Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
PROF. DR. A. SCHMIDT
DR. C. DAHLHAUSEN

Blatt 4
Abgabe: *Freitag, 14.05.2021, 09:15 Uhr*

Notation. Sei A ein kommutativer Ring mit Eins.

Aufgabe 1 (Vervollständigung). **(6 Punkte)**
Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Die *Vervollständigung* von A bezüglich $\mathfrak{a}$ ist definiert als der projektive Limes von Faktorringen

$$A^{\wedge\mathfrak{a}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A/\mathfrak{a}^n.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ ein Maximalideal in A, dann ist für jedes $x \in \hat{\mathfrak{m}} := \ker(A^{\wedge\mathfrak{m}} \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m})$ das Element $1-x$ eine Einheit in $A^{\wedge\mathfrak{m}}$. Folgern Sie, dass $A^{\wedge\mathfrak{m}}$ ein lokaler Ring mit Maximalideal $\hat{\mathfrak{m}}$ ist. Schließen Sie daraus, dass der natürliche Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ kein Isomorphismus ist.

(b) Die Vervollständigung $A[T]^{\wedge(T)}$ ist isomorph zum Potenzreihenring $A[[T]]$.

Aufgabe 2. **(6 Punkte)**
Sei $(M_i)_{i\in I}$ ein direktes System und sei $(N_i)_{i\in I}$ ein projektives System von A-Moduln. Zeigen Sie:

(a) Für jeden A-Modul P sind die kanonischen Homomorphismen von A-Moduln

$$\mathrm{Hom}_A(\varinjlim_i M_i, P) \longrightarrow \varprojlim_i \mathrm{Hom}_A(M_i, P) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Hom}_A(P, \varprojlim_i N_i) \longrightarrow \varprojlim_i \mathrm{Hom}_A(P, N_i).$$

Isomorphismen.

(b) Für jeden A-Modul P ist der kanonische Homomorphismus

$$\varinjlim_i (P \otimes_A M_i) \longrightarrow P \otimes_A \left(\varinjlim_i M_i\right)$$

ein Isomorphismus, d.h. das Tensorprodukt vertauscht mit direkten Limites.

(c) Das Tensorprodukt vertauscht im Allgemeinen nicht mit projektiven Limites, d.h. der kanonoische Homomorphismus

$$P \otimes_A \left(\varprojlim_i M_i\right) \longrightarrow \varprojlim_i (P \otimes_A M_i),$$

ist im Allgemeinen kein Isomorphismus. *Hinweis:* Betrachten Sie $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$.

Aufgabe 3 (Lokalisierung als direkter Limes). **(6 Punkte)**
Für ein Element $f \in A$ betrachten wir den direkten Limes von A-Moduln

$$A[f^{-1}] := \varinjlim \left(A \xrightarrow{\cdot f} A \xrightarrow{\cdot f} A \xrightarrow{\cdot f} \dots\right),$$

d.h. $I = \mathbb{N}$, $M_i = A$ und $\varphi_{i,j} \colon A \to A, a \mapsto f^{j-i}a$ in der Notation aus Definition 6.2 der Vorlesung. Zeigen Sie:

(a) Es existiert eine kanonische Ringstruktur auf $A[f^{-1}]$, so dass die natürliche Abbildung $\varphi_0 \colon A \to A[f^{-1}]$ ein Ringhomomorphimsus ist.

(b) Es existiert ein Ringisomorphsimus zwischen $A[f^{-1}]$ und der Lokalisierung A_f von A nach $\{1, f, f^2, \dots\}$ (Beispiel 7.3). *Hinweis:* Nutzen Sie die universellen Eigenschaften des direkten Limes und der Lokalisierung, um Abbildungen zu konstruieren.

Aufgabe 4 (Basis der Zariski-Topologie[1]). **(6 Punkte)**
Für jedes $f \in A$ sei $D(f)$ das Komplement von $V(f)$ in $\operatorname{Spec}(A)$. Insbesondere sind die $D(f)$ offene Mengen in der Zariski-Topologie, die sogenannten *basisoffene Teilmengen* von $\operatorname{Spec}(A)$. Zeigen Sie:

(a) Die basisoffenen Teilmengen bilden eine Basis für die Zariski-Topologie, d.h. jede offene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(A)$ lässt sich als Vereinigung von Mengen der Form $D(f)$ schreiben.

(b) Für $f, g \in A$ gilt $D(f) \cap D(g) = D(fg)$, und $D(f)$ ist genau dann leer (bzw. der ganze Raum X), wenn f nilpotent (bzw. eine Einheit) ist.

Zusatzaufgabe 5 (Quadratwurzeln in $\mathbb{Z}_p$). **(6 Punkte)**
Sei p eine ungerade Primzahl und a eine nicht durch p teilbare ganze Zahl. Zeigen Sie:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist x_n eine ganze Zahl mit $x_n^2 \equiv a \bmod p^n$, so gibt es ein $k_n \in \{0, \ldots, p-1\}$, so dass $x_{n+1} = x_n + k_n p^n$ die Gleichung $x_{n+1}^2 \equiv a \bmod p^{n+1}$ erfüllt.

(b) Betten wir $\mathbb{Z}$ über den natürlichen Homomorphismus in $\mathbb{Z}_p$ ein, so ist a genau dann ein Quadrat in $\mathbb{Z}_p$, wenn $\bar{a} = a \bmod p$ ein Quadrat in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist. Folgern Sie als ein Beispiel, dass sich $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ in $\mathbb{Z}_3$ einbetten lässt.

Wer möchte, kann ebenso zeigen: Eine ungerade Zahl a ist genau dann ein Quadrat in $\mathbb{Z}_2$, wenn $a \equiv 1 \bmod 8$.

[1] Diese Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.