# Algebra I
## Wintersemester 2020/21

Prof. Dr. Alexander Schmidt

Ziel: Gruppen, Ringe, Körper
Anwendung:
- warum kann man das 17-Eck konstruieren, aber nicht das 19-Eck?
- warum kann man „den Kreis nicht quadrieren“?
- warum kann man Gleichungen 5ten und höheren Grades nicht auflösen?

Literatur: Bosch: „Algebra“.

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Gruppentheorie

## 1.1 Definitionen

**Definition 1.1.** Eine Menge $M$ zusammen mit einer Verknüpfung $M \times M \to M$, $(a, b) \to ab$ heißt **Monoid**, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Assoziativität: $(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in M$
(ii) neutrales Element: es existiert ein $e \in M$ mit $em = m = me$ für alle $m \in M$.

**Bemerkung 1.2.** 1) $e$ ist eindeutig bestimmt. Ist $e'$ ein weiteres neutrales Element, so gilt $e = e \cdot e' = e'$.
2) Wegen (i) kann man Klammerung weglassen und für $m_1, \ldots, m_n \in M$ vom Produkt $m_1 \cdots m_n \in M$ sprechen. Für $a \in M$ und $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n\text{-mal}}$$

Per Konvention ist $a^0 = e$.

**Definition 1.3.** Sei $(M, \cdot)$ ein Monoid und $a \in M$. Ein $b \in M$ heißt **invers** zu $a$, wenn $ab = e = ba$ gilt.

**Bemerkung 1.4.** $b$ ist, wenn es existiert, eindeutig durch $a$ bestimmt: Ist $b'$ auch Inverses, so gilt $b = eb = b'ab = b'e = b'$.

**Definition 1.5.** Ein Monoid $(G, \cdot)$ heißt **Gruppe**, wenn jedes Element ein Inverses hat.

**Bemerkung 1.6.** Man kann dies abschwächen zu:
- Assoziativität,
- Existenz eines linksneutralen Elements,
- Existenz von Linksinversen,

und dann zeigen, dass das linksneutrale Element auch rechtsneutral und ein Linksinverses auch rechtsinvers ist (siehe LA I-Vorlesung).

**Definition 1.7.** Ein Monoid (eine Gruppe) heißt **kommutativ**, wenn $ab = ba$ für beliebige $a, b$ gilt.

**Beispiele 1.8.** • $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ mit "+" sind kommutative Gruppen.
• $(\mathbb{Z}, \cdot)$ und $(\mathbb{N}_0, +)$ sind kommutative Monoide.
• $\mathfrak{S}_n$ ist eine Gruppe, nicht kommutativ für $n \geq 3$
• Ist $k$ ein Körper, so sind $\mathrm{Gl}_n(k)$ und $\mathrm{Sl}_n(k)$ Gruppen, die für $n > 1$ nicht-kommutativ sind.

**Definition 1.9.** Sei $G$ ein Monoid. Eine Teilmenge $H \subset G$ heißt **Untermonoid**, falls

(i) $e \in H$.
(ii) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$.

Ist $G$ eine Gruppe, so heißt $H$ **Untergruppe** wenn zusätzlich gilt
(iii) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$.

**Definition 1.10.** Seien $G, G'$ Monoide mit neutralen Elementen $e, e'$. Eine Abbildung $\varphi : G \to G'$ heißt **Monoidhomomorphismus** wenn

(i) $\varphi(e) = e'$.
(ii) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \qquad \forall\, a, b \in G$.

**Bemerkung 1.11.** Sind $G$ und $G'$ Gruppen, so folgt (i) schon aus (ii) wegen $\varphi(e) = \varphi(e \cdot e) = \varphi(e)\varphi(e)$, also $e' = \varphi(e)^{-1}\varphi(e) = \varphi(e)^{-1}\varphi(e)\varphi(e) = \varphi(e)$.

**Bemerkung 1.12.** Ist $M$ ein Monoid und $x \in M$, so definiert

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{N}_0 & \longrightarrow & M \\ n & \longmapsto & x^n \end{array}$$

einen Monoidhomomomorphismus. Ist $G$ eine Gruppe und $x \in G$ so erhält man einen Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ n & \longmapsto & x^n \end{array}$$

wobei man für $n < 0$ setzt: $x^n = (x^{-n})^{-1}$.

**Satz 1.13.** *(Satz von Cayley). Sei $G$ eine endliche Gruppe mit $n$ Elementen. Dann gibt es einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$.*

*Beweis.* Wir nummerieren die Elemente

$$G = \{g_1, \ldots, g_n\}.$$

Für $g \in G$ definieren wir $\pi_g : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ durch $gg_i = g_{\pi_g(i)}$.
Behauptung: $\pi_g$ ist bijektiv, also $\pi_g \in \mathfrak{S}_n$.
Injektivität: ist $\pi_g(i) = \pi_g(j)$, so gilt $gg_i = gg_j \Rightarrow g_i = g_j \Rightarrow i = j$.
Surjektivität: folgt aus Injektivität und Endlichkeit.

Nun definiere $\varphi : G \to \mathfrak{S}_n$ durch $\varphi(g) = \pi_g$.

Behauptung: $\varphi : G \to \mathfrak{S}_n$ ist ein Gruppenhomomorphismus.
Nach Definition gilt $(hh')g_i = g_{\varphi(hh')(i)}$, es gilt aber auch

$$\begin{aligned}(hh')g_i = h(h'g_i) &= hg_{\varphi(h')(i)} \\ &= g_{\varphi(h)(\varphi(h')(i))} = g_{(\varphi(h)\varphi(h'))(i)}.\end{aligned}$$

Also $\varphi(hh') = \varphi(h)\varphi(h')$, was die Behauptung zeigt.
Behauptung: $\varphi : G \to \mathfrak{S}_n$ ist injektiv.
Sei $\varphi(g) = \mathrm{id}$. Dann gilt $gh = h$ für alle $h \in G$, insbesondere $g = ge = e$. □

**Bemerkung 1.14.** Sei $G$ eine kommutative Gruppe und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $G \to G$, $g \mapsto g^n$, ein Gruppenhomomorphismus.

**Bemerkung 1.15.** Sei $G$ eine Gruppe und $a \in G$. Dann ist $\varphi_a : G \to G$, $g \mapsto aga^{-1}$, ein Gruppenhomomorphismus. Man nennt $\varphi_a$ **inneren Automorphismus**. Die Abbildung

$$G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G),\ a \longmapsto \varphi_a,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Dieser ist genau dann trivial (d.h. konstant $= \mathrm{id}_G$), wenn $G$ kommutativ ist.

## 1.2 Nebenklassen, Normalteiler, Faktorgruppen

**Definition 1.16.** Sei $G$ eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Eine **Linksnebenklasse** von $H$ in $G$ ist eine Teilmenge der Gestalt $aH := \{ah \mid h \in H\}$.

**Satz 1.17.** *Je zwei Linksnebenklassen von $H$ in $G$ sind gleichmächtig, verschiedene Linksnebenklassen von $H$ in $G$ sind disjunkt. Insbesondere ist $G$ disjunkte Vereinigung der Linksnebenklassen von $H$.*

*Beweis.* Für jedes $a \in G$ ist die Abbildung

$$eH = H \longrightarrow aH,\ h \longmapsto ah,$$

bijektiv, also sind alle Linksnebenklassen gleichmächtig. Die zweite Behauptung folgt aus dem nächsten Lemma. □

**Lemma 1.18.** *Seien $aH, bH$ zwei Linksnebenklassen in $G$. Dann sind äquivalent*

(i) $aH = bH$.
(ii) $aH \cap bH \neq \varnothing$.
(iii) $a \in bH$.
(iv) $b^{-1}a \in H$.

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial wegen $H \neq \varnothing$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $c \in aH \cap bH$, $c = ah_1 = bh_2$. Dann gilt $a = bh_2h_1^{-1} \in bH$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv) $a \in bH \Rightarrow a = bh, h \in H$, also $b^{-1}a = h \in H$.
(iv) $\Rightarrow$ (i) $b^{-1}a = h \in H$, also $a = bh$ und daher $aH \subset bH$. Nun ist $H$ Untergruppe, also gilt auch $a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1} \in H$ und wir erhalten analog $bH \subset aH$. □

**Bemerkung 1.19.** • Die Linksnebenklassen von $H$ in $G$ sind die Äquivalenzklassen bzgl. der Relation $a \sim_H b \Longleftrightarrow b^{-1}a \in H$.
• die Elemente der Linksnebenklasse $aH$ heißen ihre **Repräsentanten**. Ist $a'$ ein Repräsentant von $aH$, so folgt aus dem Lemma, dass $aH = a'H$.
• Die Menge der Linksnebenklassen wird mit $G/H$ bezeichnet.
• In analoger Weise definiert man die Menge $H\backslash G$ der Rechtsnebenklassen von $H$ in $G$, d.h. der Teilmengen der Gestalt

$$Ha := \{ha \mid h \in H\},\ a \in G.$$

**Lemma 1.20.** *Die bijektive Abbildung $G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$ definiert eine Bijektion*

$$G/H \xrightarrow{\sim} H\backslash G$$

*Beweis.* $ah \mapsto h^{-1}a^{-1}$, also bildet sich die Linksnebenklasse $aH$ bijektiv auf die Rechtsnebenklasse $Ha^{-1}$ ab. □

**Definition 1.21.** Der **Index** von $H$ in $G$ ist die Anzahl der Links (Rechts)-nebenklassen von $H$ in $G$. Bezeichnung: $(G : H)$. Die **Ordnung** von $G$ ist die Anzahl der Elemente von $G$. Bezeichnung: $\mathrm{ord}(G)$. (Sowohl Index als auch Ordnung können $\infty$ sein.)

Mit den üblichen Konventionen für das Rechnen mit $\infty$ ergibt sich aus Satz 1.17 sofort

**Satz 1.22 (Satz von Lagrange).** *Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so gilt*

$$\mathrm{ord}(G) = \mathrm{ord}(H)(G : H).$$

**Definition 1.23.** Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt **Normalteiler**, wenn $aH = Ha$ für alle $a \in G$ gilt. In diesem Fall bezeichnet man dieNebenklasse $aH = Ha$ als die **Restklasse** von $a$ modulo $H$.

**Lemma 1.24.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent*
*(i)* $H \subset G$ *ist Normalteiler.*
*(ii)* $aHa^{-1} = H \quad \forall\, a \in G.$
*(iii)* $aHa^{-1} \subset H \quad \forall\, a \in G.$

*Beweis.* (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ist trivial, genauso (ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei nun $aHa^{-1} \subset H$, also $aH \subset Ha$. Es gilt aber auch $a^{-1}Ha \subset H$, also $Ha \subset aH$, also $aH = Ha$. □

**Notation:** $H \lhd G$ bedeutet $H$ ist Normalteiler in $G$.

**Bemerkung 1.25.** Die Untergruppen $\{1\}$ und $G$ sind aus trivialen Gründen stets Normalteiler in $G$.

**Lemma 1.26.** *Jede Untergruppe* $H \subset G$ *vom Index 2 ist Normalteiler.*

*Beweis.* Zu zeigen: $aH = Ha$ für beliebiges $a \in G$. Für $a \in H$ gilt $aH = H = Ha$. Für $a \notin H$ folgt $G = H \dot\cup aH$ und $G = H \dot\cup Ha$. Wir erhalten $aH = G - H = Ha$. □

**Lemma 1.27.** *Ist* $f : G \to G'$ *ein Gruppenhomomorphismus, so ist* $\mathrm{Kern}(f) \subset G$ *ein Normalteiler.*

*Beweis.* Ist $a \in G$, $h \in \mathrm{Kern}(f)$ so gilt

$$f(aha^{-1}) = f(a) \cdot e' \cdot f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(e) = e',$$

also $aha^{-1} \in \mathrm{Kern}\, f$. □

**Bemerkung 1.28.** $\mathrm{Bild}(f) \subset G'$ ist eine Untergruppe aber i.A. kein Normalteiler.

**Definition 1.29.** Sei $H \lhd G$. Dann heißt $G/H$ mit der Verknüpfung

$$(aH)(a'H) = aa'H$$

die **Faktorgruppe** von $G$ nach $H$.

Verifikation:
• Die Verknüpfung ist wohldefiniert: Sei $a_1 = a_2h$, $a_1' = a_2'h'$, $h, h' \in H$. Dann gilt $a_1a_1' = a_2ha_2'h' = a_2a_2' \cdot \underbrace{(a_2')^{-1}ha_2'}_{\in H} h'$, also $a_1a_1'H = a_2a_2'H$.
(Hier haben wir $H \lhd G$ benutzt!)
• neutrales Element: $eH$.
• Inverses zu $aH$ ist $a^{-1}H$.

**Bemerkung 1.30.** Die kanonische Projektion $G \to G/H$, $g \mapsto gH$ ist ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $H$. Daher sind die Normalteiler genau die Untergruppen, die als Kerne von Gruppenhomomorphismen auftreten.

**Satz 1.31.** *Sei $H \lhd G$ und $\phi : G \to G/H$ die kanonische Projektion. Dann induziert die Zuordnung $U \mapsto \varphi^{-1}(U)$ eine inklusionserhaltende Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Untergruppen} \\ \text{in } G/H \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Untergruppen} \\ \text{in } G \text{ die } H \\ \text{enthalten} \end{array} \right\}$$

*$U$ ist genau dann Normalteiler in $G/H$, wenn $\phi^{-1}(U)$ Normalteiler in $G$ ist.*

*Beweis.* 1) $\phi^{-1}(U)$ ist Untergruppe in $G$ und $\phi^{-1}(U) \supset \mathrm{Kern}(\phi) = H$.
2) Die Zuordnung ist surjektiv. Sei $W \subset G$ mit $W \supset H$. Setze $U = \phi(W)$.
*Behauptung:* $W = \phi^{-1}(U)$.
Klar ist $W \subset \phi^{-1}(U) = \phi^{-1}(\phi(W))$. Sei nun $w \in \phi^{-1}(U)$, d.h. $\phi(w) \in U = \phi(W)$. Dann existiert ein $w' \in W$ mit $\phi(w) = \phi(w')$. Es folgt $w(w')^{-1} \in \mathrm{Kern}(\phi) = H$ und wegen $H \subset W$ folgt $w = w(w')^{-1} \cdot w' \in W$.
3) Die Zuordnung ist injektiv. Wegen der Surjektivität von $\phi$ gilt $U = U' \iff \phi^{-1}(U) = \phi^{-1}(U')$.

Letztens: Ist $U \lhd G/H$, so gilt

$$g\phi^{-1}(U)g^{-1} \subset \phi^{-1}(\phi(g)U\phi(g)^{-1}) = \phi^{-1}(U),$$

also ist $\phi^{-1}(U)$ Normalteiler.
Ist umgekehrt $\phi^{-1}(U) \lhd G$ und $u \in U$, $g \in G/H$ und wählen wir $u', g' \in G$ mit $\phi(u') = u$, $\phi(g') = g$,
so gilt

$$gug^{-1} = \phi(\underbrace{g'u'(g')^{-1}}_{\in \phi^{-1}(U)}) \in \phi(\phi^{-1}(U)) = U. \qquad \square$$

**Satz 1.32 (Homomorphiesatz).** *Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann faktorisiert $f$ in eindeutiger Weise in der Form*

$$G \xrightarrow{p} G/\mathrm{Kern}(f) \xrightarrow[F]{\sim} \mathrm{Bild}(f) \xhookrightarrow{i} G'.$$

*Hierbei ist $p$ die kanonische Projektion, $i$ die kanonische Inklusion und $F$ ist durch $F(a\,\mathrm{Kern}(f)) = f(a)$ definiert. $F$ ist ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Genau der gleiche wie der für kommutative Gruppen, den wir in der LA gesehen haben. $\square$

**Definition 1.33.** Sind $H_1, H_2 \subset G$ Untergruppen, so bezeichnet $H_1H_2$ die Menge

$$H_1H_2 = \{h_1h_2 \mid h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2\}.$$

**Lemma 1.34.** *Ist eine der Untergruppen $H_1, H_2$ Normalteiler, so ist $H_1H_2$ eine Untergruppe. Sind beide Normalteiler, so auch $H_1H_2$.*

*Beweis.* Sei $H_1$ Normalteiler. Dann liegt für $h_1, h_1' \in H_1$, $h_2, h_2' \in H_2$:

$$(h_1h_2)(h_1'h_2') = h_1 \underbrace{(h_2h_1'h_2^{-1})}_{\in H_1} h_2h_2'$$

wieder in $H_1H_2$. Mit $h_1h_2$ liegt auch $(h_1h_2)^{-1} = h_2^{-1}h_1^{-1} = \underbrace{h_2^{-1}h_1^{-1}h_2}_{\in H_1} h_2^{-1}$ in $H_1H_2$. Der Fall $H_2 \triangleleft G$ läuft analog. Schließlich gilt falls $H_1, H_2 \triangleleft G$, dass

$$gH_1H_2g^{-1} = (gH_1g^{-1})(gH_2g^{-1}) = H_1H_2. \qquad \square$$

**Lemma 1.35.** *Ist $N \triangleleft G$ Normalteiler und $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist $N$ Normalteiler in $HN$ und $H \cap N$ Normalteiler in $H$.*

*Beweis.* • $(hn)n'(hn)^{-1} \in N$ wegen $hn \in G$
• Ist $n \in H \cap N$ so gilt $hnh^{-1} \in H \cap N$. $\square$

**Satz 1.36 (1. Isomorphiesatz).** *Sei $G$ eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $N \triangleleft G$ ein Normalteiler. Dann induziert die natürliche Inklusion $H \hookrightarrow HN$ einen Isomorphismus*

$$H/H \cap N \xrightarrow{\sim} HN/N.$$

*Beweis.* Wir betrachten die Komposition

$$f : H \longrightarrow HN \longrightarrow HN/N.$$

Wegen $hnN = hN$ ist $f$ surjektiv. Außerdem gilt $f(h) = e \iff hN = eN \iff h \in N$, also $\mathrm{Kern}(f) = H \cap N$. Der Homomorphiesatz impliziert einen natürlichen Isomorphismus $H/\mathrm{Kern}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(f)$, also genau

$$H/H \cap N \xrightarrow{\sim} HN/N. \qquad \square$$

**Satz 1.37 (2. Isomorphiesatz).** *Sei $G$ eine Gruppe und $N, H \triangleleft G$ mit $N \subset H$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$(G/N)/(H/N) \xrightarrow{\sim} G/H.$$

*Beweis.* Zunächst induziert die Inklusion $H \hookrightarrow G$ eine Injektion $H/N \hookrightarrow G/N$, also ist $H/N$ Untergruppe von $G/N$. Dies ist genau die Menge der Nebenklassen $hN$ mit $h \in H$. Nun betrachten wir die kanonische Projektion $p : G \to G/H$. Es gilt $N \subset \mathrm{Kern}(p) = H$. Daher erhalten wir einen induzierten surjektiven Homomorphismus $\pi : G/N \to G/H$ mit $\mathrm{Kern}(\pi) = H/N$. Der Homomorphiesatz impliziert das Resultat. $\square$

## 1.3 Zyklische Gruppen

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ die Untergruppe der durch $n$ teilbaren ganzen Zahlen.

**Satz 1.38.** *Die Untergruppen von $\mathbb{Z}$ sind genau die folgenden: $\{0\}$, $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Z}$.*

*Beweis.* Sei $H \subset \mathbb{Z}$ eine Untergruppe $H \neq 0$. Sei

$$n = \min\{a \in \mathbb{N},\ a \in H\}.$$

Da mit $a$ auch $-a$ in $H$ liegt, ist die obige Menge nichtleer und $n$ eine wohldefinierte natürliche Zahl. Wegen $n \in H$ folgt $\underbrace{n + \cdots + n}_{m\text{-mal}} \in H$, also $nm \in H$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Das gleiche gilt für $-nm$, also:

$$na \in H \text{ für } \forall\, a \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad n\mathbb{Z} = H.$$

Angenommen es gäbe ein $a \in H$, $a \notin n\mathbb{Z}$. Dann existierte ein $b \in \mathbb{Z}$ mit

$$0 < a - nb < n.$$

Wegen $a \in H$ und $nb \in H$ folgt $a - nb \in H$ im Widerspruch zur Definition von $n$. Daher gilt $n\mathbb{Z} \subset H$.

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den injektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $a \mapsto na$. Es gilt: $\mathrm{Kern}(\varphi) = 0$, $\mathrm{Bild}(\varphi) = n\mathbb{Z}$. Nach dem Homomorphiesatz induziert $\varphi$ einen Isomorphismus $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} n\mathbb{Z}$. □

Sei $G$ eine Gruppe und $X \subset G$ eine Teilmenge.

**Definition 1.39.** Der Durchschnitt aller Untergruppen $H \subset G$ mit $X \subset H$ heißt die **von $X$ erzeugte Untergruppe**. Bezeichnung $\langle X \rangle$. Diese ist die kleinste Untergruppe von $G$ die $X$ enthält. Man sagt $G$ werde von $X$ erzeugt, wenn $\langle X \rangle = G$ gilt.

**Lemma 1.40.** *$\langle X \rangle$ ist die Teilmenge aller Elemente von $G$ der Form*

$$x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \quad \textit{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \varepsilon_i \in \{\pm 1\},$$

*und $x_1, \dots, x_n \in X$.*

*Beweis.* Diese Teilmenge ist offenbar eine Untergruppe und jede Untergruppe $H \subset G$ mit $X \subset H$ enthält alle diese Elemente. □

**Bemerkung 1.41.** Ist $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ endlich, so schreibt man auch $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ anstelle von $\langle \{x_1, \dots, x_r\} \rangle$.

**Lemma 1.42.** *Sei $x \in G$. Dann ist $\langle x \rangle$ das Bild des Gruppenhomomorphismus*

$$\mathbb{Z} \longrightarrow G, \quad n \longmapsto x^n.$$

*Beweis.* Das folgt aus Lemma 1.40 mit $X = \{x\}$. □

**Definition 1.43.** Eine Gruppe $G$ heißt **zyklisch**, wenn sie von einem Element erzeugt wird. Äquivalent: Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to G$.

**Korollar 1.44.** *Sei $G$ eine zyklische Gruppe. Dann gilt*

$$G \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } \operatorname{ord} G = \infty \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{falls } \operatorname{ord} G = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

*Beweis.* Sei $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Nach Satz 1.38 gilt

$$\operatorname{Kern}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{oder} \\ n\mathbb{Z} & \text{mit } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Der Homomorphiesatz liefert nun das Ergebnis. □

**Satz 1.45.** *Ist $G$ eine zyklische Gruppe, so ist jede Untergruppe und jede Faktorgruppe von $G$ wieder zyklisch.*

*Beweis. Faktorgruppe*: Sei $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ surjektiv. Dann ist für jeden Normalteiler $N \triangleleft G$ auch $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{p} G/N$ surjektiv, also $G/N$ ist zyklisch.
*Untergruppe*: Sei $H \subset G$ eine Untergruppe und $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ surjektiv. Dann ist $\varphi^{-1}(H) \subset \mathbb{Z}$ eine Untergruppe die sich surjektiv auf $H$ abbildet. Nach dem ersten Teil des Beweises genügt es zu zeigen, dass $\varphi^{-1}(H)$ zyklisch ist. Nun ist nach Satz 1.38

$$\varphi^{-1}(H) = \begin{cases} 0 & \text{oder} \\ n\mathbb{Z} & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Die triviale Gruppe ist zyklisch und $n\mathbb{Z}$ ist nach Satz 1.38 isomorph zu $\mathbb{Z}$, also zyklisch. □

Sei $G$ eine Gruppe und $a \in G$.

**Definition 1.46.** Die **Ordnung** $\operatorname{ord}(a)$ von $a$ ist die kleinste natürliche Zahl so dass $a^{\operatorname{ord}(a)} = e$ gilt. Existiert eine solche Zahl nicht, so setzt man $\operatorname{ord}(a) = \infty$.

**Lemma 1.47.**

$$\operatorname{ord}(a) = \operatorname{ord}(\langle a \rangle)$$

*Beweis.* Es gilt

$$\langle a\rangle = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \dots\}$$

und falls $\operatorname{ord}(a) = \infty$ gilt, so sind alle diese Elemente verschieden. Würde nämlich $a^\alpha = a^\beta$ mit $\beta > \alpha \in \mathbb{Z}$ gelten, so folgt $a^{\beta-\alpha} = e$ und $\beta - \alpha \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zu $\operatorname{ord}(a) = \infty$.
Nun sei $\operatorname{ord}(a) = n \in \mathbb{N}$. Dann sind (benutze das gleiche Argument) die Elemente $\{a, a^2, \dots, a^n = e\}$ paarweise verschieden und diese bilden die Gruppe $\langle a\rangle$. □

**Korollar 1.48.** *Für $a \in G$ gilt* $\operatorname{ord}(a) \mid \operatorname{ord}(G)$.

*Beweis.* Es gilt nach dem Satz von Lagrange: $\operatorname{ord}(G) = (G : \langle a\rangle) \cdot \operatorname{ord}(a)$. □

**Satz 1.49** (Kleiner Fermatscher Satz)**.** *Ist $G$ eine endliche Gruppe, so gilt*

$$a^{\operatorname{ord}(G)} = e$$

*für alle $a \in G$.*

*Beweis.* Beweis: $\operatorname{ord}(a) \mid \operatorname{ord}(G)$ und $a^{\operatorname{ord}(a)} = e$. □

**Satz 1.50.** *Sei $G$ eine endliche Gruppe von Primzahlordnung, d.h.* $\operatorname{ord}(G) = p$, *$p$ Primzahl. Dann ist $G$ zyklisch und $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

*Beweis.* Sei $a \in G$, $a \neq e$. Dann gilt $\operatorname{ord}(a) > 1$ und $\operatorname{ord}(a) \mid \operatorname{ord}(G) = p$. Also $\operatorname{ord}(a) = p$ und daher $G = \langle a\rangle$. □

# 2 Ringe und Polynome

## 2.1 Ringe, Polynomringe in einer Variablen

**Definition 2.1.** Ein **Ring** (mit 1) ist eine Menge $R$ mit zwei binären Operatoren „$+$“ und „$\cdot$“ und Elementen $0, 1 \in R$, so dass

(i) $(R, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe
(ii) $(R, \cdot, 1)$ ist ein Monoid
(iii) es gilt

$$(a + b)c = ac + bc,\ c(a + b) = ca + cb$$

für alle $a, b, c \in R$.
$R$ heißt **kommutativ**, wenn die Multiplikation kommutativ ist.

Eine Teilmenge $S \subset R$ heißt **Unterring**, wenn $(S, +)$ eine Untergruppe in $(R, +)$ und $(S, \cdot)$ ein **Untermonoid** in $(R, \cdot)$ ist.
Eine Abbildung $f : R \to R'$ heißt **Ringhomomorphismus** wenn $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ und $f(1) = 1$ gilt.

Aus der Definition sieht man direkt: $0a = (0+0)a = 0a + 0a$, woraus $0a = 0$ für alle $a \in R$ folgt.

**Beispiel 2.2.** • $R = K$ ein Körper.
• $R = \mathbb{Z}$.
• Ist $R$ ein Ring, so auch der Ring der Polynome $R[T]$.
• Der Nullring 0, d.h. eine einelementige Menge mit den einzig möglichen Operationen ist ein Ring. In diesem gilt $0 = 1$. Bis auf Isomorphie gibt es nur einen Ring mit $0 = 1$, nämlich den Nullring. Grund: Ist $0 = 1$, so gilt für jedes $a \in R$:

$$a = 1 \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

Wir betrachten im folgenden nur kommutative Ringe, d.h. ohne das extra nochmals zu sagen wird im folgenden von jedem Ring angenommen, dass er kommutativ ist!

**Definition 2.3.** Ein **Ideal** $\mathfrak{a}$ in einem Ring $R$ ist eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subset R$ so dass
(i) $(\mathfrak{a}, +) \subset (R, +)$ ist Untergruppe
(ii) $r \in R$, $a \in \mathfrak{a} \Rightarrow ra \in \mathfrak{a}$.

**Beispiel 2.4.** • $\mathfrak{a} = R$ und $\mathfrak{a} = \{0\}$ sind stets Ideale.
• die Untergruppen von $\mathbb{Z}$ (d.h. 0 und $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$) sind sämtlich Ideale.

Ist $R$ ein Ring und $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, so wird die Faktorgruppe $R/\mathfrak{a}$ mit der Multiplikation

$$(a + \mathfrak{a})(b + \mathfrak{a}) = ab + \mathfrak{a}$$

wieder ein Ring. Die kanonische Projektion $\phi : R \to R/\mathfrak{a}$, $a \mapsto a + \mathfrak{a}$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

**Satz 2.5.** *Die Zuordnung* $\mathfrak{b} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{b})$ *definiert eine inklusionserhaltende Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale in} \\ R/\mathfrak{a} \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale in } R \textit{ die} \\ \mathfrak{a} \textit{ enthalten} \end{array} \right\}$$

*Beweis.* Analog wie 1.31. Siehe auch die LA II-Vorlesung. □

**Definition 2.6.** $x \in R$ heißt **Nullteiler**, wenn ein $y \in R$, $y \neq 0$ mit $xy = 0$ existiert. $R$ heißt nullteilerfrei, wenn $R \neq 0$ und $0 \in R$ der einzige Nullteiler ist. $x \in R$ heißt **Einheit** wenn ein $y \in R$ mit $xy = 1$ existiert.
Die Menge $R^\times$ der Einheiten von $R$ bildet eine abelsche Gruppe bzgl. Multiplikation.

Jedes Element $x \in R$ definiert ein **Hauptideal** $(x) = Rx = \{rx \mid r \in R\}$. $x \in R$ ist Einheit $\iff (x) = R$.
Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset R$ heißt Hauptideal, wenn $\mathfrak{a} = (x)$ für ein $x \in R$.
$R$ heißt **Hauptidealring**, wenn $R$ nullteilerfrei ist und jedes Ideal in $R$ Hauptideal ist.

**Beispiel 2.7.** $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring.

**Definition 2.8.** $R$ heißt **Körper**, wenn $R^\times = R \setminus \{0\}$ (insbesondere ist $R = 0$ *kein* Körper).

**Satz 2.9.** *Sei $R$ ein Ring $\neq 0$. Dann sind äquivalent*
(i) *$R$ ist Körper.*
(ii) *$(0)$ und $(1)$ sind die einzigen Ideale in $R$.*
(iii) *jeder Homomorphismus $f : R \to S$ in einen Ring $S \neq 0$ ist injektiv.*

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal $\neq 0$. Dann existiert ein $0 \neq x \in \mathfrak{a}$. Daher gilt $1 = x^{-1}x \in \mathfrak{a}$, folglich $R = (1) \subseteq \mathfrak{a} \subseteq R$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Sei $f: R \to S$ ein Ringhomomorphismus mit $S \neq 0$. Wegen $0 \neq 1$ in $S$ ist $\mathrm{Kern}(f) \subset R$ ein Ideal $\neq R \Rightarrow \mathrm{Kern}(f) = 0$.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $x \in R$ keine Einheit. Dann ist $(x) \neq R$, also $S = R/(x)$ nicht der Nullring. Es gilt $x \in \mathrm{Kern}(\phi : R \to R/(x))$, also $x = 0$. Daher ist $R$ Körper. □

**Definition 2.10.** Ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$ heißt **Primideal** wenn $\mathfrak{p} \neq R$ und $xy \in \mathfrak{p} \Rightarrow x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$. Ein Ideal heißt **Maximalideal**, wenn $\mathfrak{m} \neq R$ und es gibt kein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq R$.

**Satz 2.11.** (i) *$\mathfrak{p}$ ist Primideal $\iff$ $R/\mathfrak{p}$ ist nullteilerfrei.*
(ii) *$\mathfrak{m}$ ist Maximalideal $\iff$ $R/\mathfrak{m}$ ist Körper.*
*Insbesondere sind Maximalideale prim.*

*Beweis.* (i) $xy \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow \overline{xy} = 0$ in $R/\mathfrak{p}$.
(ii) Nach 2.5 entsprechen die Ideale $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq R$ den Idealen $\neq 0, (1)$ in $R/\mathfrak{m}$. Nach 2.9 ist $R/\mathfrak{m}$ genau dann ein Körper, wenn es solche Ideale nicht gibt. □

**Satz 2.12.** *Jeder Ring $\neq 0$ enthält ein Maximalideal.*

*Beweis.* Mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Lassen wir weg. Siehe LA II. □

**Korollar 2.13.** (i) *Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq R$ ist in einem Maximalideal enthalten.*
(ii) *jede Nichteinheit ist in einem Maximalideal enthalten.*

*Beweis.* (i) $\mathfrak{a} \subsetneq R \Rightarrow R/\mathfrak{a} \neq 0$. Nach Satz 2.12 erhalten wir ein Maximalideal in $R/\mathfrak{a}$ dessen Urbild in $R$ nach Satz 2.5 ein Maximalideal ist, das $\mathfrak{a}$ umfasst.
(ii) $x$ Nichteinheit $\Rightarrow (x) \subsetneq R$. □

## 2.2 Faktorielle Ringe

Im ganzen Abschnitt sind Ringe stets kommutativ und *nullteilerfrei*. Dann kann man „kürzen“, d.h. ist $a \neq 0$ und $ab = ac$ so folgt $b = c$.
Begründung: Es gilt $a(b - c) = 0$, also $b - c = 0$.

**Definition 2.14.** Ein Element $0 \neq \pi \in R \setminus R^\times$ heißt

**Primelement** $\iff (\pi)$ ist Primideal
**irreduzibel** $\iff$ aus $ab = \pi$ folgt $a \in R^\times$ oder $b \in R^\times$.

Wir sagen $a \mid b$ in $R$ wenn ein $c \in R$ mit $ac = b$ existiert.
Also: $\pi$ ist Primelement falls $\pi \mid ab \Rightarrow \pi \mid a$ oder $\pi \mid b$.
Elemente $a, b \in R$ heißen **assoziiert**, wenn $a \mid b$ und $b \mid a$. Notation: $a \hat{=} b$.

**Lemma 2.15.** *Für $a, b \in R$ sind äquivalent:*
(i) $a \hat{=} b$.
(ii) $a = be$ *mit* $e \in R^\times$.
(iii) $(a) = (b)$.

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii) $a = b \cdot e$, $b = a \cdot c$, also $b = b(ec)$. Ist $b \neq 0$ folgt $ec = 1$, also $e$ Einheit. Ist $b = 0$, so auch $a = be = 0$. Nun gilt $0 = 0 \cdot 1$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) $a = be$ mit $e \in R \Rightarrow (a) \subset (b)$. Ist $e \in R^\times$ so existiert $e^{-1} \in R$ und $b = ae^{-1}$. Also gilt $(b) \subset (a)$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) $b \in (a) \Rightarrow a \mid b$
$a \in (b) \Rightarrow b \mid a$. □

**Lemma 2.16.** *Primelemente sind irreduzibel.*

*Beweis.* Sei $\pi$ prim und $ab = \pi$. Dann gilt $\overline{a}\overline{b} = 0$ im nullteilerfreien Faktorring $R/(\pi)$. Also $\overline{a} = 0$ oder $\overline{b} = 0$. Sei OE $\overline{a} = 0$, also $a = a'\pi$, $a' \in R$. Dann gilt $\pi = ab = \pi a'b$. Kürzen liefert $1 = a'b$, also $b \in R^\times$. □

*Erinnerung:* $R$ nullteilerfrei im ganzen Abschnitt.

**Lemma 2.17.** *Ein Element $a \in R$ habe Zerlegungen*

$$a = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$$

*in Primelemente $p_i$ und irreduzible Elemente $q_j$. Dann gilt $r = s$ und nach Umnummerierung ist $p_i \hat{=} q_i$, $i = 1, \ldots, r$.*

*Beweis.* Da $p_1$ prim ist folgt aus $p_1 \mid a = q_1 \ldots q_s$, dass $p_1 \mid q_j$ für ein $j$ (insbesondere gilt $s \geq 1$). Nach Umnummerierung sei dies $q_1$. Also gilt $q_1 = \varepsilon_1 p_1$. Da $q_1$ irreduzibel ist, muß $\varepsilon_1$ Einheit sein. Durch Kürzen erhalten wir

$$p_2 \ldots p_r = \varepsilon_1 q_2 \ldots q_s.$$

Induktiv erhalten wir das Ergebnis. (Letzter Schritt: $1 = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r \cdot q_{r+1} \cdots q_s$, woraus $s = r$ folgt, da ansonsten $q_{r+1} \ldots q_s$ Einheiten wären). □

**Satz 2.18.** *Sei $R$ ein nullteilerfreier Ring. Dann sind äquivalent:*

(i) *Jedes $a \in R \setminus R^\times$, $a \neq 0$, lässt sich eindeutig (bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit) als Produkt irreduzibler Elemente schreiben.*

(ii) *Jedes $a \in R \setminus R^\times$, $a \neq 0$, lässt sich als Produkt von Primelementen schreiben.*

**Definition 2.19.** Ein nullteilerfreier Ring, der die äquivalenten Bedingungen von Satz 2.18 erfüllt heißt **faktoriell**.

**Satz 2.20.** *In einem faktoriellen Ring ist jedes irreduzible Element Primelement.*

*Beweis der Sätze 2.20 und 2.18.* Sei Satz 2.18 (i) erfüllt. Wir zeigen dass jedes irreduzible Element schon prim ist. Sei $\pi$ irreduzibel und $a, b \in R$ mit $\pi \mid ab$. Z.z. $\pi \mid a$ oder $\pi \mid b$. Wir können annehmen, dass $a, b \in R \setminus (R^\times \cup \{0\})$. Seien $a = a_1 \cdots a_r$, $b = b_1 \cdots b_s$ Zerlegungen in irreduzible Elemente. Wegen $\pi \mid ab$ taucht $\pi$ als einer der Faktoren in einer Zerlegung in irreduzible Elemente von $ab = a_1 \cdots a_r \cdot b_1 \cdots b_s$ auf. Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 2.18(i) impliziert $\pi \hat{=} a_i$ für ein $i$ oder $\pi \hat{=} b_j$ für ein $j$. Also $\pi \mid a$ oder $\pi \mid b$.
Dies zeigt (i) $\Rightarrow$ (ii) und Satz 2.20. Die Implikation (ii)$\Rightarrow$(i) folgt aus Lemma 2.17. □

*Beispiele faktorieller Ringe*

**Definition 2.21.** Ein nullteilerfreier Ring $R$ heißt **euklidischer Ring**, wenn es eine Abbildung $v : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$ gibt, so dass gilt: zu $f, g \in R$, $g \neq 0$ gibt es stets Elemente $q, r \in R$ mit $f = qg + r$ mit $v(r) < v(g)$ oder $r = 0$.

**Beispiel 2.22.** • $R = k[T]$, $k$ ein Körper. Setze $v(f) = \deg(f)$
• $R = \mathbb{Z}$. Setze $v(a) = |a|$.

**Satz 2.23.** *(i) Jeder euklidische Ring ist Hauptidealring.*
*(ii) Jeder Hauptidealring ist faktoriell.*

*Beweis.* Siehe LA II. □

In einem faktoriellen Ring haben wir kgV und ggT. Diese sind bis auf Assoziiertheit wohlbestimmt. Ist $(p_i)_{i \in I}$ ein Vertretersystem von Primelementen bis auf Assoziiertheit und $a = \varepsilon_a \prod_{i \in I} p_i^{v_i(a)}$ wobei $v_i(a) = 0$ für fast alle $i$ und analog $b = \varepsilon_b \prod_{i \in I} p_i^{v_i(b)}$ so setzt man

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(a,b) &= \prod_{i \in I} p_i^{\min(v_i(a), v_i(b))} \\ \mathrm{kgV}(a,b) &= \prod_{i \in I} p_i^{\max(v_i(a), v_i(b))}. \end{aligned}$$

Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ Ideale, so auch $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{a},\ b \in \mathfrak{b}\}$.

**Lemma 2.24.** *Ist $R$ ein Hauptidealring, so gelten die folgenden Identitäten von Idealen*

$$\begin{aligned} (a) + (b) &= (ggT(a,b)) \\ (a) \cap (b) &= (kgV(a,b)) \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei $(d) = (a) + (b)$. Dann gilt $d|a$, $d|b$, also $d|\mathrm{ggT}(a,b)$. Andererseits existieren $x, y \in R$ mit $xa + yb = d \Rightarrow \mathrm{ggT}(a,b)|d$. Folglich $(\mathrm{ggT}(a,b)) = (d)$.

