Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

9. Übungsblatt

Aufgabe 33 (Unkorreliertheit und Unabhängigkeit, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).
Seien (X, Y) die Koordinaten eines Punktes, der zufällig aus $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ausgewählt wird, d.h. der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte

$$\mathbb{f}^{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Berechnen Sie die Marginalverteilungen $\mathbb{f}^X$ und $\mathbb{f}^Y$ von X und Y.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X), \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ sowie $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$ und die Korrelation $\rho(X, Y)$.
Hinweis: *Verwenden Sie für die Berechnungen die Transformationsformel und Polarkoordinaten $(x, y) = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ bzw. $x = \sin(\phi)$ für die 2- bzw. 1-dimensionalen Integrale.*

(c) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind, obwohl sie unkorreliert sind.

Aufgabe 34 (Unkorreliertheit und Unabhängigkeit, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).
In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es zwingend notwendig ist, dass zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 **gemeinsam** normalverteilt sind, damit aus $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) = 0$ auf die Unabhängigkeit von X_1, X_2 geschlossen werden kann (vgl. Beispiel 24.14 aus dem Skript).
Sei dazu $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei $Y \sim \mathrm{N}_{(0,1)}$ standardnormalverteilt und $V_p \sim \mathrm{Bin}_{(1,p)}$ eine von Y unabhängige, bernoulliverteilte Zufallsvariable mit $p \in (0, 1)$. Definiere $Z_p := (-1)^{V_p} \cdot Y$.

(a) Zeigen Sie: $Z_p \sim \mathrm{N}_{(0,1)}$ für alle $p \in (0, 1)$.
Hinweis: *Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Z_p, indem Sie den "Trick" $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{V_p = 0\}) + \mathbb{P}(A \cap \{V_p = 1\})$ benutzen.*

(b) Zeigen Sie: Für alle $p \in (0, 1)$ sind Y, Z_p nicht unabhängig.
Hinweis: *Betrachten Sie die Ereignisse $\{Y < -1, Z_p < -1\}$ und $\{Y < -1, Z_p > 1\}$.*

(c) Finden Sie $p \in (0, 1)$, so dass Y, Z_p unkorreliert sind, d.h. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, Z_p) = 0$.

Aufgabe 35 (Erwartungstreue Schätzer, 4 = 1 + 0.5 + 1 + 1.5 Punkte).
In dieser Aufgabe rekapitulieren wir Beispiel 26.16 (a) und Beispiel 26.18 (a) aus der Vorlesung.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ unabhängig und identisch, stetig verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $\mathbb{F}^X$.
Seien $M_1 := \min(X_1, ..., X_n)$ und $M_2 := \max(X_1, ..., X_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktionen von M_1 und M_2 gegeben sind durch

$$\mathbb{F}^{M_1}(z) = 1 - (1 - \mathbb{F}^X(z))^n \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F}^{M_2}(z) = \mathbb{F}^X(z)^n.$$

Hinweis: *Finden Sie eine zu* $\max(x_1, ..., x_n) \leq z$ *äquivalente Aussage, die Bedingungen an die einzelnen* x_i *stellt.*

(b) Sei $X_1 \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Welche bekannte Verteilung besitzt M_1?

(c) Sei nun $X_1 \sim U_{[0,\theta]}$ gleichverteilt auf $[0, \theta]$ mit Parameter $\theta > 0$.

- Bestimmen Sie $\mathbb{E}_\theta(X_1)$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(X_1)$.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte f_{M_2} von M_2 und berechnen Sie $\mathbb{E}_\theta(M_2)$.

(d) Wir betrachten nun zwei Schätzer für den Parameter θ: den Momentschätzer $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X_n}$ und den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_2 = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie, dass

- $\hat{\theta}_1$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist, und dass
- $\hat{\theta}_2$ nicht erwartungstreu ist.

Wir können den Maximum-Likelihood-Schätzer korrigieren, indem wir stattdessen $\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2$ betrachten. Zeigen Sie, dass für $n > 1$

- der korrigierte Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_3$ effizienter ist als der Momentschätzer $\hat{\theta}_1$.

Bestimmen Sie nun für alle drei Schätzer den mittleren quadratischen Fehler. Welcher der drei Schätzer ist der beste bzgl. des MSE?

Aufgabe 36 (t-Test für den Erwartungswert, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Auf der Packung eines Feuerwerks der Marke "Superböller" steht geschrieben, dass die durchschnittliche Lautstärke höchstens $\mu_0 = 100$ Dezibel beträgt. Wie sind skeptisch und vermuten, dass die durchschnittliche Lautstärke höher ist. Dies wollen wir der Hersteller*in nachweisen. Dazu nehmen wir an, dass die Lautstärke beim Abbrennen eines Böllers normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ (entspricht der durchschnittlichen Lautstärke) und unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Unter strenger Aufsicht zünden wir nun $n = 10$ der "Superböller"-Feuerwerke unabhängig voneinander an und messen folgende Lautstärken (in Dezibel):

112.0	105.2	98.1	108.7	97.2	102.3	110.1	100.5	103.3	99.0

(a) Formulieren Sie zunächst die Hypothesen für das Testproblem, so dass der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entspricht, dass wir den Hersteller zu Unrecht beschuldigen. Führen Sie dann einen Student'schen t-Test (Satz 26.38) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und formulieren Sie das Ergebnis der Testentscheidung.

(b) Sei $\alpha \in (0,1)$. Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}_{(\mu,\sigma^2)}$. Sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Mittelwert und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ die empirische Stichprobenvarianz. Zeigen Sie, dass das Intervall

$$B(X_1, ..., X_n) := \left[\overline{X_n} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X_n} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ ist.

(c) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Lautstärke μ des Feuerwerks "Superböller" basierend auf unseren Beobachtungen an.

Hinweis: *Hier sind einige Quantile der t-Verteilung:* $t_{9,0.95} = 1.833$, $t_{10,0.95} = 1.812$, $t_{9,0.975} = 2.262$, $t_{10,0.975} = 2.228$.

Abgabe:

In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **01. Februar 2021, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:

`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`