Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

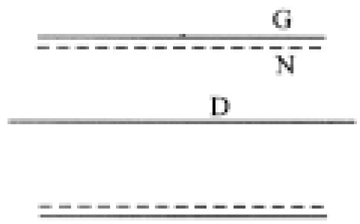
Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 2

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 26. - 30. April 2021
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Verständnisfragen*

a) *James Franck* (1882-1964) und *Gustav Hertz* (1887-1975) haben 1913 das Ihnen bekannte Experiment durchgeführt. Nebenstehend sehen Sie die Skizze des Versuchsaufbaus, der so beschrieben wurde: '[..] D ist ein Platindraht, dessen mittleres Stück dünner ist und durch elektrischen Strom zum Glühen gebracht werden kann. N ist ein feines Platindrahtnetz, welches den Draht D im Abstand von vier Zentimetern zylindrisch umgibt, und G eine zylindrische Platinfolie, welche von N einen Abstand von 1 bis 2 mm hatte. [..] Die meisten Ansätze laufen darauf hinaus, dass die Frequenz einer bestimmten Eigenschwingung eines Elektrons multipliziert mit der Konstanten h gleich der zur Ionisation benötigten Energie gesetzt wird.'



Beschreiben Sie den Franck-Hertz-Versuch und vergleichen Sie, welche Bauteile des heutigen Aufbaus der Originalveröffentlichung entsprechen. Schreiben Sie den letzten Satz des Zitats als Gleichung auf. Wie deutet man heute die angesprochene Frequenz und führt diese zur Ionisation?

b) Was ist ein Vektorraum? Was versteht man unter einem Hilbertraum? Erklären Sie, warum die Quantenmechanik einen Vektorraum zur Beschreibung physikalischer Zustände verwendet.

c) Erläutern Sie den Begriff 'linearer Operator'. Geben Sie Beispiele für solche Operatoren.

2. *Kommutatoralgebra*

Wir betrachten Operatoren $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ und deren Kommutator $[\cdot, \cdot]$ auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$.

a) Zeigen Sie, dass die Produktregel gilt:

$$[\hat{A}\,\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\,\hat{B} \quad \text{und} \quad [\hat{A}, \hat{B}\,\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\,\hat{C}\,.$$

b) Zeigen Sie die Jacobi-Identität:

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0.$$

Im Folgenden wollen wir annehmen, dass die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ jeweils mit ihrem Kommutator vertauschen, d.h. $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = 0$ und $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$.

c) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\,\hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}] \quad \text{und} \quad [\hat{A}^n, \hat{B}] = n\,\hat{A}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}].$$

Sind Ihnen diese sowie die Produktregel aus Teilaufgabe a) von einer anderen Rechenoperation vertraut?

d) Wir definieren die Funktion $F(\lambda)$ der Operatoren $\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}$ durch

$$F(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda \hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{\lambda \hat{\mathrm{B}}}\, \mathrm{e}^{-\lambda(\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}})}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F(\lambda) = \lambda[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]F(\lambda)$ ist. Folgern Sie durch Integration dieser Differentialgleichung, dass

$$\mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{B}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \frac{1}{2}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]} \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{B}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{B}}}\, \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]}$$

Bemerkung: Die letzteren Formeln sind Spezialfälle der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, wonach für zwei allgemeine Operatoren $\hat{\mathrm{A}}$ und $\hat{\mathrm{B}}$ gilt

$$\mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{B}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + Z(\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}})}$$

mit der Funktion

$$Z(\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}) = \frac{1}{2}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] + \frac{1}{12}[\hat{\mathrm{A}}, [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]] - \frac{1}{12}[\hat{\mathrm{B}}, [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]] + \cdots\,,$$

worin die weiteren Terme höhere Kommutatoren enthalten. Insbesondere ist also im Allgemeinen $\mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{B}}} \neq \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}}$.
Der oben betrachtete Fall, dass zwei Operatoren jeweils mit ihrem Kommutator vertauschen, tritt in der Quantenmechanik oft auf, etwa wenn der Kommutator eine komplexe Zahl ist - wie z.B. der Kommutator von Orts- und Impulsoperator.