Desweiteren gilt $e \in (a) \cap (b) \Leftrightarrow a|e \wedge b|e \Leftrightarrow \mathrm{kgV}(a,b)|e \Leftrightarrow e \in (\mathrm{kgV}(a,b))$. □

**Lemma 2.25.** *Ist $R$ ein Hauptidealring, so ist jedes Primideal $\neq (0)$ maximal.*

*Beweis.* Für $a, b \in R$ gilt $(\mathrm{ggT}(a,b)) = (a) + (b)$. Sei nun $\mathfrak{p} = (p)$ ein Primideal, $\overline{a} \in R/(p)$ und $a \in R$ ein Vertreter. Ist $\overline{a} \neq 0$, so gilt $p \nmid a$, also $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$. Wegen $(a) + (p) = R$ finden wir $x, y \in R$ mit $xa + yp = 1$. Es folgt $\overline{x} \cdot \overline{a} = 1$ in $R/(p)$, d.h. $\overline{a}$ ist invertierbar. Folglich ist $R/(p)$ ein Körper, also $(p)$ ein Maximalideal. □

## 2.3 Der Satz von Gauß

Ziel dieses Abschnitts: $R$ faktoriell $\Rightarrow R[T]$ faktoriell.
So erhalten wir eine große Klasse faktorieller Ringe, die keine Hautpidealringe sind.

Vorbereitungen:

**Lemma 2.26.** *Ist $R$ nullteilerfrei, so gilt für $f, g \in R[T]$:*

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g).$$

*Beweis.* Erinnerung: per Konvention gilt $\deg(0) = -\infty$. Das Lemma ist daher richtig, falls einer der Faktoren Null ist. Seien also $f \neq 0$, $g \neq 0$. Dann ist $f = a_r T^r + \cdots + a_0$ $g = b_s T^s + \cdots + b_0$ mit $a_r \neq 0$, $b_s \neq 0$, $r = \deg f$, $s = \deg g$.
Da $R$ nullteilerfrei ist, gilt $a_r b_s \neq 0$. Wegen

$$fg = a_r b_s T^{r+s} + \text{Terme kleineren Grades},$$

folgt $\deg(fg) = r + s$. □

**Korollar 2.27.** *Ist $R$ nullteilerfrei, so auch $R[T]$.*

*Beweis.* Dies folgt aus $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$. □

**Quotientenkörper:** Sei $R$ ein nullteilerfreier Ring. Wir orientieren uns am Übergang $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$ und definieren Brüche. Wir betrachten die Menge $M$ aller Paare $(a,b)$, $a, b \in R$, $b \neq 0$, (Idee: $(a,b) =$ "$\frac{a}{b}$") und sagen $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ falls $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

**Bemerkung 2.28.** $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
Reflexivität und Symmetrie sind klar.
Transitivität: $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ und $(a_2, b_2) \sim (a_3, b_3)$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} b_2 a_3 b_1 = b_3 a_2 b_1 &= b_3 b_2 a_1 \\ &= b_2 a_1 b_3 \\ \text{Kürzen gibt:} \quad a_3 b_1 &= a_1 b_3. \end{aligned}$$

Man beachte: Wir haben die Nullteilerfreiheit benutzt.

**Definition 2.29.** Die Menge der Äquivalenzklassen von $M$ bzgl. $\sim$ wird mit $Q(R)$ bezeichnet. $Q(R)$ mit den vertreterweise definierten Operationen

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1b_2 + a_2b_1, b_1b_2)$$

und

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$$

heißt der **Quotientenkörper** von $R$.
Die Äquivalenzklasse von $(a, b) \in M$ in $Q(R)$ wird mit $\frac{a}{b} \in Q(R)$ bezeichnet.
Die Operationen schreibt man eingänglich in der Form:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1b_2} \quad \text{und} \quad \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1a_2}{b_1b_2}.$$

**Verifikationen:** • die Operationen sind wohldefiniert.

Z.B. sei $(a_1, b_1) \sim (a_1', b_1')$, also $a_1b_1' = b_1a_1'$. Dann gilt für jedes Paar $(a_2, b_2)$

$$(a_1b_2 + a_2b_1, b_1b_2) \sim (a_1'b_2 + a_2b_1', b_1'b_2)$$

wegen

$$b_1'b_2(a_1b_2 + a_2b_1) = b_1'a_1b_2^2 + b_1b_1'b_2a_2$$
$$= b_1a_1'b_2^2 + b_1b_1'b_2a_2 = b_1b_2(a_1'b_2 + a_2b_1')$$

• $Q(R)$ wird mit diesen Operationen zum Körper:
Ringaxiome: Einselement: $(1, 1)$. Nullelement: $(0, 1)$.
Körper: Sei $(a, b) \in M$, $\frac{a}{b} \in Q(R)$ und $\frac{a}{b} \neq \frac{0}{1}$. Dann gilt $a \neq 0$ und $\frac{b}{a}$ ist ein Inverses.

**Bemerkung 2.30.** Die natürliche Abbildung

$$R \longrightarrow Q(R),\ x \longmapsto \frac{x}{1},$$

ist ein injektiver Ringhomomorphismus. (Wegen $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow a = b$.)

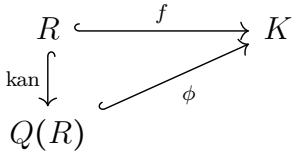
**Korollar 2.31.** *Es sei $R$ ein nullteilerfreier Ring und $f \in R[T]$, $f \neq 0$, ein Polynom. Dann hat $f$ höchstens* $\deg f$ *viele Nullstellen in $R$.*

*Beweis.* Ist $a \in R$ eine Nullstelle, d.h. $f(a) = 0$, so ist $\frac{a}{1}$ eine Nullstelle von $f$ in $Q(R)$. In $Q(R)$ hat $f$ höchstens $\deg f$ viele Nullstellen (siehe LA1) und die natürliche Abbildung $R \to Q(R)$ ist injektiv. □

**Beispiel 2.32.** Im (nicht nullteilerfreien) Ring $R = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ hat das quadratische Polynom $T^2 - 1$ vier Nullstellen: $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{5}$, $\bar{7}$.

**Philosophie:** $Q(R)$ ist der kleinste Körper in den der nullteilerfreie Ring $R$ eingebettet werden kann. In der Sprache der Universaleigenschaften:

**Satz 2.33.** *Sei $R$ ein nullteilerfreier Ring und $f : R \to K$ ein injektiver Ringhomomorphismus von $R$ in einen Körper $K$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Körperhomomorphismus $\phi : Q(R) \hookrightarrow K$, so dass das Diagramm*




*kommutiert.*

*Beweis.* Sei $\frac{a}{b} \in Q(R)$. Wegen $b \neq 0$ gilt $f(b) \neq 0$. Wir setzen $\phi\left(\frac{a}{b}\right) = f(a)f(b)^{-1} \in K$. Zu verifizieren:
- die Definition von $\phi$ ist vertreterunabhängig.
- $\phi$ ist Ringhomomorphismus.
- Eindeutigkeit.

(alles ganz einfach) □

**Bemerkung 2.34.** Bei nicht nullteilerfreien Ringen ist die Lage komplizierter. Dort macht man folgendes. Ausgehend von einer multiplikativ abgeschlossenen Teilmenge $S \subset R$ (d.h. $1 \in S$ und $s, s' \in S \Rightarrow ss' \in S$) betrachtet man die Menge aller Paare $(r, s)$, $r \in R$, $s \in S$ und man sagt $(r', s') \sim (r'', s'')$ falls ein $s \in S$ mit $sr's'' = sr''s'$ existiert (das zusätzliche $s$ braucht man, damit $\sim$ eine Äquivalenzrelation wird).
Die Menge der Äquivalenzklassen heißt die **Lokalisierung** $(S^{-1}R)$ von $R$ nach $S$ und ist in natürlicher Weise ein Ring. Für nullteilerfreie Ringe haben wir also

$$Q(R) = (R \setminus \{0\})^{-1}R.$$

Ist $R$ nicht nullteilerfrei, so ist $R \setminus \{0\}$ nicht multiplikativ abgeschlossen.

**Bemerkung 2.35.** Ist $R$ ein faktorieller Ring, und ist $(p_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem für die Primelemente bis auf Assoziiertheit, so hat jedes $\frac{a}{b} \in Q(R)$, $\frac{a}{b} \neq 0$, eine eindeutige Darstellung der Form

$$\frac{a}{b} = \varepsilon \cdot \prod_{i \in I} p_i^{v_i\left(\frac{a}{b}\right)}$$

wobei $v_i\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$ für fast alle $i$ gleich 0 ist und $\varepsilon \in R^\times$. Dies folgt aus der eindeutigen Primzerlegung.
Außerdem gilt: $\frac{a}{b} \in R \subset Q(R) \iff v_i\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$ für alle $i \in I$.
Für ein Primelement $p \in R$ und $x = \frac{a}{b} \in Q(R)$ schreiben wir $v_p(x) = v_i\left(\frac{a}{b}\right)$ wobei $p_i \mathrel{\hat{=}} p$. Das hängt nicht von der Wahl des Repräsentantensystems ab, weil sich beim Wechsel alle Daten nur um Einheiten aus $R$ verändern.

Konvention: $v_p(0) = +\infty$.

**Beispiel 2.36.** In $\mathbb{Z}$ gilt:
$v_3\left(\frac{2}{9}\right) = -2$, $v_2\left(\frac{2}{9}\right) = 1$, $v_p\left(\frac{2}{9}\right) = 0$ für jede Primzahl $p \neq 2, 3$.

Für ein Polynom $f = a_r T^r + \cdots + a_0 \in Q(R)[T]$ und ein Primelement $p \in R$ setzen wir

$$v_p(f) \stackrel{df}{=} \min_{i=0,\ldots,r} v_p(a_i).$$

Es gilt: $v_p(f) = 0$ für fast alle Primelemente (bis auf $\hat{=}$) und $f \in R[T] \subset Q(R)[T]$ $\Longleftrightarrow v_p(f) \geq 0$ für alle $p$.

**Satz 2.37 (Gauß).** *Es sei $R$ ein faktorieller Ring und $p \in R$ ein Primelement. Dann gilt für $f, g \in Q(R)[T]$:*

$$v_p(fg) = v_p(f) + v_p(g).$$

*Beweis.* 1. Die Gleichung ist richtig, falls $f$ oder $g$ konstant ist (eindeutige Primzerlegung in $R$).
2. Nach Schritt 1 können wir $f$ und $g$ mit Konstanten $\neq 0$ aus $R$ multiplizieren, also OE $f, g \in R[T]$.
3. Dividiert man $f$ durch den ggT seiner Koeffizienten, erhält man $v_p(f) = 0$. Analog $v_p(g) = 0$.

Also z.z: $f, g \in R[T]$ und $v_p(f) = 0 = v_p(g) \Rightarrow v_p(fg) = 0$.
Wir betrachten den natürlichen Projektionshomomorphismus

$$\phi : R[T] \twoheadrightarrow R/(p)[T]$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(\phi) &= \{\text{Pol. deren Koeff. alle durch } p \text{ teilbar sind}\} \\ &= \{h \in R[T] \mid v_p(h) > 0\}. \end{aligned}$$

Wegen $v_p(f) = 0 = v_p(g)$ gilt $\phi(f) \neq 0$, $\phi(g) \neq 0$. Da $p$ Primelement ist, ist $R/(p)$ nullteilerfrei und nach Korollar 2.27 auch $R/(p)[T]$. Wir erhalten $0 \neq \phi(f)\phi(g) = \phi(fg)$. Also $fg \notin \mathrm{Kern}(\phi)$, $v_p(fg) = 0$. □

**Korollar 2.38.** *Sei $R$ ein faktorieller Ring und $h \in R[T]$ ein normiertes Polynom. Gilt $h = fg$ mit normierten Polynomen $f, g \in Q(R)[T]$, so gilt $f, g \in R[T]$.*

*Beweis.* Sei $p$ ein beliebiges Primelement. $h$ normiert und in $R[T] \Rightarrow v_p(h) = 0$. $f, g$ normiert $\Rightarrow v_p(f) \leq 0$, $v_p(g) \leq 0$. Wegen $0 = v_p(h) = v_p(f) + v_p(g)$ folgt $v_p(f) = v_p(g) = 0$. Da $p$ beliebig war, folgt $f, g \in R[T]$. □

**Definition 2.39.** Sei $R$ faktoriell. Ein Polynom $f \in R[T]$ heißt **primitiv**, wenn der ggT seiner Koeffizienten = 1 ist, d.h. wenn $v_p(f) = 0$ für alle Primelemente $p \in R$ gilt.

**Beispiel 2.40.** Jedes normierte Polynom ist primitiv.

**Lemma 2.41.** *Sei $0 \neq f \in Q(R)[T]$. Dann existiert ein $0 \neq a \in Q(R)$ und ein primitives $\tilde{f} \in R[T]$ so dass $f = a\tilde{f}$.*

*Beweis.* Sei $(p_i)_{i\in I}$ ein Repräsentantensystem der Primelemente bis auf $\hat{=}$. Setze

$$a = \prod_{i\in I} p_i^{v_{p_i}(f)}$$

und $\tilde{f} = a^{-1} \cdot f$.

Es gilt $v_{p_i}(a^{-1}) = -v_{p_i}(f)$ für alle $i \in I$ und daher $v_{p_i}(\tilde{f}) = 0$ für alle $i \in I$. □

**Satz 2.42 (Gauß).** *Sei $R$ ein faktorieller Ring. Dann ist auch $R[T]$ faktoriell. Ein Polynom $q \in R[T]$ ist genau dann Primelement in $R[T]$ wenn gilt*

(i) *$q \in R$ und $q$ ist Primelement in $R$, oder*
(ii) *$q$ ist primitiv in $R[T]$ und Primelement in $Q(R)[T]$.*

*Beweis.* Sei $q$ ein Primelement in $R$. Dann ist $R/Rq$ und damit auch $(R/Rq)[T] = R[T]/R[T]q$ nullteilerfrei, und deshalb $q$ ein Primelement in $R[T]$. Sei nun $q \in R[T]$ primitiv und prim als Element in $Q(R)[T]$ und $f, g \in R[T]$ mit $q \mid fg$ in $R[T]$. Dann gilt auch $q \mid fg$ in $Q(R)[T]$. OE gelte $q \mid f$ in $Q(R)[T]$, d.h. es existiert ein $h \in Q(R)[T]$ mit $qh = f$ in $Q(R)[T]$. Nun gilt für jedes Primelement $p \in R$:

$$\begin{array}{rcl} 0 \leq v_p(f) & = & v_p(q) + v_p(h). \\ & & \| \leftarrow q \text{ primitiv} \\ & & 0 \end{array}$$

Also $v_p(h) \geq 0$ für alle $p$ und deshalb $h \in R[T]$, d.h. $q \mid f$ in $R[T] \Rightarrow q$ ist Primelement in $R[T]$.
Bleibt z.z.: $R[T]$ ist faktoriell und jedes Primelement ist von der Form (i) oder (ii).
G.z.z.: Jedes $f \in R[T] \setminus (R[T]^\times \cup \{0\})$ zerfällt in ein Produkt von Primelementen der Form (i) und (ii). Wir schreiben

$$f = a\tilde{f}$$

mit $a = \text{ggT}$ (Koeffizienten von $f$), also $\tilde{f} \in R[T]$ primitiv. $a$ ist entweder Einheit in $R$ oder Produkt von Primelementen vom Typ (i). Wir zeigen: $\tilde{f}$ ist Produkt von Primelementen vom Typ (ii). Sei

$$\tilde{f} = c\tilde{f}_1 \dots \tilde{f}_r$$

eine Primzerlegung in $Q(R)[T]$ und $c \in Q(R)^\times$. Nach geeigneter Wahl von $c$ können wir annehmen, dass alle $\tilde{f}_i$ primitiv und in $R[T]$ sind. Dann gilt nach dem Lemma von Gauß für jedes Primelement $p \in R$ :

$$\begin{array}{ccccccc} v_p(\tilde{f}) & = v_p(c) + & v_p(\tilde{f}_1) & + \cdots + & v_p(\tilde{f}_r) \\ \| & & \| & & \| \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

also $v_p(c) = 0$ für alle $p$. Also auch $v_p(c^{-1}) = 0 \quad \forall p$ und deshalb $c, c^{-1} \in R$, $c \in R^\times$. □

**Korollar 2.43.** *Sei $R$ ein faktorieller Ring. Dann ist der Polynomring in $n$ Variablen ($n \in \mathbb{N}$) $R[T_1, \ldots, T_n]$ faktoriell.*

*Beweis.* Es gilt

$$R[T_1, \ldots, T_n] = R[T_1][T_2] \cdots [T_n].$$

Man wende den Satz von Gauß $n$-mal an. □

**Beispiele 2.44.** • Ist $k$ ein Körper, so ist $k[T_1 \ldots T_n]$ faktoriell.
• $\mathbb{Z}[T_1 \ldots T_n]$ ist faktoriell.

## 2.4 Irreduzibilitätskriterien

Sei $R$ faktoriell und $K = Q(R)$. Sei $f \in K[T]$, $\deg(f) \geq 1$. Wann ist $f$ irreduzibel? Nach Lemma 2.41 findet man ein $c \in K^\times$ so dass $\tilde{f} = c \cdot f$ primitiv und in $R[T]$ ist. Es gilt nach dem Satz von Gauß

$$f \text{ irred. in } K[T] \iff \tilde{f} \text{ irred. in } K[T] \iff \tilde{f} \text{ irred. in } R[T].$$

**Satz 2.45 (Eisensteinsches Irreduzibilitätskriterium).** *Sei $R$ ein faktorieller Ring und $f = a_n T^n + \cdots + a_0 \in R[T]$ primitiv vom Grad $> 0$. Sei $p \in R$ ein Primelement mit*

$$p \nmid a_n,\ p \mid a_i \text{ für } i < n,\ p^2 \nmid a_0.$$

*Dann ist $f$ irreduzibel in $R[T]$ und damit auch in $Q(R)[T]$.*

*Beweis.* Angenommen $f$ ist reduzibel in $R[T]$, $f = gh$ mit

$$g = b_r T^r + \cdots + b_0,\ h = c_s T^s + \cdots + c_0$$

mit $r + s = n$, $r > 0$, $s > 0$. Es folgt: $a_n = b_r c_s$, $p \nmid b_r$, $p \nmid c_s$, $a_0 = b_0 c_0$, $p \mid b_0 c_0$, $p^2 \nmid b_0 c_0$.
Es gelte OE $p \mid b_0$, $p \nmid c_0$. Sei nun $t \leq r - 1$ maximal mit $p \mid b_i$ für $0 \leq i \leq t$. Mit der Konvention $b_i = 0$ für $i > r$ und $c_i = 0$ für $i > s$ gilt

$$a_{t+1} = b_0 c_{t+1} + \cdots + b_{t+1} c_0.$$

Es folgt $p \nmid a_{t+1}$, da $p \mid b_0 c_{t+1}$, $p \mid b_1 c_t$, $\ldots$, $p \mid b_t c_1$, $p \nmid b_{t+1} c_0$. Wegen $p \mid a_i$, $i < n$ folgt $t + 1 = n$, also $n = t + 1 \leq r = n - s$ im Widerspruch zu $s > 0$. □

**Beispiele 2.46.** • Sei $k$ ein Körper und $K := k(t)$ der Quotientenkörper von $k[t]$ („der rationale Funktionenkörper über $k$“). Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ das Polynom

$$f = T^n - t \in K[T].$$

Nun gilt $f \in k[t][T]$ und $k[t]$ ist faktoriell. Eisenstein mit $p = t$ liefert die Irreduzibilität von $f$.
- $f(T) = T^3 + 5T^2 + 5$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[T]$ ($p = 5$).
- Sei $p$ eine Primzahl. Dann ist

$$f(T) = T^{p-1} + T^{p-2} + \cdots + 1 \left( = \frac{T^p - 1}{T - 1} \right)$$

irreduzibel in $\mathbb{Q}[T]$:
Offenbar ist $f = f(T)$ dann und nur dann irreduzibel, wenn $f(T+1)$ irreduzibel ist. Nun gilt

$$f(T+1) = \frac{(T+1)^p - 1}{(T+1) - 1}$$

$$= \frac{T^p + \binom{p}{1}T^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1}T + 1 - 1}{T}$$

$$= T^{p-1} + \binom{p}{1}T^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}.$$

Nun gilt: $p^2 \nmid \binom{p}{p-1} = p$ und $p \mid \binom{p}{i}$ für $i = 1, \ldots, p-1$. Eisenstein: $f(T+1)$ ist irreduzibel $\Rightarrow f(T)$ ist irreduzibel.

**Satz 2.47** (**Reduktionskriterium**). *Sei $R$ ein faktorieller Ring, $p \in R$ ein Primelement und $f \in R[T]$ ein Polynom dessen Leitkoeffizient nicht durch $p$ teilbar ist. Wir betrachten die Projektion*

$$\phi : R[T] \longrightarrow R/(p)[T].$$

*Dann gilt: Ist $\phi(f)$ irreduzibel in $R/(p)[T]$, so ist $f$ irreduzibel in $Q(R)[T]$. Ist $f$ zusätzlich primitiv, so ist $f$ irreduzibel in $R[T]$.*

**Bemerkung 2.48.** Dieses Kriterium wendet sich vor allem an, wenn $R$ ein Hauptidealring ist. Dann ist $R/(p)$ ein Körper nach 2.25. Im allgemeinen ist $R/(p)$ nullteilerfrei aber nicht notwendig faktoriell.

Anderes Anwendungsbeispiel:

$$R = k[T_1, \ldots, T_n] \quad \text{und} \quad p = T_n.$$

Dann ist $R/(p) = k[T_1, \ldots, T_{n-1}]$ wieder faktoriell und wir haben das Problem um eine Variable vereinfacht.

*Beweis von Satz 2.47.* Sei zunächst $f \in R[T]$ primitiv. Ist $f$ reduzibel, so gibt es eine nichttriviale Zerlegung $f = gh$ in $R[T]$ und wegen der Primitivität von $f$ gilt $\deg(g) > 0$, $\deg(h) > 0$. Weil $p$ nicht den Leitkoeffizienten von $f$ teilt, gilt

das gleiche auch für $g$ und $h$. Also gilt $\phi(f) = \phi(g) \cdot \phi(h)$ und $\deg(\phi(g)) > 0$, $\deg(\phi(h)) > 0$. Also: $f$ primitiv und $\phi(f)$ irreduzibel $\Rightarrow f$ irreduzibel.

Im allgemeinen Fall gilt $f = c\tilde{f}$ mit $c \in R$ und $\tilde{f} \in R[T]$ primitiv. Da $p$ nicht den Leitkoeffizienten von $f$ teilt, teilt $p$ nicht $c$ und nicht den Leitkoeffizienten von $\tilde{f}$. Aus $\phi(f) = \phi(c) \cdot \phi(\tilde{f})$ und $\phi(c) \neq 0$ folgt: $\phi(f)$ irreduzibel $\Rightarrow \phi(\tilde{f})$ irreduzibel. Nach dem ersten Teil des Beweises folgt $\tilde{f}$ irreduzibel in $R[T]$, also $\tilde{f}$ irreduzibel in $Q(R)[T]$ und somit $f$ irreduzibel in $Q(R)[T]$. □

**Anwendungsbeispiele:**
1) $f = X^3 + 3X^2 - 4X - 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$. Grund: $f \in \mathbb{Z}[X]$ und $f$ ist primitiv. Betrachte $p = 3$.

$$\phi(f) = X^3 - X - 1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$$

ist irreduzibel (einer der Teiler müsste vom Grad 1 sein und es gibt keine Nullstelle in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).
2) $f = X^4 + 3X^3 + 5XY^2 + Y + 3 \in \mathbb{Q}[X, Y]$ ist irreduzibel.

Setze $R = \mathbb{Q}[Y]$, $p = Y$. Dann gilt $\phi(f) = X^4 + 3X^3 + 3$ in $\mathbb{Q}[Y]/(Y)[X] = \mathbb{Q}[X]$ und $\phi(f)$ ist irreduzibel nach Eisenstein $(p = 3)$.

## 2.5 Verallgemeinerte Polynomringe

Zum Warmwerden:

$$R[T] = R^{(\mathbb{N}_0)} = \{(r_i)_{i \in \mathbb{N}_0},\ r_i = 0 \quad \text{f. f. a. } i\}$$

mit folgenden Operationen

$$(r_i)_{i \in \mathbb{N}_0} + (s_i)_{i \in \mathbb{N}_0} = (r_i + s_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \text{ und}$$

$$(r_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \cdot (s_i)_{i \in \mathbb{N}_0} = (t_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \text{ mit } t_n = \sum_{i+j=n} r_i s_j.$$

**Definition 2.49.** Sei $R$ ein Ring und $M$ ein kommutatives Monoid dessen Operator wir als „+“ schreiben. Dann nennt man

$$R[M] = R^{(M)} = \{(r_m)_{m \in M} \mid r_m = 0 \quad \text{f. f. a. } m \in M\}$$

mit den Operationen

$$(r_m)_{m \in M} + (s_m)_{m \in M} = (r_m + s_m)_{m \in M}$$

und

$$(r_m)_{m \in M} \cdot (s_m)_{m \in M} = (t_m)_{m \in M}, \quad t_m = \sum_{m_1 + m_2 = m} r_{m_1} \cdot s_{m_2}$$

den **Polynomring über $M$ mit Koeffizienten in $R$.**

Nullelement $(r_m)_{m\in M}$ mit $r_m = 0$ für alle $m \in M$.

Einselement $(r_m)_{m\in M}$, $r_m = \begin{cases} 1 & m = 0 \in M \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

**Beispiel 2.50.** • $M = \mathbb{N}_0$. Wir erhalten

$$R[\mathbb{N}_0] \xrightarrow{\sim} R[T],\ (r_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \xrightarrow{\sim} \sum_{i=0}^{\infty} r_i T^i.$$

• Allgemeiner: für $M = (\mathbb{N}_0)^n$ erhalten wir einen Isomorphismus

$$R[(\mathbb{N}_0)^n] \xrightarrow{\sim} R[X_1, \ldots, X_n]$$

durch

$$(r_{(a_1,\ldots,a_n)})_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}_0^n} \longmapsto \sum_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{N}_0^n} r_{(a_1,\ldots,a_n)} X_1^{a_1} \ldots X_n^{a_n}.$$

• Noch allgemeiner: Sei $I$ eine (Index)Menge und $M = (\mathbb{N}_0)^{(I)} = \{\phi_i : I \to \mathbb{N}_0,$ $\phi(i) = 0$ f. f. a. $i\}$.
Wir ordnen formal jedem $i \in I$ eine Variable $X_i$ zu. Dann gilt

$$\begin{aligned} R[(\mathbb{N}_0)^{(I)}] &\xrightarrow{\sim} R[(X_i)_{i\in I}] \\ (r_a)_{a\in\mathbb{N}_0^{(I)}} &\longrightarrow \sum_{a\in\mathbb{N}_0^{(I)}} r_a \prod_{i\in I} X_i^{a_i}, \end{aligned}$$

wobei wir $X_i^0 = 1$ setzen und weglassen. $R[(X_i)_{i\in I}]$ ist der Ring der Polynome in den unabhängigen Variablen $(X_i)_{i\in I}$.

• Ist $G$ eine abelsche Gruppe so heißt $R[G]$ der **Gruppenring** von $G$ über $R$.

Um für allgemeine Monoide $M$ intuitiv arbeiten zu können führen wir die folgende Notation ein:

Für $m \in M$ sei das Element $X^m \in R[M]$ definiert durch

$$X^m = (r_n)_{n\in M},\ r_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt $X^{m_1} \cdot X^{m_2} = X^{m_1+m_2}$.
Die Familie $(X^m)_{m\in M}$ ist eine $R$-Modulbasis von $R[M]$: Jedes $f \in R[M]$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$f = \sum_{m\in M} r_m \cdot X^m$$

mit $r_m = 0$ für fast alle $m$. Es gelten die üblichen Rechenregeln für Polynome.

Wir fassen $R$ als Teilring von $R[M]$ auf durch $r \mapsto rX^0$ ($X^0$ ist die 1 in $R[M]$).

**Satz 2.51 (Universelle Eigenschaft des Polynomrings).** *Es sei $\phi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus und $\sigma : M \to (R', \cdot)$ ein Monoidhomomorphismus. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\Phi : R[M] \to R'$ mit $\Phi_{|R} = \phi$ und $\Phi(X^m) = \sigma(m)$ für alle $m \in M$.*

*Beweis.* Zum Nachweis der Eindeutigkeit betrachte man ein Element

$$\sum_{m \in M} r_m X^m \in R[M].$$

Falls $\Phi$ existiert, so gilt notwendig

$$\Phi(\sum r_m X^m) = \sum \Phi(r_m X^m) = \sum \phi(r_m) \cdot \sigma(m).$$

Umgekehrt kann man diese Gleichung zur Definition machen.
Nachzuprüfen: $\Phi$ ist Ringhomomorphismus. Dies folgt, weil $\phi$ Ring- und $\sigma$ Monoidhomomorphismus ist. □

**Korollar 2.52.** *Gegeben sei ein Ringhomomorphismus $\phi : R \to R'$ sowie $n$ Elemente $x_1, \ldots, x_n \in R'$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\Phi : R[X_1, \ldots, X_n] \to R$ mit $\Phi_{|R} = \phi$ und $\Phi(X_i) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

*Beweis.* Wir erhalten einen Monoidhomomorphismus $\sigma : (\mathbb{N}_0)^n \to (R', \cdot)$ durch $\sigma((0, \ldots, 1, \ldots, 0)) = x_i$. Die Existenz von $\Phi$ folgt nun aus Satz 2.51. Eindeutigkeit gilt, weil wir aus $\Phi$ den Monoidhomomorphismus $\sigma : (\mathbb{N}_0)^n \to (R', \cdot)$ durch die Regel

$$\sigma((a_1, \ldots, a_n)) = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$$

zurückbekommen. □

**Definition 2.53.** Es sei $R \subset R'$ eine Ringerweiterung (d.h. ein injektiver Ringhomomorphismus) und $(x_1, \ldots, x_n)$ ein System von Elementen aus $R'$. Dieses System heißt **algebraisch unabhängig** oder **transzendent** über $R$, wenn der nach Korollar 2.52 assoziierte Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} R[X_1 \ldots X_n] & \longrightarrow & R' \\ X_i & \longmapsto & x_i \end{array}$$

injektiv ist. Ansonsten heißt das System **algebraisch abhängig**.

**Beispiel 2.54.** Wir betrachten $R = \mathbb{Q} \subset R' = \mathbb{C}$

- das einelementige System $(\sqrt{2})$ ist nicht transzendent (sprich: $\sqrt{2}$ ist nicht transzendent). Grund:
  Für $\Phi : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{C}$, $X \mapsto \sqrt{2}$, gilt $X^2 - 2 \in \mathrm{Kern}(\Phi)$.
- Die Eulersche Zahl $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist transzendent (Hermite).

- Das System $(e, e^2)$ ist nicht transzendent.
  Grund: Der Homomorphismus $\Phi : \mathbb{Q}[X, Y] \to \mathbb{C}$, $X \mapsto e$, $Y \mapsto e^2$, schickt das Polynom $X^2 - Y$ auf 0.
- Die Zahl $\pi$ ist transzendent (Lindemann).
- Frage: Ist das System $(e, \pi)$ transzendent? (ungelöst).

# 3 Algebraische Körpererweiterungen

## 3.1 Charakteristik

Sei $R$ ein Ring und $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ mit $n \mapsto n \cdot 1_R$ der kanonische Homomorphismus. Ist $R$ nullteilerfrei, so ist das Nullideal in $R$ prim und somit ist auch $\mathrm{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(0) \subset \mathbb{Z}$ ein Primideal. Nach Satz 1.38 folgt

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = \begin{cases} (0) & \text{oder} \\ (p) & \text{für eine Primzahl } p. \end{cases}$$

**Definition 3.1.** Sei $R$ ein nullteilerfreier Ring. Das eindeutig bestimmte Element $n \in \mathbb{N}_0$ mit $(n) = \mathrm{Kern}(\varphi)$ heißt die **Charakteristik** von $R$. Bezeichnung: $\mathrm{char}(R)$.

**Beispiel 3.2.** • $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben Charakteristik 0.
• $p$ Primzahl: $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_p[T]$ haben Charakteristik $p$.
• für jeden Körper $k$ gilt

$$\mathrm{char}(k) = \mathrm{char}(k[T]) = \mathrm{char}(k(T)).$$

• es gilt für jeden nullteilerfreien Ring $R$

$$\mathrm{char}(R) = \mathrm{char}(Q(R)).$$

• Ist $R \overset{i}{\hookrightarrow} S$ ein Teilring, so gilt $\mathrm{char}(R) = \mathrm{char}(S)$.
[Grund: $\varphi_S = i \circ \varphi_R$. Weil $i$ injektiv ist, folgt $\mathrm{Kern}(\varphi_S) = \mathrm{Kern}\,\varphi_R$. ]

**Lemma 3.3.** *Sind $K, L$ Körper und $\mathrm{char}(K) \neq \mathrm{char}(L)$, so gibt es keinen Körperhomomorphismus von $K$ nach $L$.*

*Beweis.* Gäbe es einen solchen Homomorphismus, so wäre dieser injektiv und $K$ wäre isomorph zu einem Teilkörper von $L$. Also $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(L)$. □

**Definition 3.4.** Sei $K$ ein Körper. Der Durchschnitt aller Teilkörper von $K$ heißt der **Primkörper** von $K$.

**Bemerkung 3.5.** Der Primkörper ist der kleinste Teilkörper von $K$.

**Lemma 3.6.** *Sei $K$ ein Körper und $P \subset K$ sein Primkörper. Dann gilt*

$char(K) = 0 \iff P \cong \mathbb{Q}$

$char(K) = p > 0 \iff P \cong \mathbb{F}_p$.

*Beweis.* Die $\Leftarrow$ Implikationen sind trivial. Wegen $P \ni 1$, faktorisiert $\varphi : \mathbb{Z} \to K$ über $P$.
1. Fall: $\mathrm{char}(K) = 0$ : $\mathbb{Z} \cong \mathrm{Bild}(\varphi) \subset P$ folglich ist $Q(\mathrm{Bild}(\varphi)) \cong \mathbb{Q}$ ein Teilkörper von $P$ und deshalb $= P$.
2. Fall: $\mathrm{char}(K) = p > 0$: dann gilt $\mathbb{F}_p \cong \mathrm{Bild}(\varphi) \subset P$. Dies ist ein Teilkörper, also $P = \mathrm{Bild}(\varphi)$. □

**Definition 3.7.** Sei $K$ ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Dann heißt der Körperhomomorphismus

$$\sigma : K \to K,\ a \mapsto a^p,$$

der **Frobeniushomomorphismus** von $K$.

**Bemerkung 3.8.** $\sigma$ ist Homomorphismus wegen

$$(a+b)^p = a^p + \underbrace{\binom{p}{1}a^{p-1}b + \cdots + \binom{p}{p-1}ab^{p-1}}_{=0} + b^p$$

Da $K$ nullteilerfrei ist, ist $\sigma$ injektiv.

**Lemma 3.9.** *Ist $K$ ein endlicher Körper, so ist der Frobeniushomomorphismus ein Automorphismus.*

*Beweis.* $\sigma$ ist injektiv und weil $K$ endlich ist, auch surjektiv. □

**Lemma 3.10.** *Sei $char(K) = p > 0$ und $P \subset K$ der Primkörper. Dann gilt*

$$P = \{a \in K \mid \sigma(a) = a\}.$$

*Beweis.* $P^\times$ ist eine Gruppe der Ordnung $p-1$, also $a^{p-1} = 1$ für jedes $a \in P^\times$. Folglich gilt $a^p = a$ für alle $a \in P$. Gilt nun $a \in K$, $a^p = a$, so ist $a$ Nullstelle des Polynoms $X^p - X$. Dieses hat höchstens $p$ Nullstellen in $K$. Daher sind die $p$ vielen Elemente von $P \cong \mathbb{F}_p$ genau die Menge der $a \in K$ mit $a^p - a = 0$. □

## 3.2 Endliche und algebraische Körpererweiterungen

Seien $K \subset L$ Körper. Sprechweise: $L$ ist Erweiterungskörper von $K$.
Vermittels: $K \times L \to L$, $(x, y) \mapsto xy$, wird $L$ zu einem $K$-Vektorraum.

**Definition 3.11.** $\dim_K L$ heißt der **Grad** der Körpererweiterung $L$ über $K$.

Notation: $[L : K] \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

**Bemerkung 3.12.** $[L : K] = 1 \Leftrightarrow L = K$ ($K \subset L$ ist ein 1-dimensionaler $K$-Untervektorraum).

**Satz 3.13 (Gradsatz).** *Es seien $K \subset L \subset M$ Körpererweiterungen. Dann gilt*

$$[M : K] = [M : L] \cdot [L : K].$$

*Beweis.* Sind $M/L$ und $L/K$ endlich, d.h. von endlichem Grad, so auch $M/K$ und es gilt die Gradformel. Dies sieht man so:

Es ist $M \cong L^{[M:L]}$ als $L$-Vektorraum , also auch $M \cong L^{[M:L]}$ als $K$-Vektorraum. Nun gilt $L \cong K^{[L:K]}$ als $K$-Vektorraum, also

$$M \cong (K^{[L:K]})^{[M:L]} \cong K^{[M:L]\cdot[L:K]}.$$

Ist $[L : K] = \infty$, so existiert ein unendliches System von $K$-linear unabhängigen Elementen in $L$, also auch in $M$, also $[M : K] = \infty$.
Ist $[M : L] = \infty$, so existiert ein unendliches System von $L$-linear unabhängigen Elementen in $M$. Dieses System ist auch $K$-linear unabhängig. Also $[M : K] = \infty$. □

**Korollar 3.14.** *Sind $K \subset L \subset M$ Körpererweiterungen und $[M : K]$ eine Primzahl, so gilt $L = K$ oder $L = M$.*

*Beweis.* Aus Satz 3.13 folgt $[M : L] = 1$ oder $[L : K] = 1$. □

**Beispiele 3.15.** • $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.
• Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dies ist ein Körper und weil $\sqrt{2}$ irrational ist, gilt $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$.
• $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$ (ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist abzählbar).
• Für jeden Körper gilt

$$[k(t) : k] = \infty$$

(die Polynome $1, t, t^2, \ldots$ sind linear unabhängig).

(Erinnerung). Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in L$ heißt **algebraisch** über $K$, wenn $\alpha$ eine Gleichung

$$\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$$

mit $c_0, \ldots, c_{n-1} \in K$ erfüllt. M.a.W.: $\alpha$ ist algebraisch, wenn der Substitutionshomomorphismus

$$\varphi : K[X] \longrightarrow L,\ f \longmapsto f(\alpha),$$

nicht injektiv ist. Andernfalls heißt $\alpha$ **transzendent**.

**Definition 3.16.** $L$ heißt **algebraisch** über $K$, wenn jedes Element von $L$ algebraisch über $K$ ist.

**Beispiele 3.17.** • $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ist algebraisch. Ist $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$, so gilt $f(\alpha) = 0$ mit $f(X) = X^2 - 2aX + (a^2 + b^2)$.
• Ist $k$ ein Körper, so ist $k(t)/k$ nicht algebraisch, weil $t \in k(t)$ nicht algebraisch ist: Die Abbildung

$$k[X] \longrightarrow k(t),\ f(X) \longmapsto f(t)$$

ist injektiv (ein Isomorphismus auf den Unterring $k[t] \subset k(t)$).

