Übungen zu Funktionentheorie 1 – Musterlösung Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 1

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 4. Mai

Bearbeiten Sie bitte nur vier der fünf Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.

1. Aufgabe: Sei $\mathbb{C}'$ die bekannte abelsche Gruppe $(\mathbb{R}^2, +, 0)$ mit der Multiplikation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ y_1 x_2 + x_1 y_2 \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}'$ ein Körper ist. Sie können ohne Beweis annehmen, dass $(\mathbb{R}^2, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}'$ als Körper isomorph ist zu $\mathbb{C} = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$.

Lösung 1: Die Axiome bezüglich der Addition können wir annehmen. Für alle $x, y, z \in \mathbb{C}'$ gilt:

- Kommutativgesetz: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 x_1 - y_2 x_2 \\ y_2 x_1 + y_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
- Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ y_1 x_2 + x_1 y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_1 - y_1 x_2 z_2 - x_1 y_2 z_2 \\ x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_2 + y_1 x_2 z_1 + x_1 y_2 z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 z_1 - y_2 z_2 \\ z_1 y_2 + y_1 z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) . \end{aligned}$$

- Das Eins-Element ist $1_{\mathbb{C}'} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, weil $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}'$.
- Wenn $x = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}'$ ungleich Null, dann ist das Inverse $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{smallmatrix}\right)$ wie man durch Nachrechnen sofort sieht.
- Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (x_1 + z_1) y_1 - (x_2 + z_2) y_2 \\ (x_2 + z_2) y_1 + (x_1 + z_1) y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 y_1 - z_2 y_2 \\ z_2 y_1 + z_1 y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Damit ist $\mathbb{C}'$ ein Körper.
b) Für die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}$ definiert durch $\varphi(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ rechnet man sofort nach, dass sie mit Addition und Multiplikation vertauscht. Bijektivität ist klar weil die Umkehrfunktion gegeben ist durch $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ mit $\psi(M) = M \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, mit anderen Worten $\psi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)) = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$. Damit ist φ ein Körper-Isomorphismus.

Lösung 2: Definiere $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ durch $\psi(M) = M \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Zeige explizit, dass ψ eine Bijektion ist. Definiere neue Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}'$ durch $\psi(M_1) +' \psi(M_2) := \psi(M_1 + M_2)$

und $\psi(M_1) \cdot' \psi(M_2) := \psi(M_1 M_2)$ ist. Mit dieser neuen (von $\mathbb{C}$ übertragenen) Addition und Multiplikation ist $(\mathbb{C}', +', \cdot')$ ein Körper, wir haben nur die Elemente von $\mathbb{C}$ *umbenannt*! Rechne dann einmal nach, dass $+ = +'$ und $\cdot = \cdot'$ auf $\mathbb{C}'$. Damit folgt, dass $(\mathbb{C}', +, \cdot)$ ein Körper und dass ψ ein Körperisomorphismus ist.

2. Aufgabe: Zeigen Sie explizit

(a) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(b) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

Lösung: Wir schreiben $z_1 = \mathrm{Re}(z)$ und $z_2 = \mathrm{Im}(z)$ und entsprechend für w. Dann gilt

(a) $\overline{z \cdot w} = \overline{z_1 w_1 - z_2 w_2 + i(z_1 w_2 + z_2 w_1)} = z_1 w_1 - z_2 w_2 - i(z_1 w_2 + z_2 w_1)$,
$= z_1 w_1 - (-z_2)(-w_2) + i(z_1(-w_2) + (-z_2) w_1) = (z_1 - i z_2)(w_1 - i w_2) = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(b) $z_1 = \frac{1}{2}(z_1 + i z_2 + z_1 - i z_2) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $z_2 = \frac{1}{2i}(z_1 + i z_2 - (z_1 - i z_2)) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

3. Aufgabe: Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^3 + 8 = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

Lösung: $z = 0$ ist offensichtlich keine Lösung. In Polarkoordinaten ist $z = r \cdot e(\phi)$ mit einem eindeutigen reellen $r > 0$ und einem $\phi \in \mathbb{R}$ eindeutig modulo 2π. Die obige Gleichung lautet in Polarkoordinaten $8e(\pi) = -8 = z^3 = (re(\phi))^3 = r^3 \cdot e(3\phi))$, ist also äquivalent zum Gleichungssystem $r^3 = 8$ und $e(3\phi) = e(\pi)$.
Dieses wird gelöst durch $r = 2$ und jedes $\phi \in \mathbb{R}$ mit $3\phi - \pi \in 2\pi\mathbb{Z}$, das heißt $\phi \in \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\mathbb{Z} = (\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\frac{5\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z})$. Wir erhalten drei Lösungen $e(\phi) \in \{e(\pi/3), e(\pi), e(5\pi/3)\} = \{1/2 + i\sqrt{3}/2, -1, 1/2 - i\sqrt{3}/2\}$. Die drei Lösungen sind $z = -2$ und $z = 1 \pm i\sqrt{3}$.

