Dominik Seel B. Sc.
Mathematisches Institut
AG Automorphe Formen

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Modulformen 1 – Übungsgruppe 24. November 2021

Wintersemester 2021/22

A: Besprechung 4.Übungszettel

Aufgabe 1

(a) Eine holomorphe Modulform $0 \not\equiv f \in M_2$ müsste in $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ eine Nullstelle ζ besitzen (sonst: $\tilde{f} = \frac{1}{f} \not\equiv 0$, aber $\tilde{f} \in M_{-2} = \{0\}$). Die Valenzformel (Satz 2.17) liefert jedoch

$$\frac{1}{6} = \sum_{z \not\sim i, \varrho} \operatorname{ord}(f;z) + \frac{1}{3}\operatorname{ord}(f;\varrho) + \frac{1}{2}\operatorname{ord}(f;i) + \operatorname{ord}(f;\infty) \geq \frac{\operatorname{ord}(f;\zeta)}{e(\zeta)} \geq \frac{1}{3}\,,$$

wobei $e(\zeta) \in \{1,2,3\}$ die Gewichtung der Nullstelle ζ von f ist ($\lightning$).

(b) Wir müssen $\frac{k}{12} = \frac{1}{3}$ in der Form $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$ für $a,b,c \in \mathbb{N}_0$ konstruieren. Als einzige Möglichkeit ist $a = 0 = b$ und $c = 1$ möglich, was auf den Fall $z = \varrho$ und Ordnung 1 zurückzuführen ist.

(c) Angenommen, g hat keine Nullstelle in $\mathbb{H}$. Somit hat g eine Nullstelle (sonst: $\tilde{g} = \frac{1}{g} \not\equiv 0$, aber $\tilde{g} \in M_{-k} = \{0\}$), nämlich in $\zeta = \infty$ von mindestens erster Ordnung ($\lightning$ $g \notin S_k$).

(d) Durch $g_0(z) := h(z) - \frac{a_0(h)}{a_0(g)} \cdot g(z)$ ist eine Spitzenform mit $a_0(g) \neq 0$ definiert, da $g \in M_k \setminus S_k$. Setze $c := \frac{a_0(h)}{a_0(g)} \in \mathbb{C}$, so folgt $h(z) = g_0(z) + c \cdot g(z)$.

Aufgabe 2

(a) Mit $0 \not\equiv f \in V_k$ liefert die Valenzformel (Satz 2.17) für $k = 0$

$$0 = \sum_{z \not\sim i, \varrho} \operatorname{ord}(f;z) + \frac{1}{3}\operatorname{ord}(f;\varrho) + \frac{1}{2}\operatorname{ord}(f;i) + \operatorname{ord}(f;\infty)\,.$$

Da Nullstellenordnungen positiv und Polstellenordnungen negativ sind, müssen sich alle Null- und Polstellen (mit Vielfachheit und Gewichtung) ausgleichen und $\#(\text{NST}) = \#(\text{Pole})$ gelten.

(b) Mit f ist auch $f - c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{C}$ eine Modulfunktion, wobei die Polstellenordnungen gleich sind. Unter Anwendung von (a) folgt die Aussage direkt.

(c) Wenn f beschränkt ist, wird ∞ nicht angenommen, und f muss nach (b) konstant sein.

Aufgabe 3

Wegen $(f|_k M)\,(M^{-1}\langle z\rangle) = f\left(MM^{-1}\langle z\rangle\right) \cdot j(M,z)^{-k} = f(z) \cdot j(M,z)^{-k}$ gemäß Proposition 2.6 folgt $\operatorname{ord}\left(f; M^{-1}\langle z\rangle\right) = \operatorname{ord}\left(f|_k M; M^{-1}\langle z\rangle\right) = \operatorname{ord}\left(f;z\right)$, also die Behauptung mit $M := M^{-1}$.