3. *Planck'sches Strahlungsgesetz*

Die Energiedichte der Hohlraumstrahlung im Frequenzintervall $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$ ist gegeben durch

$$u_\nu\, \mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1}\, \mathrm{d}\nu,$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum ist, c die Lichtgeschwindigkeit, k_B die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur der Hohlraumstrahlung.

a) Bestimmen Sie die Energiedichte u_λ im Wellenlängenbereich $[\lambda, \lambda + \mathrm{d}\lambda]$. Zeigen Sie, dass das *Wien'sche Verschiebungsgesetz* $\lambda_{\max}T = \text{const.}$ gilt. Hierbei ist $\lambda_{\max}$ die Wellenlänge, bei der u_λ maximal wird.

b) Leiten Sie das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* für die Gesamtenergiedichte $u = aT^4$ her. Bestimmen Sie a. Wie sähe die Proportionalität zwischen u und T allgemein in d Raumdimensionen aus und warum?*

c) Bestimmen Sie die Frequenz $\tilde{\nu}_{\max}$, bei der die spektrale Photonendichte $n(\nu)$ maximal wird. Wie sieht die Proportionalität zwischen der Gesamtphotonendichte n und T aus?

4. *Quantisierungsregel von Bohr und Sommerfeld für den harmonischen Oszillator*

Die Quantisierungsregel von Bohr und Sommerfeld besagt, dass der konstante Teil der Wirkung S_0 für ein sich periodisch bewegendes, gebundenes Teilchen der Masse m ein Vielfaches des Planck'schen Wirkungsquantums h sein muss, also

$$S_0 = \oint p\, \mathrm{d}q = nh,$$

wobei q eine verallgemeinerte Koordinate ist, p der dazu kanonisch konjugierte Impuls und $n \in \mathbb{N}$. Das Integral erstreckt sich über eine ganze Periode. Im Folgenden wollen wir daraus die Quantisierung der Energieniveaus für den harmonischen Oszillator herleiten.

**Hinweis:* Benutzen Sie, dass $\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^n}{\exp(x)-1} = \zeta(n+1)\,\Gamma(n+1)$ ist, mit $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ und $\Gamma(n+1) = n!$, falls $n \in \mathbb{N}$.

a) Wie lautet die Differentialgleichung für den ungedämpften harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz ω in einer Raumdimension x? Wie lauten $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$?

b) Zeigen Sie, ausgehend von obiger Quantisierungsregel, dass der harmonische Oszillator quantisierte Energieniveaus $E_n = n\hbar\omega$ mit $\hbar = h/(2\pi)$ haben muss.

5. *Gauß'sches Wellenpaket*

Der Zustand eines freien Teilchens in einer Dimension ist zu einem festen Zeitpunkt ($t = 0$) durch die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} \phi(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

im Ortsraum gegeben. Die Funktion $\phi(k)$ sei eine Gauß-Funktion der Form

$$\phi(k) = A\, \mathrm{e}^{-a^2k^2}$$

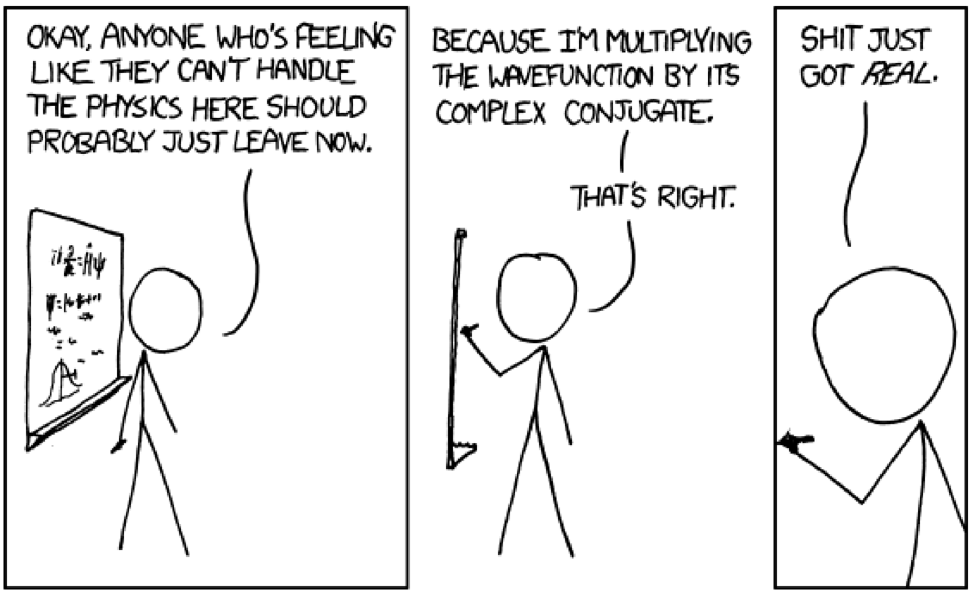
mit Normierung A und $a \in \mathbb{R}$.

