Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

6 3/4. Übungsblatt - Lösungsskizzen

Aufgabe 21 (Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung, 2 Bonuspunkte).
Sei $X \sim \text{Exp}_\lambda$ eine Exponential-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$ mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\mathbb{f}(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie die sogenannte **Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung**:

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t) \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}^+.$$

Lösung 21.
Zunächst bestimmen wir die Verteilungsfunktion von X: Es gilt für $x \geq 0$

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{F}^X(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{f}(y)\ \mathrm{d}y = \int_0^x \lambda \exp(-\lambda y)\ \mathrm{d}y = [\exp(-\lambda y)]_0^x = 1 - \exp(-\lambda x)$$

also auch

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \exp(-\lambda x) \tag{$*$}$$

Nach der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \frac{\mathbb{P}(X \geq s + t, X \geq s)}{\mathbb{P}(X \geq s)}.$$

Da $s, t \in \mathbb{R}^+$ folgt aus $X \geq s + t$ bereits $X \geq s$, wir erhalten also

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \frac{\mathbb{P}(X \geq s + t)}{\mathbb{P}(X \geq s)} \overset{(*)}{=} \frac{\exp(-\lambda(s + t))}{\exp(-\lambda s)} = \exp(-\lambda t) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}(X \geq t).$$

Aufgabe 22 (Diskrete Faltung, Poisson-Verteilung 2 + 1 = 3 Bonuspunkte).
Wir zeigen nun die Behauptung aus Beispiel 17.09 in zwei Schritten.

(a) Zeigen Sie, dass $\text{Poi}_{\lambda_1} \star \text{Poi}_{\lambda_2} = \text{Poi}_{\lambda_1 + \lambda_2}$ gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+_{\backslash 0}$.

(b) Sei $\mathbb{P}$ ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_0 \star \delta_0 = \mathbb{P}_0$ gilt, wobei δ_0 das Punktmaß in 0 ist.

Mit Aufgabenteil (a) und (b) folgt dann, dass $\text{Poi}_{\lambda_1} \star \text{Poi}_{\lambda_2} = \text{Poi}_{\lambda_1 + \lambda_2}$ gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.

Lösung 22. (a) Sei $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+_{\backslash 0}$ beliebig aber fest. Nach Lemma 17.07 besitzt $\mathrm{Poi}_{\lambda_1} \star \mathrm{Poi}_{\lambda_2}$ die Zähldichte für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
[\mathbb{p}_{\lambda_1} \star \mathbb{p}_{\lambda_2}](n) &= \sum_{k \in [\![0,n]\!]} \mathbb{p}_{\lambda_1}(n-k)\mathbb{p}_{\lambda_2}(k) \\
&= \sum_{k \in [\![0,n]\!]} \frac{\lambda_1^{n-k}}{(n-k)!} \exp(-\lambda_1) \frac{\lambda_2^k}{k!} \exp(-\lambda_2) \\
&= \frac{\exp(-(\lambda_1+\lambda_2))}{n!} \sum_{k \in [\![0,n]\!]} \binom{n}{k} \lambda_1^{n-k}\lambda_2^k \\
&= \frac{\exp(-(\lambda_1+\lambda_2))}{n!} (\lambda_1+\lambda_2)^n
\end{aligned}$$

(b) Sei $\mathbb{p}_0$ die Zähldichte von δ_0, dass heißt $\mathbb{p}_0(k) = 0$ für $k \neq 0$ und $\mathbb{p}_0(0) = 1$. Weiter sei $\mathbb{p}$ die Zähldichte von $\mathbb{P}$. Dann haben für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$[\mathbb{p} \star \mathbb{p}_0](n) = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} \mathbb{p}(n-k)\mathbb{p}_0(k) = \mathbb{p}(n)$$

und folglich $\mathbb{P} \star \delta_0 = \mathbb{P}$.

Aufgabe 23 (Multiplikative Faltung, 3 Bonuspunkte).

Seien X und U zwei unabhängige stetig-verteilte reelle Zufallsvariablen mit Dichten $\mathbb{f}^U, \mathbb{f}^X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass dann $Y = XU$ stetig-verteilt mit Dichte

$$\mathbb{f}^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(y/x)|x|^{-1}dx, \quad y \in \mathbb{R},$$

ist.

