Aufgabe 1

1. Es gilt

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_jx_k - \sum_{j=1}^{n} b_jx_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i} a_{jk}x_jx_k + \frac{1}{2}\sum_{k\neq i} a_{ik}x_ix_k + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} a_{ji}x_jx_i + \frac{1}{2}a_{ii}x_i^2 - \sum_{j\neq i} b_jx_j - b_ix_i \\
\frac{\partial F}{\partial x_i} &= \frac{1}{2}\sum_{k\neq i} a_{ik}x_k + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} a_{ji}x_j + a_{ii}x_i - b_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k\neq i} a_{ik}x_k + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j + a_{ii}x_i - b_i \\
&= \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j + a_{ii}x_i - b_i \\
&= (Ax-b)_i
\end{aligned}
$$

   Also ist $\nabla F(x) = Ax - b$.

2. Die Rückrichtung ist mit Teilaufgabe 1. offensichtlich. Für die Hinrichtung müssen wir zunächst die Hesse-Matrix berechnen.

$$
\partial_i\partial_j F(x) = \partial_i\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k - b_j\right) = a_{ji}
$$

   Also ist $H_F(x) = A^T$ und damit für alle x positiv definit. Da A positiv definit ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $Ax - b$. Diese ist dann wegen der positiven Definitheit der Hesse-Matrix auch ein Minimum.

3. Es muss gelten

$$
\begin{aligned}
0 = g'(\alpha) \qquad & = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F(x+\alpha\cdot p)}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial (x+\alpha\cdot p)_k}{\partial\alpha} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F(x+\alpha p)}{\partial x_k}\cdot p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (A(x+\alpha p)-b)_k\cdot p_k \\
&= (A(x+\alpha p)-b,p)_2 \\
&= (Ax-b+\alpha Ap,p)_2 \\
&= (Ax-b,p)_2 + \alpha(Ap,p)_2 \\
(b-Ax,p)_2 &= \alpha(Ap,p)_2 \\
\alpha &= \frac{(b-Ax,p)_2}{(Ap,p)_2}
\end{aligned}
$$

   Nun müssen wir noch überprüfen, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt. Dafür berechnen wir die zweite Ableitung von g.

$$\begin{aligned} g''(\alpha) &= \frac{\partial (Ax-b,p)_2 + \alpha(Ap,p)_2}{\partial \alpha} \\ &= (Ap,p)_2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung größer 0 ist, handelt es sich um ein lokales Minum.

Aufgabe 2

1. (a) Für $\sigma = \frac{1}{a}$ erhalten wir

$$g(x) = x - \frac{1}{a}f(x) = x - \frac{x^2}{a} + 1.$$

Wir berechnen zunächst lokale Extrema:

$$\begin{aligned} 0 &= g'(x) \\ &= 1 - 2\frac{x}{a} \\ \frac{x}{a} &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{a}{2} \\ g(x) &= g(\frac{a}{2}) \\ &= \frac{a}{4} + 1 \end{aligned}$$

Nun berechnen wir noch die Randwerte $g(0) = 1$ und $g(a) = a - \frac{a^2}{a} + 1 = 1$. Nun gilt

$$g([0,a]) = \left[\min(g(0), g(a), \frac{a}{4}+1), \max(g(0), g(a), \frac{a^2}{4}+1)\right] = \left[1, \frac{a^2}{4}+1\right]$$

(b) Es gilt

$$|g(x) - g(y)| = \left|x - y - \frac{1}{a}(x^2 - y^2)\right| = |x-y| \underbrace{\left|1 - \frac{x+y}{a}\right|}_{=:q} < |x-y|.$$

Dabei gilt die letze Abschätzung, weil $0 < \frac{x+y}{a} < 2$ ist.

