

Die Riemannsche Zeta-Funktion

Josua Kugler

03.11.2020

Definition (Riemannsche ζ -Funktion)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Lemma (Konvergenzgebiet)

$\zeta(s)$ konvergiert normal auf der offenen Halbebene $\operatorname{Re} s > 1$.

Beweis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}}.$$



Lemma (Eulerprodukt)

Die Riemannsche ζ -Funktion lässt sich als absolut konvergentes unendliches Produkt schreiben:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Insbesondere gilt also $\zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re} s > 1$.

Beweis.

$$\frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$



Beweis.

$$\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$



Beweis.

$$\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} = \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_m^s} + \frac{1}{p_m^{2s}} \dots\right)$$



Beweis.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\ &= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s}\end{aligned}$$



Beweis.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\ &= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s} \\ &= \sum_{n=p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}\end{aligned}$$



Beweis.

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}
 \end{aligned}$$



Beweis.

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}
 \end{aligned}$$



Beweis.

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s} \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s} \\
 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}
 \end{aligned}$$



Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \sum_{m=0}^{\infty} p_k^{-ms} \right|$$



Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \sum_{m=0}^{\infty} p_k^{-ms} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |p_k^{-ms}| \end{aligned}$$



Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \sum_{m=0}^{\infty} p_k^{-ms} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |p_k^{-ms}| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| \end{aligned}$$



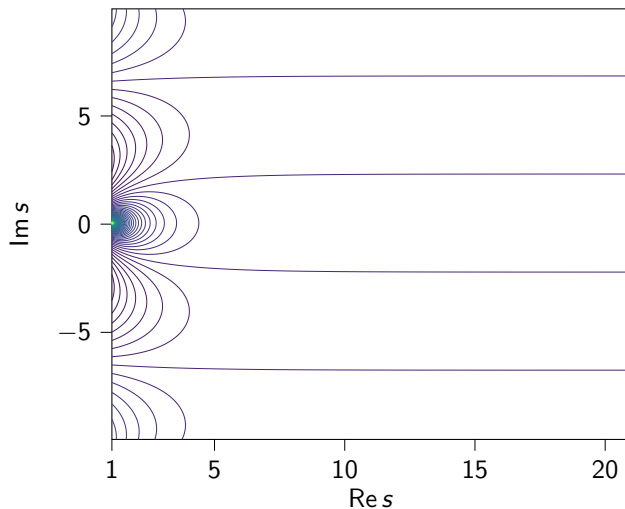


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Betrag.

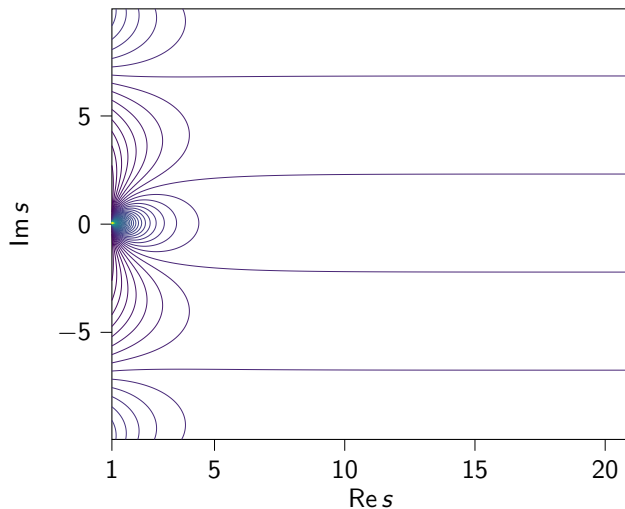


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Realteil.

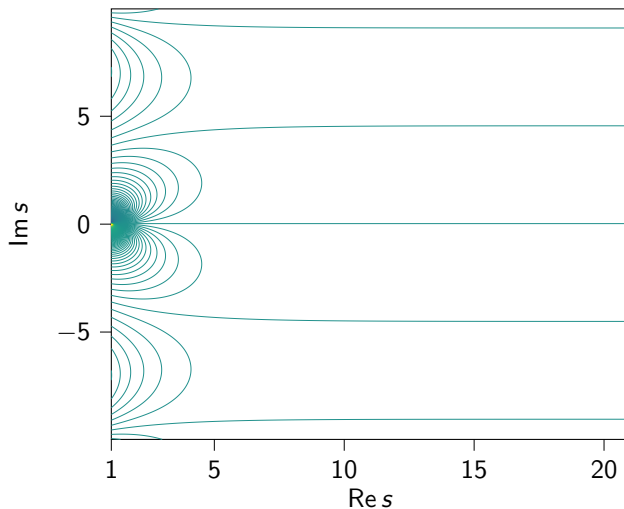


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Imaginärteil.

