INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

# Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 5 — 22. Mai 2020

**Abgabe bis Fr. 29.05.20, 09:00Uhr, online in Moodle!**

## Informationen:

- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei: *Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf.* Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf.* Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.
- Die ersten beiden Aufgaben sind aus dem Skript von Prof. Rannacher. Da es (zum Zeitpunkt der Erstellung des Übungsblattes) noch keine abgesprochene Regelung gibt, um denjenigen von Euch, die sich auf Nachklausuren vorbereiten müssen, Zeit für die Vorbereitung zu verschaffen, möchten wir Euch auf diesem Wege die Möglichkeit geben, auf diesem Blatt ohne großen Aufwand 50% der Punkte zu erreichen. Bitte formuliert die Lösungen aber zumindest um, da wortgleiche Abgaben weiterhin mit 0 Punkten bewertet werden können! Außerdem appellieren wir natürlich an Euch, Euch dennoch sobald wie möglich mit den Inhalten auseinanderzusetzen. Dies gilt natürlich insbesondere für alle, die sich nicht auf Nachklausuren vorbereiten müssen! Probiert die Aufgaben ruhig zunächst ohne die Lösung zu konsultieren :)

## Themen:

- Matrixnormen
- Mengen von Matrizen
- Stetige Funktionen
- Stetigkeit auf Funktionenräumen

## Aufgabe 5.1 (6 Punkte): Matrixnormen

(a) Man zeige, dass für jede Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum $\mathbb{K}^n$ die durch

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|, \quad A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

von der Vektornorm $\|\cdot\|$ erzeugte "natürliche Matrixnorm" auf $\mathbb{K}^{n \times n}$ tatsächlich die Normeigenschaften erfüllt. $\boxed{2}$

(b) Man zeige, dass für die von der Vektornorm $\|\cdot\|$ erzeugte "natürliche Matrixnorm"

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$$

gilt, dass

$$\|A\| = \max_{\substack{x \in \mathbb{K}^n \\ \|x\|=1}} \|Ax\|.$$ $\boxed{2}$

(c) Man zeige, dass die "Frobenius-Norm" auf $\mathbb{K}^{n\times n}$, die durch

$$\|A\|_{\mathrm{F}} := \left(\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

definiert ist, mit der euklidischen Vektornorm verträglich und submultiplikativ ist. 2

**Lösungsvorschlag:**

(a) (i) Definitheit: Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist $\sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Ax\| \geq 0$.

Zudem gilt:

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Ax\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax = 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \quad \Leftrightarrow \quad A = 0.$$

(ii) Homogenität: Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\alpha \in \mathbb{K}^n$ gilt:

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|\alpha A x\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} |\alpha|\,\|Ax\| = |\alpha| \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Ax\|\,.$$

(iii) Dreiecksungleichung: Für $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt:

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|(A+B)x\| \;\leq\; \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} (\|Ax\| + \|Bx\|) \;\leq\; \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Ax\| + \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Bx\|$$

(b) Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung und der Submultiplikativität der Norm gilt für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Abschätzung:

$$|\,\|Ax\| - \|Ay\|\,| \;\leq\; \|A(x-y)\| \;\leq\; \|A\|\,\|x-y\| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Daher ist die Funktion f mit $f(x) := \|Ax\|$ stetig (sogar Lipschitz-stetig) auf $\mathbb{K}^n$. Auf der kompakten Menge $\partial K_1(0) \subset \mathbb{K}^n$ nimmt sie deshalb ihr Maximum an, d.h.

$$\sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Ax\| \;=\; \max_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Ax\|\,.$$

(c) Veträglichkeit: Für $x \in \mathbb{K}^n$ folgt mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\|Ax\|_2^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j\Big|^2 \;\leq\; \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right) \;=\; \|A\|_{\mathrm{F}}^2 \cdot \|x\|_2^2\,.$$

