Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 8

Besprechung in den Übungsgruppen am 9. Dezember 2019

1. *Hausaufgabe:* Divergenz in Kugelkoordinaten

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, ist die Orthonormalbasis in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) mit

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad \text{und} \quad z = r\cos\theta$$

durch die folgenden drei Vektoren gegeben,

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z, \\
\vec{e}_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z, \\
\vec{e}_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y.
\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie alle neun möglichen Ableitungen der drei Basisvektoren $\partial_i \vec{e}_j$ mit $i, j \in \{r, \theta, \varphi\}$ und drücken Sie ihre Ergebnisse wiederum über die Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$ aus.*

b) Zeigen Sie, dass die Divergenz des Vektorfeldes

$$\vec{A} = A_r(r, \theta, \varphi)\,\vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi)\,\vec{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi)\,\vec{e}_\varphi$$

in Kugelkoordinaten durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\,\partial_r\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\theta\left(\sin\theta\,A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\varphi A_\varphi \tag{I}$$

gegeben ist. Verwenden Sie hierfür den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten, den Sie aus der Vorlesung kennen.

c) Berechnen Sie die Komponenten A_r, A_θ und A_φ des Vektorfeldes $\vec{A} = (y, -x, z)^\top$ in Kugelkoordinaten. Benutzen Sie dieses Ergebnis sowie (I), um $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ in Kugelkoordinaten zu berechnen.

2. *Hausaufgabe:* Periheldrehung von Merkur

Bewegt sich ein Körper im Newton'schen Gravitationspotential, muss seine Bahn geschlossen sein. Dies bedeutet insbesondere, dass die Position des Perizentrums zeitlich konstant sein muss.

Beobachtungen der Bahn von Merkur um die Sonne haben allerdings gezeigt, dass das Perihel seiner Bahn wandert. Selbst wenn alle Störungen durch die Gravitation anderer Planeten berücksichtigt werden, bleibt eine mit Newton'scher Gravitation nicht erklärbare Periheldrehung von 43 Winkelsekunden pro Jahrhundert in positiver Richtung. Hierbei bedeutet eine positive/negative Richtung, dass der Winkel zwischen zwei Perihelien mehr/weniger als 2π beträgt.

---

* *Hinweis:* Der Ausdruck $\partial_\varphi \vec{e}_\varphi$ lässt sich über eine Linearkombination aus $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\theta$ darstellen.

Erweiteren Sie im Folgenden das Newton'sche Gravitationspotential um einen Term höherer Ordnung,

$$\tilde{V}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{2}\frac{1}{r^2}$$

mit den beiden Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$, wobei β klein ist.

a) Zeigen Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung, dass die Bahngleichung für den Radius eines Teilchens der Masse m die Form

$$r(\varphi) = \frac{\eta^2 p}{1 + \tilde{\varepsilon}\cos(\eta\varphi)} \qquad \text{mit} \qquad \eta \equiv \sqrt{1 + \frac{\beta m}{L^2}} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\varepsilon} \equiv \sqrt{1 + \frac{2mE\eta^2 p^2}{L^2}}$$

annimmt, wenn $\varphi = 0$ für den ersten Periheldurchgang der Bahn gewählt wird. Hierbei ist L der Drehimpuls des Teilchens, E seine Energie und p sein Bahnparameter, der in der Vorlesung definiert wurde.

b) Bei welchem Winkel wird während des nächsten Durchgangs der geringste Abstand durchlaufen? Wie lautet die Einschränkung für β, damit ein Potential der Form $\tilde{V}(r)$ für die Periheldrehung von Merkur verantwortlich sein kann?

3. *Präsenzaufgabe:* Bewegung im Zentralpotential

Ein Massenpunkt bewege sich unter dem Einfluss einer konservativen Zentralkraft auf der Bahn

$$r(\varphi) = r_0\, \mathrm{e}^{-\varphi/\alpha}$$

mit den beiden Konstanten $r_0 > 0$ und $\alpha > 0$. Hierbei wächst φ kontinuierlich an und springt bei 2π nicht auf 0 zurück.

a) Bestimmen Sie das zu dieser Bewegung gehörige Kraftgesetz.

b) Bestimmen Sie $\varphi(t)$ und $r(t)$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(t = 0) = 0$.

c) Nach welcher Zeit t_{f} erreicht der Massenpunkt das Kraftzentrum?

4. Verständnisfragen

a) Beschreiben Sie, mit welchem Ziel und auf welche Weise krummlinige Koordinaten eingeführt werden.

b) Warum ist der Drehimpuls in einem Zentralkraftfeld immer erhalten?

c) Welche Bahnformen treten im Gravitationsfeld unter welchen Bedingungen auf?