Aufgabe 9.1

(a) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Daher genügt es, die lineare Abgeschlossenheit zu zeigen. Seien dafür $z \in \mathbb{C}, f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $zf + g$ nach Faktor- bzw. Summenregel immer noch beliebig oft differenzierbar. Außerdem ist $\sup |x^\alpha \partial_\beta (zf+g)| \leq z \cdot \sup |x^\alpha \partial_\beta f| + \sup |x^\alpha \partial_\beta g| < \infty$.

(b) Wegen $\sup |x^\alpha f| < \infty$ erhalten wir für $\alpha = (2, \dots, 2)$ und $p < \infty$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, \mathrm{d}^n x &= \int_{B_1^n(0)} |f|^p \, \mathrm{d}^x x + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1^n(0)} \left| \frac{x^\alpha f}{x^\alpha} \right|^p \mathrm{d}^n x \\
&\leq C + \sup |x^\alpha f| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1^n(0)} |x^{-\alpha}|^p \, \mathrm{d}^n x \\
&= C + \sup |x^\alpha f| \prod_{i=1}^n \int_{R \setminus B_1^1(0)} x_i^- 2p \, \mathrm{d} x_i \\
&\leq C + \sup |x^\alpha f| \prod_{i=1}^n 2 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x_i^2} \, \mathrm{d} x_i \\
&= C + \sup |x^\alpha f| \prod_{i=1}^n 2 \cdot 1 \\
&= C + 2^n \cdot \sup |x^\alpha f| & < \infty
\end{aligned}$$

Sei nun $p = \infty$. Dann gilt

$$\|f\|_\infty = \sup |f| < \infty$$

Also ist $\forall p \in [1, \infty] \colon f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(c) Aufgrund der Produktregel gilt $fg \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Durch iteriertes Anwenden der Produktregel erhalten wir

$$\partial_i^{\alpha_i}(fg) = \sum_{k=0}^{alpha_i} \binom{\alpha_i}{k} (\partial_i^k f) \cdot (\partial_i^{\alpha_i - k} g)$$

Durch iteriertes Anwenden dieser Gleichung erhält man allgemein

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\alpha' + \alpha'' = \alpha} \nu_{\alpha', \alpha''} \partial^{\alpha'} f \partial^{\alpha''} g$$

. Daraus folgern wir

$$\begin{aligned}
\sup |x^\beta \partial^\alpha (fg)| &\leq \sum_{\alpha' + \alpha'' = \alpha} \nu_{\alpha', \alpha''} \sup |x^\beta \partial^{\alpha'} f \partial^{\alpha''} g| \\
&\leq \sum_{\alpha' + \alpha'' = \alpha} \nu_{\alpha', \alpha''} \sup |x^\beta \partial^{\alpha'} f| \cdot \sup |\partial^{\alpha''} g| & < \infty
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $fg \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 9.2

Es gilt

$$\begin{aligned}
2xH_j(x) - H_j'(x) &= 2x(-1)^j e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} e^{x^2} - (-1)^j 2xe^{x^2} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} e^{x^2} - (-1)^j e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^{j+1}}{\mathrm{d}x^{j+1}} e^{x^2} \\
&= (-1)^{j+1} e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^{j+1}}{\mathrm{d}x^{j+1}} e^{x^2} \\
&= H_{j+1}(x).
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
x\psi_j(x) - \psi_j'(x) &= xH_j(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - H_j'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - H_j(x)(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= (2xH_j(x) - H_j'(x))e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= H_{j+1}(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= \psi_{j+1}(x).
\end{aligned}$$

$\psi_j(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, da die Ableitung von ψ_j durch ψ_j und ψ_{j+1} ausgedrückt werden kann. Außerdem ist $H_j(x)$ nach Auswertung der hinteren Ableitung von der Form $H_j(x) = e^{x^2} \cdot P(x) \cdot e^{-x^2} = P(x)$ für ein Polynom P. Wegen $e^{-\frac{x^2}{2}} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ folgt daraus $\psi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Insbesondere ist die Fouriertransformation der folgenden Funktionen wohldefiniert.

