Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 11

Besprechung in den Übungsgruppen am 20. Januar 2020

1. *Hausaufgabe:* Trägheitstensoren verschiedener Zylinder

Betrachten Sie einen Hohlzylinder mit konstanter Dichte ρ, innerem Radius R_i, äußerem Radius R und Höhe h und wählen Sie ein Koordinatensystem derart, dass der Koordinatenursprung im Schwerpunkt liegt und die z-Achse entlang der Symmetrieachse des Hohlzylinders zeigt.

a) Berechnen Sie die Masse M des Hohlzylinders.

b) Bestimmen Sie die drei Diagonalelemente des Trägheitstensors Θ_{xx}, Θ_{yy} und Θ_{zz} in Abhängigkeit von M.

c) Argumentieren Sie, dass die nebendiagonalen Elemente des Trägheitstensors verschwinden müssen. Zeigen Sie dies explizit für Θ_{xy}.

Betrachten Sie nun einen Vollzylinder mit Radius R, dessen Dichte ρ gemäß $\rho(r) = \rho_0\, r/R$ mit $0 \le r \le R$ und der Konstanten $\rho_0 > 0$ von r abhängt.

d) Bestimmen Sie auch für diesen Körper den Trägheitstensor in Abhängigkeit von seiner Masse.

e) Wie muss R_i gewählt werden, damit der Hohlzylinder aus dem ersten Aufgabenteil dieselben Trägheitsmomente bei gleicher Masse, äußerem Radius und Höhe aufweist wie der Vollzylinder aus dem zweiten Aufgabenteil?

2. *Hausaufgabe:* Kugel auf schiefer Ebene

Eine homogene Kugel mit Radius R und Masse M rolle eine schiefe Ebene mit Steigungswinkel α herunter.

a) Bestimmen Sie zunächst die Komponente der Beschleunigung, die eine Punktmasse gleicher Masse entlang der Ebene erfährt.

b) Betrachten Sie nun die ausgedehnte Kugel. Welche Relation besteht zwischen der Geschwindigkeit v, mit der sich der Schwerpunkt der Kugel bewegt, und der Winkelgeschwindigkeit ω, mit der sich die Kugel dreht, wenn die Kugel auf der Ebene rollt und nicht gleitet?

c) Bestimmen Sie die kinetische Energie der Kugel, die sich aus Rotations- und Translationsenergie zusammensetzt, in Abhängigkeit von der Schwerpunktsgeschwindigkeit v.

d) Wie stark wird der Schwerpunkt der Kugel entlang der Ebene beschleunigt? Verwenden Sie hierfür Energieerhaltung und drücken Sie die Änderung der Höhe mit Hilfe der Geschwindigkeit v aus. Vergleichen Sie die Lösung mit der von a).

3. *Präsenzaufgabe:* Trägheitstensor eines homogenen Würfels

Betrachten Sie einen homogenen Würfel mit Kantenlänge a und Masse M und wählen Sie ein Koordinatensystem derart, dass die Koordinatenachsen parallel zu den Würfelkanten liegen und dass der Koordinatenursprung mit dem Schwerpunkt zusammenfällt.

a) Berechnen Sie den Trägheitstensor Θ in Abhängigkeit von M und a.

b) Wie lauten die Hauptträgheitsmomente Θ_i? Welche Aussage können Sie über die Hauptträgheitsachsen treffen?

c) Wie lautet das Trägheitsmoment bzgl. einer Achse, die mit einer Würfelkante zusammenfällt?

4. Verständnisfragen

a) Beschreiben Sie den Übergang von einer Ansammlung diskreter Massenpunkte in einem starren Körper zu einem Kontinuum.

b) Was ist die Jacobi-Matrix und welche Rolle spielt ihre Determinante bei der Berechnung von Volumenintegralen?

c) Fassen Sie die Aussage des Gauß'schen Satzes zusammen.

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 11: Lösungen

1. Hausaufgabe: Trägheitstensoren verschiedener Zylinder

a) Da die Dichte konstant ist, kann die Masse des Hohlzylinders auf zwei Arten berechnet werden. Entweder man berechnet das Volumen des Hohlzylinders mit Hilfe von Schulwissen und multipliziert mit der Dichte, oder man berechnet das Volumenintegral über die Dichte. Aufgrund von Schulwissen erhält man für das Volumen

$$V = \pi R^2 h - \pi R_\mathrm{i}^2 h = \pi h \left(R^2 - R_\mathrm{i}^2\right)$$

und somit für die Masse

$$M = V\rho = \pi h \rho \left(R^2 - R_\mathrm{i}^2\right).$$

Wählt man den Weg über das Volumenintegral, dann führt man dieses am besten in Zylinderkoordinaten durch, da diese der Symmetrie des Körpers entsprechen,

