**Einführung in die**
**Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik**
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

# 1. Übungsblatt - Lösungsskizzen

**Aufgabe 1 (Elementare Eigenschaften von $\sigma$-Algebren, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ Punkte).**
Seien $\Omega$ und $\mathcal{X}$ nichtleere Mengen.

(a) Seien $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, (beliebig viele) $\sigma$-Algebren über $\Omega$. Zeigen Sie, dass der Schnitt $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ wieder eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$ ist.
*Bemerkung: Damit ist gezeigt, dass es sich bei der in Lemma 01.06. definierten **erzeugten $\sigma$-Algebra** tatsächlich um eine $\sigma$-Algebra handelt.*

(b) Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei $\sigma$-Algebren über $\Omega$. Ist im Allgemeinen auch $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ eine $\sigma$-Algebra? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(c) Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$ und $f : \mathcal{X} \longrightarrow \Omega$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ wieder eine $\sigma$-Algebra (die sogenannte **Urbild-$\sigma$-Algebra**) über $\mathcal{X}$ ist.
*Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das Urbild bzgl. Vereinigung und Komplement stabil ist, d.h. dass $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ und $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ für Mengen $A, A_i \subseteq \Omega$, $i \in I$, gilt.*

(d) Sei $T \subseteq \Omega$ eine nichtleere Teilmenge und sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}\big|_T := \{A \cap T : A \in \mathcal{A}\}$ eine $\sigma$-Algebra (die sogenannte **Spur-$\sigma$-Algebra**, vgl. 01.23.) über $T$ ist.
*Hinweis: Anstelle eines direkten Beweises kann auch Aufgabenteil (c) mit geeignet gewähltem $f$ verwendet werden.*

**Lösung 1.**

(a) Wir überprüfen für $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ die drei Eigenschaften einer $\sigma$-Algebra über $\Omega$:

(i) Für alle $i \in I$ gilt $\Omega \in \mathcal{A}_i$, da $\mathcal{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$ ist. Damit folgt $\Omega \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

(ii) Sei $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Es folgt $A \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Da $\mathcal{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra ist, gilt auch $A^c \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Damit folgt $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

(iii) Seien für $n \in \mathbb{N}$: $A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I$: $A_n \in \mathcal{A}_i$. Da $\mathcal{A}_i$ eine $\sigma$-Algebra ist, folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$. Damit gilt auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

(b) Im Allgemeinen ist die Vereinigung zweier $\sigma$-Algebren $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ keine $\sigma$-Algebra mehr. Wir wählen zum Beispiel die Grundmenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und die beiden Mengensysteme:

$$\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\} \qquad \mathcal{A}_2 := \{\emptyset, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \Omega\}\,.$$

Diese sind von der Form $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ und damit (vgl. Beispiel 01.08.(b) aus der Vorlesung) $\sigma$-Algebren. Jedoch ist

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \Omega\}$$

keine $\sigma$-Algebra, da $\{1,2\}, \{1,3\} \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, aber $\{1,2\} \cup \{1,3\} = \{1,2,3\} \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, d.h. Bedingung (iii) ist verletzt.

(c) Wir überprüfen für $f^{-1}(\mathcal{A})$ die drei Eigenschaften einer $\sigma$-Algebra über $\mathcal{X}$. Im Wesentlichen "vererben" sich diese direkt von der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A}$:

(i) Da $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$ ist, gilt $\Omega \in \mathcal{A}$. Für die Abbildung $f : \mathcal{X} \longrightarrow \Omega$ gilt dann $\mathcal{X} = f^{-1}(\Omega) \overset{\Omega\in\mathcal{A}}{\in} f^{-1}(\mathcal{A})$.

(ii) Sei $B \in f^{-1}(\mathcal{A})$, d.h. es existiert ein $A \in \mathcal{A}$ mit $B = f^{-1}(A)$. Da $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra ist, gilt auch $A^c \in \mathcal{A}$. Damit folgt $B^c = f^{-1}(A)^c \overset{(*)}{=} f^{-1}(A^c) \overset{A^c\in\mathcal{A}}{\in} f^{-1}(\mathcal{A})$.