**Definition/Lemma 3.18.** *Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch über $K$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom kleinsten Grades $f \in K[X]$ mit $f(\alpha) = 0$. Es gilt* $\mathrm{Kern}(\varphi) = (f)$ *für den Substitutionshomomorphismus*

$$\varphi : K[X] \longrightarrow L,\ g \longmapsto g(\alpha),$$

*Insbesondere ist $(f)$ ein Primideal, also $f$ irreduzibel. Man nennt $f$ das* **Minimalpolynom** *von $\alpha$.*

*Beweis.* $g(\alpha) = 0 \iff g \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ist ein Primideal $\neq (0)$ im Hauptidealring $K[X]$, also von der Form $(f)$ mit einem eindeutig bestimmten normierten irreduziblen Polynom $f$. □

**Definition 3.19.** Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$. Der Teilring

$$K[\alpha] = \{c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_n\alpha^n \mid n \in \mathbb{N}_0,\ c_i \in K\}$$

ist der kleinste Teilring von $L$ der $K$ und $\alpha$ umfasst und heißt der **von $\boldsymbol{\alpha}$ über $\boldsymbol{K}$ erzeugte Teilring von $\boldsymbol{L}$**. Der Quotientenkörper $K(\alpha) = Q(K[\alpha]) \subset L$ ist der kleinste Teilkörper von $L$ der $K$ und $\alpha$ umfasst und heißt der **von $\boldsymbol{\alpha}$ über $\boldsymbol{K}$ erzeugte Teilkörper von $\boldsymbol{L}$** (man liest $K(\alpha)$ als „$K$ adjungiert $\alpha$“).

**Satz 3.20.** *Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L$ algebraisch. Dann ist $K[\alpha]$ schon ein Körper, d.h. es gilt*

$$K[\alpha] = K(\alpha).$$

*Der Homomorphismus $\varphi : K[X] \to L$, $g \mapsto g(\alpha)$, induziert einen natürlichen Isomorphismus*

$$K[X]/(f) \xrightarrow{\sim} K(\alpha),$$

*wobei $f$ das Minimalpolynom von $\alpha$ über $K$ ist. Es gilt*

$$[K(\alpha) : K] = \deg(f),$$

*insbesondere ist $K(\alpha)/K$ eine endliche Körpererweiterung.*

*Beweis.* Nach dem Homomorphiesatz induziert $\varphi$ einen Isomorphismus

$$K[X]/(f) \tilde{\to} K[\alpha].$$

Wegen $f \neq 0$ und $f$ prim folgt nach Lemma 2.25, dass $K[X]/(f)$ Körper ist. Also gilt $K[\alpha] = Q(K[\alpha]) = K(\alpha)$. Schließlich bilden die Restklassen von $1, X, \ldots, X^{\deg(f)-1}$ eine $K$-Basis von $K[X]/(f)$. □

Zum Vertrautwerden: Wie findet man $\alpha^{-1} \in K[\alpha]$?
Sei $f = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0$ das Minimalpolynom von $\alpha \neq 0$. Es gilt $n \geq 1$ und $c_0 \neq 0$ weil $f$ irreduzibel ist. Es folgt $0 = \alpha^{-1}(\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_0)$ also $(-c_0)\alpha^{-1} = \alpha^{n-1} + c_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + c_1$ und somit $\alpha^{-1} \in K[\alpha]$.

Verbindung zur linearen Algebra.
Sei $[L : K] < \infty$. Wir betrachten den $K$-Vektorraum-Endomorphismus

$$h_\alpha : L \longrightarrow L,\ b \longmapsto \alpha b.$$

Wegen $h_\alpha(1) = \alpha$ gilt $\alpha = 0 \iff h_\alpha = 0$ und allgemeiner für ein Polynom $f$

$$f(\alpha) = 0 \iff f(h_\alpha) = 0.$$

Also ist das Minimalpolynom von $\alpha$ gleich $\chi_{\min}(h_\alpha)$.

**Satz 3.21.** *Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.*

*Beweis.* Sei $\alpha \in L$ beliebig und $n = [L : K]$. Dann sind die $n + 1$ vielen Elemente

$$1, \alpha, \ldots, \alpha^n$$

linear abhängig über $K$ und wir finden eine Gleichung für $\alpha$. □

**Bemerkung 3.22.** Es gibt unendliche algebraische Erweiterungen.

**Korollar 3.23.** *Sei $K \subset L$ und $\alpha \in L$ algebraisch über $K$. Dann ist die Körpererweiterung $K(\alpha)/K$ algebraisch.*

*Beweis.* $[K(\alpha) : K] < \infty$ nach Satz 3.20. □

Verallgemeinerte Terminologie: Sei $K \subset L$ und $S \subset L$ eine Teilmenge. Wir bezeichnen den kleinsten Teilkörper von $L$ der $K$ und $S$ umfasst mit $K(S)$, den kleinsten Teilring mit $K[S]$. Ist $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ endlich, so schreiben wir

$$\begin{aligned} K(S) &= K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ K[S] &= K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]. \end{aligned}$$

$K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ ist der Teilring in $L$ aller Elemente der Form $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und $k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ besteht aus allen Elementen der Form

$$\frac{f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)},\ f, g \in K[X_1, \ldots, X_n],\ g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0.$$

Ist $S$ unendlich, so gilt

$$K(S) = \bigcup_{\substack{T \subset S \\ T \text{ endl}}} K(T) \subset L.$$

*Begründung:* Für $T \subset S$ gilt $K(T) \subset K(S)$, daher ist die rechte Seite in der linken enthalten. Jedes Element $s \in S$ liegt bereits in einer endlichen Teilmenge von $S$ (z.B. in $\{s\}$). Daher liegen alle Elemente aus $S$ in der rechten Seite und es verbleibt zu zeigen, dass diese ein Körper ist. Zunächst hat jedes Element ungleich 0 ein Inverses, weil alle $K(T)$ Körper sind. Für $a_1 \in K(T_1)$ und $a_2 \in K(T_2)$ liegen $a_1 a_1$ und $a_1 + a_2$ in $K(T_1 \cup T_2)$. Daher ist die rechte Seite ein Ring und somit ein Körper.

**Definition 3.24.** Sei $K \subset L$ und $\alpha \in L$. Der Grad $[K(\alpha) : K]$ heißt der **Grad** von $\alpha$ über $K$ (= Grad des Minimalpolynoms). $L/K$ heißt **einfach**, wenn es ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ gibt.
$L/K$ heißt **endlich erzeugt**, wenn es endlich viele Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ mit $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ gibt.

**Beispiele 3.25.** • $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ist einfach, wegen $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$.
• $k(t)/k$ ist einfach.
• $k(X, Y) = Q(k[X, Y])/k$ ist endlich erzeugt, aber nicht einfach (Beweis später).

**Satz 3.26.** *Es sei $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung von $K$. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraisch, so gilt:*

(i) $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$.
(ii) *$L/K$ ist endlich, insbesondere algebraisch.*

*Beweis.* Per Induktion nach $n$. Anfang: $n = 1$ war Satz 3.20 und Korollar 3.23.
Schritt: Wir wissen, dass $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]$ endlich über $K$ ist. Nach Satz 3.20 angewendet auf $K[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]$ und $\alpha_n \in L$ gilt:
$K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}][\alpha_n]$ ist Körper (also gleich $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$) und

$$[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})] < \infty.$$

Die Gradformel liefert

$$[L : K] =$$

$$[K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})] \cdot [K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) : K] < \infty. \qquad \square$$

**Korollar 3.27.** *Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Dann sind äquivalent*

(i) *$L/K$ ist endlich.*
(ii) *$L$ wird über $K$ von endlich vielen algebraischen Elementen erzeugt.*
(iii) *$L$ ist endlich erzeugte algebraische Körpererweiterung von $K$.*

Sei $S \subset L$ ein Erzeugendensystem der Körpererweiterung $L/K$ (so etwas gibt es stets, z.B. $S = L$). In der Darstellung eines beliebigen Elements aus $L$ kommen stets nur endlich viele Elemente aus $S$ vor. Daher gilt:

$$L = \bigcup_{\substack{T \subset S \\ \text{endl}}} K(T).$$

Sind alle Elemente aus $S$ algebraisch über $K$, so ist $L$ Vereinigung endlicher und damit algebraischer Erweiterungen, also algebraisch. Wir erhalten

**Korollar 3.28.** *Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Dann sind äquivalent*

(i) *$L/K$ ist algebraisch.*
(ii) *$L/K$ wird von algebraischen Elementen erzeugt.*

**Korollar 3.29.** *Sei $K \subset L$ eine Körpererweiterung. Dann ist die Menge*

$$\{\alpha \in L \mid \alpha \text{ algebraisch über } K\}$$

*ein Unterkörper von $L$.*

**Definition 3.30.** Man nennt diesen Körper den (relativen) **algebraischen Abschluss von $K$ in $L$**.

*Beweis von Korollar 3.29.* Sei $M$ diese Menge. Es gilt für $\alpha, \beta \in M$: $\alpha + \beta \in K(\alpha, \beta)$.
Wegen $K(\alpha, \beta)/K$ algebraisch folgt $\alpha + \beta \in M$.
Analog für $\alpha\beta$, $\alpha^{-1}$. □

**Satz 3.31.** *Es seien $K \subset L \subset M$ Körpererweiterungen. Ist $\alpha \in M$ algebraisch über $L$ und ist $L/K$ algebraisch, so ist $\alpha$ algebraisch über $K$. Insbesondere ist $M/K$ genau dann algebraisch, wenn $L/K$ und $M/L$ algebraisch sind.*

*Beweis.* Sei $f = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0$ das Minimalpolynom von $\alpha$ über $L$. Dann ist $\alpha$ schon algebraisch über dem Körper $K(c_0, \ldots, c_{n-1}) \subset L$. Nach Satz 3.20 folgt: $[K(\alpha, c_0, \ldots, c_{n-1}) : K(c_0, \ldots, c_{n-1})] < \infty$ und wegen $[K(c_0, \ldots, c_{n-1}) : K)] < \infty$ ist $K(\alpha, c_0, \ldots, c_{n-1})/K$ endlich, also algebraisch $\Rightarrow \alpha$ algebraisch über $K$. Wir erhalten: $M/K$ algebraisch, falls $M/L$ algebraisch und $L/K$ algebraisch.

Die Umkehrung ist trivial. □

**Beispiel 3.32.** Wir betrachten $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$.
• Jedes normierte, irreduzible Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ taucht als Minimalpolynom eines algebraischen Elements in $\mathbb{C}$ auf.
Grund: $f$ hat eine Nullstelle $\alpha$ in $\mathbb{C}$ und wegen der Irreduzibilität ist $f$ das Minimalpolynom von $\alpha$.
• Sei $\mathbb{Q}^{\text{alg}} \subset \mathbb{C}$ der Körper der algebraischen Elemente in $\mathbb{C}$. $\mathbb{Q}^{\text{alg}}/\mathbb{Q}$ ist algebraisch. Ist $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel vom Grad $n$ und $f(\alpha) = 0$, so gilt $\mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{Q}^{\text{alg}}$ und $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = n$ und folglich $[\mathbb{Q}^{\text{alg}} : \mathbb{Q}] \geq n$.
Da es über $\mathbb{Q}$ irreduzible Polynome beliebig hohen Grades gibt (benutze Eisenstein) folgt $[\mathbb{Q}^{\text{alg}} : \mathbb{Q}] = \infty$.
• die Menge der normierten, irreduziblen Polynome über $\mathbb{Q}$ ist abzählbar. Jedes Polynom hat nur endlich viele Nullstellen, also ist $\mathbb{Q}^{\text{alg}}$ abzählbar. Da $\mathbb{C}$ überabzählbar ist, erhalten wir:

*Es gibt überabzählbar viele transzendente Elemente in* $\mathbb{C}$.

## 3.3 Algebraischer Abschluss

**Satz 3.33.** *Sei $K$ ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $\geq 1$. Dann existiert eine endliche (algebraische) Körpererweiterung $L/K$ so dass $f$ eine Nullstelle in $L$ besitzt.*

*Beweis.* OE sei $f$ irreduzibel. Setze $L = K[X]/(f)$ und betrachte die kanonische Abbildung

$$K \to K[X] \xrightarrow{p} K[X]/(f) = L.$$

Diese ist injektiv (weil Körperhomomorphismus) und so wird $L$ zum Erweiterungskörper von $K$ vom Grad $= \deg f$.
Sei $\alpha$ das Bild von $X \in K[X]$ in $L$. Dann gilt $f(\alpha) = 0$ weil $f(\alpha) = p(f(X)) = 0$ wegen $f \in \text{Kern}(p)$. □

**Definition 3.34.** Ein Körper $K$ heißt **algebraisch abgeschlossen**, wenn jedes $f \in K[X]$, $\deg f \geq 1$, eine Nullstelle in $K$ besitzt.

**Bemerkung 3.35.** Sukzessives Abspalten von Nullstellen ergibt, dass jedes $0 \neq f \in K[X]$ von der Form

$$f = c(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n)$$

mit $n = \deg f$, $c \in K^\times$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in K$, ist. Insbesondere ist jedes irreduzible Polynom linear, d.h. vom Grad 1.

**Lemma 3.36.** *$K$ ist genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn es keine echte (d.h. $L \neq K$) endliche Erweiterung $L/K$ gibt.*

*Beweis.* Sei $K$ algebraisch abgeschlossen. Sei $L/K$ eine endliche Erweiterung und $\alpha \in L$. Sei $f$ das Minimalpolynom von $\alpha$ über $K$. $K$ algebraisch abgeschlossen und $f$ irreduzibel $\Rightarrow \deg f = 1 \Rightarrow \alpha \in K \Rightarrow L = K$.
Nun nehmen wir an, dass $K$ keine echte algebraische Erweiterung besitzt. Sei $f \in K[X]$. Z.z. $f$ hat Nullstelle in $K$. OE sei $f$ irreduzibel. Dann ist $L = K[X]/(f)$ eine algebraische Erweiterung vom Grad $= \deg f \Rightarrow \deg f = 1 \Rightarrow f$ hat Nullstelle in $K$. □

**Theorem 3.37.** *Zu jedem Körper $K$ gibt es einen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper $L$.*

*Beweis.* Wir betrachten die Menge $I = \{f \in K[X], \deg f \geq 1\}$ und den Polynomring

$$K[\mathbb{N}_0^{(I)}] = \text{Polynomring in den Variablen } (X_f)_{f \in I}$$

und bezeichnen diesen Ring mit $K[\mathfrak{X}]$. Wir betrachten das Ideal

$$\mathfrak{a} = (f(X_f), f \in I)$$

welches von der Familie der Polynome $f(X_f)$ in $K[\mathfrak{X}]$ erzeugt wird.

Behauptung: $\mathfrak{a} \subsetneq K[\mathfrak{X}]$.

Angenommen $1 \in \mathfrak{a}$. Dann gibt es eine Gleichung in $K[\mathfrak{X}]$ der Form

$$1 = \sum_{i=1}^{n} g_i f_i(X_{f_i})$$

mit $f_1, \ldots, f_n \in I$ und $g_1, \ldots, g_n \in K[\mathfrak{X}]$. Nach $n$-maliger Anwendung von Satz 3.33 finden wir eine Erweiterung $K'/K$, so dass für $i = 1, \ldots, n$ das Polynom $f_i$ eine Nullstelle $\alpha_i \in K'$ besitzt. Wir betrachten den nach Universaleigenschaft eindeutigen Ringhomomorphismus $\phi : K[\mathfrak{X}] \to K'$ mit

$\phi|_K$ = die gegebene Einbettung $K \hookrightarrow K'$

$$\phi(X_f) = \begin{cases} \alpha_i & \text{wenn} \quad f = f_i \\ 0 & \text{wenn} \quad f \notin \{f_1, \ldots, f_n\}. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \phi(1) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} g_i f_i(X_{f_i})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \phi(g_i)\phi(f_i(X_{f_i})). \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\phi(f_i(X_{f_i})) = f_i(\phi(X_{f_i})) = f_i(\alpha_i) = 0.$$

Wir erhalten $1 = 0$, Widerspruch.

Also existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset K[\mathfrak{X}]$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Wir setzen

$$L_1 = K[\mathfrak{X}]/\mathfrak{m} \quad \text{(Erweiterungskörper von } K\text{)}.$$

Ist $f \in I$, so ist das Bild von $X_f$ in $L_1$ eine Nullstelle von $f$ in $L_1$, wegen $f(X_f) \in \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Also: Jedes nichtkonstante Polynom mit Koeffizienten in $K$ hat eine Nullstelle in $L_1$.
Jetzt wenden wir diesen Prozess auf $L_1$ anstelle von $K$ an, erhalten $L_2$ u.s.w.

$$K \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \ .$$

Setze $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$. Sei $f \in L[X]$, $\deg f \geq 1$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass alle Koeffizienten von $f$ schon in $L_n$ liegen. Also hat $f$ eine Nullstelle in $L_{n+1}$ und damit auch in $L$. Daher ist $L$ algebraisch abgeschlossen. □

**Korollar 3.38.** *Sei $K$ ein Körper. Dann gibt es einen algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper $\overline{K}$ von $K$ so dass $\overline{K}/K$ algebraisch ist. Man nennt $\overline{K}$ einen* ***algebraischen Abschluss*** *von $K$.*

*Beweis.* 1. Variante: Man überprüfe, dass der im Beweis von Theorem 3.37 konstruierte Körper $L$ algebraisch über $K$ ist.
2. Sei $L/K$ irgendeine Erweiterung mit $L$ algebraisch abgeschlossen (existiert nach Theorem 3.37). Sei

$$\overline{K} = \{\alpha \in L \mid \alpha \text{ algebraisch über } K\ \}$$

der algebraische Abschluss von $K$ in $L$ (siehe Korollar 3.29).

Behauptung: $\overline{K}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beweis der Behauptung: Sei $f \in \overline{K}[X]$, $\deg f \geq 1$. Dann hat $f$ eine Nullstelle $\alpha$ in $L$. Das Element $\alpha$ ist algebraisch über $\overline{K}$, also nach Satz 3.31 algebraisch über $K$, also $\alpha \in \overline{K}$. □

**Beispiel 3.39.** Der am Ende von Abschnitt 3.2 konstruierte Körper $\mathbb{Q}^{\text{alg}} \subset \mathbb{C}$ ist ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$.

Nächstes Ziel: „zwei algebraische Abschlüsse von $K$ sind stets isomorph“.

Wir führen die folgende Notation ein. Sei $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus und $f = a_n X^n + \dots + a_0 \in K[X]$. Wir setzen $f^\sigma = \sigma(a_n)X^n + \dots + \sigma(a_0) \in L[X]$.

**Lemma 3.40.** *Sei $K$ ein Körper und $K' = K(\alpha)$ eine einfache algebraische Körpererweiterung mit Minimalpolynom $f \in K[X]$ zu $\alpha$. Weiter sei $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus.*

(i) *Ist $\sigma' : K' \to L$ ein Körperhomomorphismus, der $\sigma$ fortsetzt (d.h. $\sigma'|_K = \sigma$), so ist $\sigma'(\alpha)$ eine Nullstelle von $f^\sigma \in L[X]$.*

(ii) *Umgekehrt gibt es zu jeder Nullstelle $\beta \in L$ von $f^\sigma \in L[X]$ genau eine Fortsetzung $\sigma' : K' \to L$ von $\sigma$ mit $\sigma'(\alpha) = \beta$.*

*Daher ist die Anzahl der verschiedenen Fortsetzungen $\sigma'$ von $\sigma$ auf $K'$ gleich der Anzahl der Nullstellen von $f^\sigma$ in $L$, insbesondere endlich und $\leq \deg f$.*

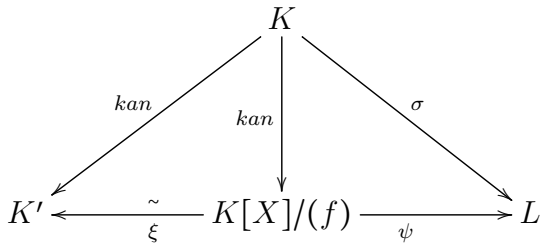
*Beweis.* Für jede Fortsetzung $\sigma' : K' \to L$ von $\sigma$ folgt aus $f(\alpha) = 0$, dass $f^\sigma(\sigma'(\alpha)) = \sigma'(f(\alpha)) = 0$.
Außerdem gilt nach Satz 3.20: $K' = K[\alpha]$, also ist $\sigma'$ schon durch $\sigma'(\alpha)$ eindeutig bestimmt. Bleibt z.z.: Zu gegebener Nullstelle $\beta \in L$ von $f^\sigma$ existiert eine Fortsetzung $\sigma' : K' \to L$ von $\sigma$ mit $\sigma'(\alpha) = \beta$.
Der Kern des Homomorphismus $\phi : K[X] \to L$, $X \mapsto \beta$, $\phi_{|K} = \sigma$ enthält $f$.
Grund:

$$\begin{aligned} \phi(f) = \phi(f(X)) &= f^\sigma(\phi(X)) \\ &= f^\sigma(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten einen induzierten Homomorphismus

$$\psi : K[X]/(f) \to L, \quad \psi(X + (f)) = \beta.$$

Wir erinnern uns an den Isomorphismus $\xi : K[X]/(f) \xrightarrow{\sim} K'$, $X + (f) \mapsto \alpha$, und erhalten das kommutative Diagramm




Nun setzen wir $\sigma' = \psi \circ \xi^{-1}$. □

**Satz 3.41.** *Sei $K \subset K'$ eine algebraische Körpererweiterung und $\sigma : K \to L$ ein Körperhomomorphismus. Sei $L$ algebraisch abgeschlossen. Dann besitzt $\sigma$ eine Fortsetzung $\sigma' : K' \to L$. Ist $K'$ algebraisch abgeschlossen und $L$ algebraisch über $\sigma(K)$, so ist jede Fortsetzung $\sigma'$ ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Wir wenden das Zornsche Lemma an. Sei $\Sigma$ die Menge aller Paare $(F, \tau)$ mit einem Zwischenkörper $K \subset F \subset K'$ und einer Fortsetzung $\tau : F \to L$ von $\sigma$. Wir setzen $(F, \tau) \leq (F', \tau')$ wenn $F \subset F'$ und $\tau'|_F = \tau$ gilt. Dann ist $\Sigma$ halbgeordnet. Wegen $(K, \sigma) \in \Sigma$ ist $\Sigma$ nichtleer. Jede Kette in $\Sigma$ hat eine obere Schranke (man vereinige die Körper in der Kette). Nach Zorn existiert ein maximales Element $(F, \tau) \in \Sigma$. Dann gilt $F = K'$: Ansonsten gäbe es ein $\alpha \in K' \setminus F$, man könnte nach Lemma 3.40 $\tau$ von $F$ auf $F(\alpha)$ fortsetzen und $(F, \tau)$ wäre nicht maximal. Dies zeigt die Existenz von $\sigma' : K' \to L$. Ist nun $K'$ algebraisch abgeschlossen,

so auch $\sigma'(K') \subset L$. Ist $L$ algebraisch über $\sigma(K)$, so auch über $\sigma'(K')$ und deshalb $L = \sigma'(K')$. Körperhomomorphismen sind stets injektiv $\Rightarrow \sigma' : K' \to L$ ist Isomorphismus. □

**Korollar 3.42.** *Es seien $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$ zwei algebraische Abschlüsse von $K$. Dann existiert ein Isomorphismus $\overline{K}_1 \xrightarrow{\sim} \overline{K}_2$, der die Identität von $K$ fortsetzt.*

**Bemerkung 3.43.** Dieser Isomorphismus existiert, es gibt aber keine kanonische Wahl, d.h. $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$ sind *unkanonisch* isomorph.

## 3.4 Ganze Ringerweiterungen

Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Erinnerung: Man nennt $B$ eine $A$-Algebra. $B$ wird zum $A$-Modul durch

$$a \cdot b \overset{df}{=} \phi(a) \cdot b.$$

Insbesondere ist für $f \in A[X]$ und $b \in B$ das Element $f(b) \in B$ definiert.

**Definition 3.44.** $\phi$ heißt **endlich** (und $B$ **endliche $A$-Algebra**) wenn $B$ als $A$-Modul endlich erzeugt ist.

**Satz 3.45.** *Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $b \in B$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Es existiert ein normiertes Polynom $f \in A[X]$ so dass $f(b) = 0$ gilt.*

(ii) *Der Unterring $A[b] \subset B$ (d.h. das Bild des kanonischen Homomorphismus $\psi : A[X] \to B$, $\psi|_A = \phi$, $\psi(X) = b$) ist als $A$-Modul endlich erzeugt.*

(iii) *Es existiert ein endlich erzeugter $A$-Untermodul $M \subset B$ mit $1 \in M$ und $b \cdot M \subset M$.*

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Es gelte $f(b) = 0$ mit $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Dann gilt $b^n = -\phi(a_{n-1})b^{n-1} - \cdots - \phi(a_0)$. Sei $M = \langle 1, b, \ldots, b^{n-1} \rangle \subset B$ der von $1, \ldots, b^{n-1}$ erzeugte $A$-Untermodul. Dann gilt $b^n \in M$ und per Induktion $b^m \in M$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Also $A[b] \subset M$, folglich $A[b] = M$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Man wähle $M = A[b]$.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle \subset B$ ein endlich erzeugter $A$-Untermodul mit $1 \in M$ und $bM \subset M$. Dann existieren Gleichungen

$$\begin{array}{ccc} bm_1 & = & a_{11}m_1 + \cdots + a_{1n}m_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ bm_n & = & a_{n1}m_1 + \cdots + a_{nn}m_n \end{array} .$$

M.a.W.

$$Q \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = 0$$

mit $Q = (b\delta_{ij} - \phi(a_{ij}))_{i,j} \in M_{n,n}(B)$. Sei $Q^{ad}$ die Adjunkte zu $Q$, d.h. $Q^{ad}Q = \det(Q) \cdot E_n$. Dann gilt:

$$(\det(Q) \cdot E_n) \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = Q^{ad}Q \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = 0,$$

d.h. $\det(Q)m_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Hieraus folgt $\det(Q) \cdot m = 0 \ \forall\, m \in M$ und wegen $1 \in M$: $\det(Q) = 0$. Die Leibniz-Regel für det gibt uns eine Gleichung der Form

$$b^n + c_{n-1}b^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$$

mit $c_0, \ldots, c_{n-1} \in A$. □

**Definition 3.46.** Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Ein Element $b \in B$ heißt **ganz über $A$** (bzgl. $\phi$) wenn $b$ die äquivalenten Bedingungen von Satz 3.45 erfüllt. Man sagt **$B$ ist ganz über $A$** (bzw. $\phi$ sei ganz), wenn jedes $b \in B$ ganz über $A$ ist.

**Korollar 3.47.** *Jeder endliche Ringhomomorphismus $\phi$ ist ganz.*

*Beweis.* Man setze $M = B$ in Satz 3.45 (iii). □

**Bemerkung 3.48.** Sei $\phi : K \subset L$ eine Körpererweiterung. Dann gilt

$\phi$ endlich $\iff L/K$ endlich,

$\phi$ ganz $\iff L/K$ algebraisch.

**Lemma 3.49.** *Sind $A \to B$ und $B \to C$ endliche Ringhomomorphismen, so auch ihre Komposition $A \to C$.*

*Beweis.* Ist $C$ als $B$-Modul durch $c_1, \ldots, c_n$ erzeugt und $B$ als $A$-Modul durch $b_1, \ldots, b_m$, so ist $C$ als $A$-Modul durch die $n \cdot m$ Produkte $(b_i c_j)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ erzeugt.

Grund: Sei $c \in C$ beliebig $\Rightarrow$ ex. $\beta_1, \ldots, \beta_n \in B$ mit

$$c = \beta_1 c_1 + \cdots + \beta_n c_n.$$

Nun existieren zu jedem $\beta_i$ Elemente $a_{ij} \in A$ mit

$$\beta_i = a_{i1}b_1 + \cdots + a_{im}b_m.$$

Benennen wir $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$, so gilt

$$\begin{aligned} c = \beta_1 c_1 + \cdots + \beta_n c_n &\overset{df}{=} \psi(\beta_1)c_1 + \cdots + \psi(\beta_n)c_n \\ &= \psi(\phi(a_{11})b_1)c_1 + \cdots + \psi(\phi(a_{1m})b_m)c_1 \\ &\quad \vdots \\ &\quad \psi(\phi(a_{n1})b_1)c_n + \cdots + \psi(\phi(a_{nm})b_m)c_n. \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.50.** *Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $b_1, \ldots, b_n \in B$ so dass $B = A[b_1, \ldots, b_n]$. Sind dann $b_1, \ldots, b_n$ ganz über $A$ so ist $B$ endliche $A$-Algebra, insbesondere ist $\phi$ ganz.*

*Beweis.* Wir betrachten die Kette von Ringerweiterungen

$$\phi(A) \subset \phi(A)[b_1] \subset \phi(A)[b_1, b_2] \subset \cdots \subset \phi(A)[b_1, \ldots, b_n] = B.$$

Nach Satz 3.45 ist jede Teilerweiterung endlich und nach Lemma 3.49 auch die Komposition. □

**Korollar 3.51.** *Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $b_1, b_2 \in B$ ganz über $A$. Dann sind auch $b_1 + b_2$ und $b_1 b_2$ ganz über $A$.*

*Beweis.* $b_1 b_2, b_1 + b_2 \in A[b_1, b_2]$ und dies ist eine endliche, also ganze $A$-Algebra. □

**Korollar 3.52.** *Sind $A \to B$ und $B \to C$ ganz, so auch die Komposition $A \to C$.*

*Beweis.* Sei $c \in C$ beliebig. Es ist $c$ ganz über $B$, also existieren $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$ mit

$$c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \cdots + b_0 = 0.$$

Also ist $c$ auch schon ganz über der endlichen $A$-Algebra $A[b_0, \ldots, b_{n-1}] \subset B$, d.h. die $A[b_0, \ldots, b_{n-1}]$-Algebra $A[b_0, \ldots, b_{n-1}][c] \subset C$ ist endlich. Diese ist nach Lemma 3.49 also eine endliche $A$-Algebra und $c$ deshalb ganz über $A$. □

Sei nun $A$ nullteilerfrei und $K = Q(A)$. Sei $L/K$ eine Körpererweiterung.

**Definition 3.53.** Die Menge

$$A_L = \{c \in L \mid c \text{ ist ganz über } A\}$$

heißt der **Ganzabschluss** von $A$ in $L$. $A$ heißt **ganzabgeschlossen**, wenn $A = A_K$ gilt.

**Bemerkung 3.54.** Nach Korollar 3.51 ist $A_L$ ein Ring.

**Beispiel 3.55 (eines nicht ganzabgeschlossenen Ringes).** Sei $f = X^2 - Y^3 \in \mathbb{C}[X, Y]$ und $A = \mathbb{C}[X, Y]/(f)$. $A$ ist nullteilerfrei weil $f$ irreduzibel ist.

Sei $x$ das Bild von $X$ in $A$; wegen $f \nmid X$ gilt $x \neq 0$. Analog sei $y$ das Bild von $Y$ in $A$; wegen $f \nmid Y$ gilt $y \neq 0$. Es gilt $x^2 = y^3$ in $A$. Daher gilt

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - y = \frac{x^2}{y^2} - y = y - y = 0.$$

Also ist $\frac{x}{y} \in Q(A)$ ganz über $A$. Aber $\frac{x}{y} \notin A$. Ansonsten wäre nämlich $x = y \cdot \frac{x}{y} \in Ay$ und somit $X \in (Y, X^2 - Y^3)$. Aber $(Y, X^2 - Y^3) = (Y, X^2) \not\ni X$. Also ist $A$ nicht ganzabgeschlossen.

**Satz 3.56.** *Jeder faktorielle Ring ist ganzabgeschlossen.*

*Beweis.* Sei $K = Q(A)$ und $\alpha \in K$ mit $\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$, wobei $c_0, \ldots, c_{n-1} \in A$. Z.z.: $\alpha \in A$. Sei $\alpha = \frac{a}{b}$, $a, b \in A$, $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Dann gilt

$$a^n + c_{n-1}ba^{n-1} + \cdots + c_0 b^n = 0.$$

Ist nun $p \in A$ ein Primelement mit $p \mid b$, so folgt $p \mid a^n$, also $p \mid a$, Widerspruch. Also existiert so ein $p$ nicht und es gilt $b \in A^\times$. Folglich gilt $\alpha \in A$. □

**Bemerkung 3.57.** Wir sehen somit, dass $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$ ein nullteilerfreier, nicht faktorieller Ring ist.

Wir brauchen den folgenden Spezialfall:

**Definition 3.58.** $\mathcal{O} = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ ganz über } \mathbb{Z}\}$ heißt der Ring der **ganz-algebraischen Zahlen**.

**Korollar 3.59.** $\mathcal{O} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$.

*Beweis.* $\mathbb{Z}$ ist faktoriell und daher nach 3.56 ganzabgeschlossen. □

## 3.5 Zerfällungskörper

Notation: Sind $L/K$ und $L'/K$ zwei Körpererweiterungen und ist $\sigma : L \to L'$ ein Homomorphismus, so nennen wir $\sigma$ einen $K$-Homomorphismus wenn $\sigma$ die Identität von $K$ fortsetzt.

**Definition 3.60.** Sei $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtkonstanter Polynome über einem Körper $K$. Ein Erweiterungskörper $L/K$ heißt **Zerfällungskörper** (über $K$) der Familie $\mathcal{F}$ wenn gilt

(i) Jedes $f_i$ zerfällt über $L$ vollständig in Linearfaktoren.
(ii) $L/K$ wird von den Nullstellen der $f_i$ erzeugt.

**Beispiele 3.61.** • Sei $\mathcal{F}$ die einelementige Familie, bestehend aus einem $f \in K[X]$. Sei $\overline{K}/K$ ein algebraischer Abschluss und $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstellen von $f$ in $\overline{K}$. Dann ist $L = K(a_1, \ldots, a_n)$ ein Zerfällungskörper für $f$.
• Für eine beliebige Familie $(f_i)_{i \in I}$ erhält man einen Zerfällungskörper, indem man in einem gewählten algebraischen Abschluss von $K$ die Nullstellen der $f_i$ adjungiert.
• Ist $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ eine endliche Familie so ist jeder Zerfällungskörper des Produktes $f_1 \cdots f_n$ auch Zerfällungskörper von $\mathcal{F}$ und umgekehrt.

**Satz 3.62.** *Seien $L_1, L_2$ zwei Zerfällungskörper der Familie $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I}$ von Polynomen über $K$. Dann beschränkt sich jeder $K$-Homomorphismus $\overline{\sigma} : L_1 \to \overline{L}_2$ in einen algebraischen Abschluss $\overline{L}_2$ von $L_2$ zu einem Isomorphismus $\sigma : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$.*

**Korollar 3.63.** *Je zwei Zerfällungskörper von $\mathcal{F}$ sind (unkanonisch) $K$-isomorph.*

*Beweis.* Nach Satz 3.41 setzt sich die Inklusion $K \hookrightarrow \overline{L}_2$ zu einem $K$-Homomorphismus $\overline{\sigma} : L_1 \to \overline{L}_2$ fort. Nach Satz 3.62 erhalten wir einen Isomorphismus $\sigma : L_1 \xrightarrow{\sim} L_2$ □

*Beweis von Satz 3.62.* 1. Schritt: $\mathcal{F} = (f)$ (einelementige Familie). OE $f$ normiert. Weil $f$ Koeffizienten in $K$ hat, gilt $f^{\overline{\sigma}} = f$. Sind $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstellen (mit Vielfachheiten) von $f$ in $L_1$ und $b_1, \ldots, b_n$ die Nullstellen von $f$ in $L_2 \subset \overline{L}_2$ so folgt $f^{\overline{\sigma}} = \prod(X - \overline{\sigma}(a_i))$. Wegen $f = \prod(X - b_i)$ folgt nach Umnummerierung $b_i = \overline{\sigma}(a_i)$, $i = 1, \ldots, n$, und

$$L_2 = K(b_1, \ldots, b_n) = K(\overline{\sigma}(a_1), \ldots, \overline{\sigma}(a_n)) = \overline{\sigma}(L_1)$$

2. Schritt: $\mathcal{F}$ ist endliche Familie $(f_1, \ldots, f_n)$. Ersetze $\mathcal{F}$ durch die einelementige Familie $f_1 \cdots f_n$ und wende Schritt 1 an.

3. Schritt: $\mathcal{F}$ beliebige Familie. $L_1$ und $L_2$ sind Vereinigung von Zerfällungskörpern zu den endlichen Teilfamilien von $\mathcal{F}$. □

**Satz 3.64.** *Es sei $L/K$ eine algebraische Körpererweiterung. Dann sind äquivalent:*

(i) *Jeder $K$-Homomorphismus $L \to \overline{L}$ in einen algebraischen Abschluss $\overline{L}$ von $L$ beschränkt sich zu einem Automorphismus von $L$.*

(ii) *$L$ ist Zerfällungskörper einer Familie von Polynomen über $K$.*

(iii) *Jedes irreduzible Polynom aus $K[X]$, das in $L$ eine Nullstelle hat, zerfällt über $L$ vollständig in Linearfaktoren.*

**Bemerkung 3.65** (zu Satz 3.64 (i))**.** Ein algebraischer Abschluss $\overline{L}/L$ ist eine Körpererweiterung, d.h. es gibt eine vorgegebene Einbettung $L \hookrightarrow \overline{L}$. Es gibt aber i.A. noch mehr $K$-Homomorphismen $L \to \overline{L}$ als diesen einen.

**Beispiel 3.66.** Sei $\alpha = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte *reelle* Zahl $\alpha$ mit $\alpha^3 = 2$ und sei $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}} (\subset \mathbb{C})$ die natürliche Inklusion. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}^{\mathrm{alg}} \\ a_1 + a_2\alpha + a_3\alpha^2 & \longmapsto & a_1 + a_2\alpha e^{2\pi i/3} + a_3\alpha^2 e^{4\pi i/3} \end{array}$$

ist ein $\mathbb{Q}$-Homomorphismus. $\varphi(\alpha)$ ist die komplexe Nullstelle $\alpha e^{2\pi i/3}$ des Polynoms $X^3 - 2$. Daher ist $\varphi(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$ nicht in $\mathbb{R}$ enthalten und insbesondere ungleich $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ erfüllt daher nicht die Bedingung (i) von Satz 3.64.

**Definition 3.67.** Eine algebraische Körpererweiterung $L/K$ heißt **normal**, wenn sie die äquivalenten Bedingung von Satz 3.64 erfüllt.

**Beispiel 3.68.** $\overline{K}/K$ ist normal.

*Beweis von Satz 3.64.* (i) $\Rightarrow$ (iii). Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und $a \in L$ eine Nullstelle. Wir betrachten den Teilkörper $K(a) \subset L$. Sei $b$ eine weitere Nullstelle von $f$ in $\overline{L}$. Z.z.. $b \in L$. Nach Lemma 3.40 finden wir einen $K$-Homomorphismus $\sigma : K(a) \to \overline{L}$ mit $\sigma(a) = b$. Nach Satz 3.41 finden wir eine Fortsetzung $\sigma' : L \to \overline{L}$. Nach Voraussetzung gilt $\sigma(L) = L$, also $b = \sigma(a) \in \sigma(L) = L$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii) Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus $L$ so dass $L = K((a_i)_{i\in I})$. Sei $f_i$ das Minimalpolynom von $a_i$ über $K$. Nach Voraussetzung zerfallen alle $f_i$ über $L$ in Linearfaktoren, also ist $L$ Zerfällungskörper der Familie $(f_i)_{i\in I}$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $L$ Zerfällungskörper der Familie $(f_i)_{i\in I}$ und $\sigma : L \to \overline{L}$ ein $K$-Homomorphismus. Dann ist auch $\sigma(L) \subset \overline{L}$ Zerfällungskörper der Familie $(f_i)$ (beide Körper sind $K$-isomorph). Aber $L$ und $\sigma(L)$ sind beide Teilkörper in $\overline{L}$ und entstehen durch Adjunktion der Nullstellen der $f_i$. Also $L = \sigma(L)$. □

**Korollar 3.69.** *Jede Körpererweiterung vom Grad 2 ist normal.*

*Beweis.* Sei $[L : K] = 2$. Sei $f \in K[X]$ irreduzibel und $\alpha \in L$ eine Nullstelle. Das Minimalpolynom von $\alpha$ über $K$ hat Grad $\leq 2$ und teilt $f$. Also $\deg f \leq 2$. $f$ spaltet über $L$ den Linearfaktor $X - \alpha$ ab und zerfällt deshalb in Linearfaktoren. □

**Korollar 3.70.** *Sind $M/L/K$ Körpererweiterungen und $M/K$ normal, so auch $M/L$.*

*Beweis.* $M$ ist Zerfällungskörper über $K$ einer Familie $\mathcal{F}$ von Polynomen über $K$. Fassen wir $\mathcal{F}$ als Familie von Polynomen über $L$ auf, so ist $M$ auch Zerfällungskörper von $\mathcal{F}$ über $L$. □

**Bemerkung 3.71.** (Normalität ist nicht transitiv). Sei $\alpha$ die eindeutig bestimmte positive reelle Zahl mit $\alpha^4 = 2$. Die Erweiterungen $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}(\alpha^2)$ und $\mathbb{Q}(\alpha^2)/\mathbb{Q}$ haben Grad 2 und sind daher normal. Aber $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ ist nicht normal. In der Tat hat das Polynom $f(X) = X^4 - 2$ die Nullstelle $\alpha$, zerfällt aber über $\mathbb{Q}(\alpha)$ nicht in Linearfaktoren, wegen $\mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}$ und weil $f$ die nicht-reelle Nullstelle $i\alpha$ hat.

