$\sum$	A45	A46	A47	A48
	4	4	6	4

Aufgabe 45

Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet.

(a) Sei f eine meromorphe Funktion auf D. Ohne Einschränkung habe $\tilde{f}$ genau einen Pol der Ordnung ≥ 1 in $z_0 \in D$ (Singularitäten von $\tilde{f}$ sind höchstens Pole und liegen diskret in $\mathbb{C}$. Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist und der Fall f holomorph trivial ist, genügt es genau eine Singularität von $\tilde{f}$ zu betrachten). Wir setzen $\tilde{f}$ fort, durch $f\colon D \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $f(z) = \tilde{f}(z)$ für $z \neq z_0$ und $f(z_0) = \infty$.

f ist stetig auf D, denn: Stetigkeit auf $D \setminus \{z_0\}$ folgt aus $f|_{D\setminus\{z_0\}} = \tilde{f}$ holomorph auf $D \setminus \{z_0\}$, also insbesondere stetig. Nun hat $\tilde{f}$ in z_0 einen Pol Ordnung ≥ 1. Aus der Charakterisierung von Polstellen nicht verschwindender Ordnung folgt dann:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \tilde{f}(z) = \infty = f(z_0).$$

Folglich ist f stetig in z_0, also f stetig auf ganz D.

Nun zeigen wir, dass f holomorphe Funktion zwischen Riemannschen Flächen ist: wir fassen D als Riemannsche Fläche auf, mit dem Atlas der nur aus der Karte D und der Kartenabbildung id_D besteht und $\hat{\mathbb{C}}$ als Riemannsche Fläche, mit dem Atlas der aus $X_0 = \mathbb{C}$ und $X_1 = \mathbb{C}^\times \cup \infty$ mit den Kartenabbildungen $\psi_0 = \mathrm{id}_C\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\psi_1 = \frac{1}{z}\colon X_1 \to \mathbb{C}$. Sei $z \in D$.
$z \neq z_0$, dann ist $f(z) \in C$ und $\psi_0 \circ f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{-1} = f$ auf einer Umgebung von z ist holomorph, also f holomorph in z.
$z = z_0$, dann ist $f(z_0) = \infty$ und $\psi_1 \circ f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{-1} = \frac{1}{f(z)}$. $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ und nach Identitätssatz existiert eine Umgebung V von z_0 sodass $0 \notin f[V]$, folglich $\frac{1}{f(z)}$ holomorph auf V und somit. Also f holomorph in z_0. Folglich f holomorph auf D. □

(b)

Z.Z. $f\colon D \to \hat{\mathbb{C}}$, $f(z) = \infty$ ist holomorph, jedoch existiert keine meromorphe Funktion $\tilde{f}$ sodass f durch $\tilde{f}$ definiert wird. f ist die einzige holomorphe Funktion $D \to \hat{\mathbb{C}}$ mit dieser Eigenschaft.
Beweis f ist holomorph: $f = \infty$ konstant, also stetig. $z \in D$, dann $f(z) = \infty$ und $\psi_1 \circ f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{-1} = \frac{1}{f(z)} = 0$ ist holomorph, also ist f holomorph in z.

Angenommen $\tilde{f}$ existiert, dann ist $f(z) = \infty$ genau dann wenn $\tilde{f}$ ein Pol Ordnung $\neq 0$ hat. Also hat $\tilde{f}$ Polstellen in jedem Punkt in D. Somit sind die Polstellen von $\tilde{f}$ nicht diskret in D, folglich ist $\tilde{f}$ nicht meromorph.