$$\begin{aligned}
-i(\xi\widehat{\psi}_j(\xi) - (\widehat{\psi}_j)'(\xi)) &= -\widehat{\partial_x\psi_j}(\xi) - i(-\partial_\xi\widehat{\psi}_j)(\xi) \\
&= -\widehat{\partial_x\psi_j}(\xi) - i\widehat{ix\psi_j}(\xi) \\
&= (\widehat{x\psi_j - \psi_j'})(\xi) \\
&= \widehat{\psi}_{j+1}(\xi)
\end{aligned}$$

Wir zeigen die verbleibende Aussage per Induktion. Es gilt nach VL $\widehat{\psi}_0(x) = 1 \cdot \psi_0(x)$ und damit ist der Induktionsanfang mit $\lambda_0 = 1$ bewiesen. Sei also $\widehat{\psi}_j(x) = \lambda_j\psi_j(x)$. Dann gilt

$$\widehat{\psi}_{j+1}(x) = -i(x\widehat{\psi}_j(x) - (\widehat{\psi}_j)'(x))$$

Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
&= -i(x\lambda_j\psi_j(x) - (\lambda_j\psi_j)'(x)) \\
&= -i(\lambda_j x\psi_j(x) - \lambda_j\psi_j'(x)) \\
&= -i\lambda_j(x\psi_j(x) - \psi_j'(x)) \\
&= -i\lambda_j\psi_{j+1}(x).
\end{aligned}$$

Also ist $\widehat{\psi}_{j+1}(x) = \lambda_{j+1}\psi_{j+1}(x)$ mit $\lambda_{j+1} = -i\lambda_j$. Damit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 9.3

(a) Es gilt

$$\widehat{\tau_y f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\tau_y f)(x) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x$$

Transformationssatz für $x \mapsto x + y$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot(x+y)} \,\mathrm{d}x$$
$$= e^{-i\xi\cdot y} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x$$
$$= e^{-i\xi\cdot y} \widehat{f}(\xi)$$

(b) Es gilt

$$\widehat{\delta_\alpha f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (\delta_\alpha f)(x) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\alpha x) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x$$

Transformationssatz für $x \mapsto \alpha^{-1} x$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot\frac{x}{\alpha}} |\det \alpha^{-1} E_n| \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\alpha^n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\frac{\xi}{\alpha}\cdot x} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\alpha^n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)$$

(c) Es gilt

$$\widehat{f * g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \,\mathrm{d}y \, e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x$$

Fubini

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Transformationssatz für $x \mapsto x + y$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) e^{-i\xi\cdot(x+y)} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x \, g(y) e^{-i\xi\cdot y} \,\mathrm{d}y$$

Fubini

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \left[\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} \,\mathrm{d}x\right] \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-i\xi\cdot y} \,\mathrm{d}y\right] \\
&= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \widehat{f}\widehat{g}
\end{aligned}
$$

Zusatzaufgabe 9.1

Es gilt $\partial_\beta f(x) = \prod_{i=1}^n \partial_i^{\beta_i} f_i(x_i)$. Daher ist $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Außerdem gilt

$$
\sup |x^\alpha \partial_\beta f| = \sup \left| \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \partial_i^{\beta_i} f_i \right| \le \prod_{i=1}^n \sup |x_i^{\alpha_i} \partial_i^{\beta_i} f_i| < \infty.
$$

Also ist $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir schließen weiter

$$
\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^n f_i(x_i) e^{-i\sum_{i=1}^n \xi_i x_i} \,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n
$$

Fubini

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_i(x_i) e^{-i\xi_i x_i} \,\mathrm{d}x_i \\
&= \prod_{i=1}^n \widehat{f}_i(\xi_i).
\end{aligned}
$$