Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 3

Besprechung in den Übungsgruppen am 4. November 2019

1. *Hausaufgabe:* Differentialgleichung

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

a) Wie viele linear unabhängige Lösungen erwarten Sie und warum?

b) Bestimmen Sie die Lösungen in der erwarteten Anzahl mit Hilfe eines integrierenden Faktors. Verwenden Sie hierfür die imaginäre Einheit i, die über die Gleichung $\mathrm{i}^2 = -1$ definiert ist. Zeigen Sie, dass die Lösungen linear unabhängig sind, und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.

c) Schreiben Sie die obige Differentialgleichung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.

d) Zeigen Sie mit Hilfe der Lipschitz-Bedingung, dass die Lösung der Differentialgleichung für einen vollständigen Satz von Anfangsbedingungen eindeutig ist. Wie viele Anfangsbedingungen bilden einen vollständigen Satz? Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie die Ergebnisse aus b) und c) verwenden.

e) Betrachten Sie nun die Funktion

$$\tilde{y}(x) = A\sin(x) + B\cos(x) \qquad \text{mit} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion ebenfalls eine allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung ist.

f) Was schließen Sie aus d) und e)?

2. *Hausaufgabe:* Relativistische Energie

Die Newton'sche Mechanik erklärt sehr erfolgreich viele Alltagsphänomene, steht jedoch in einem fundamentalen Widerspruch zu Vorhersagen der Elektrodynamik. Die spezielle Relativitätstheorie verallgemeinert die Newton'sche Mechanik und löst diesen Widerspruch. Trotzdem ist die Newton'sche Physik nicht falsch, sie gilt lediglich unter gewissen Voraussetzungen. Insbesondere geht sie aus der speziellen Relativitätstheorie hervor, solange diese Voraussetzungen gelten. Man sagt auch, die Newton'sche Physik sei ein Grenzfall der speziellen Relativitätstheorie.

Dieses Prinzip ist deutlich allgemeiner: Wann immer eine neue physikalische Theorie für sich in Anspruch nimmt, eine Erweiterung einer experimentell gut geprüften Theorie darzustellen oder sogar zwei oder mehr Theorien zu vereinigen, müssen die ursprünglichen Theorien als Grenzfälle aus dieser hervorgehen. Was damit gemeint ist, demonstriert diese Aufgabe am Beispiel der relativistischen Energie.

Die Energie eines Teilchens, auf das keine äußeren Kräfte wirken (ein sog. freies Teilchen), ist in der speziellen Relativitätstheorie gegeben als

$$E = \gamma m_0 c^2 \qquad \text{mit} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

wobei m_0 die Ruhemasse des Teilchens ist, v seine Geschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit.

a) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

um $x_0 = 0$ bis zur einschließlich zweiten Ordnung. Sie brauchen das Restglied nicht berechnen.

b) Was ergibt sich somit für die relativistische Energie bis zur Ordnung v^4?

c) In welcher Ordnung der Näherung stimmt die relativistische Energie mit der Energie der klassischen Mechanik überein? Berückstigen Sie, dass ein konstanter Energie-Term keinen Einfluss auf die Dynamik des Teilchens hat.

d) Wann bricht die Näherung der klassischen Mechanik zusammen, wenn man an der Dynamik des Teilchens interessiert ist?*

e) Kennen Sie Phänomene, bei denen höhere Ordnungen eine Rolle spielen?

3. Präsenzaufgabe: Taylor-Entwicklung wichtiger Funktionen

Führen Sie eine Taylor-Entwicklung der Funktionen

$$f(x) = \sin(ax), \qquad g(x) = \cos(ax) \quad \text{und} \quad h(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

um $x_0 = 0$ durch. Hierbei ist i wieder die imaginäre Einheit. Brechen Sie die Entwicklung erst ab, wenn Sie ein Muster erkennen können. Wie können diese Muster mathematisch (als Reihe) formuliert werden? Fällt Ihnen etwas auf, wenn Sie die Entwicklung der obigen Funktionen vergleichen?

