Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 11
Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 12. Februar

Sie können bei jeder Aufgabe die Ergebnisse der vorherigen nutzen, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben. Sie können maximal 16 Punkte erreichen.

50. Aufgabe: (2+2=6 Punkte) Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung zusammenhängender topologischer Räume. Zeigen Sie:

(a) Die Menge der Homöomorphismen $f : X \to X$ mit der Eigenschaft $p \circ f = p$ bildet mit Hintereinanderausführung eine Gruppe. Diese operiert frei auf X und es gibt einen Isomorphismus $X/D(p) \cong Y$.

(b) Sei $H \subseteq D(p)$ eine Untergruppe, dann gibt es eine Überlagerung $r : X \to W$ mit $H = D(r)$.

(c) Wenn H sogar ein Normalteiler in $D(p)$ ist, dann gibt es eine Überlagerung $s : W \to Y$ mit $s \circ r = p$ und $D(s) \cong D(p)/H$

Lösungsskizze:

Die Aufgabe ist falsch gestellt, hier fehlte eine Voraussetzung. Man braucht zusammenhängendes X, sonst gibt es folgendes Gegenbeispiel: $X = \{1, 2\} \times S^1$ und $Y = S^1$ und $p : X \to Y$, $(n, z) \mapsto z^n$. Hier besteht die Decktransformationsgruppe nur aus der Identität und der Abbildung $f(n, x) = (n, (-1)^{n+1}x)$, hat also zwei Elemente.

Im Folgenden nehmen wir an, dass X und damit auch Y zusammenhängende Mannigfaltigkeiten sind.

(a) Homöomorphismen bilden eine Gruppe, wir müssen daher nur die Kriterien für eine Untergruppe zeigen. Seien f_1, f_2 Homöomorphismen wie angegeben. Dann ist $p \circ (f_1 \circ f_2) = (p \circ f_1) \circ f_2 = f_1 \circ f_2$. Außerdem gilt $p \circ f_1^{-1} = (p \circ f) \circ f^{-1}) = p \circ (f \circ f^{-1}) = p$. Damit sind die Bedingungen für eine Untergruppe erfüllt. Die Axiome für freie Operationen lassen sich sofort nachprüfen. Wähle eine p-gute Umgebung U eines $y \in Y$, dann permutiert $D(p)$ die zu U äquivalenten Fasern. Außerdem operiert $D(p)$ transitiv auf den Fasern, es genügt dies für die universelle Überlagerung zu zeigen. (Technisch, siehe Skript oder Hatcher: Algebraic Topology, Prop. 1.39 und Prop. 1.40.). Die Überlagerung p faktorisiert über $X/D(p)$ und wegen Transitivität der Gruppenoperation auf den Fasern ist $X/D(p) \to Y$ injektiv.

(b) Sei $W := X/H$ und r die Projektionsabbildung. Dann ist nach Konstruktion $D(r)$ die Gruppe der Homöomorphismen $f : X \to X$ sodass $f(x) = hx$ für ein von x und f abhängiges $h \in H$. Man zeigt durch ein Zusammenhangsargument, dass h nur von f aber nicht von x abhängt. [Für jedes Element von H ist die Menge der zugehörigen x offen und abgeschlossen, also entweder leer oder ganz X.] Damit ist $D(r) \to H$, $f \mapsto h$ die gesuchte Identität. Nach Konstruktion ist dies sogar eine Gleichheit.

(c) Sei nun H ein Normalteiler. Wir konstruieren s wie folgt: Ein beliebiges Element von $H \setminus X$ ist von der Gestalt $[x] = \{h(x) \mid h \in H\}$, dann setzen wir $s[x] := p(x)$. Jede p-gute Umgebung ist auch eine s-gute Umgebung [Nachprüfen!]. Außerdem ist $D(s)$ die Gruppe der Homöomorphismen $g : W \to W$ mit $s \circ g = s$. Das bedeutet $s[x] = s \circ g[x]$. Für $[x] = Hx$ setze $[y] = g[x]$, das ist unabhängig von der Wahl des Vertreters x. Fixiere einen beliebigen Vertreter $y = y_x$, eindeutig bis auf Elemente auf H. Also gilt $p(x) = p(y)$. Weil $D(p)$ transitiv operiert, gibt es ein $f \in D(p)$ mit $[y] = [f(x)]$. Man zeigt wie oben, dass f nicht von $[x]$ abhängt. [Für festes f ist die Menge der zugehörigen [x] offen und abgeschlossen, also leer oder ganz W.] Weil H ein Normalteiler ist, ist f eindeutig bestimmt bis auf Linksoperation mit einem $h \in H$. Damit ist $D(s) \to H \setminus D(p)$,g $\mapsto Hf$ der gesuchte Isomorphismus.

51. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei Y eine topologische Liegruppe, also eine Mannigfaltigkeit mit Gruppenstruktur, sodass Multiplikation und Inversion stetig sind. Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung von Y.

(a) Konstruieren Sie auf X eine Verknüpfung, sodass X eine komplexe Liegruppe und p ein Gruppenhomomorphismus wird. Hinweis: Liftungslemma.

(b) Wenn die Gruppenstruktur auf Y differenzierbar ist, dann auch auf X.

Lösung:

Auch hier sollten X und Y zusammenhängend sein.

Im Folgenden schreiben wir "$\odot$"für die Gruppenverknüpfung, die nicht kommutativ sein muss.

(a) Die Verknüpfung auf Y ist eine stetige Abbildung $\odot \colon Y \times Y \to Y$. Die Produkte $Y \times Y$ und $X \times X$ sind Mannigfaltigkeiten. Nach Aufgabe 48 erhalten wir eine Überlagerung $X \times X \xrightarrow{p \times p} Y \times Y$. Unser Ziel ist nun eine stetige Abbildung $\tilde{\odot} \colon X \times X \to X$ mit $p(\tilde{\odot}(x_1, x_2)) = \odot(p(x_1), p(x_2))$ (Präfixnotation), d.h. eine stetige Abbildung, sodass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "p"] \\ X \times X \arrow[urr, dashed, bend left, "\tilde{\odot}"] \arrow[r, "(p\times p)"] & Y \times Y \arrow[r, "\odot"] & Y . \end{tikzcd}$$

Sei $\widetilde{\widetilde{p}} : \widetilde{X} \to X$ die universelle Überlagerung von X, dann ist $p \circ \widetilde{\widetilde{p}} : \widetilde{X} \to Y$ die universelle Überlagerung von Y. Man fixiere ein beliebiges Urbild $\tilde{e} \in \widetilde{p}^{-1}(e_Y)$ des neutralen Elementes e_Y in Y. Nach dem Liftungssatzes gibt es eine stetige Abbildung $\tilde{\tilde{\odot}} \colon X \times X \to \tilde{X}$ sodass $\widetilde{\widetilde{\odot}}(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}$.

$$\begin{tikzcd} & & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{\tilde{p}}"] \arrow[dd, bend left, "\tilde{p}"] \\ & & X \arrow[d, "p"] \\ X \times X \arrow[uurr, bend left, "\tilde{\tilde{\odot}}"] \arrow[urr, dashed, bend left, "\tilde{\odot}"] \arrow[r, "(p\times p)"] & Y \times Y \arrow[r, "\odot"] & Y \end{tikzcd}$$

Wir erhalten durch $\tilde{\odot} := \tilde{\tilde{p}} \circ \tilde{\tilde{\odot}}$ die gesuchte stetige Abbildung. Im Folgenden nehmen wir obda an $\tilde{X} = X$ um die Notation zu vereinfachen. Der allgemeine Fall folgt daraus. Es bleibt zu zeigen, dass $(X, \widetilde{\odot})$ die Gruppenaxiome erfüllt.

- Das neutrale Element: Die Abbildungen $id_{\widetilde{X}}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$ und $f : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, $\widetilde{x} \mapsto \widetilde{x}\widetilde{\odot}\widetilde{e}$ sind beide Überlagerungen der Identität und stimmen im neutralen Element $id(\widetilde{e}) = \widetilde{e} = f(\widetilde{e})$ überein. Nach dem Liftungslemma gilt $f = id$, also $\widetilde{x}\widetilde{\odot}\widetilde{e} = \widetilde{x}$ auf ganz $\widetilde{X}$. Analog zeigt man $\widetilde{e}\widetilde{\odot}\widetilde{x} = \widetilde{x}$.
- Das Inverse: Sei $\widetilde{i} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ ein Lift der Inversion $i : Y \to Y$ auf Y, eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft $\widetilde{i}(\widetilde{e}) = \tilde{e}$. Dann sind die Abbildungen $g : \widetilde{x} \mapsto \tilde{x}\widetilde{\odot}\tilde{i}(\tilde{x})$ und die konstante Abbildung $\widetilde{x} \mapsto \widetilde{e}$ beides Liftungen der konstanten Abbildung $x \mapsto e$ auf Y und stimmen in $\widetilde{x} = \widetilde{e}$ überein. Nach dem Liftungssatz stimmen g und die konstante Abbildung überein, also gilt $\tilde{x}\widetilde{\odot}\tilde{i}(\tilde{x}) = \widetilde{e}$ für alle $\widetilde{x}$.
Insbesondere ist die Inversionsabbildung $\widetilde{x} \mapsto \widetilde{x}^{-1} := \widetilde{i}(\widetilde{x})$ stetig.
- Assoziativität: Fixiere $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ beliebig in $\widetilde{X}$. Dann sind die Abbildungen

