Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2020/21

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. M. Leonhardt

Blatt 08
Abgabetermin: Freitag, 15.01.2021, 9:15 Uhr

Aufgabe 1. *(Normale Erweiterungen)* (6 Punkte; je 3 Punkte) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie:

(a) Ist L der Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad $n \geq 1$, so gilt $[L : K] \leq n!$.

(b) Ist $(L_i)_{i\in I}$ eine Familie normaler algebraischer Erweiterungen von K in $\overline{K}$, so ist auch $L := \bigcap_{i\in I} L_i$ eine normale, algebraische Erweiterung von K.

Aufgabe 2. *(Galoisgruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$)* (6 Punkte) Wir betrachten erneut die Erweiterung $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$. Wir erinnern uns an Blatt 05, Aufgabe 1: Nach (a) ist L der Zerfällungskörper von $X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$, also ist $L/\mathbb{Q}$ normal und wegen $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ ist $L/\mathbb{Q}$ damit galoissch. Nach (b) ist jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ festgelegt durch $\sigma(\sqrt[4]{2}) = \zeta\sqrt[4]{2}$ und $\sigma(i) = \varepsilon i$ für $\zeta \in \{\pm 1, \pm i\}$ und $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, und jede Wahl von ζ und ε bestimmt ein eindeutiges σ.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie für jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ die von σ induzierte Permutation der Menge N der Nullstellen von $X^4 - 2$.

(b) (1 Punkt) Geben Sie einen Gruppenisomorphismus von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ nach D_4 an (vgl. Blatt 01, Aufgabe 4).

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper M von $L/\mathbb{Q}$, die quadratisch über $\mathbb{Q}$ sind.

Aufgabe 3. *(Galoisgruppen und primitive Elemente)* (6 Punkte; je 3 Punkte) Bestimmen Sie für folgenden Körpererweiterungen jeweils ein primitives Element. Begründen Sie, warum die Erweiterungen galoissch sind und geben Sie die Galoisgruppe an.

(a) $\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4. *(Einfache Erweiterungen und Zwischenkörper)* (6 Punkte; 3 Punkte jede Richtung) Wir wollen zeigen, dass für eine endliche Körperweiterung L/K die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) L/K ist einfach, d. h. es gibt ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$.

(ii) Die Erweiterung L/K hat nur endlich viele Zwischenkörper.

Hinweis: Ohne Einschränkung (wieso?) sei K unendlich ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Für (i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen $L = K(\alpha)$. Zu jedem Zwischenkörper M von L/K sei $f_M \in M[X]$ das Minimalpolynom von α über M. Dann gilt für zwei beliebige Zwischenkörper M, M' von L/K:
$$M \subset M' \quad \Leftrightarrow \quad f_M \in M'[X].$$
Folgern Sie, dass jedes f_M den Körper M eindeutig bestimmt und in $L[X]$ ein Teiler von f_K ist. Benutzen Sie die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $L[X]$, um zu zeigen, dass L/K nur endlich viele Zwischenkörper hat.

(b) Für (ii) $\Rightarrow$ (i): Reduzieren Sie per Induktion auf den Fall $L = K(\alpha, \beta)$. Dann gibt es $c, c' \in K$ mit $c \neq c'$ und $K(\alpha + c\beta) = K(\alpha + c'\beta)$. Folgern Sie, dass $L = K(\alpha + c\beta)$.

Bonusaufgabe 5. *(Abelsche Erweiterungen)* (6 Punkte) Seitdem er das Buch "Wunderfabrik Körper" gelesen hat, sieht und bezeichnet der Weihnachtsmann seine Geschenkfabrik am Nordpol gerne als einen Körper K. Aufgrund der wachsenden Anzahl an Kindern auf der Erde müssen immer mehr Geschenke produziert werden, weshalb der Weihnachtsmann diesen Grundkörper hat erweitern lassen. Dies geschah nach Plan des Architekten E. Galois, deswegen ist die Körpererweiterung L/K endlich galoissch. Als Zeichen des Respekts gegenüber N.H. Abel hat Galois die Erweiterung so entworfen, dass sie abelsch ist.

Nun möchte der Weihnachtsmann die Produktivität der Körpererweiterung testen. Laut Plan soll jede endliche normale Zwischenerweiterung M/K in der Lage sein, Geschenke zu produzieren. Dazu muss sie der Weihnachtsmann nur über seinen Computer "auswählen" und "aktivieren". Die *Auswahl* von M funktioniert durch Angabe eines Polynoms aus $K[X]$, dessen Zerfällungskörper gleich M ist, und die *Aktivierung* von M funktioniert durch Angabe endlich vieler Elemente, die durch Adjunktion an K genau M erzeugen. Dem Weihnachtsmann scheint der Auswahl- und Aktivierungsprozess etwas umständlich zu sein. Da erinnert er sich, dass ihm Galois einen Zettel überlassen hat mit Tipps zur effizienten Produktion. Auf dem Zettel steht:

`Cher père Noël, vous pouvez choisir et activer par la méthode suivante:`

- `Choisissez un polynôme irréductible avec coefficients dans` K `qui posséde un zéro dans l'extension` L `de` K`.`
- `Activez` M `en spécifiant un zéro arbitraire de ce polynôme.`

Obwohl ihn die Effizienz des Verfahrens überzeugt, war der Weihnachtsmann zunächst skeptisch, ob Galois' Anleitung tatsächlich die Auswahl einer endlichen normalen Zwischenerweiterung und ihre Aktivierung beschreibt. Wurde der Weihnachtsmann betrogen?

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr wünscht Ihnen das Algebra 1 Team!