4. Verständnisfragen

a) Formulieren Sie die anschauliche Bedeutung der Lipschitz-Bedingung mit Ihren eigenen Worten.

b) Was besagt der Taylor'sche Satz, und warum ist er für die Physik so wichtig?

c) Was ist ein Vektor im allgemeinen, mathematischen Sinn?

---

* *Hinweis:* Hier gibt es keine eindeutige Lösung! Überlegen Sie sich selbst ein adäquates Kriterium.

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 3: Lösungen

1. Hausaufgabe: Differentialgleichung

a) Da es sich um eine Differentialgleichung 2. Ordnung handelt, muss es zwei linear unabhängige Lösungen geben.

b) Der integrierende Faktor ist $2y'(x)$, mit dem man

$$
\begin{aligned}
y''(x) + y(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\,y'(x)\,y''(x) + 2\,y(x)\,y'(x) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y'(x)]^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y(x)]^2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad [y'(x)]^2 = [\mathrm{i}\,y(x)]^2 \\
&\Rightarrow \quad y'(x) = \pm\mathrm{i}\,y(x)
\end{aligned}
$$

erhält. Diese Gleichung kann wie folgt durch Trennung der Variablen gelöst werden,

$$
\frac{y'(x)}{y(x)} = \pm\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad \ln\left[y(x)\right] = \pm\mathrm{i}x \quad \Rightarrow \quad y(x) = \exp\left(\pm\mathrm{i}x\right).
$$

Dies ergibt die beiden gesuchten Lösungen. (Hier wird keine Integrationskonstante benötigt, da zwei beliebige linear unabhängige Lösungen gebraucht werden, um die allgemeine Lösung zu finden.)
Zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind linear unabhängig, wenn der Ausdruck

$$
W(x) \equiv y_1(x)\,y_2'(x) - y_2(x)\,y_1'(x)
$$

nicht verschwindet. (Dies ist der Spezialfall der Wronski-Determinante für $n = 2$). Für $y_1(x) = \exp(\mathrm{i}x)$ und $y_2(x) = \exp(-\mathrm{i}x)$ ergibt sich

$$
W(x) = -\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}x)\exp(-\mathrm{i}x) - \mathrm{i}\exp(\mathrm{i}x)\exp(-\mathrm{i}x) = -2\mathrm{i} \neq 0.
$$

Die beiden Lösungen sind somit linear unabhängig, und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$
y(x) = A\exp(\mathrm{i}x) + B\exp(-\mathrm{i}x) \qquad \text{mit} \qquad A, B \in \mathbb{C}.
$$

c) Die Differentialgleichung kann in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben werden, indem man

$$
y_a(x) \equiv y(x) \qquad \text{und} \qquad y_b(x) \equiv y'(x)
$$

definiert. Leitet man beide Gleichungen einmal ab, findet man

$$
y_a'(x) = y'(x) = y_b(x) \qquad \text{und} \qquad y_b'(x) = y''(x) = -y(x) = -y_a(x),
$$

wobei in der zweiten Gleichung die ursprüngliche Differentialgleichung eingesetzt wurde.

d) Die Lipschitz-Bedingung für ein System von n linearen Differentialgleichungen

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

lautet

$$\frac{\left|\vec{f}(x,\vec{y}) - \vec{f}(x,\vec{\bar{y}})\right|}{\left|\vec{y} - \vec{\bar{y}}\right|} \leq k \qquad \text{mit} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Mit

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_a \\ y_b \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{f}(x,\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_b \\ -y_a \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\frac{\left|\begin{pmatrix} y_b - \bar{y}_b \\ -y_a + \bar{y}_a \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} y_a - \bar{y}_a \\ y_b - \bar{y}_b \end{pmatrix}\right|} = \frac{\sqrt{(y_b - \bar{y}_b)^2 + (\bar{y}_a - y_a)^2}}{\sqrt{(y_a - \bar{y}_a)^2 + (y_b - \bar{y}_b)^2}} = \sqrt{\frac{(y_b - \bar{y}_b)^2 + (y_a - \bar{y}_a)^2}{(y_a - \bar{y}_a)^2 + (y_b - \bar{y}_b)^2}} = 1.$$

Somit existiert eine eindeutige Lösung für das Gleichungssystem aus y_a und y_b. Diese muss gerade diejenige sein, die bereits in b) gefunden wurde.