Submultiplikativität: Analog zur Verträglichkeit folgt wieder mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|AB\|_{\mathrm{F}}^2 \;&=\; \sum_{k,j=1}^{n}\Big|\sum_{i=1}^{n} a_{ji}b_{ik}\Big|^2 \;\leq\; \sum_{k,j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ji}|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_{ik}|^2\right)\\
&=\left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ji}|^2\right)\left(\sum_{i,k=1}^{n}|b_{ik}|^2\right) \;=\; \|A\|_{\mathrm{F}}^2 \cdot \|B\|_{\mathrm{F}}^2\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung für die Tutoren:
Nicht wundern, die Aufgabe ist aus dem Rannacher-Skript und das wissen die Studis auch. Von daher kann es gut sein, dass die Lösungen sehr nah an der Musterlösung sind. (Grund dafür ist, dass wir auf diese Weise die Studis entlasten wollen, die gerade für die Nachklausuren lernen müssen.)

---

**Aufgabe 5.2 (6 Punkte):** Mengen von Matrizen

(a) Man zeige, dass die Menge $M$ der regulären Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$,

$$M := \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \middle| A \text{ regulär}\right\} \subset \mathbb{K}^{n\times n},$$

bzgl. jeder natürlichen Matrixnorm offen ist. $\boxed{3}$

(b) Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist auf ihrer "Resolventenmenge"

$$\mathrm{Res}(A) := \left\{z \in \mathbb{C} \middle| A - zI \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ regulär}\right\} \subset \mathbb{C}$$

die "Resolvente"

$$R(z) := (A - zI)^{-1}$$

definiert. Als Komplement des Spektrums $\sigma(A)$ ist die Resolventenmenge offen. Man zeige, dass die Resolventenabbildung $R : \mathrm{Res}(A) \subset \mathbb{C} \to M \subset \mathbb{K}^{n\times n}$ auf $\mathrm{Res}(A)$ stetig ist. $\boxed{3}$

**Lösungsvorschlag:**

(a) Sei $A \in M$ gegeben. Dann ist für die offene Kugelumgebung von A für eine beliebige Matrixnorm $\|\cdot\|$

$$K_{\|A^{-1}\|^{-1}}(A) = \left\{B \in \mathbb{K}^{n\times n} : \|A - B\| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1}\right\} \subset M,$$

und somit ist M offen.
Um dies zu sehen, sei $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\|B\| < \left\|A^{-1}\right\|^{-1}$. Dann ist

$$\left\|A^{-1}B\right\| \quad \leq \quad \left\|A^{-1}\right\| \|B\| \quad < \quad 1.$$

Nach dem Störungssatz der Vorlesung ist damit $I + A^{-1}B$ invertierbar.
Wegen $A + B = A(I + A^{-1}B)$ folgt daraus die Invertierbarkeit von $A + B$.

(b) Für $z, z' \in$ Res(A) mit $|z - z'|$ hinreichend klein existiert nach dem Störungssatz der Vorlesung die Inverse $(I + (z - z')R(z))^{-1}$.
Zusätzlich konvergiert $(I + (z - z')R(z))^{-1} \to I$ für $z' \to z$.
Für die Resolvente gilt die Gleichung:

$$\begin{aligned} R(z') &= (A - z'I)^{-1} = (A - zI + (z - z')I)^{-1} \\ &= ((A - zI)(I + (z - z')R(z)))^{-1} \\ &= (I + (z - z')R(z))^{-1}R(z). \end{aligned}$$

Daraus folgt $R(z') \to R(z)$ für $z' \to z$.
Die Resolvente $R(z)$ ist also eine stetige Funktion auf Res(A).

Bemerkung für die Tutoren:
Nicht wundern, die Aufgabe ist ebenfalls aus dem Rannacher-Skript und das wissen die Studis auch. Von daher kann es gut sein, dass die Lösungen sehr nah an der Musterlösung sind. (Grund dafür ist, dass wir auf diese Weise die Studis entlasten wollen, die gerade für die Nachklausuren lernen müssen.)

