Übungen zu Funktionentheorie 1 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 11 Musterlösung

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 10. Juli

Bearbeiten Sie bitte nur vier Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.
Für jedes Gebiet D bezeichne $\mathcal{O}(D)$ die Menge der holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$.

46. Aufgabe: Wir sagen "das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_\nu)$ konvergiert absolut" für eine Folge $(a_\nu)_\nu$ komplexer Zahlen, falls die Reihe $\sum_\nu a_\nu$ absolut konvergiert. Zeigen Sie:

(a) Das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht absolut, obwohl die Folge der Partialprodukte $(\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{n})$ für $N \to \infty$ konvergiert.

(b) Das Produkt $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^2}$ konvergiert absolut. Berechnen Sie den Grenzwert.

(c) Das Produkt $\phi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^n)$ konvergiert absolut für $z \in \mathbb{C}$ genau dann wenn $|z| < 1$. Es definiert eine holomorphe Funktion ϕ in $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Lösung:

(a) Die Folge $(1/n)_n$ konvergiert gegen Null, also konvergiert die Folge $(a_n)_n$ für $a_n = \frac{1}{n} - 1$ gegen -1. Damit kann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergieren, insbesondere nicht absolut konvergieren. Nach Definition konvergiert das Produkt nicht absolut.

Die Partialprodukte $\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \frac{1}{N!}$ konvergieren gegen Null für $N \to \infty$. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N_0 mit $\epsilon^{-1} < N_0$ nach dem archimedischen Axiom. Für alle natürlichen Zahlen $N > N_0$ gilt also

$$|\prod_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{N!} - 0| < \frac{1}{N} < \frac{1}{N_0} < \epsilon \ .$$

(b) In Analysis 1 zeigt man, dass $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ absolut konvergiert, also konvergiert nach Definition unser Produkt absolut. Das Partialprodukt

$$\prod_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{n^2} = \prod_{n=2}^{N} \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \frac{N+1}{2N} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{N}) \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{2} \ .$$

konvergiert für $N \to \infty$ gegen $\frac{1}{2}$.

(c) Die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ konvergiert bekanntlich im Einheitskreis, also für $z \in E$. Genau dort konvergiert also auch unser Produkt absolut nach Definition. Für absolut konvergente Produkte liefert die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Formel

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}(b_n)) \qquad \text{falls } \forall n \text{ gilt } |b_n - 1| < 1 \ .$$

In unserem Fall ist für $b_n(z) = (1 - z^n)$ die Bedingung $|b_n - 1| < 1$ nach Voraussetzung erfüllt. Nach einem Satz aus der Vorlesung[1] konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Log}(b_n(z))$ kompakt absolut

---

[1] Im Skript Seite 68, Zeile 4. Beachte: Für jede reelle Zahl $0 < R < 1$ gibt es eine reelle Konstante C sodass $|\mathrm{Log}(1 + a)| < C|a|$ gilt für alle komplexen a mit $|a| < R$. Das zeigt man z.B. mit der Taylorentwicklung des Logarithmus.

in E, d.h. gleichmäßig absolut für z in einem Kompaktum in E. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß ist der Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z)$ eine holomorphe Funktion in z. Insbesondere ist $\phi(z) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$ eine holomorphe Funktion.

47. Aufgabe: Seien $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > -\epsilon\}$ für ein $\epsilon > 0$ und $f : D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ eine meromorphe Funktion mit endlich vielen Polstellen $s \in S$, die alle in der oberen Halbebene liegen, d.h. $\mathrm{Im}(s) > 0$. Außerdem gibt es reelle $\delta > 0$, $c > 0$ und $C > 0$ sodass die Abschätzung $|f(z)| < C|z|^{-1-\delta}$ für alle $z \in D$ mit $|z| > c$ gilt.

(a) Zeigen Sie:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{s\in S} \mathrm{Res}_s(f) \ .$$

(b) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis zu a): Verwenden Sie den Weg
$$\gamma(t) = \begin{cases} -R + 2tR & 0 \le t < 1 \ , \\ R\exp(2\pi i(t-1)) & 1 \le t \le 2 \ , \end{cases}$$
und verwenden Sie den Residuensatz. Zeigen Sie, dass das Integral über den Kreisbogen (also $1 \le t \le 2$) für $R \to \infty$ gegen Null geht.