Da es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, bzw. zwei Differentialgleichungen erster Ordnung handelt, bilden zwei Anfangsbedingungen einen vollständigen Satz.

e) Für die ersten und zweiten Ableitung von $\tilde{y}(x)$ gelten

$$\tilde{y}'(x) = A\cos(x) - B\sin(x) \qquad \text{und} \qquad \tilde{y}''(x) = -A\sin(x) - B\cos(x) = -\tilde{y}(x).$$

Die Funktion $\tilde{y}(x)$ erfüllt somit die obige Differentialgleichung $y''(x) + y(x) = 0$. (Alternativ kann man natürlich auch $\tilde{y}(x)$ in die Differentialgleichung einsetzen und zeigen, dass dies zu einer wahren Aussage führt.)

In d) wurde gezeigt, dass eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung existiert, jedoch wurden nun zwei (scheinbar) unterschiedliche Lösungen gefunden. Dies bedeutet, dass die beiden Lösungen äquivalent sein müssen,

$$A\cos(x) + B\sin(x) = C\exp(\mathrm{i}x) + D\exp(-\mathrm{i}x).$$

Somit müssen die trigonometrischen Funktionen eine Linearkombination der komplexen Exponentialfunktionen darstellen und umgekehrt. Sollte jemand daran zweifeln, empfiehlt sich die Präsenzaufgabe.

2. *Hausaufgabe:* Relativistische Energie

a) Die Taylor-Entwicklung einer Funktion $f(x)$ bis zur zweiten Ordnung um $x = 0$ ist

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2}f''(0)\,x^2.$$

Mit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{3}{4}\frac{1}{(1-x)^{5/2}}$$

ergibt sich

$$f(x) \approx 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2.$$

b) In der relativistischen Energie ist das x aus Aufgabenteil a) gerade v^2/c^2, sodass man für die Energie bis zur Ordnung v^4

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2}$$

erhält.

c) Die Näherung bis zur zweiten Ordnung in v entspricht der Energie der klassischen Mechanik, nämlich der Summe aus Ruheenergie und kinetischer Energie. Eine potentielle Energie tritt nicht auf, da es sich um ein freies Teilchen handelt.

Genau genommen kennt die klassische Mechanik die Ruheenergie noch nicht. Da diese jedoch keinerlei Dynamik enthält, beeinflusst dieser Term die Aussagen der Mechanik nicht.

d) Es gibt mehrere Möglichkeiten abzuschätzen, wann die Näherung der klassischen Mechanik nicht mehr gilt.

Die erste (schnelle und gebräuchliche, aber unsaubere) Möglichkeit besteht darin, die Größe des ersten vernachlässigten Terms (v^4-Term) gegenüber des höchsten berücksichtigten Terms (v^2-Term) abzuschätzen. Der Fehler, der durch Weglassen des v^4 Terms auftritt, erreicht das Prozent-Level, wenn

$$\frac{v^4 - \text{Term}}{v^2 - \text{Term}} = \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} \cdot \frac{2}{m_0 v^2} = \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} \overset{!}{=} 0{,}01,$$

und somit, wenn ein Teilchens sich mit etwa 10 % (genauer 11,5 %) der Lichtgeschwindigkeit bewegt. Die Ein-Prozent-Grenze ist zwar gebräuchlich, aber natürlich zunächst willkürlich gewählt. Betrachtet man Anwendungen, bei denen eine ein-prozentige Abweichung bereits eine Rolle spielt, muss man höhere Terme schon bei kleineren Geschwindigkeiten berücksichtigen.

