Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

3. Übungsblatt - Lösungsskizzen

Aufgabe 9 (Stetige Verteilungen, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).
Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \text{Pareto}_{\alpha,x_m})$, wobei die Dichte der Pareto-Verteilung mit Parametern $\alpha > 0$ und $x_m > 0$ gegeben ist durch

$$\mathbb{f}(x) = C_{\alpha,x_m} \cdot x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{\{x \geq x_m\}} = \begin{cases} C_{\alpha,x_m} \cdot x^{-(\alpha+1)}, & x \geq x_m, \\ 0, & x < x_m \end{cases}.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante C_{α,x_m} so, dass $\mathbb{f}$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $\mathbb{F}$.

(c) Sei nun $\alpha = x_m = 1$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}([1,2])$ und $\mathbb{P}((2,\infty))$.

Lösung 9. (a) Damit $\mathbb{f}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, müssen zwei Dinge erfüllt sein: $\mathbb{f} \geq 0$ überall und $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{f}(x)\, \mathrm{d}x = 1$. Die erste Bedingung ist offensichtlich erfüllt, solange $C_{\alpha,x_m} \geq 0$ ist.
Aus der zweiten Bedingung ermitteln wir C_{α,x_m}:

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{f}(x)\, \mathrm{d}x = C_{\alpha,x_m} \int_{x_m}^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\, \mathrm{d}x = C_{\alpha,x_m} \cdot \Big[-\frac{1}{\alpha} \cdot x^{-\alpha} \Big]_{x_m}^{\infty} = C_{\alpha,x_m} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot x_m^{-\alpha},$$

die Gleichung ist genau mit $\underline{C_{\alpha,x_m} = \alpha x_m^{\alpha}}$ erfüllt.

(b) Es gilt für $x \geq x_m$:

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(x) &= \mathbb{P}((-\infty,x]) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{f}(y)\, \mathrm{d}y = C_{\alpha,x_m} \cdot \int_{x_m}^{x} y^{-(\alpha+1)}\, \mathrm{d}y = C_{\alpha,x_m} \cdot \Big[-\frac{1}{\alpha} \cdot y^{-\alpha} \Big]_{-\infty}^{x} \\ &= -\frac{C_{\alpha,x_m}}{\alpha} \Big[x^{-\alpha} - x_m^{-\alpha} \Big] = 1 - \Big(\frac{x_m}{x}\Big)^{\alpha}. \end{aligned}$$

und für $x < x_m$:

$$\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}((-\infty,x]) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{f}(y)\, \mathrm{d}y = 0,$$

da über nichts integriert wird (die Dichte $\mathbb{f}$ ist erst für Werte größer als x_m nicht Null).
Insgesamt erhalten wir:

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < x_m, \\ 1 - \big(\frac{x_m}{x}\big)^{\alpha}, & x \geq x_m \end{cases}$$

(c) Es ist mit $\alpha = x_m = 1 : C_{\alpha,x_m} = 1$ und $f(x) = x^{-2}\mathbb{1}_{\{x\geq 1\}}$.

$$\mathbb{P}([1,2]) = \int_1^2 \mathbb{f}(x)\ \mathrm{d}x = \Big[-x^{-1}\Big]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann diese Wahrscheinlichkeit auch mittels der Verteilungsfunktion $\mathbb{F}(x) = \Big(1 - \frac{1}{x}\Big)\mathbb{1}_{\{x\geq 1\}}$ berechnet werden:

$$\mathbb{P}([1,2]) = \mathbb{P}((-\infty,2]) - \mathbb{P}((-\infty,1]) + \mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{F}(2) - \mathbb{F}(1) + 0 = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) - \Big(1 - 1\Big) = \frac{1}{2}.$$

Aufgrund Feststellung $\mathbb{P}((-\infty,1]) = \mathbb{F}(1) = 0$ (sieht man auch an der Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathbb{f}$ selbst) gilt

$$\mathbb{P}((2,\infty)) = 1 - \mathbb{P}((-\infty,1]) - \mathbb{P}([1,2]) = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung: Wir haben in (c) ohne weiteren Kommentar benutzt, dass $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$ bei stetigen Verteilungen gilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine stetig verteilte Zufallsvariable genau einen bestimmten Wert $x \in \mathbb{R}$ annimmt, ist Null.