Aufgabe 4

(a) Man zeigt zunächst, dass $\tilde{H}_{\tilde{\mathfrak{s}}} := \tilde{M}^{-1}\tilde{\Gamma}\tilde{M} \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \subseteq M^{-1}\Gamma M \cap \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty =: H_{\mathfrak{s}}$ eine Untergruppe von $H_{\mathfrak{s}}$ ist. Der Satz von Lagrange (Satz 2.5) liefert dann

$$h_{\tilde{\Gamma}}(\mathfrak{s}) = h_\Gamma(\mathfrak{s}) \cdot \left[\overline{H_{\mathfrak{s}}} : \overline{\tilde{H}_{\tilde{\mathfrak{s}}}}\right] , \tag{1}$$

wobei der Index endlich und ganzzahlig ist. Weiter berücksichtigen wir, dass f als Modulform nur reguläre Spitzen besitzt [†] und erhalten unter Anwendung von Lemma 2.7 und (1)

$$\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s}) = h_\Gamma(\mathfrak{s}) \mid h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}}) = \tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}}) .$$

(b) Man betrachte die Fourier-Entwicklungen (wie in Gleichung (2.4))

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s})}} = (f|_k M)(z) = \sum_{n=\tilde{N}}^{\infty} \tilde{a}_n q^{\frac{n}{\tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})}}$$

mit $N = \mathrm{ord}(f;\mathfrak{s})$ und $\tilde{N} = \mathrm{ord}(f;\tilde{\mathfrak{s}})$. Daraufhin zeigt man mit dem Wissen $\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s}) \cdot d = \tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})$ für ein $d \in \mathbb{Z}$, dass $N \cdot d = \tilde{N}$ für dasselbe d gelten muss. Dies zeigt man wie folgt: Angenommen, es gäbe ein $x \in \mathbb{Q}^*$ mit $N \cdot d = \tilde{N} - x$. Es gilt

$$1 = \frac{(f|_k M)(z)}{(f|_k M)(z)} = \frac{\sum_{n=N}^{\infty} a_n q^{\frac{n}{\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s})}}}{\sum_{n=\tilde{N}}^{\infty} \tilde{a}_n q^{\frac{n}{\tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})}}} = \frac{q^{\frac{n}{\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s})}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{N+n} q^{\frac{n}{\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s})}}\right)}{q^{\frac{n}{\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s})}} \cdot q^x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_{\tilde{N}+n} q^{\frac{n}{\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s})}}\right)} .$$

Die Konvergenz $q \to 0$ liefert einen Widerspruch ($\lightning$) und es muss $x = 0$ gelten.

B: Weitere Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

(a) Weisen Sie nach, dass alle Nullstellen der Modulformen vom Gewicht 10 einfach und an den zu ϱ und i äquivalenten Punkten (modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) zu finden sind.

Für $k \geq 12$ können die Nullstellen aber bereits an beliebigen Orten von $\mathbb{H}$ auftreten, sodass unsere bisherige Methode nicht mehr zum Ziel führt. Sehr wohl kann man daraus allerdings noch folgendes für eine beliebige Modulform f vom Gewicht k zeigen:

(b) Für alle $z \in \mathbb{H}$ mit $\zeta \sim \varrho$ gilt $f(\zeta) = 0$, falls k nicht durch 3 teilbar ist.

(c) Für alle $z \in \mathbb{H}$ mit $\zeta \sim i$ gilt $f(\zeta) = 0$, falls k nicht durch 4 teilbar ist.

Übungsaufgabe 2

Bestimmen Sie die Nullstellen von E_k für $k \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$ im Standard-Fundamentalbereich $\mathcal{F}$.

[†] Eine Spitze s heißt regulär, falls die zur Funktion gehörige Fourier-Entwicklung in $q = 0$ hebbar ist (vgl. Freitag/Busam, Seite 334). Per Definition ist $f \in M_k$ für $\mathrm{Im}(z) > C > 0$ beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist dies äquivalent zur Regularität von f in ∞.