Hinweis: Beginnen Sie mit Zerlegung $\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(XU \leq y, X > 0) + \mathbb{P}(XU \leq y, X < 0)$ für $y \in \mathbb{R}$ und rechnen Sie von dort aus weiter.

Lösung 23.

Sei $y \in \mathbb{R}$ dann gilt aufgrund der Unabhängigkeit von X und U

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}(XU \leq y, X > 0) + \mathbb{P}(XU \leq y, X < 0) \\
&= \int_{x>0, xu \leq y} \mathbb{f}^{(X,U)}(x,u)d(x,u) + \int_{x<0, xu\leq y} \mathbb{f}^{(X,U)}(x,u)d(x,u) \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{y/x} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(u)dudx + \int_{-\infty}^0 \int_{y/x}^\infty \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(u)dudx.
\end{aligned}$$

Für das innere Integral im linken Summand gilt mittels der Integrations durch Substitutionsregel

$$\int_{-\infty}^{y/x} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(u)du = \int_{-\infty}^{y} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(u/x)x^{-1}du = \int_{-\infty}^{y} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(u/x)|x|^{-1}du.$$

Für das innere Integral des zweiten Summanden können wir analog dadurch zeigen, dass

$$\int_{y/x}^{\infty} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(u)du = \int_{y}^{-\infty} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(u/x)x^{-1}du = \int_{-\infty}^{y} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(u/x)|x|^{-1}du.$$

Nun erhalten wir durch Vertauschung der Integrale, dies ist erlaubt nach dem Satz von Fubini-Tonelli.

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(u/x)|x|^{-1} du dx = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(u/x)|x|^{-1} dx du.$$

Wir schließen hieraus durch Ableitung, dass die Dichte von Y gegeben ist durch

$$\mathbb{f}^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(y/x)|x|^{-1} dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 24 (Gamma und Beta-Verteilung, 5 = 1 + 2 + 1 + 1 Bonuspunkte).
In Beispiel 17.11 der Vorlesung wurde die Dichte der Gamma-Verteilung $\Gamma_{(\lambda,p)}$ für $\lambda, p \in \mathbb{R}^+_{\backslash 0}$ definiert als

$$\mathbb{f}_{\Gamma_{(\lambda,p)}}(x) := \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\Gamma(p) := \int_0^\infty t^{p-1} \exp(-t) dt$ die Gammafunktion ist. Für diese gilt $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{f}_{\Gamma_{(\lambda,p)}}$ in der Tat eine Dichte ist.

(b) Sei für $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+_{\backslash 0}$ die zwei unabhängige reellen Zufallsvariablen $G_1 \sim \Gamma_{(1,p_1)}$ und $G_2 \sim \Gamma_{(1,p_2)}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Dichte von G_2/G_1 gegeben ist durch

$$\mathbb{f}_{G_2/G_1}(y) = \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} y^{p_2-1}(y+1)^{-p_1-p_2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y).$$

(c) Zeigen Sie mittels Aufgabenteil (b), dass $B_{p_1,p_2} := \frac{G_1}{G_1+G_2}$ die Dichte

$$\mathbb{f}_{B_{p_1,p_2}}(x) = \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} x^{p_1-1}(1-x)^{p_2-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

hat. Die Verteilung von $B_{(p_1,p_2)}$ ist unter dem Namen *Beta-Verteilung* bekannt.

(d) Zeigen Sie, dass $\Gamma_{(\lambda,p_1)} \star \Gamma_{(\lambda,p_2)} = \Gamma_{(\lambda,p_1+p_2)}$ für alle $\lambda, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+_{\backslash 0}$.

Lösung 24. (a) Wir überprüfen die drei definierenden Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte. Zunächst ist die Funktion $\mathbb{f}_{\Gamma_{(\lambda,p)}}$ offensich messbar und positiv. Weiter gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{p-1} \exp(-\lambda x) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) dx = \lambda^{-p} \int_0^\infty x^{p-1} \exp(-x) dx = \lambda^{-p}\Gamma(p)$$

durch Anwendung der Substitutionsregel für Integration. Dies impliziert, dass $1 = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{f}_{\Gamma_{(\lambda,p)}}(x)dx$.