(c) Wir definieren q_k durch $|g(x^{k+1}) - \sqrt{a}| = q_k \cdot |g(x^k) - \sqrt{a}|$. Es folgt also

$$q_k = 1 - \frac{x^k + \sqrt{a}}{a} \xrightarrow{k\to\infty} 1 - \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}}{a} = 1 - 2\frac{\sqrt{a}}{a}.$$

2. Es gilt

$$g_N'(x) = 1 - \frac{4x^2 - 2(x^2-a)}{4x^2} = \frac{2x^2 - 2a}{4x^2} = \frac{1}{2} - \frac{a}{2x^2}$$

und

$$g_N''(x) = \frac{a}{x^3}$$

Wir betrachten die Taylorentwicklung von g_N um z an der Stelle x. Nach dem Satz von Taylor gibt es ein η_x zwischen z und x, sodass

$$g_N(x) = g_N(z) + g_N'(z)\cdot(x-z) + g_N''(\eta_x)(x-z)^2.$$

Wir können die Taylorentwicklung aber auch an der Stelle y auswerten. Dann existiert ein η_y zwischen z und y, sodass

$$g_N(y) = g_N(z) + g_N'(z) \cdot (y - z) + g_N''(\eta_y)(y - z)^2.$$

Wir subtrahieren jetzt diese beiden Ausdrücke voneinander und erhalten

$$g_N(x) - g_N(y) = g_N'(z)(x - y) + g_N''(\eta_x)(x - z)^2 - g_N''(\eta_y)(y - z)^2.$$

Setzen wir nun $z = \frac{x+y}{2}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
g_N(x) - g_N(y) &= g_N'(\frac{x+y}{2})(x - y) + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 (g_N''(\eta_x) - g_N''(\eta_y)) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{\frac{(x+y)^2}{4}}\right)(x - y) + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 (g_N''(\eta_x) - g_N''(\eta_y)) \\
&= (x - y)\left(\frac{1}{2} - \frac{4a}{(x+y)^2} + \frac{x-y}{2}\right)(g_N''(\eta_x) - g_N''(\eta_y))
\end{aligned}$$

Wir bilden auf beiden Seiten Beträge

$$\begin{aligned}
|g_N(x) - g_N(y)| &= |x - y| \left|\frac{1}{2} - \frac{4a}{(x+y)^2} + \frac{x-y}{2}\left(\frac{a}{\eta_x^3} - \frac{a}{\eta_y^3}\right)\right| \\
&\leq |x - y| \left(\left|\frac{1}{2} - \frac{4a}{(x+y)^2}\right| + \frac{|x-y|}{2}\left|\frac{a}{\eta_x^3} - \frac{a}{\eta_y^3}\right|\right)
\end{aligned}$$

Es gilt $0 < \frac{4a}{(x+y)^2} \leq \frac{4a}{(\sqrt{a}-\varepsilon+\sqrt{a}-\varepsilon)^2} = \frac{a}{(\sqrt{a}-\varepsilon)^2} < \frac{5}{4}$ für genügend kleines ε

$$\leq |x - y| \left(\frac{3}{4} + \frac{|x-y|}{2}\left|\frac{a}{\eta_x^3} - \frac{a}{\eta_y^3}\right|\right)$$

$|x - y| = |x - \sqrt{a} - (y - \sqrt{a})| \leq |x - \sqrt{a}| + |y - \sqrt{a}| \leq 2\varepsilon$

$$\leq |x - y| \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\left|\frac{a}{\eta_x^3} - \frac{a}{\eta_y^3}\right|\right)$$

Da $x \leq \eta_x, \eta_y \leq y$ können wir dies abschätzen durch

$$\leq |x - y| \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\left|\frac{a}{(\sqrt{a}-\varepsilon)^3} - \frac{a}{(\sqrt{a}+\varepsilon)^3}\right|\right)$$

Wählt man ε klein genug, so lässt sich dies abschätzen durch

$$\leq |x - y| \left(\frac{3}{4} + \varepsilon\frac{1}{\sqrt{a}}\left|2 - \frac{1}{2}\right|\right)$$

Für $\varepsilon < \frac{2}{24}\sqrt{a}$ ist dies kleiner als

$$\begin{aligned}
&\leq |x - y| \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) \\
&\leq \frac{7}{8}|x - y|
\end{aligned}$$

