Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2022

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
DR. K. HÜBNER
DR. C. DAHLHAUSEN

Blatt 3
Abgabe: *Freitag, 13.05.2022, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1. **(6 Punkte)**
Sei E/F eine Galoiserweiterung. Wir betrachten E als topologischen Raum mit der diskreten Topologie. Zeigen Sie, dass die (Teilraumtopologie der) KO-Topologie auf $\mathrm{Gal}(E/F) \subseteq \mathrm{Map}(E,E)$ mit der Krulltopologie übereinstimmt.
Hinweis: Verwenden Sie Blatt 2, Aufgabe 4 (c) und die Tatsache, dass eine stetige bijektive Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum bereits ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2 (Standardauflösung von $\mathbb{Z}$ als G-Modul)**.** **(4 Punkte)**
Sei G eine Gruppe. Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ betrachten wir die freie abelsche Gruppe

$$X_n := \mathbb{Z}[G^{n+1}] = \Big\{\sum_{i=1}^{k} a_i \underline{g}_i \,|\, k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}, \underline{g}_i \in G^{n+1}\Big\},$$

wobei $G^0 = \{1\}$ und folglich $X_{-1} = \mathbb{Z}$ ist. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $G \times G^{n+1} \to G^{n+1}, (g,(g_0,\dots,g_n)) \mapsto (gg_0,\dots,gg_n)$ setzt sich zu einer Operation $G \times X_n \to X_n$ fort, die X_n zu einem G-Linksmodul macht.

(b) Die Abbildung

$$d_n\colon X_{n+1} \to X_n, \quad (g_0,\dots,g_{n+1}) \mapsto \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (g_0,\dots,g_{i-1},g_{i+1},\dots,g_{n+1}),$$

ist ein Homomorphismus von G-Linksmoduln.

(c) Es ist $d_n \circ d_{n+1} = 0$, d.h. $(X_\bullet, d_\bullet)$ ist ein Komplex von G-Linksmoduln.

(d) Die Abbildungen $(h_n\colon X_i \to X_{i+1})_{n\geq -1}$ mit $h_n((g_0,\dots,g_n)) = (1,g_0,\dots,g_n)$ bilden eine Nullhomotopie. Insbesondere ist der Komplex $(X_\bullet, d_\bullet)$ exakt.

Aufgabe 3 (Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}^2$-Modul)**.** **(4 Punkte)**
Wir betrachten die freie abelsche Gruppe $G = \mathbb{Z}^2$ mit Standardbasis (e_1,e_2). Zeigen Sie:

(a) Die Ringabbildung $\mathbb{Z}[t_1,t_2] \to \mathbb{Z}[G], t_i \mapsto e_i$, faktorisiert über einen Isomorphismus $S^{-1}\mathbb{Z}[t_1,t_2] \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[G]$ für eine geeignete multiplikativ abgeschlossene Menge $S \subset \mathbb{Z}[t_1,t_2]$.

Wir verwenden im Folgenden die Identifikation $\mathbb{Z}[G] \cong S^{-1}\mathbb{Z}[t_1,t_2]$.

(b) Der Gruppenhomomorphismus

$$\partial_1\colon \mathbb{Z}[G] \oplus \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[G], \quad (x,y) \mapsto x(t_1-1) + y(t_2-1)$$

hat Bild $\ker(\varepsilon)$, wobei $\varepsilon\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ die Augmentationsabbildung ist.

(c) Der Gruppenhomomorphismus

$$\partial_2\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G] \oplus \mathbb{Z}[G], \quad x \mapsto \big(-x(t_2-1), x(t_1-1)\big)$$

ist injektiv mit Bild $\ker(\partial_1)$.

Aufgabe 4 (Abgeleiteter Limes). **(4 Punkte)**

Sei A ein kommutativer Ring und $M_\bullet \in \mathtt{Fun}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, A\text{-}\mathtt{Mod})$ ein projektives System von A-Moduln mit Übergangsmorphismen $(d_n\colon M_{n+1} \to M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir betrachten den Homomorphismus $\Delta(M_\bullet) := \mathrm{id} - d\colon \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$ von R-Moduln, wobei d der eindeutige Homomorphismus ist, der durch $\mathrm{pr}_n \circ d = d_n \circ \mathrm{pr}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ charakterisiert ist. Zeigen Sie:

(a) Die Familie $\left(R^i\colon \mathtt{Fun}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, A\text{-}\mathtt{Mod}) \to A\text{-}\mathtt{Mod}\right)_{i\geq 0}$ mit

$$R^i(M_\bullet) := \begin{cases} \ker(\Delta(M_\bullet)) & (i = 0) \\ \operatorname{coker}(\Delta(M_\bullet)) & (i = 1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

definert einen universellen δ-Funktor.

(b) Es ist $R^i = \lim^i$ für alle $i \geq 0$, wobei $\lim^i := \mathrm{R}^i \lim$.