Probeklausur “Funktionentheorie 2”

Datum: 12. Februar 2021

Name ______________________________

Geburtsort: ______________________________

Geburtstag: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Hörsaal und Sitzplatz: ______________________________

Füllen Sie bitte zuerst das Formular zur Datenerhebung und die obigen Felder aus. Warten Sie dann, bis Sie aufgefordert werden mit der Klausur anzufangen.

- Prüfen Sie bitte, ob Sie eine vollständige Klausur mit 1+3 Seiten haben.
- Bitte verwenden Sie dokumentenechte Tinte (z.B. Kugelschreiber) in blau oder schwarz, keine Bleistifte.
- Es darf kein eigenes Papier verwendet werden. Sie erhalten bei Bedarf zusätzliches Papier von uns.
- Bei Fragen bitte Maske aufsetzen und Hand heben. Wir kommen zu Ihnen.
- Hilfsmittel wie Formelzettel oder elektronische Geräte sind nicht erlaubt. Rucksäcke und Taschen müssen während der Klausur verschlossen bleiben.
- Bitte legen Sie einen gültigen Lichtbildausweis auf einen Tisch neben Ihnen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **genau zwei Stunden**.
- Die Lösung einer jeden Aufgabe ist auf dem jeweiligen Blatt niederzuschreiben. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, versehen Sie ein leeres Blatt deutlich mit Ihrem Namen und der Aufgabennummer.
- Vergewissern Sie sich am Ende der Klausur, dass alle Ihre Blätter mit Ihrem Namen versehen sind. Alle Blätter, auch leere Blätter und Schmierblätter, bei Klausurende abgeben.
- Bei Täuschungsversuchen wird die Klausur mit 0 Punkten gewertet. Das gilt auch für Studierende, die von anderen Teilnehmern abschreiben oder anderen das Abschreiben ermöglichen.

Viel Erfolg!

Multiple-Choice-Aufgaben. Markieren Sie mit einem Kreuz in der Box, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Wenn Sie Ihre Antwort korrigieren möchten, füllen Sie die Box aus und schreiben Ihre neue Antwort in Worten daneben.
Jede korrekte Antwort gibt einen Punkt. Jede nicht korrekte Antwort gibt einen Minuspunkt.
Bei uns bedeutet "Modulformen" immer "elliptische Modulformen". Null- und Polstellen werden immer mit Vielfachheit gezählt. "Zeigen Sie" bedeutet "Beweisen Sie".
Elliptische Funktionen: Sei $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ ein Gitter mit $\tau \in \mathbb{H}$ und sei $\wp_\Lambda$ die zugehörige Weierstraß-$\wp$-Funktion.

1. Jede holomorphe elliptische Funktion ist konstant.
   ☐ wahr ☐ falsch
2. Die komplexe Sinusfunktion ist eine elliptische Funktion.
   ☐ wahr ☐ falsch
3. Es gibt eine nichttriviale elliptische Funktion erster Ordnung.
   ☐ wahr ☐ falsch
4. Der Körper $\mathbb{C}(\Lambda)$ der elliptische Funktionen wird erzeugt von $\wp_\Lambda$.
   ☐ wahr ☐ falsch
5. $\wp_\Lambda$ hat genau zwei Nullstellen modulo Λ.
   ☐ wahr ☐ falsch
6. Die Summe der Nullstellen von $\wp_\Lambda$ im Fundamentalparallelogramm ist ein Gitterpunkt.
   ☐ wahr ☐ falsch
7. Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $\tau \in \mathbb{H}$ mit $j(\Lambda) = z$.
   ☐ wahr ☐ falsch
8. Jede nichtkonstante elliptische Funktion ist injektiv.
   ☐ wahr ☐ falsch
9. Die Ableitung einer elliptischen Funktion ist immer eine elliptische Funktion.
10. Ein elliptisches Differential ist von erster Gattung genau dann, wenn es sowohl von zweiter als auch von dritter Gattung ist.
    ☐ wahr ☐ falsch
11. Die Diskriminante $\Delta(\Lambda)$ des Gitters Λ ist immer ungleich Null.
    ☐ wahr ☐ falsch

Modulformen: Auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ operiert $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ durch Möbiustransformationen.