Lösung:

(a) Sei γ der Weg aus dem Hinweis. Die Umlaufzahl $N(s,\gamma)$ um $s \in S$ ist gleich Eins genau dann wenn $|s| < R$ und $\mathrm{Im}(s) > 0$ und ist Null sonst.[2] Der Residuensatz und die Linearität des Integrals liefern
$$2\pi i \sum_{s\in S \text{ mit } |s|<R} \mathrm{Res}_s(f) = \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x}_{I_1} + \underbrace{\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z}_{I_2}$$
wobei $\gamma_2(t) = Re^{2\pi i t}$ für $1 \le t \le 2$ ist. Das uneigentliche Riemann-Integral ist nach Definition $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} I_1$. Das zweite Integral ist
$$I_2 = \oint_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_1^2 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \int_1^2 f(Re^{2\pi i t})Re^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t \ .$$
Es bleibt nur noch zu zeigen, dass I_2 für $R \to \infty$ gegen Null konvergiert. Die Standardintegralabschätzung liefert
$$|I_2| \le 2\pi \int_1^2 |f(Re^{2\pi i t})|R\,\mathrm{d}t \le 2\pi R \int_1^2 CR^{-1-\delta}\,\mathrm{d}t \le 2\pi C R^{-\delta} \ .$$
Für $\delta > 0$ geht dieser Ausdruck gegen Null für $R \to \infty$. Also gilt $\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$.

[2] Das zeigt man z.B. so wie in Aufgabe 43.

(b) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ hat Pole bei $z = \pm i$. Nur ein Pol liegt in der oberen Halbebene, also ist $S = \{i\}$. Die Laurententwicklung von f im Kreisring $D_{0,1}(i)$ ist nach der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z-i}\frac{1}{((z-i)+2i)} = \frac{1}{2i(z-i)} \cdot \frac{1}{\frac{z-i}{2i}+1} \\ &= \frac{1}{2i(z-i)} \sum_{n=0}^{\infty} (-2i)^{-n}(z-i)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (-2i)^{-n-1}(z-i)^{n-1} \ . \end{aligned}$$

Das Residuum ist der Koeffizient zu $n = 0$, also $\mathrm{Res}_i(f) = \frac{1}{2i}$. Nach a) ist das gesuchte Integral damit $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$.

Anmerkung: Es gibt natürlich eine Formel, um das Residuum auszurechnen. Damit kommt man schneller zum Ziel. Siehe Aufgabe 51.

48. Aufgabe: Wir zeigen in mehreren Schritten die Gleichung

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \overset{!}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \ . \qquad (*)$$

(a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ konvergiert in $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ kompakt, stellt dort also eine holomorphe Funktion dar.

(b) Die Differenz $g(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ hat hebbare Singularitäten in $z \in \mathbb{Z}$ und erfüllt $g(z) = g(z+1)$.

(c) $|g(z)|$ konvergiert gleichmäßig gegen Null für $\mathrm{Im}(z) \to \infty$. Mit anderen Worten: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es $C > 0$ mit $|g(z)| < \epsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|\mathrm{Im}(z)| > C$.

(d) Zeigen Sie $g = 0$. Hinweis: Satz von Liouville.

Lösung: Wir schreiben $g = g_1 - g_2$ mit

$$g_1(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \qquad \text{und} \qquad g_2(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \ .$$

(a) Sei $K \subseteq \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ eine kompakte Teilmenge. Da K beschränkt ist, gibt es eine feste natürliche Zahl N mit $-N < \mathrm{Re}(z) < N$ für alle $z \in K$. Dann gilt für $z \in K$

$$g_2(z) = \sum_{-N\le n\le N} \frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n\ge N+1} \frac{1}{(z-n)^2} + \sum_{n\le -N-1} \frac{1}{(z-n)^2} \ .$$

Die erste Summe ist endlich. Für die zweite Summe beachte $|z-n|^2 \ge |n - \mathrm{Re}(z)|^2 \ge (n-N)^2$ für alle $z \in K$ und alle natürlichen $n > N$. Damit lässt sich die zweite Summe nach oben abschätzen durch

$$\sum_{n\ge N+1} \left| \frac{1}{(z-n)^2} \right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(N-n)^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-2} < \infty \ .$$

Die dritte Summe behandelt man ähnlich wie die zweite. Jeder der drei Summanden von g_2 konvergiert also gleichmäßig absolut in K.

