Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 11

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 28. Juni - 02. Juli 2021
Bitte geben Sie maximal 2 Aufgaben per Übungsgruppensystem zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!
Nutzen Sie dazu den Link `https://uebungen.physik.uni-heidelberg.de/h/1291`

1. *Verständnisfragen*

a) Fassen Sie die wesentliche Idee der Störungstheorie zusammen, insbesondere auch im Hinblick auf die verschiedenen Bilder der Quantenmechanik.

b) Überlegen Sie sich selbst Situationen, in denen Störungstheorie angebracht sein könnte. Wie können Sie abschätzen, ob Störungstheorie sinnvoll ist?

c) Welche wichtigen Annahmen gehen in die zeitabhängige Störungstheorie und in Fermis goldene Regel ein?

2. *Eichinvarianz*

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, ist der Hamilton-Operator für ein Teilchen der Masse m und der Ladung q im elektromagnetischen Feld gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\hat{x})\right]^2 + q\Phi(\hat{x}),$$

wobei $\vec{A}$ und Φ die Potentiale für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind.

Zeigen Sie, dass die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung ihre Form behält, wenn man eine Eichtransformation der Potentiale,

$$\begin{aligned}\vec{A} \;&\to\; \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda,\\ \Phi \;&\to\; \Phi' = \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\end{aligned}$$

mit einer beliebigen Funktion $\Lambda(\vec{x}, t)$ und gleichzeitig eine lokale Phasentransformation der Ortswellenfunktion

$$\psi(\vec{x}, t) \;\to\; \psi'(\vec{x}, t) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda(\vec{x}, t)\right]\psi(\vec{x}, t)$$

durchführt.

3. *Zeitunabhängiges Magnetfeld*

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit einer Punktladung in einem homogenen und stationären Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}$ beschäftigen, wobei $\vec{e}$ ein Einheitsvektor ist.

a) Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Komponenten des kinetischen Impulses

$$\hat{\pi} = \hat{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\hat{x})$$

nicht kommutieren.

b) Betrachten Sie das System im Heisenberg-Bild. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für den Orts- und Impulsoperator?

c) Lösen Sie die in b) hergeleiteten Bewegungsgleichungen und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

4. Zeitabhängiges Magnetfeld

Die Bewegung eines Elektrons mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem zeitabhängigen Magnetfeld $\vec{B}(t)$ wird durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{g}{2}\mu_\mathrm{B}\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{B}(t)$$

beschrieben, wobei $g \approx 2$ der Landé-Faktor ist, $\mu_\mathrm{B} = e\hbar/(2m_\mathrm{e}c)$ das Bohr'sche Magneton und $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^\mathrm{T}$ der Vektor der Pauli-Matrizen.

a) Berechnen Sie für den Fall eines statischen und räumlich konstanten Magnetfeldes $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$ die Energie-Eigenwerte E_α und E_β und die zugehörigen Eigenzustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$. Wie sieht die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung für dieses System aus?

b) Nun werde zusätzlich zu $\vec{B}_0$ ein weiteres Magnetfeld $\vec{B}_1(t) = B_1\left[\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + \sin(\omega t)\,\vec{e}_y\right]$ angelegt. Eine allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung kann wieder aus einer Überlagerung der Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ gewonnen werden. Wie sehen die Bewegungsgleichungen der Koeffizienten aus?
Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus a) und variieren Sie die Konstanten. Spalten Sie außerdem den obigen Hamilton-Operator in zwei Teile auf, $\hat{H} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, wobei $\hat{H}_0$ von $\vec{B}_0$ herrührt und $\hat{H}_1$ von $\vec{B}_1$.

c) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\alpha\rangle$. Außerdem sei ω so gewählt, dass das System in Resonanz ist, d.h. $\omega = g\mu_\mathrm{B}B_0/\hbar$. Lösen Sie für diesen Fall die Bewegungsgleichungen der Koeffizienten. Zu welchen Zeiten befindet sich das System dann mit Sicherheit im Zustand $|\beta\rangle$?

Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 11: Lösung

1. *Verständnisfragen*

a) Wenige quantenmechanische Systeme sind exakt lösbar. Um die Energie und dazugehörigen Zustände eines Systems trotzdem abzuschätzen, gibt es mehrere Möglichkeiten, wobei die Störungstheorie eine davon ist. Dabei versucht man eine bekannte Lösung auszunutzen und den Hamilton-Operator so aufzuspalten, dass die bekannte Lösung nur leicht gestört ist. Im Speziellen schreiben wir

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)}.$$

Dabei ist $\hat{H}^{(0)}$ der Hamilton-Operator, dessen Lösung bekannt ist. $\hat{H}^{(1)}$ ist der Hamilton-Operator, der das bekannte System um einen kleinen Betrag stört. Man unterscheidet zeitabhängige und zeitunabhängige Störungen, also $\hat{H}^{(1)}(t)$ und $\hat{H}^{(1)}$. Im Falle der zeitlich konstanten Störung werden Energie-Eigenwerte und Eigenzustände abgeschätzt, also Energieverschiebungen bezüglich des bekannten Systems.

b) Mögliche Anwendungen von Störungstheorie sind Wechselwirkungen von Atomen mit elektrischen und/oder magnetischen Feldern, z.B. dem Zeeman-Effekt, linearen Stark-Effekt oder Strahlungsübergängen. Andere Anwendungen sind die Beschreibung des Leuchtelektrons eines Alkali-Atoms oder des Helium-Atoms. Im letzteren Fall fasst man die Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen als Störung auf.
Störungstheorie ist dann sinnvoll, wenn das zu beschreibende System nur kleine Abweichungen von dem exakt lösbaren System zeigt. Das bedeutet, dass der Erwartungswert des Hamilton-Operators $\hat{H}^{(1)}$ der Störung klein ist. Dies sehen wir am Übergangs-Matrixelement

$$\frac{\langle\psi_n^{(0)}|\hat{H}^{(1)}\psi_k^{(0)}\rangle}{E_n - E_k} \ll 1.$$

Hier sind $\psi_i^{(0)}$ Eigenzustände des ungestörten Systems und E_i die zugehörigen Eigenwerte.

c) Die zeitabhängigen Zustände werden durch eine Linearkombination

$$|\psi_n\rangle(t) = \sum_k c_{nk}\,|\psi_k\rangle(t=0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_k^{(0)}t/\hbar}$$

dargestellt. Wir nehmen nun an, dass die Störung schwach ist, also nur eine geringe Änderung des Systems bewirkt. Dann sind die Koeffizienten $c_{nn} = 1$ und $c_{nk} = 0$ für $n \neq k$ zum Zeitpunkt $t = 0$, wenn die Störung eingeschaltet wird, und bleiben auch für Zeiten t' so, die kurz verglichen mit der Zeitskala eines Übergangs sind. Die Annahme, die auf Fermis goldene Regel führt, ist das instantane Einschalten einer konstanten Störung.

2. *Eichinvarianz*

a) Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung lautet nach der Eichtransformation

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\vec{x},t) = H'\psi'(\vec{x},t)$$

mit

$$\psi(\vec{x},t) \;\to\; \psi'(\vec{x},t) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda(\vec{x},t)\right]\psi(\vec{x},t).$$

Für die linke Seite gilt, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\psi\right] &= \mathrm{i}\hbar\left[\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\psi + \exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]\\ &= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\left(\frac{q}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi.\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Schrödinger-Gleichung ergibt der Term $\hat{p} - (q/c)\vec{A}'$ mit dem neu geeichten Vektorpotential $\vec{A}'$ angewandt auf ψ'

$$\begin{aligned}\left(-\mathrm{i}\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}'\right)\psi' &= \left[-\mathrm{i}\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A} + \frac{q}{c}\left(\vec{\nabla}\Lambda\right)\right]\exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\psi\\ &= -\mathrm{i}\hbar\left[-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\left(\vec{\nabla}\Lambda\right)\right]\exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\psi - \mathrm{i}\hbar\exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\vec{\nabla}\psi - \frac{q}{c}\vec{A}\exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\psi\\ &\quad + \frac{q}{c}\left(\vec{\nabla}\Lambda\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\psi\\ &= \exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\left[-\mathrm{i}\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right]\psi.\end{aligned}$$

