Modulformen 1 – Übungsgruppe 08. Dezember 2021

Wintersemester 2021/22

A: Besprechung 6.Übungszettel

Aufgabe 1

(a) Zunächst bleibt die Holomorphie unmittelbar erhalten. Betrachte $\varphi_M : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{c}{cz+d}$ für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und zeige $(\varphi_M)|_2\tilde{M} = \varphi_{M\tilde{M}} - \varphi_{\tilde{M}}$ mit $\tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Wir erhalten

$$\sum_{j=0}^{p} f_j \left(\varphi_{M\tilde{M}}\right)^j = f|_k(M\tilde{M}) = \sum_{j=0}^{p} \left(\sum_{n=j}^{p} \binom{n}{j} \left(-\varphi_{\tilde{M}}\right)^{n-j} f_n|_{k-2n}\tilde{M} \right) \left(\varphi_{M\tilde{M}}\right)^j ,$$

also gilt $\sum_{n=j}^{p} \binom{n}{j} \left(-\varphi_{\tilde{M}}\right)^{n-j} f_n|_{k-2n}\tilde{M} = f_j$ bzw.

$$A\,{}^{\mathrm{t}}\!\left(f_0|_{k-2\cdot 0}\tilde{M}, \cdots, f_p|_{k-2p}\tilde{M}\right) = {}^{\mathrm{t}}(f_0, \cdots, f_p)$$

mit $a_{ij} = \binom{j}{i} \left(-\varphi_{\tilde{M}}\right)^{j-i}$ für $j \geq i$ und sonst $a_{ij} = 0$. Es folgt

$${}^{\mathrm{t}}\!\left(f_0|_{k-2\cdot 0}\tilde{M}, \cdots, f_p|_{k-2p}\tilde{M}\right) = B\,{}^{\mathrm{t}}(f_0, \cdots, f_p) \text{ mit } b_{ij} = (-1)^{j-i} \cdot a_{ij} ,$$

also $f_m|_{k-2m}\tilde{M} = \sum_{r=0}^{p-m} \binom{m+r}{r} f_{m+r} \left(\varphi_{\tilde{M}}\right)^r$.

(b) $g(lz)$ ist offensichtlich holomorph auf $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Für $M := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ folgt aus $l \mid N$ und $N \mid c$ schließlich $l \mid c$ und somit $M_l := \left(\begin{smallmatrix} a & bl \\ c/l & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$. Es folgt:

$$g\left(lM\langle z\rangle\right) = g\left(\frac{a(lz)+bl}{\frac{c}{l}(lz)+d}\right) = g(M_l\langle z\rangle) = \left(\tfrac{c}{l} \cdot lz + d\right)^k g(lz) = (cz+d)^k g(lz) \ .$$

(c) Durch Kenntnis der Fourier-Entwicklung folgt die Holomorphie auf $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Weiter gilt

$$E_2(M\langle z\rangle) = (cz+d)^2 \cdot G_2(z) - \pi i c(cz+d) - 2G_2\left(\frac{2az+2b}{cz+d}\right)$$

mit $G_2\left(\frac{2az+2b}{cz+d}\right) = G_2\left(\frac{a(2z)+b}{\frac{c}{2}(2z)+d}\right) = (cz+d)^2 G_2(2z) - \frac{\pi i c(cz+d)}{2}$ für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & 2b \\ c/2 & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(2)$. Es folgt so $E_2(M\langle z\rangle) = (cz+d)^2 \cdot (G_2(z) - 2G_2(2z)) = (cz+d)^2 \cdot E_2(z)$.

(d) Die Holomorphie auf $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ ist unter Kenntnis der Fourier-Entwicklung von E_2 klar. Es gilt für das Transformationsverhalten weiter

$$\left(\vartheta_k g\right)\left(M\langle z\rangle\right) = \frac{1}{2\pi i} g'\left(M\langle z\rangle\right) - \frac{k}{12} E_2\left(M\langle z\rangle\right) g\left(M\langle z\rangle\right) \ .$$

Wir untersuchen die Terme separat und erhalten mit Aufgabe 3.1

$$g'\left(M\langle z\rangle\right) = (cz+d)^{k+2} g'(z) + ck(cz+d)^{k+1} g(z) \text{ sowie}$$

$$E_2\left(M\langle z\rangle\right) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{\Delta'(M\langle z\rangle)}{\Delta(M\langle z\rangle)}\right) = \frac{1}{2\pi i}\left((cz+d)^2 \frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)} + 12c(cz+d)\right) = (cz+d)^2 E_2(z) + \frac{6c(cz+d)}{\pi i} \ .$$

Insgesamt ergibt sich so $(\vartheta_k g)(M\langle z\rangle) = (cz+d)^{k+2}(\vartheta_k g)(z)$.

Aufgabe 2

(a) Interessant ist nur der Fall $k \geq 4$ gerade. Mit Satz 2.17 folgt, dass $\operatorname{ord}(f;\infty) = \frac{k}{12} =: d$ gilt. Wegen $\operatorname{ord}(f;\infty) \geq 1$ ist f eine Spitzenform vom Gewicht k mit $12 \,|\, k$. Man weist $\operatorname{ord}\left(\frac{f}{\Delta^d};\infty\right) = 0$ nach und folgert dann, dass $\frac{f}{\Delta^d}$ eine holomorphe Modulfunktion ist, die gemäß Proposition 3.9 konstant sein muss. Durch Umformen folgt die Behauptung.