**Definition 3.72.** Sei $L/K$ algebraisch. Eine Körpererweiterung $L'/L$ heißt **normale Hülle** von $L/K$, wenn

(i) $L'/K$ ist normal.
(ii) kein echter Teilkörper $L \subseteq M \subsetneq L'$ ist normal über $K$.

Man sagt auch: $L'/K$ ist eine normale Hülle von $L/K$.

**Satz 3.73.** *Sei $L/K$ eine algebraische Körpererweiterung.*

(i) *Zu $L/K$ gibt es eine normale Hülle $L'/K$. Diese ist bis auf (unkanonischen) Isomorphismus über $L$ eindeutig bestimmt.*

(ii) *Ist $L/K$ endlich, so auch $L'/K$.*

(iii) *Ist $M/L$ algebraisch und $M/K$ normal, so kann man $L \subset L' \subset M$ wählen. Als Teilkörper von $M$ ist $L'$ eindeutig bestimmt. Ist $(\sigma_j)_{j\in J}$ das System aller $K$-Homomorphismen von $L$ nach $M$, so gilt*

$$L' = K((\sigma_j(L))_{j\in J}).$$

Man bezeichnet den Körper $L' \subset M$ in (iii) als die **normale Hülle von $L$ in $M$**.

*Beweis.* Sei $L = K((a_i)_{i\in I})$ wobei $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus $L$ sei. Sei $f_i \in K[X]$ das Minimalpolynom von $a_i$ über $K$. Sei $M/L$ ein algebraischer Erweiterungskörper der normal über $K$ ist (z.B. ein algebraischer Abschluss von $L$, der auch algebraischer Abschluss von $K$ ist). Die $f_i$ haben eine Nullstelle in $L$ also in $M$ und zerfallen daher in $M[X]$ in Linearfaktoren. Sei $L'$ der von den Nullstellen der $f_i$ in $M$ über $K$ erzeugte Teilkörper von $K$. Es gilt $K \subset L \subset L' \subset M$ und $L'$ ist eine normale Hülle von $L$ über $K$. Ist nun $L'' \subset M$ eine weitere normale Hülle von $L$ in $M$, so enthält $L''$ alle Nullstellen der $f_i$. Also gilt $L' \subset L''$ und wegen der Minimalität gilt $L' = L''$.

Wir haben somit den ersten Teil von (iii), die Existenzaussage von (i) und die Implikation „Eindeutigkeit in (i) $\Rightarrow$ (ii)“ gezeigt.

*Eindeutigkeit in* (i): Seien $L_1'/L$, $L_2'/L$ zwei normale Hüllen von $L/K$. Dann sind $L_1'$, $L_2'$ Zerfällungskörper der Familie $(f_i)_{i\in I}$ über $K$, also auch über $L$. Aus Korollar 3.63 folgt die Existenz eines $L$-Isomorphismus $L_1' \xrightarrow{\sim} L_2'$.

*Zweiter Teil von* (iii). Sei also $M/L$ mit $M/K$ normal gegeben und $L'$ die eindeutig bestimmte normale Hülle von $L$ in $M$.
Z.z. $L' = K(\sigma_j(L)_{j\in J}) \subset M$ wobei $\sigma_j$ die $K$-Homomorphismen von $L$ nach $M$ durchläuft. Sei $\sigma : L \to M$ ein $K$-Homomorphismus. Dieser überführt die Nullstellen der $f_i$ wieder in Nullstellen der $f_i$. Da $L$ über $K$ von den $a_i$ erzeugt wird und $L'$ von *allen* Nullstellen der $f_i$, gilt also $\sigma(L) \subset L'$. So erhalten wir $L' \supset K(\sigma_j(L)_{j\in J})$. Sei nun $\alpha_i$ eine beliebige Nullstelle von $f_i$. Z.z.: $\alpha_i \in \sigma(L)$ für einen $K$-Homomorphismus $L \to M$. Nach Lemma 3.40 finden wir einen $K$-Homomorphismus $\bar\sigma : K(a_i) \to L'$ mit $\bar\sigma(a_i) = \alpha_i$.

Bild:

$$\begin{array}{ccccc}
\sigma': & L' & \to & \overline{L'} \\
 & \cup & & \cup \\
 & L & & \\
 & \cup & & \\
\bar\sigma: & K(a_i) & \longrightarrow & L' \\
 & \cup & & \cup \\
 & K & = & K
\end{array}$$

Nach Satz 3.41 finden wir eine Fortsetzung $\sigma' : L' \to \overline{L'}$ von $\bar{\sigma}$. Nach Satz 3.64(i) gilt $\sigma'(L') = L'$. Die Einschränkung von $\sigma'$ auf $L$ gibt den gewünschten $K$-Homomorphismus $\sigma : L \to L' \subset M$ mit $\alpha_i \in \sigma(L)$. □

## 3.6 Separable Erweiterungen

Erinnerung aus der Linearen Algebra: Seien $f, g \in K[X]$ und $L/K$ ein Erweiterungskörper. Dann gilt

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ggT}_{K[X]}(f,g) & = & \mathrm{ggT}_{L[X]}(f,g) \\ \| & & \| \\ h_1 & & h_2 \end{array}$$

Grund: Es existieren $F_1, G_1 \in K[X]$ mit $F_1 f + G_1 g = h_1$ und $F_2, G_2 \in L[X]$ mit $F_2 f + G_2 g = h_2$. Wegen $h_1 \mid f$ und $h_1 \mid g$ (in $K[X]$ also auch in $L[X]$) gilt $h_1 \mid h_2$ in $L[X]$. Analog: $h_2 \mid h_1$. □

*Wir setzen die Konvention* $ggT_{K[X]}(f, 0) = f$ *für beliebiges* $f \in K[X]$.

Für $f \in K[X]$ betrachten wir die Nullstellen von $f$ in einem algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von $K$ und müssen darauf achten, dass alle Aussagen unabhängig von der Auswahl von $\overline{K}$ sind. Beachte: $\overline{K}$ ist eindeutig bis auf unkanonische Isomorphie. Z.B. ist es sinnvoll zu sagen, dass $f$ nur einfache oder dass $f$ mehrfache Nullstellen in $\overline{K}$ hat.

**Definition 3.74.** Sei $f = a_n X^n + \cdots + a_0 \in K[X]$. Wir nennen das Polynom

$$f' = n a_n X^{n-1} + \cdots + a_1 \in K[X]$$

die **Ableitung von** $f$.

**Bemerkung 3.75.** Es gelten die üblichen Rechenregeln aus der Analysis, z.B. gilt die Produktregel

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(einfach nachzurechnen).

**Lemma 3.76.** *Sei* $f \in K[X]$ *nicht-konstant.*

(i) *Die mehrfachen Nullstellen von* $f$ *(in einem algebraischen Abschluss* $\overline{K}$ *von* $K$*) sind genau die gemeinsamen Nullstellen von* $f$ *und* $f'$ *d.h. die Nullstellen von* $\mathrm{ggT}(f, f')$.

(ii) *Ist* $f$ *irreduzibel, so hat* $f$ *genau dann Mehrfachnullstellen wenn* $f' = 0$ *gilt.*

*Beweis.* (i) OE $K = \overline{K}$ und $f$ normiert. Dann gilt $f = (X-a_1)\cdots(X-a_n)$ und die Produktregel liefert

$$f' = \sum_{i=1}^{n}(X-a_1)\cdots\widehat{(X-a_i)}\cdots(X-a_n),$$

und damit die Aussage.
(ii) (hier *nicht* OE $K = \overline{K}$). Sei $f$ irreduzibel über $K$ und $a \in \overline{K}$ eine Nullstelle von $f$. Dann ist $f$ das Minimalpolynom von $a$ über $K$. Ist $a$ auch Nullstelle von $f'$ so gilt $f \mid f'$ und wegen $\deg f' < \deg f$ folgt $f' = 0$. Ist $f' = 0$ so folgt aus (i) dass jede Nullstelle Mehrfachnullstelle ist. □

**Definition 3.77.** $f \in K[X]$ heißt **separabel**, wenn es keine Mehrfachnullstelle hat.

**Korollar 3.78.** *Ist* $\mathrm{char}(K) = 0$, *so ist jedes irreduzible Polynom separabel.*

*Beweis.* Ist $\mathrm{char}(K) = 0$ und $\deg f \geq 1$, so gilt $\deg f' = \deg f - 1$, insbesondere $f' \neq 0$. □

**Beispiel 3.79.** Über $\mathbb{F}_p(t)$ ist das Polynom $f(X) = X^p - t$ irreduzibel, aber nicht separabel, wegen $f'(X) = pX^{p-1} = 0$.

**Bemerkung 3.80.** In Charakteristik 0 gibt es bis zu $n$ viele verschiedene $n$-te Wurzeln aus einem Element. Ist $\mathrm{char}(K) = p > 0$, so existiert zu jedem $a \in K$ höchstens eine $p^r$-te Wurzel, und genau eine $p^r$-te Wurzel aus $a$ in $\overline{K}$.
Grund: Gilt $\alpha_1^{p^r} = a = \alpha_2^{p^r}$, so folgt $0 = \alpha_1^{p^r} - \alpha_2^{p^r} = (\alpha_1 - \alpha_2)^{p^r}$, also $\alpha_1 = \alpha_2$.

**Satz 3.81.** *Sei char* $K = p > 0$ *und* $f \in K[X]$ *irreduzibel. Sei* $r \in \mathbb{N}_0$ *maximal mit der Eigenschaft, dass* $f$ *ein Polynom in* $X^{p^r}$ *ist, d.h. dass es ein* $g \in K[X]$ *mit* $f(X) = g(X^{p^r})$ *gibt. Dann hat jede Nullstelle von* $f$ *die Vielfachheit* $p^r$ *und* $g$ *ist ein irreduzibles separables Polynom. Die Nullstellen von* $f$ *sind genau die* $p^r$*-ten Wurzeln der Nullstellen von* $g$.

*Beweis.* Sei $f = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$, $f' = \sum_{i=1}^{n} i c_i X^{i-1}$. Dann gilt

$$f' = 0 \iff ic_i = 0,\ i = 1,\dots,n \iff c_i = 0 \text{ für alle } i \text{ mit } (p,i) = 1$$
$$\iff f(X) = h(X^p) \text{ für ein } h \in K[X].$$

Sei nun $g$ wie im Satz. Dann gilt (obige Überlegung auf $g$ anwenden) $g' \neq 0$ wegen der Maximalität von $r$. Wäre $g$ reduzibel, so auch $f$, daher ist $g$ irreduzibel und separabel. Seien OE $f$ und $g$ normiert und $a_i$ die Nullstellen von $g$ in $\overline{K}$, d.h.

$$g(X) = \prod_i (X - a_i) \qquad a_i \in \overline{K}.$$

Ist dann $b_i^{p^r} = a_i$ in $\overline{K}$ so gilt

$$f(X) = \prod_i (X^{p^r} - b_i^{p^r}) = \prod_i (X - b_i)^{p^r}.$$

Also haben die Nullstellen von $f$ alle die Vielfachheit $p^r$ und sind genau die $p^r$-ten Wurzeln der Nullstellen von $g$. □

**Definition 3.82.** Sei $L/K$ eine algebraische Körpererweiterung. Ein Element $a \in L$ heißt **separabel über $K$**, wenn es Nullstelle eines separablen Polynoms über $K$ ist ($\Longleftrightarrow$ das Minimalpolynom von $a$ über $K$ ist separabel). $L/K$ heißt **separable Körpererweiterung**, wenn jedes $a \in L$ separabel über $K$ ist. $K$ heißt **vollkommen** (oder perfekt) wenn jede algebraische Erweiterung von $K$ separabel ist.

**Korollar 3.83.** *Jeder Körper der Charakteristik 0 ist vollkommen.*

**Beispiel 3.84.** Die Erweiterung $\mathbb{F}_p(t)[X]/(X^p - t)\Big/\mathbb{F}_p(t)$ ist nicht separabel.

**Definition 3.85.** Sei $L/K$ eine algebraische Körpererweiterung und $\overline{K}/K$ ein algebraischer Abschluss. Der **Separabilitätsgrad $[L : K]_s$** von $L$ über $K$ ist durch die Gleichung

$$[L : K]_s := \#\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K})$$

gegeben.

**Bemerkung 3.86.** Da zwei algebraische Abschlüsse von $K$ stets $K$-isomorph sind, hängt die Definition von $[L : K]_s$ nicht von der Auswahl von $\overline{K}$ ab.

**Lemma 3.87.** *Sei $K \subset K(\alpha) = L$ eine einfache, algebraische Körpererweiterung und $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von $\alpha$ über $K$. Dann gilt*

(i) $[L : K]_s$ = *Anzahl der verschiedenen Nullstellen von $f$ in $\overline{K}$.*

(ii) *$\alpha$ separabel über $K$* $\Longleftrightarrow [L : K] = [L : K]_s$.

(iii) *Gilt* $\mathrm{char}(K) = p > 0$ *und ist $p^r$ die Vielfachheit der Nullstelle $\alpha$ von $f$, so folgt $[L : K] = p^r[L : K]_s$.*

*Beweis.* (i) ist eine Umformulierung von Lemma 3.40.
(ii) $\alpha$ separabel $\Longleftrightarrow$ $f$ hat keine Mehrfachnullstelle $\Longleftrightarrow$ $f$ hat genau $n = \deg f$ Nullstellen $\overset{(i)}{\Longleftrightarrow}$ $n = [L : K]_s$. Nach Satz 3.20 gilt aber $n = [L : K]$.
(iii) Dies folgt aus Satz 3.81 und aus (i). □

**Satz 3.88.** *Für $M/L/K$ algebraisch gilt*

$$[M : K]_s = [M : L]_s \cdot [L : K]_s.$$

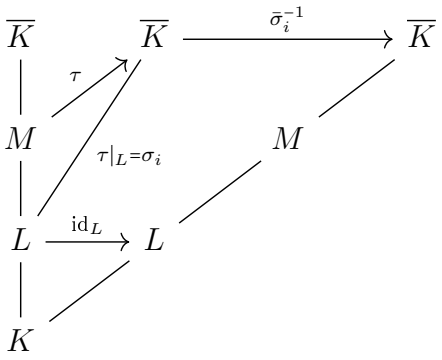
*Beweis.* Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von $M$. ($\overline{K}$ ist auch algebraischer Abschluss von $L$ und von $K$). Es gelte

$$\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K}) = \{\sigma_i \mid i \in I\},\ \mathrm{Hom}_L(M, \overline{K}) = \{\tau_j \mid j \in J\}.$$

Für jedes $i \in I$ wählen wir gemäß Satz 3.41 einen $K$-Homomorphismus $\overline{\sigma}_i : \overline{K} \to \overline{K}$, der $\sigma_i$ fortsetzt. Nach Satz 3.64 sind die $\overline{\sigma}_i$ $K$-Automorphismen von $\bar{K}$. Es genügt nun, die folgenden Aussagen zu zeigen.

(1) Die Abbildungen $\overline{\sigma}_i \circ \tau_j : M \to \overline{K}$, $i \in I$, $j \in J$, sind paarweise verschieden.
(2) $\mathrm{Hom}_K(M, \overline{K}) = \{\overline{\sigma}_i \circ \tau_j \mid i \in I,\ j \in J\}$.

Zu (1): Sei $\overline{\sigma}_i \circ \tau_j = \overline{\sigma_{i'}} \circ \tau_{j'}$. Wegen $\tau_j|_L = id_L = \tau_{j'}|_L$ gilt $\sigma_i = (\overline{\sigma}_i \circ \tau_j)|_L = (\overline{\sigma_{i'}} \circ \tau_{j'})|_L = \sigma_{i'}$, also $i = i'$. Also gilt $\overline{\sigma}_i = \overline{\sigma_{i'}}$ und folglich $\tau_j = \tau_{j'}$.
Zu (2): Sei nun $\tau : M \to \overline{K}$ ein $K$-Homomorphismus. Es gilt $\tau|_L \in \mathrm{Hom}_K(L, \overline{K})$ also $\tau|_L = \sigma_i$ für ein $i \in I$. Dann ist $\overline{\sigma}_i^{-1} \circ \tau \in \mathrm{Hom}_L(M, \overline{K})$, d.h. es existiert ein $j \in J$ mit $\overline{\sigma}_i^{-1} \circ \tau = \tau_j$. Dann gilt $\tau = \overline{\sigma}_i \circ \tau_j$. Bild:




□

**Satz 3.89.** *Es sei $K \subset L$ eine endliche Körpererweiterung.*

(i) *Falls* $\mathrm{char}(K) = 0$, *so gilt* $[L : K] = [L : K]_s$.
(ii) *Falls* $\mathrm{char}(K) = p > 0$, *so existiert ein* $r \in \mathbb{N}_0$ *mit* $[L : K] = p^r [L : K]_s$.

*Insbesondere teilt* $[L : K]_s$ *stets* $[L : K]$.

*Beweis.* Ist $L = K(a)/K$ einfach, so folgt dies aus Lemma 3.87. Der allgemeine Fall $L = K(a_1, \ldots, a_n)/K$ folgt hieraus per Induktion nach $n$ mithilfe der Gradformeln Satz 3.88 und Satz 3.13. □

**Satz 3.90.** *Sei $L/K$ endlich. Dann sind äquivalent*

(i) *$L/K$ ist separabel.*
(ii) *Es gibt über $K$ separable Elemente $a_1, \ldots, a_n$ mit $L = K(a_1, \ldots, a_n)$.*
(iii) $[L : K]_s = [L : K]$.

*Beweis.* (i) ⇒ (ii) ist trivial.
(ii) ⇒ (iii) $K \subset K(a_1) \subset K(a_1, a_2) \subset \cdots \subset K(a_1, \ldots, a_n) = L$ sind jeweils einfache Erweiterungen und für alle $i$ ist $a_i$ ist separabel über $K(a_1, \ldots, a_{i-1})$. Wir erhalten die Gleichung in (iii) aus Lemma 3.87 und den Gradformeln Satz 3.13, Satz 3.88.
(iii) ⇒ (i). Sei $a \in L$ beliebig. Z.z. $a$ separabel $/K$. OE sei $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Sei

$f \in K[X]$ das Minimalpolynom von $a$. Nach Satz 3.81 existiert ein $r \in \mathbb{N}_0$ so dass jede Nullstelle von $f$ die Vielfachheit $p^r$ hat. Z.z. $r = 0$. Es gilt nach Lemma 3.87

$$[K(a) : K] = p^r [K(a) : K]_s$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}[L : K]_s = [L : K] &= [L : K(a)][K(a) : K] \\ &\geq [L : K(a)]_s \cdot p^r \cdot [K(a) : K]_s = p^r [L : K]_s,\end{aligned}$$

und es folgt $r = 0$. □

**Korollar 3.91.** *Sei* $\mathrm{char}(K) = p > 0$ *und* $[L : K]$ *endlich und nicht durch* $p$ *teilbar. Dann ist* $L/K$ *separabel.*

*Beweis.* $[L : K] = p^r [L : K]_s$, also $r = 0$. □

**Korollar 3.92.** *Sei* $L/K$ *algebraisch,* $(a_i)_{i \in I}$ *eine Familie von Elementen aus* $L$ *und* $L = K((a_i)_{i \in I})$*. Dann sind äquivalent:*

(i) $L/K$ *ist separabel.*

(ii) $a_i$ *ist separabel über* $K$ *für alle* $i$*.*

*Sind die Bedingungen erfüllt, so gilt* $[L : K] = [L : K]_s$*.*

*Beweis.* Jedes $a \in L$ liegt schon in $K(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ für gewisse $i_1, \ldots, i_n \in I$. Daher gilt (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Im Fall $[L : K] < \infty$ folgt $[L : K] = [L : K]_s$. Sei $[L : K] = \infty$, und $E \subset L$ ein Teilkörper mit $[E : K] < \infty$. Dann ist auch $E/K$ separabel, also folgt

$$[L : K]_s \geq [E : K]_s = [E : K].$$

Da wir $E$ mit beliebig großem Grad $[E : K]$ wählen können, folgt $[L : K]_s = \infty$. □

**Korollar 3.93.** *Es seien* $M/L/K$ *algebraische Körpererweiterungen. Dann ist* $M/K$ *genau dann separabel, wenn* $M/L$ *und* $L/K$ *separabel sind.*

*Beweis.* Die Implikation „$M/K$ separabel $\Rightarrow$ $M/L$ separabel + $L/K$ separabel“ ist offensichtlich. Seien nun $M/L$ und $L/K$ separabel. Sei $a \in M$ beliebig und $f = X^n + c_{n-1}X^{n-1} \cdots + c_0 \in L[X]$ das Minimalpolynom von $a$ über $L$. Sei $L' = K(c_0, \ldots, c_{n-1})$. Da $M/L$ separabel ist, ist $f$ separabel. Also ist $L'(a)/L'$ separabel und wegen $L' \subset L$ ist auch $L'/K$ separabel. Beide Erweiterungen $L'(a)/L'$ und $L'/K$ sind endlich. Es folgt

$$\begin{aligned}[L'(a) : K] &= [L'(a) : L'] \cdot [L' : K] \\ &= [L'(a) : L']_s \cdot [L' : K]_s = [L'(a) : K]_s.\end{aligned}$$

Also ist $L'(a)/K$ separabel, insbesondere ist $a$ separabel über $K$. □

**Definition 3.94.** Ein Körper $K$ heißt **separabel abgeschlossen** wenn es keine nicht-triviale algebraische separable Erweiterung von $K$ gibt.

**Beispiel 3.95.** Ein algebraisch abgeschlossener Körper ist separabel abgeschlossen.

**Satz 3.96.** *Sei $K$ ein Körper. Dann gibt es einen separabel abgeschlossenen Erweiterungskörper $K^{\text{sep}}$ von $K$, so dass $K^{\text{sep}}/K$ algebraisch und separabel ist. Man nennt $K^{\text{sep}}$ einen* **separablen Abschluss** *von $K$. $K^{\text{sep}}$ ist bis auf (unkanonische) $K$-Isomorphie eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von $K$ und

$$K^{\text{sep}} = \{a \in \overline{K} \mid a \text{ separabel über } K\}.$$

$K^{\text{sep}}$ ist ein Körper (adjungiere alle separablen Elemente aus $\overline{K}$ zu $K$), algebraisch und separabel über $K$ und besitzt keine separable Erweiterung.
Eindeutigkeit: $K^{\text{sep}}$ ist ein Zerfällungskörper der Familie der separablen Polynome über $K$ und nach Korollar 3.63 eindeutig bis auf $K$-Isomorphie. □

**Bemerkung 3.97.** $K$ vollkommen (z.B. $\operatorname{char} K = 0$) $\Rightarrow K^{\text{sep}} = \overline{K}$.

## 3.7 Endliche Körper

**Lemma 3.98.** *Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper. Dann gilt $\operatorname{char}(\mathbb{F}) = p > 0$ für eine Primzahl $p$. Der Primkörper von $\mathbb{F}$ ist $\mathbb{F}_p$ und $\mathbb{F}$ enthält genau $q = p^n$ Elemente, wobei $n = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p]$. $\mathbb{F}$ ist Zerfällungskörper des Polynoms $X^q - X$ über $\mathbb{F}_p$. Die Erweiterung $\mathbb{F}/\mathbb{F}_p$ ist daher normal.*

*Beweis.* $\mathbb{F}$ endlich $\Rightarrow P(\mathbb{F})$ endlich $\Rightarrow P(\mathbb{F}) = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl $p$ (siehe Lemma 3.6). $\mathbb{F}$ endlich $\Rightarrow [\mathbb{F} : \mathbb{F}_p] =: n < \infty$. Es ist $\mathbb{F}$ ist $n$-dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum, also $\#\mathbb{F} = p^n =: q$. Folglich gilt $\#\mathbb{F}^\times = q - 1$, also $a^{q-1} = 1$ für alle $a \in \mathbb{F}^\times$, und $a^q - a = 0$ für alle $a \in \mathbb{F}$. Das Polynom $X^q - X$ hat also über $\mathbb{F}$ genau $q$ verschiedene Nullstellen, d.h. es zerfällt vollständig in Linearfaktoren. Also ist $\mathbb{F}$ ein Zerfällungskörper von $X^q - X$ über $\mathbb{F}_p$. □

**Satz 3.99.** *Sei $p$ eine Primzahl. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Erweiterungskörper $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ mit $q = p^n$ Elementen. $\mathbb{F}_q$ ist als Zerfällungskörper des Polynoms $X^q - X$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, $\mathbb{F}_q$ besteht genau aus den ($q$ vielen) Nullstellen von $X^q - X$.*

*Jeder endliche Körper der Charakteristik $p$ ist zu genau einem Körper des Typus $\mathbb{F}_q$ isomorph.*

*Beweis.* Sei $f = X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$. Wegen $f' = -1$ hat $f$ keine Mehrfachnullstellen, also genau $q$ Nullstellen in einem algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{F}}_p$ von $\mathbb{F}_p$. Sind dann $a, b \in \overline{\mathbb{F}}_p$ zwei Nullstellen von $f$, so gilt $(a \pm b)^q = a^q \pm b^q = a \pm b$, so dass $a \pm b$ wieder

Nullstelle von $f$ ist. Genauso gilt $(ab)^q = a^q b^q = ab$ und für $\mathfrak{b} \neq 0$ ist mit $b$ auch $b^{-1}$ Nullstelle von $f$. Daher bilden die $q$ vielen Nullstellen von $f$ einen Teilkörper in $\overline{\mathbb{F}}_p$, den in $\overline{\mathbb{F}}_p$ gebildeten Zerfällungskörper von $X^q - X$. Die Eindeutigkeitsaussagen folgen aus Lemma 3.98. □

**Warnung:** Es gilt zwar $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ aber für $n > 1$ gilt stets

$$\mathbb{F}_{p^n} \neq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}.$$

Links steht ein Körper und rechts ein nicht nullteilerfreier Ring!

Nun wählen wir einen algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{F}}_p$ von $\mathbb{F}_p$ und betten die Körper $\mathbb{F}_q$, $q = p^n$, $n \in \mathbb{N}$, in $\overline{\mathbb{F}}_p$ ein. Das Bild von $\mathbb{F}_q$ in $\overline{\mathbb{F}}_p$ ist unabhängig von der Wahl der Einbettung, weil nach Lemma 3.98 die $\mathbb{F}_q$ normal über $\mathbb{F}_p$ sind. So fassen wir die $\mathbb{F}_q$ als Teilkörper von $\overline{\mathbb{F}}_p$ auf.

**Korollar 3.100.** *Es ist $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q'}$ für $q = p^n$, $q' = p^{n'}$, äquivalent zu $n \mid n'$. Die Erweiterungen des Typs $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q'}$ sind bis auf Isomorphie die einzigen Erweiterungen zwischen endlichen Körpern der Charakteristik $p$.*

*Beweis.* Es gelte $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q'}$ und $m = [\mathbb{F}_{q'} : \mathbb{F}_q]$. Dann gilt $p^{n'} = \#\mathbb{F}_{q'} = (\#\mathbb{F}_q)^m = p^{nm}$, also gilt $n \mid n'$. Gilt umgekehrt $n' = n \cdot m$, so folgt für $a \in \overline{\mathbb{F}}_p$ aus $a^q = a$ stets $a^{q'} = a^{q^m} = a$, also $a \in \mathbb{F}_{q'}$, d.h. $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q'}$.
Ist nun $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$ eine Erweiterung endlicher Körper der Charakteristik $p$, so kann man die Inklusion $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}$ zuerst zu einer Inklusion $\mathbb{F} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ und diese dann wieder zu einer Inklusion $\mathbb{F}' \subset \overline{\mathbb{F}}_p$ fortsetzen und ist im betrachteten Fall. □

**Korollar 3.101.** *Jede algebraische Erweiterung eines endlichen Körpers ist separabel und normal. Insbesondere sind endliche Körper vollkommen.*

*Beweis.* Sei $K/\mathbb{F}$ algebraisch. Ist $K$ ebenfalls endlich, $K = \mathbb{F}_q$ mit $q = p^n$, so ist $K$ als Zerfällungskörper des separablen Polynoms $X^q - X$ normal und separabel. Im allgemeinen Fall schöpfen wir $K$ durch endliche Erweiterungen von $\mathbb{F}$ aus. □

**Erinnerung:** Für jede endliche Erweiterung $K/\mathbb{F}_p$ haben wir den Frobenius-Automorphismus

$$\sigma : K \longrightarrow K,\ a \longmapsto a^p.$$

Analog betrachten wir für jede endliche Erweiterung $K/\mathbb{F}_q$, $q = p^r$, den **relativen Frobenius-Automorphismus** über $\mathbb{F}_q$ : $\sigma^r : K \to K$, $a \mapsto a^q$.

**Satz 3.102.** *Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper, $q = p^r$, sowie $\mathbb{F}/\mathbb{F}_q$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad $n$. Dann ist $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F})$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n$ und wird vom relativen Frobeniusautomorphismus $\sigma^r : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $a \mapsto a^q$, erzeugt.*

*Beweis.* Da $\mathbb{F}/\mathbb{F}_q$ normal ist, gilt $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}, \overline{\mathbb{F}}_q)$ ($\overline{\mathbb{F}}_q$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_q$). Da $\mathbb{F}/\mathbb{F}_q$ separabel ist, gilt

$$\#\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}) = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_q]_s = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_q] = n.$$

Wegen $a^q = a$ für alle $a \in \mathbb{F}_q$ gilt $\sigma^r \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F})$. Es genügt daher zu zeigen, dass die Ordnung $\mathrm{ord}(\sigma^r)$ in $\mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F})$ gleich $n$ ist. Nach Korollar 1.48 gilt $\mathrm{ord}(\sigma^r) \mid n$. Wäre nun $\mathrm{ord}(\sigma^r) < n$, so wäre $\sigma^e = 1$ auf $\mathbb{F}$ für ein $e < rn$. Jedes Element von $\mathbb{F}$ wäre somit Nullstelle des Polynoms $X^{p^e} - X$, dieses hat aber nur $p^e < p^{rn} = \#\mathbb{F}$ viele Nullstellen. Widerspruch. □

Schließlich zeigen wir:

**Satz 3.103.** *Sei $q = p^n$. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{F}_q^\times$ von $\mathbb{F}_q$ ist zyklisch (von der Ordnung $q - 1$).*

**Bemerkung 3.104.** Dieser Satz geht (im Fall $n = 1$) schon auf Gauß zurück und lautet im zahlentheoretischen Gewand: Sei $p$ eine Primzahl. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n$ (eine „primitive Wurzel modulo $p$“), deren Potenzen alle Restklassen $\neq 0$ modulo $p$ durchlaufen.

Satz 3.103 folgt als Spezialfall aus dem folgenden

**Satz 3.105.** *Sei $K$ ein Körper und $H \subset K^\times$ eine endliche Untergruppe. Dann ist $H$ zyklisch.*

*Beweis.* Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen gilt

$$H \cong \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z},$$

mit $a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_r$ und $a_1 \cdots a_r = h := \#H$. Insbesondere gilt $x^{a_r} = 1$ für jedes der $h$ vielen Elemente $x \in H$. Da die Gleichung $X^{a_r} - 1 = 0$ in $K$ höchstens $a_r$ viele Nullstellen hat, folgt $h \leq a_r$ und wegen $h = a_1 \cdots a_r$ folgt $a_r = h$, $a_1 = \ldots = a_{r-1} = 1$, und $H$ ist zyklisch. □

## 3.8 Rein inseparable Erweiterungen

Sei in diesem Abschnitt $K$ stets ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$.

**Definition 3.106.** $f \in K[X]$ heißt **rein inseparabel**, wenn es genau eine Nullstelle in $\overline{K}$ hat.

**Lemma 3.107.** *Ein Polynom ist genau dann rein inseparabel, wenn es bis auf einen Faktor in $K^\times$ eine Potenz eines Polynoms der Form $X^{p^n} - c$, $n \in \mathbb{N}_0$, $c \in K$, ist.*

*Beweis.* Sei $f$ rein inseparabel. Ohne Einschränkung sei $f$ normiert. Sei $\alpha$ die Nullstelle von $f$ in einem algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von $K$ und $f_\alpha$ das Minimalpolynom von $\alpha$ über $K$. Dann gilt $f_\alpha \mid f$ und induktiv $f = (f_\alpha)^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Nach Satz 3.81 ist $f_\alpha(X) = g(X^{p^n})$ für ein separables, irreduzibles Polynom $g \in K[X]$ und die Nullstellen von $f_\alpha$ sind die $p^n$-ten Wurzeln aus den Nullstellen von $g$. Weil $f_\alpha$ genau eine Nullstelle hat, gilt dies nach Bemerkung 3.80 auch für $g$ und weil $g$ separabel ist folgt $g = X - c$ für ein $c \in K$. Umgekehrt hat das Polynom $(X^{p^n} - c)^m$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, $c \in K$, genau eine Nullstelle, nämlich die eindeutig bestimmte $p^n$-te Wurzel aus $c$ in $\overline{K}$. □

**Definition 3.108.** Sei $L/K$ eine algebraische Körpererweiterung. $\alpha \in L$ heißt **rein inseparabel** über $K$, wenn $\alpha$ Nullstelle eines rein inseparablen Polynoms über $K$ ist; äquivalent: wenn das Minimalpolynom von $\alpha$ die Form $X^{p^n} - c$, $n \in \mathbb{N}_0$, $c \in K$, hat. $L/K$ heißt rein inseparabel, wenn jedes $\alpha \in L$ rein inseparabel über $K$ ist.

**Lemma 3.109.** *Jede rein inseparable Erweiterung ist normal.*

*Beweis.* Sei $L = K((a_i)_{i\in I})$ und sei $f_i$ das Minimalpolynom von $a_i$ über $K$. Da die $a_i$ rein inseparabel sind, sind die $f_i$ von der Form $f_i = (X^{p^{n_i}} - c_i)$. In $L$ gilt daher $f_i = (X - a_i)^{p^{n_i}}$ und $f_i$ zerfällt daher vollständig in Linearfaktoren. Daher ist $L$ Zerfällungskörper der Familie $(f_i)_{i\in I}$. □

**Satz 3.110.** *Sei $L/K$ algebraisch. Es sind äquivalent:*

(i) *$L/K$ ist rein inseparabel.*
(ii) *$L = K((a_i)_{i\in I})$ mit $a_i$ rein inseparabel über $K$ für alle $i \in I$.*
(iii) $[L : K]_s = 1$.
(iv) *Zu jedem $a \in L$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $a^{p^n} \in K$.*

*Beweis.* (i) ⇒ (ii) ist trivial.
(ii) ⇒ (iii) Es sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von $L$. Z.z. $\#\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K}) = 1$. Da $\mathrm{id}_L$ in der Menge liegt, ist also für einen beliebigen $K$-Homomorphismus $\varphi : L \to \overline{K}$ zu zeigen, dass $\varphi = \mathrm{id}_L$ gilt. Wegen $L = K((a_i)_{i\in I})$ ist $\varphi$ schon durch seine Werte auf den $a_i$ festgelegt. Es ist $\varphi(a_i)$ eine Nullstelle des Minimalpolynoms von $a_i$ über $K$. Nach Voraussetzung hat dieses genau eine Nullstelle, woraus $\varphi(a_i) = a_i$ für alle $i \in I$ folgt. Daher gilt $\varphi = \mathrm{id}_L$.
(iii) ⇒ (iv) Sei $a \in L$ beliebig. Wegen $1 = [L : K]_s = [L : K(a)]_s \cdot [K(a) : K]_s$ gilt $[K(a) : K]_s = 1$. Also hat das Minimalpolynom von $a$ genau eine Nullstelle in $\overline{K}$, ist also von der Form $X^{p^n} - c$. Deshalb gilt $a^{p^n} = c \in K$.
(iv) ⇒ (i) Gilt $a^{p^n} = c \in K$, so folgt $f_a \mid (X^{p^n} - c)$. Also hat $f_a$ genau eine Nullstelle in $\overline{K}$ und $a$ ist rein inseparabel. □

**Bemerkung 3.111.** Wegen $[L : K] = p^?[L : K]_s$ hat eine endliche rein inseparable Erweiterung stets einen $p$-Potenzgrad.

**Korollar 3.112.** *Ist $L/K$ sowohl separabel, als auch rein inseparabel, so gilt $L = K$.*

*Beweis.* Ist $L/K$ sowohl separabel, als auch rein inseparabel, so gilt $[L : K] = [L : K]_s = 1$ nach Satz 3.110(iii). Es folgt $L = K$. □

**Korollar 3.113.** *Seien $M/L/K$ algebraische Körpererweiterungen. Dann ist $M/K$ genau dann rein inseparabel wenn $M/L$ und $L/K$ rein inseparabel sind.*

*Beweis.* Nach Satz 3.88 gilt $[M : K]_s = [M : L]_s \cdot [L : K]_s$. Wegen Satz 3.110(iii) folgt hieraus das Ergebnis. □

**Satz 3.114.** *Sei $L/K$ eine algebraische Körpererweiterung. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Zwischenkörper $K \subset K_s \subset L$, so dass $L/K_s$ rein inseparabel und $K_s/K$ separabel ist. Es ist $K_s/K$ die separable Hülle von $K$ in $L$, d.h.*

$$K_s = \{a \in L \mid a \text{ separabel über } K\},$$

*und es gilt $[L : K]_s = [K_s : K]$. Ist $L/K$ normal, so auch $K_s/K$.*

*Beweis.* Setze $K_s = \{a \in L \mid a \text{ separabel über } K\}$. Nach Korollar 3.92 ist für $a, b$ separabel die Erweiterung $K(a, b)/K$ separabel, also $K(a, b) \subset K_s$. Daher ist $K_s$ ein Körper und die maximale separable Teilerweiterung von $L/K$. Sei nun $a \in L$ und $f \in K_s[X]$ das Minimalpolynom von $a$ über $K_s$. Nach Satz 3.81 gilt $f(X) = g(X^{p^r})$ für ein separables irreduzibles Polynom $g \in K_s[X]$ und ein $r \geq 0$, und $g$ ist das Minimalpolynom von $c = a^{p^r}$. Das Element $c$ ist separabel über $K_s$, also separabel über $K$, also $c \in K_s$ und wir schließen nach Satz 3.110 dass $L/K_s$ rein inseparabel ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} [L : K]_s &= [L : K_s]_s \cdot [K_s : K]_s \\ &= 1 \cdot [K_s : K]. \end{aligned}$$

Sei nun $K_s'$ ein weiterer Zwischenkörper mit $L/K_s'$ rein inseparabel und $K_s'/K$ separabel. Weil jedes Element aus $K_s'$ separabel über $K$ ist, gilt $K_s' \subset K_s$. Zudem ist $K_s/K_s'$ als Teilerweiterung von $L/K_s'$ rein inseparabel. Da $K_s/K$ separabel ist, folgt dass auch $K_s/K_s'$ separabel ist. Wir schließen $K_s = K_s'$ nach Korollar 3.112.