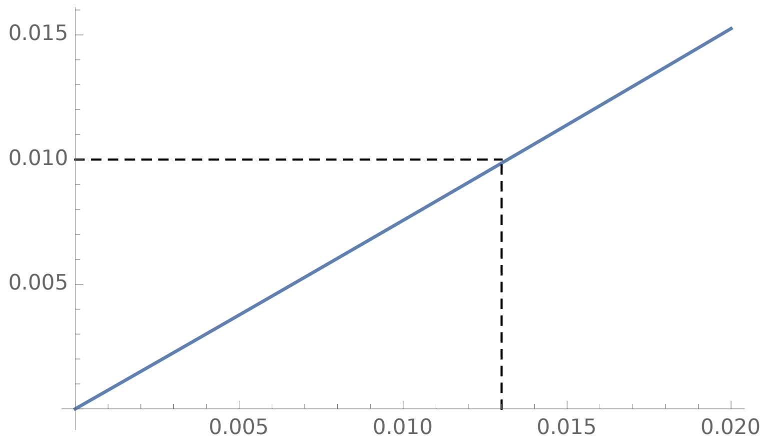
Die formalere Möglichkeit besteht darin, das Restglied der Taylor-Entwicklung zu berechnen. Nach der zweiten Ordnung in v und somit der ersten Ordnung in x ist dieses

$$\begin{aligned}
R_2(x) &= m_0 c^2 \int_0^x \mathrm{d}t\, (x-t)\, f''(t) = m_0 c^2 \cdot \frac{3}{4} \int_0^x \mathrm{d}t\, \frac{x-t}{(1-t)^{5/2}} \\
&= m_0 c^2 \left[\frac{3}{4} \int_0^x \mathrm{d}t\, \frac{x}{(1-t)^{5/2}} - \frac{3}{4} \int_0^x \mathrm{d}t\, \frac{t}{(1-t)^{5/2}} \right] \\
&= m_0 c^2 \left[\frac{1}{2} \frac{x}{(1-t)^{3/2}} \bigg|_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x \mathrm{d}t\, \frac{1}{(1-t)^{3/2}} - \frac{1}{2} \frac{t}{(1-t)^{3/2}} \bigg|_0^x \right] \\
&= m_0 c^2 \left[\frac{1}{2} \frac{x}{(1-t)^{3/2}} \bigg|_0^x + \frac{1}{(1-t)^{1/2}} \bigg|_0^x - \frac{1}{2} \frac{t}{(1-t)^{3/2}} \bigg|_0^x \right] \\
&= m_0 c^2 \left[\frac{1}{2} \frac{x}{(1-x)^{3/2}} - \frac{x}{2} + \frac{1}{(1-x)^{1/2}} - 1 - \frac{1}{2} \frac{x}{(1-x)^{3/2}} + 0 \right] \\
&= m_0 c^2 \frac{2 - (x+2)\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}.
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem kinetischen Term ergibt

$$\Delta(x) = \left| \frac{R_2(x)}{m_0 c^2 x/2} \right| = \frac{(x+2)\sqrt{1-x} - 2}{x\sqrt{1-x}}.$$

Diesen Ausdruck nach x aufzulösen wird schwierig, aber man kann die Funktion plotten und daraus ablesen, dass ein Fehler von einem Prozent ($\Delta(x) = 0{,}01$) etwa bei $x = v^2/c^2 = 0{,}013$ erreicht wird. Das entspricht einer Geschwindigkeit von 11,4 % der Lichtgeschwindigkeit, also $v = 0{,}114\, c$.



e) Die Positionsbestimmung über GPS-Satelliten muss relativistische Effekte berücksichtigen. Die Phänomene im Teilchenbeschleuniger CERN sind hochgradig relativistisch.

3. ***Präsenzaufgabe:*** **Taylor-Entwicklung wichtiger Funktionen**

Die Taylor-Expansionen für Sinus, Kosinus und die komplexe Exponentialfunktion sind