Aufgabe 10 (Neyman-Pearson-Tests, Poisson-Verteilung, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Pkte). Die Anzahl der im Laufe eines Jahres bei einer Versicherung eingehenden Schadensmeldungen wird als Poisson-verteilt mit einem unbekannten Parameter $\lambda > 0$ angenommen. Aufgrund der Daten des Vorjahres möchten Sie die Hypothese $H_0 : \{\mathbb{P}_{\lambda_0}\}$ gegen die Alternative $H_1 : \{\mathbb{P}_{\lambda_1}\}$ mit einem $\lambda_1 > \lambda_0$ testen.

(a) Geben Sie die Neyman-Pearson-Tests für dieses Testproblem an. Was muss erfüllt sein, damit einer dieser Test ein bester Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ ist?

(b) Unter welchen Voraussetzungen ist ein bester Test φ zum Niveau α aus (a) ein gleichmäßig bester Test für $H_0 : \{\mathbb{P}_{\lambda_0}\}$ gegen $H_1' : \{\mathbb{P}_\lambda,\ \lambda > \lambda_0\}$?

(c) Im letzten Jahr sind 9876 Schadensmeldungen eingegangen. Wir interessieren uns für folgendes Testproblem:

H_0 : *Es werden 9000 Schadensmeldungen eingehen.*
H_1 : *Es werden mehr als 9000 Schadensmeldungen eingehen.*

Können Sie die Nullhypothese mit einem Neyman-Pearson-Test zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ablehnen?
Hinweis: Es gilt: $\sum_{k=0}^{9156} \frac{\lambda_0^k}{k!}\exp(-\lambda_0) \geq 0.95$.

Lösung 10.

(a) Es handelt sich hier um das statistische Experiment $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}_\Lambda)$ mit $\Omega = \mathbb{N}_0$, $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$, $\Lambda = \mathbb{R}^+$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $\mathbb{P}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda = \lambda_0, \lambda_1$ sind Poisson-Verteilungen mit Parameter $\lambda > 0$ und Zähldichten

$$\mathbb{p}_{\mathrm{Poi}_\lambda}(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} =: \mathbb{p}_\lambda(k)$$

Das statistische Testproblem mit einfachen Hypothese ist:

$$H_0 : \{\mathbb{P}_{\lambda_0}\} \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : \{\mathbb{P}_{\lambda_1}\}$$

wobei $\lambda_1 > \lambda_0$. Um die Ablehnbereiche

$$\mathcal{A}_c = \{k \in \mathbb{N}_0 \mid \mathbb{p}_{\lambda_1}(k) \geq c\mathbb{p}_{\lambda_0}(k)\} = \left\{k \in \mathbb{N}_0 \mid \frac{\mathbb{p}_{\lambda_1}(k)}{\mathbb{p}_{\lambda_0}(k)} \geq c\right\}$$

zu bestimmen, berechnen wir den Likelihoodquotienten:

$$L(k) := \frac{\mathbb{p}_{\lambda_1}(k)}{\mathbb{p}_{\lambda_0}(k)} = \frac{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^k}{k!}}{e^{-\lambda_0}\frac{\lambda_0^k}{k!}} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^k \cdot e^{\lambda_0-\lambda_1}. \tag{1}$$

Die Neyman-Pearson-Tests für dieses Testproblem lauten daher:

$$\varphi_{\mathcal{A}_c} : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}, \quad \varphi_{\mathcal{A}_c}(k) = \begin{cases} 0 & L(k) < c, \\ 1 & L(k) \geq c, \end{cases}$$

$\varphi_{\mathcal{A}_c}$ ist ein bester Neyman-Pearson-Test zum Niveau α, sofern die Gleichung $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\varphi_{\mathcal{A}_c} = 1) = \alpha$ für ein $c \in \mathbb{R}$ erfüllt werden kann.

(b) Da $k \longmapsto L(k)$ für festes $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$ streng monoton wachsend ist (siehe 1), können wir die Bedingungen $L(k) \geq c$ bzw. $L(k) < c$ umformen zu $k \geq c^*$ bzw. $k \leq c^*$. Die Neyman-Pearson-Tests sind also von der Form

$$\varphi_{c^*}(k) = \begin{cases} 0 & k < c^*, \\ 1, & k \geq c^*, \end{cases}$$

jeweils zum Niveau $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\varphi_{c^*} = 1) = \mathbb{P}_{\lambda_0}([c^*, \infty))$. Der Neyman-Pearson-Test ist ein bester Test zum Niveau α, sofern die Gleichung $\mathbb{P}_{\lambda_0}([c^*, \infty)) = \alpha$ für ein $c^* \in \mathbb{R}$ erfüllt werden kann.
Offensichtlich hängt die Existenz eines Neyman-Pearson-Tests zum Niveau α daher nicht vom konkreten Wert von λ_1 ab (sondern nur von der Eigenschaft von λ_1, größer als λ_0 zu sein).