Sei nun $L/K$ normal und $\sigma : K_s \to \overline{L}$ ein $K$-Homomorphismus. $\sigma$ setzt sich zu einem $K$-Homomorphismus $\sigma' : L \to \overline{L}$ fort und weil $L/K$ normal ist beschränkt sich $\sigma'$ zu einem Automorphismus $\sigma' : L \to L$. Dann ist $L = \sigma'(L)/\sigma'(K_s)$ rein inseparabel und $\sigma'(K_s)/\sigma'(K) = K$ separabel. Wegen der Eindeutigkeit von $K_s$ gilt $\sigma'(K_s) = K_s$. Daher ist $K_s/K$ normal. □

**Satz 3.115.** *Sei $L/K$ eine normale algebraische Erweiterung. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Zwischenkörper $K \subset K_i \subset L$ so dass $L/K_i$ separabel und $K_i/K$ rein inseparabel ist.*

*Beweis.* Weil $L/K$ normal ist, gilt $\mathrm{Hom}_K(L,\overline{L}) = \mathrm{Aut}_K(L)$. Setze

$$K_i = \{a \in L \mid \sigma(a) = a \text{ für alle } \sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)\}.$$

$K_i$ ist offensichtlich ein Körper. Sei $\sigma : K_i \to \overline{L}$ ein $K$-Homomorphismus. Dann setzt sich $\sigma$ zu $\sigma' : L \to \overline{L}$ fort und nach Definition von $K_i$ gilt $\sigma = \sigma'|_{K_i} = \mathrm{id}_{K_i}$. Es folgt $\#\mathrm{Hom}_K(K_i,\overline{L}) = 1$ und $[K_i : K]_s = 1$. Daher ist $K_i/K$ rein inseparabel. Ist $K \subset M \subset L$ ein Zwischenkörper mit $M/K$ rein inseparabel, so gilt $\#\mathrm{Hom}_K(M,\overline{L}) = 1$, also $\sigma|_M = \mathrm{id}_M$ für alle $\sigma : L \to L$. Definitionsgemäß folgt $M \subset K_i$ Daher ist $K_i$ die maximale rein inseparable Teilerweiterung von $L/K$ (insbesondere existiert eine solche). Es bleibt zu zeigen, dass $L/K_i$ separabel ist. Sei $a \in L$ beliebig. Für $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$ ist $\sigma(a)$ Nullstelle des Minimalpolynoms von $a$ über $K$, d.h. es existieren nur endlich viele Möglichkeiten. Wir wählen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \mathrm{Aut}_K(L)$ so, dass $\sigma_1(a), \ldots, \sigma_r(a)$ paarweise verschieden sind und $r$ maximal möglich ist. Wegen $\mathrm{id}_L \in \mathrm{Aut}_K(L)$ kommt $a$ unter den $\sigma_i(a)$ vor. Jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$ induziert eine bijektive Selbstabbildung auf der Menge $\{\sigma_1(a), \ldots, \sigma_r(a)\}$. Sei

$$f = \prod_{i=1}^{r}(X - \sigma_i(a)) = X^r + c_{r-1}X^{r-1} + \cdots + c_0.$$

Dann gilt $\sigma(c_i) = c_i$ für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$ und jedes $i$, $0 \le i \le r-1$. Nach Definition von $K_i$ gilt $f \in K_i[X]$. Zudem hat $f$ keine Doppelnullstellen, ist also separabel. Folglich ist $a$ separabel über $K_i$ und weil $a \in L$ beliebig war, ist $L/K_i$ separabel.

Sei nun $K \subset K_i' \subset L$ so, dass $L/K_i'$ separabel und $K_i'/K$ rein inseparabel ist. Zu zeigen: $K_i' = K_i$. Wir haben oben gesehen, dass $K_i$ die maximale rein inseparable Erweiterung von $K$ in $L$ ist. Daher gilt $K_i' \subset K_i$. Als Teilerweiterung von $L/K_i'$ ist $K_i/K_i'$ separabel. Als Teilerweiterung der rein inseparablen Erweiterung $K_i/K$ ist $K_i/K_i'$ auch rein inseparabel. Nach Korollar 3.112 folgt $K_i = K_i'$. □

## 3.9 Der Satz vom primitiven Element

**Satz 3.116.** *Sei $L/K$ eine endliche, separable Erweiterung. Dann existiert ein $a \in L$ mit $L = K(a)$.*

*Beweis.* 1. Fall. $K$ endlich. Dann ist auch $L$ endlich und nach Satz 3.102 ist $L^\times$ eine endliche zyklische Gruppe. Ist $a \in L^\times$ ein Erzeuger, so erzeugt $a$ auch $L$ über $K$.
2. Fall. $\#K = \infty$. Per Induktion können wir annehmen, dass $L$ über $K$ durch zwei Elemente erzeugt wird, d.h. $L = K(a,b)$. Sei $n = [L : K] = [L : K]_s$ und sei $\mathrm{Hom}_K(L,\overline{K}) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Wir betrachten das Polynom

$$P = \prod_{i \neq j}[(\sigma_i(a) - \sigma_j(a)) + (\sigma_i(b) - \sigma_j(b))X]$$

Für $i \neq j$ ist $\sigma_i(a) \neq \sigma_j(a)$ oder $\sigma_i(b) \neq \sigma_j(b)$, also ist keiner der Faktoren 0 und somit $P \neq 0 \in \overline{K}[X]$. Wegen $\#K = \infty$ gibt es ein $c \in K$ mit $P(c) \neq 0$. Dann gilt

$$\sigma_i(a) + c\sigma_i(b) \neq \sigma_j(a) + c\sigma_j(b)$$

für $i \neq j$. Beachte: wegen $c \in K$ gilt

$$\sigma_i(a) + c\sigma_i(b) = \sigma_i(a + cb) \in \overline{K}.$$

Sei $f$ das Minimalpolynom von $a + cb$ über $K$. Dann sind $\sigma_i(a + cb)$, $i = 1, \ldots, n$, paarweise verschiedene Nullstellen von $f$, woraus $\deg f \geq n$ folgt. Wir schließen

$$[K(a + cb) : K] \geq n = [L : K]$$

und folglich $L = K(a + bc)$. □

# 4 Galoistheorie

Idee: Wir betrachten eine algebraische Gleichung

$$f(X) = 0, \quad f \in K[X].$$

Wir wählen einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von $K$ und setzen

$$L = K(\text{alle Nullstellen von } f \text{ in } \overline{K}),$$

d.h. $L$ ist Zerfällungskörper von $f$ über $K$. Ein $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$ ist durch seine Werte auf den Nullstellen von $f$ gegeben. Wir studieren die Nullstellen mit Hilfe gruppentheoretischer Eigenschaften von $\mathrm{Aut}_K(L)$.

## 4.1 Galois-Erweiterungen

**Definition 4.1.** Eine algebraische Körpererweiterung $L/K$ heißt **galoissch** (oder **Galoiserweiterung**) wenn sie normal und separabel ist. Man bezeichnet dann $\mathrm{Gal}(L/K) := \mathrm{Aut}_K(L)$ als die **Galoisgruppe** der Erweiterung $L/K$.

**Beispiele 4.2.** • Ist $f \in K[X]$ ein separables Polynom und $L$ der Zerfällungskörper von $f$, so ist $L/K$ eine Galoiserweiterung.
• $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ ist galoissch und $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ ist zyklisch von der Ordnung 2. Das nichttriviale Element ist die komplexe Konjugation.
• Jede algebraische Erweiterung $\mathbb{F}/\mathbb{F}_q$ ist galoissch ($q = p^r$, $p$ Primzahl). Ist $\mathbb{F}/\mathbb{F}_q$ eine endliche Erweiterung, so ist $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{q'}$ mit $q' = q^n$, $n = [\mathbb{F} : \mathbb{F}_q]$, und $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_q)$ ist zyklisch von der Ordnung $n$. Ein Erzeuger ist der relative Frobeniusautomorphismus $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $a \mapsto a^q$ (siehe Abschnitt 3.7).

**Lemma 4.3.** *Sei $L/K$ eine Galoiserweiterung und $E$ ein Zwischenkörper.*

(i) *$L/E$ ist galoissch und $\mathrm{Gal}(L/E)$ ist in natürlicher Weise eine Untergruppe von $\mathrm{Gal}(L/K)$.*

(ii) *Ist auch $E/K$ galoissch, so beschränkt sich jeder $K$-Automorphismus von $L$ zu einem $K$-Automorphismus von $E$ und $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(E/K)$, $\sigma \mapsto \sigma|_E$, ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathrm{Gal}(L/E)$.*

*Beweis.* (i) Wir hatten schon gesehen, dass $L/E$ und $E/K$ separabel sind (Korollar 3.93) und $L/E$ normal (Korollar 3.70). Also ist $L/E$ galoissch. Nun gilt

$$\mathrm{Gal}(L/E) = \mathrm{Aut}_E(L) \subset \mathrm{Aut}_K(L) = \mathrm{Gal}(L/K).$$

(ii) Ist $E/K$ normal so gilt $\sigma(E) = E$ für jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$, also ist

$$\phi : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(E/K),\ \sigma \mapsto \sigma|_E,$$

wohldefiniert. Es gilt $\sigma|_E = \mathrm{id} \Leftrightarrow \sigma \in \mathrm{Aut}_E(L)$, also $\mathrm{Kern}(\phi) = \mathrm{Gal}(L/E)$. Sei nun $\tau \in \mathrm{Gal}(E/K)$ beliebig. $\tau$ setzt sich fort zu einem $K$-Homomorphismus $\sigma : L \to \overline{L}$, und wegen $L/K$ normal können wir $\sigma$ als Element in $\mathrm{Gal}(L/K)$ auffassen. Es gilt $\sigma|_E = \tau$. Daher ist $\phi$ ist surjektiv. □

Sei nun $L/K$ normal und endlich. Dann gilt $\#\mathrm{Aut}_K(L) = [L : K]_s$. Im Fall $\mathrm{char}(K) = 0$ ist $L/K$ automatisch separabel und damit galoissch vom Grad $[L : K]$. Im Fall $\mathrm{char}(K) > 0$ sei $K_i \subset L$ der Zwischenkörper aus Satz 3.115. Dann gilt für jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L)$: $\sigma_{|K_i} = \mathrm{id}_{K_i}$ und $\#\mathrm{Aut}_K(L) = [L : K]_s = [L : K_i] \leq [L : K]$. Wir erhalten

$$\#\mathrm{Aut}_K(L) = [L : K] \iff K = K_i \iff L/K \text{ galoissch.}$$

**Satz 4.4.** *Sei $L$ ein Körper und $G$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(L)$. Weiter setze man*

$$K = L^G = \{a \in L \mid \sigma(a) = a \text{ für alle } \sigma \in G\}.$$

(i) *Ist $G$ endlich, so ist $L/K$ eine endliche Galoiserweiterung vom Grad $[L : K] = \#G$ mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K) = G$.*

(ii) *Ist $G$ nicht endlich, $L/K$ aber algebraisch, so ist $L/K$ eine unendliche Galoiserweiterung und $\mathrm{Gal}(L/K)$ enthält $G$ als Untergruppe.*

**Definition 4.5.** Man nennt $K = L^G$ den **Fixkörper** von $L$ unter $G$.

*Beweis von Satz 4.4.* Zunächst ist $K = L^G$ ein Teilkörper von $L$. Sei nun $G$ endlich oder $L/K$ algebraisch und $a \in L$ beliebig. Wir wählen, wie im Beweis von Satz 3.115 $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in G$, so dass $\sigma_1(a), \ldots, \sigma_r(a)$ paarweise verschieden und $r$ maximal ist. Nun betrachten wir das Polynom

$$f_a = \prod_{i=1}^{r} (X - \sigma_i(a)),$$

welches Koeffizienten in $K = L^G$ hat (jedes Element $\sigma \in G$ definiert eine Permutation die Menge $\{\sigma_1(a), \ldots, \sigma_r(a)\}$, vertauscht daher nur die Faktoren und lässt $f_a$ fest). Es ist $a$ ist Nullstelle des separablen Polynoms $f_a$ und da $a \in L$ beliebig war, ist $L/K$ separabel. Nach Konstruktion liegen alle anderen Nullstellen von $f_a$ auch in $L$, also ist $L$ Zerfällungskörper der Familie aller Polynome $f_a$, $a \in L$. Daher ist $L/K$ normal und separabel, also galoissch.

Wir haben eine natürliche Inklusion $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}_K(L) = \mathrm{Gal}(L/K)$. Ist $G$ unendlich, so auch $\mathrm{Gal}(L/K)$, also hat $L/K$ unendlichen Grad. Sei $G$ endlich und $n = \#G$. Nach dem obigen Argument hat jedes $a \in L$ ein Minimalpolynom vom Grad $\leq n$. Ist $K \subset E \subset L$ mit $E/K$ endlich, so gilt nach dem Satz über das primitive Element, dass $E = K(a)$ für ein $a \in L$, also $[E : K] \leq n$. Also gilt auch $[L : K] \leq n$. Wir erhalten

$$n = \#G \leq \#\mathrm{Gal}(L/K) = [L : K] \leq n,$$

also sind alle Ungleichungen Gleichungen und die Inklusion $G \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$ ist ein Isomorphismus. □

**Korollar 4.6.** *Es sei $L/K$ normal algebraisch und $G = \mathrm{Aut}_K L$. Dann gilt:*

(i) *$L/L^G$ ist eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G$.*

(ii) *Ist $L/K$ separabel so gilt $K = L^G$.*

(iii) *Ist im Fall $\mathrm{char}\, K > 0$ die Erweiterung $L/K$ nicht separabel, so ist $L^G/K$ rein inseparabel und die Kette $K \subset L^G \subset L$ stimmt mit der Kette $K \subset K_i \subset L$ aus Satz 3.115 überein.*

*Beweis.* Als Zwischenerweiterung von $L/K$ ist $L/L^G$ algebraisch, also nach Satz 4.4 eine Galoiserweiterung. Wir haben die Inklusionen $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{L^G}(L) \subset \mathrm{Aut}_K(L) = G$, die weil links und rechts dieselbe Gruppe steht, Gleichheiten sind. Wir zeigen nun: $[L^G : K]_s = 1$. Sei $\sigma : L^G \to \overline{L}$ ein $K$-Homomorphismus. Dann setzt sich $\sigma$ zu einem $K$-Homomorphismus $\sigma' : L \to \overline{L}$ fort und $\sigma'$ beschränkt sich zu einem $K$-Automorphismus von $L$. Diese wirken trivial auf $L^G$ (nach Definition), also gilt $\#\mathrm{Hom}_K(L^G, \overline{L}) = 1$. Nach Satz 3.110 ist $L^G/K$ rein inseparabel, und $L/L^G$ ist als Galoiserweiterung insbesondere separabel. Nach der Eindeutigkeitsaussage von Satz 3.115 gilt $L^G = K_i$; und $L^G = K$ falls $L/K$ separabel. □

**Satz 4.7** (**Hauptsatz der Galoistheorie**). *Sei $L/K$ eine endliche Galoiserweiterung mit $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ als Galoisgruppe. Dann sind die Zuordnungen*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Untergruppen} \\ \textit{von } G \end{array} \right\} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Zwischenkörper} \\ \textit{von } L/K \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{rcl} H & \longmapsto & L^H \\ \mathrm{Gal}(L/E) & \longmapsfrom & E \end{array}$$

*bijektiv und zueinander invers.*

*Es ist $L^H$ genau dann normal, also galoissch über $K$, wenn $H$ ein Normalteiler in $G$ ist. Ist dies der Fall, so induziert die Einschränkungsabbildung $G \to \mathrm{Gal}(L^H/K)$, $\sigma \mapsto \sigma|_{L^H}$, einen Isomorphismus*

$$G/H \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(L^H/K).$$

**Bemerkung 4.8.** Ist $L/K$ unendlich, galoissch, so gilt noch $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$, d.h. wir erhalten eine Bijektion zwischen der Menge der Zwischenkörper und den Untergruppen in $G$, die im Bild von $\Psi$ liegen. Dies sind genau die abgeschlossenen Untergruppen von $G$ bzgl. der *Krull-Topologie*.

*Beweis von Satz 4.7.* Sei $L/K$ eine nicht notwendig endliche Galoiserweiterung und $E$ ein Zwischenkörper. Nach Lemma 4.3 ist $L/E$ galoissch und $\mathrm{Gal}(L/E) \subset G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Nach Korollar 4.6 gilt $E = L^{\mathrm{Gal}(L/E)}$, also gilt $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$.

Sei umgekehrt $H \subset G$ eine Untergruppe. Ist $G$ endlich, so auch $H$ und nach Satz 4.4(i) ist $L/L^H$ eine Galoiserweiterung mit Gruppe $H$, also $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$, wenn $G$ endlich. Wir erhalten die behauptete Bijektion. Sei nun $H \subset G$ eine Untergruppe und $\sigma \in G$. Mit $\sigma H \sigma^{-1} = \{\sigma h \sigma^{-1} \mid h \in H\}$ bezeichnet man die konjugierte Untergruppe. Nach Definition von Normalteiler gilt

$$H \lhd G \iff \sigma H \sigma^{-1} = H \quad \text{für alle } \sigma \in G.$$

Andererseits gilt: $E := L^H$ ist normal über $K \iff \sigma(E) = E$ für alle $\sigma \in G$.

Behauptung. $\sigma(E) = L^{\sigma H \sigma^{-1}}$.
Grund:

$$\begin{aligned} \sigma(E) &= \{\sigma x \mid x \in E\} \\ &= \{y \mid \sigma^{-1} y \in E = L^H\} \\ &= \{y \mid \tau \sigma^{-1} y = \sigma^{-1} y \ \forall \tau \in H\} \\ &= \{y \mid \sigma \tau \sigma^{-1} y = y \ \forall \tau \in H\} = L^{\sigma H \sigma^{-1}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten $L^H/K$ normal $\iff \sigma(L^H) = L^H \ \forall \sigma \iff L^H = L^{\sigma H \sigma^{-1}} \ \forall \sigma$

$\overset{\text{1. Teil}}{\iff} H = \sigma H \sigma^{-1} \quad \forall \sigma \iff H \lhd G.$

Ist nun $L^H/K$ normal, so erhalten wir aus Lemma 4.3

$$\mathrm{Gal}(L^H/K) \cong \mathrm{Gal}(L/K)/\mathrm{Gal}(L/L^H).$$

Zudem gilt $\mathrm{Gal}(L/K) = G$, $\mathrm{Gal}(L/L^H) = H$. □

**Korollar 4.9.** *Jede endliche separable Erweiterung hat nur endlich viele Teilerweiterungen.*

*Beweis.* Die normale Hülle einer separablen Erweiterung ist separabel (man kann z.B. die normale Hülle im separablen Abschluss betrachten). Sei $L/K$ endlich, separabel. Durch Übergang zur normalen Hülle können wir annehmen, dass $L/K$ endlich und galoissch ist. Dann korrespondieren die Zwischenerweiterungen bijektiv zu den endlich vielen Untergruppen der endlichen Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$. □

**Bemerkung 4.10.** Eine endliche inseparable Erweiterung kann unendlich viele Zwischenkörper haben.

**Beispiel 4.11.** Wir betrachten die Erweiterung $L = \mathbb{F}_p(X,Y)/K = \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$. Es ist $L/K$ eine rein inseparable Erweiterung vom Grad $p^2$. Es gilt $f^p \in \mathbb{F}_p(X^p, Y^p)$ für alle $f \in \mathbb{F}_p(X,Y)$. Daher ist das Minimalpolynom jedes $f \in L$ über $K$ vom Grad $\leq p$; also kann $L/K$ keine einfache Erweiterung sein. Für beliebiges $c \in K$ ist daher $K(X+cY) \subset L$ eine echte Zwischenerweiterung (vom Grad $p$).
*Behauptung:* für $c \neq d$ gilt auch $K(X+cY) \neq K(X+dY)$ (insbesondere existieren unendlich viele Zwischenkörper).
*Grund:* Wäre $X + dY \in K(X+cY)$, so auch $(d-c)Y = (X+dY) - (X+cY)$. Wir schließen $Y \in K(X+cY)$ und somit auch $X = (X+cY) - cY \in K(X+cY)$. Es folgt $L = K(X+cY)$, was aber einen Widerspruch zu $[L:K] = p^2$ darstellt.

**Definition 4.12.** Seien $E, E' \subset L$ Teilkörper. Das **Kompositum** $EE'$ von $E$ und $E'$ in $L$ ist der kleinste Teilkörper von $L$ der $E$ und $E'$ enthält.

**Bemerkung 4.13.** Existenz: $EE' = E'(E) = E(E')$.

**Korollar 4.14.** *Es sei $L/K$ eine endliche Galoiserweiterung. Zu Zwischenkörpern $E, E'$ von $L/K$ betrachten wir $H = \mathrm{Gal}(L/E)$ und $H' = \mathrm{Gal}(L/E')$ als Untergruppen von $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Dann gilt:*

(i) $E \subset E' \iff H \supset H'$.
(ii) $EE' = L^{H \cap H'}$.
(iii) $E \cap E' = L^{H''}$, *wobei* $H'' = \langle H, H' \rangle \subset G$.

*Beweis.* (i) Gilt $E \subset E'$ so ist jeder $E'$-Automorphismus von $L$ auch ein $E$-Automorphismus von $L$, also $H = \mathrm{Gal}(L/E') \supset \mathrm{Gal}(L/E') = H'$. Umgekehrt folgt aus $H \supset H'$, dass $E = L^H \subset L^{H'} = E'$.
(ii) Es gilt trivialerweise $EE' \subset L^{H \cap H'}$ und $\mathrm{Gal}(L/EE') \subset H \cap H'$. Aus der zweiten Aussage folgt mit (i), dass $EE' \supset L^{H \cap H'}$.
(iii) Es gilt $L^{H''} = L^H \cap L^{H'} = E \cap E'$. □

**Definition 4.15.** Eine endliche Galoiserweiterung $L/K$ heißt **abelsch** (bzw. **zyklisch**) wenn $\mathrm{Gal}(L/K)$ abelsch (bzw. zyklisch) ist.

**Korollar 4.16.** *Ist $L/K$ eine endliche abelsche (bzw. zyklische) Galoiserweiterung, so sind für jeden Zwischenkörper $E$ von $L/K$ auch $L/E$ und $E/K$ abelsch (bzw. zyklisch).*

*Beweis.* $\mathrm{Gal}(L/E) \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ und jede Untergruppe einer abelschen (bzw. zyklischen) Gruppe ist abelsch (bzw. zyklisch). Auch ist in jedem Fall $\mathrm{Gal}(L/E)$ Normalteiler in $\mathrm{Gal}(L/K)$ und deshalb $E/K$ galoissch. Außerdem ist $\mathrm{Gal}(E/K)$ als Faktorgruppe von $\mathrm{Gal}(L/K)$ wieder abelsch (bzw. zyklisch). □

**Satz 4.17.** *Sei $L/K$ eine endliche Körpererweiterung mit Zwischenkörpern $E, E'$ so dass $E/K$ und $E'/K$ galoissch sind. Dann gilt:*

(i) *$EE'$ ist endlich und galoissch über $K$ und der Homomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{Gal}(EE'/E) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(E'/E \cap E') \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_{E'} \end{array}$$

*ist ein Isomorphismus.*

(ii) *Der Homomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathrm{Gal}(EE'/K) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(E/K) \times \mathrm{Gal}(E'/K) \\ \sigma & \longmapsto & (\sigma|_E, \sigma|_{E'}) \end{array}$$

*ist injektiv. Gilt $E \cap E' = K$, so ist $\psi$ auch surjektiv, also ein Isomorphismus.*

*Beweis.* (i) Es ist $EE'/K$ normal, separabel und endlich.
Für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(EE'/E)$, gilt $\sigma|_E = \mathrm{id}$. Ist zudem $\sigma \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, so folgt auch $\sigma|_{E'} = \mathrm{id}$, also $\sigma = \mathrm{id}_{EE'}$. Somit ist $\varphi$ injektiv. Nun gilt

$$\begin{array}{rcl} (E')^{\mathrm{Bild}(\varphi)} & = & (EE')^{\mathrm{Gal}(EE'/E)} \cap E' \\ & = & E \cap E'. \end{array}$$

Nach Satz 4.4 folgt $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Gal}(E'/E \cap E')$.
(ii) Die Injektivität von $\psi$ ist klar. Sei nun $E \cap E' = K$ und $(\sigma, \sigma') \in \mathrm{Gal}(E/K) \times \mathrm{Gal}(E'/K)$. Nach (i) lässt sich $\sigma$ zu einem $\overline{\sigma} \in \mathrm{Gal}(EE'/E')$ fortsetzen und $\sigma'$ zu einem $\overline{\sigma}' \in \mathrm{Gal}(EE'/E)$ (sogar eindeutig). Nun gilt $\overline{\sigma}' \circ \overline{\sigma} \in \mathrm{Gal}(EE'/K)$ und

$$\begin{array}{rcl} (\overline{\sigma}' \circ \overline{\sigma})|_E & = & \sigma \\ (\overline{\sigma}' \circ \overline{\sigma})|_{E'} & = & \sigma'. \end{array}$$

Also haben wir ein Urbild gefunden. □

**Lemma 4.18.** *Sei $L/K$ endlich, galoissch, $L = K(\alpha)$ und $H \subset \mathrm{Gal}(L/K)$ eine Untergruppe. Wir betrachten das Polynom*

$$f = \prod_{\sigma \in H} (X - \sigma(\alpha)) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i, \quad r = \#H.$$

*Dann gilt $L^H = K(a_0, \ldots, a_r)$.*

*Beweis.* Es gilt $f^\sigma = f$ für alle $\sigma \in H$, also $M := K(a_0, \ldots, a_r) \subset L^H$. Nun gilt $L = M(\alpha)$ und $f(\alpha) = 0$. Daraus folgt $[L : M] \leq \deg f = r$. Andererseits gilt $[L : L^H] = \#H = r$, also $M = L^H$. □

## 4.2 Die Galoisgruppe einer Gleichung

Sei $f \in K[X]$ separabel, nicht-konstant und $L/K$ der Zerfällungskörper von $f$. Dann ist $L/K$ endlich, galoissch und man nennt $\mathrm{Gal}(L/K)$ die **Galoisgruppe von $f$ über $K$**, oder auch die Galoisgruppe der Gleichung $f(X) = 0$.

**Satz 4.19.** *Sei $f \in K[X]$ separabel vom Grad $n > 0$ mit Zerfällungskörper $L/K$. Sind dann $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ die (paarweise verschiedenen) Nullstellen von $f$, so definiert*

$$\varphi : \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathfrak{S}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = \mathfrak{S}_n$$
$$\sigma \longmapsto \sigma_{|}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

*einen injektiven Gruppenhomomorphismus der Galoisgruppe von $L/K$ in die Gruppe der Permutationen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ bzw. in die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ der Permutationen von $n$ Elementen. Insbesondere ist $[L : K] = \#\mathrm{Gal}(L/K)$ ein Teiler von $\#\mathfrak{S}_n = n!$ . Das Polynom $f$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\mathrm{Gal}(L/K)$ transitiv auf der Menge der Nullstellen $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ operiert, d.h. wenn es zu beliebigen $1 \leq i, j \leq n$ ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$ gibt. Insbesondere ist dies der Fall für $[L : K] = n!$ bzw. $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathfrak{S}_n$.*

*Beweis.* Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Weil $\sigma$ die Koeffizienten von $f$ fest lässt, bildet es die Nullstellen auf Nullstellen ab. Da $\sigma$ injektiv und $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ endlich ist, induziert $\sigma$ eine Bijektion dieser Menge auf sich. Da $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ gilt, ist $\sigma$ durch seine Werte auf den $\alpha_i$ bestimmt, also ist $\phi$ injektiv. Ist nun $f$ irreduzibel, so existiert nach Lemma 3.40 für beliebige $i, j$ ein $K$-Homomorphismus $\sigma : K(\alpha_i) \to L$ mit $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$. Dieser setzt sich zu einem $K$-Automorphismus von $L$, d.h. zu einem Element in $\mathrm{Gal}(L/K)$ fort. Also wirkt $\mathrm{Gal}(L/K)$ transitiv. Ist nun $f$ reduzibel, d.h. $f = g \cdot h$, so überführt $\mathrm{Gal}(L/K)$ die Nullstellen von $g$ in Nullstellen von $g$ und Nullstellen von $h$ in Nullstellen von $h$. Da $f$ separabel ist, hat es keine Mehrfach-Nullstellen, d.h. die Menge der Nullstellen von $g$ und die Menge der Nullstellen von $h$ sind disjunkt. Also kann eine Nullstelle von $g$ nicht in eine Nullstelle von $h$ überführt werden und umgekehrt. Daher kann $\mathrm{Gal}(L/K)$ nicht transitiv wirken. □

**Korollar 4.20.** *Sei $L/K$ eine endliche Galoiserweiterung vom Grad $n$. Dann gibt es eine endliche Menge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset L$ die durch $\mathrm{Gal}(L/K)$ in sich überführt wird und $\mathrm{Gal}(L/K)$ kann als Untergruppe von $\mathfrak{S}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ aufgefasst werden.*

*Beweis.* Da $L/K$ separabel ist, existiert ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ und $L$ ist Zerfällungskörper des Minimalpolynoms $f$ von $\alpha$ über $K$. Man wähle als $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ die Menge der Nullstellen von $f$. □

**Grad 2:**
Wir betrachten $f = X^2 + aX + b \in K[X]$ und nehmen an, dass $f$ keine Nullstellen in $K$ hat. Dann ist $f$ irreduzibel. Falls $\mathrm{char}\, K \neq 2$ oder $a \neq 0$, so gilt $f' = 2X + a \neq 0$ und $f$ ist nach 3.76(ii) separabel. Nehmen wir $\mathrm{char}\, K \neq 2$ an. Adjungiert man eine Nullstelle $\alpha$ von $f$ so zerfällt $f$ über $L = K(\alpha)$ in Linearfaktoren. Daher ist $L/K$ normal, also galoissch und $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist zyklisch von der Ordnung 2. Substituiert man die Variable $X$ durch $X - \frac{a}{2}$, so erhält man ein Polynom der Form $X^2 - c$ mit gleichem Zerfällungskörper $L$. Ist $\gamma$ eine Quadratwurzel von $c$ in $L$, so ist das nicht-triviale Element $\mathrm{id} \neq \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ durch $\sigma(\gamma) = -\gamma$ gegeben.

**Grad 3:**
Es sei $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$ und $f = X^3 + aX + b$. (Jedes andere normierte Polynom $X^3 + c_2X^2 + c_1X + c_0$ lässt sich mit der Substitution $X \mapsto X - \frac{c_2}{3}$ auf diese Form bringen.) Wir nehmen an, dass $f$ keine Nullstellen hat. Dann ist $f$ irreduzibel. Es gilt $f' = 3X^2 + a \neq 0$, also ist $f$ separabel nach Lemma 3.76(ii).
Sei $L/K$ ein Zerfällungskörper von $f$ und $\alpha \in L$ eine Nullstelle von $f$. Es gilt $K \subset K(\alpha) \subset L$ und $[K(\alpha) : K] = 3$, $[L : K] \mid 3! = 6$.
Also bleiben die Möglichkeiten:

$$\#[L : K] = \begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases} \quad \text{also } \mathrm{Gal}(L/K) = \begin{cases} \text{zyklisch Ordnung 3} \\ \cong \mathfrak{S}_3. \end{cases}$$

In $\mathfrak{S}_3$ gibt es:
1 Element der Ordnung 1, die Identität,
3 Elemente der Ordnung 2: (12), (23), (31),
2 Elemente der Ordnung 3: (123), (132).

Die Elemente der Ordnung $\neq 2$ sind genau die mit sgn = +1, also gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung 3 in $\mathfrak{S}_3$, nämlich $\mathfrak{A}_3 = \{\sigma \in \mathfrak{S}_3 \mid \mathrm{sgn}\, \sigma = 1\}$.
Daher gilt

$$\mathrm{Gal}(L/K) = \begin{cases} \mathfrak{A}_3 \\ \mathfrak{S}_3 \end{cases}.$$

Wann tritt welcher Fall auf?
Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Nullstellen von $f$ in $L$. Setze

$$\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1).$$

Man nennt $\Delta = \delta^2$ die **Diskriminante** des Polynoms $f$. Beachte: $\Delta \neq 0$. Es gilt

$$\sigma(\delta) = \begin{cases} \delta & \text{wenn} \quad \operatorname{sgn}(\sigma) = 1 \\ -\delta & \text{wenn} \quad \operatorname{sgn}(\sigma) = -1 \end{cases}$$

und deshalb $\sigma(\Delta) = \Delta$ für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Daher gilt $\Delta \in K$ und

$$\delta \in K \Longleftrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathfrak{A}_3.$$

Also:

$$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \begin{cases} \mathfrak{A}_3 & \Delta \text{ hat Quadratwurzel in } K, \\ \mathfrak{S}_3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnung von $\Delta$ in den Koeffizienten von $f$:
Es gilt $\Delta = -4a^3 - 27b^2$.
Das kann man unter Beachtung von $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ direkt ausrechnen.

**Beispiele 4.21.** 1.) $f = X^3 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel.
Grund: Wenn reduzibel über $\mathbb{Q}$, so auch über $\mathbb{Z}$:

$$(X^3 - X + 1) = (X + a)(X^2 + bX + c)$$

$\Rightarrow ac = 1 \Rightarrow a \in \{\pm 1\}$ aber $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$, also ist $f$ irreduzibel. Es gilt $\Delta = -4(-1)^3 - 27 \cdot 1^2 = -23$ (kein Quadrat in $\mathbb{Q}$).
Also: Die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von $f$ ist $\mathfrak{S}_3$.

2.) Wir betrachten $f = X^3 + X^2 - 2X - 1$.
$f(1) = -1$, $f(-1) = 1$ also irreduzibel nach gleichem Argument.
Substitution:

$$(X - \frac{1}{3})^3 + (X - \frac{1}{3})^2 - 2(X - \frac{1}{3}) - 1 = X^3 - \frac{7}{3}X - \frac{7}{27}.$$

Wir erhalten $\Delta = 4\left(\frac{7}{3}\right)^3 - 27\left(-\frac{7}{27}\right)^2 = \frac{1372-49}{27} = \frac{1323}{27} = 49$. Da 49 eine Quadratzahl ist, hat der Zerfällungskörper die Galoisgruppe $\mathfrak{A}_3$.

Wie kommt man auf dieses Beispiel? Sei $\zeta_7 = e^{2\pi i/7}$. Das Minimalpolynom von $\zeta_7$ über $\mathbb{Q}$ ist

$$\frac{X^7 - 1}{X - 1} = X^6 + X^5 + \cdots + 1$$

(das Polynom ist nach Beispiele 2.46 irreduzibel). Die Nullstellen sind $\zeta_7^i$, $i = 1, \ldots, 6$. Also hat $\xi := \zeta_7 + \zeta_7^{-1}$ die Galoiskonjugierten $\zeta_7^2 + \zeta_7^{-2}$ und $\zeta_7^3 + \zeta_7^{-3}$.
Nun berechnet man das Minimalpolynom von $\xi$ und erhält $f$.

**Grad 4 (in Spezialfällen)**

**Beispiele 4.22.** 1.) Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel von der Form $X^4 + cX^2 + d$. Durch Substitution bringen wir $f$ auf die Form

$$f = (X^2 - a)^2 - b.$$

Wir setzen voraus: $b > a^2$ (z.B. $X^4 - 2$, $X^4 - 4X^2 - 6$). Die Nullstellen von $f$ in $\mathbb{C}$ sind

$$\alpha = \sqrt{a + \sqrt{b}},\ -\alpha,\ \beta = \sqrt{a - \sqrt{b}},\ -\beta.$$

Nach Voraussetzung ist $a + \sqrt{b} > 0$, d.h. $\alpha$ ist eine reelle Quadratwurzel, die wir ohne Einschränkung positiv wählen können. Wieder nach Voraussetzung ist $a - \sqrt{b} < 0$, d.h. $\beta$ ist eine rein imaginäre Quadratwurzel aus $a - \sqrt{b}$ (z.B. $i\sqrt{|a - \sqrt{b}|}$) und $-\beta$ ist die andere.

Es ist $L = \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $f$. Wir haben $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg f = 4$.
Außerdem gilt $\beta^2 = a - \sqrt{b} = 2a - (a + \sqrt{b}) = 2a - \alpha^2 \in K(\alpha)$. Also gilt $[K(\alpha, \beta) : K(\alpha)] \leq 2$.
Nun ist aber $\alpha \in \mathbb{R}$, also $\mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{R}$ und $\beta \notin \mathbb{R}$, also $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$, folglich gilt

$$[L : \mathbb{Q}(\alpha)] = 2 \text{ und } [L : \mathbb{Q}] = 8.$$

$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist eine Untergruppe in $\mathfrak{S}_4 = \mathfrak{S}(\{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\})$ und es gilt $\#\mathfrak{S}_4 = 4! = 24$. Für jedes $\sigma \in G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \subset \mathfrak{S}_4$ gilt $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$ und $\sigma(-\beta) = -\sigma(\beta)$.

Es gibt genau 8 Elemente in $S(\{\alpha, -\alpha, \beta, -\beta\})$, die diese Bedingung erfüllen: Für $\sigma(\alpha)$ gibt es 4 Möglichkeiten. Dann für $\sigma(-\alpha)$ genau eine. Für $\sigma(\beta)$ verbleiben 2 Möglichkeiten und $\sigma(-\beta)$ ist dann festgelegt. Da $[L : \mathbb{Q}]$ den Grad 8 hat, sind dies genau die Elemente in $G := \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Betrachte $\sigma, \tau \in G \subset \mathfrak{S}_4$ die durch

$$\begin{aligned} \sigma &: \alpha \mapsto \beta, \quad \beta \mapsto -\alpha \\ \tau &: \alpha \mapsto -\alpha, \quad \beta \mapsto \beta \end{aligned}$$

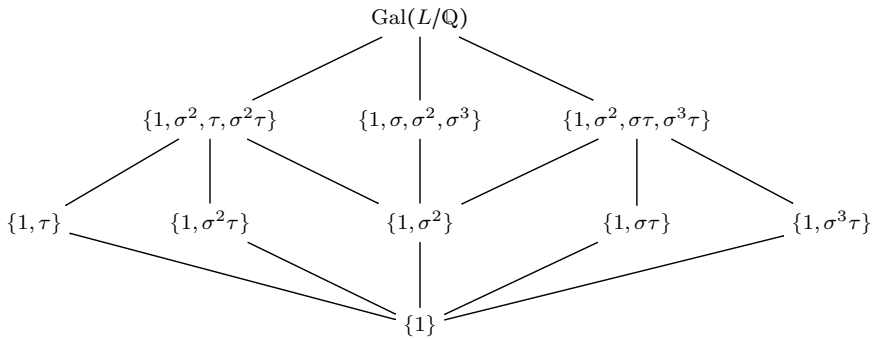
gegeben sind. Die Untergruppe $\langle\sigma\rangle \subset G$ ist zyklisch von der Ordnung 4, also vom Index 2 in $G$ (also Normalteiler). $\tau$ hat die Ordnung 2. Wegen $\tau \notin \langle\sigma\rangle$ gilt (Nebenklassenzerlegung)

$$G = \langle\sigma, \tau\rangle = \langle\sigma\rangle \sqcup \tau\langle\sigma\rangle = \langle\sigma\rangle \sqcup \langle\sigma\rangle\tau$$

explizit: $G = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau\}$.
Man rechnet nach: $\tau\sigma = \sigma^3\tau$. So erhält man die Gruppenstruktur, z.B.

$$\begin{aligned} \sigma^3(\sigma^2\tau) &= \sigma^5\tau = \sigma^4\sigma\tau = \sigma\tau \\ (\sigma^2\tau)(\sigma^3) &= \sigma^2\tau\sigma\sigma\sigma \\ &= \sigma^2\sigma^3\tau\sigma\sigma \\ &= \sigma^2\sigma^3\sigma^3\tau\sigma \\ &= \sigma^2\sigma^3\sigma^3\sigma^3\tau \\ &= \sigma^{11}\tau = \sigma^3\tau. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $G$ nicht kommutativ. Mittels Probieren findet man dann alle Untergruppen und bekommt folgendes Bild.




Identifiziert man mit Reihenfolge $\{\alpha, \beta, -\alpha, \beta\}$ mit $\{1,2,3,4\}$ so ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \subset \mathfrak{S}_4$ die von $\sigma = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{smallmatrix}\right)$ und $\tau = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{smallmatrix}\right)$ erzeugte Untergruppe. Diese nennt man $D_4$ (Diedergruppe).

