1 Aufgabe 1

2 Aufgabe 2

(a) Jede Matrix A induziert durch $(x,y) \mapsto x^t A\overline{y}$ eine Sesquilinearform. Offensichtlich ist außerdem $A = \overline{A}^t$, daher muss die Sesquilinearform hermitesch sein,

$$\overline{h_A(y,x)} = \overline{h_A(y,x)}^t = \overline{y^t A \overline{x}}^t = (\overline{y}^t \overline{A} x)^t = x^t \overline{A}^t y = x^t A y = h_A(x,y).$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 & 3x_2 + i(x_1 - x_3) & x_3 + ix_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix} \\
=& |x_1|^2 - i\overline{x_1}x_2 + 3|x_2|^2 + i\overline{x_2}(x_1 - x_3) + |x_3|^2 + ix_2\overline{x_3} \\
=& |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + |x_3|^2 + i \cdot (-\overline{x_1}x_2 + \overline{x_2}x_1 - \overline{x_2}x_3 + \overline{x_3}x_2) \\
=& |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + |x_3|^2 + i \cdot ((\overline{x_2}x_1) - \overline{(\overline{x_2}x_1)} + (\overline{x_3}x_2) - \overline{(\overline{x_3}x_2)}) \\
=& |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + |x_3|^2 + i \cdot (2i \cdot \operatorname{im}(\overline{x_2}x_1) + 2i \cdot \operatorname{im}(\overline{x_3}x_2)) \\
=& \operatorname{re}(x_1)^2 + \operatorname{im}(x_1)^2 + 3\operatorname{re}(x_2)^2 + 3\operatorname{im}(x_2)^2 + \operatorname{re}(x_3)^2 + \operatorname{im}(x_3)^2 \\
&- 2(\operatorname{re}(x_2)\operatorname{im}(x_1) - \operatorname{im}(x_2)\operatorname{re}(x_1) + \operatorname{re}(x_3)\operatorname{im}(x_2) - \operatorname{im}(x_3)\operatorname{re}(x_2)) \\
=& (\operatorname{re}(x_2) - \operatorname{im}(x_1))^2 + (\operatorname{im}(x_2) + \operatorname{re}(x_1))^2 + (\operatorname{re}(x_3) - \operatorname{im}(x_2))^2 + (\operatorname{im}(x_3) + \operatorname{re}(x_2))^2 + |x_2|^2 \\
\geq& 0
\end{aligned}$$

woraus die positive Definitheit folgt.

(b) Als Ausgangsbasis für die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung nehmen wir die kanonische Basis des $\mathbb{C}^3$,

$$\{v_1, v_2, v_3\} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wegen $h_A(v_1, v_1) = 1$ ist sofort $w_1 = v_1$. Dann berechnen wir

$$w_2' = v_2 - h_A(v_2, w_1)w_1 = v_2 + i \cdot v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{h_A(w_2', w_2')}} = \frac{w_2'}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit kommt man auf

$$w_3' = v_3 - h_A(v_3, w_1)w_1 - h_A(v_3, w_2)w_2 = v_3 - 0 \cdot w_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und schließlich ist

$$w_3 = \frac{w_3'}{\sqrt{h_A(w_3', w_3')}} = \frac{w_2'}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$\underline{w} = \{w_1, w_2, w_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{C}^3, h_A)$

(c) Dafür bestimmen wir zunächst die Darstellungsmatrix von B bzgl. einer Orthonormalbasis von $(\mathbb{C}^3, h_A)$ und wählen dafür $\underline{w}$. Es gilt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir noch T^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ -i \\ \end{array} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ -i \\ \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \left| \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ -i \end{array} \left| \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ -i \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right.$$

Folglich ist die Darstellungsmatrix von B bzgl. $\underline{w}$

$$T^{-1} \cdot B \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2i & -i \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

Die dazu adjungierte Matrix ist also die Darstellungsmatrix der adjungierten Abbildung zu $B\cdot$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

und folglich ist $B\cdot$ normal bezüglich (V, h_A). Mit dem Standardskalarprodukt ist $B\cdot$ nicht normal, da die Standardbasis eine Orthonormalbasis darstellt und

$$B \cdot B^* \neq B^* \cdot B$$

(d) $\chi_{\text{char}} = (\lambda - 2) \cdot \lambda \cdot (\lambda - 2i) \implies \{2, 0, 2i\}$ sind Eigenwerte von B. Der Eigenraum zu $\lambda = 2$ ist

$$\text{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

zu $\lambda = 0$

$$\text{Lin} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zu $\lambda = 2i$

$$\text{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Da die Eigenräume alle nur eindimensional sind genügt es,

$$h_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0,$$

$$h_A(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0$$

und

$$h_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -2 \end{pmatrix}) = 0$$

nachzurechnen.

(e) Wir rechnen es wieder analog zur (c) in einer Orthonormalbasis von (V, h_A) nach und sehen

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix},$$

folglich ist $B\cdot$ nicht selbstadjungiert.

3 Aufgabe 3