Gewöhnliche Differentialgleichungen - Übungsblatt 8

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Christian Düll

Abgabe: 17. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Ein planares Differentialgleichungssystem heißt **Hamiltonisches System**, falls eine Funktion $H \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ existiert, sodass das System in der Form

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases} \tag{1}$$

geschrieben werden kann. Die Funktion H heißt dann **Hamilton Funktion** für (1).

Aufgabe 8.1 4 Punkte

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für das System (1).

(i) Die Hamilton Funktion ist ein erstes Integral für (1), d.h. H ist konstant entlang jeder Lösungskurve.

(ii) Sei $P_0 = (x_0, y_0)$ ein Fixpunkt von (1). Dann sind die Eigenwerte des (um P_0) linearisierten Systems von der Form $\pm\lambda$ oder $\pm i\lambda$.

(iii) Zeigen Sie, dass die folgenden Systeme hamiltonisch sind.

$$(a) \begin{cases} x' = & x + y^2 \\ y' = & -y \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x' = & x \\ y' = & -y + 4x^3 \end{cases}$$

Aufgabe 8.2 12 Punkte

Betrachten Sie das nichtineare System

$$\begin{cases} x' = & \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x^3 + y^2 x) \\ y' = & x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(y^3 + x^2 y) \end{cases}. \tag{2}$$

(i) Linearisieren Sie das System (2) um den Fixpunkt im Ursprung und skizzieren Sie dessen Phasenportrait.

(ii) Verwenden Sie eine Transformation in Polarkoordinaten[1], um das System (2) in folgendes System zu überführen

$$\begin{cases} r' = & \frac{1}{2}(r - r^3) \\ \theta' = & 1 \end{cases}. \tag{3}$$

Skizzieren Sie dann das Phasenportrait von (3) .

(iii) Lösen Sie das System (3) explizit mit beliebigen Anfangswerten $(r_0, \theta_0) \in (0, \infty) \times [0, \infty)$ und bestimmen Sie den Fluss ϕ von (3).

(iv) Beweisen Sie, dass für alle $(r_0, \theta_0) \in (0,1) \times [0, \infty)$ ein eindeutiges $\tau = \tau(r_0, \theta_0)$ existiert, sodass $\phi(\tau, r_0, \theta_0)$ auf dem Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ liegt. (*also genauer gesagt, die erste Komponente von* ϕ)
Zeigen Sie weiterhin die Stetigkeit der Abbildung $(r_0, \theta_0) \mapsto \tau$.

[1] d.h. setzen Sie $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ und vergleichen Sie geeignete Koeffizienten

(v) Linearisieren Sie das System (3) und bestimmen Sie den Fluss ψ der Linearisierung. Zeigen Sie anschließend, dass das System (3) auf der Einheitskreisscheibe $\{r < 0\}$ konjugiert zur Linearisierung ist.
Hinweis: Verwenden Sie dafür die Konjugation

$$h : [0,1) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^2, \qquad h(r,\theta) = \psi_{-\tau(r,\theta)} \circ \phi_{\tau(r,\theta)}(r,\theta)$$

und setzen Sie $h(0,0) = (0,0)$. *Die Stetigkeit von* h *und* h^{-1} *können Sie ohne Beweis annehmen.*