(iii) Seien $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f^{-1}(\mathcal{A})$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $A_n \in \mathcal{A}$ mit $B_n = f^{-1}(A_n)$. Da $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra ist, gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Damit folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \overset{(**)}{=} f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \overset{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{A}}{\in} f^{-1}(\mathcal{A})$.

*Anmerkung:* Wir haben hier zwei Rechenregeln für das Urbild einer Funktion $f : X \longrightarrow Y$ verwendet, der Vollständigkeit wegen beweisen wir diese hier:

($*$) Für $A \subseteq \Omega$ gilt: $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c)$:

$$\begin{aligned}(f^{-1}(A))^c &= \{x \in X : f(x) \in A\}^c = \{x \in X : f(x) \notin A\} \\ &= \{x \in X : f(x) \in A^c\} = f^{-1}(A^c)\end{aligned}$$

($**$) Für $(A_i)_{i\in I}$ mit $A_i \subseteq \Omega$ gilt: $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$:

$$x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \Leftrightarrow \exists j \in I : x \in f^{-1}(A_j) \Leftrightarrow \exists j \in I : f(x) \in A_j$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$$

(d) **1. Möglichkeit:** Wir definieren die Inklusions-Funktion

$$f : T \longrightarrow \Omega, \qquad x \longmapsto x.$$

Da $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$ ist, folgt mittels (c), dass auch

$$\mathcal{A}\big|_T = \{A \cap T : A \in \mathcal{A}\} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$$

eine $\sigma$-Algebra über $T$ ist.

**2. Möglichkeit:** Wir überprüfen die drei Eigenschaften einer $\sigma$-Algebra (über $T$).

(i) Da $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$ ist, gilt $\Omega \in \mathcal{A}$ und damit $T = \Omega \cap T \in \mathcal{A}\big|_T$.

(ii) Sei $B \in \mathcal{A}_T$, d.h. $B = A \cap T$ mit einem $A \in \mathcal{A}$. Es folgt (Achtung: Komplement wird nun im Raum $T$ gebildet!)

$$T \setminus B = T \setminus A = T \cap (T \setminus A) \overset{T\subseteq\Omega}{=} T \cap (\Omega \setminus A) \in \mathcal{A}\big|_T$$

da $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.

(iii) Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}\big|_T$, dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$: $B_n = A_n \cap T$ mit $A_n \in \mathcal{A}$. Es folgt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \underbrace{\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}_{\in\mathcal{A},\text{da } \sigma-\text{Algebra}} \cap T \in \mathcal{A}\big|_T.$$

**Aufgabe 2 (Eigenschaften von W'maßen, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ Punkte).**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass für $A, B, A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt:

(a) **Monotonie:** $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(b) **Bonferroni-Ungleichung:** $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$ mit $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(c) **Subadditivität:** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n)$.

(d) **Stetigkeit des Maßes von unten:**
Gilt $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

*Hinweis für (c) und (d): Definieren Sie $B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$, und drücken Sie $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ mittels der $B_n$ aus. Nutzen Sie dann Eigenschaft (iii) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.*

**Lösung 2.**

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ hat laut Definition 02.01 (auch Kolmogorov-Axiome genannt) die folgenden drei Eigenschaften:

(K1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(K2) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ (bzw. $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$)

(K3) $\mathbb{P}\left(\biguplus_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n)$ für alle paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $A \subset B$. Dann ist $B = A \uplus (B \setminus A)$, wobei das Plus im $\cup$ bedeutet, dass diese Vereinigung disjunkt ist (d.h. die Mengen links und rechts von $\cup$ haben keine gemeinsamen Elemente). Es folgt

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \uplus (B \setminus A)) \overset{(K3)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \overset{(K2)}{\geq} \mathbb{P}(A).$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \uplus (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \uplus (A \cap B) \\ A \triangle B &= (A \setminus B) \uplus (B \setminus A) \end{aligned}$$

und damit mit Hilfe von (K3)

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B), \tag{$*$}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B), \tag{$**$}$$

$$\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \overset{(*),(**)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B). \tag{$***$}$$

Außerdem gilt $A \cap B \subset A, B$, dann folgt mit Aufgabenteil $(a)$:

$$\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A \cap B)$$

und somit gilt nach $(***)$:

$$\mathbb{P}(A\triangle B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-2\mathbb{P}(A\cap B)\geq\begin{cases}\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-2\mathbb{P}(A)\\ \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-2\mathbb{P}(B)\end{cases}=\begin{cases}\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)\\ \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)\end{cases}$$

Insgesamt also $\mathbb{P}(A\triangle B)\geq|\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)|$.