(b) Zunächst haben wir, dass G_2 und G_1^{-1} unabhängig bleiben. Weiter gilt für die Dichte von G_1^{-1}, durch den Transformationssatz, dass $\mathbb{f}_{G_1^{-1}}(z) = \mathbb{f}_{G_1}(z^{-1})z^{-2}$ für $z \in \mathbb{R}^+_{\backslash 0}$. (Man bemerke, dass auf $\mathbb{P}^{G_2}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+_{\backslash 0}) = 0$ und die Inversion bijektiv von $\mathbb{R}^+_{\backslash 0}$ nach $\mathbb{R}^+_{\backslash 0}$ abbildet.)

Unter der Anwendung des Ergebnis von Aufgabe 1 erhalten wir für $y > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{f}_{G_2/G_1}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}_{G_2}(x)\mathbb{f}_{G_1^{-1}}(y/x)x^{-1}dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{p_2-1}\exp(-x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\frac{x^{p_1-1}}{y^{p_1-1}}\exp(-x/y)\frac{x^2}{y^2}x^{-1}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x/y)dx \\
&= \frac{y^{-p_1-1}}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} \int_0^{\infty} x^{p_1+p_2-1}\exp(-x(1+y^{-1}))dx \\
&= \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}y^{-p_1-1}(1+y^{-1})^{-p_1-p_2}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{(1+y^{-1})^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2)}x^{p_1+p_2-1}\exp(-x(1+y^{-1}))dx}_{=1,\text{ da Dichte }\Gamma_{(1+y^{-1},p_1+p_2)}} \\
&= \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}y^{p_2-1}(y+1)^{-p_1-p_2}
\end{aligned}$$

Für $y \leq 0$ ist $\mathbb{f}_{G_2/G_1}(y) = 0$.

(c) Zunächst sehen wir, dass $(G_1 + G_2)/G_1 = 1 + G_2/G_1$ ist und folglich die Dichte

$$\mathbb{f}_{(G_1+G_2)/G_1}(y) = \mathbb{f}_{G_2/G_1}(y-1) = \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}(y-1)^{p_2-1}y^{-p_1-p_2}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(y)$$

für $y \in \mathbb{R}$ besitzt. Wir folgern erneut durch den Transformationssatz für $y > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{f}_{B_{p_1,p_2}}(y) = \mathbb{f}_{(G_1+G_2)/G_2}(y^{-1})y^{-2} &= \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}(y^{-1}-1)^{p_2-1}y^{p_1+p_2-2}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(y^{-1}) \\
&= \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}(1-y)^{p_2-1}y^{p_1-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(y).
\end{aligned}$$

Erneut haben wir offensichtlich für $y \leq 0$, dass $\mathbb{P}^{B_{p_1,p_2}}((-\infty, y]) = 0$.

(d) Für $y \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\begin{aligned}
[\mathbb{f}_{\Gamma_{(\lambda,p_1)}} \star \mathbb{f}_{\Gamma_{(\lambda,p_2)}}](z) &= \frac{\lambda^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}\int_{\mathbb{R}}(z-y)^{p_1-1}y^{p_2-1}\exp(-\lambda z)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(z-y)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)dy \\
&= \frac{\lambda^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}\exp(-\lambda z)\int_0^z (z-y)^{p_1-1}y^{p_2-1}dy \\
&= \frac{\lambda^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}\exp(-\lambda z)z^{p_1+p_2-1}\int_0^1 (1-y)^{p_1-1}y^{p_2-1}dy \qquad \text{(Substitution)} \\
&= \frac{\lambda^{p_1+p_2}}{\Gamma(p_1+p_2)}\exp(-\lambda z)z^{p_1+p_2-1}\underbrace{\int_0^1 \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}(1-y)^{p_1-1}y^{p_2-1}dy}_{=1\text{ da Dichte der Beta Verteilung}} \\
&= \mathbb{f}_{\Gamma_{(\lambda,p_1+p_2)}}(z)
\end{aligned}$$

