INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 9 26. Juni 2020

Abgabe bis Fr. 03.07.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Themen:

- Umkehrabbildung
- Lagrange-Multiplikatoren
- Differentialgleichung höherer Ordnung
- Wronski-Determinante

Aufgabe 9.1 (5 Punkte): Jacobi-Matrix einer Umkehrabbildung

Man bestimme für die Funktion

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz \\ x + 2z \\ xy \end{pmatrix}$$

die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ sowie die Jacobi-Matrizen $D_f(x, y, z)$ und $D_g(u, v, w)$ und rechne nach, dass die Identität

$$D_g(u, v, w) = D_f(x, y, z)^{-1}$$

für den Punkt $(x, y, z)^{\mathrm{T}} = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ gilt.

Bemerkung: Wir haben in der Vorlesung keine allgemeingültige Formel für die Umkehrabbildung gehabt, von daher müsst Ihr Euren mathematischen Spürsinn einsetzen, um die Umkehrabbildung auszurechnen.

Lösungsvorschlag:

(i) Umkehrfunktion
Da $z = \frac{u}{y}, x = \frac{w}{y}$, folgt:

$$v = \frac{w}{y} + \frac{2u}{y} \text{ bzw. } y = \frac{w + 2u}{v}$$

und

$$g(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{vw}{w+2u} \\ \frac{w+2u}{v} \\ \frac{uv}{w+2u} \end{pmatrix}$$

(ii) Jacobi-Matrizen:

$$D_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} (x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ 1 & 0 & 2 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{2vw}{(w+2u)^2} & \frac{w}{w+2u} & \frac{2uv}{(w+2u)^2} \\ \frac{2}{v} & -\frac{w+2u}{v^2} & \frac{1}{v} \\ \frac{vw}{(w+2u)^2} & \frac{u}{w+2u} & -\frac{uv}{(w+2u)^2} \end{pmatrix}$$

(iii) Da $(x,y,z) = (2,1,0) \Leftrightarrow (u,v,w) = (0,2,2)$, folgt:

$$D_f(2,1,0)D_g(0,2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9.2 (5 Punkte): Abstand eines Punktes zu einer Menge

Die Ebene P und der Zylinder Z seien gegeben durch

$$P := \left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \middle| x+y-z=1\right\} \quad \text{und} \quad Z := \left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+y^2=1\right\}.$$

Die Ebene P schneidet dabei den Zylinder Z in einer Ellipse. Man berechne den minimalen quadrierten euklidischen Abstand dieser Ellipse zum Ursprung $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren.

Bemerkung: Zur Klassifizierung der kritischen Punkte soll es uns an dieser Stelle reichen, die Werte der Zielfunktion an diesen kritischen Punkten zu betrachten. Im Allgemeinen reicht das <u>nicht</u>, siehe auch den schriftlichen Nachtrag zur Zentralübung vom 25.06.20!

Bemerkung: Wir betrachten hier den quadrierten Abstand, um eine hübschere Zielfunktion zu haben.

<u>Lösungsvorschlag:</u>

Wir suchen die lokalen Minima von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$ auf der Menge auf der $g(x,y,z) := x^2+y^2 = 1$ und $h(x,y,z) := x+y-z = 1$ gilt, wobei $g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Die Gradienten sind:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z), \nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 0), \nabla h(x,y,z) = (1, 1, -1).$$

Somit ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda 2x + \mu \\ 2y &= \lambda 2y + \mu \\ 2z &= 0 - \mu \\ 1 &= x^2 + y^2 \\ 1 &= x + y - z \end{aligned}$$

Subtrahieren der ersten zwei Zeilen ergibt $2y - 2x = \lambda(2y - 2x)$, also gilt $\lambda = 1$ oder $x = y$.

(i) Falls $\lambda = 1$, dann $\mu = 0$ und damit $z = 0$. Die letzten zwei Gleichungen sind

$$1 = x^2 + y^2 \text{ und } 1 = x + y.$$

Daraus folgt $x = 1, y = 0$ oder $x = 0, y = 1$. Damit sind die zu untersuchenden Punkte $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$, welche beide einen Abstand von 1 zum Ursprung haben.

(ii) Falls $x = y$, ist die vierte Gleichung $2x^2 = 1$, was $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ liefert. Die fünfte Gleichung liefert uns $z = -1 \pm \sqrt{2}$. Somit erhalten wir die Punkte $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -1+\sqrt{2})$ bzw. $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1-\sqrt{2})$, mit den Abständen zum Ursprung von $\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ bzw. $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

Da $\sqrt{4+2\sqrt{2}} > \sqrt{4-2\sqrt{2}} > 1$ sind die Punkte $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ der Ellipse dem Ursprung am nähesten mit einem Abstand von 1.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte): Quadratisches Optimierungsproblem

Man löse das folgende quadratische Optimierungsproblem mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren.

