Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 3

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 03. - 07. Mai 2021
Bitte geben Sie maximal 2 Aufgaben per Übungsgruppensystem zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!
Nutzen Sie dazu den Link `https://uebungen.physik.uni-heidelberg.de/h/1291`

1. *Verständnisfragen*

a) Was besagt die Bell'sche Ungleichung? Was versteht man unter den Prinzipien der Lokalität und Realität?

b) Erläutern Sie die Axiome der Kopenhagener Interpretation.

c) Erklären Sie den Unterschied zwischen reinen und gemischten Zuständen.

2. *Zwei-Zustand-System*

Wir betrachten ein System mit einem diskreten Freiheitsgrad, d.h. die möglichen Zustände können durch Zustandsvektoren in $\mathbb{C}^2$ beschrieben werden. Ein Beispiel für ein solches System ist ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, das Sie in Kapitel 10 des Vorlesungsskripts diskutieren werden. (Der Inhalt des Kapitels 10 ist nicht notwendig für diese Aufgabe!) Eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$ ist gegeben durch

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das System sei beschrieben durch $|\psi\rangle = a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Die Dynamik des Systems sei durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\frac{\mu B}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}\sqrt{3} \\ \mathrm{i}\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Pauli-Matrizen haben Sie bereits auf dem Übungsblatt 1 kennengelernt. Sie sind gegeben durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{H}, \hat{\sigma}_1]$. Was bedeutet es, dass der Kommutator nicht verschwindet?*

b) Bestimmen Sie jeweils die Eigenwerte und Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{\sigma}_1$.

c) Geben Sie die Zeitentwicklung der Eigenzustände des Hamilton-Operators an.

d) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Eigenzustand zum positiven Eigenwert von σ_1. In welchem Zustand ist das System zum Zeitpunkt $t = T > 0$ und welchen Erwartungswert hat dann $\hat{\sigma}_1$? Warum kann der Erwartungswert von σ_1 nicht konstant sein?

---

* *Hinweis:* Drücken Sie den Hamilton-Operator durch die Pauli-Matrizen aus.

3. Translationsoperator

Wir wollen einen Operator formulieren, der es uns ermöglicht, räumliche Translationen auszuführen. Es sei $\psi(x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$ eine unendlich oft differenzierbare Wellenfunktion.

a) Lesen Sie aus einer Taylor-Näherung 1. Ordnung einen Operator für eine räumliche Verschiebung um einen infinitesimalen Betrag $\mathrm{d}L$ ab.

b) Wie können Sie daraus eine Verschiebung um eine endliche Strecke L konstruieren?

c) Bilden Sie den Grenzfall, dass die Strecke L in beliebig viele Teilstücke $\mathrm{d}L$ unterteilt wird.

d) Welchen Zusammenhang mit dem Impulsoperator in Ortsdarstellung erkennen Sie?

e) Bilden Sie den Kommutator dieses Translationsoperators mit dem Hamilton-Operator eines freien Teilchens $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ in Ortsdarstellung. Was schließen Sie aus dem Ergebnis?

4. Spinalgebra im Produktraum

Gegeben sei ein System aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. (Näheres zum Spin in Kapitel 10 des Vorlesungsskripts; der Inhalt ist jedoch *nicht* notwendig für diese Aufgabe!) Der Zustandsraum dieses Systems ist der Produktraum der Hilberträume der einzelnen Teilchen, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Der Operator des Gesamtspins sei $\hat{\vec{\Sigma}}$, seine Komponenten sind gegeben durch

$$\hat{\Sigma}_i = \hat{S}_i \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{S}_i,$$

wobei $\hat{S}_i = (\hbar/2)\,\sigma_i$, σ_i die i-te Pauli-Matrix und $\hat{I}$ der Einheitsoperator ist.

a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen wie folgt auf die beiden möglichen Spinzustände

$$|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

wirken,

$$\begin{aligned} \sigma_1\,|\uparrow\rangle &= |\downarrow\rangle\,, & \qquad \sigma_1\,|\downarrow\rangle &= |\uparrow\rangle\,,\\ \sigma_2\,|\uparrow\rangle &= \mathrm{i}\,|\downarrow\rangle\,, & \sigma_2\,|\downarrow\rangle &= -\mathrm{i}\,|\uparrow\rangle\,,\\ \sigma_3\,|\uparrow\rangle &= |\uparrow\rangle\,, & \sigma_3\,|\downarrow\rangle &= -\,|\downarrow\rangle\,. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\vec{\Sigma}}^2 = \hat{\vec{S}}^2 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{\vec{S}}^2 + 2\sum_{i=1}^{3} \hat{S}_i \otimes \hat{S}_i.$$

c) Berechnen Sie die Wirkung der Operatoren $\hat{\Sigma}_3$ und $\hat{\vec{\Sigma}}^2$ auf folgende Zustände,

(i) $|\uparrow\uparrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$,

(ii) $|\downarrow\downarrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$,

(iii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\Big) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\Big)$,

(iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\Big) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\Big)$.