Da die beiden Terme, die $\vec{\nabla}\Lambda$ enthalten, sich wegkürzen, ist also

$$\frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \frac{q}{c}\vec{A}'\right)^2\psi' = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\psi.$$

Außerdem gilt, dass

$$q\Phi'\psi' = \left(q\Phi + \frac{q}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\psi = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\left(q\Phi + \frac{q}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\psi.$$

Setzt man nun die Ergebnisse in die obige Schrödinger-Gleichung ein, dann ist

$$\exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\left(\frac{q}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\psi + \exp\left(-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda\right)\left(q\Phi + \frac{q}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\psi,$$

was äquivalent ist zur Schrödinger-Gleichung mit den ursprünglichen Potentialen, denn alle Λ-Terme heben sich weg.

3. *Zeitunabhängiges Magnetfeld*

a) Der Kommutator des kinetischen Impulses wurde bereits in der Vorlesung besprochen:

$$\begin{aligned}\left[\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j\right] &= \left[\hat{p}_i - \frac{q}{c}A_i, \hat{p}_j - \frac{q}{c}A_j\right] = \left[\hat{p}_i, \hat{p}_j\right] - \frac{q}{c}\left(\left[A_i, \hat{p}_j\right] + \left[\hat{p}_i, A_j\right]\right) + \frac{q^2}{c^2}[A_i, A_j]\\ &= \mathrm{i}\hbar\frac{q}{c}\left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right) = \mathrm{i}\hbar\frac{q}{c}\epsilon_{ijk}B_k\end{aligned}$$

Da das Magnetfeld $\vec{B}$ nicht verschwindet, kommutieren die Komponenten des kinetischen Impulses nicht.

b) Die Heisenberg-Gleichung für einen beliebigen Operator $\hat{O}$ lautet

$$\partial_t \hat{O} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left[\hat{H}, \hat{O}\right],$$

mit dem Hamilton-Operator $\hat{H}$. Hier betrachten wir eine Punktladung in einem homogenen und stationären Magnetfeld, sodass der Hamilton-Operator nur den kinetischen Impuls und kein skalares Potential Φ enthält:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{\pi}}^2.$$

Die Bewegungsgleichung für den Ortsoperator ist

$$\partial_t \hat{x}_i = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{x}_i\right] = \frac{\mathrm{i}}{2m\hbar}\left[\hat{\pi}_j\hat{\pi}_j, \hat{x}_i\right] = \frac{\mathrm{i}}{2m\hbar}\left(\hat{\pi}_j\left[\hat{\pi}_j, \hat{x}_i\right] + \left[\hat{\pi}_j, \hat{x}_i\right]\hat{\pi}_j\right) = \frac{\mathrm{i}}{2m\hbar}\left(-2\mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\hat{\pi}_j\right) = \frac{\hat{\pi}_i}{m}.$$

Hier haben wir benutzt, dass das Vektorpotential $\vec{A}(\hat{\vec{x}})$ und der Ortsoperator $\hat{\vec{x}}$ vertauschen.
Für den Impulsoperator finden wir die Bewegungsgleichung

$$\partial_t \hat{\pi}_i = \frac{\mathrm{i}}{2m\hbar}\left(\hat{\pi}_j\left[\hat{\pi}_j, \hat{\pi}_i\right] + \left[\hat{\pi}_j, \hat{\pi}_i\right]\hat{\pi}_j\right) = \frac{\mathrm{i}}{2m\hbar}\mathrm{i}\hbar\frac{q}{c}\epsilon_{jik}\left(\hat{\pi}_j B_k + B_k\hat{\pi}_j\right) = \frac{q}{mc}\epsilon_{ijk}\hat{\pi}_j B_k.$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass das Magnetfeld homogen ist und deshalb der kinetische Impuls und das Magnetfeld vertauschen.
Die Bewegungsgleichungen sind also

