**Aufgabe 1** (Dualität von Homologie und Kohomologie (Abschnitt 3.15)). **(4 Punkte)**
Sei $G$ eine (abstrakte) Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Für $A \in \mathtt{Ab}$ sendet der Funktor $\operatorname{Hom}(-,A)\colon G\text{-}\mathtt{Mod} \to G\text{-}\mathtt{Mod}$ induzierte Moduln auf koinduzierte Moduln.

$B$ induz $\Leftrightarrow$ $\exists C: \quad B \cong \mathbb{Z}[G] \otimes C$

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}(B, A) &\cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[G] \otimes C, A)\\ &\cong \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}[G], \operatorname{Hom}(C,A)), \quad \text{da } \otimes \dashv \operatorname{Hom}\\ &= \operatorname{koind}_G \operatorname{Hom}(C,A)\end{aligned}$$

(b) Der Funktor $(-)^* := \operatorname{Hom}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon G\text{-}\mathtt{Mod} \to G\text{-}\mathtt{Mod}$ is exakt.

Nach Algebra 2 ist $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$-Modul teilbar.

( z.z.: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ surjektiv $\forall d \in \mathbb{Z}$.

Bew: Sei $\bar{a} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dann $\overline{a/d} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ und $\overline{a/d} \cdot d = \overline{a/d \cdot d} = \bar{a}$ ✓ )

$\operatorname{Hom}(-, I)$ für einen injektiven Modul exakt ist, ist

$\operatorname{Hom}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon \mathbb{Z}\text{-mod} \to \mathbb{Z}\text{-mod}$

exakt. Die zusätzliche $G$-mod-Struktur ändert an der Exaktheit nichts.

(c) Für $A \in G\text{-}\mathtt{Mod}$ und $n \geq 0$ ist $\mathrm{H}_n(G,A)^* \cong \mathrm{H}^n(G,A^*)$.

Sei $P_\bullet \longrightarrow A$ eine Auflösung von $A$ durch induzierte Moduln, dann ist

$A^* \longleftarrow P_\bullet^*$ eine Auflösung von $A^*$ durch koinduzierte Moduln.

$$H_\bullet(G,A)^* = H((P_\bullet)_G)^* = H(((P_\bullet)_G)^*) \qquad (1)$$

$$H^\bullet(G,A^*) = H((P_\bullet^*)^G) \qquad (2)$$

In $\operatorname{Hom}_G(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ gilt $\varphi(gx) = \varphi(x) \quad \forall g \in G$.

Insbesondere ist

$$\mathrm{Hom}_G(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P_G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
$$\varphi \longmapsto (\bar{x} \mapsto \varphi(x))$$

wohl definiert.

Durch $\varphi(gx) = \varphi(x)$ erhalten wir auch eine Umkehrabbildung, es folgt

$$\mathrm{Hom}(P_G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_G(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(P, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^G.$$

$\Rightarrow (P_G)^* = (P^*)_G$

mit (1) und (2) folgt

$$H_\bullet(G, A)^* = H\left(\left(P_\bullet\right)_G^*\right) = H\left(\left(P_\bullet^*\right)_G\right) = H^\bullet(G, A^*) \qquad \square$$

**Aufgabe 2** (Tate-Kohomologie). **(4 Punkte)**
Sei $G$ eine endliche Gruppe.

(a) (Dimensionsverschiebung) Für einen $G$-Modul $A$ betrachten wir die $G$-Moduln $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ aus Aufgabe 4 auf Blatt 6. Zeigen Sie, dass $\hat{\mathrm{H}}^n(G, A_i) \cong \hat{\mathrm{H}}^{n+i}(G, A)$ für alle $n, i \in \mathbb{Z}$.

**Aufgabe 3** (Endliche Tate-Kohomologiegruppen). **(4 Punkte)**
Seien $G$ eine endliche Gruppe, $I_G = \ker(\varepsilon\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z})$ ihr Augmentationsideal und $A$ ein endlich erzeugter $G$-Modul. Zeigen Sie:

(a) Die abelschen Gruppen $A$ und $I_G$ sind endlich erzeugt.