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^3} \quad & 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + x_2x_3 + 3x_3^3 + 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ & -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{aligned}$$

Tipp: Diese Aufgabe lässt sich am elegantesten lösen, wenn man das Optimierungsproblem in der Form

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^3} \quad & \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx - c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} \quad & Ax - b = 0 \end{aligned}$$

mit passenden Matrizen und Vektoren Q, A, b und c schreibt und auch danach in Matrixform weiter rechnet.

Lösungsvorschlag:

(i) Matrix-Form des Optimierungsproblems:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Gx - c^{\mathrm{T}} \to \min, \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, g(x) := Ax - b = 0$$

mit

$$G := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, c := \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}, A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Lagrange-Bedingung:
$D_f(x) + \lambda D_g(x) = 0$ mit $D_f = x^{\mathrm{T}}G - c^{\mathrm{T}}$ und $D_g(x) = A$. Also ist die Lagrange-Bedingung: $Gx + A^{\mathrm{T}}\lambda = c$ Dies ergibt das Gleichungssystem aus Lagrange- und Nebenbedingung:

$$\left(\begin{array}{c|c} G & A^{\mathrm{T}} \\ \hline A & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ \hline \lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} c \\ \hline b \end{array}\right)$$

und nach einsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & -2 & -1 \\ \hline -1 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -3 \\ 8 \\ -2 \\ \hline 7 \\ 2 \end{array}\right)$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich eindeutig lösen, mit:

$$x_{\min} = (1, 2, -1)^{\mathrm{T}}, \lambda = (-1, 2)^{\mathrm{T}}, f(x_{\min}) = -6$$

Aufgabe 9.4 (6 Punkte): Differentialgleichungen

(a) Man forme das System von Differentialgleichungen 4. Ordnung für $v = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}} : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ mit $T > 0$, gegeben durch

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4} v_2(t) - a \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} v_1(t) = f(t), \\ &\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} v_1(t) + b v_2(t) = g(t) \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g : [0, T] \to \mathbb{R}$, in ein äquivalentes System 1. Ordnung um. $\boxed{2}$

(b) Man zeige für die Differentialgleichung 2. Ordnung für $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ mit $T > 0$, gegeben durch

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u(t) + p(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) + q(t) u(t) = 0$$

mit $p, q \in \mathcal{C}([0, T])$, dass die *Wronski-Determinante* $W(t)$, gegeben durch

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_1(t) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_2(t) \end{pmatrix}$$

für zwei Lösungen u_1, u_2 von $(*)$, selber wieder die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(t) = -p(t) W(t), \quad t \in [0, T]$$

erfüllt. $\boxed{4}$

Lösungsvorschlag:

(a) Wir setzen

$$\begin{aligned} &u_1(t) := v_1(t), u_2(t) := v_1'(t), \\ &u_3(t) := v_2(t), u_4(t) := v_2'(t), u_5(t) := v_2''(t), u_6(t) := v_2'''(t). \end{aligned}$$

Das gegebene System 4. Ordnung ist dann äquivalent zu folgendem System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= u_2(t) \\ u_2'(t) &= g(t) - b u_3(t) \\ u_3'(t) &= u_4(t) \\ u_4'(t) &= u_5(t) \\ u_5'(t) &= u_6(t) \\ u_6'(t) &= f(t) + a u_2'(t) = f(t) + a g(t) - a b u_3(t) \end{aligned}$$

Bemerkung: Man beachte, dass für v_1'' keine eigene Unbekannte eingeführt werden darf, da es für deren Ableitung keine Gleichung gibt. Würde man solche durch Differenzieren der zweiten Gleichung erzeugen, müsste man für v_1 zusätlich dreimalige Differenzierbarkeit fordern.

(b) Es gilt:

$$W(t) := det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} (t) = (u_1 u_2' - u_1' u_2)(t)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} W' &= u_1 u_2'' + u_1' u_2' - (u_1' u_2' + u_1'' u_2) \\ \Rightarrow W' &= u_1 u_2'' - u_1'' u2 \end{aligned}$$

Weil u_1 und u_2 Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = 0$$

sind, gilt

$$u_i'' = -pu_i' - qu_i \text{ für } i = 1, 2.$$

Einsetzen in die obigen Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} W' &= u_1(-pu_2' - qu_2) - (-pu_1' - qu_1)u_2 \\ &= -p(u_1 u_2' - u_1' u_2) \\ &= -pW \end{aligned}$$
