Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

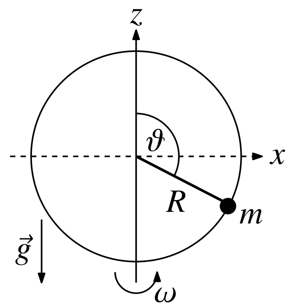
Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 5

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 25. Mai 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Perle auf rotierendem Drahtring*

Eine Perle der Masse m gleite reibungslos auf einem Drahtring vom Radius R. Der Drahtring rotiere mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Durchmesser im Schwerefeld der Erde. Wählt man ein ortsfestes Koordinatensystem so, dass der Mittelpunkt des Drahtringes seinen Ursprung darstellt und dass die z-Achse parallel zur Rotationsachse und antiparallel zur Richtung der Schwerkraft ausgerichtet ist, dann ist die zugehörige Lagrange-Funktion



$$L = T - V = \frac{1}{2} mR^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2 \sin^2 \vartheta \right) - mgR \cos \vartheta.$$

a) Begründen Sie die obige Lagrange-Funktion.
b) Bestimmen Sie die zugehörige Hamilton-Funktion.
c) Ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie? Sind beide jeweils zeitlich erhalten? Warum bzw. warum nicht?
d) Stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf.
e) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen und mögliche Bedingungen für diese.

2. *Eindimensionaler harmonischer Oszillator*

Ein Teilchen der Masse m habe die potentielle Energie

$$V(q) = \frac{m}{2} \omega^2 q^2.$$

a) Leiten Sie die sowohl die Lagrange- als auch die Hamilton-Funktion des Systems her.
b) Lösen Sie die Hamilton'schen Gleichungen in der Form

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} \qquad \text{mit} \qquad \vec{y} \equiv \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

indem Sie die Exponentialfunktion der Matrix At in der Lösung

$$\vec{y}(t) = \mathrm{e}^{At}\, \vec{y}_0$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{y}_0 \equiv (q_0, p_0)^\top$ über die Reihendarstellung der Exponentialfunktion berechnen, die durch

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

gegeben ist. Hierfür sind ebenfalls die folgenden Reihendarstellungen nützlich,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

3. *Kugelwellen*

In der Vorlesung wurde darauf hingewiesen, dass die d'Alembert'sche Gleichung auf mehrere Dimensionen erweitert werden kann, indem man für jede Raumdimension eine zweite Ableitung hinzufügt. Sei n die Anzahl der Dimensionen, dann ist die d'Alembert'sche Gleichung durch

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \Delta_{(n)}\right] q(\vec{x}, t) = 0$$

gegeben, wobei v die Ausbreitungsgeschwindigkeit, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ der n-dimensionale Ortsvektor und

$$\Delta_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

der n-dimensionale Laplace-Operator ist.

a) Betrachten Sie im Folgenden die d'Alembert'sche Gleichung für $n = 2$ und $n = 3$. Leiten Sie für den symmetrischen Fall $q(\vec{x}, t) = q(r, t)$, wobei $r \equiv |\vec{x}|$ ist, mit Hilfe des Separationsansatzes $q(r, t) = R(r)\, T(t)$ Differentialgleichungen für $R(r)$ und $T(t)$ her. Dabei ist der Laplace-Operator für $n = 2$ in Polarkoordinaten durch

$$\Delta_{(2)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

gegeben, während er für $n = 3$ in Kugelkoordinaten durch

$$\Delta_{(3)} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

gegeben ist.

b) Finden Sie für $n = 3$ mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{R}(r) \equiv r\, R(r)$ eine allgemeine Lösung für $q(r, t)$, die bei $r = 0$ stetig ist. Was ist die physikalische Bedeutung der dabei auftretenden Separationskonstanten?

4. *Verständnisfragen*

a) Was bedeutet die Hamilton-Funktion, und was besagen die Hamilton'schen Gleichungen?

b) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen einer Lagrange-Funktion, einer Lagrange-Dichte und einer Wirkung.

c) Beschreiben Sie die Struktur der d'Alembert-Gleichung, und erklären Sie die Bedingungen an ihre Lösung(en).