Sei $g\colon D \to \hat{\mathbb{C}}$ holomorph sodass es keine meromorphe Funktion $\tilde{g}$ auf D gibt die g definiert. Hat $\{z \in D \mid g(z) = \infty\}$ keinen Häufungpunkt in D, dann existiert offensichtlich ein solches g (denn dann liegt $\{z \in D \mid g(z) = \infty\}$ diskret in D). Also hat $\{z \in D \mid g(z) = \infty\}$ einen Häufungspunkt in D.
Sei $z_0 \in D$ diese Häufungspunkt. Angenommen $g(z_0) = 0$, dann ist $\psi_0 \circ g \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{-1} = g(z)$ holomorph in einer Umgebung U von z_0, jedoch existiert ein $\xi \in U$ sodass $g(\xi) = \infty$, da z_0 Häufungspunkt von $\{z \in D \mid g(z) = \infty\}$, ein Widerspruch, also $g(z_0) \neq 0$. g holomorph in z_0, also ist $\psi_1 \circ g \circ \mathrm{id}_C^{-1} = \frac{1}{g(z)}$ holomorph in einer ϵ-Umgebung $U \subseteq D$ von z_0. Nun liegt $\left\{z \in D \mid \frac{1}{g(z)} = 0\right\}$ dicht in U, also ist nach Identitätssatz $\frac{1}{g(z)} = 0$ auf ganz U, also $g(z_0) = \infty$.
Sei $\xi \in D$. Ist $\xi \in U$, so folgt bereits $g(\xi) = \infty$. Sei nun $\xi \notin U$, da D wegzusammenhängend, existiert ein Weg γ mit $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = \xi$. g ist in jedem Punkt in D holomorph, also auch

in jedem Punkt $\gamma([0,1]) \setminus U \neq \emptyset$. Sei U_z zu jedem Punkt $z \in \gamma([0,1]) \setminus U$ die Umgebung in der $\psi_i \circ g \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{-1}$ holomorph ist. $\gamma([0,1]) \setminus U$ ist kompakt, folgich existieren endlich viele solche U_x die $\gamma \setminus U$ überdecken. Ohne Einschränkung existiere genau ein solches U_x (sonst folgt induktiv folgt nach endliche vielen Schritten, dass $g(\xi) = \infty$). Es genügt zu zeigen, dass $g(U_x) = \{\infty\}$. Es gilt $U_x \cap U \neq \emptyset$ offen, insbesondere $g(U_x \cap U) = \{\infty\}$. Also ist $\psi_1 \circ g \circ \mathrm{id}_{\mathbb{C}}^{-1} = \frac{1}{g(z)}$ holomorph auf U_x. Da $\frac{1}{g(U_x \cap U)} = \{\infty\}$ hat $\left\{\frac{1}{g(z)} = 0 \mid z \in U_x\right\}$ einen Häufungspunkt, aus dem Identitätssatz folgt $g = \infty$ auf ganz U_x. $\square$

4

Aufgabe 46

$$p = \frac{4\left(1-\lambda+\lambda^2\right)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

(a) $\lambda\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ ist holomorph. Folglich ist $27\lambda^2(1-\lambda)^2 \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. Insbesondere ist $p \in \mathcal{O}(\mathbb{H})$ also Quotient (usw.) von holomorphen Funktionen mit Nenner keine Nullstelle in $\mathbb{H}$. Aus der VL ist bekannt, dass $\lambda \in \mathbb{C}(\Gamma[2])$, also $\lambda|_0 M = \lambda$ für alle $M \in \Gamma[2]$. Es folgt direkt, dass $p|_0 M = p$ für alle $M \in \Gamma[2]$. Ferner ist bekannt, dass:

$$\lim_{\tau \to \mathrm{i}\infty} \lambda(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \to 0} \lambda(\tau) = 1, \quad \lim_{\tau \to 1} \lambda(\tau) = \infty.$$

Wir folgern:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \to \mathrm{i}\infty} p(\tau) &= \lim_{\tau \to \mathrm{i}\infty} \frac{4(1-\lambda+\lambda^2)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2} = \infty,\\
\lim_{\tau \to 0} p(\tau) &= \lim_{\tau \to 0} \frac{4(1-\lambda+\lambda^2)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2} = \infty,\\
\lim_{\tau \to 1} p(\tau) &= \lim_{\tau \to 1} \frac{4\lambda^6 + \mathcal{O}(\lambda^5)}{27\lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^3)} = \infty.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $p|_0 M$ für alle $M \in \Gamma$ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist und in $\mathrm{i}\infty$ eine nicht wesentliche Singularität hat (sprich $\lim_{\tau \to \mathrm{i}\infty} p|_0 M \in \hat{\mathbb{C}}$). Folglich ist p holomorphe Modulfunktion auf $\mathbb{H}$ zu $\Gamma[2]$. $\square$

(b) Da $p|_0 M = p$ für alle $M \in \Gamma$ genügt es zu zeigen, dass $p|_0 M = p$ für alle M Vertreter von Elementen von $\Gamma/\Gamma[2]$. Wir wissen bereits von Aufgabe 35, dass wir genau die folgenden Transformationen betrachten müssen: (sei M_i die zur i-ten links stehenden Transformation gehörige Matrix)

$$\{\lambda, \lambda^{-1}, 1-\lambda, \left(1-\frac{1}{\lambda}\right), \left(\frac{1}{1-\lambda}\right), \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\}.$$