$$h_i : \widetilde{X} \to \widetilde{X} \quad , \quad h_1(\widetilde{x}) = (\widetilde{a}\widetilde{\odot}\widetilde{x})\widetilde{\odot}\widetilde{b} \quad \text{und} \quad h_2(\widetilde{x}) = \widetilde{a}\widetilde{\odot}(\widetilde{x}\widetilde{\odot}\widetilde{b})$$

  jeweils Liftungen von $h : Y \to Y$, $y \mapsto (a \odot y) \odot b = (a \odot y) \odot b$. Außerdem gilt $h_1(\widetilde{e}) = h_2(\widetilde{e})$, also ist $h_1 = h_2$ wegen Liftungssatz. Das zeigt die Assoziativität von $\widetilde{\odot}$.
- Wenn $(Y, \odot)$ kommutativ ist, zeigt man ähnlich, dass $(\widetilde{X}, \widetilde{\odot})$ auch kommutativ ist. Das war aber nicht Teil der Aufgabe.

Aus dem Diagramm folgt sofort, dass p ein Gruppenhomomorphismus ist.

(b) Differenzierbarkeit ist nur wohldefiniert, wenn es sich bei X und Y um differenzierbare Mannigfaltigkeiten handelt. Völlig analog zum Nachweis der Stetigkeit im Beweis des Liftungssatzes argumentieren wir, dass es sich bei Differenzierbarkeit um eine lokale Eigenschaft handelt. Da die Werte von $\tilde{\tilde{\odot}}$ einer genügend kleinen Umgebung aus Stetigkeitsgründen in einem Blatt liegen müssen und unter der Überlagerung $\tilde{\tilde{p}}$ auch wieder in einem Blatt landen. Dann ist $\tilde{\odot}$ als Komposition differenzierbarer Abbildungen differenzierbar.

52. Aufgabe: (4 Punkte) Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, die drei Werte w_1, w_2, w_3 in $\overline{\mathbb{C}}$ nicht annimmt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Lösung: Ohne Einschränkung $w_1 \neq \infty$, sonst vertausche die w_i. Ohne Einschränkung sei $w_1 = 0$ sonst betrachte $f - w_1$. Dann ist $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also $h = \frac{1}{f}$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Insbesondere nimmt h die Werte $\frac{1}{w_2}, \frac{1}{w_3}$ nicht an, nach Picard ist h also konstant. Damit ist auch f konstant.

53. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, sodass $f \circ f$ keinen Fixpunkt besitzt, also $f(f(z)) \neq z$ für alle z. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $g(z) = \frac{f \circ f(z) - z}{f(z) - z}$ ist niemals Null oder Eins und daher konstant c.

(b) Die holomorphe Funktion $f' \circ f$ nimmt die Werte 0 und c nicht an und ist damit auch konstant.

(c) Folgern Sie, dass f eine Translation ist, also ein Polynom ersten Grades.

Hinweis: Verwenden Sie zweimal den Satz von Picard.

Lösung:

(a) Es gilt $f(z) \neq z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, sonst gilt für ein $z \in \mathbb{C}$, dass $f(f(z)) = f(z) = z$, Widerspruch. Insbesondere $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.
Es ist $g(z) = 0 \iff f(f(z)) = z$, also nimmt g den Wert 0 nicht an.
Es ist $g(z) = 1 \iff f(f(z)) - z = f(z) - z \iff f(f(z)) = f(z)$, jedoc gilt $f(f(z)) \neq f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, denn sonst existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $f(f(f(z))) = f(f(z)) = f(z)$, also wäre $f(z)$ ein Fixpunkt von $f \circ f$. Also nimmt g den Wert 1 nicht an.
g ist ganz und nimmt die Werte 0 und 1 nicht an, nach Picard ist g konstant c mit $c \neq 0, 1$.

