AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

21. Januar 2022

Modulformen 1 – Übungsblatt 11

Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1 (6 Punkte)

In Satz 5.26 haben Sie in der Vorlesung den **Eichler-Shimura-Isomorphismus** kennengelernt. Wir möchten mit dieser Aufgabe dessen Gültigkeit explizit im Fall $k = 12$ überprüfen.

(a) Berechnen Sie die Matrizen $\pi(S), \pi(ST)$ und $\pi((ST)^2)$.

(b) Ermitteln Sie aus den Berechnungen in (a) eine konkrete Basis $\mathfrak{B}$ für den $\mathbb{R}$-Untervektorraum

$$V = \operatorname{Kern}\left(I_{11} + \pi(S)\right) \cap \operatorname{Kern}\left(I_{11} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)\right) \in \mathbb{R}^{11} .$$

(c) Folgern Sie eine Beschreibung des Faktorraums ${}^{V}/_{U}$ mithilfe ihrer Basisvektoren.

Hinweis zu (b): Sie dürfen ein Computeralgebrasystem (CAS) nutzen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathsf{w} \in \mathbb{N}$ gerade mit $k := \mathsf{w} + 2$ und $f, g \in S_k$.

(a) Zeigen Sie die folgende Identität für die **Periodenintegrale** von f, g mit $j \in \{0, \cdots, \mathsf{w}\}$:

$$-\left\langle r(f)|_{-\mathsf{w}}(T - T^{-1}) \;\middle|\; \overline{r(g)}\right\rangle = 2 \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda+j \text{ ungerade}}}^{\mathsf{w}-j} (-1)^{\lambda} \binom{\mathsf{w}}{j} \binom{j}{\lambda} r_{\mathsf{w}-j}(f)\overline{r_{\lambda}(g)} .$$

(b) Beweisen Sie, dass der Operator $|_{-\mathsf{w}}(T - T^{-1})$ ungerade Polynome aus V_k auf gerade Polynome abbildet und umgekehrt.

Als Querverbindung zwischen Modulformen und der analytischen Zahlentheorie dienen L-Funktionen und **Dirichlet-Reihen** (nach Johann Peter Gustav Lejeune DIRICHLET), deren Stellenwert wir in der bisherigen Vorlesung unberücksichtigt ließen. Im Rahmen einer Aufgabenserie wird beginnend mit dem vorherigen Übungszettel jeweils eine Aufgabe, die weiterhin regulär in die Punktevergabe eingeht und somit nicht als Bonusaufgabe deklariert ist, diese Materie studieren.
Wir zielen mit Methoden aus der analytischen Zahlentheorie auf die Darstellung von $L(f,s)$ als **Euler-Produkt** (nach Leonhard EULER) ab.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Seien $D_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n^{-s}$ und $D_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n n^{-s}$ zwei für $\mathrm{Re}(s) > k$ absolut konvergente Dirichlet-Reihen, wobei $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ und $(\beta_n)_{n\geq 1}$ komplexe Folgen sind.

(a) Zeigen Sie, dass das Produkt $D_1(s) \cdot D_2(s)$ ebenfalls eine Dirichlet-Reihe in der Form

$$D_1(s) \cdot D_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} \alpha_d \beta_{m/d} n^{-s}$$

für $\mathrm{Re}(s) > k$ darstellt.

Im Folgenden möchten wir auf Basis dessen weitere Resultate zur **Riemann'schen Zetafunktion** aus Satz 3.5 herleiten.

(b) Folgern Sie aus (a), dass für $r \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{Re}(s) > \max\{1, r+1\}$ folgendes gilt:

$$\zeta(s) \cdot \zeta(s-r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_r(n) n^{-s} \ .$$

Es ließe sich das folgende Lemma zeigen:

Lemma: Ist die Funktion $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ schwach multiplikativ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\alpha(n)} \neq 0$ absolut konvergent, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(n) = \prod_{p \text{ prim}} \sum_{r=0}^{\infty} \alpha(p^r) \ .$$

(c) Beweisen Sie die Identität $\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} (1-p^{-s})^{-1}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(d) Nutzen Sie das Lemma und den Satz 4.26, um die folgende Aussage nachzuweisen.

Satz: Sei $0 \not\equiv f \in S_k$ mit $k \geq 12$ gerade und $k \neq 14$ sowie $\alpha_1(f) = 1$. Dann sind äquivalent:
(i) f ist eine simultane Hecke-Eigenform bezüglich aller Hecke-Operatoren.
(ii) Es gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{k}{2}$:

$$L(f,s) = \prod_{p \text{ prim}} (1 - a_p(f)p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1} \ .$$

Abgabe: online über MaMpf bis Freitag, den 28. Januar 2022, spätestens um 12 Uhr s. t.