a) Was bedeutet die Form der Funktion $\phi(k)$ physikalisch? Bestimmen Sie A so, dass $\langle\phi|\phi\rangle = 1$ ist.

b) Berechnen Sie für den Zustand $\psi(x)$ die Erwartungswerte $\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle$ und $\langle\hat{\mathrm{Q}}^2\rangle$, wobei $\hat{\mathrm{Q}}$ den Ortsoperator bezeichnet.

c) Der Impulsoperator in einer Dimension ist in Ortsdarstellung gegeben durch $\hat{\mathrm{P}} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Berechnen Sie für den Zustand $\psi(x)$ die Erwartungswerte $\langle\hat{\mathrm{P}}\rangle$ und $\langle\hat{\mathrm{P}}^2\rangle$.

d) Berechnen Sie außerdem das Schwankungsprodukt $(\Delta\,\hat{\mathrm{Q}})(\Delta\,\hat{\mathrm{P}})$ und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Unbestimmtheitsrelation, die Sie unter Gleichung (3.11) im Skript finden.



xkcd.com/849

Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

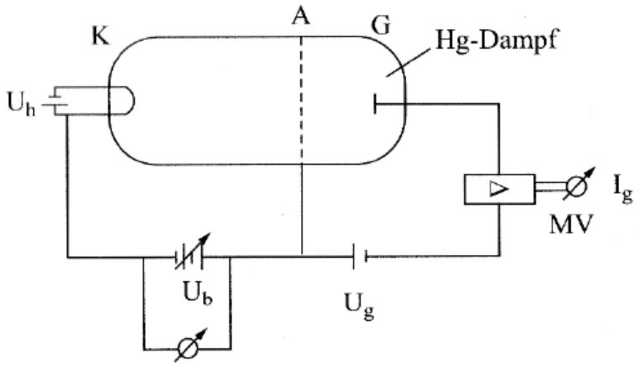
Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 2: Lösung

1. Verständnisfragen

Franck-Hertz-Versuch

a) 

U_h Heizspannung mit Glühkathode K.
Die Glühkathode K entspricht dem glühenden Platindraht D.
U_b variable Beschleunigungsspannung bis ca. 30 V mit notwendigem Spannungsmessgerät.
Durchlöcherte Anode A entspricht dem Platinnetz N. Zwischen K und A werden die Elektronen beschleunigt.
U_g Gegenspannung ca. 1,5 V.
G Gegenelektrode mit Messverstärker MV zur Messung des Auffängerstrons I_g.
G entspricht auch der Platinfolie G.
H_g-Dampf mit dem Druck $p \approx 20$ hPa bei einer Temperatur von ca. 180 °C.

Das Zitat lässt sich schreiben als $E_{\text{ion}} = h \cdot f$. Heutzutage bezeichnet f die Frequenz der Photonen und die angesprochene Energie ist die erste Anregungsenergie. Für Quecksilber ist die $E_1 = 4.9\text{eV}$. Die Ionisierungsenergie ist mit $E_{\text{ion}} = 10.5\text{eV}$ deutlich größer.

b) Ein Vektorraum V über einem Körper K ist eine Menge, die mit den Verknüpfungen 'Addition' $\oplus$ und 'Skalarmultiplikation' $\odot$ ausgestattet sind. Die Verknüpfungen sind Abbildungen

$$\oplus : V \times V \to V$$
$$\odot : K \times V \to V,$$

so dass die Summe zweier Vektoren ebenfalls ein Vektor ist und Vektoren durch Multiplikation mit Elementen des Körpers K gestreckt oder gestaucht werden können. $(V, \oplus)$ bildet eine Abel'sche Gruppe und für die Skalarmultiplikation gelten das Distributiv- und Assoziativgesetz. Auf einem Vektorraum kann zusätzlich ein Skalarprodukt eingeführt werden. Dies ist eine Abbildung:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to K.$$

In dieser Vorlesung haben Sie ein Skalarprodukt eingeführt, das Vektoren in die komplexen Zahlen abbildet und folgende Eigenschaften besitzt

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle *$$
$$\langle v, \alpha w_1 + \beta w_2 \rangle = \alpha \langle v, w_1 \rangle + \beta \langle v, w_2 \rangle \qquad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ und } v, w_1, w_2 \in V$$
$$\langle v, v \rangle \geq 0 \text{ und } \langle v, v \rangle = 0 \equiv v = 0.$$