Aufgabe 25 (Chi-Quadrat- und t-Verteilung, 4 = 1 + 1 + 2 Bonuspunkte).
Sei $Z_0, Z_1, \ldots, Z_k$ unabhängige $\mathrm{N}_{(0,1)}$-verteilte Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie, dass die reelle Zufallsvariable $S_k := \sqrt{k^{-1}\sum_{j\in[\![k]\!]} Z_j^2}$ stetig-verteilt ist mit Dichte

$$\mathbb{f}_{S_k}(y) = \frac{(k/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} 2y^{k-1}\exp(-ky^2/2)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable Z_0/S_k stetig verteilt ist mit Dichte

$$\mathbb{f}_{Z_0/S_k}(y) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k\pi}\Gamma(k/2)}\left(1+\frac{y^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Lösung 25. (a) Wir wissen nach der Vorlesung, dass $Z_j^2 \sim \Gamma_{(1/2,1/2)}$ bzw mittels Aufgabe 2, dass $\sum_{j\in[\![k]\!]} Z_j^2 \sim \Gamma_{(1/2,k/2)}$, da die Z_i unabhängig sind und das Quadrieren eine messbare Abbildung ist. Folglich gilt durch Anwendung des Transformationssatzes, da $\mathbb{P}^{\sum_{j\in[\![k]\!]} Z_j^2}((-\infty,0)) = 0$ für $y > 0$, dass

$$\begin{aligned}
\mathbb{f}_{S_k}(y) &= \mathbb{f}_{\Gamma_{(1/2,k/2)}}(ky^2)2ky \\
&= \frac{2^{-k/2}}{\Gamma(k/2)} k^{k/2-1}y^{k-2}\exp(-ky^2/2)2ky \\
&= \frac{(k/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} 2y^{k-1}\exp(-ky^2/2)
\end{aligned}$$

für $y < 0$ gilt $\mathbb{f}_{S_k}(y) = 0$.

(b) Zunächst einmal sehen wir, dass durch Anwendung des Transformationssatzes, da $\mathbb{P}^{S_k}(-\infty,0)) = 0$ für $y > 0$ gilt $\mathbb{f}_{S_k^{-1}}(y) = \mathbb{f}_{S_k}(y^{-1})y^{-2} = \frac{(k/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)}2y^{-k-1}\exp(-ky^{-2}/2)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$. Für $y \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{f}_{Z_0/S_k}(y) &= \frac{\sqrt{2}(k/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{-k-2}\exp(-kx^{-2}/2)\exp(-y^2x^{-2}/2)dx \\
&= \frac{\sqrt{2}(k/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{-k-2}\exp(-x^{-2}(k/2+y^2/2))dx
\end{aligned}$$

wobei wir durch die Substitution mit $\varphi(x) = x^{-1/2}$ Folgendes erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{f}_{Z_0/S_k}(y) &= \frac{\sqrt{2}(k/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{k/2+1}\frac{1}{2}x^{-3/2}\exp(-x(k/2+y^2/2))dx \\
&= \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)\sqrt{2\pi}}\left(\frac{k}{2}\right)^{k/2}(k/2+y^2/2)^{-(k+1)/2} \\
&= \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(k/2)\sqrt{k\pi}}\left(1+\frac{y^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde die Dichteeigenschaft der Gammaverteilung verwendet.

Aufgabe 26 (Maximum-Likelihood-Schätzer, 3 Bonuspunkte).

Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Poi}_\lambda$ unabhängige und identisch Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Die Zähldichte der Poisson-Verteilung mit Parameter λ ist gegeben durch

$$\mathbb{p}(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}_n$ von $\lambda \in \mathbb{R}^+$ basierend auf $X_1, \ldots, X_n$ durch $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ gegeben ist.
Bemerkung: *Betrachten Sie den Fall $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$ separat.*

Lösung 26.

