Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 4

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 4. Dezember

Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Darauf operiert $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und insbesondere auch die Modulgruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ durch Möbius-Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \langle \tau \rangle = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \ .$$

Die besten vier Aufgaben werden gewertet.

14. Aufgabe: (2+2=4 Punkte, 2 Bonuspunkte) Für eine natürliche Zahl $N \geq 1$ definieren wir $\Gamma(N) = \{M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \mid M \equiv E_2 \pmod N\}$. Zeigen Sie:

(a) $\Gamma(N)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

(b) $\Gamma(N)$ ist ein Normalteiler in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

(c) (Bonusaufgabe) Der Quotient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Gamma(N)$ ist isomorph zur Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

Lösung: Sei $p : \Gamma \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ die Abbildung, die jeden Matrixeintrag auf die zugehörige Restklasse modulo N abbildet. Dann prüft man elementar nach, dass p ein Gruppenhomomorphismus ist. Damit ist $\Gamma[N] = \ker(\varphi)$ eine Untergruppe und ein Normalteiler. Für die Bonusaufgabe genügt es zu zeigen, dass p surjektiv ist. Den Beweis dazu finden Sie in Kapitel 9.10 im Skript.

15. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ der Fundamentalbereich wie in der Vorlesung definiert. Seien $\tau \in \mathcal{F}$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in der Modulgruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sodass

$$\operatorname{Im}(M\langle \tau \rangle) \geq \operatorname{Im}(\tau) \ .$$

Zeigen Sie für die folgenden beiden Fälle

(a) $|c| = |d| = 1$,

(b) $|c| = 1$ und $d = 0$.

die Aussage: Falls $\tau' := M\langle \tau \rangle \in \mathcal{F}$, dann gilt $\tau' = \tau$. Bestimmen Sie jeweils M und τ.

Lösung: Nach Annahme gilt $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ und $\operatorname{Im}(\tau') = \frac{\operatorname{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2} \geq \operatorname{Im}(\tau)$, also $|c\tau+d|^2 = c^2\operatorname{Im}(\tau)^2 + (c\operatorname{Re}(\tau)+d)^2 \leq 1$.

(a) Für $c, d \in \{\pm 1\}$ gilt:
   (1) $|c\operatorname{Re}(\tau) + d| \geq 1/2$ nach umgekehrter Dreiecksungleichung, weil $|\operatorname{Re}(\tau)| \leq 1/2$ und $c, d = \pm 1$.
   (2) $|c\operatorname{Im}(\tau)| \geq \sqrt{3}/2$, weil $\tau \in \mathcal{F}$.

Damit folgt $|c\tau+d| \geq 1$. Wegen der obigen Abschätzung folgt Gleichheit, also $|c\tau+d| = 1$. Damit ist $\mathrm{Im}(\tau) = \sqrt{3}/2$. Wegen $|c\tau + d| = 1$ ist der Imaginärteil von τ' gleich dem von τ, also gleich $\sqrt{3}/2$. Es gibt aber nur einen Punkt in $\mathcal{F}$ mit diesem Imaginärteil, und zwar $\tau = \tau' = \rho - 1$. Außerdem gilt $|c\mathrm{Re}(\tau) + d| = 1/2$ und damit

$$\tau = \tau' = \rho^2 = \rho - 1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad , \qquad c = d \ .$$

Die gesuchten Werte für a, b sind die Lösungen der Gleichung $a\tau + b = c\tau^2 + d\tau = -c$. Damit folgt $a = 0$ aufgrund des Imaginärteils und $-b = c = d$. Also $M = \pm\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Für $d = 0$ und $c = \pm 1$ gilt $|c\tau+d| \leq 1$, also $|\tau| \leq 1$. Nach Annahme ist τ im Fundamentalbereich, damit folgt $|\tau| = 1$. Insbesondere gilt $\mathrm{Im}(\tau) = \mathrm{Im}(\tau')$. Die Determinantenbedingung $ad - bc = 1$ liefert $b = -c = \mp 1$. Also ist $M = \left(\begin{smallmatrix} a & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & a \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Daraus folgt $\mathrm{Re}(\tau') = \mathrm{Re}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\tau) \pm a = -\mathrm{Re}(\tau) \pm a$ und dieser Term liegt im Intervall $[-1/2, 1/2)$. Nach Definition des Fundamentalbereichs ist das nur möglich für den Fall $\tau = i$ und $a = 0$ und für den Fall $\tau = \rho^2$ und $a = \mp 1$. Es gibt also zwei Lösungen:

(1) $\tau = i$ und $M = \pm\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(2) $\tau = \rho^2 = \rho - 1$ und $M = \pm\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

In beiden Fällen prüft man sofort nach dass $\tau = \tau'$.

16. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Zeigen Sie: Es gilt $M\langle z\rangle = z$ für exakt ein $z \in \mathbb{H}$ genau dann, wenn $|\mathrm{Spur}(M)| < 2$.