2.)

$$\begin{aligned} f &= X^4 - 4X^2 + 16 \in \mathbb{Q}[X] \\ &= (X^2-2)^2 + 12. \end{aligned}$$

Suchen Nullstellen:

$$\begin{aligned} (X^2-2)^2 &= -12 \Rightarrow X^2 - 2 = 2\sqrt{-3} \\ \Rightarrow X^2 &= 4\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right) = 4e^{2\pi i/6}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $x = 2\zeta$, $\zeta = e^{2\pi i/12}$, eine Nullstelle ist.
Durch Einsetzen sieht man, dass die anderen Nullstellen $2\zeta^5$, $2\zeta^7$ und $2\zeta^{11}$ sind.
Irreduzibilität des Polynoms: Nach Satz 2.42 genügt es zu zeigen, dass $f$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist. Zunächst hat $f$ keine Nullstellen in $\mathbb{Z}$ (weil nicht in $\mathbb{R}$). Sei

$$\begin{aligned} f &= (X^2 + aX + b)(X^2 + cX + d), a, b, c, d \in \mathbb{Z} \\ &= X^4 + (a+c)X^3 + (b + d + ac)X^2 + (ad + bc)X + bd \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow c = -a$ und $a(d-b) = 0$.
$a = 0$ führt auf $b + d = -4$, $bd = 16$; hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$.
$a \neq 0$ führt auf $d = b \Rightarrow b^2 = 16$ und $2b - a^2 = -4 \rightsquigarrow a^2 = 2b + 4 = -4$ oder 12, Widerspruch.
Also ist $f$ irreduzibel und hat die Nullstellen $2\zeta$, $2\zeta^5$, $2\zeta^7$, $2\zeta^{11}$. Es folgt $L = \mathbb{Q}(2\zeta) = \mathbb{Q}(\zeta)$. Dieser Körper hat Grad 4 über $\mathbb{Q}$ und ist der Zerfällungskörper von $f$. Jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist schon durch $\sigma(\zeta)$ bestimmt. Also gilt

$$\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$$

mit $\sigma_1 : \zeta \mapsto \zeta$, $\sigma_2 : \zeta \to \zeta^5$, $\sigma_3 : \zeta \to \zeta^7$, $\sigma_4 : \zeta \to \zeta^{11}$.

Es gilt $(\zeta^a)^b = (\zeta^{a+b}) = (\zeta^b)^a$, also gilt $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i$ für $i, j \in \{1,2,3,4\}$ Daher ist $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ kommutativ. Außerdem gilt $\sigma_1 = \mathrm{id}$, $\sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \mathrm{id}$ und $\sigma_4 = \sigma_2 \circ \sigma_3$. Daher ist die Abbildung

$$G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$\sigma_1 \mapsto (0,0),\ \sigma_2 \mapsto (1,0),\ \sigma_3 \mapsto (0,1),\ \sigma_4 \mapsto (1,1),$$

ein Gruppenisomorphismus. Der Körper $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ heißt der **12. Kreisteilungskörper**.

## 4.3 Die allgemeine Gleichung über einem Körper

Seien $T_1, \ldots, T_n$ Variablen und

$$L = k(T_1, \ldots, T_n) = Q(k[T_1, \ldots, T_n]).$$

Jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ induziert einen Automorphismus von $L$, indem man $\pi$ auf die Indizes der Variablen anwendet:

$$\frac{g(T_1, \ldots, T_n)}{h(T_1, \ldots, T_n)} \longmapsto \frac{g(T_{\pi(1)}, \ldots, T_{\pi(n)})}{h(T_{\pi(1)}, \ldots, T_{\pi(n)})}.$$

Dies gibt uns eine natürliche Inklusion

$$\mathfrak{S}_n \subset \mathrm{Aut}(L).$$

**Definition 4.23.** Der Fixkörper $K = L^{\mathfrak{S}_n}$ heißt der Körper der **symmetrischen rationalen Funktionen** mit Koeffizienten in $k$.

Nach Satz 4.4 ist $L/K$ eine Galoiserweiterung und $\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathfrak{S}_n$, insbesondere gilt $[L : K] = n!$ .
Wir suchen eine Gleichung für $L/K$, d.h. ein Polynom in $K[X]$ mit $L$ als Zerfällungskörper. Ansatz:

$$\begin{aligned} f(X) &= \prod_{i=1}^{n} (X - T_i) \\ &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j s_j(T_1, \ldots, T_n) X^{n-j} \in k[T_1, \ldots, T_n][X]. \end{aligned}$$

**Definition 4.24.** Das Polynom $s_j, j = 0, \ldots, n$, heißt das ***j*-te elementarsymmetrische Polynom** (auch **elementarsymmetrische Funktion**) in $T_1, \ldots, T_n$. Explizit:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= T_1 + \cdots + T_n \\ s_2 &= T_1T_2 + T_1T_3 + \cdots + T_{n-1}T_n \\ &\vdots \\ s_n &= T_1 \cdots T_n \end{aligned}$$

Beachte: $s_j \in K$, $j = 1, \ldots, n$, also $k(s_1, \ldots, s_n) \subset K$ und $f \in k(s_1, \ldots, s_n)[X] \subset K[X]$. $L$ ist Zerfällungskörper von $f$ über $k(s_1, \ldots, s_n)$, also auch über $K$. Es gilt $\deg f = n$, $[L : K] = n!$, also ist $f$ irreduzibel über $K$.

**Satz 4.25.** *Jede symmetrische rationale Funktion lässt sich auf genau eine Weise als rationale Funktion in den elementarsymmetrischen Funktionen darstellen, d.h.*

(i) $k(s_1, \ldots s_n) = K$,

(ii) $s_1, \ldots, s_n$ *sind algebraisch unabhängig über* $k$.

*Beweis.* (i) $L$ ist Zerfällungskörper von $f$ über $k(s_1, \ldots, s_n)$, daher gilt $[L : k(s_1, \ldots, s_n)] \leq n!$ . Aber es gilt $[L : K] = n!$ und daher $[K : k(s_1, \ldots, s_n)] = 1$.
(ii) Wir betrachten den Polynomring $k[S_1, \ldots, S_n]$ wobei $S_1, \ldots, S_n$ Variablen sind. Um zu zeigen, dass $s_1, \ldots, s_n$ algebraisch unabhängig über $k$ sind, ist nach Definition zu zeigen, dass der durch die universelle Eigenschaft des Polynomrings gegebene Ringhomomorphismus

$$k[S_1, \ldots, S_n] \to K, \ S_i \mapsto s_i$$

injektiv ist. Wir betrachten den Zerfällungskörper $\tilde{L}$ über $k(S_1, \ldots, S_n)$ des Polynoms

$$\tilde{f} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j S_j X^{n-j} \in k(S_1, \ldots, S_n)[X],$$

wobei formal $S_0 = 1$ gesetzt sei. Seien $t_1, \ldots, t_n$ die Nullstellen von $\tilde{f}$ in $\tilde{L}$ (evtl. mit Vielfachheiten). Dann gilt (die $S_j$ sind Polynome in den $t_j$)

$$\tilde{L} = k(S_1, \ldots, S_n)(t_1, \ldots, t_n) = k(t_1, \ldots, t_n).$$

Bild:

$$\begin{array}{ccc} L = k(T_1, \ldots, T_n) & & \tilde{L} = k(t_1, \ldots, t_n) \\ \Big| & & \Big| \\ k(s_1, \ldots, s_n) & & k(S_1, \ldots, S_n) \\ \Big| & & \Big| \\ k & = & k. \end{array}$$

Nun betrachten wir den durch die Universaleigenschaft des Polynomrings gegebenen Homomorphismus

$$k[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow k[t_1, \ldots, t_n], \quad T_i \longrightarrow t_i.$$

Dieser bildet die elementarsymmetrischen Funktionen in den $T_i$ auf die elementarsymmetrischen Funktionen in den $t_i$ ab, also geht $s_j$ auf $S_j$ für $j = 1, \ldots, n$, d.h. wir erhalten einen surjektiven Homomorphismus

$$k[s_1, \ldots, s_n] \longrightarrow k[S_1, \ldots, S_n], \quad s_i \longmapsto S_i.$$

Nun geht ein $x = h(s_1, \ldots, s_n) \in k[s_1, \ldots, s_n]$ genau dann auf 0 in $k[S_1, \ldots, S_n]$ wenn $h = 0$, also wenn $x = 0$. Der Homomorphismus ist daher ein Isomorphismus. Insbesondere existiert der inverse Homomorphismus und ist wieder bijektiv. Die Komposition dieses inversen Homomorphismus mit der Einbettung $k[s_1, \ldots, s_n] \hookrightarrow k(s_1, \ldots, s_n) = K$ ist somit injektiv. Dieser ist aber gerade der Homomorphismus, der nach Universaleigenschaft durch $S_i \mapsto s_i$, $i = 1, \ldots, n$ gegeben ist. Daher sind $s_1, \ldots, s_n$ algebraisch unabhängig über $k$. □

**Bemerkung 4.26.** Wir erhalten einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} k(T_1, \ldots, T_n) & \xrightarrow{\sim} & k(t_1, \ldots, t_n) \\ \Big| & & \Big| \\ k(s_1, \ldots, s_n) & \xrightarrow{\sim} & k(S_1, \ldots, S_n) \end{array}$$

von Galoiserweiterungen mit Galoisgruppe $\mathfrak{S}_n$.

**Definition 4.27.** Seien $S_1, \ldots, S_n$ Variablen und $k$ ein Körper. Das Polynom

$$p(X) = X^n + S_1 X^{n-1} + \cdots + S_n \in k(S_1, \ldots, S_n)[X]$$

heißt das **allgemeine Polynom $n$-ten Grades über $k$**. Die Gleichung $p(X) = 0$ heißt die **allgemeine Gleichung $n$-ten Grades über $k$**.

**Satz 4.28.** *Das allgemeine Polynom $n$-ten Grades $p(X) \in k(S_1, \ldots, S_n)$ ist separabel und irreduzibel. Es besitzt die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ als Galoisgruppe.*

*Beweis.* Wir betrachten $L = k(T_1, \ldots T_n)$ und $K = L^{\mathfrak{S}_n} = k(s_1, \ldots, s_n)$. Nach Satz 4.25 sind $s_1, \ldots, s_n$ algebraisch unabhängig über $k$, also definiert die Regel $S_j \mapsto (-1)^j s_j$ einen Körperisomorphismus

$$k(S_1, \ldots, S_n) \xrightarrow{\sim} k(s_1, \ldots, s_n),$$

wobei $S_1, \ldots, S_n$ Variablen sind. Bezüglich dieser Identifizierung wird $p$ zu dem Polynom $\tilde{f}$ aus dem Beweis von Satz 4.25 und $\tilde{f}$ ist separabel, irreduzibel mit $\mathfrak{S}_n$ als Galoisgruppe des Zerfällungskörpers. □

## 4.4 Symmetrische Polynome

Sei $A$ ein Ring (kommutativ mit 1). Die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ wirkt auf dem Ring $A[T_1, \ldots, T_n]$ durch

$$\pi(f(T_1, \ldots, T_n)) = f(T_{\pi(1)}, \ldots, T_{\pi(n)}).$$

**Definition 4.29.** Ein Polynom $f \in A[T_1, \ldots, T_n]$ heißt **symmetrisch** wenn $\pi(f) = f$ für alle $\pi \in \mathfrak{S}_n$ gilt.

**Beispiel 4.30.** Die elementarsymmetrischen Polynome

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \\ s_1 &= T_1 + \cdots + T_n \\ s_2 &= T_1T_2 + T_1T_3 + \cdots + T_{n-1}T_n \\ &\vdots \\ s_n &= T_1 \cdots T_n \end{aligned}$$

sind symmetrisch.

**Bemerkung 4.31.** Die Anzahl der Variablen müsste eigentlich mit in die Notation. Setzt man für $i = 0, \ldots, n$

$$(s_i)_0(T_1, \ldots, T_{n-1}) = s_i(T_1, \ldots, T_{n-1}, 0),$$

so ist $(s_n)_0 = 0$ und für $i = 0, \ldots, n-1$ ist $(s_i)_0$ das $i$-te elementarsymmetrische Polynom in $n-1$ Variablen.

**Satz 4.32.** *Jedes symmetrische Polynom $f \in A[T_1, \ldots, T_n]$ lässt sich als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen schreiben, d.h. es existiert ein $g \in A[T_1, \ldots, T_n]$ mit*

$$f(T_1, \ldots, T_n) = g(s_1, \ldots, s_n).$$

**Beispiel 4.33.**

$$\begin{aligned} T_1^2 + T_2^2 &= (T_1 + T_2)^2 - 2T_1T_2 \\ &= s_1^2 - 2s_2. \end{aligned}$$

**Bemerkungen 4.34.** 1) Man kann zeigen, dass $g$ eindeutig bestimmt ist. Ist $A$ nullteilerfrei, so folgt dies aus Satz 4.25. Es gilt nämlich

$$f(T_1, \ldots, T_n) = g(s_1, \ldots, s_n)$$

in $Q(A)(T_1, \ldots, T_n)$ und deshalb ist $g$ eindeutig in $Q(A)(T_1, \ldots, T_n)$. Aber die natürliche Abbildung $A[T_1, \ldots, T_n] \to Q(A)(T_1, \ldots, T_n)$ ist injektiv.

2) Das eindeutig bestimmte Polynom $N_r \in \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ mit

$$N_r(s_1, \ldots, s_n) = T_1^r + \cdots + T_n^r$$

heißt ***r*-tes Newton-Polynom**. Beispiel: $N_2(s_1, s_2) = s_1^2 - 2s_2$. Für $r \leq n$ ist $N_r$ unabhängig von der Anzahl der Variablen $n$.

*Beweis von Satz 4.32.* Für $n = 1$ gilt $s_1 = T_1$ und die Aussage ist trivial. Wir wollen den allgemeinen Fall per Induktion nach $n$ behandeln. Damit die Induktion durchläuft, verschärfen wir die Aussage leicht. Dafür definieren für $f \in A[T_1, \ldots, T_n]$ wir den **Grad** $\deg f$ und das **Gewicht** $\gamma(f)$ wie folgt:

Wir setzen für ein Monom $M = aT_1^{i_1} \dots T_n^{i_n}$ mit $a \neq 0$, $\deg M = i_1 + \dots + i_n$ und $\gamma(M) = i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n$. Für $f = \sum M_i$ setzen wir

$$\deg(f) := \max \deg(M_i), \gamma(f) := \max \gamma(M_i).$$

Wir beweisen nun die verschärfte Aussage: *Für jedes symmetrische Polynom* $f \in A[T_1, \dots, T_n]$ *vom Grad* $d$ *existiert ein* $g \in A[T_1, \dots, T_n]$ *vom Gewicht* $\leq d$ *mit* $f(T_1, \dots, T_n) = g(s_1, \dots, s_n)$.
Die Aussage ist trivial für $n = 1$. Sei nun $n > 1$ und der Satz für symmetrische Polynome in weniger als $n$ Variablen schon bewiesen.
Sei $f \in A[T_1, \dots, T_n]$ symmetrisch vom Grad $d$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$f(T_1, \dots, T_{n-1}, 0) = \phi((s_1)_0, \dots, (s_{n-1})_0)$$

für ein $\phi \in A[T_1, \dots, T_{n-1}]$ mit $\gamma(\phi) \leq d$
(Beachte: $\deg f(T_1, \dots, T_{n-1}, 0) \leq \deg f(T_1, \dots, T_{n-1}, T_n) = d$).
Setze

$$h(T_1, \dots, T_n) = f(T_1, \dots, T_n) - \phi(s_1, \dots, s_{n-1}).$$

Dann ist $h$ symmetrisch. Im Fall $h = 0$ sind wir fertig. Sei $h \neq 0$. Wegen $\deg s_i = i$ ist der Grad von $\phi(s_1, \dots, s_{n-1})$ als Polynom in den $T_i$'s höchstens $\gamma(\phi) \leq d$. Daher gilt $\deg h \leq d$. Nach Konstruktion gilt $h(T_1, \dots, T_{n-1}, 0) = 0$. Daher taucht $T_n$ in jedem Monom von $h$ auf, und wegen der Symmetrie auch $T_1, \dots, T_{n-1}$. Folglich gilt

$$h = s_n \cdot f_1$$

mit $f_1$ symmetrisch und $\deg f_1 = \deg(h) - n \leq d - n$. Wir erhalten

$$f = \phi(s_1, \dots, s_{n-1}) + s_n \cdot f_1.$$

Jetzt machen wir mit $f_1$ weiter und erhalten mit der gleichen Methode

$$f_1 = \phi_1(s_1, \dots, s_{n-1}) + s_n f_2$$

mit $\gamma(\phi_1) \leq d - n$ und $\deg f_2 \leq d - 2n$. Einsetzen ergibt

$$f = \phi(s_1, \dots, s_{n-1}) + s_n \phi_1(s_1, \dots, s_{n-1}) + s_n f_2.$$

Wir beachten, dass $\gamma(X_n \phi_1(X_1, \dots, X_{n-1})) = \gamma(\phi_1) + n \leq d$ gilt. Nun machen wir mit $f_2$ weiter. Der Grad wird jedes mal kleiner, daher bricht der Prozess ab. □

## 4.5 Einheitswurzelkörper

**Lemma 4.35.** *Für* $n \in \mathbb{N}$ *ist das Polynom* $X^n - 1 \in K[X]$ *genau dann separabel, wenn* $\mathrm{char}(K) \nmid n$.

*Beweis.* $f' = nX^{n-1}$ ist 0 wenn $\mathrm{char}(K) \mid n$ und wenn $\mathrm{char}(K) \nmid n$ gilt $1 = \frac{1}{n} f' \cdot X - f$, also $(f, f') = 1$. □

**Definition 4.36.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{char}(K) \nmid n$. Ein $\zeta \in \overline{K}$ heißt ***n*-te Einheitswurzel**, wenn $\zeta^n = 1$ gilt.

Die Menge $\mu_n \subset \overline{K}^\times$ der $n$-ten Einheitswurzeln ist offenbar eine Untergruppe.

**Satz 4.37.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, char $K \nmid n$. Die Gruppe $\mu_n$ der $n$-ten Einheitswurzeln in $\overline{K}$ ist zyklisch von der Ordnung $n$.*

*Beweis.* Nach Lemma 4.35 ist $X^n - 1$ separabel, also $\#\mu_n = n$. Nach Satz 3.105 ist $\mu_n$ zyklisch. □

**Definition 4.38.** $\zeta \in \mu_n$ heißt **primitive *n*-te Einheitswurzel**, wenn es ein Erzeuger der Gruppe $\mu_n$ ist.

**Beispiel 4.39.** $K = \mathbb{C}$: $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$ ist eine primitive $n$-te Einheitswurzel.

Die **Eulersche $\varphi$-Funktion** ist auf natürlichen Zahlen definiert durch

$$\varphi(n) = \#\{r \mid 1 \le r \le n \text{ und } (n, r) = 1\} = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

Nun ist $r \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann eine Einheit, wenn $1 + n\mathbb{Z}$ und damit jedes Element von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein Vielfaches von $r$ ist. Daher ist $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ gleich der Menge der Erzeuger der Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Da jede zyklische Gruppe der Ordnung $n$ zu $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ isomorph ist, gilt

$\varphi(n) =$ Anzahl der Erzeuger einer (jeder) zyklischen Gruppe der Ordnung $n$.

**Lemma 4.40.** *Es gibt genau $\varphi(n)$ primitive $n$-te Einheitswurzeln in $\overline{K}$.*

*Beweis.* Nach Satz 4.37 ist $\mu_n$ zyklisch von der Ordnung $n$. □

**Bemerkung 4.41.** Wie berechnet man $\varphi(n)$?

1) Für $(n, m) = 1$ gilt (Chinesischer Restsatz) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$. Also $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^\times$, d.h. $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

Damit ist das Problem auf den Fall $n = p^r$, $p$ Primzahl reduziert.

2) $a \in (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \iff (a, p^r) = 1 \iff (a, p) = 1$. D.h. genau die $p^{r-1}$ Klassen $p, 2p, \ldots, p^{r-1}p$ sind nicht prim. Daher gilt $\varphi(p^r) = p^r - p^{r-1} = (p-1)p^{r-1}$.

**Lemma 4.42.** *Sei $\mathrm{char}(K) \nmid n$ und $\zeta \in \mu_n$ eine primitive $n$-te Einheitswurzel. Dann ist $K(\mu_n) = K(\zeta)/K$ eine endliche Galoiserweiterung.*

*Beweis.* $K(\zeta)/K$ ist separabel, weil das Minimalpolynom von $\zeta$ ein Teiler von $X^n - 1$ ist. $K(\mu_n)/K$ ist normal, weil Zerfällungskörper des Polynoms $X^n - 1$. Schließlich gilt $K(\mu_n) = K(\zeta)$ weil $\zeta$ primitiv. □

Wir kommen jetzt zum Fall $K = \mathbb{Q}$.

**Definition 4.43.** Der Körper $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subset \mathbb{C}$ heißt der ***n*-te Kreisteilungskörper**. Das Polynom

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{\zeta \text{ primitive } n\text{-te} \\ \text{Einheitswurzel in } \mathbb{C}}} (X - \zeta)$$

heißt das ***n*-te Kreisteilungspolynom**.

**Beispiel 4.44.** $\Phi_1 = X - 1$, $\Phi_2 = X + 1$, $\Phi_3 = X^2 + X + 1$, $\Phi_4(X) = X^2 + 1$, $\Phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$.

**Bemerkung 4.45.** Für $p$ Primzahl ist jede $p$-te Einheitswurzel $\neq 1$ primitiv. Also gilt

$$\Phi_p(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + \cdots + 1.$$

In Beispiele 2.46 haben wir bereits gezeigt, dass $\Phi_p(X)$ irreduzibel ist.

**Lemma 4.46.** *Es gilt* $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ *und* $\deg \Phi_n = \varphi(n)$.

*Beweis.* Die Aussage über den Grad folgt aus Lemma 4.40. Wir zeigen auf zwei Weisen, dass die Koeffizienten von $\Phi_n$ in $\mathbb{Z}$ liegen.

*Variante 1.* Jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ permutiert die primitiven Einheitswurzeln. Daher gilt $\Phi_n^\sigma = \Phi_n$ für alle $\sigma$ und daher $\Phi_n \in \mathbb{Q}[X]$.
Die Koeffizienten von $\Phi_n$ sind ganzzahlige Polynome in Einheitswurzeln, also ganz über $\mathbb{Z}$ und in $\mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Z}$ faktoriell, also ganzabgeschlossen ist, folgt $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

*Variante 2 (klassisch).* Jede $n$-te Einheitswurzel ist primitive $d$-te Einheitswurzel für genau einen Teiler $d$ von $n$. Daher gilt

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X).$$

(nebenbei folgt hieraus durch Übergang zu den Graden die klassische Formel $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$).
Nun argumentieren wir per Induktion über $n$. Der Fall $n = 1$ ist trivial. Sei $n > 1$. Dann gilt

$$X^n - 1 = \Phi_n(X) \cdot \underbrace{\Big(\prod_{\substack{d|n \\ d<n}} \Phi_d(X)\Big)}_{\in \mathbb{Z}[X]}$$

Da $\mathbb{Z}$ faktoriell ist, folgt nach Korollar 2.38, dass $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$. □

**Satz 4.47.** $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ *ist irreduzibel. Es gilt* $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass $\Phi_n$ irreduzibel ist, weil dann $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \deg \Phi_n = \varphi(n)$ folgt. Sei $\Phi_n = fg$, $f, g \in \mathbb{Z}[X]$, normiert, $f$ irreduzibel.

*Behauptung:* Gilt $f(\zeta) = 0$, so auch $f(\zeta^p) = 0$ für jede Primzahl $p \nmid n$.
*Beweis der Behauptung:* Wegen $(p, n) = 1$ ist $\zeta^p$ primitiv, also $\Phi_n(\zeta^p) = 0$. Angenommen $f(\zeta^p) \neq 0$. Dann gilt $g(\zeta^p) = 0$, d.h. $\zeta$ ist Nullstelle von $g(X^p)$. Da $f$ das Minimalpolynom von $\zeta$ ist, folgt $f \mid g(X^p)$, also $g(X^p) = h \cdot f$ mit $h \in \mathbb{Z}[X]$ normiert. Für die Bilder in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ gilt nun

$$\overline{h} \cdot \overline{f} = \overline{g}(X^p) = \overline{g}(X)^p.$$

Also sind $\overline{f}$ und $\overline{g}$ nicht teilerfremd in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X] \rightsquigarrow \overline{\Phi}_n = \overline{f} \cdot \overline{g}$ ist nicht separabel in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Aber $\overline{\Phi}_n$ teilt das nach Lemma 4.35 separable Polynom $X^n - 1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

Nun sei $\zeta$ eine Nullstelle von $f$. Ist $\zeta'$ irgendeine andere primitive $n$-te Einheitswurzel, so gilt $\zeta' = \zeta^k$ mit $(k, n) = 1$, also $k = p_1 \dots p_r$, $p_i \nmid n$. $\overset{\text{induktiv}}{\Longrightarrow} f(\zeta') = 0$. Daher sind alle primitiven $n$-ten Einheitswurzeln Nullstellen von $f$, woraus $g = 1$ folgt. □

Wir kommen jetzt wieder zu einem allgemeinen Körper $K$, $\mathrm{char}(K) \nmid n$.

**Satz 4.48.** *Sei $\zeta_n \in \overline{K}$ eine primitive $n$-te Einheitswurzel.*

*(i) Es ist $K(\zeta_n)/K$ eine endliche, abelsche Galoiserweiterung vom Grad $\leq \varphi(n)$.*
*(ii) Es existiert ein injektiver Gruppenhomomorphismus*

$$\chi : \mathrm{Gal}(K(\zeta_n)/K) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times,$$

*so dass für jede $n$-te Einheitswurzel $\zeta \in K(\zeta_n)$ und jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\zeta_n)/K)$ gilt:*

$$\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}.$$

*Für $K = \mathbb{Q}$ ist $\chi$ ein Isomorphismus.*

**Bemerkung 4.49.** 1. Wegen $\zeta^n = 1$ hängt $\zeta^a$ nur von $a \bmod n$ ab, daher ist $\zeta^{\chi(\sigma)}$ wohldefiniert.
2. $\chi$ heißt der **zyklotomische Charakter**.

*Beweis.* Wir wissen schon, dass $K(\zeta_n)/K$ endlich, galoissch ist. Aussage (i) folgt aus (ii) wegen $\#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \varphi(n)$ und weil Untergruppen abelscher Gruppen abelsch sind.
Zu (ii). Da $\zeta_n$ primitiv ist, gilt $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^a$ für ein eindeutig bestimmtes $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Außerdem ist $\sigma(\zeta_n)$ wieder primitiv, also $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Setze $\chi(\sigma) = a$. Wir müssen nachweisen:

1) $\chi$ ist Gruppenhomomorphismus.

2) $\chi$ ist injektiv.
3) $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}$ für jede $n$-te Einheitswurzel $\zeta$.

Zu 1) Es gilt $\sigma\tau(\zeta_n) = \sigma(\zeta_n^{\chi(\tau)}) = (\sigma(\zeta_n))^{\chi(\tau)} = (\zeta_n^{\chi(\sigma)})^{\chi(\tau)} = \zeta_n^{\chi(\sigma)\chi(\tau)}$.
Also $\chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma)\chi(\tau)$.

Zu 2) $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\zeta_n)/K)$ ist durch $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{\chi(\sigma)}$ eindeutig bestimmt. Daher folgt aus $\chi(\sigma) = 1 = \chi(\mathrm{id})$ dass $\sigma = \mathrm{id}$.

Zu 3) Ist $\zeta$ irgendeine $n$-te Einheitswurzel, so gilt $\zeta = \zeta_n^a$, $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Also $\sigma(\zeta) = \sigma(\zeta_n^a) = \sigma(\zeta_n)^a = (\zeta_n^{\chi(\sigma)})^a = (\zeta_n^a)^{\chi(\sigma)} = \zeta^{\chi(\sigma)}$.

Schließlich gilt nach Satz 4.47: $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$, also ist für $K = \mathbb{Q}$ der injektive Homomorphismus $\chi$ ein Isomorphismus. □

**Satz 4.50.** *Sei $q$ eine Primpotenz und sei $(q, n) = 1$. Sei $\zeta_n \in \bar{\mathbb{F}}_q$ eine primitive $n$-te Einheitswurzel.*

(i) *Der zyklotomische Charakter $\chi : \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q(\zeta_n)/\mathbb{F}_q) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ bildet den relativen Frobeniusautomorphismus von $\mathbb{F}_q(\zeta_n)/\mathbb{F}_q$ auf die Restklasse $\overline{q}$ von $q$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ ab. Insbesondere definiert $\chi$ einen Isomorphismus zwischen $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q(\zeta_n)/\mathbb{F}_q)$ und der durch $\overline{q}$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ erzeugten Untergruppe.*

(ii) *Der Grad $[\mathbb{F}_q(\zeta_n) : \mathbb{F}_q]$ ist gleich der Ordnung von $\overline{q}$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ (d.h. die kleinste natürliche Zahl $N$ mit $q^N \equiv 1 \bmod n$.*

(iii) *$\Phi_n$ ist genau dann irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X]$, wenn $\overline{q}$ die Gruppe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ erzeugt.*

**Bemerkung 4.51.** Damit (iii) gelten kann, ist es notwendig, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ zyklisch ist. Dies ist z.B. richtig für $n =$ Primzahl.

*Beweis.* Nach Satz 3.102 ist $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q(\zeta_n)/\mathbb{F}_q)$ zyklisch und erzeugt vom relativen Frobenius $\sigma(x) = x^q$. Insbesondere gilt $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^q$ also $\chi(\sigma) = \overline{q} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Somit folgt (i) und (ii) folgt wegen $[\mathbb{F}_q(\zeta_n) : \mathbb{F}_q] = \#\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q(\zeta_n)/\mathbb{F}_q) = \#\langle\overline{q}\rangle = \mathrm{ord}_{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}(\overline{q})$.
(iii) $\Phi_n$ irreduzibel in $\mathbb{F}_q[X] \iff [\mathbb{F}_q(\zeta_n) : \mathbb{F}_q] = \varphi(n) \iff \mathrm{ord}_{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}(\overline{q}) = \varphi(n) \iff \overline{q}$ erzeugt $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. □

## 4.6 Lineare Unabhängigkeit von Charakteren

**Definition 4.52.** Sei $G$ eine Gruppe und $K$ ein Körper. Ein Homomorphismus $\chi : G \to K^\times$ heißt $K$-wertiger **Charakter** von $G$.

Die Menge der Abbildungen $\mathrm{Abb}(G, K)$ wird zum $K$-Vektorraum durch wertweise Addition und Skalarmultiplikation, d.h.

$$(a_1\phi_1 + a_2\phi_2)(g) := a_1\phi_1(g) + a_2\phi_2(g),$$
$$\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Abb}(G, K),\ a_1, a_2 \in K,\ g \in G.$$

**Satz 4.53.** *Verschiedene Charaktere $\chi_1, \dots, \chi_n$ einer Gruppe $G$ mit Werten in einem Körper $K$ sind linear unabhängig als Elemente im $K$-Vektorraum* $\mathrm{Abb}(G, K)$.

*Beweis.* Angenommen der Satz wäre falsch. Dann gibt ein minimales $n \in \mathbb{N}$, so dass $n$ linear abhängige Charaktere $\chi_1, \dots, \chi_n$ existieren. Da ein Charakter $\neq 0$ ist, gilt $n \geq 2$. Sei nun

$$a_1\chi_1 + \cdots + a_n\chi_n = 0,\ a_i \in K,$$

eine nichttriviale Relation in $\mathrm{Abb}(G, K)$. Wegen $n$ minimal, gilt $a_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Wir wählen $g \in G$ mit $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$ und betrachten für variierendes $h$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= a_1\chi_1(gh) + \cdots + a_n\chi_n(gh) \\ &= a_1\chi_1(g)\chi_1(h) + \cdots + a_n\chi_n(g)\chi_n(h). \end{aligned}$$

Also ist auch

$$a_1\chi_1(g)\chi_1 + \cdots + a_n\chi_n(g)\chi_n = 0$$

eine Relation. Abzug von $0 = \chi_1(g)(a_1\chi_1 + \cdots + a_n\chi_n)$ ergibt

$$a_2(\chi_1(g) - \chi_2(g))\chi_2 + \cdots + a_n(\chi_1(g) - \chi_n(g))\chi_n = 0.$$

Dies ist eine neue nicht-triviale Relation mit (höchstens) $n-1$ Charakteren im Widerspruch zur Minimalität von $n$. □

Es sei nun $K$ ein Körper und $L/K$ und $M/K$ Körpererweiterungen. Die Menge $\mathrm{Hom}_K(L, M)$ (Körperhomorphismen) ist eine Teilmenge des $K$-Vektorraums $\mathrm{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M)$ ($K$-Vektorraumhomomorphismen). Die $K$-Vektorraumstruktur setzt sich zu einer $M$-Vektorraumstruktur fort durch

$$(\alpha\phi)(x) = \alpha\phi(x), \quad \alpha \in M,\ x \in L,\ \phi \in \mathrm{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M).$$

Auf diese Weise wird $\mathrm{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M)$ ein $M$-Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(L, M)$. Da ein Homomorphismus die Null auf die Null schickt, wird $\mathrm{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M)$ auch zu einem $M$-Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(L^\times, M)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K(L, M) & \xrightarrow{|_{L^\times}} & \\ \downarrow & & \\ \mathrm{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M) & & \mathrm{Hom}(L^\times, M^\times) \\ \downarrow & \xrightarrow{|_{L^\times}} & \downarrow \\ \mathrm{Abb}(L, M) & \xrightarrow{|_{L^\times}} & \mathrm{Abb}(L^\times, M). \end{array}$$

**Satz 4.54.** *Es seien $L/K$ und $M/K$ Körpererweiterungen. Dann ist* $\mathrm{Hom}_K(L, M)$ *eine linear unabhängige Menge von Vektoren im $M$-Vektorraum* $\mathrm{Abb}(L, M)$.

*Beweis.* Es seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathrm{Hom}_K(L, M)$ linear abhängig in $\mathrm{Abb}(L, M)$. Dann sind sie auch linear abhängig im $M$-Untervektorraum $\mathrm{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M)$ und daher auch in $\mathrm{Abb}(L^\times, M)$. Als Elemente im letzteren sind sie durch $\sigma_i|_{L^\times} : L^\times \to M^\times$, $i = 1, \ldots, n$, gegeben. Dies sind $M$-wertige Charaktere der Gruppe $L^\times$, also linear unabhängig nach Satz 4.53. Widerspruch. □

## 4.7 Norm und Spur

**Definition 4.55.** Sei $L/K$ eine endliche Körpererweiterung. Für $a \in L$ betrachtet man

$$\varphi_a : L \longrightarrow L, \quad x \longmapsto ax,$$

als $K$-Vektorraum-Endomorphismus und nennt

$$\mathrm{Sp}_{L/K}(a) := \mathrm{Sp}(\varphi_a), \quad N_{L/K}(a) := \det \varphi_a.$$

die **Spur** bzw. die **Norm** von $a$ bzgl. $L/K$.

**Bemerkung 4.56.** Für $a, b \in L$ gilt $\varphi_{a+b} = \varphi_a + \varphi_b$, also

$$\mathrm{Sp}_{L/K}(a + b) = \mathrm{Sp}_{L/K}(a) + \mathrm{Sp}_{L/K}(b).$$

Mit anderen Worten: $\mathrm{Sp}_{L/K} : L^+ \to K^+$ ist ein Homomorphismus. Zudem gilt für $a \in K$, $b \in L$: $\varphi_{ab} = a\varphi_b$, also $\mathrm{Sp}_{L/K}(ab) = a\mathrm{Sp}_{L/K}(b)$. D.h.:

$$\mathrm{Sp}_{L/K} : L \longrightarrow K, \quad b \mapsto \mathrm{Sp}_{L/K}(b)$$

ist ein $K$-Vektorraumhomomorphismus.

Analog: $\varphi_{ab} = \varphi_a \circ \varphi_b$, also gilt

$$N_{L/K}(ab) = N_{L/K}(a)N_{L/K}(b).$$

Für $a \neq 0$ ist $\varphi_a$ ein Automorphismus und daher $N_{L/K}(a) = \det \varphi_a \neq 0$. Durch Einschränkung erhalten wir daher einen Homomorphismus $N_{L/K} : L^\times \to K^\times$.

**Beispiel 4.57.** $\mathbb{C}/\mathbb{R}$: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(z) = z + \bar{z}$, $N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(z) = z\bar{z} = |z|^2$.
Grund: Betrachte die Basis $(1, i)$ von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ wird $\varphi_z$ durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ dargestellt. Wir erhalten: $\mathrm{Sp}(z) = 2a = (a + bi) + (a - bi)$ und $N(z) = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$.