(b) Nach (a) gilt $f(f(z)) - z = c(f(z) - z)$. Differenzieren liefert:

$$f'(z) \cdot f'(f(z)) - 1 = cf'(z) - c \quad \Longrightarrow \quad f'(z)\,(f'(f(z)) - c) = 1 - c.$$

Da $c \neq 1$, also $1 - c \neq 0$, folgt direkt, dass $f'(f(z)) \neq c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Angenommen es existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $f'(f(z)) = 0$, dann erhalten wir:

$$0 = f'(f(z)) \cdot (f' f(f(z))) - c) = 1 - c \neq 0.$$

Ein Widerspruch, also $f'(f(z)) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit ist $f' \circ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und nimmt nicht die Werte 0 und c, nach Picard also konstant $d \neq 0, c$. $\square$

(c) f ist nicht konstant, sonst wäre diese Konstante ein Fixpunkt. Also nimmt nach Picard f alle Werte an bis auf ein $k \in \mathbb{C}$ an, also $\mathbb{C} \setminus \{k\} \subset f(\mathbb{C})$. Somit gilt $f'(y) = f'(f(z)) = d$ für alle $y \in \mathbb{C} \setminus \{k\}$ und nach Identitätsatz gilt dann bereits $f'(k) = d$, also $f' = d$ auf $\mathbb{C}$. Da d nicht Null ist, ist f ein Polynom ersten Grades, also von der Gestalt $f(z) = dz + e$ für komplexe Konstanten d und e. Es bleibt zu zeigen, dass $d = 1$. In der Tat, nach Annahme hat f keine Fixpunkte. Wenn $d \neq 1$, dann wäre $z = \frac{e}{1-d}$ ein Fixpunkt. Also ist $f(z) = z + e$.

54. Aufgabe: (4 Punkte) Seien f und g ganze holomorphe Funktionen mit

$$f^3 + g^3 = 1 \ .$$

Zeigen Sie, dass f und g konstant sind. Hinweis: Zerlegen Sie das Polynom $X^3 - 1$ in Linearfaktoren. Wenden Sie Aufgabe 52 auf die meromorphe Funktion $h = f/g$ an.

Lösung: Wenn g konstant ist, dann kann f nur drei Werte annehmen, wäre also nach dem Satz von der Gebietstreue auch konstant und wir sind fertig. Im Folgenden nehmen wir an, g wäre nicht konstant. Als Quotient zweier holomorpher Funktionen ist dann $\frac{f}{g}$ meromorph.
Es gilt $X^3 - 1 = (X-1)(X-\zeta_2)(X-\zeta_2^2)$ wobei $1, \zeta_2, \zeta_2^2$ die dritten Einheitswurzeln seien. Diese Identität werden wir für $X = \frac{f}{-g}$ verwenden.

$$\begin{aligned}
& & f^3 + g^3 &= 1 \\
&\Longrightarrow & \frac{f^3}{(-g)^3} - 1 &= \frac{1}{(-g)^3} \\
&\Longrightarrow & (\frac{f}{-g} - 1)(\frac{f}{-g} - \zeta_2)(\frac{f}{-g} - \zeta_2^2) &= \frac{1}{(-g)^3} \\
&\Longrightarrow & (\frac{f}{g} + 1)(\frac{f}{g} + \zeta_2)(\frac{f}{g} + \zeta_2^2) &= \frac{1}{g^3}
\end{aligned}$$

Weil g holomorph in ganz $\mathbb{C}$ ist, ist $\frac{1}{g^3} \neq 0$. Daraus folgt aber sofort für jedes feste $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{f}{g}(z) \notin \{-1, -\zeta_2, -\zeta_2^2\} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

[Wenn ein Linearfaktor unendlich ist, dann auch die anderen. Andernfalls ist das Produkt dreier komplexer Zahlen ungleich Null, also jeder Linearfaktor ungleich Null.] Nach Aufgabe 52 muss $\frac{f}{g}$ konstant sein. Also gilt $f = cg$, für eine Konstante c. Wenn $c^3 = -1$ erhalten wir den Widerpsruch $0 = f^3 + g^3 = 1$, also gilt $c^3 \neq -1$ und wir folgern

$$(1 + c^3) f^3 = f^3 + g^3 = 1 \qquad \text{also} \quad f^3 = \frac{1}{1 + c^3} \ .$$

Es gibt nun drei mögliche Werte, die f annehmen kann. Nach dem Satz von der Gebietstreue ist f konstant und damit auch g.