$$M = \int \mathrm{d}V\,\rho = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{R_\mathrm{i}}^{R} \mathrm{d}r\,r = \rho h \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left(R^2 - R_\mathrm{i}^2\right) = \pi h \rho \left(R^2 - R_\mathrm{i}^2\right).$$

b) Mit $\vec{x} = (x, y, z)^\top$ gilt für Θ_{xx} per Definition

$$\begin{aligned}
\Theta_{xx} &= \int \mathrm{d}V\,\rho\left(\vec{x}^2 - x^2\right) = \rho \int \mathrm{d}V\left(y^2 + z^2\right) = \rho \int \mathrm{d}V\left(r^2 \sin^2\varphi + z^2\right) \\
&= \rho \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{R_\mathrm{i}}^{R} \mathrm{d}r\,r\left(r^2 \sin^2\varphi + z^2\right) = \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{R_\mathrm{i}}^{R} \mathrm{d}r\,r\left(r^2 h \sin^2\varphi + \frac{h^3}{12}\right) \\
&= \rho \int_{R_\mathrm{i}}^{R} \mathrm{d}r\,r\left(r^2 \pi h + \frac{\pi h^3}{6}\right) = \rho\left[\frac{\pi h\left(R^4 - R_\mathrm{i}^4\right)}{4} + \frac{\pi h^3\left(R^2 - R_\mathrm{i}^2\right)}{12}\right] \\
&= \rho\left[\frac{\pi h\left(R^2 + R_\mathrm{i}^2\right)\left(R^2 - R_\mathrm{i}^2\right)}{4} + \frac{\pi h^3\left(R^2 - R_\mathrm{i}^2\right)}{12}\right] = M\left(\frac{R^2 + R_\mathrm{i}^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right).
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen muss $\Theta_{yy} = \Theta_{xx}$ gelten. Für Θ_{zz} ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\Theta_{zz} &= \rho \int \mathrm{d}V\left(\vec{x}^2 - z^2\right) = \rho \int \mathrm{d}V\left(x^2 + y^2\right) = \rho \int \mathrm{d}V\,r^2 = \rho \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{R_\mathrm{i}}^{R} \mathrm{d}r\,r^3 \\
&= \rho h \cdot 2\pi\,\frac{R^4 - R_\mathrm{i}^4}{4} = \frac{\pi\rho h}{2}\left(R^2 - R_\mathrm{i}^2\right)\left(R^2 + R_\mathrm{i}^2\right) = \frac{M}{2}\left(R^2 + R_\mathrm{i}^2\right).
\end{aligned}$$

c) Das gewählte Koordinatensystem beschreibt bereits das Hauptachsensystem des Zylinders. Somit müssen die Nebendiagonalelemente verschwinden. Für Θ_{xy} ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Theta_{xy} &= -\int \mathrm{d}V\,\rho\,xy = -\rho \int \mathrm{d}V\,r^2 \cos\varphi \sin\varphi = -\rho \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{R_\mathrm{i}}^{R} \mathrm{d}r\,r^3 \cos\varphi \sin\varphi \\
&= -\rho h\,\frac{R^4 - R_\mathrm{i}^4}{4} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\cos\varphi \sin\varphi = \rho h\,\frac{R^4 - R_\mathrm{i}^4}{4} \int_1^1 \mathrm{d}\mu\,\mu = 0,
\end{aligned}$$

wobei die Substitution $\mu = \cos\varphi$ mit $\mathrm{d}\mu = -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ verwendet wurde.

d) Da die Dichte nicht konstant ist, muss die Masse des Zylinders mit Hilfe des Volumenintegrals über die Dichte bestimmt werden,

$$M = \int \mathrm{d}V \rho = \int \mathrm{d}V \rho_0 \frac{r}{R} = \frac{\rho_0}{R} \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}r\, r^2 = \frac{\rho_0}{R} h \cdot 2\pi \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi}{3} \rho_0 h R^2.$$

Die Nebendiagonalelemente des Trägheitstensors verschwinden abermals, da das Koordinatensystem dem Hauptachsensystem des Zylinders entspricht. Für die Diagonalelemente gilt