$$\partial_t \hat{\vec{x}} = \frac{1}{m}\hat{\vec{\pi}}$$
$$\partial_t \hat{\vec{\pi}} = \frac{q}{mc}\hat{\vec{\pi}} \times \vec{B} = \omega_B \hat{\vec{\pi}} \times \vec{e}$$

mit der Zyklotronfrequenz $\omega_B = \frac{qB}{mc}$.

c) Wir lösen zuerst die Bewegungsgleichung des Impulsoperators. Hier trennen wir den kinetischen Impuls in zwei Terme:

$$\hat{\vec{\pi}} = \hat{\vec{\pi}}_{\|} + \hat{\vec{\pi}}_{\perp},$$

wobei $\hat{\vec{\pi}}_{\|} = \left(\vec{e}\cdot\hat{\vec{\pi}}\right)\vec{e}$ parallel zum Magnetfeld und $\hat{\vec{\pi}}_{\perp}$ senkrecht zum Magnetfeld sind. Die parallele Komponente ändert sich aufgrund der Bewegungsgleichung nicht. Den senkrechten Anteil können wir wieder in zwei Komponenten aufspalten:

- $\vec{e}\times\hat{\vec{\pi}}_0$ ist senkrecht zum anfänglichen Impuls $\hat{\vec{\pi}}_0$. Diese Komponente hat die Zeitabhängigkeit $-\sin(\omega_B t)$, da sie zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwindet.
- $-\vec{e}\times\left(\vec{e}\times\hat{\vec{\pi}}_0\right)$ ist die Komponente parallel zum Anfangsimpuls. Diese Komponente hat eine Lösung proportional zu $\cos(\omega_B t)$

Dann ist die gesamte Lösung für den Impulsoperator

$$\hat{\vec{\pi}}(t) = \left(\vec{e}\cdot\hat{\vec{\pi}}_0\right)\vec{e} - \left(\vec{e}\times\hat{\vec{\pi}}_0\right)\sin(\omega_B t) - \left[\vec{e}\times\left(\vec{e}\times\hat{\vec{\pi}}_0\right)\right]\cos(\omega_B t).$$

Diese Lösung setzen wir in die Bewegungsgleichung für den Ortsoperator ein und finden die Lösung

$$\hat{\vec{x}}(t) = \hat{\vec{x}}_0 + \frac{\left(\vec{e}\cdot\hat{\vec{\pi}}_0\right)\vec{e}}{m}t + \frac{\vec{e}\times\hat{\vec{\pi}}_0}{m\omega_B}\cos(\omega_B t) - \frac{\vec{e}\times\left(\vec{e}\times\hat{\vec{\pi}}_0\right)}{m\omega_B}\sin(\omega_B t).$$

Es ergibt sich, wie erwartet, eine Schraubenbewegung. Die ersten beiden Terme entsprechen der Bewegung des Mittelpunktes parallel zum Magnetfeld und die letzten beiden Terme entsprechen einer Kreisbewegung.

4. Zeitabhängiges Magnetfeld

a) Da $\vec{B}_0 = (0,0,B_0)^{\mathrm{T}}$, ist der Hamilton-Operator gegeben durch

$$H = \frac{g}{2}\mu_{\mathrm{B}}\sigma_3 B_0 = \frac{g}{2}\mu_{\mathrm{B}} B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man kann also für die Zustände $|\alpha\rangle = (1,0)^{\mathrm{T}}$ den Energieeigenwert $E_\alpha = g\mu_{\mathrm{B}} B_0/2$ ablesen und für $|\beta\rangle = (0,1)^{\mathrm{T}}$ den Energieeigenwert $E_\beta = -g\mu_{\mathrm{B}} B_0/2$. Die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung ist also gegeben durch

