Aufgabe 8

(a) Sei $x \in (I(J+K))$. Dann gibt es Elemente $a_1, \ldots, a_n \in I$, $b_1, \ldots, b_n, \in J$ und $c_1, \ldots, c_n \in K$, sodass $x = \sum_{i=1}^n a_i(b_i+c_i) = \sum_{i=1}^n \underbrace{a_i b_i}_{\in IJ} + \sum_{i=1}^n \underbrace{a_i c_i}_{\in IK}$. Da IJ und IK wieder Ideale sind, gilt also auch $\sum_{i=1}^n a_i b_i \in IJ$ und $\sum_{i=1}^n a_i c_i \in IK$ und damit $x \in IJ + IK$. Sei nun $x \in IJ + IK$. Dann existieren $a_1, \ldots a_{2n} \in I$, $b_1, \ldots b_{2n} \in J$ und $c_1, \ldots c_{2n} \in K$ mit $b_{n+i} = c_i = 0 \forall 1 \leq i \leq n$, sodass $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=n+1}^{2n} a_i c_i \overset{\forall i>n: b_i=0, \forall i<n+1: c_i=0}{=} \sum_{i=1}^{2n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{2n} a_i c_i = \sum_{i=1}^{2n} a_i(b_i+c_i) \in I(J+K)$. Also erhalten wir insgesamt $I(J+K) \subseteq IJ + JK$ und $IJ + JK \subseteq I(J+K)$, woraus $IJ + IK = I(J+K)$ folgt.

(b) Sei $x \in (I \cap J)(I+J)$. Dann existieren $a_1, \ldots, a_n \in I \cap J$, $b_1, \ldots, b_n, \in I$ und $c_1, \ldots, c_n \in J$, sodass $x = \sum_{i=1}^n a_i(b_i+c_i) \overset{a_i \in I,\, a_i \in J}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{a_i b_i}_{\in JI} + \sum_{i=1}^n \underbrace{a_i c_i}_{\in IJ}$. Da $IJ = JI$ ein Ideal ist, gilt auch $\sum_{i=1}^n a_i b_i \in IJ$ und $\sum_{i=1}^n a_i c_i \in IJ$ und damit $x \in IJ$. Sei nun $x \in IJ$. Dann existieren $a_1, \ldots, a_n \in I$ und $b_1, \ldots, b_n, \in J$, sodass $x = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Da I ein Ideal ist, liegen auch alle Vielfachen von a_i, also insbesondere auch $b_i \cdot a_i$ in I. Analog folgt: $a_i \cdot b_i \in J$. Da IJ ein Ideal ist, liegt auch die Summe $\sum_{i=1}^n a_i b_i \in I$ und $\sum_{i=1}^n a_i b_i \in J$, also $\sum_{i=1}^n a_i b_i \in I \cap J$.

(c) Setzt man in der b $(I+J) = (1)$ erhält man $(I \cap J)(1) \subseteq IJ \subseteq I \cap J$. Da $I \cap J$ ein Ideal ist, liegen alle Vielfachen von Elementen wieder in $I \cap J$. Also gilt $(I \cap J)(1) = I \cap J$. Damit erhalten wir $I \cap J \subseteq IJ \subseteq I \cap J \Leftrightarrow IJ = I \cap J$.

Aufgabe 9

Am Mittwoch, den 13. Mai, wird die Python sowohl gebadet als auch gefüttert, da 7 Tage seit dem Mittwoch, an dem sie gebadet wurde vergangen sind und $8 = 2 \cdot 4$ Tage seit dem Dienstag, an dem sie gefüttert wurde, vergangen sind. Die Menge aller Tage ist offensichtlich isomorph zum Ring der ganzen Zahlen , wobei Mittwoch, der 13. Mai 2020 auf die 0 abgebildet werde. Alle Tage, an denen die Python dann gebadet wird, werden dann auf $7\mathbb{Z}$ abgebildet, alle Tage, an denen die Python gefüttert wird, werden auf $4\mathbb{Z}$ abgebildet. Die Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}), r \to (r + 4\mathbb{Z}, r + 7\mathbb{Z})$ ist nach dem chinesischen Restsatz ein Ringhomomorphismus mit dem Kern $\ker \phi = 4\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z} = 28\mathbb{Z}$. Der Kern von ϕ ist isomorph zur Menge aller Tage, an denen die Python sowohl gebadet als auch gefüttert wird. Diese ist also gleich $\{13. \text{ Mai } 2020 + k \cdot 28\text{d} | k \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 10

(a) Es gilt $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{-33}$ und daher $\delta(1) = 1^2 = 1$. Sei $x = a + b \cdot \sqrt{-3}$ und $y = c + d \cdot \sqrt{-3}$. Dann ist $\delta(x \cdot y) = \delta(ac - 3bd + \sqrt{-3} \cdot (bc + ad)) = (ac - 3bd)^2 + 3(bc + ad)^2 = a^2c^2 - 6abcd + 9b^2d^2 + 3b^2c^2 + 6abcd + 3a^2d^2 = (a^2 + 3b^2) \cdot (c^2 + 3d^2) = \delta(x) \cdot \delta(y)$.