Ein Hilbertraum ist ein Vektorraum ausgestattet mit einem Skalarprodukt, in dem jede Cauchyfolge konvergiert.
Zustände in der Quantenmechanik werden durch einen Vektorraum bzw. Hilbertraum dargestellt. Dies liegt daran, dass Vektoren die einfachsten mathematischen Objekte sind, die eine lineare Überlagerung ermöglichen. Die Notwendigkeit, Zustände linear überlagern zu können, zeigt sich insbesondere in Interferenzbeobachtungen von Materiewellen. Dann kann das Interferenzmuster durch die Überlagerung von Kugelwellen dargestellt werden, wie in der Elektrodynamik dies nach dem Huygens'schen Prinzip getan wird.

c) Lineare Operatoren bilden den Vektorraum auf sich selbst ab

$$\hat{\mathrm{A}} : V \to V \qquad v \mapsto \hat{\mathrm{A}}(v) = \hat{\mathrm{A}}\, v.$$

Ein solcher Operator ist linear in seinem Argument

$$\hat{\mathrm{A}}(\alpha v + \beta w) = \alpha\, \hat{\mathrm{A}}\, v + \beta\, \hat{\mathrm{A}}\, w,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $v, w \in V$. Wegen der Linearität lassen sich solche Operatoren auf einem Vektorraum durch die Bilder der Basisvektoren dargestellt werden. Daher können lineare Operatoren als quadratische Matrizen bezüglich einer Basis dargestellt werden.
Beispiele sind die Pauli-Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, der Orts- und Impulsoperator im Ortsraum, $\hat{\mathrm{Q}} = \vec{x}$ und $\hat{\mathrm{P}} = -i\hbar\nabla$ und der Zeitentwicklungsoperator $U(t-t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)\right)$ und noch einige mehr.

2. *Kommutatoralgebra*

a) Die Produktregel zeigt man durch geeignete Ergänzung einer 0:

$$[\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}, \hat{\mathrm{C}}] = \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}} - \hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}} - \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{A}}[\hat{\mathrm{B}}, \hat{\mathrm{C}}] + [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{C}}]\,\hat{\mathrm{B}} \qquad \checkmark$$

Analog für die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}}] &= \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}} - \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}} - \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}} + \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}} - \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}} \\ &= [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\hat{\mathrm{C}} + \hat{\mathrm{B}}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{C}}] = \hat{\mathrm{B}}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{C}}] + [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\hat{\mathrm{C}} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

b) Die Jacobi-Identiät lässt sich durch Vergleich aller Terme zeigen:

$$\begin{aligned} & [\hat{\mathrm{A}}, [\hat{\mathrm{B}}, \hat{\mathrm{C}}]] + [\hat{\mathrm{B}}, [\hat{\mathrm{C}}, \hat{\mathrm{A}}]] + [\hat{\mathrm{C}}, [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]] \\ = \; & \hat{\mathrm{A}}[\hat{\mathrm{B}}, \hat{\mathrm{C}}] - [\hat{\mathrm{B}}, \hat{\mathrm{C}}]\,\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}[\hat{\mathrm{C}}, \hat{\mathrm{A}}] - [\hat{\mathrm{C}}, \hat{\mathrm{A}}]\,\hat{\mathrm{B}} + \hat{\mathrm{C}}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] - [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\hat{\mathrm{C}} \\ = \; & \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}} - \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{B}} - (\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}} - \hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{A}}) \\ & + \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}} - \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}} - (\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{B}}) + \hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{A}} - (\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}} - \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}}) \\ = \; & \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}} - \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{B}} - \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}} - \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}} \\ & \underline{- \hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}} + \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{B}} + \underline{\hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}} - \hat{\mathrm{C}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{A}} - \hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{C}} + \hat{\mathrm{B}}\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{\mathrm{C}} \\ = \; & 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

c) Wir halten zuerst fest, dass die Voraussetzung $[[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}], \hat{\mathrm{A}}] = 0$ und $[[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}], \hat{\mathrm{B}}] = 0$ die Gleichheit

$$\hat{\mathrm{A}}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] = [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\hat{\mathrm{A}} \quad \text{und} \quad \hat{\mathrm{B}}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] = [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\hat{\mathrm{B}}$$

implizieren.
Wir zeigen nun durch vollständige Induktion, dass $[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}^n] = n\,\hat{\mathrm{B}}^{n-1}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]$ gilt. Wir überprüfen zuerst für $n = 1$

$$[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] = 1 \cdot \hat{\mathrm{B}}^0[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] = [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] \qquad \checkmark$$

und $n = 2$

$$[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}^2] = \hat{\mathrm{B}}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] + [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\hat{\mathrm{B}} = 2\,\hat{\mathrm{B}}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] \qquad \checkmark$$

Hier haben wir im ersten Schritt die Produktregel aus Aufgabenteil a) und im zweiten Schritt die Voraussetzung benutzt, dass der Operator $\hat{\mathrm{B}}$ mit dem Kommutator vertauscht.