(c) Seien $A_n\in\mathcal{A}$ für $n\in\mathbb{N}$.
(Die Idee ist nun, das Kolmogorov-Axiom (K3) zu benutzen. Dafür brauchen wir aber disjunkte Mengen. Wir erzeugen daher aus den gegebenen Mengen $A_n$ disjunkte Mengen $B_n$, die eng mit den Mengen $A_n$ zusammenhängen).
Definiere wie im Hinweis gegeben $B_n:=A_n\backslash\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k\right)$.
(Anschaulich bedeutet das, dass wir $B_n$ als die Menge der Elemente definieren, die durch $A_n$ *neu* zu den bisherigen Elementen von $A_1,...,A_{n-1}$ *hinzukommen.* Sind also die Elemente von $A_n$ vollständig in den Mengen $A_1,...,A_{n-1}$ enthalten, ist $B_n$ einfach die leere Menge).
Durch diese Definition sind die $B_n$ für $n\in\mathbb{N}$ paarweise disjunkt. Außerdem gilt

$$\biguplus_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \tag{1}$$

(klar mit obiger Anschauung).
Beachte nun noch, dass $B_n=A_n\backslash\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}A_k\right)\subset A_n$ gilt.
Damit haben wir

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\overset{(1)}{=}\mathbb{P}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}B_n\right)\overset{(K3)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_n)\overset{(a),B_n\subseteq A_n}{\leq}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n).$$

(d) Mit genau derselben Motivation wie in (c) erzeugen wir aus den gegebenen Mengen $A_n$ die neuen Mengen $B_n$. In diesem Fall haben wir wieder

$$\forall N\in\mathbb{N}:\quad\biguplus_{n=1}^{N}B_n=\bigcup_{n=1}^{N}A_n\overset{\forall n\in\mathbb{N}:A_n\subseteq A_{n+1}}{=}A_N\qquad\text{und}\qquad\biguplus_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n. \tag{2}$$

Wir erhalten (beachte, dass der Limes jedes einzelnen Terms unten existiert, da es sich stets um monoton wachsende, nach oben durch 1 beschränkte Folgen handelt!):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)&\overset{(2)}{=}\mathbb{P}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}B_n\right)\overset{(K3)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}(B_n)\\&\overset{(K3)}{=}\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left(\biguplus_{n=1}^{N}B_n\right)\overset{(2)}{=}\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(A_N).\end{aligned}$$

**Aufgabe 3 (Siebformel von Poincaré und Sylvester, 4 = 2 + 2 Punkte).**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. In dieser Aufgabe wollen wir eine Verallgemeinerung der Formel $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ $(*)$ beweisen und anwenden.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})\right).$$

Hierbei wird in der inneren Summe über alle möglichen, paarweise verschiedene, Indizes $k_1, ..., k_j$ summiert, sodass $\{k_1, ..., k_j\} \subseteq \{1, ..., n\}$.
*Hinweis: Nutzen Sie vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ und $(*)$ im Induktionsschritt.*

(b) Zu einer Tanzveranstaltung erscheinen $n$ Paare bestehend aus je einem roten und grünen Marsmenschen. Zufällig wird jedem roten Marsmensch ein grüner Marsmensch zugelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein ursprüngliches Paar miteinander tanzen wird? Berechnen Sie den Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ !
*Hinweis: Nutzen Sie (a) (definieren Sie also einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum) und wählen Sie für $i = 1, ..., n$: $A_i$ = "Roter Marsmensch $i$ tanzt mit der ursprünglichen Begleitung zusammen".*

**Lösung 3.**

(a) Beweis durch vollständige Induktion:
**Induktionsanfang** $n = 1$: Es gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{1} A_j\right) = \mathbb{P}(A_1) = \sum_{\{k_1\} \subset \{1\}} \mathbb{P}(A_{k_1}).$$