3. Statt x^k bzw. x^{k+1} schreiben wir im Folgenden x bzw. y. Es gilt $2x^2 > x^2 + a$ und, ohne Voraussetzung an x oder a,

$$(x - \sqrt{a})^2 > 0 \iff x^2 - 2x\sqrt{a} + a > 0 \iff x^2 + a > 2x\sqrt{a}.$$

Also gilt $2x^2 > x^2 + a > 2x\sqrt{a}$. Teilen wir die gesamte Ungleichung durch $2x$, so erhalten wir $x > \frac{x^2+a}{2x} > \sqrt{a}$. Mit $\frac{x^2+a}{2x} = \frac{2x^2-x^2+a}{2x} = x - \frac{x^2-a}{2x} = g_N(x) = y$ ergibt sich die erste Behauptung. Wir lassen unserer verkürzte Notation nun wieder fallen. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= T_f(x_{k+1}) \\ &= 2x_k(x_{k+1} - x_k) + x_k^2 - a \\ 2x_k^2 - (x_k^2 - a) &= 2x_k x_{k+1} \\ x - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} &= x_{k+1}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also genau das Newton-Verfahren. Es gilt $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2-a}{2x_k} = \frac{x_k^2+a}{2x_k} > \sqrt{a}$, da, wie oben gezeigt $x_k^2 + a > 2x_k\sqrt{a}$ und $x_k > 0$. Also ist unabhängig von x_k spätestens $x_{k+1} > \sqrt{a}$. Ab da konvergiert das Verfahren dann.

Aufgabe 3

Wir schreiben für die Berechnung von α_{opt} nur x statt x^k und p statt p^k, um die Notation übersichtlich zu halten. Es gilt

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= \sqrt{(f(x) + \alpha J_f(x)p)_2} \\ &= \sqrt{(f(x), f(x))_2 + 2\alpha(f(x), J_f(x)p)_2 + \alpha^2(J_f(x)p, J_f(x)p)_2} \\ H'(\alpha) &= \frac{1}{2H(\alpha)} \cdot (2(f(x), J_f(x)p)_2 + 2\alpha(J_f(x)p, J_f(x)p)_2) \end{aligned}$$

$H(\alpha) > 0$, muss für minimales α gelten

$$\begin{aligned} 0 &= (f(x), J_f(x)p)_2 + \alpha(J_f(x)p, J_f(x)p)_2 \\ \alpha(J_f(x)p, J_f(x)p)_2 &= -(f(x), J_f(x)p)_2 \\ \alpha_{\text{opt}} &= -\frac{(f(x), J_f(x)p)_2}{(J_f(x)p, J_f(x)p)_2} \end{aligned}$$

Es gibt also höchstens ein Extremum von H. Dieses liegt bei α_{opt}. Nun müssen wir noch zeigen, dass es sich um ein Minimum handelt.

$$H''(\alpha) = -\frac{1}{2H(\alpha)^3} \cdot ((f(x), J_f(x)p)_2 + \alpha(J_f(x)p, J_f(x)p)_2)^2 + \frac{1}{H(\alpha)}(J_f(x)p, J_f(x)p)_2$$

Wir setzen nun α_{opt} ein

$$\begin{aligned} &= 0 + \alpha_{\text{opt}}(J_f(x)p, J_f(x)p)_2)^2 + \frac{1}{H(\alpha_{\text{opt}})}(J_f(x)p, J_f(x)p)_2 \\ &> 0 \end{aligned}$$

Nun können wir die einzelnen Iterationen angeben.

1.