$$|\psi(t)\rangle = c_\alpha \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t/\hbar} \, |\alpha\rangle + c_\beta \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t/\hbar} \, |\beta\rangle = c_\alpha \exp\left(-\frac{\mathrm{i}g\mu_{\mathrm{B}} B_0 t}{2\hbar}\right)|\alpha\rangle + c_\beta \exp\left(\frac{\mathrm{i}g\mu_{\mathrm{B}} B_0 t}{2\hbar}\right)|\beta\rangle \,,$$

wobei sich die Koeffizienten aus einer Anfangsbedingung ergeben und normiert werden müssen, sodass $|c_\alpha|^2 + |c_\beta|^2 = 1$.

b) Das zusätzliche zeitabhängige Magnetfeld ist gegeben durch

$$\vec{B}_1 = B_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{B_1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ -\mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist der Hamilton-Operator nun gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= \frac{g}{2}\mu_{\mathrm{B}} \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(t) \\ &= \frac{g}{2}\mu_{\mathrm{B}} B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{g}{4}\mu_{\mathrm{B}} B_1 \left[\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \underbrace{\frac{g}{2}\mu_{\mathrm{B}} B_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=\,H_0} + \underbrace{\frac{g}{2}\mu_{\mathrm{B}} B_1 \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & 0 \end{pmatrix}}_{=\,H_1}. \end{aligned}$$

Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung lautet also nun

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \, |\psi(t)\rangle = \left(\hat{H}_0 + \hat{H}_1\right)|\psi(t)\rangle \,.$$

Wählt man als Ansatz die Lösung der Teilaufgabe a) mit nun zeitlich variierenden Konstanten, $c_\alpha(t)$ und $c_\beta(t)$, so erhält man aus der linken Seite der Schrödinger-Gleichung

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \, |\psi(t)\rangle &= \mathrm{i}\hbar \left[\dot{c}_\alpha(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t/\hbar} \, |\alpha\rangle + \dot{c}_\beta(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t/\hbar} \, |\beta\rangle - \frac{\mathrm{i}E_\alpha}{\hbar} c_\alpha(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t/\hbar} \, |\alpha\rangle - \frac{\mathrm{i}E_\beta}{\hbar} c_\beta(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t/\hbar} \, |\beta\rangle\right] \\ &= \mathrm{i}\hbar \left[\dot{c}_\alpha(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t/\hbar} \, |\alpha\rangle + \dot{c}_\beta(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t/\hbar} \, |\beta\rangle\right] + \underbrace{E_\alpha c_\alpha(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t/\hbar} \, |\alpha\rangle + E_\beta c_\beta(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t/\hbar} \, |\beta\rangle}_{=\,\hat{H}_0 \, |\psi(t)\rangle} \\ &= \left(\hat{H}_0 + \hat{H}_1\right)|\psi(t)\rangle \,. \end{aligned}$$

Folglich ist also

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar \left[\dot{c}_\alpha(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t/\hbar} \, |\alpha\rangle + \dot{c}_\beta(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t/\hbar} \, |\beta\rangle\right] &= \frac{g}{2}\mu_{\mathrm{B}} B_1 \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & 0 \end{pmatrix}\left[c_\alpha(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t/\hbar} \, |\alpha\rangle + c_\beta(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t/\hbar} \, |\beta\rangle\right] \\ &= \frac{g}{2}\mu_{\mathrm{B}} B_1 \left[c_\beta(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t/\hbar} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, |\alpha\rangle + c_\alpha(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t/\hbar} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \, |\beta\rangle\right], \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & 0 \end{pmatrix} |\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} |\beta\rangle$$

und Entsprechendes für $\hat{H}_1 |\beta\rangle$. Multiplikation mit $\langle\alpha|$ von links ergibt

$$\mathrm{i}\hbar \dot{c}_\alpha(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\alpha t/\hbar} = \frac{g}{2}\mu_\mathrm{B} B_1 c_\beta(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_\beta t/\hbar}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,.$$