Nehmen wir nun also an, dass für ein vorgegebenes $\alpha \in (0,1)$ ein $c^* \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $\mathbb{P}_{\lambda_0}(k \geq c^*) = \alpha$, wir nennen den zugehörigen besten Neyman-Pearson Test φ^*. Dann gilt für jedes $\lambda_1 > \lambda_0$ nach dem Neyman-Pearson-Lemma der Vorlesung:
Für jede Entscheidungsfunktion $\varphi : \Omega \to \{0,1\}$ mit $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\varphi = 1) \leq \alpha$:

$$\mathbb{P}_{\lambda_1}(\varphi = 0) \geq \mathbb{P}_{\lambda_1}(\varphi^* = 0).$$

Anders formuliert bedeutet das: Für vorgegebenes λ_0, α haben wir ein festes φ^* gefunden, sodass für alle $\lambda_1 > \lambda_0$ gilt: φ^* minimiert $\varphi \longmapsto \mathbb{P}_{\lambda_1}(\varphi = 0)$ unter der Nebenbedingung $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\varphi = 1) \leq \alpha$.
Das bedeutet gerade, dass φ^* ein gleichmäßig bester Test für die Hypothesen $H_0 : \{\mathbb{P}_{\lambda_0}\}$ gegen $H_1' : \{\mathbb{P}_\lambda, \lambda > \lambda_0\}$ ist.

(c) Nach (b) sind die Neyman-Pearson-Tests sind von der Form

$$\varphi_{c^*}(k) = \begin{cases} 0 & k < c^*, \\ 1, & k \geq c^*, \end{cases}$$

Wir suchen nun diejenigen c^*, für die die Neyman-Pearson-Tests das Signifikanzniveau α einhalten. Es gilt nach dem Hinweis für alle $c^* \geq 9156$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\lambda_0}(\varphi_{c^*} = 1) &= \mathbb{P}_{\lambda_0}([c^*, \infty)) = 1 - \mathbb{P}_{\lambda_0}([0, c^*)) \leq 1 - \mathbb{P}_{\lambda_0}([0, c^* - 1]) \\ &\leq 1 - \mathbb{P}_{\lambda_0}([0, 9156]) = 1 - \sum_{k=0}^{9156} \frac{\lambda_0^k}{k!} \exp(-\lambda_0) \leq 0.05 \end{aligned}$$

Damit sind alle Neyman-Pearson-Tests mit $c^* \geq 9156$ Tests zum Niveau α, insbesondere können wir mit

$$\varphi_{9156}(k) = \begin{cases} 0 & k < 9156, \\ 1, & k \geq 9156, \end{cases}$$

die Nullhypothese mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ ablehnen (d.h. $\varphi_{9156}(9876) = 1$).

Aufgabe 11 (Messbarkeit kombinierter Abbildungen, 4 = 1 + 0.5 + 0.5 + 2 Pkte).
Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum und $X_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von $(\mathcal{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbaren Abbildungen.

(a) (1) Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen $(\mathcal{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar sind:
   (i) $\sup_{n \geq m} X_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$
   (ii) $\inf_{n \geq m} X_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

(2) Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen $(\mathcal{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar sind:
   (i) $\limsup_{n \to \infty} X_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$
   (ii) $\liminf_{n \to \infty} X_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$

(3) Es existiere der punktweise Limes der Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, den wir mit $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ bezeichnen. Zeigen Sie: Dann ist X eine $(\mathcal{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbare Abbildung.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Y(\omega) := \begin{cases} 1 & X_1(\omega) > X_2(\omega), \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$(\mathcal{A}, \mathscr{B})$-messbar ist.

Lösung 11.

(a) (1) Es ist bekannt, dass $\{[-\infty, a] : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ ist. Sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\sup_{n \geq m} X_n\right)^{-1}([-\infty, a]) &= \{\omega \in \Omega : \sup_{n \geq m} X_n(\omega) \leq a\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \forall n \geq m : X_n(\omega) \leq a\} \\ &= \bigcap_{n \geq m} \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \leq a\} \\ &= \bigcap_{n \geq m} \underbrace{X_n^{-1}([-\infty, a])}_{\in \mathscr{A}, \text{ da } X_n \text{ messbar}} \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: $\left(\sup_{n\geq m} X_n\right)^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathscr{A}$, es folgt (mit Proposition 07.08): $\sup_{n\geq m} X_n$ ist $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar.
Nun verwenden wir das Erzeugendensystem $\{[-\infty, a) : a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ von $\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ und erhalten analog

