Aufgabe 1

(a)

$$\begin{aligned}
L' &= L - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - m\Phi(x) - \frac{\mathrm{d}\,\left(\frac{m}{2}a\dot{a}\vec{q}^{\,2}\right)}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{m}{2}(\dot{a}\vec{q} + a\dot{\vec{q}}) - \frac{m}{2}(\dot{a}^2\vec{q}^{\,2} + a\ddot{a}\vec{q}^{\,2} + 2a\dot{a}\vec{q}\dot{\vec{q}}) - m\Phi(x) \\
&= \frac{m}{2}(a^2\dot{\vec{q}}^{\,2}) + \frac{m}{2}\left(\dot{a}^2\vec{q}^{\,2} + 2a\dot{a}\vec{q}\dot{\vec{q}} - \dot{a}^2\vec{q}^{\,2} - 2a\dot{a}\vec{q}\dot{\vec{q}} - a\ddot{a}\vec{q}^{\,2} - \Phi(a\vec{q})\right) \\
&= \frac{m}{2}(a^2\dot{\vec{q}}^{\,2}) - m\left(\frac{a\ddot{a}\vec{q}^{\,2}}{2} + \Phi(a\vec{q})\right)
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = ma^2\dot{\vec{q}}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
H &= \dot{\vec{q}} \cdot p_q - L' \\
&= ma^2a^2\dot{\vec{q}}^{\,2} - \frac{m}{2}(a^2\dot{\vec{q}}^{\,2}) + m\phi(\vec{q}) \\
&= \frac{m}{2}(a^2\dot{\vec{q}}^{\,2}) + m\phi(\vec{q})
\end{aligned}$$

Da H nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Energie eine Erhaltungsgröße. Ist $\phi \equiv 0$, so ist auch $p_q = ma^2\dot{\vec{q}}$ eine Erhaltungsgröße.

(c) Es gilt also $\dot{\vec{q}} = \frac{p_q}{ma^2}$. Durch Integration erhalten wir

$$\vec{q}(t) - \vec{q}(t_0) = \frac{p_q}{m}\int_{t_0}^{t} a^{-2}(t')\,\mathrm{d}t'.$$

Per Definition ist $a^{-2} = \frac{\dot{a}}{H_0 a^{\frac{3}{2}}}$. Nutzen wir dies, so erhalten wir

$$\vec{q}(t) - \vec{q}(t_0) = \frac{p_q}{mH_0}\int_{a_0}^{a(t)} a^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}a = -\frac{p_q}{2mH_0}a^{-\frac{1}{2}} + \frac{p_q}{2mH_0}a_0^{-\frac{1}{2}}.$$

Für x erhalten wir so

$$\vec{x} = -\frac{p_q}{2mH_0}a^{\frac{1}{2}} + \frac{p_q \cdot a}{2mH_0}a_0^{-\frac{1}{2}} + a\vec{q}(t_0)$$

Löst man die Differentialgleichung, die a definiert so erhält man

$$\int_0^t \sqrt{a}\,\mathrm{d}a = H_0 t \implies \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}(t)} = H_0 t \implies a(t) = \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Einsetzen ergibt

$$\vec{q}(t) = -\frac{p_q}{2mH_0}\left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{-\frac{1}{3}} + \frac{p_q}{2mH_0}a_0^{-\frac{1}{2}} + \vec{q}(t_0)$$

bzw.

$$\vec{x} = -\frac{p_q}{2mH_0}\left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{p_q \cdot \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3}}}{2mH_0}a_0^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{2}H_0 t\right)^{\frac{2}{3}}\vec{q}(t_0)$$

Es gilt also

$$\lim_{t\to\infty}\vec{q}(t) = \frac{p_q}{2mH_0}a_0^{-\frac{1}{2}} + \vec{q}(t_0)$$

und

$$\lim_{t\to\infty}\vec{x}(t) = \infty$$

Aufgabe 2

In Zylinderkoordinaten ist

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{x}^2}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\begin{pmatrix}\rho\sin(\phi)\\ \rho\cos(\phi)\\ z\end{pmatrix}\right)^2 = \left(\begin{pmatrix}\dot\rho\sin(\phi)+\rho\dot\phi\cos(\phi)\\ \dot\rho\cos(\phi)-\rho\dot\phi\sin(\phi)\\ \dot z\end{pmatrix}\right)^2 = \dot\rho^2+\rho^2\dot\phi^2+\dot z^2$$

Also ist $T = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\phi^2+\dot z^2\right)$. Da es sich hier um ein konservatives System ohne Nebenbedingungen handelt, erhalten wir $L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\phi^2+\dot z^2\right) - V(\rho)$ und $L = T + V = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\phi^2+\dot z^2\right) + V(\rho)$. Da H nicht explizit von t abhängt, ist die Energie eine Erhaltungsgröße. Außerdem sind $p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = m\rho^2\dot\phi$ und $p_z = \frac{\partial L}{\partial\dot z} = m\dot z$ erhalten.

Aufgabe 3

(a) Es gilt $S = \int_{t_0}^{t_E} L \ \mathrm{d}t$ Also erhalten wir, wenn wir $T[f]$ als Wirkung auffassen, die Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+[f'(x)]^2}{f(x)}}$. Es gilt $p_f = \frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{1}{\sqrt{2gf(x)}} \cdot \frac{f'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}$ und daher

$$\begin{aligned} H &= p_f \cdot f'(x) - L \\ &= \frac{1}{\sqrt{2gf(x)}}\cdot\frac{[f'(x)]^2}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} - \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+[f'(x)]^2}{f(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2gf(x)}}\left(\frac{[f'(x)]^2}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} - \sqrt{1+[f'(x)]^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2gf(x)}}\frac{[f'(x)]^2-(1+[f'(x)]^2)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2gf(x)(1+[f'(x)]^2)}} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hängt nicht explizit von x ab, daher ist H erhalten.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2gH^2} &= f(x)(1+[f'(x)]^2) \\ f(x) &= \frac{1}{2gH^2(1+[f'(x)]^2)}\end{aligned}$$

(b) Es gilt $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\phi} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}} = \frac{\sin(\phi)}{4gE^2} \cdot \frac{4gE^2}{1-\cos(\phi)} = \frac{\sin(\phi)}{1-\cos(\phi)}$. Setzen wir dies nun in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(\phi)}{4gE^2} &= \frac{1}{2gE^2\left(1+\left[\frac{\sin(\phi)}{1-\cos(\phi)}\right]^2\right)} \\ \left(1+\left[\frac{\sin(\phi)}{1-\cos(\phi)}\right]^2\right)(1-\cos(\phi)) &= 2 \\ \frac{\sin^2(\phi)}{1-\cos(\phi)} &= 1+\cos(\phi) \\ \sin^2(\phi) &= 1-\cos^2(\phi)\end{aligned}$$