# Die Riemannsche Zeta-Funktion

Josua Kugler

03.11.2020

### Definition (Riemannsche $\zeta$-Funktion)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

## Lemma (Konvergenzgebiet)

$\zeta(s)$ *konvergiert normal auf der offenen Halbebene* $\operatorname{Re} s > 1$.

## Beweis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}}.$$

$\square$

## Lemma (Eulerprodukt)

*Die Riemannsche $\zeta$-Funktion lässt sich als absolut konvergentes unendliches Produkt schreiben:*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

## Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\sum_p \left| 1 - \frac{1}{1 - p^{-s}} \right| \leq \sum_p \sum_m \left| p^{-ms} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{-s} \right|$$

□

## Beweis.

$$\frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$\square$

**Beweis.**

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$\square$

**Beweis.**

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} \left(p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$\square$

## Beweis.

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} \left(p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

□

## Beweis.

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_m=0}^{\infty} \left(p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

$\square$

## Beweis.

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} \left(p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

□

## Beweis.

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{\nu_1,\dots,\nu_m=0}^{\infty}\left(p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

$\square$

## Definition ($\theta$-Funktion)

Die Thetafunktion ist gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}.$$

## Definition ($\theta$-Funktion)

Die Thetafunktion ist gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}.$$

- konvergiert für $\operatorname{Im} z > 0$ (Majorantenkriterium)

## Definition ($\theta$-Funktion)

Die Thetafunktion ist gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}.$$

- konvergiert für $\operatorname{Im} z > 0$ (Majorantenkriterium)
- erfüllt die Thetatransformationsformel:

$$\theta(z) = \theta\left(-\frac{1}{z}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{z}}$$

$$\Leftrightarrow \theta(it) = \theta\left(-\frac{1}{it}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{it}} = \theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}}.$$

## Lemma

*Die Funktion*

$$R_\infty(s) := \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

*ist ganz.*

## Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t (n^2-1)} \leq B(t) \leq B(1) =: B.$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq B e^{-\pi t}$.
Daraus folgt

$$\int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq B \cdot \int_1^{\infty} e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq B \cdot C \cdot \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

□

### Lemma

*Die Riemannsche $\zeta$-Funktion besitzt eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, wobei an der Stelle 1 eine einfache Polstelle vorliegt. Außerdem genügt*

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

*der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$.*

## Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| t \mapsto \pi n^2 t$$

## Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \end{aligned}$$

## Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
\pi^{-s}\Gamma(s)\frac{1}{n^{2s}} &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Bigg| \sum_{n=1}^\infty,\ s \mapsto s/2
\end{aligned}$$

**Beweis.**

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\ \sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \sum_{n=1}^\infty, \; s \mapsto s/2 \end{aligned}$$

## Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
\sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \sum_{n=1}^\infty,\ s \mapsto s/2 \\
\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \sum_{n=1}^\infty n^{-s} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}$$

## Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
\sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \sum_{n=1}^\infty,\ s \mapsto s/2 \\
\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}
$$

**Beweis.**

Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\operatorname{Re} s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \pi^{-\operatorname{Re} s/2}\Gamma(\operatorname{Re} s/2)\zeta(\operatorname{Re} s)\\ &< \infty\end{aligned}$$

gilt nach dem Satz von Fubini/Tonelli für absolut konvergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

## Beweis.

$$
\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^{\infty}\frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \underbrace{\int_0^{1}\frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_0(s)} + \underbrace{\int_1^{\infty}\frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_\infty(s)} \\
&= R_0(s) + R_\infty(s)
\end{aligned}
$$

## Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

## Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$$

## Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$$

**Beweis.**

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \qquad \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$$

## Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} && \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_1^\infty \frac{\theta\left(iu\right) \cdot u^{\frac{1}{2}} - 1}{2} u^{-s/2-1} \mathrm{d}u \end{aligned}$$

## Beweis.

$$
\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} && \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(iu\right) \cdot u^{\frac{1}{2}} - 1}{2} u^{-s/2-1} \mathrm{d}u \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}
$$

## Beweis

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

## Beweis

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

## Beweis

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

## Beweis

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

## Beweis

$$\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}$$

## Beweis

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= R_\infty(1-s) + \frac{1}{2} \frac{2}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{2} \frac{2}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty$$

## Beweis

$$\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}}-1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \frac{1}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty
\end{aligned}$$

## Beweis

$$
\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}}-1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \frac{1}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty \\
&= R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

## Beweis

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$

## Beweis

$$
\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\
&= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}
\end{aligned}
$$

## Beweis

$$
\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\
&= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \\
\zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right)
\end{aligned}
$$

## Beweis

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$
$$= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right)$$

- $R_\infty$ und $\Gamma$ sind ganz

## Beweis

$$\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\
&= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \\
\zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right)
\end{aligned}$$

- $R_\infty$ und $\Gamma$ sind ganz
- $\Gamma$ besitzt keine Nullstellen

## Beweis

$$
\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\
&= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \\
\zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right)
\end{aligned}
$$

- $R_\infty$ und $\Gamma$ sind ganz
- $\Gamma$ besitzt keine Nullstellen

$\Rightarrow$ Einzige Singularitäten bei $s = 1$ und $s = 0$. Für $s = 0$ gilt:

$$
\lim_{s\to 0} \frac{1}{s \cdot \Gamma(s/2)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2\Gamma(s/2+1)} = \frac{1}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}
$$

## Ergebnis

- Für $\operatorname{Re} s > 1$ gilt
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left( R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right).$$
- Damit ist eine analytische Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ gefunden, wobei an der Stelle $s = 1$ eine einfache Polstelle vorliegt.
- Aus der Gleichung
$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$
erkennt man sofort die geforderte Funktionalgleichung
$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

**Theorem (Riemannsche Hypothese)**

*Abgesehen von den „trivialen“ Nullstellen bei $s = -2n,\ n \in \mathbb{N}$ haben alle Nullstellen Realteil $\frac{1}{2}$.*

de la Vallée-Poussin: $\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = \mathcal{O}(xe^{-a\sqrt{\log(x)}})$
mit RH: $\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = \mathcal{O}(\sqrt{x}\log(x))$