(b) $\delta(0 + 0\sqrt{-3}) = 0$. $\forall x = a + b\sqrt{-3} \in Z[\sqrt{-3}] \setminus \{0\} : \delta(x) = a^2 + b^2 \geq 1$. Ist also $\delta(x) > 1$ und $x \cdot y = 1$, dann muss $\delta(x) \cdot \delta(y) = 1$ gelten. Da $\delta(x) > 1$, muss $\delta(y) < 1$ sein, also $y = 0$. Dann ist aber $x \cdot y = 0 \lightning$. Folglich ist $Z[\sqrt{-3}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] | \delta(x) = 1\}$. Mit $a, b \in \mathbb{Z}$ folgt aus $a^2 + 3b^2 = 1$ sofort $b = 0, a = \pm 1$. Folglich ist $Z[\sqrt{-3}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] | \delta(x) = 1\} = \{\pm 1\}$.

(c) $2 + \sqrt{-3}$ ist irreduzibel. Seien nämlich $a, b \in Z[\sqrt{-3}]$ mit $ab = 2 + \sqrt{-3}$, so ist $\delta(a) \cdot \delta(b) = \delta(a \cdot b) = \delta(2 + \sqrt{-3}) = 5 \implies \delta(a) \in \{\pm 1\} \vee \delta(b) \in \{\pm 1\}$. Nun ist $(9 + \sqrt{-3}) \cdot (3 + \sqrt{-3}) = 27 - 3 + \sqrt{-3}(9 + 3) = 12(2 + \sqrt{-3})$. Allerdings ist $\delta(9 + \sqrt{-3}) = 81 + 3 = 84$ und $\delta(3 + \sqrt{-3}) = 9 + 3 = 12$. Angenommen, es gäbe nun ein b mit $(2 + \sqrt{-3}) \cdot b = 9 + \sqrt{-3}$, dann gilt auch $5 \cdot \delta(b) = 84$. Da $\delta(b)$ eine ganze Zahl ist, existiert kein solches b. Analog zeigt man auch das $2 + \sqrt{-3} \nmid 3 + \sqrt{-3}$. Also ist $2 + \sqrt{-3}$ nicht prim.

(d) Die Menge aller Teiler von 4 bzw. $2 + 2\sqrt{-3}$ sei A bzw. B. Es gilt $\delta(4) = \delta(2 + 2\sqrt{-3}) = 16$, $\delta(x) > 1 \forall x \in Z[\sqrt{-3}]$, $\delta(a + b\sqrt{-3}) = a^2 + 3b^2 \neq 2$, $x \cdot y = 4 \implies \delta(x)\delta(y) = 16$ und $x \cdot y = 2 + 2\sqrt{-3} \implies \delta(x)\delta(y) = 16$. Also gilt $\forall x \in A \cup B$: $\delta(x) \in \{1, 4, 16\}$. Wir betrachten zunächst $x \in A \cup B : \delta(x) = 4$. Sei $x = a + b\sqrt{-3}$. Dann gilt $\delta(x) = a^2 + 3b^2 = 4 \implies b \leq 1$. Sei also $b^2 = 1$. Dann muss auch $a^2 = 1$ sein und wir erhalten die Lösungen $\pm(1 + \sqrt{-3})$ und $\pm(1 - \sqrt{-3})$. Im Fall $b^2 = 0$ erhalten wir die Lösungen ± 2. Nach (b) sind $x = \pm 1$