(b) Die $\mathbb{Z}$-Periodizität ist klar. Sinus hat in Null eine einfache Nullstelle, also hat $g_1(z)$ in Null einen Pol zweiter Ordnung mit Laurent-Entwicklung $g_1(z) = a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + h(z)$ für eine in $z = 0$ holomorphe Funktion $h(z)$. Durch Cauchy-Faltung zeigt man $a_{-2} = 1$ und $a_{-1} = 0$. Für

$$g_2(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

ist die Reihe über $n \neq 0$ holomorph in $z = 0$ (Weierstraß-Konvergenzsatz). Daher ist der Hauptteil von g_2 gleich z^{-2}. Die Hauptteile von g_1 und g_2 für die Entwicklung in $D_{0,1}(0)$ stimmen also überein. Damit verschwindet der Hauptteil von $g = g_1 - g_2$ in $z = 0$ und die Singularität von g in $z = 0$ ist hebbar nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz. Wegen $\mathbb{Z}$-Periodizität sind alle Singularitäten von g hebbar. Wir bezeichnen die holomorphe Fortsetzung von g zu einer ganzen holomorphen Funktion wieder mit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

(c) Bekanntlich gilt $\sin(\pi z) = \frac{1}{2i}(e^{i\pi z} - e^{i\pi z})$. Für gegebenes $\epsilon > 0$ wähle $C > 4/\epsilon$. Für $\mathrm{Im}(z) > C$ gilt dann nach umgekehrter Dreiecksungleichung

$$|e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}| \geq e^{\pi \mathrm{Im}(z)} - e^{-\pi \mathrm{Im}(z)} \geq e^{\pi C} - 1 > \pi C$$

und damit

$$|g_1(z)| = \tfrac{2\pi}{|e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}|} < 2/C = \epsilon/2 \ .$$

Für $\mathrm{Im}(z) < -C$ gilt die Abschätzung entsprechend wegen $g_1(-z) = -g_1(z)$. Also folgt

$$\sup_{|\mathrm{Im}(z)| > C} |g_1(z)| < \epsilon/2 \ .$$

Für $g_2(z)$ argumentiert so: Wegen Periodizität können wir annehmen $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$. Für $|Im(z)| \geq C$ und $n \neq 0$ gilt dann

$$|n-z|^2 = |n-x|^2 + |y|^2 \geq |(|n| - |x|)^2 + y^2 = (|n|-1)^2 + y^2 \ .$$

Wähle jetzt eine natürliche Zahl N_1 sodass $\sum_{n \geq N_1} n^{-2} < \epsilon/4$. Für $|\mathrm{Im}(z)| \geq C$ gilt

$$|g_2(z)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n-z|^2} \leq \sum_{|n| \leq N_1} \frac{1}{y^2} + \sum_{|n| > N_1} \frac{1}{(|n|-1)^2} \leq \sum_{|n| \leq N_1} \frac{1}{C^2} + \sum_{|n| > N_1} \frac{1}{(|n|-1)^2}$$

Durch eventuelles Vergrößern von C können wir annehmen $C > \sqrt{8N_1/\epsilon}$, dann sind beide Summanden auf der rechten Seite kleiner als $\epsilon/4$. Mit der Dreiecksungleichung folgt die Aussage.

(d) Die Funktion $g(z)$ ist für $|\mathrm{Im}(z)| > C$ wie oben gezeigt beschränkt durch ϵ. Der Quader $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| \leq 1 \ , \ |\mathrm{Im}(z)| \leq C\}$ ist kompakt, dort ist g also beschränkt. Wegen Perioduizität ist g beschränkt im Horizontalstreifen $|\mathrm{Im}(z)| \leq C$. Also ist g beschränkt und nach Satz von Liouville konstant. Diese Konstante kann aber nur Null sein, weil $g(z)$ für $\mathrm{Im}(z) \to \infty$ gegen Null konvergiert. Also ist $g = 0$.

49. Aufgabe: Wir zeigen in mehreren Schritten die Gleichung

$$\pi \cot(\pi z) \quad \stackrel{!}{=} \quad \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2z}{z^2 - n^2} \right) \ . \qquad (**)$$

(a) Zeigen Sie, dass die rechte Seite kompakt konvergiert in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

(b) Sei $h(z)$ die Differenz beider Seiten in $(**)$. Zeigen Sie $h' = 0$ wegen $(*)$.

(c) Zeigen Sie $h = 0$, indem Sie $h(z)$ für ein festes z explizit berechnen.

Lösung: Sei $h(z) = h_1(z) - h_2(z)$ mit

$$h_1(z) = \pi \cot(\pi z) \quad \text{und} \quad h_2(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2z}{z^2 - n^2} \right)$$

(a) h_2 konvergiert kompakt (ähnlich wie in der vorigen Aufgabe). Sei $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ein Kompaktum und wähle N sodass $|z| < N$ für alle $z \in K$. Dann gilt für alle $n > \sqrt{2}N$

$$|\frac{2z}{z^2 - n^2}| \leq \frac{2N}{|n^2| - |z^2|} \leq \frac{2N}{|n^2| - N^2} \leq \frac{2N}{|n^2/2|} = \text{const} \cdot \frac{1}{n^2} \ .$$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $h_2(z)$ absolut und gleichmäßig in K.