$$\begin{aligned}\sin(ax) &\approx \sin(0) + a\cos(0)\,x - \frac{1}{2}a^2\sin(0)\,x^2 - \frac{1}{3!}a^3\cos(0)\,x^3 + \frac{1}{4!}a^4\sin(0)\,x^4 \\ &\quad + \frac{1}{5!}a^5\cos(0)\,x^5 - \frac{1}{6!}a^6\sin(0)\,x^6 - \frac{1}{7!}a^7\cos(0)\,x^7 + \dots \\ &= ax - \frac{1}{3!}a^3x^3 + \frac{1}{5!}a^5x^5 - \frac{1}{7!}a^7x^7 + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(ax) &\approx \cos(0) - a\sin(0)\,x - \frac{1}{2}a^2\cos(0)\,x^2 + \frac{1}{3!}a^3\sin(0)\,x^3 + \frac{1}{4!}a^4\cos(0)\,x^4 \\ &\quad - \frac{1}{5!}a^5\sin(0)\,x^5 - \frac{1}{6!}a^6\cos(0)\,x^6 + \frac{1}{7!}a^7\sin(0)\,x^7 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{4!}a^4x^4 - \frac{1}{6!}a^6x^6 + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}ax) &\approx 1 + \mathrm{i}ax + \frac{1}{2}(\mathrm{i}a)^2x^2 + \frac{1}{3!}(\mathrm{i}a)^3x^3 + \frac{1}{4!}(\mathrm{i}a)^4x^4 + \dots \\ &= 1 + \mathrm{i}ax - \frac{1}{2}(ax)^2 - \frac{\mathrm{i}}{3!}(ax)^3 + \frac{1}{4!}(ax)^4 + \dots.\end{aligned}$$

Am einfachsten ist das „Muster“ bei der Exponentialfunktion zu erkennen,

$$\exp(\mathrm{i}ax) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}ax)^n}{n!}.$$

Sinus und Kosinus enthalten jeweils nur die ungeraden bzw. geraden Potenzen, wobei das alternierende Vorzeichen mit Hilfe eines Faktors $(-1)^n$ dargetellt werden kann,

$$\sin(ax) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(ax) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(ax)^{2n}}{(2n)!}.$$

Vergleicht man die Expansion der drei Terme miteinander, so fällt auf, dass jeder zweite Term der Exponentialfunktion einer der Kosinus-Terme ist. Die verbleibenden Terme sind die Sinus-Terme multipliziert mit der imaginären Einheit. Somit gilt

$$\exp(\mathrm{i}ax) = \cos(ax) + \mathrm{i}\sin(ax).$$

4. Verständnisfragen

a) Anschaulich bedeutet die Lipschitz-Bedingung, dass man durch endliche Schritte entlang des Richtungsfeldes einer Differentialgleichung 1. Ordnung immer nur endlich weit kommt, also keine unendlichen Sprünge machen kann. Für physikalische Vorgänge, die fast immer durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit beschrieben werden, bedeutet dies, dass eine eindeutige Lösung der Bewegungsgleichung in der Nähe einer bestimmten Zeit immer angegeben werden kann, wenn die Bewegung im Endlichen und mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt und die auftretenden Kräfte stetig sind und sich nicht beliebig schnell ändern.

b) Der Taylor'sche Satz besagt, dass eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ als

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + R_{n+1}(x)$$

mit dem Lagrange'schen Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x \mathrm{d}t \, (x-t)^n \, f^{(n+1)}(t)$$

dargestellt werden kann. Fast jede genügend oft stetig differenzierbare Funktion kann somit um einen Punkt a durch eine Summe von Polynomen wachsender Ordnung angenähert werden. Die Ordnung, bis zu der entwickelt wird, bestimmt dabei die Genauigkeit der Näherung in der Nähe von a.

Sehr häufig lassen sich in physikalischen Systemen Längen-, Energie-, Zeit- oder andere Skalen einführen, denen gegenüber kleine Abweichungen untersucht werden können. Diese Skalentrennung erlaubt es oft mit großem Gewinn, kontrollierte Näherungsverfahren zu verwenden. Ein sehr wichtiges solches Näherungsverfahren wird durch den Taylor'schen Satz angegeben, der zeigt, wie und mit welchem Fehler eine genügend oft differenzierbare Funktion als Potenzreihe dargestellt werden kann.

c) In der Mathematik sind Vektoren Objekte, die man addieren, strecken oder stauchen kann, ohne dass sie ihre Vektoreigenschaft verlieren. Präzise definiert wird dies durch die Eigenschaften eines Vektorraums. So ist ein Vektorraum eine Menge von Objekten (die Vektoren), für die eine Addition definiert ist, die zwei Vektoren zu einem neuen Vektor verknüpft. Außerdem ist für Vektoren eine Multiplikation mit den Elementen eines Körpers definiert, die wiederum einen Vektor ergibt. Obige Addition und Multiplikation gehorchen linearen Rechenregeln.