die einzigen Teiler mit $\delta(x) = 1$, also muss für $x \in A, \delta(x) = 16$ gelten: $x \cdot \pm 1 = 4 \implies x = \pm 4$. Außerdem gilt $\pm 2 \cdot \pm 2 = \pm(1+\sqrt{-3}) \cdot \pm(1-\sqrt{-3}) = 4$. Also ist $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm(1+\sqrt{-3}), \pm(1-\sqrt{-3}), \pm 4\}$. Es gilt $\pm 2 \cdot \pm(1+\sqrt{-3}) = 2+2\sqrt{-3}$, also $\pm 2, \pm(1+\sqrt{-3}) \in B$. Allerdings gilt $\pm(1-\sqrt{3}) \not| (2+2\sqrt{-3})$, sonst gäbe es ein $a+b\sqrt{-3}$ mit $(1-\sqrt{-3}) \cdot (a+b\sqrt{-3}) = a+3b+\sqrt{-3}(b-a) = 2+2\sqrt{-3} \implies 2-3b = a = b-2 \implies b = 0 \implies a = 2 = -a ⚡$. Analog zu A erhalten wir also $B = \{\pm 1, \pm 2, \pm(1+\sqrt{-3}), \pm(2+2\sqrt{-3})\}$. Die gemeinsamen Teiler von 4 und $2+2\sqrt{-3}$ sind also $\{\pm 1, \pm 2, \pm(1+\sqrt{-3})\}$. Annahme: $\pm 1 \in \mathrm{GGT}(4, 2+2\sqrt{-3})$. Dann gilt $\forall x \in \{\pm 2, \pm(1+\sqrt{-3})\} : x|1$. Da aber ± 2 und $\pm(1+\sqrt{-3})$ keine Einheiten sind, erhalten wir einen Widerspruch. Wäre $\pm 2 \in \mathrm{GGT}(4, 2+2\sqrt{-3})$, so müsste gelten $1+\sqrt{-3}|2$. Da aber $\delta \pm (1+\sqrt{-3} = \delta(\pm 2))$ müsste $(1+\sqrt{-3}) = \pm 2$ gelten, was offensichtlich nicht der Fall ist. Den Fall $\pm(1+\sqrt{-3}) \in \mathrm{GGT}(4, 2+2\sqrt{-3})$ können wir völlig analog ausschließen. Also ist $\mathrm{GGT}(4, 2+2\sqrt{-3}) = \emptyset$

(e) Es gilt $4 = 2 \cdot 2 = (1+\sqrt{-3}) \cdot (1-\sqrt{-3})$. Wie bereits gezeigt, sind dies alle echten Teiler von 4 (bis auf Assoziiertheit) und es gilt $2 \not| (1+\sqrt{-3}), 2 \not| (1-\sqrt{-3})$ genauso wie $(1+\sqrt{-3})|2$ und $(1-\sqrt{-3})|2$. Also ist $Z[\sqrt{-3}]$ nicht faktoriell.

Aufgabe 11

- (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei R noethersch und $I \in R$ ein Ideal, das nicht endlich erzeugt ist. Behauptung: Dann kann man eine aufsteigende Kette von Idealen konstruieren, die nicht stationär wird.

  Beweis.
  Induktionsanfang: $I_0 = (0)$ ist eine Kette der Länge 0.
  Induktionsvoraussetzung: Sei eine Kette $I_0 \subseteq \cdots \subseteq I_n$ gegeben mit $I_n = (a_1, \ldots, a_n)$
  Induktionsschluss: Setze dann $I_{n+1} = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ mit $a_{n+1} \in I \setminus (a_1, \ldots, a_n)$. Ein solches a_{n+1} existiert stets, da sonst eine endliches Erzeugendensystem für I gegeben wäre. Außerdem ist $I_{n+1} \neq I_n$, da sonst $a_{n+1} \in I_n$ enthalten wäre. □

  Also gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine aufsteigende Kette von Idealen, die nicht stationär wird. Das steht im Widerspruch dazu, dass der Ring noethersch sein soll. Also ist jedes Ideal $I \in R$ endlich erzeugt.

- (ii) $\Leftarrow$ (i): Sei R endlich erzeugt. Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq ...$ eine aufsteigende Kette von Idealen in R. Setze $I := \bigcup_{k \geq 1} I_k$.
  I ist ein Ideal, da

  (J1) $0 \in I_k, \forall k \geq 1 \implies 0 \in I$

  (J2) Seien $a, b \in J \implies \exists k, l \in \mathbb{N}$ mit $a \in I_k, b \in I_l$. Mit $\max\{k, l\}$ ist $a, b \in I_m \implies a+b \in I_m \subseteq I$.

  (J3) Seien $a \in I, r \in R \implies \exists k \in \mathbb{N}$ mit $a \in I_k \implies ra \in I_k \subseteq I$

  Da R endlich erzeugt ist, existieren $a_1, \ldots, a_n \in R$ mit $I = (a_1, ..., a_n) = \bigcup_{k \geq 1} I_k$. Somit gilt $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq I$, insbesondere $\exists N \in \mathbb{N}$ so dass $(a_1, ..., a_n) \subseteq I_N \subseteq J = (a_1, ..., a_n) \implies I_N = J \implies I_k = I_N \forall k \geq N \implies R$ noethersch.