Definition (θ -Funktion)

Die Thetafunktion ist gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}.$$

Definition (θ -Funktion)

Die Thetafunktion ist gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}.$$

- konvergiert für $\operatorname{Im} z > 0$ (Majorantenkriterium)

Definition (θ -Funktion)

Die Thetafunktion ist gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}.$$

- konvergiert für $\operatorname{Im} z > 0$ (Majorantenkriterium)
- erfüllt die Thetatransformationsformel ($\sqrt{\cdot}$ bezeichne den Zweig mit positivem Realteil):

$$\begin{aligned}\theta(z) &= \theta\left(-\frac{1}{z}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{z}} \\ \Leftrightarrow \theta(it) &= \theta\left(-\frac{1}{it}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{it}} = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Lemma

Die Funktion

$$R_{\infty}(s) := \int_1^{\infty} \frac{\theta(it) - 1}{2} t^s \frac{dt}{t} = \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t}$$

ist ganz.

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t (n^2-1)} \leq B(t) \leq B(1) =: B.$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq B e^{-\pi t}$.

Daraus folgt

$$\int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t} \leq B \cdot \int_1^{\infty} e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{dt}{t^2} \leq B \cdot C \cdot \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}.$$



Theorem

Die Riemannsche ζ -Funktion besitzt eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, wobei an der Stelle 1 eine einfache Polstelle vorliegt. Außerdem genügt

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} \quad | t \mapsto \pi n^2 t$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} && | t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{dt}{t} && | \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s}\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} && | t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{dt}{t} && | \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\ \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t} && \left| \sum_{n=1}^\infty, s \mapsto s/2 \right.\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} && | t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{dt}{t} && | \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\ \sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t} && \left| \sum_{n=1}^\infty, s \mapsto s/2 \right.\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} & | t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{dt}{t} & | \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t} & \left| \sum_{n=1}^{\infty}, s \mapsto s/2 \right. \\ \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} && | t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{dt}{t} && | \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\ \sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t} && \left| \sum_{n=1}^\infty, s \mapsto s/2 \right. \\ \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

Beweis.

Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\operatorname{Re} s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \pi^{-\operatorname{Re} s/2} \Gamma(\operatorname{Re} s/2) \zeta(\operatorname{Re} s) \\ &< \infty\end{aligned}$$

gilt nach dem Satz von Fubini/Tonelli für absolut konvergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}.$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}}_{R_0(s)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}}_{R_\infty(s)}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}}_{R_0(s)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}}_{R_\infty(s)} \\ &= R_0(s) + R_\infty(s)\end{aligned}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

$$\left| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right.$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

$$\left| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left| u = \frac{1}{t}, \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \right.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} & \left| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &= - \int_1^0 \frac{\theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} & \left| u = \frac{1}{t}, \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \right. \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} & \Big| \theta(it) &= \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\ &= - \int_1^0 \frac{\theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{dt}{t^2} & \Big| u &= \frac{1}{t}, \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} & \left| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &= - \int_1^0 \frac{\theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{dt}{t^2} & \left| u = \frac{1}{t}, \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \right. \\ &= \int_1^\infty \frac{\theta(iu) \cdot u^{\frac{1}{2}} - 1}{2} u^{-s/2-1} du \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} & \left| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &= - \int_1^0 \frac{\theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{dt}{t^2} & \left| u = \frac{1}{t}, \, du = \frac{-1}{t^2} dt \right. \\ &= \int_1^\infty \frac{\theta(iu) \cdot u^{\frac{1}{2}} - 1}{2} u^{-s/2-1} du \\ &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot t^{-s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \frac{1}{2} \frac{2}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{2} \frac{2}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \frac{1}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \frac{1}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty \\ &= R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_{\infty}(s) + R_0(s)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\ &= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\ &= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \\ \zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right)\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\ &= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \\ \zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right)\end{aligned}$$

- R_∞ und Γ sind ganz

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\ &= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \\ \zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right)\end{aligned}$$

- R_∞ und Γ sind ganz
- Γ besitzt keine Nullstellen

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\ &= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \\ \zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right)\end{aligned}$$

- R_∞ und Γ sind ganz
- Γ besitzt keine Nullstellen

⇒ Einzige Singularitäten bei $s = 1$ und $s = 0$. Für $s = 0$ gilt:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s \cdot \Gamma(s/2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2\Gamma(s/2 + 1)} = \frac{1}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}$$

Ergebnis

- Für $\operatorname{Re} s > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right).$$

- Damit ist eine analytische Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ gefunden, wobei an der Stelle $s = 1$ eine einfache Polstelle vorliegt.
- Aus der Gleichung

$$\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

erkennt man sofort die geforderte Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

