a_n + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cdot (\tilde{a}_n + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

stetig: $\hat{\mathbb{Z}}^\times = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times,\ a_k \equiv a_j \mod j\ \forall k,j \in \mathbb{N},\ j \mid k \}$

$U_i = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{\mathbb{Z}}^\times \mid a_n = 1\ \forall n \leq i \}$ dann ist U_i nach der induzierten Produkttop. offen und $\{ U_i \mid i \in \mathbb{N} \}$ bildet eine Umgebungsbasis der 1.

Es gilt $\chi^{-1}(U_i) = \{ \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \mid \sigma(\zeta) = \zeta\ \forall \zeta \text{ mit } \mathrm{ord}(\zeta) \leq i \}$
$= \mathrm{Gal}(\overline{K}/K(\mu_i))$ mit $\mu_i := \{ \zeta \in \mu \mid \mathrm{ord}(\zeta) \leq i \}$

Und $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K(\mu))$ ist als Normalteiler von $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ offen.

b) $\ker(\chi) = \{ \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \mid a_n \equiv 1 \mod n \} = \{ \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \mid \sigma(\zeta) = \zeta\ \forall \zeta \in \mu \}$
$= \mathrm{Gal}(\overline{K}/K(\mu))$

c) Die Folgen $0 \to \mathrm{Gal}(K(\zeta_n)/K) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to 0$ ist exakt für alle ζ_n mit $\mathrm{ord}(\zeta_n) = n$

$\Rightarrow \varprojlim_n \mathrm{Gal}(K(\zeta_n)/K) \to \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \hat{\mathbb{Z}}^\times \to 0$ ist exakt also ist χ surjektiv

surjektiv + b) $\Rightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu)/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) / \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu)) \overset{\text{Isomorphiesatz}}{\cong} \hat{\mathbb{Z}}^\times$