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \frac{(f(x^k), J_f(x^k)p^k)_2}{(J_f(x^k)p^k, J_f(x^k)p^k)_2} p^k \\
&= x^k - \frac{(f(x^k), J_f(x^k)f(x^k))_2}{(J_f(x^k)f(x^k), J_f(x^k)f(x^k))_2} f(x^k)
\end{aligned}$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}
-\partial_j F(x^k) &= -\partial_j (x^k, x^k)_2 \\
&= -\sum_{i=1}^n \partial_j f(x^k)_i^2 \\
&= -\sum_{i=1}^n 2 \cdot f(x^k)_i \cdot \partial_j f(x^k)_i \\
&= -2\sum_{i=1}^n f(x^k)_i \cdot (J_f)_{ij} \\
&= -2\sum_{i=1}^n (J_f)^T_{ji} \cdot f(x^k)_i \\
&= -2(J_f^T f(x^k))_j
\end{aligned}$$

Daraus folgt sofort $\nabla F(x^k) = -2J_f^T(x^k)f(x^k)$ und

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \frac{(f(x^k), J_f(x^k)p^k)_2}{(J_f(x^k)p^k, J_f(x^k)p^k)_2} p^k \\
&= x^k + 2\frac{(f(x^k), J_f(x^k) \cdot (-2J_f(x^k)f(x^k)))_2}{(J_f(x^k) \cdot (-2J_f(x^k)f(x^k)), J_f(x^k) \cdot (-2J_f(x^k)f(x^k)))_2} J_f(x^k)f(x^k) \\
&= x^k - \frac{(f(x^k), J_f^2(x^k) \cdot f(x^k))_2}{(J_f^2(x^k)f(x^k), J_f^2(x^k)f(x^k))_2} J_f(x^k)f(x^k)
\end{aligned}$$

3. Wir erhalten durch Einsetzen

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \frac{(f(x^k), J_f(x^k)p^k)_2}{(J_f(x^k)p^k, J_f(x^k)p^k)_2} p^k \\
&= x^k - \frac{(f(x^k), J_f(x^k)J_f^{-1}(x^k)f(x^k))_2}{(J_f(x^k)J_f^{-1}(x^k)f(x^k), J_f(x^k)J_f^{-1}(x^k)f(x^k))_2} J_f^{-1}(x^k)f(x^k) \\
&= x^k - \frac{(f(x^k), f(x^k))_2}{(f(x^k), f(x^k))_2} J_f^{-1}(x^k)f(x^k) \\
&= x^k - J_f^{-1}(x^k)f(x^k)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Mit dem Newton-Verfahren erhalten wir die Nullstellen

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1.8371173 \\ 0.79056942 \end{pmatrix} \qquad f(x_1) = \begin{pmatrix} 3.5527137 \cdot 10^{-15} \\ 3.1086245 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1.8371173 \\ 0.79056942 \end{pmatrix} \qquad f(x_2) = \begin{pmatrix} 3.5527137 \cdot 10^{-15} \\ 3.1086245 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} 1.8371173 \\ -0.79056942 \end{pmatrix} \qquad f(x_3) = \begin{pmatrix} 3.5527137 \cdot 10^{-15} \\ 3.1086245 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} -1.8371173 \\ -0.79056942 \end{pmatrix} \qquad f(x_4) = \begin{pmatrix} 3.5527137 \cdot 10^{-15} \\ 3.1086245 \cdot 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Für das Relaxationsverfahren erhalten wir mit der Konfiguration

```
hdnum::Banach banach;
banach.set_maxit(5000);
banach.set_verbosity(2);
banach.set_reduction(1e-6);
banach.set_abslimit(1e-20);
banach.set_sigma(-0.01);

u[0] = 1.5; u[1] = 0.8; // Startwert
banach.solve(problem,u);
```

das Ergebnis

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1.8371178 \\ -0.79056871 \end{pmatrix} \qquad f(x_1) = \begin{pmatrix} 6.1304303 \cdot 10^{-7} \\ -9.1732585 \cdot 10^{-7} \end{pmatrix}$$

Mit einem Raster, das um den Faktor 2 feiner ist, erhalten wir Abbildung 1. Für ein Polynom mit 4 Nullstellen und einem Raster mit Weite 10^{-2} ergibt sich Abbildung 2. Dabei wurden die Nullstellen folgendermaßen klassifiziert:

```
if (u[0].real() < 0)
  if (u[0].imag() < 0)
    id = 1;
  else if (u[0].imag() > 0)
    id = 2;
else if (u[0].imag() < 0)
  id = 3;
else if (u[0].imag() > 0)
  id = 4;
else
  std::cout << "Unbekannte Nullstelle!" << std::endl;
```

