Aufgabe 1

Die Kontraposition von Satz 1.42(ii) lautet: Ist $\operatorname{char}(K_1) \neq \operatorname{char}(K_2)$, dann gibt es keinen Körperhomomorphismus von K_1 nach K_2. Da $\operatorname{char}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = 3 \neq 5 = \operatorname{char}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ gibt es keinen Körperhomomorphismus von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Es gilt $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^\times = (\{\overline{1}, \overline{2}\}, \cdot, \overline{1})$ und $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}^\times = (\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}, \cdot, \overline{1})$. Bei einem Gruppenhomomorphismus wird das neutrale Element auf das neutrale Element abgebildet: $f(\overline{1}) = \overline{1}$. Ferner ist $f(\overline{2}) \cdot f(\overline{2}) = f(\overline{2} \cdot \overline{2}) = f(\overline{1}) = \overline{1}$.

a) Annahme: $f(\overline{2}) = \overline{1} \implies f(\overline{2}) \cdot f(\overline{2}) = \overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1} \checkmark$

b) Annahme: $f(\overline{2}) = \overline{2} \implies f(\overline{2}) \cdot f(\overline{2}) = \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$ ↯

c) Annahme: $f(\overline{2}) = \overline{3} \implies f(\overline{2}) \cdot f(\overline{2}) = \overline{3} \cdot \overline{3} = \overline{4}$ ↯

d) Annahme: $f(\overline{2}) = \overline{4} \implies f(\overline{2}) \cdot f(\overline{2}) = \overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{1} \checkmark$

Für Annahme a) erhalten wir also $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, a \mapsto \overline{1} = e_{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}}$. Das ist der triviale Homomorphismus (siehe Bsp. 1.25) und damit ein Gruppenhomomorphismus. Für Annahme d) erhalten wir $f : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \overline{1} \mapsto \overline{1}, \overline{2} \mapsto \overline{4}$. Es ist also $f(1 \cdot 1) = f(1) = 1 = 1 \cdot 1 = f(1) \cdot f(1)$, $f(1 \cdot 2) = f(2) = 4 = 1 \cdot 4 = f(1) \cdot f(2)$ (analog für $f(2 \cdot 1)$) und $f(2 \cdot 2) = f(4) = f(1) = 1 = 16 = 4 \cdot 4 = f(2) \cdot f(2)$. Also ist $\forall a, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} : f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \implies f$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 2

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Dann erhalten wir folgendes Gleichungssystem.

$$x_2 \cdot (-2) - x_3 \cdot 0 = 2 \tag{1}$$
$$x_3 \cdot (5) - x_1 \cdot (-2) = -1 \tag{2}$$
$$x_1 \cdot 0 - x_2 \cdot 5 = 5 \tag{3}$$

Aus (1) folgt unmittelbar $x_2 = -1$.

Aufgabe 3

$$-\frac{r^2}{\sqrt[3]{-\frac{27GM}{rw^2} + \frac{\sqrt{\frac{2916G^2M^2}{r^2w^4} - 108r^6}}{2}}} - r - \frac{\sqrt[3]{-\frac{27GM}{rw^2} + \frac{\sqrt{\frac{2916G^2M^2}{r^2w^4} - 108r^6}}{2}}}{3}$$

$$-\frac{r^2}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{27GM}{rw^2} + \frac{\sqrt{\frac{2916G^2M^2}{r^2w^4} - 108r^6}}{2}}} - r - \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{27GM}{rw^2} + \frac{\sqrt{\frac{2916G^2M^2}{r^2w^4} - 108r^6}}{2}}}{3}$$

$$-\frac{r^2}{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{27GM}{rw^2}+\frac{\sqrt{\frac{2916G^2M^2}{r^2w^4}-108r^6}}{2}}}-r-\frac{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{27GM}{rw^2}+\frac{\sqrt{\frac{2916G^2M^2}{r^2w^4}-108r^6}}{2}}}{3}$$

Aufgabe 4