Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 11
Abgabe: *Freitag, 02.07.2021, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Nullstellenmengen). **(6 Punkte)**
Sei $A := \mathbb{C}[X,Y]/(Y-X^2)$ und $\mathfrak{m} := (\overline{X},\overline{Y})$ das von den Restklassen von X und Y erzeugte Ideal von A.

(a) Bestimmen Sie alle Maximalideale von A.

(b) Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus $A_\mathfrak{m} \cong \{\overline{f}/\overline{g} \in \mathrm{Quot}(A) \mid f,g \in \mathbb{C}[X,Y], g(0,0) \neq 0\}$ von Ringen existiert.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ kanonisch die Struktur eines $\mathbb{C}$-Vektorraumes hat und bestimmen Sie dessen Dimension.

Aufgabe 2 (Proendliche Gruppen). **(6 Punkte)**
Sei G eine kompakte (und damit auch hausdorffsche) topologische Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Jede offene Untergruppe ist von endlichem Index.

(b) Angenommen, jede offene Teilmenge M von G mit $1 \in M$ enthält einen offenen Normalteiler (eine solche Gruppe nennt man *proendlich*). Dann ist jede abgeschlossene Untergruppe H von G der Durchschnitt aller sie enthaltenden offenen Untergruppen von G:

$$\overline{H} = \bigcap_{\substack{U \subset G \text{ offen} \\ H \subset U}} U \,.$$

Aufgabe 3 (Nüchterne Räume). **(5 Punkte)**
Sei X ein topologischer Raum. Ein Punkt $\eta \in X$ heißt *generischer Punkt*, falls $X = \overline{\{\eta\}}$ (d. i. der Abschluss von $\{\eta\}$ in X). Wir nennen X *nüchtern*, falls jede irreduzible[1] und abgeschlossene Teilmenge von X einen eindeutigen generischen Punkt (bzgl. der Unterraumtopologie von X) hat; in anderen Worten: für jede irreduzible und abgeschlossene Teilmenge Z von X existiert genau ein Punkt $\eta \in Z$, so dass $Z = \overline{\{\eta\}}$. Zeigen Sie:

(a) Hat X die Eigenschaft T_2, so ist X nüchtern.

(b) Ist X nüchtern, so hat X die Eigenschaft T_0.

(c) Hat X die Eigenschaft T_0 und hat jede abgeschlossene Teilmenge von X einen generischen Punkt, so ist X nüchtern, d. h. die generischen Punkte sind bereits eindeutig.

(d) Hat X die Eigenschaft T_1, so muss X nicht notwendig nüchtern sein.

(e) Ist X nüchtern, so muss es nicht notwendig die Eigenschaft T_1 haben.

Aufgabe 4 (Trennungseigenschaften der Zariski-Topologie[2]). **(6 Punkte)**
Sei A ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:

(a) Der topologische Raum $\mathrm{Spec}(A)$ ist nüchtern (siehe Aufgabe 3).

(b) Ist A noethersch, so sind folgende Eigenschaften äquivalent:

(1)	$\mathrm{Spec}(A)$ erfüllt T_2.	(2)	$\mathrm{Spec}(A)$ erfüllt T_1.
(3)	A ist artinsch.	(4)	$\mathrm{Spec}(A)$ ist endlich und diskret.

[1] Siehe Blatt 10, Aufgabe 10, Aufgabe 4.
[2] Diese Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.

Zusatzaufgabe 5 (Produkt und projektiver Limes topologischer Räume). **(6 Punkte)**

Sei $(T_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume. Zeigen Sie:

(a) Das Produkt $P := \prod_{i\in I} T_i$ mit der Produkttopologie (Definition 23.15) erfüllt die Universaleigenschaft eines Produktes in der Kategorie der topologischen Räume, d. h. für jeden topologischen Raum X und für jede Familie $(f_i\colon X \to T_i)_{i\in I}$ von stetigen Abbildungen existiert eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $f\colon X \to P$, so dass $f_i = p_i \circ f$ für alle $i \in I$, wobei $p_i\colon P \to T_i$ die kanonische Projektion bezeichne.

Sei $(T_i, (\varphi_{i,j}\colon T_j \to T_i)_{i\leq j\in I})_{i\in I}$ ein projektives System topologischer Räume. Zeigen Sie:

(b) Der projektive Limes $T := \varprojlim_{i\in I} T_i$ mit der Unterraumtopologie der Produkttopologie (Definition 23.16) erfüllt die Universaleigenschaft eines projektiven Limes in der Kategorie der topologischen Räume, d. h. für jeden topologischen Raum X und für jede Familie $(g_i\colon X \to T_i)_{i\in I}$ von stetigen Abbildungen derart, dass $g_i = \varphi_{i,j} \circ g_j$ für alle $i \leq j$ in I, existiert eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $g\colon X \to T$, so dass $g_i = q_i \circ g$ für alle $i \in I$, wobei $q_i\colon T \to T_i$ die kanonische Projektion bezeichne.