AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

03. Dezember 2021

Modulformen 1 – Übungsblatt 7

Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1 (4 Punkte)

In dieser Aufgabe zeigen wir die **Ramanujan-Kongruenz**

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \bmod (691) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für die Fourier-Koeffizienten $\tau(n)$ der Diskriminante $\Delta \in S_{12}$. Zeigen Sie dafür zunächst die Aussagen

(a) $E_{12}(z) = 1 + \frac{65520}{691} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n) q^n$,

(b) $691 \cdot (E_{12} - E_6^2) = (65520 + 691 \cdot 1008) \cdot \Delta$,

und folgern Sie die Behauptung durch Vergleich der Fourier-Koeffizienten auf beiden Seiten.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

In der Vorlesung wurden **Poincaré-Reihen** als formale Reihe wie in Definition 3.13 eingeführt. Sei für diese Aufgabe von nun an $k \geq 4$ eine gerade ganze Zahl und $m, n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Verschwindet der m-te Fourier-Koeffizient von $P_{m,k}$, so gilt bereits $P_{m,k} \equiv 0$.

(b) Es gilt das Verhältnis

$$\left(\frac{n}{\tilde{n}}\right)^{k-1} = \frac{\mathfrak{g}_n(\tilde{n}, k)}{\mathfrak{g}_{\tilde{n}}(n, k)} .$$

Hinweis zu (b): Nutzen Sie ohne Beweis, dass Fourier-Koeffizienten einer Poincaré-Reihe reell sind.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Im Zuge des Struktursatz für meromorphe Modulformen definiert man die **j-Invariante** $j(z) := \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$. Wir beweisen in dieser Aufgabe einige Aussagen über diese bedeutende Funktion:

(a) Jede meromorphe Modulform vom Gewicht 2 lässt sich als Polynom in j und j' schreiben.

(b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert eine eindeutig bestimmte, auf $\mathbb{H}$ holomorphe Modulfunktion j_N für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit der Fourierentwicklung

$$j_N(z) = q^{-N} + \sum_{n \in \mathbb{N}} c_N(n) q^n \quad \text{für gewisse } c_N(n) \in \mathbb{C}.$$

(c) j_N ist ein normiertes, ganzzahliges Polynom in j vom Grad N.

Anmerkung: Eine Ihnen sehr zu empfehlende „Geschichte" über die Eigenschaften der j-Invariante ist im Paper The j-Function and the Monster von A. Scherer niedergeschrieben.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wie bereits in der Vorlesung erwähnt, werden wir in den nächsten Wochen spezielle Operatoren auf der Menge der holomorphen Modulformen von festem Gewicht k studieren, so genannte **Hecke-Operatoren**. Hierzu holen wir ein wenig aus und behandeln zunächst die allgemeine Hecke-Algebra, zu der Sie auch die Definition eines Hecke-Paars kennengelernt haben.

Zeigen Sie, dass $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ kein Hecke-Paar ist.

Abgabe: online über MaMpf bis Freitag, den 10. Dezember 2021, bis spätestens um 12 Uhr s. t.