**Lemma 4.58.** *Sei $n = [L : K]$. Dann gilt für $a \in K$*

$$\mathrm{Sp}_{L/K}(a) = na, \; N_{L/K}(a) = a^n.$$

*Beweis.* $\varphi_a = a \cdot \mathrm{id}_L$. □

**Lemma 4.59.** *Sei $L = K(a)$ und $f = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0$ das Minimalpolynom von $a$ über $K$. Dann gilt*

$$\mathrm{Sp}_{L/K}(a) = -c_{n-1},\ N_{L/K}(a) = (-1)^n c_0.$$

*Beweis.* Es gilt $n = [L : K]$ und $f = \chi^{\min}(\varphi_a) \overset{\text{Gradgründe}}{=} \chi^{\text{char}}(\varphi_a)$. An $\chi^{\text{char}}(\varphi_a)$ liest man $\mathrm{Sp}(\varphi_a)$ und $\det(\varphi_a)$ in gewohnter Weise ab. □

**Lemma 4.60.** *Sei $L/K$ endlich, $a \in L$ und $s = [L : K(a)]$. Dann gilt*

$$\mathrm{Sp}_{L/K}(a) = s \cdot \mathrm{Sp}_{K(a)/K}(a),\ N_{L/K}(a) = (N_{K(a)/K}(a))^s.$$

*Beweis.* Man wähle eine $K$-Basis $x_1, \ldots, x_r$ von $K(a)$ und eine $K(a)$-Basis $y_1, \ldots, y_s$ von $L$. Dann ist $x_i y_j$ eine $K$-Basis von $L$. Sei nun $A \in M_{r,r}(K)$ die Matrix die bzgl. $x_1, \ldots, x_r$ den Endomorphismus $\varphi_a$ von $K(a)$ darstellt. Dann wird der Endomorphismus $\varphi_a$ von $L$ bzgl. der Basis $x_i y_j$ durch

$$s \text{ Kästchen} \left\{ \left( \begin{array}{c|c|c} A & & \\ \hline & A & \\ \hline & & \ddots \end{array} \right) =: B \right.$$

dargestellt. Also

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(A)^s \\ \mathrm{Sp}(B) &= s \cdot \mathrm{Sp}(A) \end{aligned}$$

□

**Satz 4.61.** *Sei $L/K$ endlich mit $[L : K] = q \cdot [L : K]_s = q \cdot r$. Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von $K$ und $\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K}) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$. Dann gilt*

$$\mathrm{Sp}_{L/K}(a) = q \cdot \sum_{i=1}^{r} \sigma_i(a),\ N_{L/K}(a) = \left( \prod_{i=1}^{r} \sigma_i(a) \right)^q.$$

*Beweis.* Spezialfall: $L = K(a)$.
Ist $f$ das Minimalpolynom von $a$ über $K$, $f = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_0$, so gilt

$$f = \left( \prod_{i=1}^{r} X - \sigma_i(a) \right)^q$$

und die Aussage folgt aus Lemma 4.59. Sei nun $L$ allgemein und sei

$$[L : K(a)] = q_1 [L : K(a)]_s = q_1 r_1$$

$$[K(a) : K] = q_2 [K(a) : K]_s = q_2 r_2$$

Dann gilt nach Lemma 4.60

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}_{L/K}(a) &= q_1 r_1 \mathrm{Sp}_{K(a)/K}(a)\\ &= q_1 \cdot r_1 \cdot q_2 \cdot \sum_{\sigma\in \mathrm{Hom}_K(K(a),\overline{K})} \sigma(a)\end{aligned}$$

Nach Definition des Separablitätsgrades hat jedes $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(K(a),\overline{K})$ genau $r_1$ viele verschiedene Fortsetzungen in $\mathrm{Hom}_K(L,\overline{K})$. Wir erhalten

$$\mathrm{Sp}_{L/K}(a) = \underbrace{q_1 \cdot q_2}_{=q} \sum_{\sigma\in \mathrm{Hom}_K(L,\overline{K})} \sigma(a).$$

Das Argument für die Norm ist das Gleiche. □

**Korollar 4.62.** *Sind $M/L/K$ endliche Körpererweiterungen und $a \in M$, so gilt*

$$\begin{aligned}N_{M/K}(a) &= N_{L/K}(N_{M/L}(a)),\\ \mathrm{Sp}_{M/K}(a) &= \mathrm{Sp}_{L/K}(\mathrm{Sp}_{M/L}(a)).\end{aligned}$$

*Beweis.* Im Beweis des Gradsatzes Satz 3.88 für $[\ :\ ]_s$ haben wir gesehen: Mit $\mathrm{Hom}_K(L,\overline{K}) = \{\sigma_1,\dots,\sigma_{r_1}\}$, $\mathrm{Hom}_L(M,\overline{K}) = \{\tau_1,\dots,\tau_{r_2}\}$ und beliebig aber fest gewählten Fortsetzungen $\sigma_i'$ von $\sigma_i$ nach $\mathrm{Hom}_K(\overline{K},\overline{K})$ gilt

$$\mathrm{Hom}_K(M,\overline{K}) = \{\sigma_i' \circ \tau_j \mid i = 1,\dots,r_1, j = 1,\dots,r_2\}.$$

Nun sei

$$\begin{aligned}[L:K] &= q_1 \cdot [L:K]_s = q_1 r_1,\\ [M:L] &= q_2 \cdot [M:L]_s = q_2 r_2.\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}_{M/K}(a) &= q_1 q_2 \cdot \sum_{\sigma\in \mathrm{Hom}_K(M,\overline{K})} \sigma(a)\\ &= q_1 q_2 \sum_{i,j} \sigma_i' \circ \tau_j(a)\\ &= q_1 \sum_i \sigma_i' \left( q_2 \sum_j \tau_j(a) \right)\\ &= q_1 \sum_i \sigma_i'(\mathrm{Sp}_{M/L}(a))\\ &= q_1 \sum_i \sigma_i(\mathrm{Sp}_{M/L}(a))\\ &= \mathrm{Sp}_{L/K}(\mathrm{Sp}_{M/L}(a)).\end{aligned}$$

Das Argument für die Norm ist das Gleiche. □

**Korollar 4.63.** *Sei $L/K$ endlich galoissch. Dann gilt für $a \in L$, $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$*

$$N_{L/K}(a) = N_{L/K}(\sigma(a)),\ \mathrm{Sp}_{L/K}(a) = \mathrm{Sp}_{L/K}(\sigma(a)).$$

*Beweis.* Die Formeln aus Satz 4.61 ergeben für $a$ und für $\sigma(a)$ das Gleiche. □

**Satz 4.64.** *Eine endliche Körpererweiterung $L/K$ ist genau dann separabel, wenn die $K$-lineare Abbildung $\mathrm{Sp}_{L/K} : L \to K$ nicht-trivial und damit surjektiv ist. Ist $L/K$ separabel, so ist die symmetrische Bilinearform („Spurform")*

$$\mathrm{Sp} : L \times L \longrightarrow K,\ (x, y) \longmapsto \mathrm{Sp}_{L/K}(xy)$$

*nicht-ausgeartet.*

*Beweis.* Der Inseparabilitätsgrad sei $q = p^i$, $p = \mathrm{char}(K)$. Für $i \geq 1$ gilt $\mathrm{Sp}_{L/K}(a) = q \cdot \sum \sigma(\dots) = 0$. Sei also $i = 0$, d.h. $L/K$ separabel und $\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der $\sigma_i$ (Satz 4.54) folgt, dass $\mathrm{Sp}_{L/K}$ nicht die Nullabbildung ist. Wir betrachten nun die Spurform. Sei $x \in L$, $x \neq 0$. Dann ist $L \to L$, $y \mapsto xy$, bijektiv, also existiert ein $y \in L$ so dass $xy \notin \mathrm{Kern}(\mathrm{Sp}_{L/K})$. Mit anderen Worten: $\mathrm{Sp}_{L/K}(xy) = 0\ \forall\, y \Rightarrow x = 0$. Das bedeutet aber, dass die Form nicht-ausgeartet ist. □

## 4.8 Zyklische Erweiterungen

**Satz 4.65 (Hilberts Satz 90).** *Es sei $L/K$ eine endliche zyklische Galois-Erweiterung und $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ ein Erzeuger. Für $b \in L^\times$ ist äquivalent:*

(i) $N_{L/K}(b) = 1$.

(ii) *es existiert ein $a \in L^\times$ mit $b = a/\sigma(a)$.*

*Beweis.* Für $b = a/\sigma(a)$ gilt $N(b) = N(a)/N(\sigma(a)) = 1$ nach Satz 4.47. Sei nun $N(b) = 1$ und $n = [L : K]$. Die $L$-wertigen Charaktere $\sigma^0|_{L^\times}, \dots, \sigma^{n-1}|_{L^\times}$ sind linear unabhängig nach Satz 4.53. Insbesondere gilt

$$\sigma^0 + b\sigma^1 + b\sigma(b)\sigma^2 + \cdots + b\sigma(b)\cdots\sigma^{n-2}(b)\sigma^{n-1} \neq 0.$$

Daher gibt es ein $c \in L^\times$ mit

$$a := c + b\sigma(c) + b\sigma(b)\sigma^2(c) + \cdots + b\sigma(b)\cdots\sigma^{n-2}(b)\sigma^{n-1}(c) \neq 0.$$

Also gilt

$$\frac{a}{\sigma(a)} = \frac{c + b\sigma(c) + \cdots + b\sigma(b)\cdots\sigma^{n-2}(b)\sigma^{n-1}(c)}{\sigma(c) + \sigma(b)\sigma^2(c) + \cdots + \sigma(b)\cdots\sigma^{n-1}(b)\sigma^n(c)}.$$

Der letzte Summand im Nenner ist wegen $N(b) = 1$ und $\sigma^n = \mathrm{id}$ gleich $c/b$. Es folgt $a/\sigma(a) = b$. □

**Satz 4.66.** *Es gelte $\mathrm{char}(K) \nmid n$ und $K$ enthalte eine primitive $n$-te Einheitswurzel. Dann ist jede zyklische Galoiserweiterung $L/K$ vom Grad $n$ von der Form*

$$L = K(\sqrt[n]{c}),\ c \in K^\times,$$

*d.h. $L = K(a)$ für ein $a \in L$ mit Minimalpolynom $X^n - c$, $c \in K^\times$.*

*Beweis.* Sei $L/K$ zyklisch, $[L:K] = n$, $\mathrm{Gal}(L/K) = \langle\sigma\rangle$. Sei $\zeta_n \in K$ primitive $n$-te Einheitswurzel. Dann gilt

$$N_{L/K}(\zeta_n^{-1}) = \zeta_n^{-[L:K]} = 1.$$

Nach Hilberts Satz 90 existiert $a \in L^\times$ mit $\zeta_n^{-1} = a/\sigma(a)$, d.h. $\sigma(a) = \zeta_n a$. Für $i \in \mathbb{N}$ gilt daher:

$$\sigma^i(a) = \zeta_n^i \cdot a.$$

Daher sind $a, \sigma(a), \ldots, \sigma^{n-1}(a)$ paarweise verschieden. Insbesondere wird $a$ nur durch das neutrale Element der Galoisgruppe festgelassen, also $L = K(a)$. Außerdem gilt $\sigma(a^n) = \sigma(a)^n = (\zeta_n a)^n = a^n$, also $c = a^n \in K$. Daher gilt $f(a) = 0$ für $f = X^n - c$ und aus Gradgründen ist $f$ das Minimalpolynom von $a$. □

# 5 Mehr Gruppentheorie

## 5.1 Gruppenoperationen

**Definition 5.1.** Sei $G$ eine (multiplikativ geschriebene) Gruppe und $X$ eine Menge. Eine Operation (oder auch Wirkung oder Aktion) von $G$ auf $X$ ist eine Abbildung

$$G \times X \longrightarrow X,\ (g,x) \longmapsto gx,$$

mit
(i) $1x = x$ für das neutrale Element $1 \in G$ und jedes $x \in X$.
(ii) $(gh)x = g(hx)$ für $g, h \in G$, $x \in X$.

**Beispiele 5.2.** 1) Die Multiplikation

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g,h) \longmapsto gh,$$

definiert eine $G$-Operation auf $G$, die **Translation**.
2) Die Konjugation

$$G \times G \longrightarrow G,\ (g,h) \longmapsto ghg^{-1}$$

definiert eine Operation von $G$ auf $G$, die **Konjugation**.
3) Sei $X$ eine Menge und $\mathfrak{S}(X)$ die Gruppe der bijektiven Abbildungen $X \to X$. Sei $G \subset \mathfrak{S}(X)$ eine Untergruppe. Dann definiert

$$G \times X \longrightarrow X,\ (g,x) \longmapsto g(x),$$

eine $G$-Wirkung auf $X$.

Allgemeiner: sei $G$ eine Gruppe und $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto \varphi(g)(x)$, eine $G$-Wirkung. Ist umgekehrt $G \times X \to X$ eine Gruppenwirkung, so liegt für jedes $g \in G$ die *Translation*

$$\tau_g : X \longrightarrow X,\ x \longmapsto gx,$$

in $\mathfrak{S}(X)$ und $G \to \mathfrak{S}(X)$, $g \mapsto \tau_g$, ist ein Gruppenhomomorphismus.

**Lemma 5.3.** *Diese beiden Bildungen sind zueinander invers.*

*Beweis.* Sei $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt für $g \in G$, $x \in X$ $\tau_g(x) = gx := \varphi(g)(x)$, also $\tau_g = \varphi(g) \in \mathfrak{S}(X)$.

Ist umgekehrt $G \times X \to X$ eine Gruppenwirkung, so gilt $\tau_g(x) := gx$, also $\varphi(g)(x) = gx$ für alle $g \in G$, $x \in X$. □

Für $g \in G$ ist

$$\mathrm{int}_g : G \longrightarrow G,\ h \longmapsto ghg^{-1},$$

die zu $g$ bzgl. der Konjugation assoziierte Bijektion $G \to G$. Wegen

$$\begin{aligned} \mathrm{int}_g(h_1h_2) &= gh_1h_2g^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} \\ &= \mathrm{int}_g(h_1)\mathrm{int}_g(h_2) \end{aligned}$$

ist $\mathrm{int}_g$ ein Gruppenhomomorphismus, also

$$\mathrm{int}_g \in \mathrm{Aut}(G) \subset \mathfrak{S}(G) = \mathrm{Aut}_{\mathrm{Mengen}}(G).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathrm{int}_{g_1g_2}(h) &= g_1g_2hg_1^{-1}g_2^{-1} \\ &= \mathrm{int}_{g_1}(\mathrm{int}_{g_2}(h)) \end{aligned}$$

ist die Abbildung

$$\mathrm{int} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G),\ g \longmapsto \mathrm{int}_g,$$

ein Gruppenhomomorphismus.

**Definition 5.4.** Das Bild $\mathrm{int}(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ von int heißt die Gruppe der **inneren Automorphismen von $G$**. Der Kern von int:

$$\mathrm{Kern}(\mathrm{int}) = \{g \in G \mid gh = hg \quad \forall\, h \in G\} =: Z(G)$$

heißt das **Zentrum von $G$**.

**Bemerkung 5.5.** $Z(G)$ ist ein Normalteiler in $G$ (weil Kern eines Homomorphismus).

Der Homomorphiesatz liefert:

**Korollar 5.6.** *Es gilt* $G/Z(G) \cong \mathrm{int}(G)$.

**Bemerkung 5.7.** $\mathrm{int}(G) = 1 \iff G$ ist kommutativ.

**Definition 5.8.** Sei $G \times X \longrightarrow X$ eine Gruppenoperation.

(a) Für $x \in X$ heißt

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}$$

die **Bahn** (oder der Orbit) von $x$.

(b) Die Untergruppe
$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$
heißt die **Stand- (oder Isotropie-)gruppe** von $x$.

(c) Ein $x \in X$ heißt **Fixpunkt** der Gruppenwirkung, wenn $gx = x$ für alle $g \in G$ gilt. Die Menge aller Fixpunkte wird mit $\mathrm{Fix}_G(X)$ bezeichnet.

**Bemerkungen 5.9.** 1) $x \in \mathrm{Fix}_G(X) \Leftrightarrow \#Gx = 1 \Leftrightarrow G_x = G$.
2) $X$ ist die disjunkte Vereinigung von Bahnen.
Grund: ist $g'x' = gx$, so gilt $hx' = hg'^{-1}g'x' = hg'^{-1}gx$ und $hx = hg^{-1}gx = hg^{-1}g'x'$ also $Gx \cap Gx' \neq \varnothing \Longleftrightarrow Gx = Gx'$.

**Lemma 5.10.** *Für $x \in X$ definiert die Abbildung $G \to Gx$, $g \mapsto gx$, eine Bijektion*
$$G/G_x \xrightarrow{\sim} Gx.$$
*Insbesondere gilt $\#Gx = (G : G_x)$.*

*Beweis.* Die Abbildung ist surjektiv nach Definition von $Gx$. Weiterhin gilt
$$gx = hx \Longleftrightarrow h^{-1}gx = x \Longleftrightarrow h^{-1}g \in G_x \Longleftrightarrow gG_x = hG_x.$$
□

Aus Lemma 5.10 und Bemerkung 5.9 2) erhalten wir unmittelbar den nächsten Satz.

**Satz 5.11 (Bahnengleichung).** *Sei $G \times X \to X$ eine Gruppenoperation auf einer endlichen Menge $X$, sowie $x_1, \ldots, x_n$ ein Vertretersystem der Bahnen in $X$. Dann gilt*
$$\#X = \sum_{i=1}^{n} \#Gx_i = \sum_{i=1}^{n} (G : G_{x_i}).$$

**Bemerkung 5.12.** Bzgl. der Konjugation gilt $x \in Z(G) \Longleftrightarrow \#Gx = 1$ ($\Longleftrightarrow gx = xg \quad \forall\, g \in G$).

**Satz 5.13.** *Sei $G$ eine Gruppe. Ist $G/Z(G)$ zyklisch, so ist $G$ abelsch.*

*Beweis.* Sei $aZ(G)$ ein Erzeuger von $G/Z(G)$. Sei $g \in G$ und $\overline{g} \in G/Z(G)$ das Bild. Dann gilt $\overline{g} = \overline{a}^i$ für ein $i \in \mathbb{Z}$. Folglich gilt $ga^{-i} \in Z(G)$. Also hat jedes $g \in G$ eine Darstellung der Form $g = a^i z$, $i \in \mathbb{Z}$, $z \in Z(G)$. Dann gilt für $g_1, g_2 \in G$ beliebig
$$\begin{aligned} g_1 g_2 &= a^{i_1} z_1 a^{i_2} z_2 = a^{i_1+i_2} z_1 z_2 \\ &= a^{i_2} z_2 a^{i_1} z_1 = g_2 g_1. \end{aligned}$$
□

**Definition 5.14.** Sei $G$ eine Gruppe und $S \subset G$ eine Teilmenge.

(a) $Z_S = \{g \in G \mid gs = sg \text{ für alle } s \in S\}$

heißt der **Zentralisator** von $S$ in $G$.

(b) $N_S = \{g \in G \mid gS = Sg\}$

heißt der **Normalisator** von $S$ in $G$.

**Bemerkung 5.15.** $Z(G) = Z_G$.

**Lemma 5.16.** (i) *$Z_S$ und $N_S$ sind Untergruppen in $G$.*

(ii) *Ist $S$ eine Untergruppe in $G$, so ist $N_S$ die größte aller Untergruppen $H \subset G$ mit $S \lhd H$.*

*Beweis.* (i) ist klar nach Definition.
(ii) Es gilt $S \lhd N_S$ nach Definition. Ist $H \subset G$ so dass $S \lhd H$, so gilt $hS = Sh$ für jedes $h \in H$, also $H \subset N_S$. □

Für eine Untergruppe $H \subset G$ und ein $g \in G$ heißt

$$H^g = gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$$

die vermittels $g$ zu $H$ **konjugierte** Untergruppe.

**Lemma 5.17.** *Die Anzahl der zu $H$ konjugierten Untergruppen ist gleich dem Index $(G : N_H)$.*

*Beweis.* Es gilt $gHg^{-1} = g'Hg'^{-1} \iff (g')^{-1}gHg^{-1}g' = H \iff (g')^{-1}g \in N_H \iff gN_H = g'N_H$. □

**Lemma 5.18.** *Sei $X$ die Menge der Untergruppen von $G$ auf der $G$ (und damit auch jede Untergruppe $H$ von $G$) durch Konjugation wirkt. Seien $H, S \subset G$ Untergruppen. Dann gilt*

$$S \in \mathrm{Fix}_H(X) \iff H \subset N_S.$$

*Insbesondere gilt $S \in \mathrm{Fix}_G(X) \Leftrightarrow S \lhd G$.*

*Beweis.* $S \in \mathrm{Fix}_H(X)$ bedeutet $hSh^{-1} = S$ für alle $h \in H$, was zu $H \subset N_S$ äquivalent ist. □

**Satz 5.19 (Klassengleichung).** *Sei $G$ eine endliche Gruppe mit Zentrum $Z$ und sei $x_1, \ldots, x_n$ ein Vertretersystem der Bahnen in $G - Z$ bzgl. Konjugation. Dann gilt*

$$\#G = \#Z + \sum_{i=1}^{n} (G : Z_{\{x_i\}})$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \#G &= \#Z + \sum_{i=1}^{n} \#Gx_i \\ &= \#Z + \sum_{i=1}^{n} (G : G_{x_i}). \end{aligned}$$

Bzgl. Konjugation gilt $G_x = Z_{\{x\}}$ für jedes $x \in G$. □

## 5.2 $p$-Gruppen

**Definition 5.20.** Sei $p$ eine Primzahl. Eine endliche Gruppe $G$ heißt **$p$-Gruppe**, wenn $\#G$ eine $p$-Potenz ist.

**Satz 5.21.** *Sei $G$ eine $p$-Gruppe, $\#G = p^k$, $k \geq 1$. Dann gilt $Z(G) \neq 1$, also $\#Z(G) = p^r$, $r \geq 1$.*

*Beweis.* Aus der Klassengleichung Satz 5.19 erhalten wir

$$\#G = \#Z(G) + \sum_{i=1}^{n} (G : Z_{\{x_i\}})$$

für ein Vertretersystem $x_1, \ldots, x_n$ der Bahnen in $G - Z(G)$ bzgl. Konjugation. Nun gilt $x_i \notin Z(G) \Rightarrow Z_{\{x_i\}} \neq G \Rightarrow p \mid (G : Z_{\{x_i\}})$. Folglich gilt $p \mid \#Z(G) \Rightarrow Z(G) \neq 1$. Nun ist $Z(G) \subset G$ eine Untergruppe, also $\#Z(G) = p^r$, $r \geq 1$. □

**Korollar 5.22.** *Sei $p$ eine Primzahl. Dann ist jede Gruppe der Ordnung $p^2$ abelsch.*

*Beweis.* 1. Fall: $G = Z(G)$. Hier ist nichts zu zeigen.
2. Fall: $\#Z(G) = p \Rightarrow \#G/Z(G) = p$. Dann ist $G/Z(G)$ zyklisch $\overset{5.13}{\Longrightarrow} G$ abelsch $\Longrightarrow G = Z(G)$, Widerspruch.
3. Fall: $\#Z(G) = 1$ nicht möglich nach Satz 5.21. □

**Korollar 5.23.** *$\#G = p^2 \Rightarrow G \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

*Beweis.* Nach Korollar 5.22 ist $G$ abelsch. Die Aussage folgt aus dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen ($\mathbb{Z}$-Moduln). □

**Satz 5.24.** *Sei $\#G = p^k$. Dann existieren Untergruppen*

$$G = G_k \supset G_{k-1} \supset \cdots \supset G_0 = 1$$

*mit*

(i) $\#G_i = p^i$, $i = 0, \ldots, k$,

(ii) $G_{i-1} \lhd G$, $i = 1, \ldots, k$.

*Insbesondere gilt $G_{i-1} \lhd G_i$ und $G_i/G_{i-1} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

*Beweis.* Per Induktion über $k$. Der Fall $k = 0$ ist trivial.
Sei $k \geq 1$ und sei $a \in Z(G)$, $a \neq 1$. Dann gilt $\operatorname{ord}(a) = p^r$, $r \geq 1$ und nachdem man $a$ durch $a^{(p^{r-1})}$ ersetzt hat, kann man ohne Einschränkung $\operatorname{ord}(a) = p$ annehmen. Sei $G_1 = \langle a \rangle$. Wegen $a \in Z(G)$ ist $G_1 \lhd G$. Sei $\overline{G} = G/G_1$ und $\varphi : G \to \overline{G}$ die kanonische Projektion. Nach Induktionsvoraussetzung existieren

$$1 = \overline{G}_0 \subset \cdots \subset \overline{G}_{k-1} = \overline{G}$$

mit $\overline{G}_i \triangleleft \overline{G}$ und $\#\overline{G}_i = p^i$, $i = 0, \ldots, k-1$. Setze

$$G_i = \varphi^{-1}(\overline{G}_{i-1}) \quad i = 1, \ldots, k.$$

Nach Satz 1.31 gilt $G_i \triangleleft G$ und Abzählen liefert $\#G_i = p \cdot \#\overline{G}_{i-1} = p^i$. □

**Satz 5.25.** *Sei $G$ eine $p$-Gruppe die auf einer endlichen Menge $X$ operiert. Dann gilt*

$$\#\mathrm{Fix}_G(X) \equiv \#X \mod p.$$

*Insbesondere gilt:*

(i) *Gibt es genau einen Fixpunkt, so gilt $\#X \equiv 1 \bmod p$.*
(ii) *Ist $\#X$ durch $p$ teilbar, so auch $\#\mathrm{Fix}_G(X)$.*
(iii) *Ist $\#X$ nicht durch $p$ teilbar, so gibt es mindestens einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Sei $x_1, \ldots, x_n$ ein Vertretersystem der Bahnen mit mehr als einem Element. Die Bahngleichung Satz 5.11 liefert

$$\#X = \#\mathrm{Fix}_G(X) + \sum_{i=1}^{n} (G : G_{x_i}).$$

Nun ist $G$ eine $p$-Gruppe und wegen $G_{x_i} \neq G$ gilt $p \mid (G : G_{x_i})$ für $i = 1, \ldots, n$. □

## 5.3 Sylow-Gruppen

**Definition 5.26.** Sei $p$ eine Primzahl und $G$ eine endliche Gruppe. Eine Untergruppe $S \subset G$ heißt ***p*-Sylowgruppe**, wenn $S$ eine $p$-Gruppe ist, und $p$ nicht den Index $(G : S)$ teilt.

**Bemerkung 5.27.** Sei $G$ eine endliche Gruppe, $S \subset G$ eine $p$-Sylowgruppe und $H \subset G$ eine $p$-Gruppe mit $S \subset H$. Dann gilt $H = S$.
Grund: $(H : S) \mid \#H \Rightarrow (H : S)$ ist $p$-Potenz. Außerdem gilt:
$(H : S) \mid (G : S)$ und $p \nmid (G : S)$. Also $(H : S) = p^0 = 1$, $H = S$.

**Beispiel 5.28.** Sei $G$ eine endliche *abelsche* Gruppe. Dann ist $G(p) = \{g \in G \mid g^{p^n} = 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ (der $p$-Torsionsmodul des $\mathbb{Z}$-Moduls $G$) die eindeutig bestimmte $p$-Sylowgruppe. (siehe LA II: $G \cong \bigoplus_{\ell \text{ PZ}} G(\ell)$.)

**Satz 5.29 (Sylowsche Sätze).** *Sei $G$ eine endliche Gruppe und $p$ eine Primzahl.*

(i) *Zu jeder $p$-Gruppe $H \subset G$ existiert eine $p$-Sylowgruppe $S \subset G$ mit $H \subset S$. Insbesondere existiert eine $p$-Sylowgruppe.*

(ii) *Zwei beliebige $p$-Sylowgruppen in $G$ sind konjugiert.*

(iii) *Für die Anzahl $s$ der $p$-Sylowgruppen in $G$ gilt*

$$s \mid \#G \quad \textit{und} \quad s \equiv 1 \bmod p.$$

**Bemerkungen 5.30.** • $p \nmid \#G \Rightarrow \{1\}$ ist $p$-Sylowgruppe.
• $G$ ist $p$-Gruppe $\Rightarrow G$ ist $p$-Sylowgruppe.
• Nach (ii) haben alle $p$-Sylowgruppen die gleiche Ordnung. Das sieht man auch einfacher. Ist $\#G = p^r m, (m,p) = 1$ so haben alle $p$-Sylowgruppen die Ordnung $p^r$ (wegen $(G:S)$ prim zu $p$, $\#S$ $p$-Potenz).

Wir beginnen mit dem Beweis der Sylowsätze.

**Lemma 5.31.** *Es existiert stets eine $p$-Sylowgruppe.*

*Beweis.* Per Induktion nach $\#G$. Die Aussage ist trivial für $G = 1$. Nun nehmen wir an, die Aussage sei für alle Gruppen mit Ordnung kleiner als $\#G$ bereits bewiesen. Existiert eine Untergruppe $H \subsetneqq G$ mit $p \nmid (G:H)$, so ist eine $p$-Sylowgruppe in $H$ auch eine für $G$ und wir sind fertig. Also OE: $p \mid (G:H)$ für jede Untergruppe $H \subsetneqq G$, insbesondere $p \mid \#G$. Die Klassengleichung Satz 5.19 liefert

$$\#G = \#Z + \sum_{i=1}^{n} (G : Z_{\{x_i\}})$$

wobei $Z$ das Zentrum von $G$ und $x_1, \ldots, x_n$ ein Vertretersystem der Bahnen von $G - Z$ bezüglich der Konjugation ist. Nun gilt wegen $x_i \notin Z$ dass $Z_{\{x_i\}} \subsetneqq G$, also $p \mid (G : Z_{\{x_i\}})$ und somit $p \mid \#Z$. Daher finden wir ein Element $a$ der Ordnung $p$ in der endlichen (abelschen) Gruppe $Z$. Sei $H = \langle a \rangle$. Dann hat $H$ die Ordnung $p$ und ist, weil in $Z$, ein Normalteiler von $G$. Wir betrachten die kanonische Projektion

$$\phi : G \longrightarrow G/H.$$

Sei $p^n$ die exakte $p$-Potenz in $\#G$. Dann ist $p^{n-1}$ die exakte $p$-Potenz in $\#(G/H)$. Sei nun $S \subset G/H$ eine $p$-Sylowgruppe. Dann gilt $\#S = p^{n-1}$, also $\#\phi^{-1}(S) = p^n$ und somit ist $\phi^{-1}(S)$ eine $p$-Sylowgruppe in $G$. □

**Lemma 5.32.** *Sei $S \subset G$ eine $p$-Sylowgruppe und $H$ eine Untergruppe von $p$-Potenzordnung. Es sei $X$ die Menge der zu $S$ konjugierten Untergruppen, auf der $H$ durch Konjugation wirkt. Dann gilt für $Q \in X$*

$$Q \in \mathrm{Fix}_H(X) \Longleftrightarrow H \subset Q.$$

*Beweis.* Nach Lemma 5.18 gilt

$$Q \in \mathrm{Fix}_H(X) \Longleftrightarrow H \subset N_Q.$$

Wir zeigen nun die Äquivalenz

$$H \subset Q \Longleftrightarrow H \subset N_Q.$$

Wegen $Q \subset N_Q$ ist die Richtung $\Rightarrow$ trivial. Es gelte nun $H \subset N_Q$. Dann ist die Menge $HQ$ eine Untergruppe in $N_Q$. Wegen $Q \lhd N_Q$ liefert der 1. Isomorphiesatz Satz 1.36

$$H/(H \cap Q) \cong HQ/Q.$$

Da $H/(H \cap Q)$ $p$-Potenzordnung hat, gilt gleiches auch für $HQ/Q$. Mit $S$ ist auch $Q$ eine $p$-Sylowgruppe. Daher hat auch $HQ$ $p$-Potenzordnung und wegen der Maximalitätseigenschaft von $Q$ folgt $HQ = Q$, also $H \subset Q$. □

*Beweis der Sylowschen Sätze.* Sei $H \subset G$ eine $p$-Untergruppe und $S \subset G$ eine $p$-Sylowgruppe. Es sei $X$ die Menge der zu $S$ konjugierten Untergruppen, auf der $H$ durch Konjugation wirkt. Nach Lemma 5.17 gilt $\#X = (G : N_S)$ und wegen $N_S \supset S$ folgt $p \nmid \#X$. Nach Satz 5.25 (iii) existiert ein Fixpunkt $Q = gSg^{-1}$ der $H$-Wirkung auf $X$. Nach Lemma 5.32 folgt $H \subset Q$. Dies zeigt (i) und auch (ii), weil aus $H \subset gSg^{-1}$ im Falle, dass $H$ selbst $p$-Sylowgruppe ist, schon $H = gSg^{-1}$ folgt. Es verbleibt, (iii) zu zeigen. Hierzu sei $H$ eine $p$-Sylowgruppe. Dann hat die $H$-Wirkung auf $X$ genau einen Fixpunkt, nämlich $H$ selbst (siehe Lemma 5.32) und nach Satz 5.25(i) folgt $\#X \equiv 1 \bmod p$. Schließlich gilt $\#X = (G : N_S)$ nach Lemma 5.17, woraus $\#X \mid \#G$ folgt. □

Wir geben zwei Anwendungen der Sylowsätze:

**Korollar 5.33.** *Sei $G$ eine endliche Gruppe und $p$ eine Primzahl.*

(i) *Es gilt* $p \mid \#G \iff \exists g \in G$, $\mathrm{ord}(g) = p$.

(ii) *$G$ ist $p$-Gruppe* $\iff \forall\ g \in G$: $\mathrm{ord}(g) = p^r$, $r \in \mathbb{N}_0$.

*Beweis.* Wegen $\mathrm{ord}(g) \mid \#G$ folgt (i) $\Leftarrow$ und (ii) $\Rightarrow$.
(i)$\Rightarrow$: Gelte $p \mid \#G$. Dann gibt es eine $p$-Sylowgruppe $S \subset G$, $S \neq 1$. Sei $s \in S$, $s \neq 1$. Dann gilt $\mathrm{ord}(s) \mid \#S$ also $\mathrm{ord}(s) = p^n$, $n \geq 1$. Ersetzen wir $s$ durch $s^{(p^{n-1})}$ erhalten wir ein Element der Ordnung $p$.
(ii)$\Leftarrow$: Sei $\mathrm{ord}(g) = p^r$ für jedes $g \in G$. Angenommen es existiert eine Primzahl $q \neq p$ mit $q \mid \#G \overset{\text{(i)}}{\Longrightarrow}$ es existiert $g \in G$ mit $\mathrm{ord}(g) = q$. Widerspruch. □

**Korollar 5.34.** *Seien $p < q$ Primzahlen mit $p \nmid (q-1)$. Dann ist jede Gruppe der Ordnung $pq$ zyklisch.*

*Beweis.* Für die Anzahl $s_p$ der $p$-Sylowgruppen gilt $s_p \mid pq$, $s_p \equiv 1 \bmod p$.
Die Fälle $s_p = p, pq$ sind nicht möglich wegen $s_p = 1 \bmod p$, der Fall $s_p = q$ ist nicht möglich wegen $p \nmid q - 1$. Daher gilt $s_p = 1$.
Analog $s_q \mid pq$, $s_q \equiv 1 \bmod q$. Die Fälle $s_q = pq, q$ sind nicht möglich wegen $s_q \equiv 1 \bmod q$. Der Fall $s_q = p$ ist nicht möglich wegen $1 < p < q$, also $p \not\equiv 1 \bmod q$. Daher gilt $s_q = 1$.
Seien $S_p, S_q \subset G$ *die* Sylowgruppen. Für $g \in G$ ist $gS_pg^{-1}$ auch eine $p$-Sylowgruppe, also $gS_pg^{-1} = S_p \Rightarrow S_p \lhd G$. Analog $S_q \lhd G$.

Es gilt $S_pS_q = G$ (wegen $pq \mid \#S_pS_q$), also hat jedes Element aus $G$ eine Darstellung der Form $gh$, $g \in S_p$, $h \in S_q$.

Es gilt $\#S_p = p$, $\#S_q = q \Rightarrow S_p, S_q$ abelsch, d.h. beliebige Elemente von $S_p$ (bzw. $S_q$) kommutieren. Für $g \in S_p$, $h \in S_q$ gilt $ghg^{-1}h^{-1} \in S_p \cap S_q = \{1\}$, also $gh = hg$. Daher ist $G$ kommutativ. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen ist $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ die einzige abelsche Gruppe der Ordnung $pq$. □

## 5.4 Auflösbare Gruppen

Vorbemerkung (Satz 1.31): Sei $G$ eine Gruppe und $G_2 \subset G_1 \subset G$ Untergruppen mit $G_2 \lhd G_1$. Es gibt eine $1-1$ Korrespondenz:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Untergruppen } U \\ G_2 \subset U \subset G_1 \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Untergruppen } \overline{U} \\ \text{von } G_1/G_2 \end{array} \right\}$$

Es gilt $U \lhd G_1 \Longleftrightarrow \overline{U} \lhd G_1/G_2$.

**Definition 5.35.** Eine Kette von Untergruppen

$$1 = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_0 = G$$

heißt **Normalreihe**, wenn $G_i \lhd G_{i-1}$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Die Faktorgruppen $G_{i-1}/G_i$ heißen die **Faktoren** der Normalreihe.

**Beispiel 5.36.** Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen besitzt jede endlich erzeugte abelsche Gruppe eine Normalreihe mit zyklischen Faktoren.

**Definition 5.37.** Eine Gruppe $G$ heißt **auflösbar**, wenn es eine Normalreihe mit abelschen Faktoren gibt.

**Lemma 5.38.** *Eine endliche auflösbare Gruppe besitzt eine Normalreihe mit zyklischen Faktoren.*

*Beweis.* Das folgt aus der Vorbemerkung und dem Beispiel. □

**Satz 5.39.** *Eine endliche p-Gruppe ist auflösbar.*

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 5.24 (der mehr sagt!). □

**Definition 5.40.** Sei $G$ eine Gruppe. Die Untergruppe $[G,G] = \langle ghg^{-1}h^{-1} | g, h \in G \rangle$ heißt die **Kommutatorgruppe** von $G$.

**Bemerkungen 5.41.** • Ein Element der Form $ghg^{-1}h^{-1}$ heißt **Kommutator**. Die Kommutatorgruppe $[G,G]$ wird von den Kommutatoren erzeugt, aber es ist nicht notwendig jedes Element in $[G,G]$ schon selbst ein Kommutator.

• $[G,G] = 1 \Longleftrightarrow G$ abelsch.

**Lemma 5.42.** (i) $[G,G] \lhd G$.

(ii) *Für eine Untergruppe $H \subset G$ gilt: ($H \lhd G$ und $G/H$ abelsch)* $\Longleftrightarrow H \supset [G,G]$.

*Beweis.* (i) Es gilt für $s, g, h \in G$ beliebig

$$s(ghg^{-1}h^{-1})s^{-1} = (sgs^{-1})(shs^{-1})(sgs^{-1})^{-1}(shs^{-1})^{-1} \in [G,G].$$

Jedes Element $x \in [G,G]$ ist Produkt von Elementen der Form $ghg^{-1}h^{-1}$ (beachte $(ghg^{-1}h^{-1})^{-1} = hgh^{-1}g^{-1}$). Daher gilt

$$s[G,G]s^{-1} \subset [G,G]$$

für alle $s \in G$ und somit $[G,G] \lhd G$.
(ii) ($\Leftarrow$) $G/[G,G]$ ist abelsch, weil $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ für alle $x,y \in G/[G,G]$. Gilt $H \supset [G,G]$, so folgt mit der Vorbemerkung (und weil $G/[G,G]$ abelsch ist), dass $H \lhd G$ und $G/H$ abelsch.
($\Rightarrow$) Ist $H \lhd G$ und $G/H$ abelsch, so gilt $xyx^{-1}y^{-1} \in H$ für alle $x,y \in G$ und daher $H \supset [G,G]$. □

**Bemerkung 5.43.** Also ist $[G,G]$ der kleinste Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe.

**Definition 5.44.** Wir definieren eine absteigende Folge von Untergruppen durch

$$D_0G := G, \quad D_{i+1}G := [D_iG, D_iG],\ i \geq 1.$$

Insbesondere gilt $D_1 = [G,G]$.

**Bemerkung 5.45.** Nach Lemma 5.42 ist $D_iG$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren, wenn $D_nG = 1$ für $n \gg 0$ gilt.

**Lemma 5.46.** *Eine Gruppe $G$ ist genau dann auflösbar, wenn $D_nG = 1$ für $n \gg 0$.*

*Beweis.* Das Kriterium ist offenbar hinreichend. Sei $G$ auflösbar und $1 = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_0 = G$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren. Dann gilt $G/G_1$ abelsch $\Rightarrow [G,G] \subset G_1$. Induktiv erhalten wir: $D_iG \subset G_i$ also $D_nG \subset G_n = 1$. □

**Korollar 5.47.** *Ist $U \subset G$ eine Untergruppe und $G$ auflösbar, so auch $U$.*

*Beweis.* $D_nU \subset D_nG = 1$ für $n \gg 0$. □

**Satz 5.48.** *Sei $G' \lhd G$ und $G'' = G/G'$. Dann gilt*

$$G \text{ auflösbar} \iff G' \text{ und } G'' \text{ auflösbar.}$$

*Insbesondere sind Faktorgruppen auflösbarer Gruppen wieder auflösbar.*

*Beweis.* ($\Rightarrow$) $G'$ auflösbar folgt aus Korollar 5.47. Wir bezeichnen die kanonische Projektion mit $\pi : G \twoheadrightarrow G''$. Sei nun $1 = G_n \subset \cdots \subset G_0 = G$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren. Setze $G_i'' = \pi(G_i) = G_iG'/G' \subset G/G' = G''$ und betrachte die Normalreihe $1 = G_n'' \subset \cdots \subset G_0'' = G''$. Wir haben Surjektionen

$$\begin{aligned} G_{i-1}/G_i &\twoheadrightarrow G_{i-1}/G_iG' \cap G_{i-1} \overset{\text{1.Isom.satz}}{\cong} G_{i-1}G_iG'/G_iG' \\ &= G_{i-1}G'/G_iG' \overset{\text{2.Isom.satz}}{\cong} G_{i-1}G'/G' \Big/ G_iG'/G' = G_{i-1}''/G_i''. \end{aligned}$$

Daher ist $G''_{i-1}/G''_i$ abelsch für alle $i$ und $G''$ auflösbar.