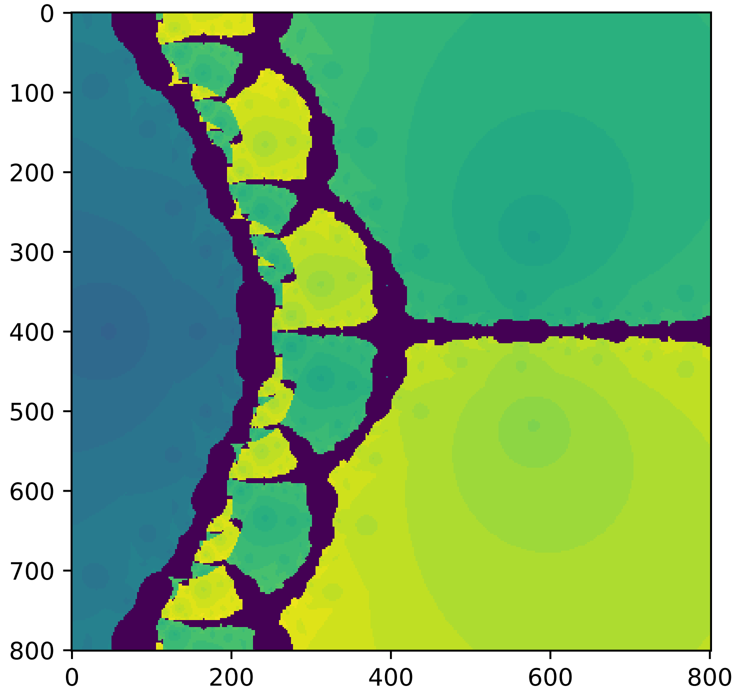

Abbildung 1: Ausgabe für $x^3 - 2x + 2$ auf dem Gebiet $[-2, 2] \times [-2i, 2i]$.

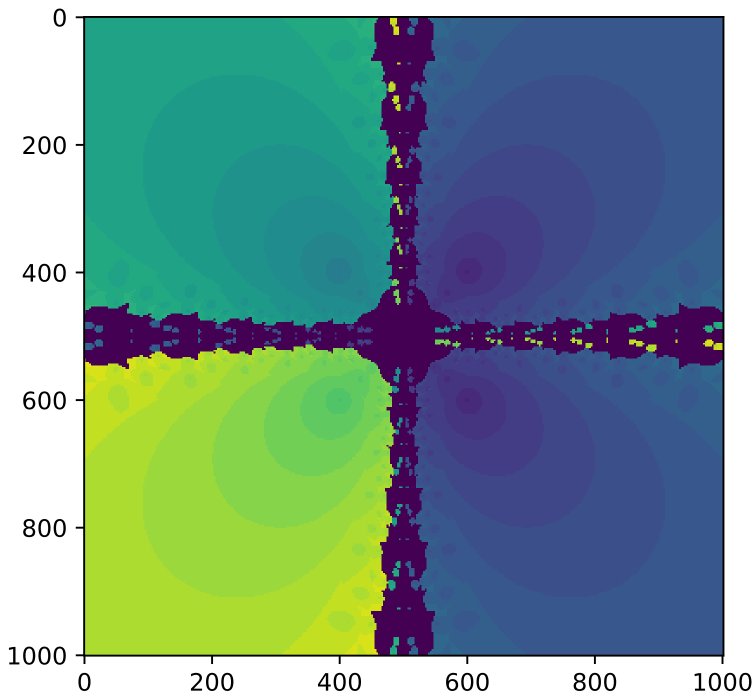

Abbildung 2: Ausgabe für $x^4 + 4$ auf dem Gebiet $[-5, 5] \times [-5i, 5i]$.