Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

1. Übungsblatt

Ausgabe 03.11.2020 – Besprechung 09.-12.11.2020

Die Maxwell Gleichungen in differentieller Form
Die Maxwell Gleichungen, benannt nach dem schottischen Physiker James Clerk Maxwell (1831–1879), bilden die axiomatische Grundlage der Elektrodynamik und somit unserer Vorlesungen.

$$\nabla \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_{ct}\boldsymbol{B}$$
$$\nabla \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \partial_{ct}\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{\jmath}\,.$$

Wie werden später sehen wie sich die Maxwell Gleichungen aus der Lagrange-Dichte herleiten lassen. In diesem Fall ersetzen die Lagrange-Dichte und das Prinzip der minimalen Wirkung als Axiome die Maxwell-Gleichungen. Beide Zugänge sind jedoch physikalisch gleichwertig.
Ziel der Übung ist es, dass Sie sich mit den Maxwell Gleichungen und ihrer mathematischen Formulierung in differentieller Form vertraut machen.

Verständnisfragen

- Beschreiben Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Maxwell Gleichungen.
- Worin unterscheiden sich $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ Felder?
- Welche Bedeutung spielen Inertialsysteme bei der Anwendung der Maxwell Gleichungen?
- Welche Bedeutung hat die Lichtgeschwindigkeit für die Elektrodynamik?
- Welche Erhaltungsgrößen gibt es in der Elektrodynamik?
- Was steckt hinter diesen Namen?
  Satz von Gauss/Stokes, Faradays Induktionsgesetz, Ampère Gesetz, Poisson Gleichung

1. Aufgabe: Vektoranalysis: Produkte von Skalar- und Vektorfeldern

Es seien $\phi(\boldsymbol{r})$ und $f(|\boldsymbol{r}|)$ Skalarfelder sowie $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})$ zwei Vektorfelder als Funktion des Ortsvektors $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie folgende Ausdrücke und drücken Sie die Ergebnisse mit dem Nabla-Operator aus:

$$
\begin{array}{llllll}
(1) & \mathrm{rot}\,[\phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})] & (2) & \mathrm{div}\,[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})] & (3) & \mathrm{rot}\,[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})] \\
(4) & \mathrm{grad}\,(f(|\boldsymbol{r}|)) & (5) & \mathrm{div}\,[f(|\boldsymbol{r}|)\boldsymbol{r}] & (6) & \mathrm{rot}\,[f(|\boldsymbol{r}|)\boldsymbol{r}]\ .
\end{array}
$$

HINWEIS: Benutzen Sie die Produkt- und Kettenregel, komponentenweise Schreibweise und den Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk}.

2. Aufgabe: Integration von Vektorfeldern

In der Vorlesung sind Ihnen die Sätze von Stokes und Gauss begegnet, welche den Zusammenhang zwischen differentieller und integraler Form der Maxwell Gleichungen herstellen. In dieser Übung werden wir ihre Gültigkeit anhand eines Beispiels verifizieren. Gegeben sei dazu das Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\left(x^2+y^2\right) y\boldsymbol{e}_1 + \left(x^2+y^2\right) x\boldsymbol{e}_2 + xz\boldsymbol{e}_3$ mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$ und die kartesischen Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_i$.

(a) Satz von Stokes:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}\boldsymbol{A}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,.$$

Berechnen Sie zunächst das Linienintegral $\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ entlang der positiv orientierten Kreislinie (also entgegen dem Uhrzeigersinn)

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0, x^2+y^2 = 1\right\}\ .$$

Berechnen Sie die Rotation von $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ und bestätigen Sie dann den Stokes'schen Satz indem Sie die Rotation von $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ über die von $\mathcal{C}$ berandete Kreisscheibe

$$\mathcal{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 \leqslant 1, z = 0\right\}$$

berechnen.

(b) Gaußscher Integralsatz:

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \mathrm{d}\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,.$$

Berechnen Sie zunächst den Fluss $\oint_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ des Einheitswürfels

$$\mathcal{V} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \in [0,1], y \in [0,1], z \in [0,1]\right\}\ .$$

Die Orientierung der Oberfläche soll so gewählt sein, dass der Normalenvektor stets nach außen zeigt. Berechnen Sie nun die Divergenz $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ und bestätigen den Gauß'schen Satz indem Sie die Divergenz von $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ über das Volumen des Würfels integrieren.

(c) Zeichnen Sie von Hand oder mit Hilfe eines Computerprogramms (z.B. Mathematica, Maple, Matlab, Python, etc.) das Vektorfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ in den drei kartesischen Koordinatenebenen und interpretieren Sie die Ergebnisse für Rotation und Divergenz aus (a) und (b) anhand dieser Plots. Wie würden Trajektorien in diesem Feld aussehen, falls $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ ein Geschwindigkeitsfeld darstellt?