$$
\begin{aligned}
\left(\inf_{n\geq m} X_n\right)^{-1}([-\infty, a)) &= \{\omega \in \Omega : \inf_{n\geq m} X_n(\omega) < a\} \\
&= \{\omega \in \Omega : \exists n \geq m : X_n(\omega) < a\} \\
&= \bigcup_{n\geq m} \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) < a\} \\
&= \bigcup_{n\geq m} \underbrace{X_n^{-1}([-\infty, a))}_{\in \mathscr{A}, \text{ da } X_n \text{ messbar}} \in \mathscr{A}.
\end{aligned}
$$

Damit ist gezeigt: $\left(\inf_{n\geq m} X_n\right)^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathscr{A}$, d.h. $\inf_{n\geq m} X_n$ ist $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar.
Alternativ kann beim Infimum auch mit $\inf_{n\geq m} X_n = -\sup_{n\geq m}(-X_n)$ *argumentieren. Man muss dann nur begründen, warum auch die Multiplikation einer Funktion mit* (-1) *die Messbarkeit erhält. Das ist klar, denn*
$(-X_n)^{-1}([-\infty, a]) = X_n^{-1}([-a, \infty]) \in \mathscr{A}$, *da auch* $[-a, \infty] \in \overline{\mathscr{B}}$.

(2) Aus (1)(i) ist bekannt, dass jede Abbildung $Y_m := \sup_{n\geq m} X_n : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar ist. Aus (1)(ii) folgt: $\inf_{m\geq 1} Y_m = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq m} X_n = \limsup_{n\to\infty} X_n$ ist $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar.
Die Argumentation für $\liminf_{n\to\infty} X_n$ ist analog.

(3) Existiert $X = \lim_{n\to\infty} X_n$, so gilt für alle $\omega \in \Omega : X(\omega) = \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)$. Daher ist X nach (2) $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar.

(b) Y hat die Form $Y = \mathbb{1}_A$ mit $A := \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) > X_2(\omega)\}$. Offensichtlich gilt für eine beliebige Menge $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$:

$$
Y^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset, & 0, 1 \notin B, \\ A, & 1 \in B, 0 \notin B, \\ A^c, & 1 \notin B, 0 \in B, \\ \Omega, & 0, 1 \in B. \end{cases}
$$

Es ist also $Y^{-1}(B) \in \mathscr{A}$, falls wir zeigen können, dass $A \in \mathscr{A}$.
In unserem Fall gilt ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, daher liegt in jedem Intervall $(X_2(\omega), X_1(\omega))$ eine rationale Zahl):

$$
\begin{aligned}
A &= \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) > X_2(\omega)\} \\
&= \{\omega \in \Omega : \exists q \in \mathbb{Q} : X_1(\omega) > q \text{ und } q > X_2(\omega)\} \\
&= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) > q\} \cap \{\omega \in \Omega : q > X_2(\omega)\}\Big) \\
&= \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big(\underbrace{X_1^{-1}((q, \infty))}_{\in \mathscr{A}} \cap \underbrace{X_2^{-1}((-\infty, q))}_{\in \mathscr{A}}\Big) \in \mathscr{A},
\end{aligned}
$$

da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist und abzählbare Schnitte / Vereinigungen wieder in der σ-Algebra $\mathscr{A}$ enthalten sind.

Aufgabe 12 (Messbarkeit reellwertiger Abbildungen, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

(a) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Zeigen Sie, dass f dann schon eine $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$-messbare Abbildung ist.

(b) Die Funktion $g : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(s,x) \longmapsto g(s,x)$ sei für alle $x \in [0,1]$ stetig in s. Außerdem sei g für alle $s \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar in x. Zeigen Sie, dass $h(s) := \int_0^1 g(s,x)\ \mathrm{d}x$ $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$-messbar ist.

(c) Sei $\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Es gelte $\{x : \kappa(x) = c\} \in \mathscr{B}$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Folgt hieraus bereits die Messbarkeit von κ? Beweisen Sie ihre Antwort! (Und vergleichen Sie das Ergebnis mit Proposition 08.04.)
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis $\mathscr{B} \neq 2^{\mathbb{R}}$ verwenden.

Lösung 12.