$$\begin{aligned}
\Theta_{xx} &= \int \mathrm{d}V \rho(r) \left(\vec{x}^2 - x^2\right) = \frac{\rho_0}{R} \int \mathrm{d}V\, r \left(y^2 + z^2\right) = \frac{\rho_0}{R} \int \mathrm{d}V\, r \left(r^2 \sin^2\varphi + z^2\right) \\
&= \frac{\rho_0}{R} \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}r\, r^2 \left(r^2 \sin^2\varphi + z^2\right) = \frac{\rho_0}{R} \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left(\frac{R^5}{5} \sin^2\varphi + \frac{R^3}{3} z^2\right) \\
&= \frac{\rho_0}{R} \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \left(\pi \frac{R^5}{5} + 2\pi \frac{R^3}{3} z^2\right) = \frac{\rho_0}{R} \left(\pi h \frac{R^5}{5} + 2\pi \frac{R^3}{3} \frac{h^3}{12}\right) = \frac{2\pi}{3} \rho_0 h R^2 \left(\frac{3R^2}{10} + \frac{h^2}{12}\right) \\
&= M \left(\frac{3R^2}{10} + \frac{h^2}{12}\right) = \Theta_{yy}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\Theta_{zz} &= \int \mathrm{d}V \rho(r) \left(\vec{x}^2 - z^2\right) = \frac{\rho_0}{R} \int \mathrm{d}V\, r \left(x^2 + y^2\right) = \frac{\rho_0}{R} \int \mathrm{d}V\, r^3 \\
&= \frac{\rho_0}{R} \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}r\, r^4 = \frac{\rho_0}{R} h \cdot 2\pi \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} M R^2.
\end{aligned}$$

Der Trägheitstensor hat somit insgesamt die Form

$$\Theta = M \begin{pmatrix} \frac{3R^2}{10} + \frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3R^2}{10} + \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3R^2}{5} \end{pmatrix}.$$

e) Damit die Trägheitsmomente Θ_{xx} und Θ_{yy} aus den beiden Aufgabenteilen gleich sind, muss

$$M \left(\frac{R^2 + R_\mathrm{i}^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) = M \left(\frac{3R^2}{10} + \frac{h^2}{12}\right)$$

gelten. Dies ergibt

$$\frac{R^2 + R_\mathrm{i}^2}{4} = \frac{3R^2}{10} \qquad \Rightarrow \qquad R_\mathrm{i} = \frac{R}{\sqrt{5}}.$$

Damit das Trägheitsmoment Θ_{zz} aus den beiden Aufgabenteilen gleich ist, muss

$$\frac{M}{2} \left(R^2 + R_\mathrm{i}^2\right) = \frac{3}{5} M R^2$$

gelten. Dies ergibt ebenfalls

$$R_\mathrm{i} = \frac{R}{\sqrt{5}}.$$

Wenn also für den Hohlzylinder $R_\mathrm{i} = R/\sqrt{5}$ gewählt wird, dann besitzt dieser dieselben Hauptträgheitsmomente wie der Vollzylinder aus dem zweiten Aufgabenteil.

2. *Hausaufgabe:* Kugel auf schiefer Ebene

a) Eine Punktmasse auf einer schiefen Ebene mit Steigungswinkel α erfährt entlang der Ebene die Beschleunigung

$$a = g\sin\alpha.$$

b) Die Strecke s, die die Kugel mit dem Radius R zurücklegt, entspricht der Strecke, die sie über ihre Oberfläche abrollt,

$$s = R\varphi,$$

wobei $\varphi \in [0, \infty)$ ist. Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts v ist die Zeitableitung der zurückgelegten Strecke. Da der Radius R der Kugel zeitlich konstant ist, ergibt sich

$$v = R\dot{\varphi} = R\omega. \tag{I}$$

Diese Relation wird als *Abrollbedingung* bezeichnet.

c) Die kinetische Energie der rollenden Kugel setzt sich aus der Translation des Kugelschwerpunkts sowie der Energie in der Rotationsbewegung zusammen,

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^\top \Theta\, \vec{\omega}.$$

Der Trägheitstensor einer homogenen Kugel wurde bereits in der Vorlesung berechnet zu

$$\Theta = \frac{2}{5}MR^2 \mathbb{1}_3,$$

und zwar unabhängig vom gewählten Koordinatensystem, da eine Kugel keine ausgezeichneten Achsen besitzt. Für die kinetische Energie gilt somit

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{5}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{5}Mv^2 = \frac{7}{10}Mv^2,$$

wobei im zweiten Schritt (I) verwendet wurde.

d) Für die Gesamtenergie der Kugel gilt

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = Mgh + \frac{7}{10}Mv^2.$$

Da die Gesamtenergie erhalten ist, gilt

$$\frac{\mathrm{d}E_{\text{ges}}}{\mathrm{d}t} = Mg\dot{h} + \frac{7}{5}Mva = 0. \tag{II}$$

Die Änderung der Höhe kann mit der Geschwindigkeit in Verbindung gebracht werden. Für die auf der Ebene zurückgelegte Strecke gilt

$$s = \frac{h_0 - h}{\sin\alpha},$$

wobei h_0 die Höhe zum Zeitpunkt $t = 0$ ist. Einmal nach der Zeit abgeleitet, ergibt dies

$$v = -\frac{\dot{h}}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{h} = -v\sin\alpha.$$

Somit folgt aus (II)

$$0 = -Mgv\sin\alpha + \frac{7}{5}Mva \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{5}{7}\,g\sin\alpha.$$

Die Beschleunigung, die die homogene Kugel erfährt, ist somit um $2/7 \approx 29\,\%$ kleiner als die Beschleunigung des Massenpunkts aus a).