(b) Betrachte $\tilde{\Delta}(z) = \Delta(z) - \Delta(a)$ für $z \in \mathbb{H}$, dann erfüllt $\tilde{\Delta}$ das Gewünschte.

(c) Man nutze Satz 3.22 und rekapituliere den Beweis dieser Aussage im Skript.

Aufgabe 3

Nach Satz 2.17 gilt $S_k = \langle P_{n,k} \mid n \in \mathbb{N}\rangle_{\mathbb{C}}$. Da S_k aus Dimensionsgründen ein endliches Erzeugendensystem besitzt, existiert eine Basis $\{P_{\alpha_1,k}, \cdots, P_{\alpha_d,k}\}$ mit $\alpha_1, \cdots, \alpha_d \in \mathbb{N}$ nach dem Basisauswahlsatz. Es bleibt zu zeigen, dass Poincaré-Reihen linear unabhängig sind. Für $f \in S_k$ gilt

$$0 = \langle f \mid X\rangle := \left\langle f \mid \sum_{m=1}^{d} c_m P_{m,k} \right\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{c_m}\langle f \mid P_{m,k}\rangle = \sum_{m=1}^{d} \overline{c_m} \cdot \frac{(4\pi m)^{11}}{10!} \cdot \underbrace{\langle f \mid \tilde{P}_{m,k}\rangle}_{a_m(f)} ,$$

womit aus $X = 0$ bereits $c_m = 0 \quad \forall m \in \{1, \cdots, d\}$ folgt. Wähle schließlich $\alpha_1 = 1, \cdots, \alpha_d = d$.

Aufgabe 4

- $g_n(n, 12) = 0 \Rightarrow P_{n,12} \equiv 0$.
  Es gilt mit Satz 3.16 und den Eigenschaften des Skalarprodukts
  $$0 = \langle P_{n,12} \mid \tilde{P}_{n,12}\rangle = \overline{\frac{(4\pi n)^{11}}{10!}}\langle P_{n,12} \mid P_{n,12}\rangle \Rightarrow P_{n,12} \equiv 0 \ .$$
- $P_{n,12} \equiv 0 \Rightarrow \tau(n) = 0$.
  Für jede Spitzenform $f \in S_{12}$ gilt $a_n(f) = \langle f \mid \tilde{P}_{n,12}\rangle = 0 \quad n \in \mathbb{N}$. Im Spezialfall $\Delta = f$ gilt $\tau(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $\tau(n) = 0 \Rightarrow g_n(n, 12) = 0$.
  Wegen $\dim_{\mathbb{C}} S_{12} = 1$ existiert $c \in \mathbb{C}^*$ mit $c \cdot \Delta = P_{n,12}$. Es folgt
  $$0 = \tau(n) = \langle \Delta \mid \tilde{P}_{n,12}\rangle = \frac{1}{c}\langle P_{n,12} \mid \tilde{P}_{n,12}\rangle = \frac{1}{c} g_n(n, 12) \ .$$

B: Wiederholung Poincaré-Reihen

Definition: [Poincaré-Reihe]
Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \geq 4$ gerade und ganz heißt

$$P_{n,k}(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} j(M,z)^{-k} \exp\left(2\pi i n M\langle z\rangle\right) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} (cz+d)^{-k} \exp\left(2\pi i n \tfrac{az+b}{cz+d}\right)$$

die **n-te Poincaré-Reihe** vom Gewicht k bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. (Definition 3.13)

- $P_{0,k} = E_k \in M_k \setminus S_k$ (Beispiel 3.14)
- $P_{n,k} \in S_k$ für $n \geq 1$ (Satz 3.15), insbesondere $S_k = \langle P_{n,k} \mid n \in \mathbb{N}\rangle_{\mathbb{C}}$ (Korollar 3.17)
- Fourier-Entwicklung $P_{n,k}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(n,k) q^m$ (Satz 3.19)

Die Abbildung $S_k \to \mathbb{C}, g \mapsto a_n(g)$ ist ein lineares Funktional. Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists! \tilde{P}_{n,k} \in S_k : a_n(g) = \langle g \mid \tilde{P}_{n,k}\rangle \quad \forall g \in S_k \ .$$

Definition: $\tilde{P}_{n,k} := \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} \cdot P_{n,k}$

C: Übungsaufgaben

1. Sei $r_k = \dim_{\mathbb{C}} M_k$ und $l = k - 12r_k + 12$. Zeigen Sie, dass für eine beliebige Modulform $f \in M_k$ folgendes gilt: $fE_l^{-1} \in M_{12r_k-12}$ und $fE_l^{-1}\Delta^{1-r_k}$ ist polynomial in j.
2. Sei $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ mit $f(M\langle z\rangle) = g(z)$. Für $M = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ folgt

   $$\left(g|_k M\right)(z) = \left(f|_k \begin{pmatrix} a & Nb \\ \frac{c}{N} & d \end{pmatrix}\right)(Nz) \ ,$$

   was nachzuweisen ist.
3. Sei $N \in \{2,3,4,6,12\}$ und $k = \frac{12}{N}$. Zeigen Sie, dass $S_k(\Gamma(N)) = \mathbb{C} \cdot \Delta(N\tau)^{\frac{1}{N}}$.