**Induktionsschritt** $n \to n + 1$:
Es gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) = \mathbb{P}\left(A_{n+1} \cup \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$$

Nutze die Formel $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ und $A_{n+1} \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{n}(A_j \cap A_{n+1})$:

$$= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n}(A_j \cap A_{n+1})\right)$$

Nun ist die **Induktionsvoraussetzung** auf den zweiten und dritten Summanden anwendbar (jeweils Vereinigung von $n$ Mengen in dem $\mathbb{P}$), für den dritten Summanden nutzen wir $(A_{k_1} \cap A_{n+1}) \cap ... \cap (A_{k_j} \cap A_{n+1}) = A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j} \cap A_{n+1}$:

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})\right) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j} \cap A_{n+1})\right)
\end{aligned}$$

Wir müssen nun darauf hinarbeiten, aus den zwei großen Summen eine Summe zu machen. Dazu machen wir eine Indexverschiebung $j = 1, ..., n$ zu $j = 2, ..., n+1$ bei der zweiten großen Summe:

$$= \mathbb{P}(A_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \left( (-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right)$$
$$+ \sum_{j=2}^{n+1} \left( (-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_{j-1}\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_{j-1}} \cap A_{n+1}) \right)$$

Nun interpretieren wir die großen Summen um; entfernen außerdem aus der zweiten großen Summe den Summanden für $j = n+1$ und fügen $\mathbb{P}(A_{n+1})$ als Summanden für $j = 1$ hinzu:

$$= (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \left( (-1)^{j-1} \sum_{\substack{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n,n+1\} \\ n+1 \notin \{k_1,...,k_j\}}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \left( (-1)^{j-1} \sum_{\substack{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n,n+1\} \\ n+1 \in \{k_1,...,k_j\}}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right)$$

Die beiden großen Summen können nun offensichtlich zu einer Summe zusammengefasst werden:

$$= (-1)^n \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_{n+1}) + \sum_{j=1}^{n} \left( (-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n+1\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n+1} \left( (-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n+1\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

(b) Zur Anwendung der Formel müssen wir zuerst einen Wahrscheinlichkeitsraum definieren. Für $n \in \mathbb{N}$ wähle

$$\Omega_n := \{f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\} : f \text{ ist Permutation von } \{1, ..., n\}\}, \qquad \mathcal{A}_n := 2^{\Omega_n}.$$

Dann ist $\Omega_n$ die Menge der möglichen Zulosungen der grünen Marsmenschen zu den roten Marsmenschen. Es ist $|\Omega_n| = n!$. Jede Zulosung ist gleichwahrscheinlich (siehe Aufgabenstellung: "rein zufällig"), d.h. wir definieren auf $\mathcal{A}_n$ die Laplace-Verteilung

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega_n}, \qquad A \in \mathcal{A}_n.$$

Nun definieren wir die Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit wir in der Aufgabe bestimmen sollen. Für $n \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n$ setzen wir ($A$ und $A_j$ hängen auch von $n$ ab, der

Übersichtlichkeit wegen vermerken wir das aber nicht an den Mengen):

$$\begin{aligned} A &:= \{f \in \Omega_n : \exists j \in \{1, ..., n\} : f(j) = j\} \\ &= \text{Es tanzt mind. ein roter Marsmensch mit urspr. Begleitung zusammen} \\ A_j &:= \{f \in \Omega_n : f(j) = j\} \\ &= \text{Roter Marsmensch } j \text{ tanzt mit urspr. Begleitung zusammen} \end{aligned}$$

Dann gilt $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$, und die Formel auf (a) ist anwendbar:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{j=1}^n \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})\right).$$

Es ist

$A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j} =$ Die roten Marsmenschen $k_1, ..., k_j$ tanzen mit urspr. Begleitungen zusammen

Es können also noch $(n-j)$ rote Marsmenschen aus $(n-j)$ grünen Marsmenschen wählen. Da die grünen Marsmenschen unterscheidbar sind (sonst wäre die Aufgabe sinnlos, weil man nicht unterscheiden könnte, was die ursprünglichen Paare waren), ist die Wahl mit Beachtung der Reihenfolge. Die Wahl erfolgt aber ohne Zurücklegen, weil ein roter Marsmensch nur von einem grünen Marsmensch ausgewählt werden kann. Daher gilt (Kombinatorik)

$$\#(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) = (n-j)! \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) = \frac{\#(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})}{\#\Omega_n} = \frac{(n-j)!}{n!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also unabhängig von der speziellen Wahl der $k_1, ..., k_j$. Damit haben wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{j=1}^n \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left((-1)^{j-1} \cdot \frac{(n-j)!}{n!} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n\}} 1\right) \end{aligned}$$

