Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
PROF. DR. A. SCHMIDT
DR. C. DAHLHAUSEN

Blatt 0
Keine Abgabe

Im Folgenden sei A stets ein kommutativer Ring mit Eins.

Aufgabe 1. Welche der folgenden Aussagen sind in jedem Ring (kommutativ, mit Eins) wahr? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Die Summe zweier Einheiten ist eine Einheit.

(b) Das Produkt zweier Einheiten ist eine Einheit.

(c) Die Summe zweier nilpotenter Elemente ist nilpotent.

(d) Das Produkt zweier nilpotenter Elemente ist nilpotent.

(e) Die Summe zweier Nullteiler in ist ein Nullteiler.

(f) Das Produkt zweier Elemente ist genau dann ein Nullteiler, wenn (mindestens) einer der Faktoren dies ist.

Aufgabe 2 (Lemma 1.21)**.** Zeigen Sie, dass für Ideale in A gilt:

(a) $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.

(b) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

(c) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = \mathfrak{a} : (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b}$.

(d) $(\bigcap\limits_i \mathfrak{a}_i) : \mathfrak{b} = \bigcap\limits_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$.

(e) $\mathfrak{a} : (\sum_i \mathfrak{b}_i) = \bigcap\limits_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$.

Aufgabe 3 (Lemma 1.23)**.** Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale in A sowie $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Zeigen Sie:

(a) $r(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{a}$.

(b) $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$.

(c) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$.

(d) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$.

(e) $\forall\, n \in \mathbb{N}\colon\ r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$.

Anwesenheitsaufgaben für die erste Übung in der zweiten Semesterwoche (19.–23. April).

Aufgabe 4. (a) Im Ring $\mathbb{C}[T]$ betrachten wir die Ideale $\mathfrak{a} = (T^5 + T^4 - T^3 - T^2)$ und $\mathfrak{b} = (T^2 - 2T)$. Bestimmen Sie $r(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.

(b) Im Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}[T]$ betrachten wir die Ideale $\mathfrak{a} = (T^2)$ und $\mathfrak{b} = (T + \bar{2})$. Bestimmen Sie $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$.

(c) Im Ring $\mathbb{Z}[T]$ betrachten wir das Ideal $\mathfrak{b} = (T, T+2)$. Bestimmen Sie die Kontraktion $\mathfrak{b}^c$ von $\mathfrak{b}$ auf $\mathbb{Z}$ unter der natürlichen Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[T]$.

(d) Gegeben sei der Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{Z}[T] &\to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \\ f &\mapsto f(1) \bmod 6. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Erweiterung $\mathfrak{a}^e$ des Ideals $\mathfrak{a} = (9, 2T+1) \subset \mathbb{Z}[T]$ auf $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie: Ist $x \in A$ nilpotent und $y \in A$ ein Nullteiler, so ist auch $x + y$ ein Nullteiler.
Hinweis: Sei $z \in A, z \neq 0$, mit $yz = 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ maximal mit der Eigenschaft $x^n z \neq 0$. Betrachten Sie $\operatorname{Ann}(x^n z)$.

Aufgabe 6. Sei $f = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n \in A[T]$ ein Polynom. Zeigen Sie:

(a) Es ist f ist genau dann nilpotent, wenn alle $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nilpotent sind.

(b) Es ist f ist genau dann ein Nullteiler, wenn es ein $b \in A \setminus \{0\}$ gibt, so dass $bf = 0$.
Hinweis: Wählen Sie ein Polynom $g = b_0 + b_1 T + \cdots + b_m T^m$ minimalen Grades, so dass $fg = 0$. Dann gilt $a_n b_m = 0$ und somit $a_n g = 0$ (denn $a_n g$ annulliert f und hat einen Grad, der kleiner als m ist). Zeigen Sie nun mittels Induktion, dass $a_{n-r} b_m = 0$ und $a_{n-r} g = 0$ für $0 \leq r \leq n$.