$\Bigl(M = T,\ M = S$ reicht wegen $\Gamma = \langle T, S\rangle\Bigr)$

Wir erhalten durch ausrechnen, wobei wir benutzen, dass $\lambda(\tau) \notin \{0, 1\}$:

$$
\begin{aligned}
p|_0 M_1 &= p \\
p|_0 M_2 &= \frac{4\left(1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right)^3}{27\frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{\lambda^6}{\lambda^6} = \frac{4(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{27\lambda^2 \underbrace{(\lambda - 1)^2}_{=(1-\lambda)^2}} = p \\
p|_0 M_3 &= \frac{4\left(1 - (1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2\right)^3}{27(1 - \lambda)^2(1 - (1 - \lambda))^2} = \frac{4\left(\lambda + \lambda^2 - 2\lambda + 1\right)^3}{27\lambda^2(1 - \lambda)^2} = p \\
p|_0 M_4 &= \frac{4\left(1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2\right)^3}{27\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\right)^2} = \frac{4\left(1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\right)^3}{27\frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^2} \overset{2}{=} p \\
p|_0 M_5 &= \frac{4\left(1 - \left(\frac{1}{1-\lambda}\right) + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2\right)^3}{27\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2\left(1 - \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)\right)^2} \cdot \frac{(1 - \lambda)^6}{(1 - \lambda)^6} = \frac{4\left(1 - (1 - \lambda) + (1 - \lambda)^2\right)^3}{27(1 - \lambda)^2(1 - (1 - \lambda))^2} \overset{3}{=} p \\
p|_0 M_6 &= \frac{4\left(1 - \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right) + \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2\right)^3}{27\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)^2\left(1 - \left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)\right)^2} = \cdots \overset{\text{analog}}{=} p.
\end{aligned}
$$

Folglich gilt $p|_0 M = p$ für alle $M \in \Gamma$ und analog zu den bereits in (a) geklärten Voraussetzungen folgt dass p holomorphe Modulfunktion zu Γ vom Gewicht 0 ist, also $p \in \mathbb{C}(\Gamma) = \mathbb{C}(j)$. ~~Es folgt die Existenz eine komplexen Polynoms $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ mit $P(j) = p$.~~ $\square$ wie? Genau

4f

Aufgabe 47

(a) Es gilt

$$(0, 0) * (a_1, a_2) = (a_1, a_2) \forall (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$$

Damit ist $(0, 0)$ das neutrale Element. Weiter ist durch

$$((-1)^{-a_2+1} a_1, -a_2) * (a_1, a_2) = ((-1)^{-a_2+1} a_1 + (-1)^{-a_2} a_1, -a_2 + a_2) = (0, 0)$$

das Inverse zu (a_1, a_2) bestimmt. Die Assoziativität folgt durch

$$
\begin{aligned}
((a_1, a_2) * (b_1, b_2))(c_1, c_2) &= (a_1 + (-1)^{a_2} b_1, a_2 + b_2)(c_1, c_2) \\
&= (a_1 + (-1)^{a_2} b_1 + (-1)^{a_2+b_2} c_1, (a_2 + b_2) + c_2) \\
&= (a_1 + (-1)^{a_2}(b_1 + (-1)^{b_2} c_1), a_2 + (b_2 + c_2)) \\
&= (a_1, a_2) * (b_1 + (-1)^{b_2} c_1, b_2 + c_2) \\
&= (a_1, a_2) * ((b_1, b_2) * (c_1, c_2))
\end{aligned}
$$

Offensichtlich ist jedes Produkt wieder in $\mathbb{Z}^2$ enthalten. Dadurch wird $(\mathbb{Z}^2, *)$ zu einer Gruppe. Wegen

$$
\begin{aligned}
(1, 2) * (2, 1) &= (1 + (-1)^2 2, 2 + 1) = (3, 3) \\
(2, 1) * (1, 2) &= (2 + (-1)^1 1, 1 + 2) = (1, 3)
\end{aligned}
$$

ist die Gruppe nicht abelsch. $(0, 0) * (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$ mit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ folgt analog zum Beweis, dass $(0, 0)$ neutrales Element von $(\mathbb{Z}^2, *)$ ist. $(a_1, a_2) * ((b_1, b_2) * (x_1, x_2)) = ((a_1, a_2) * (b_1, b_2)) * (x_1, x_2)$

folgt analog zum Beweis der Assoziativität. Daher handelt es sich um eine Linksoperation. Diese ist wegen

$$D[(a_1, a_2) * (b_1, b_2)] = \begin{pmatrix} (-1)^{a_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

differenzierbar. Offensichtlich sind alle höheren partiellen Ableitungen 0. Daher handelt es sich um eine glatte Gruppenoperation.