$A$ ist endlich erzeugt als $\mathbb{Z}[G]$-Modul.
Da $G$ endlich ist, ist $\mathbb{Z}[G]$ endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$-Modul.
Insgesamt ist daher $A$ endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$-Modul.
Auch $I_G$ ist als Untermodul von $\mathbb{Z}[G]$ endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$-Modul.
Da endlich erzeugt sein als $\mathbb{Z}$-Modul und endlich erzeugt sein als abelsche Gruppe äquivalent sind, folgt die Behauptung.

(b) Die abelschen Gruppen $I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G, A)$ sind ebenfalls endlich erzeugt.

Es ist bekannt, dass $(x_i \otimes a_j)_{i \in I, j \in J}$ ein ES von $I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$ als $\mathbb{Z}$-Modul ist, falls $(x_i)_{i \in I}$ ein ES von $I_G$ als $\mathbb{Z}$-Modul und $(a_j)_{j \in J}$ " $A$ " ist.
Da $I$ und $J$ endlich sind, ist also auch $I \times J$ endlich.

Ist $R$ ein ES von $I_G$ und $S$ ein ES von $A$ als $\mathbb{Z}$-Modul, so ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G, A) \cong \mathrm{Abb}(R, A)$, da es genügt, eine Abbildung auf den Erzeugern anzugeben.
Jede solche Abbildung lässt sich als Summe

$$\varphi = \sum_{r \in R} \varphi_r \quad ; \quad \varphi_r(r') = \begin{cases} \varphi(r') & | \ r = r' \\ 0 & | \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $\varphi(r) \in A$ lässt sich $\varphi(r)$ als endliche Linearkombination der Erzeuger $S$ schreiben, d.h. $\varphi(r) = \sum_{s \in S} a_s s$. Wir folgern

$$\varphi_r = \sum_{s \in S} a_s \varphi_{rs} \quad \text{mit} \quad \varphi_{rs}(r') = \begin{cases} s & | \ r = r' \\ 0 & | \ \text{sonst.} \end{cases}$$

und schließlich

$$\varphi = \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \varphi_{rs}$$

$\square$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $\hat{\mathrm{H}}^n(G,A)$ endlich.
*Hinweis:* Benutzen Sie die Dimensionsverschiebung aus Aufgabe 2.

1. Wir zeigen $A$ endlich erzeugt $\Rightarrow$ $A_i$ endlich erzeugt $\forall i$.
Induktionsanfang $A_0 = A$ trivial. Induktionsschritt

$$0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad \text{Spaltet als Folge von } \mathbb{Z}\text{-Moduln}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[G], A_i) \to \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G, A_i)}_{A_{i+1}} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \underbrace{I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A_i}_{A_{i-1}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A_i}_{= \mathrm{Ind}_G A_i} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A_i}_{= A_i} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ nach 5) sind $A_{i-1}$ und $A_{i+1}$ ebenfalls endlich erzeugt ✓

2. $\hat{H}^i(G,A) = \hat{H}^0(G, A_i)$ nach Aufgabe 2.

3. Bzz. $\hat{H}^0(G,A)$ endlich für $A$ endlich erzeugt.
$\simeq A^G / N_G A$

$$\mathbb{Z}[G]^n \twoheadrightarrow A \qquad A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_{\mathbb{Z}[G]}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}[G] a_i$$

$$A^G \hookrightarrow A$$

$$N_G a = N_G \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \right) = N_G \left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{g \in G} \alpha_{ig} a_i \right) = \sum_{\tilde{g} \in G} \tilde{g} \left( \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{g \in G} \alpha_{ig} g \right) a_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{\tilde{g} \in G} \sum_{g \in G} \alpha_{ig} \tilde{g} g \right) a_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{g \in G} \alpha_{ig} \sum_{\tilde{g} \in G} \tilde{g} g \right) \cdot a_i$$