Es gibt $\binom{n}{j}$ Möglichkeiten, die $j$ Elemente $\{k_1, ..., k_j\}$ aus der $n$-elementigen Menge $\{1, ..., n\}$ auszuwählen (Ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge ohne Wiederholung).

$$= \sum_{j=1}^n \left((-1)^{j-1} \cdot \frac{(n-j)!}{n!} \cdot \binom{n}{j}\right) = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j!} = 1 - \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Für $n \to \infty$ konvergiert diese Wahrscheinlichkeit gegen $1 - \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} = 1 - e^{-1} \approx 0.63$.

**Aufgabe 4 (Eigenschaften von Verteilungsfunktionen, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).** Sei $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die zugehörige Verteilungsfunktion $\mathbb{F} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ ist durch $\mathbb{F}(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}$ folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $F$ ist monoton wachsend, d.h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \mathbb{F}(x_1) \leq \mathbb{F}(x_2)$.

(b) $\lim_{x \to -\infty} \mathbb{F}(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} \mathbb{F}(x) = 1$.

(c) $F$ ist rechtsseitig stetig, d.h. für jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n \downarrow x$ gilt $\mathbb{F}(x_n) \longrightarrow \mathbb{F}(x)$.

Es kann außerdem gezeigt werden, dass $F$ linksseitig existierende Grenzwerte besitzt, d.h. für eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x_n \uparrow x$ gilt $\mathbb{F}(x_n) \longrightarrow \mathbb{P}(X < x)$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}$ höchstens abzählbar unendlich viele Sprungstellen besitzt.

**Lösung 4.**

(a) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$. Dann gilt offensichtlich

$$(-\infty, x_1] \subseteq (-\infty, x_2]$$

und daher $\mathbb{F}(x_1) = \mathbb{P}((-\infty, x_1]) \leq \mathbb{P}((-\infty, x_2]) = \mathbb{F}(x_2)$ aufgrund der Monotonie des Maßes.

(b) Wir verwenden hier für die Bestimmung des Grenzwertes die Charakterisierung über Folgen, da wir nur Aussagen über Wahrscheinlichkeitsmaße von Folgen von Mengen zur Verfügung haben.

- $\lim_{x \to \infty} \mathbb{F}(x) = 1$:
  Es genügt zu zeigen, dass jede <u>monoton wachsende</u> Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $x_n \to \infty$ erfüllt: $\mathbb{F}(x_n) \to 1$.

  *Analytischer Zusatz: Ist $(x_n)$ Folge mit $x_n \to \infty$, so gibt es in jedem Fall eine monoton wachsende Teilfolge $(x_{n_k})$. Wird dann für diese das Resultat $\mathbb{F}(x_{n_k}) \to 1$ gezeigt, so folgt wegen der Monotonie von $F$ und der Beschränktheit nach oben durch 1 dann auch $\mathbb{F}(x_n) \to 1$, denn: Sei $\varepsilon > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass gilt: $\mathbb{F}(x_{n_{k_0}}) \geq 1 - \varepsilon$. Wegen $x_n \to \infty$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $x_n \geq x_{n_{k_0}}$. Dann ist wegen der Monotonie $\mathbb{F}(x_n) \geq \mathbb{F}(x_{n_{k_0}}) \geq 1 - \varepsilon$.*

  Die Mengen $A_n := (-\infty, x_n]$ bilden eine aufsteigende Folge von Elementen von $\mathcal{A}$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A_n \subseteq A_{n+1}$. Außerdem ist

  $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, x_n] \overset{x_n \to \infty}{=} \mathbb{R}$$

  Da $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist und damit auch stetig von unten ist, folgt

  $$1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}((-\infty, x_n]) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{F}(x_n).$$