(a) **Möglichkeit 1:** Wir nutzen folgende Charakterisierung:

$$I \text{ Intervall} \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall a,b \in I : \forall x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$$

Wir betrachten $\mathcal{E} := \{I \subseteq \mathbb{R}, I \text{ Intervall }\}$. Dies ist ein Erzeugendensystem von $\mathscr{B}$. Für die $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$-Messbarkeit von f genügt es zu zeigen, dass $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathscr{B}$ ist.
Sei dazu $I \in \mathcal{E}$ ein Intervall. Wir zeigen mittels obiger Charakterisierung, dass $f^{-1}(I)$ ein Intervall ist: Seien $a, b \in f^{-1}(I)$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$. Dann gilt (weil f monoton wachsend ist)

$$f(a), f(b) \in I, \quad f(x) \in \mathbb{R}, \quad f(a) \leq f(x) \leq (b).$$

Da I ein Intervall ist, folgt $f(x) \in I$, d.h. $x \in f^{-1}(I)$.
Damit ist $f^{-1}(I)$ ein Intervall, also $f^{-1}(I) \in \mathcal{B}$ und also $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}$.
Möglichkeit 2: $\mathcal{E} := \{(-\infty, y] : y \in \mathbb{R}\}$ ist ein Erzeugendensystem der Borelschen σ-Algebra $\mathscr{B}$, d.h. $\sigma(\mathcal{E}) = \mathscr{B}$. Für die $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$-Messbarkeit von f genügt es zu zeigen, dass $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathscr{B}$ ist.
Sei also $(-\infty, y] \in \mathcal{E}$ mit $y \in \mathbb{R}$ beliebig. Definiere $M := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$ und $c := \sup M$. (Im Falle $M = \emptyset$ setze $c := -\infty$, im Falle $M = \mathbb{R}$ setze $c := \infty$). Dann gilt:

$$(-\infty, c) \quad \subseteq \quad f^{-1}((-\infty, y]) \quad \subseteq \quad (-\infty, c] \cap \mathbb{R} \qquad (\text{und somit } f^{-1}((-\infty, y]) \in \mathcal{B}),$$

denn:

- Sei $x \in (-\infty, c)$. Dann ist $x < c$. Angenommen $f(x) > y$, so wäre nach Def. des Supremums $c \leq x$, Widerspruch! Also ist $f(x) \leq y$, d.h. $x \in f^{-1}((-\infty, y])$.
- Sei $x \in f^{-1}((-\infty, y])$. Dann ist $f(x) \leq y$. Nach Def. des Supremums folgt $x \leq c$, also $x \in (-\infty, c]$.

(b) Da g für alle $s \in \mathbb{R}$ in x Riemann-integrierbar ist, gilt

$$h(s) = \int_0^1 g(s,x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} g\Big(s, \frac{t}{n}\Big) \cdot \Big(\frac{t}{n} - \frac{t-1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} g\Big(s, \frac{t}{n}\Big)$$

(das Riemann-Integral ist Grenzwert von Riemann-Summen mit der Partition $[\frac{t-1}{n}, \frac{t}{n})$, $t = 1, ..., n$ des Intervalls $[0,1)$). Definiere nun

$$h_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h_n(s) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} g\Big(s, \frac{t}{n}\Big).$$

Die h_n sind stetig, da $g(s,x)$ stetig in s ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit sind die h_n $(\mathscr{B},\mathscr{B})$-messbar. Wegen $h = \lim_{n\to\infty} h_n$ ist damit auch h $(\mathscr{B},\mathscr{B})$-messbar nach Aufgabe 11.

(c) κ muss nicht notwendigerweise messbar sein. Wir geben ein Gegenbeispiel an:
Sei $A \in 2^{\mathbb{R}} \setminus \mathscr{B}$. Definiere die Funktion

$$\kappa : (\mathbb{R},\mathscr{B}) \longrightarrow (\mathbb{R},\mathscr{B}), \qquad \kappa(x) := \begin{cases} |x| & x \in A, \\ -|x| - 1 & x \in A^c. \end{cases}$$

Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}$:

$$\kappa^{-1}(\{c\}) = \underbrace{(|x|^{-1}(\{c\})) \cap A)}_{\subseteq\{c,-c\}} \,\dot\cup\, \underbrace{((-|x|-1)^{-1})(\{c\}) \cap A^c)}_{\subseteq\{1+c,-1-c\}}$$

d.h. $\kappa^{-1}(\{c\}) \in \mathscr{B}$. Aber es gilt auch $[0,\infty) \in \mathscr{B}$ und

$$\kappa^{-1}([0,\infty)) = A \notin \mathscr{B}$$

also ist κ nicht $(\mathscr{B},\mathscr{B})$ -messbar.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **30. November 2020, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`