Die Induktionsannahme ist, dass $[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}^n] = n\,\hat{\mathrm{B}}^{n-1}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]$ gilt. Der Induktionsschritt für $n + 1$ zeigt

$$\begin{aligned}
[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}^{n+1}] &= \hat{\mathrm{B}}^n[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] + [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}^n]\,\hat{\mathrm{B}} \\
&= \hat{\mathrm{B}}^n[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] + n\,\hat{\mathrm{B}}^{n-1}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\hat{\mathrm{B}} \\
&= \hat{\mathrm{B}}^n[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] + n\,\hat{\mathrm{B}}^{n-1}\,\hat{\mathrm{B}}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] \\
&= (n + 1)\,\hat{\mathrm{B}}^n[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Hier haben wir im ersten Schritt wieder die Produktregel, im zweiten Schritt die Induktionsannahme und im dritten Schritt die Voraussetzung $[[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}], \hat{\mathrm{B}}] = 0$ benutzt. Analog führt man den Beweis für $[\hat{\mathrm{A}}^n, \hat{\mathrm{B}}] = n\,\hat{\mathrm{A}}^{n-1}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]$.

Die Produktregel sowie die in diesem Aufgabenteil gezeigte Eigenschaft ist von der Ableitung von Funktionen bereits bekannt.

d) Die Ableitung der Funktion $F(\lambda)$ nach dem Parameter λ wird mit der Produktregel bestimmt zu

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F(\lambda) &= \hat{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}\,\mathrm{e}^{-\lambda(\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}})} + \mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}\,\mathrm{e}^{-\lambda(\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}})} - \mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}(\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}})\,\mathrm{e}^{-\lambda(\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}})} \\
&= \left(\hat{\mathrm{A}} + \mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\hat{\mathrm{B}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\hat{\mathrm{A}}} - \mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}(\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}})\,\mathrm{e}^{-\lambda\hat{\mathrm{B}}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\hat{\mathrm{A}}}\right)F(\lambda).
\end{aligned}$$

Bedenken Sie, dass die Position der Operatoren relevant ist. Um die Ableitung weiter umzuformen, betrachten wir zwei Kommutatoren:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}, \hat{\mathrm{B}}] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}[\hat{\mathrm{A}}^n, \hat{\mathrm{B}}] = [1, \hat{\mathrm{B}}] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}[\hat{\mathrm{A}}^n, \hat{\mathrm{B}}] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}n\,\hat{\mathrm{A}}^{n-1}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}(n + 1)\,\hat{\mathrm{A}}^n[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] \\
&= \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\,\hat{\mathrm{A}}^n[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] \\
&= \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] = \lambda[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\hat{\mathrm{A}}$ mit dem Kommutator $[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]$ vertauscht. Daraus folgt

$$\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\hat{\mathrm{B}} = \hat{\mathrm{B}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}} + \lambda[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}.$$

Analog berechnen wir folgenden Kommutator

$$\begin{aligned}
[\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}, \hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}] &= [\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}, \hat{\mathrm{A}}] + [\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}, \hat{\mathrm{B}}] \\
&= \mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}[\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}, \hat{\mathrm{A}}] + [\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}, \hat{\mathrm{A}}]\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}} + \mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}[\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}, \hat{\mathrm{B}}] + [\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}[\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}, \hat{\mathrm{A}}] + [\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}},
\end{aligned}$$

da $[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{A}}] = 0 = [\hat{\mathrm{B}}, \hat{\mathrm{B}}]$. Für den ersten Term benutzen wir dieselbe Rechnung wie zuvor, sodass

$$\begin{aligned}
[\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}, \hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}] &= \lambda[\hat{\mathrm{B}}, \hat{\mathrm{A}}]\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}} + \lambda[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}} \\
&= 0 \\
\Rightarrow \mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}(\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}) &= (\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}})\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{A}}}\,\mathrm{e}^{\lambda\hat{\mathrm{B}}}.
\end{aligned}$$