Lösung: Nach Definition der Möbiustransformation erfüllt jeder Fixpunkt die Gleichung

$$cz^2 + (-a + d)z - b = 0 \ .$$

Wenn $c = 0$, dann ist $a = d = \pm 1$ wegen der Determinantenbedingung. Entweder ist $b = 0$ und jeder Punkt der oberen Halbebene ist Fixpunkt oder $b \neq 0$ und es gibt keine Fixpunkte. Die Bedingung an die Spur ist in beiden Fällen nicht erfüllt weil $|\mathrm{Spur}| = |a + d| = 2$. Im Folgenden nehmen wir an $c \neq 0$. Nach Mitternachtsformel gilt dann

$$z = \frac{1}{2c}\left((d - a) \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}\right) \ .$$

Dieser Ausdruck hat genau dann exakt ein z in der oberen Halbebene, wenn der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist. Also genau dann wenn

$$0 > (d - a)^2 + 4bc = a^2 + d^2 - 2ad + 4bc = a^2 + d^2 + 2ad - 4 = (a + d)^2 - 4 \ .$$

Dies ist äquivalent zu $|a + d| < 2$.

17. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl und $(\tau_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{H}$, deren Imaginärteil gegen Unendlich konvergiert. Dann gibt es ein $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ mit

$$\lim_{n\to\infty} M\tau_n = q \ .$$

Hinweis: Aus der elementaren Zahlentheorie können Sie benutzen: "Zwei ganze Zahlen a, b sind teilerfremd genau dann wenn es ganze Zahlen r, s gibt mit $ra + sb = 1$."

Lösung: Sei $q = \frac{a}{c}$ die gegebene rationale Zahl. Wir können annehmen, dass (a, c) ein Paar teilerfremder ganzer Zahlen ist mit $c > 0$. Nach dem Hinweis gibt es r und s mit $ra + cs = 1$. Für $b = -s$ und $d = r$ gilt $ad - bc = 1$. Die Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ erfüllt die Voraussetzungen: Es bleibt die Konvergenz zu prüfen für $M\langle\tau_n\rangle = \frac{a\tau_n + b}{c\tau_n + d} = \frac{a + b\tau_n^{-1}}{c + d\tau_n^{-1}}$. Nach Annahme konvergiert der Imaginärteil von τ_n gegen Unendlich, damit wächst $|\tau_n|$ gegen Unendlich, also konvergiert τ_n^{-1} gegen Null. Damit konvergieren Zähler und Nenner:

$$\lim_{n\to\infty} M\langle\tau_n\rangle = \frac{\lim_{n\to\infty} a + b\tau_n^{-1}}{\lim_{n\to\infty} c + d\tau_n^{-1}} = \frac{a}{c} = q\ .$$

Dies war zu zeigen.

18. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $\wp_\Gamma$ die Weierstraß-$\wp$-Funktion zum Gitter $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$. Seien $e_1(\tau) = \wp_\Gamma(1/2)$ und $e_2(\tau) = \wp_\Gamma(\tau/2)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\tau\to\ i\infty} e_1(\tau) \neq \lim_{\tau\to\ i\infty} e_2(\tau)$$

.

Lösung: Die Reihenentwicklung

$$e_1(\tau) = \frac{1}{(1/2)^2} + \sum_{0\neq(a,b)\in\mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{(1/2 - a - b\tau)^2} - \frac{1}{(a + b\tau)^2} \right)$$

konvergiert kompakt. Damit können wir den Limes $\tau \to i\infty$ termweise bilden. Für $b \neq 0$ gehen die Terme unter der Summe jeweils gegen Null. Wir betrachten also nur die verbleibenden Ausdrücke

$$\lim_{\tau\to i\infty} e_1(\tau) = \frac{1}{(1/2)^2} + \sum_{0\neq a\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(1/2 - a)^2} - \frac{1}{a^2} \right)\ .$$

Die Brüche unter der Summe sind jeweils für sich über a summierbar und wir erhalten

$$\lim_{\tau\to i\infty} e_1(\tau) = \sum_{a\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\frac{1}{2} - a)^2} - 2\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2}\ .$$

Mit dem entsprechenden Argument zeigen wir für

$$e_2(\tau) = \frac{1}{(\tau/2)^2} + \sum_{0\neq(a,b)\in\mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{(\tau/2 - a - b\tau)^2} - \frac{1}{(a + b\tau)^2} \right)$$

den Grenzwert

$$\lim_{\tau\to i\infty} e_2(\tau) = \lim_{\tau\to i\infty} \frac{1}{(\tau/2)^2} + \sum_{0\neq(a,b)\in\mathbb{Z}^2} \lim_{\tau\to i\infty} \left(\frac{1}{(\tau/2 - a - b\tau)^2} - \frac{1}{(a + b\tau)^2} \right)$$

$$= 0 + \sum_{0\neq(a,b)\in\mathbb{Z}^2} \lim_{\tau\to i\infty} \left(\frac{1}{(\tau/2 - a - b\tau)^2} - \lim_{\tau\to i\infty} \frac{1}{(a + b\tau)^2} \right) = -2\sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^2}\ .$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\sum_{a\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\frac{1}{2} - a)^2}$ nicht gegen Null konvergiert. Das ist aber klar, weil jeder Summand positiv ist.