Da die X_i unabhängig und identisch verteilt sind, faktorisiert die gemeinsame Zähldichte und die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$L_n(\lambda, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{p}(x_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{(x_i)!}\exp(-\lambda)$$

Wir betrachten nun den Fall, $X_1 = \cdots = X_n = 0$. Dann gilt $\lambda \mapsto L_n(\lambda, X_1, \ldots, X_n) = \exp(-\lambda)$. Diese Funktion ist monoton fallend und stetig auf $\mathbb{R}^+$ und nimmt somit ihr globales Maximum in $\lambda = 0$ an. Folglich gilt $\widehat{\lambda}_n(X_1, \ldots, X_n) = 0 = \frac{1}{n}\sum_{i \in [\![n]\!]} X_i$.
Wir betrachten nun, den zweiten Fall nämlich, dass es ein Index $i \in [\![n]\!]$ mit $X_i > 0$ gibt. Dann gilt $L_n(0, X_1, \ldots, X_n) = 0 \leq L_n(\lambda, X_1, \ldots, X_n)$ für jede Wahl $\lambda \in \mathbb{R}^+_{\backslash 0}$. Es reicht folglich, den Likelihood über der Teilmenge $\mathbb{R}^+_{\backslash 0}$ von $\mathbb{R}^+$ zu minimieren. Wir betrachten hier die log-Likelihood für $(x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{N}_0 \setminus \{(0, \ldots, 0)^t\}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^+_{\backslash 0}$

$$l_n(\lambda, x_1, \ldots, x_n) := \log(L_n(\lambda, x_1, \ldots, x_n)) = \log(\lambda)\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \log((x_i)!) - n\lambda$$

und leiten diese nach λ ab:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} l_n(\lambda, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i - n$$

Nullsetzen der Ableitung mit den Werten $X_1, \ldots, X_n$ liefert den Extrempunkt

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} l_n(\lambda, X_1, \ldots, X_n)\mid_{\hat{\lambda}_n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i.$$

Da $\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} l_n(\lambda, X_1, \ldots, X_n) = -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^n X_i < 0$ gilt, handelt es sich bei $\hat{\lambda}_n$ tatsächlich um ein lokales Maximum. Das Maximum ist global, da für $\lambda < \widehat{\lambda}_n$ l_n monoton wachsend und für $\lambda > \widehat{\lambda}_n$ monoton fallend (Ableitung ist streng positiv bzw. streng negativ).

Aufgabe 27 (Statistische Tests, 2 + 1 + 1.5 + 1 + 1.5 = 7 Bonuspunkte).

Wir untersuchen die Länge ausgewachsener Karpfen. Aufgrund langjähriger Untersuchungen nehmen wir in unserem Modell an, dass die Länge X eines ausgewachsenen Karpfens stetig Laplace(μ_0, b)-verteilt ist mit festem und bekanntem Mittelwert $\mu_0 = 50$ cm und unbekanntem Skalenparameter b, d.h. $X \sim$ Laplace$(\mu_0, b) =: \mathbb{P}_b$. Die Dichte einer Laplace(μ_0, b)-Verteilung lautet

$$\mathbb{f}_{\mu_0,b}(x) = \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu_0|}{b}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ein Forscher stellt die Hypothese auf, dass $b = b_0 = 7$ cm gilt. Wir denken, dass der Skalenparameter b größer als 7 cm ist und fangen zur Untermauerung unserer Aussage unabhängig voneinander $n = 10$ ausgewachsene Karpfen. Wir erhalten folgende Längen (in cm):

56	55	36	42	69	49	64	42	45	44

(a) Sei zunächst $b_1 > b_0$ fest gewählt. Formulieren Sie den Neyman-Pearson-Test $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ für die $\mathbb{P}_b$-Verteilung zu den Hypothesen

$$H_0 : b = b_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : b = b_1$$

zum Niveau $\alpha \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass der Test von der Form

$$\varphi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1, & T_n := \sum_{i=1}^n |X_i - \mu_0| > c^*, \\ 0, & T_n \leq c^*, \end{cases}$$

mit geeignet gewähltem c^* ist.

(b) Begründen Sie, warum φ aus (a) auch ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α für die Hypothesen

$$H_0 : b = b_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : b > b_0$$

ist.