3. *Präsenzaufgabe:* **Trägheitstensor eines homogenen Würfels**

a) Die Komponenten des Trägheitstensors für den homogenen Würfel sind im gewählten Koordinatensystem durch

$$\Theta_{ij} = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x_1 \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x_2 \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x_3 \left(\vec{x}^2 \delta_{ij} - x_i x_j\right)$$

gegeben. Mit $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $x_3 = z$ folgt daraus

$$\begin{aligned}\Theta_{xx} &= \rho \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z \left(y^2 + z^2\right) = \rho a \left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y\, y^2 + \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z\, z^2 \right) \\ &= 2\rho a^2 \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y\, y^2 = \frac{2}{3}\rho a^2 y^3 \Big|_{y=-a/2}^{a/2} = \frac{2}{3}\rho a^2 \cdot \frac{a^3}{4} = \frac{1}{6} M a^2,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt benutzt wurde, das die Masse M des homogenen Würfels durch $M = \rho a^3$ gegeben ist. Aufgrund der Symmetrie muss gelten, dass $\Theta_{yy} = \Theta_{zz} = \Theta_{xx}$. Das Nebendiagonalelement Θ_{xy} ist

$$\begin{aligned}\Theta_{xy} &= -\rho \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z\, xy = \rho a \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x\, x \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y\, y = \rho a \left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x\, x \right)^2 \\ &= \rho a \left(\frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=-a/2}^{a/2} \right)^2 = 0.\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie müssen auch alle anderen Nebendiagonalelemente verschwinden. Somit ist der Trägheitstensor durch

$$\Theta = \frac{1}{6} M a^2 \mathbb{1}_3$$

gegeben.

b) Da der Trägheitstensor im gewählten Koordinatensystem bereits diagonal ist, lauten die Hauptträgheitsmomente

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \frac{1}{6} M a^2.$$

Alle Vektoren sind Eigenvektoren zu Θ, denn für einen beliebigen Vektor $\vec{x} = (x, y, z)^\top$ gilt

$$\Theta \vec{x} = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Theta_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Theta_1 \vec{x},$$

was ja genau einen Eigenvektor zum Eigenwert Θ_1 charakterisiert.

c) Nach dem Satz von Steiner gilt für das Trägheitsmoment der Rotation um eine beliebige Würfelkante

$$\Theta_{\text{Kante}} = \Theta_1 + M l^2,$$

wobei l der senkrechte Abstand vom Schwerpunkt zu einer Würfelkante ist. Dieser ist durch

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

gegeben. Somit ist

$$\Theta_{\text{Kante}} = \frac{1}{6} M a^2 + \frac{1}{2} M a^2 = \frac{2}{3} M a^2.$$

4. **Verständnisfragen**

a) Ausgehend von einer Ansammlung diskreter Massenpunkte führt man einen Grenzübergang zu beliebig kleinen Massenpunkten durch, die sich an den kontinuierlichen Orten $\vec{x}$ innerhalb des Körpers befinden, das infinitesimal kleine Volumen $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$ einnehmen und die Masse $\mathrm{d}m = \rho(\vec{x})\,\mathrm{d}V$ besitzen, wobei $\rho(\vec{x})$ die Dichte am Ort $\vec{x}$ ist. Dann geht die Summe $\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\vec{x}_i^2\delta_{jk} - x_{i,j}x_{i,k})$ in das Volumenintegral $\int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \int \mathrm{d}x_3\,\rho(\vec{x})\,(\vec{x}^2\delta_{jk} - x_j x_k)$ über.

b) Wenn neue Koordinaten u_j eingeführt werden, die von den kartesischen Koordinaten x_i abhängen, also $u_j(x_i)$ gilt, dann sind die Elemente J_{ij} der Jacobimatrix J durch die Ableitungen der Umkehrfunktionen $x_i(u_j)$ nach den neuen Koordinaten u_j gegeben, $J_{ij} = \partial x_i/\partial u_j$. Ihre Determinante ist wichtig für die Berechnung von Volumenintegralen in diesen neuen Koordinaten, denn es gilt für das infinitesimale Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = |\det J|\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3$.

c) Der Gauß'sche Satz besagt, dass das Flächenintegral über das Vektorfeld $\vec{A}$ folgendermaßen durch das Volumenintegral über dessen Divergenz ersetzt werden kann, $\int_{\partial V} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\,\mathrm{d}V$, wobei ∂V der Rand des Volumens V ist und die Flächenelemente $\mathrm{d}\vec{\sigma}$ nach außen gerichtet sind.