Aufgabe 1

a) Beträge sind stets größer 0, also ist insbesondere auch $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| > 0$. Gilt andererseits $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0$, so muss $\forall x \in [0,1] : |f(x)| = 0 \implies f \equiv 0$ auf $[0,1]$. Nach der positiven Definitheit folgt auch die Homogenität sehr leicht:

$$\max_{x\in[0,1]} |a \cdot f(x)| = |a| \cdot \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = |a| \cdot \|f\|$$

Die Dreiecksungleichung folgt sofort aus der Dreiecksungleichung für Beträge:

$$\|f+g\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \leq \max_{x\in[0,1]} |f(x)| + \max_{x\in[0,1]} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$$

b) Beträge sind stets größer 0, also ist insbesondere auch $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x > 0$. Gilt andererseits $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x| = 0$, so muss aufgrund der Definitheit des Integrals und des Betrags $f \equiv 0$ auf $[0,1]$ sein. Nach der positiven Definitheit folgt auch die Homogenität sehr leicht:

$$\int_0^1 |a \cdot f(x)| \,\mathrm{d}x = |a| \cdot \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x = |a| \cdot \|f\|$$

Die Dreiecksungleichung folgt sofort aus der Dreiecksungleichung für Beträge:

$$\|f+g\| = \int_0^1 |a \cdot |f(x)+g(x)| \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x + \int_0^1 |g(x)| \,\mathrm{d}x = \|f\| + \|g\|$$

c) Es gilt $\sin(x) \leq 1 \forall x$. Außerdem ist $u_k\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\frac{2x_k-x_k-x_{k+1}}{2}}{x_k-x_{k+1}} \cdot \pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Also ist $\|u_k\|_\infty = 1 \forall k \in \mathbb{N}$. Um die 1-Norm zu berechnen, müssen wir zunächst zeigen, dass u_k stetig ist. Konstante Funktionen sowie der Sinus sind stetig, also bleiben noch die Punkte x_k und x_{k+1}. Es gilt $u_k(x_k) = 0 = u_k(x_{k+1})$. Mit $\lim_{x \searrow x_k} 0 = 0$ und $\lim_{x \nearrow x_{k+1}} 0 = 0$ folgt die Stetigkeit von u_k. Nun können wir das Integral ausführen und erhalten

$$\begin{aligned}
\|u_k\|_1 &= \int_0^{x_{k+1}} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{xk}^1 0 \,\mathrm{d}x + \int_{xk+1}^{x_{k+1}} \sin\left(\frac{x_k - x}{x_k - x_{k+1}} \cdot \pi\right) \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x_k - x_{k+1}}{\pi} \cos\left(\frac{x_k - x}{x_k - x_{k+1}} \cdot \pi\right)\right]_{x_{k+1}}^{x_k} \\
&= \frac{x_k - x_{k+1}}{\pi} \cos(0) - \frac{x_k - x_{k+1}}{\pi} \cos(\pi) \\
&= 2\frac{x_k - x_{k+1}}{\pi}
\end{aligned}$$

Also ist $\lim_{k\to\infty} \|u_k\|_1 = \lim_{k\to\infty} 2\frac{x_k - x_{k+1}}{\pi} = \frac{2}{\pi} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 0$.

Aufgabe 2

(i) Da stets der Betrag genommen wird, ist die Norm stets positiv. Da über alle Werte summiert wird, bedeutet $\|A\|_F = 0$, dass alle Einträge 0 sind, also $A = 0$. Damit haben wir bereits die positive Definitheit gezeigt. Die Homogenität gilt wegen

$$\|b \cdot A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |b \cdot a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |b| \cdot \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |b| \cdot \|A\|_F .$$

Nun müssen wir nur noch die Dreiecksungleichung zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}+b_{ij}|^2 \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 + 2\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}b_{ij}| + \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 \\
&\overset{\text{C.S.U}}{\leq} \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 + 2\cdot\sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \cdot \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2} + \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2 \\
&= \left(\sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2} + \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2}\right)^2 \\
&= \left(\|A\|_F + \|B\|_F\right)^2
\end{aligned}$$

Wurzelziehen ergibt

$$\|A+B\|_F \leq \|A\|_F + \|B\|_F$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2^2 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i\right)^2 \\
&\overset{\text{C.S.U.}}{\leq} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{\text{unabhängig von } j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \\
&= \|x\|_2 \cdot \|A\|_F
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\|A\cdot B\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)^2 \\
&\overset{\text{C.S.U.}}{\leq} \sum_{i,j=1}^n \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik}^2}_{\text{unabhängig von } j} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n b_{kj}^2}_{\text{unabhängig von } i}\right) \\
&= \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2 \cdot \sum_{k,j=1}^n b_{kj}^2 \\
&= \|A\|_F \cdot \|B\|_F
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Kommt dann nächste Woche.