(c) Es ist bekannt, dass für $X_1 \sim \text{Laplace}(\mu_0, b)$ gilt: $2\frac{|X_1-\mu_0|}{b} \sim \chi_2^2$ (Chi-Quadrat-Verteilung mit 2 Freiheitsgraden).
Berechnen Sie damit den Wert c^* des Tests aus (a) und geben Sie das Testresultat zum Niveau $\alpha = 0.05$ für unsere Beobachtungen an.
Hinweis: *Hier sind einige α Quantile $\chi^2_{n,\alpha}$ der χ^2_n-Verteilung:*
$\chi^2_{2,0.05} = 0.10, \chi^2_{2,0.95} = 5.99, \chi^2_{20,0.05} = 10.85, \chi^2_{20,0.95} = 31.41.$

(d) Begründen Sie, warum φ auch ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α für die Hypothesen

$$H_0' : b \leq b_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : b > b_0$$

ist.
Bemerkung: *Für das c^* aus (c) gilt $c^* = \frac{b_0}{2} q$ für ein geeignetes Quantil q.*

(e) Geben Sie einen gleichmäßig besten Konfidenzbereich zum Niveau $1 - \alpha$ für die falschen Parameter $F_b = (0, b)$ an.

Lösung 27. (a) Wir untersuchen Verteilungen $\mathbb{P}_b^n = \text{Laplace}(\mu_0, b)^n$ mit Dichten $\mathbb{f}_b^n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{f}_{\mu_0,b}(x_i)$. Hierbei faktorisiert die gemeinsame Dichte, weil wir die Karpfen unabhängig voneinander gefangen haben.
Nach dem Neyman-Pearson-Lemma lautet der Neyman-Pearson-Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ für die Hypothesen $H_0 : b = b_0$ gegen $H_1 : b = b_1$: (schreibe $x = (x_1, \ldots, x_n)$):

$$\varphi : \mathbb{R} \to \{0,1\}, \quad \varphi(x) = \mathbb{1}_{\{\mathbb{f}_{b_1}^n(x) \geq k \mathbb{f}_{b_0}^n(x)\}} = \begin{cases} 1, & L(x) \geq k, \\ 0, & L(x) < k \end{cases},$$

wobei $L(x_1, \ldots, x_n) := \frac{\mathbb{f}_{b_1}^n(x_1,\ldots,x_n)}{\mathbb{f}_{b_0}(x_1,\ldots,x_n)}$ der Likelihood-Quotient ist und $\mathbb{P}_{b_0}^n(\varphi = 1) = \alpha$ gelten muss. Hier haben wir für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$L(x) = \frac{\mathbb{f}_{b_1}^n(x_1, \ldots, x_n)}{\mathbb{f}_{b_0}(x_1, \ldots, x_n)} = \left(\frac{b_0}{b_1}\right)^n \cdot \exp\left(\left(\frac{1}{b_0} - \frac{1}{b_1}\right) \sum_{i=1}^n |X_i - \mu_0|\right)$$

Da $b_1 > b_0$ und damit $\frac{1}{b_0} - \frac{1}{b_1} > 0$, ist der Likelihood-Quotient monoton wachsend in $T_n(X_1, \ldots, X_n) := \sum_{i=1}^n |X_i - \mu_0|$. Daher können wir den Test φ äquivalent umformen zu

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & T(X_1, \ldots, X_n) > c^*, \\ 0, & T(X_1, \ldots, X_n) \leq c^*, \end{cases} \tag{$*$}$$

wobei c^* bestimmt wird aus $\alpha = \mathbb{P}_{b_0}^n(\varphi = 1) = \mathbb{P}_{b_0}^n(T(X) > c^*)$.

