Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

8. Übungsblatt

Ausgabe 12.01.2020 – Besprechung 18.01-23.01.2021

1. Lösung: Residuensatz

(a) Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \tag{1}$$

hat zwei Polstellen bei $z_{1,2} = \pm i$.
Um die Residuen der Funktion zu berechnen ist es hilfreich die Funktion umzuschreiben:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \tag{2}$$

$$= \frac{1}{(z+i)\cdot(z-i)}\ . \tag{3}$$

Damit erhalten wir für die Residuen:

$$z_1 = i: \tag{4}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z+i)\cdot(z-i)} \tag{5}$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2i} \tag{7}$$

$$= -\frac{1}{2}i \tag{8}$$

$$z_2 = -i: \tag{9}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z+i)\cdot(z-i)} \tag{10}$$

$$= \lim_{z\to -i}\frac{1}{z-i} \tag{11}$$

$$= \frac{-1}{2i} \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2}i \tag{13}$$

(b) Es gilt:

$$\oint \mathrm{d}z f(z) = 2\pi i \sum_{k=0}^{N} \mathrm{Res}(f, z_k)\chi_k. \tag{14}$$

Somit ergibt sich für den Kreis um die einzelnen Pole

$$\begin{aligned}
\oint_{C_{z_1}} \mathrm{d}z f(z) &= 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_1) && (15)\\
&= 2\pi i \frac{-1}{2} i && (16)\\
&= \pi && (17)\\
\oint_{C_{z_2}} \mathrm{d}z f(z) &= 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_2) && (18)\\
&= 2\pi i \frac{1}{2} i && (19)\\
&= -\pi && (20)\\
\oint_{C_{z_1,z_2}} \mathrm{d}z f(z) &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2)\right) && (21)\\
&= 2\pi i \left(\frac{-1}{2} i + \frac{1}{2} i\right) && (22)\\
&= 0 && (23)
\end{aligned}$$

2. Lösung: Erdmagnetfeld in Heidelberg

Der im Erdmittelpunkt lokalisierte Dipol ist gegeben durch

$$\boldsymbol{p} = -p\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{24}$$

Er erzeugt ein magentisches Dipolfeld der Form

$$\boldsymbol{B} = \frac{3(\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r)\hat{\boldsymbol{e}}_r - \boldsymbol{p}}{r^3} \tag{25}$$

Die Inklination ist der Winkel zwischen $\boldsymbol{B}$ und der lokalen Horizontalebene in Heidelberg.

$$\begin{aligned}
\sin(i) &= -\frac{\boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r}{|\boldsymbol{B}|} && (26)\\
&= -\frac{2\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r}{r^3 \cdot |\boldsymbol{B}|} && (27)\\
&= -\frac{2\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r}{\sqrt{9(\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r)^2 + \boldsymbol{p}^2 - 6(\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r)^2}} && (28)\\
&= -\frac{2\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r}{\sqrt{3(\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r)^2 + p^2}} && (29)
\end{aligned}$$

Über den Winkel β zwischen Heidelberg und Äquator können wir das Skalar produkt ausdrücken als $\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r = -p \sin\beta$.
Da Heidelberg bei $49.4°$ nördlicher Breite liegt, erhalten wir

$$i = \arcsin\left(-\frac{2\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r}{\sqrt{3(\boldsymbol{p} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_r)^2 + p^2}}\right) \tag{30}$$

$$= \arcsin\left(-\frac{-2p\sin\beta}{\sqrt{3(-p\sin\beta)^2 + p^2}}\right) \tag{31}$$

$$= \arcsin\left(\frac{2\sin\beta}{\sqrt{3\sin\beta^2 + 1}}\right) \tag{32}$$

$$= 66.8° \tag{33}$$

3. Lösung: Polare und axiale Vektorfelder

Die Transformation unter Q induziert die Abbildung des Ortsvektors $\boldsymbol{r} \to Q\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'$. Da die Transfomration linear ist, ist ihre Jacobi-Matrix die Matrix Q selbst, d.h. $\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = q_{ij}$. Die Orthogonalität von Q bedeutet $Q^T = Q^{-1}$, also $\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} = (Q^{-1})_{ij} = q_{ji}$.

(a) (i)

$$\frac{\partial}{\partial x'_i}\phi'(\boldsymbol{r}') = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(\boldsymbol{r})\right) , \tag{34}$$

denn da ϕ skalar ist, gilt $\phi'(\boldsymbol{r}') = \phi(\boldsymbol{r}')$. Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial x'_i}\phi'(\boldsymbol{r}') = q_{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \text{ und } (\boldsymbol{\nabla}\phi)' = Q\boldsymbol{\nabla}\phi \tag{35}$$

$\boldsymbol{\nabla}\phi$ ist also polar.

(ii)

$$\boldsymbol{\nabla}' \cdot \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}') = \frac{\partial}{\partial x'_i} v'_i(\boldsymbol{r}') \tag{36}$$

$$= \left(q_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(q_{ik}v_k) \tag{37}$$

$$= \delta_{jk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \tag{38}$$

$$= \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} , \tag{39}$$

$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}$ ist also skalar.

(iii)

$$\left(\boldsymbol{\nabla}' \times \boldsymbol{v}'(\boldsymbol{r}')\right)_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial v'_k(\boldsymbol{r}')}{\partial x'_j} \tag{40}$$

$$= \epsilon_{ijk}q_{jl}q_{kn}\frac{\partial v_n}{\partial x_l} \tag{41}$$

Wir können nun schreiben $\delta_{im} = q_{ir} q_{mr}$ und den Hinweis nutzen:

$$
\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{\nabla}' \times \boldsymbol{v}'\right)_i &= \epsilon_{ijk} q_{jl} q_{kn} \frac{\partial v_n}{\partial x_l} && (42)\\
&= \epsilon_{mjk} q_{mr} q_{ir} q_{jl} q_{kn} \frac{\partial v_n}{\partial x_l} && (43)\\
&= \epsilon_{mjk} q_{mr} q_{jl} q_{kn} q_{ir} \frac{\partial v_n}{\partial x_l} && (44)\\
&= (\det Q)\, \epsilon_{rln} q_{ir} \frac{\partial v_n}{\partial x_l} && (45)\\
&= (\det Q)\, q_{ir} \epsilon_{rln} \frac{\partial v_n}{\partial x_l} && (46)\\
&= (\det Q)\, (Q\, (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}))_i && (47)
\end{aligned}
$$

$\rightarrow \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$ ist axial.

(b) $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ mit Skalar $\phi \Rightarrow \boldsymbol{E}$ ist polar
$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ mit Vektorfeld $\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ ist axial.