(b) Wir zeigen die beiden Eigenschaften einer freien Operation.

(1) Wähle zu $x \in \mathbb{R}^2$ die offene Umgebung $U_{1/2}(x)$. Man sieht (u.a. aus Symmetriegründen) schnell ein, dass $(a_1, a_2) * U_\epsilon(x) = U_\epsilon((a_1, a_2) * x)$ gelten muss. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
(a_1, a_2) * U_{1/2}(x) \cap U_{1/2}(x) \neq \emptyset \Leftrightarrow & U_{1/2}((a_1, a_2) * x) \cap U_{1/2}(x) \neq \emptyset \\
\implies & U_{1/2}((a_1 + (-1)^{a_2} x_1, a_2 + x_2)) \cap U_{1/2}((x_1, x_2)) \neq \emptyset \\
\implies & |a_1 + (-1)^{a_2} x_1 - x_1|^2 + |a_2 + x_2 - x_2|^2 < 1 \\
\implies & |a_1 + (-1)^{a_2} x_1 - x_1|^2 + |a_2|^2 < 1 \\
\xRightarrow{a_2 \in \mathbb{Z}} & |a_1 + (-1)^{a_2} x_1 - x_1|^2 < 1 \wedge a_2 = 0 \\
\implies & |a_1 + x_1 - x_1|^2 < 1 \wedge a_2 = 0 \\
\implies & |a_1|^2 < 1 \wedge a_2 = 0 \\
\xRightarrow{a_1 \in \mathbb{Z}} & a_1 = a_2 = 0
\end{aligned}$$

(2) Seien $(x_1, x_2) \not\sim (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Wieder nutzen wir $(a_1, a_2) * U_\epsilon(x) = U_\epsilon((a_1, a_2) * x)$. Daher genügt es zu zeigen, dass $\|(a_1, a_2) * (x_1, x_2) - (y_1, y_2)\| \geq 2\epsilon$ gilt. Dann sind nämlich beliebig Translate der ϵ-Umgebungen von x und y disjunkt. Wir unterscheiden drei Fälle

i. $x_2 - y_2 \notin \mathbb{Z}$. Setze $\epsilon = \frac{x_2 - y_2 \mod \mathbb{Z}}{2}$. Wegen

$$\|(a_1, a_2) * (x_1, x_2) - (y_1, y_2)\| \geq \sqrt{|a_2 + x_2 - y_2|^2} \geq \sqrt{(x_2 - y_2 \mod \mathbb{Z})^2} \geq 2 \cdot \epsilon$$

folgt die Aussage für diesen Fall.

ii. $x_2 - y_2 \in 2\mathbb{Z}$. Setze $\epsilon = \frac{x_1 - y_1 \mod \mathbb{Z}}{2}$. Insbesondere ist $\epsilon < \frac{1}{2}$. Angenommen, $\epsilon = 0$. Dann wäre $y_1 - x_1, y_2 - x_2) * (x_1, x_2) = (y_1 - x_1 + (-1)^{x_2 - y_2} x_1, y_2 - x_2 + x_2) = (y_1, y_2)$, Widerspruch. Also $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Daher gilt für alle $(a_1, a_2) * (x_1, x_2) = (a_1 + (-1)^{a_2} x_1, a_2 + x_2)$ mit $a_2 + x_2 \neq y_2$ bereits

$$\|(a_1, a_2) * (x_1, x_2) - (y_1, y_2)\| \geq \sqrt{|a_2 + x_2 - y_2|^2} \geq 1 \geq 2 \cdot \epsilon.$$