(b) Wie man an $(*)$ und der Bestimmungsgleichung für c^* sieht, hängt der gesamte Test φ nicht von der konkreten Wahl von $b_1 > b_0$ ab. Für jedes $b_1 > b_0$ und Hypothesen

$$H_0 : b = b_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : b = b_1$$

erhalten wir also denselben Test φ mit der Optimalitätsaussage: φ minimiert den Fehler 2. Art $\mathbb{P}_{b_1}(\phi = 0)$ unter allen Tests ϕ mit Fehler 1. Art $\mathbb{P}_{b_0}(\varphi = 1)$.
Damit ist φ gleichmäßig bester Test (zum Niveau α) für die Hypothesen

$$H_0 : b = b_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : b > b_0.$$

(c) Sind $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Laplace}(\mu_0, b_0)$, so sind

$$2\frac{|X_i - \mu_0|}{b_0} \overset{\text{iid}}{\sim} \chi_2^2 \qquad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\}$$

unabhängige und identisch χ_2^2-verteilte Zufallsvariablen. Entsprechend gilt

$$\frac{2}{b_0} T(X) = \sum_{i=1}^n 2\frac{|X_i - \mu_0|}{b_0} \sim \chi_{2n}^2.$$

Damit kann c^* bestimmt werden:

$$\alpha = \mathbb{P}_{b_0}(T(X) > c^*) = \mathbb{P}_{b_0}\left(\frac{2}{b_0}T(X) > \frac{2}{b_0}c^*\right) \quad \Leftarrow \quad \frac{2}{b_0}c^* = \chi^2_{2n,1-\alpha},$$

d.h. $c^* = \frac{b_0}{2}\chi^2_{2n,1-\alpha}$.
Konkret haben wir die Realisierungen

$$T(X) = \sum_{i=1}^n |X_i - \mu_0| = 86,$$

und $c^* = \frac{7}{2}\chi^2_{20,0.95} = 3.5 \cdot 31.41 = 109.94$ (der konkrete Wert muss hier nicht bestimmt werden, es genügt $c^* > 86$ abzuschätzen). Wir folgern $T(X) < c^*$, d.h. $\varphi(X) = 0$, d.h. wir werden den Wert des Forschers nicht beanstanden.

(d) Es gilt für alle $b \leq b_0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_b(\varphi = 1) &= \mathbb{P}_b\left(\sum_{i=1}^n |X_i - \mu_0| > c^*\right) \\
&= \mathbb{P}_b\left(2\frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \mu_0|}{b} > 2\frac{c^*}{b}\right) \\
&= \mathbb{P}_b\left(\frac{2\sum_{i=1}^n |X_i - \mu_0|}{b} > \underbrace{\frac{b_0}{b}}_{\geq 1} \chi^2_{2n,1-\alpha}\right) \\
&\leq \mathbb{P}_b\left(\frac{2\sum_{i=1}^n |X_i - \mu_0|}{b} > \chi^2_{2n,1-\alpha}\right) = \alpha
\end{aligned}$$

der Test hält also auch für alle $b \leq b_0$ das Niveau α ein. D.h. φ ist sogar ein gleichmäßig bester Test für die Hypothesen

$$H_0' : b \leq b_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : b > b_0$$

(e) In Aufgabenteil (d) haben wir einen gleichmäßig besten Test der Form $\varphi_{b_0} = \mathbb{1}_{A_{b_0}}$ zum Niveau α für das Testproblem

$$H_0 : \mathcal{H}_{b_0}^0 = (0, b_0] \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mathcal{H}_{b_0}^1 = (b_0, \infty)$$

gefunden, nach Satz 12.33 ist die assoziierte Bereichsschätzfunktion B ein gleichmäßig bester $(1-\alpha)$-Konfidenzbereich, wobei B gegeben ist durch (schreibe $x = (x_1, \dots, x_n)$)

$$\begin{aligned} B(x) &= \big\{ b \in \mathbb{R}^+ \mid x \notin A_b \big\} \\ &= \big\{ b \in \mathbb{R}^+ \mid T(x) \notin (c^*, \infty) \big\} \\ &= \left\{ b \in \mathbb{R}^+ \mid T(x) \leq \frac{b}{2} \chi^2_{2n,1-\alpha} \right\} \\ &= \left\{ b \in \mathbb{R}^+ \mid \frac{2T(x)}{\chi^2_{2n,1-\alpha}} \leq b \right\} \\ &= \big[\frac{2T(x)}{\chi^2_{2n,1-\alpha}}, \infty \big). \end{aligned}$$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **11. Januar 2021, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`