- $\lim_{x \to -\infty} \mathbb{F}(x) = 0$:
  Es genügt wie oben zu zeigen, dass jede <u>monoton fallende</u> Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit $x_n \to -\infty$ erfüllt: $\mathbb{F}(x_n) \to 0$. Wir definieren wieder $A_n := (-\infty, x_n]$, diese bilden

eine absteigende Folge von Elementen von $\mathcal{A}$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $A_{n+1} \subseteq A_n$. Außerdem gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, x_n] \overset{x_n \to -\infty}{=} \emptyset.$$

Wir nutzen $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ für alle $A \in \mathcal{B}$. Beachte dazu, dass nun gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n^c \subset A_{n+1}^c$. Damit:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \overset{\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c}{=} 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{F}(x_n). \end{aligned}$$

(c) Definiere wieder $A_n := (-\infty, x_n]$, diese Folge erfüllt für alle $n \in \mathbb{N}$: $A_{n+1} \subseteq A_n$ bzw. $A_n^c \subseteq A_{n+1}^c$. Außerdem ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, x_n] \overset{x_n \downarrow x}{=} (-\infty, x]$$

Damit haben wir wie zuvor mit der Stetigkeit des Maßes von unten:

$$\mathbb{F}(x) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{F}(x_n).$$

(d) Sei $\{x_i\}_{i\in I}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von $\mathbb{F}$. An jeder Unstetigkeitsstelle $x_i$ existiert der rechtsseitige Limes $\mathbb{F}(x_i) = \lim_{x\downarrow x_i} \mathbb{F}(x) < \infty$, da $\mathbb{F}$ rechtsseitig stetig ist. Wir wissen aus der Aufgabenstellung, dass auch der linksseitige Limes $\lim_{x\uparrow x_i} \mathbb{F}(x) < \infty$ existiert, und es gilt aufgrund der Monotonie

$$\lim_{x\uparrow x_i} \mathbb{F}(x) < \lim_{x\downarrow x_i} \mathbb{F}(x).$$

- **Möglichkeit 1:** Jeder Sprungstelle $x_i$ von $F$ können wir das offene Intervall

$$S_i := \left(\lim_{x\uparrow x_i} \mathbb{F}(x), \lim_{x\downarrow x_i} \mathbb{F}(x)\right) \neq \emptyset$$

  zuordnen. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es eine rationale Zahl $q_i \in \mathbb{Q} \cap S_i$. Da $\mathbb{F}$ monoton wächst, sind die $S_i$ disjunkt. Es ist also $\{x_i\}_{i\in I} \to \mathbb{Q}, x_i \mapsto q_i$ eine injektive Abbildung. Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, muss auch $\{x_i\}_{i\in I}$ abzählbar sein.

- **Möglichkeit 2:** Jeder Unstetigkeitsstelle $x_i$ von $\mathbb{F}$ können wir eindeutig eine "Sprunghöhe"

$$h(x_i) := \lim_{x\downarrow x_i} \mathbb{F}(x) - \lim_{x\uparrow x_i} \mathbb{F}(x) > 0 \tag{3}$$

  zuordnen. Betrachte nun die Menge

$$S_n := \left\{x \in \{x_i\}_{i\in I} : h(x) > \frac{1}{n}\right\}.$$

  (Das ist die Menge der Unstetigkeitsstellen, bei welchen eine Sprunghöhe größer als $\frac{1}{n}$ auftritt). Da für eine Verteilungsfunktion $\lim_{x\to-\infty} \mathbb{F}(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} \mathbb{F}(x) = 1$ gilt und $\mathbb{F}$ monoton wächst, gilt $0 \leq \mathbb{F} \leq 1$ überall. Weil $\mathbb{F}$ monoton wächst, kann $\mathbb{F}$ höchstens $n$ Sprungstellen der Sprunghöhe $\frac{1}{n}$ haben:

$$\#S_n \leq n.$$

  Wegen 3 gilt aber $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{x_i\}_{i\in I}$, d.h. die Menge der Sprungstellen $\{x_i\}_{i\in I}$ von $\mathbb{F}$ ist eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen und damit selbst abzählbar.

**Abgabe:**
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **16. November 2020, 09:00 Uhr**.

**Homepage der Vorlesung:**
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`