INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR
ANGEWANDTE
MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 5 22. Mai 2020

Abgabe bis Fr. 29.05.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei: *Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf*. Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf*. Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.
- Die ersten beiden Aufgaben sind aus dem Skript von Prof. Rannacher. Da es (zum Zeitpunkt der Erstellung des Übungsblattes) noch keine abgesprochene Regelung gibt, um denjenigen von Euch, die sich auf Nachklausuren vorbereiten müssen, Zeit für die Vorbereitung zu verschaffen, möchten wir Euch auf diesem Wege die Möglichkeit geben, auf diesem Blatt ohne großen Aufwand 50% der Punkte zu erreichen. Bitte formuliert die Lösungen aber zumindest um, da wortgleiche Abgaben weiterhin mit 0 Punkten bewertet werden können! Außerdem appellieren wir natürlich an Euch, Euch dennoch sobald wie möglich mit den Inhalten auseinanderzusetzen. Dies gilt natürlich insbesondere für alle, die sich nicht auf Nachklausuren vorbereiten müssen! Probiert die Aufgaben ruhig zunächst ohne die Lösung zu konsultieren :)

Themen:

- Matrixnormen
- Mengen von Matrizen
- Stetige Funktionen
- Stetigkeit auf Funktionenräumen

Aufgabe 5.1 (6 Punkte): Matrixnormen

(a) Man zeige, dass für jede Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum $\mathbb{K}^n$ die durch

$$\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Ax\|, \quad A \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

von der Vektornorm $\|\cdot\|$ erzeugte "natürliche Matrixnorm" auf $\mathbb{K}^{n\times n}$ tatsächlich die Normeigenschaften erfüllt. $\boxed{2}$

(b) Man zeige, dass für die von der Vektornorm $\|\cdot\|$ erzeugte "natürliche Matrixnorm"

$$\|A\| := \sup_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Ax\|$$

gilt, dass

$$\|A\| = \max_{\substack{x\in\mathbb{K}^n\\ \|x\|=1}} \|Ax\|.$$ $\boxed{2}$

(c) Man zeige, dass die "Frobenius-Norm" auf $\mathbb{K}^{n\times n}$, die durch

$$\|A\|_{\mathrm{F}} := \left(\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}^2|\right)^{\frac{1}{2}}$$

definiert ist, mit der euklidischen Vektornorm verträglich und submultiplikativ ist. 2

Aufgabe 5.2 (6 Punkte): Mengen von Matrizen

(a) Man zeige, dass die Menge M der regulären Matrizen in $\mathbb{K}^{n\times n}$,

$$M := \left\{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \middle| A \text{ regulär}\right\} \subset \mathbb{K}^{n\times n},$$

bzgl. jeder Matrixnorm offen ist. 3

(b) Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist auf ihrer "Resolventenmenge"

$$\operatorname{Res}(A) := \left\{z \in \mathbb{C} \middle| A - zI \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ regulär}\right\} \subset \mathbb{C}$$

die "Resolvente"

$$R(z) := (A - zI)^{-1}$$

definiert. Als Komplement des Spektrums $\sigma(A)$ ist die Resolventenmenge offen. Man zeige, dass die Resolventenabbildung $R : \operatorname{Res}(A) \subset \mathbb{C} \to M \subset \mathbb{K}^{n\times n}$ auf $\operatorname{Res}(A)$ stetig ist. 3

Aufgabe 5.3 (3 Punkte): Stetige Abbildungen und die Niveaumenge

Sei $\mathbb{K}^n$ ein Vektorraum, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, $c \in \mathbb{R}$ und

$$M := \{x \in \mathbb{K}^n | f(x) = c\}.$$

Man zeige, dass M abgeschlossen ist und entscheide, ob M auch immer kompakt ist.
Bemerkung: Die Menge M wird auch Niveaumenge von f zum Wert c genannt.

Aufgabe 5.4 (5 Punkte): Stetigkeit auf Funktionenräumen

Auf dem Vektorraum $C([0,\pi])$ aller stetigen Funktionen $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, sei die Abbildung

$$S : C([0,\pi]) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto S(f) := \int_0^\pi \cos(f(x))\mathrm{d}x$$

definiert. Man zeige, dass S stetig ist.
Hinweis: Man überlege sich zunächst genau, was Stetigkeit von S bedeutet und was somit zu zeigen ist. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann dann im Weiteren hilfreich sein.