

Aufgabe	2.1	2.2	2.3	Z2.1	Σ
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 2

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
 Denis Brazke

denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 2.1 (Lebesgue-Maß)

5 Punkte

Sei $\lambda: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ das Lebesgue-Maß.

- Sei $A \subset \mathbb{R}$ abzählbar. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und dass $\lambda(A) = 0$.
- Zu $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\alpha > 0$ definieren wir $\alpha A := \{\alpha x : x \in A\}$. Zeigen Sie, dass $\alpha A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda(\alpha A) = \alpha \lambda(A)$.
- Zeigen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ eine Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ existiert, so dass A dicht ist in \mathbb{R} , und $\lambda(A) = \alpha$. Gibt es auch eine offene Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.2 (Hausdorff-Maß)

5 Punkte

Sei $s \geq 0$ und $\delta > 0$. Zu $A \subset \mathbb{R}$ definieren wir $\text{diam}(A) := \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$ und speziell $\text{diam}(\emptyset) := 0$. Weiterhin definieren wir

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{diam}(B_j)^s : A \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j, \text{diam}(B_j) \leq \delta \right\} \quad \text{für alle } A \subset \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Nun definieren wir das Hausdorff-Maß durch

$$\mathcal{H}^s(A) := \limsup_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) \quad \text{für alle } A \subset \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

- Zeigen Sie, dass \mathcal{H}^s ein äußeres Maß ist.
- Zu $A \subset \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ definieren wir $\alpha A := \{\alpha x : x \in A\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^s(\alpha A) = \alpha^s \mathcal{H}^s(A)$.
- Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^s(A + y) = \mathcal{H}^s(A)$ für alle $A \subset \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.
- Zeigen Sie, dass \mathcal{H}^0 das Zählmaß ist.
- Ist \mathcal{H}^1 ein Maß? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: In Definition 2.21 wurde der Normierungsfaktor $\alpha(s)$ in die Definition von \mathcal{H}_δ^s hinzugenommen. Dieser spielt für die zu zeigenden Eigenschaften in dieser Aufgabe keine Rolle und wurde deshalb hier weggelassen.

Aufgabe 2.3 (Caratheodory)

5 Punkte

Sei X eine Menge und $\nu: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ definiert durch

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ höchstens abzählbar ist,} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } A \subset X. \quad (3.1)$$

- Zeigen Sie, dass ν ein äußeres Maß ist.
- Bestimmen Sie alle Mengen $A \subset X$, so dass

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) \quad \text{für alle } E \subset X. \quad (3.2)$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Zusatzaufgabe 2.1

3 Punkte

Sei $\# : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ das Zählmaß. Wir definieren die Funktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\mu(A) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#(A \cap \{1, \dots, n\}) \quad \text{für alle } A \subset \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Ist μ ein Maß? Ist μ ein äußeres Maß? Begründen Sie Ihre Antwort.