Wir müssen also nur (a_1, a_2) betrachten mit $a_2 + x_2 = y_2$. Aufgrund der Voraussetzung gilt $y_2 - x_2 \in 2\mathbb{Z}$. Es folgt $(a_1, y_2 - x_2) * (x_1, x_2) = (a_1 + (-1)^{y_2 - x_2} x_1, y_2) = (a_1 + x_1, y_2)$. Schließlich erhalten wir

$$\|(a_1, y_2 - x_2) * x - y\| = |a_1 + x_1 - y_1| \geq x_1 - y_1 \mod \mathbb{Z} \geq 2\epsilon.$$

iii. $x_2 - y_2 \in 2\mathbb{Z} + 1$. Setze $\epsilon = \frac{x_1 + y_1 \mod \mathbb{Z}}{2}$. Insbesondere ist $\epsilon < \frac{1}{2}$. Angenommen, $\epsilon = 0$. Dann wäre $y_1 + x_1, y_2 - x_2) * (x_1, x_2) = (y_1 + x_1 + (-1)^{x_2 - y_2} x_1, y_2 - x_2 + x_2) = (y_1, y_2)$, Widerspruch. Also $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Daher gilt für alle $(a_1, a_2) * (x_1, x_2) = (a_1 + (-1)^{a_2} x_1, a_2 + x_2)$ mit $a_2 + x_2 \neq y_2$ bereits

$$\|(a_1, a_2) * (x_1, x_2) - (y_1, y_2)\| \geq \sqrt{|a_2 + x_2 - y_2|^2} \geq 1 \geq 2 \cdot \epsilon.$$

Wir müssen also nur (a_1, a_2) betrachten mit $a_2 + x_2 = y_2$. Aufgrund der Voraussetzung gilt $y_2 - x_2 \in 2\mathbb{Z}$. Es folgt $(a_1, y_2 - x_2) * (x_1, x_2) = (a_1 + (-1)^{y_2 - x_2} x_1, y_2) = (a_1 - x_1, y_2)$. Schließlich erhalten wir

$$\|(a_1, y_2 - x_2) * x - y\| = |a_1 - x_1 - y_1| \geq x_1 + y_1 \mod \mathbb{Z} \geq 2\epsilon.$$

(c) Wir haben oben bereits gesehen, dass die Gruppenoperation glatt ist wegen

$$D[(a_1, a_2) * (b_1, b_2)] = \begin{pmatrix} (-1)^{a_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Identifiziert man $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, so verstößt diese Jacobimatrix für ungerade a_2 gegen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen. Daher ist die Gruppenoperation nicht holomorph. Insbesondere wird $G \backslash \mathbb{C}$ nicht zu einer Riemannschen Fläche.

6

Aufgabe 48

d stetig

Offensichtlich ist $p_1 \times p_2 \colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ surjektiv. Sei $(x^1, x^2) \in X_1 \times X_2$. Dann existieren nach Definition der Überlagerung Umgebungen $x^1 \in U^1, x^2 \in U^2$ mit

$$p_k^{-1}(U^k) = \biguplus_{i \in F^k} U_i^k,$$

sodass alle Einschränkungen $p_k|_{U_i^k} \colon U_k^i \xrightarrow{\sim} U^k$ bistetig sind für $k \in \{1, 2\}$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
(p_1 \times p_2)^{-1}(U^1 \times U^2) &= \{(x_1, x_2) | p(x_1) \in U^1, p(x_2) \in U^2\} \\
&= \{(x_1, x_2) | x_1 \in \biguplus_{i \in F^1} U_i^1, x_2 \in \biguplus_{j \in F^2} U_j^2\} \\
&= \biguplus_{i \in F^1} \{(x_1, x_2) | x_1 \in U_i^1, x_2 \in \biguplus_{j \in F^2} U_j^2\} \\
&= \biguplus_{i \in F^1} \biguplus_{j \in F^2} \{(x_1, x_2) | x_1 \in U_i^1, x_2 \in U_j^2\} \\
&= \biguplus_{(i,j) \in F^1 \times F^2} U_i^1 \times U_j^2
\end{aligned}$$

Wegen $p_k|_{U_i^k} \colon U_k^i \xrightarrow{\sim} U^k$ bistetig für $K \in \{1, 2\}$ folgt, dass

$$p_1 \times p_2|_{U_i^1 \times U_j^2} \colon U_i^1 \times U_j^2 \to U^1 \times U^2$$

bezüglich der Produkttopologie bistetig sein muss. Damit handelt es sich bei $p_1 \times p_2$ ebenfalls um eine Überlagerung.

4