11. $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ operiert durch Möbiustransformationen transitiv auf $\mathbb{H}$.
    ☐ wahr ☐ falsch
12. Die Ableitung einer Modulform ist immer eine Modulform.
13. Jede holomorphe Modulform zu Γ mit Gewicht sieben ist konstant.
    ☐ wahr ☐ falsch
14. Jede Eisensteinreihe G_k vom Gewicht $k \geq 3$ definiert eine Modulform.
    ☐ wahr ☐ falsch

15. Spitzenformen bilden ein Ideal im Ring der Modulformen.
☐ wahr ☐ falsch

16. Der Ring der holomorphe Modulformen zu $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ ist isomorph zum Polynomring in zwei Variablen.
☐ wahr ☐ falsch

17. Die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ ist ein Normalteiler in $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.
☐ wahr ☐ falsch

18. Jede konstante Funktion auf $\mathbb{H}$ ist eine Modulform vom Gewicht Null.
☐ wahr ☐ falsch

19. Die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ operiert für $N \geq 3$ fixpunktfrei auf $\mathbb{H}$.
☐ wahr ☐ falsch

20. Jede meromorphe Modulform von Gewicht Null ist eine rationale Funktion in j.
☐ wahr ☐ falsch

21. Jede holomorphe Modulform von Gewicht Null ist ein Polynom in j.
☐ wahr ☐ falsch

22. Eine holomorphe Modulform zu $\Gamma(N)$ für $N \geq 2$ ist genau dann eine Spitzenform, wenn der konstante Fourierkoeffizient verschwindet.
☐ wahr ☐ falsch

23. Jede Spitzenform vom Gewicht $k \geq 12$ ist Produkt einer Modulform vom Gewicht $k - 12$ und der Diskriminante.
☐ wahr ☐ falsch

24. Es gibt eine Spitzenform vom Gewicht ≤ 10 zur Kongruenzgruppe $\Gamma(2)$.
☐ wahr ☐ falsch

25. Die λ-Funktion definiert einen Isomorphismus von Riemannschen Flächen $X_2 \cong \widehat{\mathbb{C}}$.
☐ wahr ☐ falsch

Riemannsche Flächen. Sei $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemannsche Zahlenkugel.

27. Jede Riemannsche Fläche ist eine Mannigfaltigkeit.
☐ wahr ☐ falsch

28. Jede surjektive holomorphe Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten ist eine Überlagerung.
☐ wahr ☐ falsch

29. Jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit besitzt eine einfach zusammenhängende Überlagerung.
☐ wahr ☐ falsch

30. Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stimmt überein mit der euklidischen Topologie.
☐ wahr ☐ falsch

31. Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung und V eine offene Teilmenge von X. Dann ist das Bild $p(V)$ offen in Y.
☐ wahr ☐ falsch

32. Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph nichtkonstant und fixiere ein Gitter Λ. Dann ist die Funktion $f = \wp_\Lambda \circ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv.
☐ wahr ☐ falsch

33. Sei $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph nichtkonstant. Dann ist $\exp \circ h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ ist surjektiv.
☐ wahr ☐ falsch

34. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze holomorphe Funktion mit $f(f(z)) \neq z$ für alle z. Dann ist f konstant.

1. Aufgabe: (15 Punkte) Formulieren Sie folgende Definitionen und Sätze:

1. Was besagt der Satz von Abel über elliptische Funktionen?
2. Formulieren Sie die $k/12$-Formel für Modulformen zur vollen Modulgruppe.
3. Wann ist ein topologischer Raum separiert?

2. Aufgabe: (15 Punkte) Sei Γ ein Gitter und seien $f, g \in \mathbb{C}(\Gamma)$ elliptische Funktionen mit derselben Null- und Polstellenordnung in jedem Punkt. Dann ist $f = c \cdot g$ für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$.

3. Aufgabe: (15 Punkte) Sei $f \in [\Gamma, k]$ eine holomorphe elliptische Modulform ohne Nullstellen in $\mathbb{H}$. Zeigen Sie:

f ist ein Vielfaches einer Potenz der Diskriminante Δ.

4. Aufgabe: (15 Punkte) Sei η ein elliptisches Differential dritter Gattung mit ganzzahligen Residuen. Beweisen Sie: Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ und eine meromorphe elliptische Funktion f sodass $\eta = c\,\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}f}{f}$.

5. Aufgabe: (15 Punkte) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze holomorphe Funktion und Γ ein Gitter. Wir nehmen an, zu jedem $\gamma \in \Gamma$ gibt es eine Polynomfunktion P_γ mit

$$f(z + \gamma) = f(z) + P_\gamma(z) \ .$$

Zeigen Sie: f selbst ein Polynom.

6. Aufgabe: (15 Punkte) Seien f und g ganze Funktionen mit $f^2 + g^2 = 1$. Zeigen Sie: Es gibt eine ganze Funktion h mit

$$f = \sin \circ h \qquad , \qquad g = \cos \circ h \ .$$

Hinweis: Betrachten Sie $h = f + ig$.

7. Aufgabe: (15 Punkte) Sei f und g Modulformen zur vollen Modulgruppe mit Gewicht k.

1. Zeigen Sie: $f'g - fg'$ ist auch eine Modulform.
2. Bestimmen Sie ihr Gewicht.