($\Leftarrow$) Seien nun $1 = G'_n \subset \cdots \subset G'_0 = G'$ und $1 = G''_m \subset \cdots \subset G''_0 = G''$ Normalreihen mit abelschen Faktoren. Dann ist $1 = G'_n \subset \cdots \subset G'_0 = \pi^{-1}(G''_m) \subset \cdots \subset \pi^{-1}(G''_0) = G$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren. Daher ist $G$ auflösbar. □

Wir erweitern die Schreibweise $(ab)$ für die Transposition in $\mathfrak{S}_n$, die $a$ mit $b$ vertauscht, durch die sogenannte Zyklenschreibweise. Für paarweise verschiedene $a, b, c, d, \ldots \in \{1, \ldots, n\}$ setzt man

$$(abcd\cdots) = \begin{pmatrix} a & b & c & \cdots & \\ b & c & d & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

**Satz 5.49.** *Die Gruppe $\mathfrak{S}_n$ ist für $n \geq 5$ nicht auflösbar.*

*Beweis.* Wir zeigen: Ist $U \subset \mathfrak{S}_n$ eine Untergruppe, die alle Dreierzyklen enthält, so auch $[U, U]$.
Grund: Sei $a, b, c, d, e \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise verschieden (hier braucht man $n \geq 5$). Z.z. $(abc) \in [U, U]$. Setze $x = (cad)$, $y = (bec)$. Nach Voraussetzung gilt $x, y \in U$, woraus $xyx^{-1}y^{-1} \in [U, U]$ folgt.
Nun gilt

$$\begin{aligned} xyx^{-1}y^{-1} &= (cad)(bec)(dac)(ceb) \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & a & d & e \end{pmatrix} = (abc). \end{aligned}$$

Hieraus folgt induktiv, dass für $i \in \mathbb{N}$ beliebig, alle Dreierzyklen in $D_i\mathfrak{S}_n$ sind. Nach Lemma 5.46 ist $\mathfrak{S}_n$ nicht auflösbar. □

**Bemerkung 5.50.** Für $n \leq 4$ ist $\mathfrak{S}_n$ auflösbar.

# 6 Anwendungen der Galoistheorie

## 6.1 Auflösbarkeit von Gleichungen

*In diesem Abschnitt sind alle Körper von der Charakteristik 0!*

**Definition 6.1.** Eine endliche Erweiterung $L/K$ heißt **durch Radikale auflösbar** wenn es einen Erweiterungskörper $E/L$ sowie eine Körperkette $K = E_0 \subset \cdots \subset E_m = E$ gibt, so dass $E_{i+1}$ aus $E_i$ durch Adjunktion einer Nullstelle eines Polynoms $X^n - a \in E_i[X]$ entsteht.

**Definition 6.2.** Eine endliche Körpererweiterung $L/K$ heißt **auflösbar**, wenn es einen Oberkörper $E \supset L$ mit $E/K$ galoissch mit auflösbarer Galoisgruppe gibt.

**Bemerkung 6.3.** Ist $L/K$ galoissch, so gilt: $L/K$ auflösbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Gal}(L/K)$ auflösbar.
Grund: $\Leftarrow$: setze $E = L$. $\Rightarrow$: $\mathrm{Gal}(L/K)$ ist als Faktorgruppe der auflösbaren Gruppe $\mathrm{Gal}(E/K)$ auflösbar.

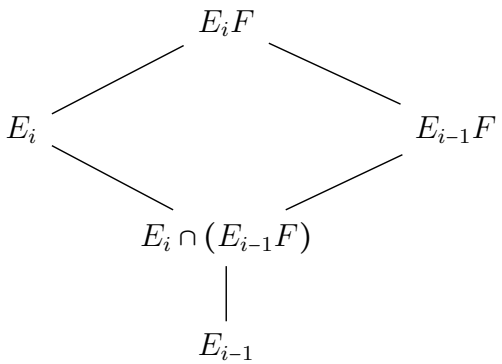
*Ziel:*

**Satz 6.4.** *Eine endliche Körpererweiterung $L/K$ ist genau dann auflösbar, wenn sie durch Radikale auflösbar ist.*

*Anwendung:* Sei $f \in K[X]$ ein Polynom. Eine algebraische Lösungsformel für die Nullstellen von $f$ ist ein Ausdruck der sich sukzessive aus Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und Wurzelziehen zusammensetzt. Z.B. hat die quadratische Gleichung $f = X^2 + pX + q$ die Lösungen $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Mit anderen Worten: Die Gleichung $f(X) = 0$ ist genau dann auflösbar wenn der Zerfällungskörper $L$ von $f$ über $K$ durch Radikale auflösbar ist.

*Beweis von von Satz 6.4.* Sei $L/K$ auflösbar und $E/L$ mit $\mathrm{Gal}(E/K)$ auflösbar. Sei $K = E_0 \subset \cdots \subset E_n = E \subset \overline{K}$ eine Kette von Zwischenkörpern so dass für alle $i$ die Erweiterung $E_i/E_{i-1}$ galoissch mit zyklischer Galoisgruppe ist (existiert nach Lemma 5.38 und dem Hauptsatz der Galoistheorie). Sei $N = [E : K]$ und $F = K(\zeta_N) \subset \overline{K}$. Dann ist für $i = 1, \ldots, n$ $E_iF/E_{i-1}F$ galoissch und das Diagramm




und Satz 4.17 liefern uns eine Injektion

$$\mathrm{Gal}(E_iF/E_{i-1}F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(E_i/E_i \cap (E_{i-1}F)) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(E_i/E_{i-1}).$$

Nach Satz 1.45 ist $\mathrm{Gal}(E_iF/E_{i-1}F)$ als Untergruppe einer zyklischen Gruppe zyklisch.

Sei $r_i = [E_iF : E_{i-1}F]$. Dann gilt $r_i \mid [E_i : E_{i-1}] \mid N$. Wegen $\zeta_N \in F$ gilt $\zeta_{r_i} \in E_{i-1}F$. Nach Satz 4.66 gilt $E_iF = E_{i-1}F(\sqrt[r_i]{a})$ für ein $a \in E_{i-1}F$. Daher ist

$$K \subset F \subset E_1F \subset \cdots \subset E_nF = EF$$

eine Kette der gesuchten Art und $L \subset E \subset EF$. Also ist $L/K$ durch Radikale auflösbar.

Sei nun $L/K$ durch Radikale auflösbar und $E/L$, $K = E_0 \subset \cdots \subset E_n = E \subset \overline{K}$ wie in der Definition. Wir zeigen: $E \subset E'$ mit $E'/K$ galoissch und $\mathrm{Gal}(E'/K)$ auflösbar. Wir gehen induktiv vor. Sei $E_1 = K(\sqrt[r_1]{a})$, $a \in K$.

$a = 1 \Rightarrow E_1/K$ galoissch mit kommutativer Galoisgruppe.

$a \neq 1 \Rightarrow E_1' = E_1K(\zeta_{r_1}) = K(\sqrt[r_1]{a}, \zeta_{r_1})$ ist galoissch $/K$ und wegen der Kette $K \subset K(\zeta_{r_1}) \subset K(\zeta_{r_1})(\sqrt[r_1]{a})$ auflösbar.

Grund: Sei $\alpha$ eine Nullstelle von $X^{r_1} - a$ in $\overline{K}$, die anderen Nullstellen von $X^{r_1} - a$ in $\overline{K}$ sind von der Form $\zeta_{r_1}^i \alpha$ mit $i \in \mathbb{Z}/r_1\mathbb{Z}$, also ist $K(\zeta_{r_1})(\alpha)/K(\zeta_{r_1})$ galoissch. Für $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\zeta_{r_1})(\alpha)/k(\zeta_{r_1})$ ist $\sigma(\alpha) = \zeta_{r_1}^i \alpha$ für ein $i$ und $\sigma$ ist durch $i$ eindeutig bestimmt. Daher gilt für Elemente $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(K(\zeta_{r_1})(\alpha)/K(\zeta_{r_1}))$ mit $\sigma(\alpha) = \zeta_{r_1}^i \alpha$ und $\tau(\alpha) = \zeta_{r_1}^j \alpha$, dass $\sigma\tau(\alpha) = \sigma(\zeta_{r_1}^j \alpha) = \zeta_{r_1}^j(\sigma(\alpha)) = \zeta_{r_1}^{i+j}\alpha = \tau\sigma(\alpha)$. Daher ist $\mathrm{Gal}(K(\zeta_{r_1})(\alpha)/K(\zeta_{r_1}))$ kommutativ.

Nächster Schritt: $E_2 = E_1(\sqrt[r_2]{a}) \subset E_1'(\sqrt[r_2]{a})$. Wir bilden $E_2' = E_1'(\zeta_{r_2}, \sqrt[r_2]{a})$ und wie vorher: $E_2'/E_1'$ galoissch.

Problem: $E_2'/K$ nicht notwendig galoissch. Ein galoisscher Oberkörper von $E_2'/K$ ist

$$E_2'' = E_1'\Big(\zeta_{r_2}, \big(\sqrt[r_2]{\sigma(\alpha)}\big)_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E_1'/K)}\Big).$$

Nun ist $E_2''/E_1(\zeta_{r_2})$ das Kompositum abelscher Galoiserweiterungen und nach Satz 4.17 (ii) (induktiv anzuwenden) abelsch. Somit ist $E_2''/E_1'$ auflösbar, $E_1'/K$ auflösbar $\overset{5.47}{\Longrightarrow} E_2''/K$ auflösbar. Umbenennung: $E_2' = E_2''$.

Jetzt macht man induktiv weiter und erhält $E_n'/K$ galoissch mit auflösbarer Galoisgruppe und $L \subset E \subset E_n'$. □

**Korollar 6.5.** *Eine algebraische Gleichung $f(X) = 0$ mit $f \in K[X]$ ist genau dann auflösbar, wenn die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ des Zerfällungskörpers $L$ von $f$ über $K$ auflösbar ist.*

**Korollar 6.6.** *Die allgemeine Gleichung $f(X) = 0$ vom Grad $n$, also*

$$f(X) = X^n + t_1X^{n-1} + \cdots + t_n \in K(t_1, \ldots, t_n)[X]$$

*ist*

- *auflösbar für $n \leq 4$,*
- *nicht auflösbar für $n \geq 5$.*

*Beweis.* Die allgemeine Gleichung vom Grad $n$ hat die Galoisgruppe $\mathfrak{S}_n$. Das Ergebnis folgt aus Satz 5.49. □

**Bemerkung 6.7.** Mit etwas mehr Aufwand kann man auch Polynome $f \in \mathbb{Q}[X]$ finden, deren Galoisgruppe nicht auflösbar ist.

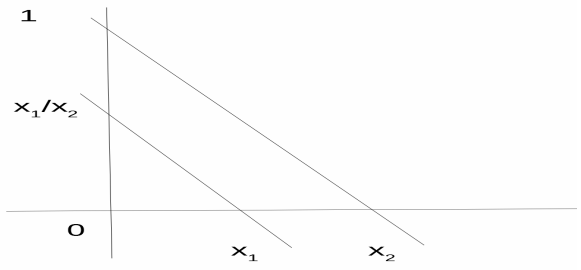
## 6.2 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Zu einer Teilmenge $S \subset \mathbb{C}$ sei $\mathrm{Ko}(S)$ die Menge aller komplexen Zahlen, die man in endlich vielen Schritten mit Zirkel und Lineal aus $S$ konstruieren kann. Erlaubt sind folgende Operationen um die Menge zu vergrößern

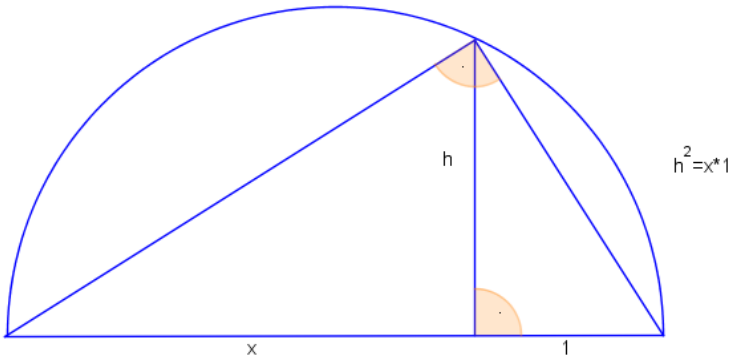
A) Zu $z_1, \ldots, z_4$ bilde man den Schnittpunkt der Geraden $\overline{z_1 z_2}$ und $\overline{z_3 z_4}$.
B) Zu $z_1, \ldots, z_5$ bilde man die Schnittpunkte zwischen der Geraden $\overline{z_1 z_2}$ und dem Kreis um $z_3$ mit Radius $d(z_4, z_5)$.
C) Zu $z_1, \ldots, z_6$ bilde man die Schnittpunkte der Kreise um $z_1$ mit Radius $d(z_2, z_3)$ und um $z_4$ mit Radius $d(z_5, z_6)$.

*Standardvoraussetzung:* $0, 1 \in S$.

Wir bemerken:
1) $i$, $\zeta_6 \in \mathrm{Ko}(S)$.
2) $z_1, z_2 \in \mathrm{Ko}(S) \Rightarrow z_1 \pm z_2 \in S$.
3) für reelle $x_1, x_2$ liegen $x_1 x_2$, $\frac{x_1}{x_2} \in \mathrm{Ko}(S)$ (Strahlensätze).




4) $z \in \mathrm{Ko}(S) \iff \mathrm{Re}(z),\ \mathrm{Im}(z) \in \mathrm{Ko}(S)$ (Lot fällen).
5) $\mathrm{Ko}(S)$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ (wegen 2)–4)).
6) Für reelles $x \in \mathrm{Ko}(S)$ liegt $\sqrt{x} \in \mathrm{Ko}(S)$. Höhensatz:




7) Für beliebiges $z \in \mathrm{Ko}(S)$ liegt $\pm\sqrt{z} \in \mathrm{Ko}(S)$ (Winkelhalbierung)

Bei $A$) bleibt man im Körper, bei $B$) und $C$) erhält man quadratische Gleichungen für die Koordinaten der neuen Punkte, also erhalten wir:

**Lemma 6.8.** $z \in \mathrm{Ko}(S) \Longleftrightarrow$ *es existiert eine endliche Kette*

$$\mathbb{Q}(S) = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$$

*mit* $z \in K_n$ *und* $[K_i : K_{i-1}] = 2$ *für* $i = 1, \ldots, n$.

**Satz 6.9.** $z \in \mathrm{Ko}(S) \Longleftrightarrow$ *es existiert eine endliche Galoiserweiterung* $L/\mathbb{Q}(S)$ *mit* $z \in L$ *und so dass* $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(S))$ *eine 2-Gruppe ist.*

*Beweis.* ($\Leftarrow$) Nach Satz 5.24 hat die 2-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}(S))$ eine Normalreihe mit Faktoren isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
($\Rightarrow$) Wir zeigen zunächst:
*Behauptung:* Es sei $E/K$ galoissch, $\mathrm{Gal}(E/K)$ eine 2-Gruppe, $M/E$ eine Erweiterung vom Grad 2 und $\widetilde{M}$ die normale Hülle von $M$ über $K$. Dann ist auch $\mathrm{Gal}(\widetilde{M}/K)$ eine 2-Gruppe.
*Grund*: Sei $M = E(\sqrt{a})$, $a \in E$. Dann ist $\widetilde{M} = E((\sqrt{\sigma(a)})_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/K)})$. Nach Satz 4.17 ist $\mathrm{Gal}(\widetilde{M}/E)$ Untergruppe der 2-Gruppe

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(E/K)} \mathrm{Gal}(E(\sqrt{\sigma(a)})/E).$$

Somit ist $\mathrm{Gal}(\widetilde{M}/E) =$ eine 2-Gruppe und daher auch $Gal(\widetilde{M}/K)$.

Sei nun $K_i = K_{i-1}(\sqrt{a_i})$, $a_i \in K_{i-1}$. Dann setzt man $L_1 = K_1$ und für $i \geq 2$

$L_i =$ normale Hülle von $L_{i-1}(\sqrt{a_i})$ über $K_0$.

Nach der obigen Behauptung ist $L_i/K$ galoissch und $\mathrm{Gal}(L_i|K_0) =$ eine 2-Gruppe. Wir erhalten $L_n \supset K_n$ und $\mathrm{Gal}(L_n/K_0)$ ist eine 2-Gruppe. □

**Konstruktion eines regelmäßigen $n$-Ecks:**

Gegeben sei eine Kreislinie.
*Aufgabe:* Man konstruiere mit Zirkel und Lineal ein regelmäßiges $n$-Eck.
Ohne Einschränkung sei der Radius = 1. Dann ist die Aufgabe genau dann lösbar, wenn $\zeta_n \in \mathrm{Ko}(\{0,1\})$. Nach Satz 4.48 ist $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ abelsch vom Grad $\varphi(n)$. Wir erhalten mit Satz 6.9:

**Satz 6.10.** *Ein regelmäßiges n-Eck ist genau dann konstruierbar, wenn* $\varphi(n)$ *eine 2-Potenz ist.*

**Beispiel 6.11.** $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17$ ok.
$n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19$ nicht möglich.

Nun gilt für $n = 2^e p_1^{e_1} \ldots p_m^{e_m}$, dass $\varphi(n) = 2^{e-1}(p_1 - 1)p_1^{e_1-1} \ldots (p_m - 1)p_m^{e_m-1}$.
Also $\varphi(n) =$ 2-Potenz $\Leftrightarrow e_i = 1$ und $p_i - 1 =$ 2-Potenz für $i = 1, \ldots, m$.

**Lemma 6.12.** *Ist $2^a + 1$ eine Primzahl, so gilt $a = 2^r$ für ein $r \geq 0$.*

*Beweis.* Es sei $a = bu$ mit $b = 2^r$, $2 \nmid u$. Dann gilt

$$2^a + 1 = 2^{bu} + 1 = (2^b + 1)(2^{b(u-1)} - 2^{b(u-2)} \cdots \pm \cdots + 1).$$

Weil $2^a + 1$ eine Primzahl ist, muß $u = 1$ gelten. □

**Definition 6.13.** Primzahlen der Form $2^{2^r}+1$ heißen **Fermatsche Primzahlen**.

Bislang hat man nur $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ und $F_4 = 65537$ gefunden. Der kleinste mögliche Kandidat für eine weitere Fermatsche Primzahl ist im Moment (Januar 2021) $F_{33}$.

**Korollar 6.14.** *Das regelmäßige $n$-Eck ist genau dann konstruierbar, wenn*

$$n = 2^e \cdot p_1 \cdots p_m$$

*mit paarweise verschiedenen Fermatschen Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$.*

**Das Problem der Winkeldrittelung:**
Zu gegebenem Winkel $\varphi$ konstruiere man $\frac{1}{3}\varphi$.
Antwort negativ für allgemeines $\varphi$. Z.B. $\varphi = 60°$. $\frac{1}{3}\varphi = 20°$ nicht konstruierbar wegen $\zeta_{18} \notin \mathrm{Ko}(\{0,1\}) = \mathrm{Ko}(\{0,1,\zeta_6\})$.

**Das Problem der Würfelverdopplung:**
Gegeben sei die Kantenlänge $r$ eines Würfels mit Volumen $V$. Man konstruiere die Kantenlänge $R$ zum Würfel mit Volumen $2V$.
Geht nicht weil $R = \sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2} \cdot r$. Liegt z.B. $r \in \mathbb{Q}$, so entspricht dies $R \in \mathrm{Ko}(\{0,1\})$ also $\sqrt[3]{2} \in \mathrm{Ko}(\{0,1\})$. Aber: $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$.

**Die Quadratur des Kreises:**
Man konstruiere zu einem gegebenem Kreis ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt.
Nicht möglich. Für $r = 1$ gilt $F = \pi$ und $\sqrt{\pi} \notin \mathrm{Ko}(\{0,1\})$ wegen $\pi \notin \mathrm{Ko}(\{0,1\})$ wegen $\pi \notin \overline{\mathbb{Q}}$ (Beweis später).

## 6.3 Die Cardanosche Formel

Wir lösen die allgemeine Gleichung vom Grad 3:

$$X^3 + aX^2 + bX + c = 0.$$

Nach der Substitution $X \mapsto X - \frac{a}{3}$ sei OE $a = 0$. Aus historischen Gründen wählen wir die Notation: $f(X) = X^3 + pX + q$ mit Unbestimmten $p, q$. Sei char $k \neq 2, 3$ und $K = k(p,q)$ der Funktionenkörper in 2 Variablen über $k$, d.h. $f \in K[X]$.

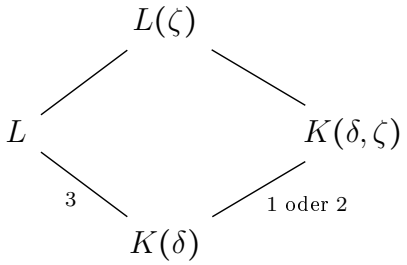
Sei $L$ der Zerfällungskörper von $f$ über $K$. Wir wissen $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathfrak{S}_3$. In $\mathfrak{S}_3$ haben wir $\mathfrak{A}_3 \lhd \mathfrak{S}_3$ und es gilt $\mathfrak{A}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Wir haben auch schon gesehen:

$$\delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \in L^{\mathfrak{A}_3},$$

wobei $x_1, x_2, x_3$ die Nullstellen von $f$ in $L$ sind und $\Delta = \delta^2 = -4p^3 - 27q^2 \in K$. Es gilt $\sigma(\delta) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \delta$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ und wegen $\mathrm{Gal}(L/K) = \mathfrak{S}_3$ folgt $\delta \notin K$. Wir erhalten den Körperturm

$$L \overset{\text{zykl. Ordnung 3}}{\supset} K(\delta) \overset{\text{zykl. Ordnung 2}}{\supset} K.$$

Jetzt sei $\zeta \in \overline{K}$ eine primitive 3-te Einheitswurzel. Dann hat $K(\delta, \zeta)/K(\delta)$ Grad 1 oder 2 und das Diagramm




zusammen mit Satz 4.17(i) gibt uns eine Inklusion

$$\mathrm{Gal}(L(\zeta)/K(\delta, \zeta)) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(L/K(\delta)) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z},$$

die aus Gradgründen ein Isomorphismus ist. Es gilt daher nach Satz 4.66

$$L(\zeta) = K(\delta, \zeta)(a) \quad \text{mit} \quad a^3 \in K(\delta, \zeta).$$

Erinnern wir uns an den Beweis von Satz 4.66: Sei $\mathrm{Gal}(L(\zeta)/K(\delta, \zeta)) = \langle \sigma \rangle$. Dann hat jedes $0 \neq a \in L(\zeta)$ mit $\zeta^{-1} = a/\sigma(a)$ die benötigte Eigenschaft. Nach dem Beweis von Hilberts Satz 90 (4.65) können wir $a = x + \zeta\sigma(x) + \zeta^2\sigma^2(x)$ mit beliebigem $x \in K(\zeta, \delta)$ wählen, jedenfalls solange $a \neq 0$.

Idee: Seien $x_1, x_2, x_3$ die Nullstellen von $f$ in $L$ und setze

$$\begin{aligned} u &= x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3 \\ v &= x_1 + \zeta^2 x_2 + \zeta x_3 \end{aligned}$$

Dann gilt $u^3, v^3 \in K(\delta, \zeta)$.
1. Schritt: Berechne $u^3, v^3$
2. Schritt: Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3 &= u \\ x_1 + \zeta^2 x_2 + \zeta x_3 &= v \end{aligned}$$

(einfach: $x_1 = \frac{u+v}{3}$, $x_2 = \frac{\zeta^2 u+\zeta v}{3}$, $x_3 = \frac{\zeta u+\zeta^2 v}{3}$)
3. Schritt: Finde $u, v$.
Beobachtung: die Nummerierung von $x_1, x_2, x_3$ war willkürlich, daher kann man $u$ als beliebige 3. Wurzel aus $u^3$ wählen. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} uv &= (x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3)(x_1 + \zeta^2 x_2 + \zeta x_3) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + (\zeta + \zeta^2)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3). \end{aligned}$$

Nun betrachten wir

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ s_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p \\ s_3 &= x_1x_2x_3 = -q. \end{aligned}$$

Dann gilt wegen $\zeta + \zeta^2 = -1$

$$uv = s_1^2 - 2s_2 - s_2 = -3p.$$

D.h. nach der Wahl von $u$ ist besteht keine Freiheit für die Wahl von $v$.
Außerdem erhalten wir

$$u^3v^3 = -27p^3.$$

Wir berechnen $u^3 + v^3$:

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= (u + v)(u + \zeta v)(u + \zeta^2 v) \\ &= (3x_1)(3\zeta x_2)(3\zeta^2 x_3) \\ &= 27x_1x_2x_3 = -27q \end{aligned}$$

Daher sind $u^3, v^3$ die Nullstellen von $X^2 + 27qX - 27p^3$ (sogar schon quadratische Gleichung über $K$, a priori hatten wir quadratische Gleichung über $K(\zeta)$ erwartet), also (indem man eine Quadratwurzel fixiert):

$$\begin{aligned} u^3 &= -\tfrac{27}{2}q + \sqrt{\left(\tfrac{27q}{2}\right)^2 + 27p^3} \\ v^3 &= -\tfrac{27}{2}q - \sqrt{\left(\tfrac{27q}{2}\right)^2 + 27p^3} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \tfrac{u}{3} &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\tfrac{q}{2}\right)^2}} \\ \tfrac{v}{3} &= \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + -\sqrt{\left(\tfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\tfrac{q}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$

also

**Satz (Cardanosche Formeln).** Die Nullstellen von $f(X) = X^3 + pX + q$ sind durch

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

gegeben. Hierbei wählt man die Quadratwurzel beliebig aber fest und die Kubikwurzeln so, dass ihr Produkt $-\frac{p}{3}$ ist.

**Bemerkung 6.15.** Eine andere Wahl der Quadratwurzel permutiert nur die Nullstellen.

Dies ist die Lösung der allgemeinen Gleichung. Hat man nun die *spezielle* Gleichung $X^3 + pX + q = 0$ mit $p, q \in k$ so erhält man die Lösung in $\overline{k}$ genau so.

**Spezialfall:** $k \subseteq \mathbb{R}$.
1. Fall: $f$ hat 3 reelle Nullstellen
$\Rightarrow \delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \in \mathbb{R}$ also $\Delta = \delta^2 \geq 0$.
2. Fall: $f$ hat eine reelle und zwei komplexe, nicht reelle Nullstellen $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $x_3 = \overline{x}_2$

$$\begin{aligned} \delta &= (x_1 - x_2)(x_2 - \overline{x}_2)(\overline{x}_2 - x_1) \\ &= \underbrace{(x_1 - x_2)\overline{(x_1 - x_2)}(-1)}_{\text{reell}}(x_2 - \overline{x}_2) \end{aligned}$$

also $\delta$ rein imaginär $\neq 0 \Rightarrow \Delta = \delta^2 < 0$.
Wegen $\Delta = -4p^3 - 27q^2$ entspricht der 2. Fall gerade $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0$.
In diesem Fall kann man die Quadratwurzel im Reellen ziehen und erhält die reelle Nullstelle von $f$.

– Ist $\Delta = 0$ ist die Sache einfach.
– ist $\Delta > 0$ so muß man komplexe Quadratwurzeln ziehen um die 3 reellen Lösungen zu bekommen. Das konnte man im 16. Jh. noch nicht („casus irreducibilis“).

## 6.4 Die Transzendenz von $\pi$

**Lemma 6.16.** *Seien $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ und $\theta \in \mathbb{C}[X]$. Sei $c \in \mathbb{C}$ fest und $f(X) := \frac{c^{rp-1}}{(p-1)!} X^{p-1}\theta(X)^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$. Setze*

$$S = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \int_0^1 e^{(1-t)\beta_i} f(\beta_i t)dt.$$

*Dann gilt für $p \gg 0$, dass $|S| < 1$.*

*Beweis.* Setze $A = \sup\limits_{\substack{t\in[0,1]\\ i=1,\ldots,r}} |c^r \beta_i \theta(\beta_i t)|$ und $B = \sup\limits_{\substack{t\in[0,1]\\ i=1,\ldots,r}} |\frac{1}{c} e^{(1-t)\beta_i}|$.
Dann gilt wegen

$$\begin{aligned} |S| &\leq \sum_{i=1}^{r} \int_0^1 \left| \frac{(c^r \beta_i \theta(\beta_i t))^p}{(p-1)!} \cdot \left(\frac{1}{c} e^{(1-t)\beta_i}\right) \right| dt \\ &\leq r \cdot \frac{A^p}{(p-1)!} \cdot B. \end{aligned}$$

Nun gilt $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{A^p}{(p-1)!} = 0$. □

**Lemma 6.17.** *Sei* $\theta(X) = c_r X^r + \cdots + c_0 \in \mathbb{Z}[X]$, $r \geq 1$, $c_0 \neq 0$, $c_r \neq 0$, *und* $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{C}$ *die Nullstellen von* $\theta$. *Setze* $f(X) := \frac{c_r^{rp-1}}{(p-1)!} X^{p-1} \theta(X)^p$ *und*

$$F = f + f' + f'' + \cdots + f^{(rp+p-1)}.$$

*Dann gilt für* $p$ *Primzahl* $p \gg 0$*:*

(i) $\sum_{i=1}^{r} F(\beta_i) \in p\mathbb{Z}$,
(ii) $F(0) \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$.

*Insbesondere gilt für* $k \in \mathbb{N}$ *und jede (in Abhängigkeit von* $k$*) hinreichend große Primzahl* $p$*:*

$$\sum_{i=1}^{r} F(\beta_i) + kF(0) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

*Beweis.* Das „Insbesondere“ folgt, wenn $p$ so groß ist, dass (i) und (ii) gelten und außerdem $p > k$ (also $p \nmid k$) gilt.
Die $\beta_i$ sind $p$-fache Nullstellen von $f$, daher gilt

$$\sum_{i=1}^{r} f^{(t)}(\beta_i) = 0 \text{ für } 0 \leq t < p.$$

Wegen $n(n+1)\cdots(n+p-1) = p!\binom{n+p+1}{p}$ ist das Produkt $p$ aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen stets durch $p!$ teilbar. Daher sind alle Koeffizienten der $p$-ten oder höheren Ableitung eines beliebigen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten durch $p!$ teilbar. Wir sehen, dass für $t \geq p$ die Koeffizienten im Polynom $f^{(t)}$ ganzzahlig und durch $c_r^{rp-1} p$ teilbar sind (insbesondere gilt $f^{(t)}(0) \in p\mathbb{Z}$). Für $t \geq p$ ist daher das Polynom

$$P_t(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{i=1}^{r} f^{(t)}(X_i)$$

ein ganzzahliges, symmetrisches Polynom vom Grad $\leq pr - 1$ mit ganzzahligen durch $c_r^{pr-1} p$ teilbaren Koeffizienten.
Da $P_t$ symmetrisch und die $\beta_i$ die Nullstellen eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten sind, gilt $\sum_{i=1}^{r} f^{(t)}(\beta_i) \in \mathbb{Q}$. Da $c_r \beta_i$, $i = 1, \ldots, r$, ganz-algebraisch ist, und eine rationale, ganz-algebraische Zahl ganzzahlig ist, folgt $\sum_{i=1}^{r} f^{(t)}(\beta_i) \in p\mathbb{Z}$ für $t \geq p$. Dies zeigt (i).
Nun betrachten wir die Werte von $f^{(t)}$ an der Stelle 0. Oben haben wir schon gesehen, dass $f^{(t)}(0) \in p\mathbb{Z}$ für $t \geq p$ gilt. Nun gilt nach Definition und binomischer Formel

$$f(X) = \frac{c_r^{rp-1}}{(p-1)!} \left( c_0^p X^{p-1} + \text{ Terme mit höheren } X\text{-Potenzen} \right).$$

Also

$$\begin{aligned} f^{(t)}(0) &= 0 && 0 \le t \le p-2 \\ f^{(p-1)}(0) &= c_r^{pr-1} \cdot c_0^p \\ f^{(t)}(0) &\in p\mathbb{Z} && t \ge p. \end{aligned}$$

Für $p > \max(c_r, c_0)$ gilt daher (ii). □

**Korollar 6.18.** *Für $\beta_1, \dots, \beta_r$ wie in Lemma 6.17 und $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$e^{\beta_1} + \cdots + e^{\beta_r} + k \neq 0.$$

*Beweis.* Seien $f, F$ wie vorher. Man hat $(e^{-x}F(x))' = -e^{-x}f(x)$ (einfache Rechnung). Daher gilt

$$\begin{aligned} e^{-x}F(x) - e^0F(0) &= \int_0^x -e^{-s}f(s)ds \\ \text{(Variablentransformation)} &= \int_0^1 -e^{-tx}f(tx)\cdot x\, dt \end{aligned}$$

und daher

$$F(x) - e^xF(0) = -x\int_0^1 e^{(1-t)x}f(tx)dt.$$

Wäre nun $e^{\beta_1} + \cdots + e^{\beta_r} + k = 0$, so folgte

$$\sum_{i=1}^r F(\beta_i) + kF(0) = -\sum_{i=1}^r \beta_i \int_0^1 e^{(1-t)\beta_i}f(\beta_i t)dt.$$

Für $p \gg 0$ Primzahl steht links eine ganze Zahl $\neq 0$ und rechts eine komplexe Zahl vom Betrag $< 1$. Widerspruch. □

**Satz 6.19.** *$\pi$ ist transzendent.*

*Beweis.* Angenommen $\pi$ und damit auch $\pi i$ wäre algebraisch. Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von $\pi i$ über $\mathbb{Q}$ und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Nullstellen von $f$. OE $\alpha_1 = \pi i$. Wegen $e^{\pi i} = -1$ gilt

$$(e^{\alpha_1} + 1)\dots(e^{\alpha_n} + 1) = 0.$$

Sei für eine Teilmenge $I \subset \{1, \dots, n\}$

$$\beta_I := \sum_{i \in I} \alpha_i.$$

Das Polynom

$$\Phi(X) = \prod_{I \subset \{1,\dots,n\}} (X - \beta_I)$$

ist symmetrisch in den $\alpha_i$ und hat daher rationale Koeffizienten. Wir numerieren die $\beta$'s, so dass

$$\beta_1, \dots, \beta_r \neq 0, \quad \beta_{r+1} = \cdots = \beta_{2^n} = 0.$$

Wegen $\alpha_1 \neq 0$ und $\beta_\emptyset = 0$ gilt $1 \leq r \leq 2^n - 1$. Also $\Phi(X) = X^{(2^n - r)}\Psi(X)$ mit $\Psi(X) \in \mathbb{Q}[X]$, $\Psi(0) \neq 0$. Für geeignetes $a \in \mathbb{N}$ gilt daher

$$\theta(X) := a \cdot \Psi(X) = c_r X^r + \cdots + c_0 \in \mathbb{Z}[X],$$

$c_r \neq 0$, $c_0 \neq 0$, und $\beta_1, \dots, \beta_r$ sind die Nullstellen von $\theta$. Aus

$$(e^{\alpha_1} + 1) \cdots (e^{\alpha_n} + 1) = 0$$

folgt

$$e^{\beta_1} + \cdots + e^{\beta_r} + (2^n - r) = 0.$$

Das ist nach Lemma 6.18 nicht möglich. Widerspruch. □

## 6.5 Der Fundamentalsatz der Algebra

**Satz 6.20.** *$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.*

Zum Beweis erinnern wir uns, dass der Zwischenwertsatz der Analysis die folgenden Resultate impliziert:
1) Jedes $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ hat eine Quadratwurzel in $\mathbb{R}$.
2) Jedes Polynom ungeraden Grades $f \in \mathbb{R}[X]$ hat eine reelle Nullstelle.

Aus 1) erhält man durch einfache Rechnung:
3) Jede komplexe Zahl besitzt eine Quadratwurzel in $\mathbb{C}$.

*Beweis von Satz 6.20.* Sei $L/\mathbb{C}$ eine endliche Erweiterung. Z.z. $L = \mathbb{C}$. Durch Übergang zur normalen Hülle können wir annehmen, dass $L/\mathbb{R}$ galoissch ist. Sei $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{R})$, $\#G = 2^r \cdot n$, $n$ ungerade, $r \geq 1$.
Sei $H \subset G$ eine 2-Sylowgruppe. Dann ist $[L^H : \mathbb{R}] = n$. Nach dem Satz vom primitiven Element gilt $L^H = \mathbb{R}(a)$ und $a$ hat Minimalpolynom $f$ vom Grad $n$ über $\mathbb{R}$. $n$ ungerade + $f$ irreduzibel $\overset{2)}{\Longrightarrow} n = 1$. $\Rightarrow \#G = 2^r$.

Z.z. $r = 1$. Wäre $r > 1$, d.h. $\#\mathrm{Gal}(L/\mathbb{C}) = 2^{r-1} > 1$, so gibt es in $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{C})$ einen Normteiler vom Index 2 (Satz 5.24). Dieser entspricht einer Galoiserweiterung vom Grad 2 von $\mathbb{C}$. Nach (3) gibt es solch eine nicht. □

Es gilt $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$. Wann ist der algebraische Abschluss noch nahe?

**Satz 6.21.** *Sei $k$ nicht algebraisch abgeschlossen und $[\overline{k} : k] < \infty$. Dann gilt $[\overline{k} : k] = 2$, $\mathrm{char}(k) = 0$ und $\overline{k} = k(i)$, $i^2 = -1$.*

*Beweis.* Wir beschränken uns im Beweis auf den Fall $\mathrm{char}(k) = 0$. (Das kann man aber mit mehr Aufwand folgern).
1. Schritt: $G = G(\overline{k}/k)$ ist 2-Gruppe. Wenn nicht, enthält $G$ eine Untergruppe $H \subset G$ mit $H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p$ Primzahl, $p \neq 2$. Ersetze $k$ durch $\overline{k}^H$. Also OE $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dann hat $k$ keine Erweiterung vom Grad prim zu $p$. Wegen $[k(\zeta_p) : k)] \leq p-1$ folgt $\zeta_p \in k$. Nach Satz 4.66 folgt $\overline{k} = k(a)$, $a^p = c \in k$. Wähle ein $\alpha \in \overline{k}$ mit $\alpha^p = a$. Dann gilt $N_{\overline{k}/k}(\alpha)^p = N_{\overline{k}/k}(\alpha^p) = N_{\overline{k}/k}(a) = a^p = c \Rightarrow c$ hat $p$-te Wurzel in $k \Rightarrow$ $X^p - c$ nicht irreduzibel. Widerspruch.

2. Schritt: Angenommen $\overline{k} \neq k(i)$, $i^2 = -1$. Nach Schritt 1 ist $G = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k(i))$ eine 2-Gruppe, also existiert $H \subset G$, $H \equiv \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann wie in Schritt 1:
$L = \overline{k}^{H'}$, $\overline{k} = L(a)$, $a^2 = c \in L$. Wähle $\alpha \in \overline{k}$ mit $\alpha^2 = a$. Dann gilt $N_{\overline{k}/L}(\alpha)^2 = N_{\overline{k}/L}(a) = -c$ und $i \cdot N_{\overline{k}/L}(\alpha)$ ist eine Wurzel aus $c$ in $L$. Widerspruch $\Rightarrow \overline{k} = k(i)$. □

**Definition 6.22.** Ein Paar $(k, P \subset k^\times)$ heißt **angeordneter Körper** wenn gilt:

(i) Für $x \in k$ gilt genau eine der drei Möglichkeiten $x = 0$, $x \in P$, $-x \in P$, und

(ii) Für $x, y \in P$ gilt $x + y \in P$, $xy \in P$.

Man sagt dann $x < y$, wenn $y - x \in P$ und es gilt: $(x < y) \Rightarrow (x + z < y + z)\ \forall z$ und $(x < y) \Rightarrow (xz < yz)\ \forall z > 0$.

**Beispiel 6.23.** $k = \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Anordnung $P = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

**Satz 6.24.** *Sei $k$ wie in Satz 6.21. Dann existiert auf $k$ eine Anordnung.*

*Beweis.* Definiere

$$x \in P \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists\, y \in k^\times,\ x = y^2.$$

Nun gilt für $x \neq 0$ höchstens $x \in P$ oder $-x \in P$ (wegen $i \notin k$). Ist $x \neq 0$ kein Quadrat in $k$, so ist $-x$ Quadrat (siehe Schritt 2, Beweis von Satz 6.21). Also gilt (i).
Zu (ii): $x, y \in P \Rightarrow xy \in P$ gilt trivial. Sei $x = a^2$, $y = b^2$, $a, b \in k^\times$. Sei $(c+id)^2 = a+bi$ in $\overline{k}$, $c, d \in k$. Dann gilt $x + y = a^2 + b^2 = N_{\overline{k}/k}(a + bi) = N_{\overline{k}/k}(c + id)^2 = (c^2 + d^2)^2$, wegen $i \notin k$ gilt $c^2 \neq -d^2$, also $x + y \in P$. □

**Bemerkung 6.25.** Körper mit einer Anordnung heißen **formal reell**. Körper wie in Satz 6.21 heißen **formal reell abgeschlossen**.

Man kann zeigen:
• $k$ formal reell $\Longleftrightarrow -1$ ist nicht Summe von Quadraten in $k$.
• Jeder formal reelle Körper ist in einem formal reell abgeschlossenen Körper enthalten.