Die beiden Ergebnisse setzen wir in die Ableitung von $F(\lambda)$ ein.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F(\lambda) &= \left(\hat{A} + e^{\lambda\hat{A}}\,\hat{B}\,e^{-\lambda\hat{A}} - e^{\lambda\hat{A}}\,e^{\lambda\hat{B}}(\hat{A}+\hat{B})\,e^{-\lambda\hat{B}}\,e^{-\lambda\hat{A}}\right)F(\lambda)\\ &= \left(\hat{A}+\hat{B} + \lambda[\hat{A},\hat{B}] - (\hat{A}+\hat{B})\right)F(\lambda)\\ &= \lambda[\hat{A},\hat{B}]F(\lambda),\end{aligned}$$

was wir zeigen wollten. Integration dieser Differentialgleichung führt zu

$$\log F(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}[\hat{A},\hat{B}].$$

Mit der Definition von $F(\lambda)$ und $\lambda = 1$ findet man die erste Relation, Da der Kommutator mit den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ vertauscht.

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}}\,e^{-(\hat{A}+\hat{B})} &= e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\\ \Rightarrow \qquad e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}} &= e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\,e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \qquad \checkmark\end{aligned}$$

Für die zweite Relation setzen wir $\lambda = -1$ und finden

$$\begin{aligned} e^{-\hat{A}}\,e^{-\hat{B}}\,e^{\hat{A}+\hat{B}} &= e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\\ \Rightarrow \qquad e^{\hat{A}+\hat{B}} &= e^{\hat{B}}\,e^{\hat{A}}\,e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\,.\end{aligned}$$

Aus unserer Rechnung für die erste Relation folgt

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\,e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}}$$

Dies setzen wir in den letzten Schritt ein und benutzen, dass der Kommutator mit den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ vertauscht

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\,e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}} &= e^{\hat{B}}\,e^{\hat{A}}\,e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}\\ \Rightarrow \qquad e^{\hat{A}}\,e^{\hat{B}} &= e^{\hat{B}}\,e^{\hat{A}}\,e^{[\hat{A},\hat{B}]} \qquad \checkmark\end{aligned}$$

3. Planck'sches Strahlungsgesetz

a) Zwischen Frequenz und Wellenlänge besteht der Zusammenhang $\nu\lambda = c$, also $\nu = c/\lambda$ und $\mathrm{d}\nu = -c/\lambda^2\,\mathrm{d}\lambda$. Da $u_\nu\,\mathrm{d}\nu = u_\lambda\,\mathrm{d}\lambda = u_{\nu\to\lambda}\,|\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\lambda|\,\mathrm{d}\lambda$, gilt

$$u_\lambda\,\mathrm{d}\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Am Maximum gilt $\mathrm{d}u_\lambda/\mathrm{d}\lambda = 0$, also

$$\frac{\mathrm{d}u_\lambda}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^6}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)-1}\left[\frac{hc}{\lambda k_B T}\frac{1}{1-\exp\left(-\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)} - 5\right] = 0.$$

Für endliche λ muss demnach der Ausdruck in den eckigen Klammern verschwinden. Mit $x \equiv hc/(\lambda k_B T)$ muss also

$$\frac{x}{5} + \exp(-x) = 1$$

sein. Diese Gleichung besitzt zwei Lösungen, $x_1 = 0$ und $x_2 \approx 4{,}965$, wobei nur die letztere relevant ist, da sie das Maximum angibt. Also ist

$$x_2 = \frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T} = \text{const.} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{\max} T = \text{const.}$$

b) Die Gesamtenergiedichte u ergibt sich zu

$$u = \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \, u_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \, \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1} = \frac{8\pi(k_\mathrm{B}T)^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x^3}{\exp(x) - 1},$$

wobei benutzt wurde, dass $x \equiv h\nu/(k_\mathrm{B}T)$. Mit dem Hinweis auf dem Zettel ergibt sich

$$u = \frac{8\pi(k_\mathrm{B}T)^4}{h^3 c^3} \cdot \frac{\pi^4}{90} \cdot 3! = \frac{8\pi^5 k_\mathrm{B}^4}{15 h^3 c^3} T^4.$$

In d Raumdimensionen beinhaltet die spektrale Energiedichte u_ν das Phasenraumvolumen mit einem Oberflächenterm $\propto \nu^{d-1}$ und die Energie eines Photons $\propto \nu$. Variablentransformation des Integrals von ν auf x ergibt dann einen Term $\propto T^{d+1}$, sodass $u \propto T^{d+1}$.

