Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I

8. Übungsblatt

Abgabe bis zum 12.12.19, 9:15 Uhr

Aufgabe 1 (1 + 5 Punkte)**.** Sei K ein Körper. Wir definieren den K-Vektorraum $K[X]$, indem wir die Symbole X^i für $i \in \mathbb{N}_0$ zu einer Basis erklären.[1]

Für festes n definieren wir ferner $K[X]_{\leqslant n} = \mathrm{Lin}((X^i)_{0 \leqslant i \leqslant n})$. Wir definieren darüber hinaus die Systeme $\underline{v} = (X^0, X^1, X^2, X^3)$ und $\underline{w} = (X^0, X^0 + X^1, X^1 - X^2 + X^3, X^3 + X^0)$.

(a) Zeigen Sie, dass auch $\underline{w}$ eine Basis von $W = K[X]_{\leqslant 3}$ ist.

(b) Bestimmen Sie $M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(\partial)$, $M^{\underline{w}}_{\underline{w}}(\partial)$, $M^{\underline{v}}_{\underline{w}}(\mathrm{id}_W)$, $M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(\mathrm{id}_W)$, $M^{\underline{v}}_{\underline{w}}(\partial)$ und $M^{\underline{w}}_{\underline{v}}(\partial)$, wobei $\partial\colon W \to W$ wie auf Blatt 5 durch
$$\partial(X^i) = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ i \cdot X^{i-1} & i \neq 0 \end{cases}$$
definiert ist.

Aufgabe 2 ($3 \cdot 2$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen.

(a) Zeigen Sie die Ungleichung $\dim \ker(g \circ f) \leqslant \dim \ker g + \dim \ker f$.

(b) Zeigen Sie die Ungleichung $\mathrm{Rg}(f) - \mathrm{Rg}(g \circ f) \leqslant \dim V - \mathrm{Rg}(g)$.

(c) Folgern Sie für $A \in M_{n,m}(K)$ und $B \in M_{l,n}(K)$ die Ungleichung
$$S\,\mathrm{Rg}(A) - S\,\mathrm{Rg}(B \cdot A) \leqslant n - S\,\mathrm{Rg}(B).$$

Aufgabe 3 (1+1+4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum. Sei ferner W ein Komplement von U in V. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\pi\colon V \to V$, welche eingeschränkt auf U die Identität und eingeschränkt auf W konstant null ist.

(b) Für dieses π gilt: $\pi \circ \pi = \pi$.

(c) Ist umgekehrt $\pi'\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, für welche $\pi' \circ \pi' = \pi'$ gilt, so zerlegt sich V als direkte Summe: $V \cong \pi'(V) \bigoplus \ker \pi'$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Konstruieren Sie mittels Aufgabe 3(a,b) drei verschiedene Matrizen A_1, A_2, und $A_3 \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$ mit $A_i \cdot A_i = A_i$ und $A_i \cdot (1,1)^t = (1,1)^t$.

---

[1] Die Existenz eines solchen Vektorraums sieht man wie folgt: In $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, K)$ betrachten wir die Elemente $X^i \in V$, welche durch $X^i(j) = \delta_{ij}$ definiert sind. Sie haben bereits implizit auf Blatt 5 nachgewiesen, dass das System $(X^i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ linear unabhängig ist. Deren lineare Hülle $\mathrm{Lin}((X^i)_{i \in \mathbb{N}_0})$ bezeichnen wir mit $K[X]$.