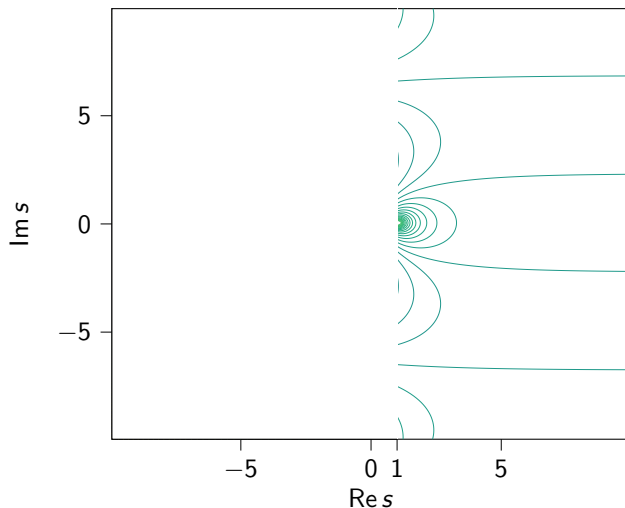


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Betrag

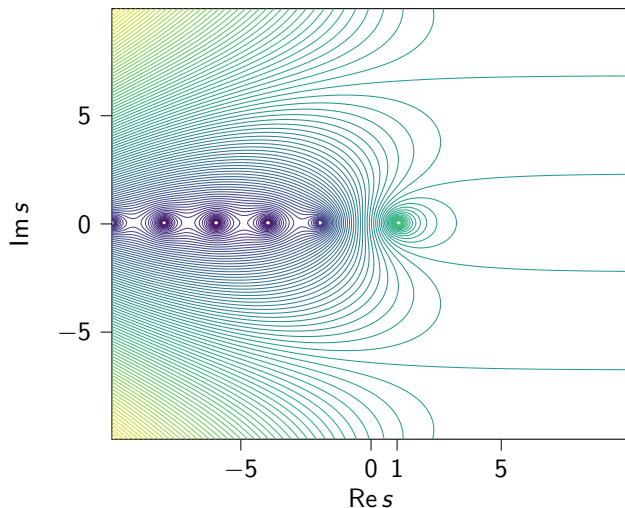


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Betrag

Vermutung (Riemannsche Hypothese)

Abgesehen von den „trivialen“ Nullstellen bei $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}$ haben alle Nullstellen Realteil $\frac{1}{2}$.

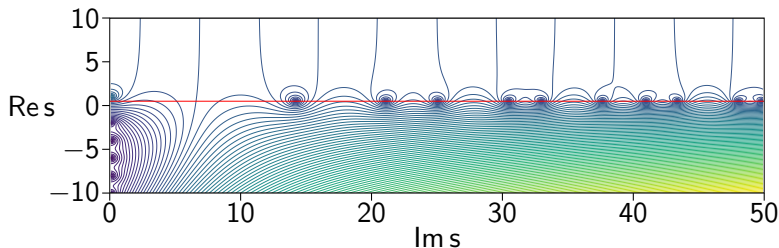
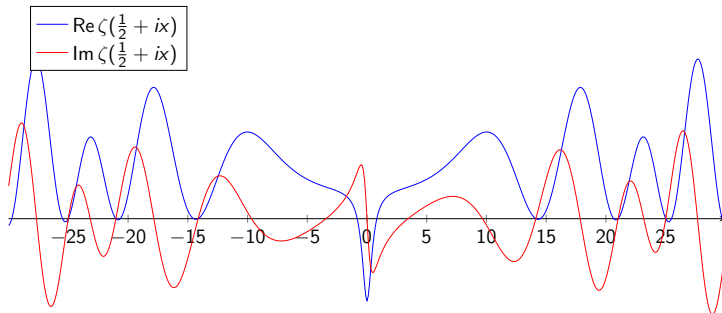


Abbildung: Absolutbetrag der ζ -Funktion bei $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ von $\operatorname{Im} s = 0$ bis $\operatorname{Im} s = 50$

Vermutung (Riemannsche Hypothese)

Abgesehen von den „trivialen“ Nullstellen bei $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}$ haben alle Nullstellen Realteil $\frac{1}{2}$.



Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

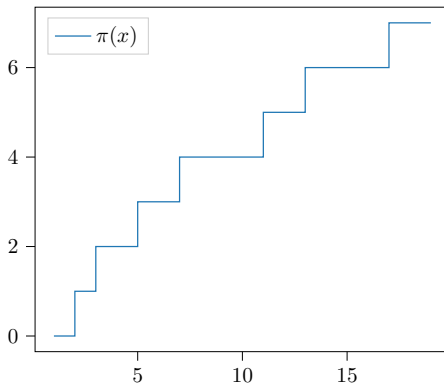


Abbildung: $\pi(x)$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

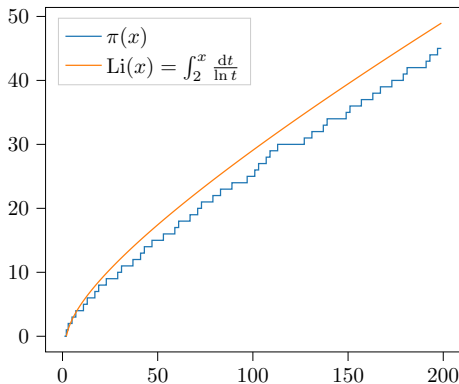


Abbildung: Eine Annäherung für $\pi(x)$.

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

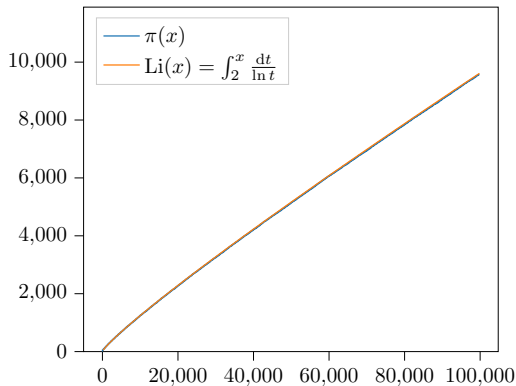


Abbildung: Eine Annäherung für $\pi(x)$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

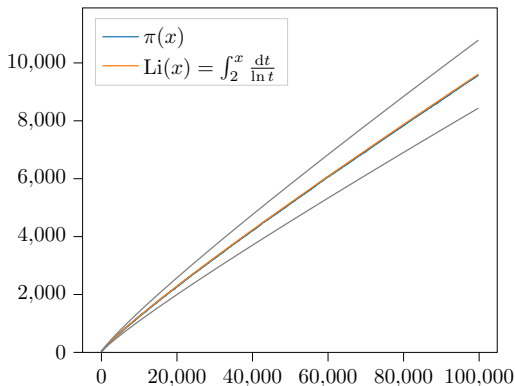


Abbildung: $|\pi(x) - \text{Li}(x)| \leq 0.2795 \frac{x}{(\log x)^{3/4}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\log x}{6.455}}\right) \forall x \geq 229$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

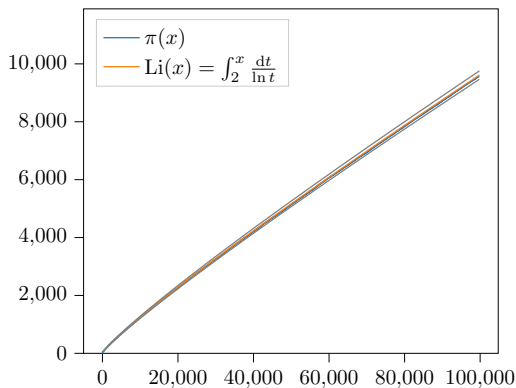


Abbildung: $|\pi(x) - \text{Li}(x)| < \frac{\sqrt{x} \log(x)}{8\pi} \forall x \geq 2657$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

Lemma

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d < e^{\gamma} n \log \log n + \frac{0.6483 n}{\log \log n}$$

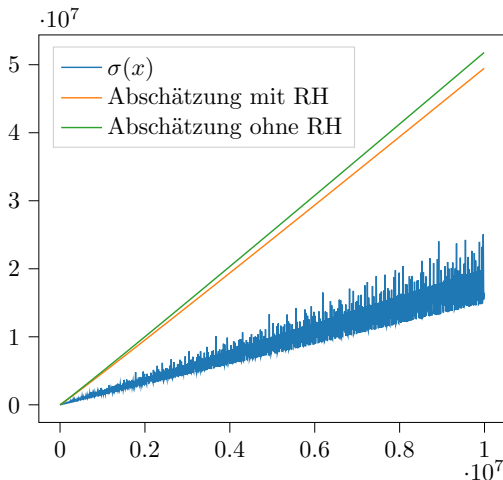
Theorem (Robin, 1984)

Die Abschätzung

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log \log n$$

ist äquivalent zur Riemannschen Hypothese.

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese



Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

Definition

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & n \text{ ist quadratfrei und hat } k \text{ Primfaktoren} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma

Es gilt

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

für $\operatorname{Re} s > 1$ mit

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

Beweis.

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$



Theorem

Die Gleichung

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ ist äquivalent zur Riemannschen Hypothese.

Literaturverzeichnis



J. Neukirch.

Algebraische Zahlentheorie.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.



E. Freitag., R. Busam

Funktionentheorie 1.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.



T. Trudgian

Updating the error term in the prime number theorem.

Ramanujan Journal. 39 (2):225-234.