Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

# Übungen zur Linearen Algebra I

## Lösungen zum 9. Übungsblatt

---

**Aufgabe 1** (3 + 3 Punkte)**.** Es sei $K$ ein Körper.

(a) Wir betrachten lineare Abbildungen $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to V$ zwischen $K$-Vektorräumen $V$ und $W$. Zeigen Sie: Es gibt genau dann ein $v \in V \smallsetminus \{0\}$ mit $(g \circ f)(v) = v$, wenn es ein $w \in W \smallsetminus \{0\}$ gibt mit $(f \circ g)(w) = w$.

(b) Es sei $A \in M_{n,m}(K)$ und $B \in M_{m,n}(K)$. Zeigen Sie: Die Matrix $E_n - AB$ ist genau dann invertierbar, wenn die Matrix $E_m - BA$ invertierbar ist.

**Lösung.**

(a) Sei $v \neq 0$ mit $(g \circ f)(v) = v$. Insbesondere ist dann $w = f(v) \neq 0$. Dann gilt $(f \circ g)(w) = (f \circ g \circ f)(v) = f(v) = w$ wie gefordert. Aus Symmetriegründen gilt auch die andere Implikation.

(b) $E_n - AB$ ist genau dann nicht invertierbar, wenn es ein $v \in K^n$ gibt mit $(E_n - AB) \cdot v = 0$ und $v \neq 0$, also genau dann, wenn es ein $v \neq 0$ mit $ABv = v$ gibt. Nach (a) ist das genau dann der Fall, wenn es ein $w \in K^m$ gibt, welches ungleich null ist und für welches $BAw = w$ gilt, also genau dann, wenn es ein nicht-triviales Element im Kern von $E_m - BA$ gibt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $E_m - BA$ nicht invertierbar ist.

**Aufgabe 2** (2 + 4 Punkte)**.** Sei $K$ ein Körper. Seien ferner $A \in M_{n,m}(K)$ und $B \in M_{m,n}(K)$ zwei Matrizen, für die $ABA = A$ gilt. Zeigen Sie:

(a) $\ker A = \{x - BAx \mid x \in K^m\}$.

(b) Das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ hat für $b \in K^n$ genau dann eine Lösung, wenn $ABb = b$ gilt. In diesem Fall gilt:

$$\{x \in K^m \mid Ax = b\} = \left\{Bb + x' - BAx' \mid x' \in K^m\right\}.$$

**Lösung.**

(a) Ist $x \in \ker A$, so ist $x = x - 0 = x - BAx$. Umgekehrt gilt für $x \in K^m$: $A(x - BAx) = Ax - ABAx = Ax - Ax = 0$.

(b) Gilt $Ax = b$, so gilt $ABb = AB(Ax) = Ax = b$. Ist umgekehrt $ABb = b$, so löst $x = Bb$ offenbar $Ax = b$.

Gegeben $x$ mit $Ax = b$ setze $x' = x$. Dann ist $Bb+x'-BAx' = Bb+x-BAx = Bb+x-Bb = x$. Ist umgekehrt $x' \in K^m$ und das inhomogene Gleichungssystem lösbar, so gilt nach eben gezeigtem: $A(Bb + x' - BAx') = ABb + Ax' - ABAx' = ABb = b$.

**Aufgabe 3** ($4 \cdot 1 + 2$ Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{Q}$. Bringen Sie die folgenden Matrizen über $\mathbb{Q}$ mit dem Verfahren der Vorlesung in strenge Zeilenstufenform und bestimmen Sie die jeweiligen Ränge.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}.$$

**Lösung.** Die Ränge der ersten vier Matrizen sind jeweils 2, 3, 2 und 1. Wir führen den Algorithmus exemplarisch an der letzten Matrix vor:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot (-1) \\ \\ + \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot (-a) \\ + \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{a \neq \pm 1}{\dashrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot (1-a^2)^{-1} \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \mid \cdot (-a) \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist $a \in \{\pm 1\}$, so ist bereits vor dem gestrichelten Pfeil die strenge Zeilenstufenform erreicht und der Rang eins, sonst ist der Rang zwei.

**Aufgabe 4** (1 + 2 + 2 + 1 Punkte)**.** Sei $\underline{e} = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $V = \mathbb{Q}^2$, $\underline{v} = ((1,2)^t, (0,-1)^t)$ und $\underline{w} = ((1,1)^t, (3,2)^t)$.

(a) Zeigen Sie, dass auch $\underline{v}$ und $\underline{w}$ Basen von $V$ sind. Bestimmen Sie $T = M^{\underline{v}}_{\underline{e}}(\mathrm{id}_V)$ und $S = M^{\underline{w}}_{\underline{e}}(\mathrm{id}_V)$.

(b) Invertieren Sie $T$ und $S$ mit dem Verfahren der Vorlesung.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $M^{\underline{e}}_{\underline{e}}(f)$, $A = M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f)$, $B = M^{\underline{w}}_{\underline{w}}(f)$ und $C = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(\mathrm{id}_V)$ zum Endomorphismus $f\colon V \to V$, welcher durch $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot x$ definiert ist.

(d) Bestimmen Sie $AC - CB$.

**Lösung.**

(a) Es ist sofort erkennbar, dass $(1,2)^t \notin \mathrm{Lin}((0,-1)^t)$ und $(3,2)^t \notin \mathrm{Lin}((1,1)^t)$. Damit sind $\underline{v}$ und $\underline{w}$ linear unabhängig und aus Dimensionsgründen auch Basen. Wir lesen sofort ab:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir bestimmen $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ durch:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \mid \cdot (-2) \\ + \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \mid \cdot (-1) \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Wir bestimmen $S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ durch:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \mid \cdot (-1) \\ + \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \mid \cdot 3 \end{matrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \mid \cdot (-1) \end{matrix}$$

(c) $M^{\underline{e}}_{\underline{e}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ per Definition. Es ist

$$A = M^{\underline{e}}_{\underline{v}}(\mathrm{id_V}) M^{\underline{e}}_{\underline{e}}(f) M^{\underline{v}}_{\underline{e}}(\mathrm{id_V}) = T^{-1} M^{\underline{e}}_{\underline{e}}(f) T = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 13 & -5 \end{pmatrix},$$

$$B = M^{\underline{e}}_{\underline{w}}(\mathrm{id_V}) M^{\underline{e}}_{\underline{e}}(f) M^{\underline{w}}_{\underline{e}}(\mathrm{id_V}) = S^{-1} M^{\underline{e}}_{\underline{e}}(f) S = \begin{pmatrix} -12 & -29 \\ 5 & 12 \end{pmatrix},$$

und

$$C = M^{\underline{e}}_{\underline{v}}(\mathrm{id_V}) M^{\underline{w}}_{\underline{e}}(\mathrm{id_V}) = T^{-1} S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d) $AC - CB = M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f) M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(\mathrm{id}_V) - M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(\mathrm{id}_V) M^{\underline{w}}_{\underline{w}}(f) = M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) - M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(f) = 0.$