(b) Nach Quotientenregel gilt

$$h_1' = \pi^2 \cot'(\pi z) = -\pi^2 \frac{\sin^2(\pi z) + \cos^2(\pi z)}{\sin^2(\pi z)} = \frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = -g_1(z)$$

mit g_1 aus der vorigen Aufgabe. Da h_2 kompakt konvergiert, können wir gliedweise differenzieren. Also

$$\begin{aligned} h_2'(z) &= -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\frac{2z}{z^2 - n^2}) \\ &= -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}) \\ &= -\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{(z-n)^2} - \frac{1}{(z+n)^2}) = -g_2(z) \ . \end{aligned}$$

Wegen $(*)$ folgt $h'(z) = -g(z) = 0$. Damit ist $h(z)$ lokalkonstant.

(c) Da $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ zusammenhängend und h lokalkonstant ist, ist h konstant. Wir bestimmen die Laurententwicklung von h_1 und h_2 in $D_{0,1}(0)$. Sei $h_1(z) = \sum_{\nu=-1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ für gewisse a_ν. Dann gilt $\sin(\pi z) \cdot h_1(z) = \pi \cos(\pi z)$. Die Taylorreihe von Sinus und Cosinus ist bekannt. Setzt man diese ein, erhält man durch Cauchy-Faltung die Gleichungen $0 \cdot a_0 + \pi \cdot a_{-1} = \pi$ für den konstanten Term und $0 \cdot a_1 + \pi \cdot a_0 + 0 \cdot a_{-1} = \pi \cdot 1$ für den linearen Term. Daraus folgt $a_{-1} = 1$ und $a_0 = 0$. Die Funktion h_2 ist per Definition schon in Laurentzerlegung also ist

$$h_2(z) = \sum_{\nu=-1}^{\infty} b_\nu z^\nu = b_{-1} z^{-1} + b_0 \cdot 1 + O(z)$$

mit $b_{-1} = 1$ und der konstante Term b_0 ist der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2z}{z^2 - n^2} \right)$ bei $z = 0$, also $b_0 = 0$. Die Laurentreihe von $h(z)$ beginnt mit $0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot 1 + O(z)$. Also ist $h(0) = 0$. Da h konstant ist, folgt $h(z) = 0$ für alle z. Das zeigt die Aussage.

50. Aufgabe: Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

Hinweis: Berechnen Sie für beide Seiten von $(*)$ die Laurentkoeffizienten a_{-2}, a_{-1}, a_0 für die Laurententwicklung in $D_{0,1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$. Verwenden Sie zum Beispiel die Cauchy-Faltung.

Lösung: In Aufgabe 48 haben wir gezeigt, dass g_1 in $z = 0$ einen Pol zweiter Ordnung hat.
Die Laurententwicklung von g_1 sei

$$g_1(z) = \sum_{\nu=-2}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

$g_1(z)$ gerade, weil $\sin^2(\pi z) = \sin^2(-\pi z)$. Für die Taylorreihe

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sin^2(\pi z)\pi^{-2} = \sum_{\nu=2}^{\infty} b_\nu z^\nu$$

verschwinden also die Koeffizienten zu ungeraden Indizes $b_3 = b_5 = \cdots = 0$ und $a_{-1} = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Durch Cauchy-Faltung zeigt man $b_2 = 1$ und $b_4 = -\frac{2}{3!}\pi^2 = -\pi^2/3$. Dann gilt

$$1 = g_1(z) \cdot \frac{1}{g_1(z)} = \left(\sum_{\nu=-2}^{\infty} a_\nu z^\nu\right) \cdot \left(\sum_{\nu=2}^{\infty} b_\nu z^\nu\right) \ .$$

Durch Cauchy-Faltung erhält man die Gleichungen

$$a_{-2} \cdot b_2 = 1$$

$$a_{-2} \cdot b_3 + a_{-1} \cdot b_2 = 0$$

$$a_{-2} \cdot b_4 + a_{-1} \cdot b_3 + a_0 \cdot b_2 = 0$$

und daraus folgt $a_{-2} = 1$ und $a_{-1} = 0$ und $a_0 = \frac{-a_{-2}b_4}{b_2} = \frac{1}{3}\pi^2$.
Die Laurentzerlegung von g_2 ist per Definition

$$g_2(z) = \frac{1}{z^2} + f(z)$$

für $f(z) = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$. Die Funktion $f(z)$ ist holomorph fortsetzbar nach 0 und nimmt dort den Wert $f(0) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ an. Der Vergleich der Laurentkoeffizienten von g_1 und g_2 zeigt

$$\boxed{\pi^2/3 = a_0 = f(0) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \ .$$

Teilen durch zwei liefert die Aussage.