Einsetzen von E_α und E_β ergibt dann schließlich

$$\dot{c}_\alpha(t) = -\mathrm{i}\frac{g}{2\hbar}\mu_\mathrm{B} B_1 c_\beta(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega - g\mu_\mathrm{B} B_0/\hbar)t}\,.$$

Analog findet man

$$\dot{c}_\beta(t) = -\mathrm{i}\frac{g}{2\hbar}\mu_\mathrm{B} B_1 c_\alpha(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega - g\mu_\mathrm{B} B_0/\hbar)t}\,.$$

c) Da für die Resonanz gilt, dass $\omega = g\mu_\mathrm{B} B_0/\hbar$, sodass

$$\dot{c}_\alpha(t) = -\mathrm{i}\frac{g}{2\hbar}\mu_\mathrm{B} B_1 c_\beta(t) \qquad \text{und} \qquad \dot{c}_\beta(t) = -\mathrm{i}\frac{g}{2\hbar}\mu_\mathrm{B} B_1 c_\alpha(t). \tag{1}$$

Einmaliges Ableiten der ersten Gleichung und anschließendes Einsetzen der zweiten Gleichung führt auf

$$\ddot{c}_\alpha(t) = -\left(\frac{g\mu_\mathrm{B} B_1}{2\hbar}\right)^2 c_\alpha(t).$$

Analog findet man

$$\ddot{c}_\beta(t) = -\left(\frac{g\mu_\mathrm{B} B_1}{2\hbar}\right)^2 c_\beta(t).$$

Die allgemeinen Lösungen für $c_\alpha(t)$ und $c_\beta(t)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} c_\alpha(t) &= A_\alpha \sin\left(\frac{g\mu_\mathrm{B} B_1}{2\hbar} t\right) + B_\alpha \cos\left(\frac{g\mu_\mathrm{B} B_1}{2\hbar} t\right), \\ c_\beta(t) &= A_\beta \sin\left(\frac{g\mu_\mathrm{B} B_1}{2\hbar} t\right) + B_\beta \cos\left(\frac{g\mu_\mathrm{B} B_1}{2\hbar} t\right). \end{aligned}$$

Da das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\alpha\rangle$ ist, muss $|c_\alpha(t = 0)| = 1$ und $|c_\beta(t = 0)| = 0$ sein. Folglich ist $A_\alpha = 0$, $|B_\alpha| = 1$, $|A_\beta| = 1$ und $B_\beta = 0$, wenn man berücksichtigt, dass $|c_\alpha|^2 + |c_\beta|^2 = 1$ sein muss. Da jedoch auch die Gleichungen (1) erfüllt sein müssen, kann man entweder $B_\alpha = \mathrm{i}$ und $A_\beta = 1$ wählen oder aber $B_\alpha = 1$ und $A_\beta = -\mathrm{i}$. Die Differenz ist ein physikalisch unwichtiger Phasenfaktor. Wählt man die erste Möglichkeit, dann ist die Zeitenwicklung der Koeffizienten gegeben durch

$$c_\alpha(t) = \mathrm{i}\cos\left(\frac{g\mu_\mathrm{B} B_1}{2\hbar} t\right) \qquad \text{und} \qquad c_\beta(t) = \sin\left(\frac{g\mu_\mathrm{B} B_1}{2\hbar} t\right).$$

Wenn das System mit Sicherheit im Zustand $|\beta\rangle$ sein soll, muss gelten, dass $|\langle\beta|\psi(t)\rangle|^2 = |c_\beta(t)|^2 = 1$ ist. Dies ist der Fall für

$$\sin^2\left(\frac{g\mu_\mathrm{B} B_1}{2\hbar} t\right) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{g\mu_\mathrm{B} B_1}{2\hbar} t = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

und somit für

$$t = \frac{(2n+1)\,\pi\,\hbar}{g\mu_\mathrm{B} B_1}.$$