Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 4 - Update-Nr.: 1 15. Mai 2020

Abgabe bis Fr. 22.05.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Achtet bei der Abgabe darauf, Eure Abgabe tatsächlich zu bestätigen.
- Genau eine (beliebige) Person pro Abgabegruppe gibt bitte die Lösungen ab, wobei aus denen der Name der zweiten Person, falls vorhanden, klar hervorgeht.
- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei: *Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf.* Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf.* Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.

Themen:

- Offene und abgeschlossene Mengen
- Inneres, Rand und Abschluss
- Skalarprodukte
- Gram-Schmidt-Verfahren

Aufgabe 4.1 (6 Punkte): Aussagen über Mengen

Sei $\mathbb{K}^n$ ein metrischer Raum. Man beweise oder widerlege jeweils:

(a) Sei $d(\cdot,\cdot) : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ eine Metrik und $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei außerdem $\rho : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\rho(x) = \varphi(\|x\|_2),$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm bezeichne, und erfülle zusätzlich

$$d(x,y) = \rho(x-y) \quad \forall x,y \in \mathbb{K}^n.$$

Dann ist ρ eine Norm.[1] $\boxed{3}$

(b) Eine Teilmenge $O \subset \mathbb{K}^n$ ist genau dann offen, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält. $\boxed{1}$

(c) Der Rand ∂M einer Teilmenge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist abgeschlossen. $\boxed{1}$

(d) Für Teilmengen $M \subset \mathbb{K}^n$ gilt $\left(\overline{M}\right)^\circ = \overline{(M^\circ)}$. $\boxed{1}$

[1]Nicht verwirren lassen, es kann durchaus mehrere Normen für einen Vektorraum geben. Man denke bspw. an die euklidische Norm und die Maximumsnorm.

Aufgabe 4.2 (5 Punkte): Inneres, Rand und Abschluss

Man bestimme das Innere M°, den Rand ∂M und den Abschluss $\overline{M}$ für die folgenden Mengen im $\mathbb{R}^n$:

(a) $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < 1,\ x \in \mathbb{Q}^n\}$, $\boxed{2}$

(b) $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1,\ x_1 = 0\}$, $\boxed{1}$

(c) $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 1\}$ mit $f(x) := \begin{cases} 1, & x \in (-1,1)^n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, $\boxed{1}$

(d) $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 1\}$ mit $g(x) := \frac{3}{2} - f(x)$, wobei f wie in (c) definiert ist. $\boxed{1}$

Dabei bezeichne $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm und $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm.

Aufgabe 4.3 (6 Punkte): Skalarprodukte

Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Wir betrachten einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\tilde{V}$ und einen linearen Unterraum $V \subset \tilde{V}$. Dabei sind $\tilde{V}$ und V wiederum Teilmengen des Raumes $C([a,b])$, also des Raumes der stetigen Funktionen von $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Dabei ist $\tilde{V}$ definiert als

$$\tilde{V} := \{f \in C([a,b]) \mid \text{Es gibt eine Zerlegung } \Delta \text{ (abhängig von } f\text{) von } [a,b],\ \text{sodass} \\ f \text{ auf den abgeschlossenen Teilintervallen differenzierbar ist}\}.$$

In anderen Worten: $\tilde{V}$ ist der Raum der stetigen Funktionen, die stückweise differenzierbar sind. Weiter ist $V \subset \tilde{V}$ definiert als

$$V := \left\{ f \in \tilde{V} \;\middle|\; f(a) = f(b) = 0 \right\}.$$

Weiter sei eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : \tilde{V} \times \tilde{V} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f,g) := \int_a^b f'(x) g'(x) \mathrm{d}x \quad \forall f, g \in \tilde{V}.$$

Dabei werden f' und g' stückweise gebildet. Man zeige

(a) $(\cdot,\cdot)$ ist <u>kein</u> Skalarprodukt auf $\tilde{V}$. $\boxed{3}$

(b) $(\cdot,\cdot)$ ist <u>ein</u> Skalarprodukt auf V. $\boxed{3}$

Aufgabe 4.4 (3 Punkte): Gram-Schmidt-Verfahren

Man orthonormalisiere die Polynome $1,\ t,\ t^2,\ t^3 \in C([0,1])$ mithilfe des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren bzgl. des Skalarpodukts

$$(f,g) := \int_0^1 f(t) g(t) \mathrm{d}t.$$