---

**Aufgabe 5.3 (3 Punkte):** Stetige Abbildungen und die Niveaumenge

Sei $\mathbb{K}^n$ ein Vektorraum, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, $c \in \mathbb{R}$ und

$$M := \{x \in \mathbb{K}^n | f(x) = c\}.$$

Man zeige, dass $M$ abgeschlossen ist und entscheide, ob $M$ auch immer kompakt ist.
*Bemerkung: Die Menge $M$ wird auch Niveaumenge von $f$ zum Wert $c$ genannt.*

**Lösungsvorschlag:**

Sei $x \in X$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Dann folgt wegen der Stetigkeit von $f$ direkt:

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c = c,$$

d.h. $x \in M$.
Da für eine Menge $A$ der Abschluss $\bar{A} = \{x \in X \mid \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \text{ mit } x_n \to x \ \ (n \to \infty)\}$ ist, gilt $M = \bar{M}$, also ist $M$ abgeschlossen.

Die Niveaumenge $M$ ist jedoch i.A. nicht kompakt. Betrachte dazu $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Metrik. Ist $f \equiv 0$, dann gilt $M = \mathbb{R}$.
Da $M$ aber offensichtlich nicht beschränkt ist, ist $M$ nach dem Satz von Heine-Borel auch nicht kompakt.

---

**Aufgabe 5.4 (5 Punkte):** Stetigkeit auf Funktionenräumen

Auf dem Vektorraum $C([0,\pi])$ aller stetigen Funktionen $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, sei die Abbildung

$$S : C([0,\pi]) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto S(f) := \int_0^\pi \cos(f(x))\mathrm{d}x$$

definiert. Man zeige, dass $S$ stetig ist.
*Hinweis: Man überlege sich zunächst genau, was Stetigkeit von $S$ bedeutet und was somit zu zeigen ist. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann dann im Weiteren hilfreich sein.*

**Lösungsvorschlag:**

Stetigkeit der Abbildung

$$S : C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto S(f) := \int_0^\pi \cos(f(x))dx$$

bedeutet, dass $S(g)$ nahe bei $S(f)$ liegt (im Sinne des reellen Betrags $|\cdot|$), falls die Funktion $g$ nahe bei der Funktion $f$ liegt (im Sinne der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$).

Zur Abschätzung von $|S(f) - S(g)|$ wenden wir auf den Cosinus den Mittelwertsatz der Differentialrechnung an.
Zu $u, v \in \mathbb{R}$ gibt es nach diesem ein $\xi \in (u, v)$, sodass

$$\cos(u) - \cos(v) \quad = \quad -\sin(\xi) \cdot (u - v).$$

Daraus folgt für alle $u, v \in \mathbb{R}$ aufgrund der Beschränktheit des Sinus:

$$|\cos(u) - \cos(v)| \quad \leq \quad |u - v|.$$

Für zwei stetige Funktionen $f, g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ gilt deshalb für alle $x \in [0, \pi]$:

$$|\cos(g(x)) - \cos(f(x))| \quad \leq \quad |g(x) - f(x)| \quad \leq \quad \|g - f\|_\infty .$$

Daraus erhalten wir unter Ausnutzung der Linearität und Monotonie des Integrals die Abschätzung:

$$\begin{aligned} |S(g) - S(f)| &= \left| \int_0^\pi (\cos(g(x)) - \cos(f(x))) dx \right| \\ &\leq \int_0^\pi |\cos(g(x)) - \cos(f(x))| dx \\ &\leq \int_0^\pi \|g - f\|_\infty \, dx = \pi \, \|g - f\|_\infty \end{aligned}$$

Mit dem $\varepsilon$-$\delta$-Kriterium folgt hieraus unmittelbar die Stetigkeit der Abbildung $S$. (Wähle etwa $\delta = \frac{\varepsilon}{\pi} > 0$.)

---