c) Die spektrale Photonendichte ist gegeben durch

$$n(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \frac{u_\nu}{h\nu}\,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1}.$$

Am Maximum muss $\mathrm{d}n/\mathrm{d}\nu = 0$ sein, sodass

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1} \left[2 - \frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T} \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right)} \right] = 0.$$

Für endliche ν muss wieder der Ausdruck in den eckigen Klammern verschwinden. Mit $x \equiv h\nu/(k_\mathrm{B}T)$ ergibt sich demnach

$$\frac{x}{2} + \exp(-x) = 1.$$

Diese Gleichung besitzt wieder zwei Lösungen, $x_1 = 0$ und $x_2 \approx 1{,}594$, wobei wieder nur die letztere relevant ist. Demnach ist $\tilde{\nu}_\mathrm{max} \approx 1{,}594\, k_\mathrm{B}T/h$.

Die Gesamtphotonenzahl ergibt sich zu

$$n = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \, \frac{\nu^2}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1} = \frac{8\pi(k_\mathrm{B}T)^3}{h^3 c^3} \int_0^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x^2}{\exp(x) - 1} \propto T^3.$$

4. *Quantisierungsregel von Bohr und Sommerfeld für den harmonischen Oszillator*

a) Die Differentialgleichung für den ungedämpften harmonischen Oszillator lautet

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t).$$

Für $x(t = 0) = 0$ muss $B = 0$ sein. Die Ableitung der verbliebenen Lösung ist

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t).$$

Mit $\dot{x}(t = 0) = v_0$ ist $A = v_0/\omega$ und somit auch

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t).$$

b) Mit der Periodendauer T folgt aus $S_0 = \oint p\,\mathrm{d}q = \int_0^T p\dot{q}\,\mathrm{d}t = m\int_0^{2\pi/\omega} v_0^2 \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = nh$ sofort

$$mv_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} \mathrm{d}t \cos^2(\omega t) = \frac{mv_0^2}{\omega} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \cos^2(x) = \frac{mv_0^2 \pi}{\omega} \stackrel{!}{=} nh.$$

Mit $E = mv_0^2/2$ und $\hbar = h/(2\pi)$ ergibt dies $E = n\hbar\omega$ (die Nullpunktsenergie von $E_0 = \hbar\omega/2$ wird bei dieser Herleitung nicht berücksichtigt).

5. *Gauß'sches Wellenpaket*

Zuerst bestimmen wir die Wellenfunktion und setzen die Normalisierung A erst am Ende unserer Rechnungen ein.

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} \phi(k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-a^2k^2+\mathrm{i}kx} = \frac{A}{\sqrt{2a^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}}.$$

Außerdem werden wir in dieser Aufgabe häufig das Gauß-Integral benutzen, was wir vorbereitend schon einmal hinschreiben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-bx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}},$$

und dessen Ableitung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2\,\mathrm{e}^{-bx^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-bx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{4b^3}}.$$

a) Physikalisch bedeutet diese Form für das freie Teilchen, dass es sowohl im Orts- als auch im Impulsraum im Sinne der Unschärferelation verschmiert ist. Die Ortswellenfunktion und die Impulswellenfunktion sind jeweils Gauß-Funktionen mit endlicher Breite, sodass weder Ort noch Impuls exakt bestimmt sind.
Die Konstante A erhalten wir durch

$$1 = \langle\phi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \phi^*(k)\phi(k) = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\,\mathrm{e}^{-2a^2k^2} = A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2a^2}}$$

$$\Rightarrow A^2 = \sqrt{\frac{2a^2}{\pi}}.$$

b) Erwartungswerte in der Quantenmechanik bestimmt man mit der Wellenfunktion $\psi(x)$ wie folgt

$$\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle = \langle\psi|\,\hat{\mathrm{Q}}\,|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi^*(x)\,\hat{\mathrm{Q}}\,\psi(x),$$

wobei wir im ersten Schritt die Bra-Ket-Notation benutzt haben für einen abstrakten Zustand $|\psi\rangle$. Im Ortsraum ist der Ortsoperator $\hat{\mathrm{Q}} = x$, also durch die Koordinate gegeben. (Wir rechnen hier im 1-dim. Ortsraum.) Der Erwartungswert für den Ort ist also

$$\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi^*(x) x \psi(x) = \left(\frac{A}{\sqrt{2a^2}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} = 0.$$

