Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

6. Übungsblatt

Aufgabe 21 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cdot \mid B) : \mathcal{A} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(A \mid B) \end{aligned}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\mathbb{P}(A \mid \cdot)$ für ein $A \in \mathcal{A}$ kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

Aufgabe 22 (Formel von Bayes und der totalen W'keit, 4 = 2 + 2 Punkte).

In London regnet es an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Die Wettervorhersage stimmt in $\frac{2}{3}$ aller Fälle$^{(*)}$. Wenn Regen vorhergesagt ist, nimmt Mr. Pickwick einen Schirm mit; ist kein Regen vorhergesagt, macht er dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$.

(a) Es regnet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr. Pickwick keinen Schirm dabei?

(b) Es regnet nicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr. Pickwick seinen Schirm dabei?

Bemerkung zu $(*)$***:*** *Das bedeutet: wenn es regnet, stimmt die Vorhersage mit Wahrscheinlichkeit* $\frac{2}{3}$*, und wenn es nicht regnet, stimmt die Vorhersage mit Wahrscheinlichkeit* $\frac{2}{3}$.
Hinweis: *Definieren Sie zunächst* R, V, S *als die Ereignisse, dass es regnet, dass die Wettervorhersage stimmt, und dass Mr. Pickwick seinen Schirm mitnimmt. Drücken Sie dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als bedingte Wahrscheinlichkeiten mit* R, V, S *aus. Es kann hilfreich sein, zur Übersicht ein Baumdiagramm mit den bekannten Wahrscheinlichkeiten anzufertigen.*

Aufgabe 23 (Stochastische Unabhängigkeit, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $A, B, C \in \mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $\emptyset$ und Ω von jedem Ereignis A stochastisch unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie: Sind A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig, so sind sowohl $A \cap B$ und C als auch $A \cup B$ und C jeweils stochastisch unabhängig.

(c) Ein Würfel, bei welchem die Augenzahlen von 1 bis 6 gleichwahrscheinlich sind, werde zweimal unabhängig voneinander geworfen. Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} A &= \text{"Die erste Augenzahl ist gerade"}, \\ B &= \text{"Die zweite Augenzahl ist gerade"}, \\ C &= \text{"Die Summe der Augenzahlen ist ungerade"}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Ereignisse A, B, C paarweise stochastisch unabhängig (d.h. immer zwei der Ereignisse sind stochastisch unabhängig), aber nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

Aufgabe 24 (Infinite Monkey Theorem - Lemma von Borel-Cantelli, 4 Punkte).

"Ein Affe, der rein zufällig auf einer Computertastatur tippt, wird irgendwann einmal auch Goethes Faust schreiben"

Formalisieren Sie diese Weisheit und geben Sie eine exakte mathematische Begründung mittels des Lemmas von Borel-Cantelli dafür, dass er dies mit Wahrscheinlichkeit Eins sogar unendlich oft tun wird (sofern er unendlich lange lebt).

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **21. Dezember 2020, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`