Funktionalanalysis - Übungsblatt 5

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 24. November 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

---

Aufgabe 5.1 4 Punkte

Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) X ist separabel.

(ii) Es gibt eine abzählbare Menge $A \subset X$ mit $X = \overline{< A >} = \overline{\text{Spann(A)}}$.

(b) Untersuchen Sie nun die Folgenräume ℓ_p für $1 \leq p < \infty$ auf Separabilität.

Aufgabe 5.2 4 Punkte

(a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|)$ genau dann ein Banachraum ist, wenn alle absolut konvergenten Reihen konvergieren, d.h.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \quad \text{konvergiert.}$$

(b) Zeigen Sie, dass eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ genau dann ℓ_1 ist, wenn für jede Nullfolge $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ in $\mathbb{K}$ konvergent ist .

Aufgabe 5.3 4 Punkte

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $S = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein höchstens abzählbar unendliches Orthonormalsystem.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P : H \ni x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x\rangle e_n$ die eindeutige Orthogonalprojektion auf $\overline{\langle S\rangle}$ ist (vgl. Aufgabe 4.3).

(b) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ heißt **schwach konvergent** gegen $x \in V$, falls für alle $f \in V'$

$$f(x_n) \to f(x) \qquad (n \to \infty).$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen Null konvergiert.

Aufgabe 5.4 4 Punkte

Betrachten Sie die Legendre-Polynome $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus Aufgabe 3.4 in dem Prähilbertraum $(C([-1,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und die Unterräume $U_n :=< \{P_k \mid 0 \leq k \leq n\} >$.

(a) Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau eine Abbildung $\tilde{P}_n : C([-1,1]) \to U_n$ gibt mit

$$\|x - \tilde{P}_n(x)\| = \inf_{y\in U_n} \|x - y\|$$

und geben Sie eine Darstellung von $\tilde{P}_n(x)$ an.
Hinweis: Aufgabe 5.3.

(b) Berechnen Sie für $f(x) = \mathrm{e}^x$ die Projektionen $\tilde{P}_0(f), \tilde{P}_1(f)$ sowie $\tilde{P}_2(f)$.

(c) Setzen Sie $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} U_n$ und entscheiden Sie, ob $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist.
Hinweis: Aufgabe 5.2 könnte hilfreich sein.