Dies lässt sich leicht einsehen, da x eine ungerade und $\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$ eine gerade Funktion sind.
Der Erwartungswert für $\hat{\mathrm{Q}}^2$ ist

$$\langle\hat{\mathrm{Q}}^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi^*(x) x^2 \psi(x) = \left(\frac{A}{\sqrt{2a^2}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} = \frac{A^2}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi\,(2a^2)^3}{4}} = \frac{1}{2a^2}\sqrt{\frac{2a^2}{\pi}}\sqrt{\frac{\pi\,(2a^2)^3}{4}} = a^2.$$

Hier haben wir $b = \frac{1}{2a^2}$ identifiziert

c) Der Impulsoperator im Ortsraum hat die Form $\hat{\mathrm{P}} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Dies setzen wir ein und integrieren

$$\langle\hat{\mathrm{P}}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi^*(x) \left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = \left(\frac{A}{\sqrt{2a^2}}\right)^2 \frac{\hbar}{2a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} = 0.$$

Hier haben wir dasselbe Argument wie bei dem Erwartungswert des Orts angewandt. Der Erwartungswert für $\hat{\mathrm{P}}^2$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
\langle\hat{\mathrm{P}}^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi^*(x) \left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi(x) = \langle\hat{\mathrm{P}}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi^*(x)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x) \\
&= \left(\frac{A}{\sqrt{2a^2}}\right)^2 \frac{\hbar^2}{2a^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left(1-\frac{x^2}{2a^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \\
&= \hbar^2\frac{A^2}{4a^4}\left(\sqrt{2\pi a^2} - \frac{1}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi\,(2a^2)^3}{4}}\right) \\
&= \frac{\hbar^2}{4a^2}\sqrt{\frac{2a^2}{\pi}}\left(\sqrt{2\pi a^2} - \sqrt{\frac{\pi a^2}{2}}\right) = \frac{\hbar^2}{4a^2}
\end{aligned}$$

d) Für das Schwankungsprodukt müssen wir aus unseren vorigen Ergebnissen das Schwankungsquadrat bestimmen. Dafür benutzen wir die allgemein gültige Gleichung

$$\langle\Delta\,\hat{\mathrm{A}}^2\rangle = \langle(\hat{\mathrm{A}} - \langle\hat{\mathrm{A}}\rangle)^2\rangle = \langle\hat{\mathrm{A}}^2\rangle - \langle\hat{\mathrm{A}}\rangle^2.$$

In Aufgabenteilen b) und c) haben wir die entsprechenden Erwartungswerte bereits für den Orts- und den Impulsoperator bestimmt.

$$\begin{aligned}
\langle\Delta\,\hat{\mathrm{Q}}^2\rangle &= \langle\hat{\mathrm{Q}}^2\rangle - \langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle^2 = a^2 \\
\langle\Delta\,\hat{\mathrm{P}}^2\rangle &= \langle\hat{\mathrm{P}}^2\rangle - \langle\hat{\mathrm{P}}\rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4a^2}.
\end{aligned}$$

Für das Schwankungsprodukt ergibt sich also

$$\Delta\,\hat{\mathrm{Q}}\,\Delta\,\hat{\mathrm{P}} = a\cdot\frac{\hbar}{2a} = \frac{\hbar}{2}.$$

Die Unbestimmtheitsrelation in Gleichung (3.11) im Skript besagt für zwei Operatoren $\hat{\mathrm{A}}$ und $\hat{\mathrm{B}}$

$$\langle\Delta\,\hat{\mathrm{A}}^2\rangle\langle\Delta\,\hat{\mathrm{B}}^2\rangle \geq -\frac{1}{4}\langle[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{B}}]\rangle^2.$$

Der Kommutator des Orts- und Impulsoperators ist

$$\langle[\hat{\mathrm{Q}},\hat{\mathrm{P}}]\rangle = \mathrm{i}\hbar \qquad \Rightarrow \qquad \langle[\hat{\mathrm{Q}},\hat{\mathrm{P}}]\rangle^2 = -\hbar^2.$$

Dann setzen wir unsere Ergebnisse ein:

$$\langle\Delta\,\hat{\mathrm{Q}}^2\rangle\langle\Delta\,\hat{\mathrm{P}}^2\rangle \geq -\frac{1}{4}\langle[\hat{\mathrm{Q}},\hat{\mathrm{P}}]\rangle^2 \quad \equiv \quad a^2\cdot\frac{\hbar^2}{4a^2} = \frac{\hbar^2}{4} \geq -\frac{1}{4}\left(-\hbar^2\right) = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Damit erfüllt das freie Teilchen, repräsentiert durch die Gauß-Funktion, die Unbestimmtheitsrelation.