4. Aufgabe: Sei $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) \neq 0$. Zeigen Sie $cz + d \neq 0$ und

$$\mathrm{Im}(M \langle z \rangle) = \frac{\det(M)}{|cz + d|^2} \cdot \mathrm{Im}(z) \ .$$

Lösung: Wenn $c \neq 0$, dann $\mathrm{Im}(cz + d) = c\mathrm{Im}(z) \neq 0$, also $cz + d \neq 0$. Wenn $c = 0$ dann ist $d \neq 0$ weil M invertierbar ist, also $cz + d = d \neq 0$. Der Nenner im folgenden Ausdruck ist also wohldefiniert. Nachrechnen liefert:

$$\mathrm{Im}(M \langle z \rangle) = \mathrm{Im}(\frac{az + b}{cz + d}) = \mathrm{Im}((az + b)\overline{cz + d}\frac{1}{|cz + d|^2})$$

Weil M eine reelle Matrix ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}((az + b)(\overline{cz + d})) &= \mathrm{Im}((az + b)(c\overline{z} + d)) \\ &= \mathrm{Im}(acz\overline{z} + bd + adz + bc\overline{z}) = \mathrm{Im}(adz + bc\overline{z}) \\ &= ad\mathrm{Im}(z) + bc\mathrm{Im}(\overline{z}) = (ad - bc)\mathrm{Im}(z) = \det(M)\mathrm{Im}(z) \ . \end{aligned}$$

Einsetzen liefert die Behauptung.

5. Aufgabe: Käpt'n Rotbart und seine Piratencrew waren gefürchtet auf allen Sieben Weltmeeren. Als er merkte, dass er alt wurde, vergrub Käpt'n Rotbart seinen Schatz allein auf einer einsamen Insel. Seine Crew wusste zwar die Insel, doch niemand außer ihm kannte den genauen Ort. Nach seinem Tod hinterließ er eine Schatzkarte, auf der neben einer groben Skizze der Insel geschrieben stand:

Auf der Insel ist ein Wasserfall W und ein alter Baum B sowie eine Feuerstelle F. Gehe von der Feuerstelle zum Wasserfall und dann noch einmal die gleiche Strecke $90°$ nach links. Markiere diese Stelle A. Gehe dann von der Feuerstelle zum Baum und dann nochmal die gleiche Strecke um $90°$ nach rechts. Markiere diese Stelle B. Der Schatz ist genau in der Mitte zwischen A und B vergraben.

Als die Schatzsucher auf der Insel ankamen, sahen sie den Wasserfall und den alten Baum, aber die Feuerstelle war nicht mehr aufzufinden. Nach kurzem Nachdenken fanden sie dennoch den Schatz. Wie haben sie das gemacht?

Achtung: Diese Schatzkarte stimmt nicht mit der im Skript überein!

Lösung: Wir legen ein kartesisches Koordinatensystem über die Insel, wobei wir einen beliebigen Punkt der Insel als Nullpunkt wählen. Die Erdkrümmung wird dabei vernachlässigt. Die Ost-West-Achse identifizieren wir mit der reellen Achse und die Nord-Süd-Achse mit der imaginären Achse in $\mathbb{C}$. Jeder Punkt[1] auf der Insel entspricht damit einer komplexen Zahl. Der Weg von F nach W entspricht der Addition der komplexen Zahl $W - F$ als Richtungsvektor. Die Rotation dieses Vektors um $90°$ nach links entspricht der Multiplikation mit i. Der erste Weg endet also am Punkt $A = F + (W - F) + (W - F)i$. Mit dem entsprechenden Argument endet der zweite Weg am Punkt $B = F + (B_a - F) + (B_a - F)(-i)$. Der Schatz S liegt also bei

$$S = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}\left((F + (W - F) + (W - F)i) + F + (B_a - F) + (B_a - F)(-i)\right) = \frac{1}{2}\left(W(1 + i) + B_a(1 - i)\right) .$$

Der rechte Ausdruck hängt nicht von F ab. Es spielt also keine Rolle, wo genau die Feuerstelle war. Jede beliebige Wahl von F führt zum selben Ergebnis.

[1] Leider habe ich zwei verschiedene Punkte mit B bezeichnet. Der Baum sei ab sofort B_a.