Lineare Algebra 2 — Lösung zu Übungsblatt 3

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: **Fr** 22.05.2020 um 9:15 Uhr

---

12. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Einheiten in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)*

(a) Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) $\overline{m}$ ist eine Einheit in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

   (ii) $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

(b) Man untersuche mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus ob das Element $\overline{42}$ eine Einheit in den Ringen $\mathbb{Z}/51\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/55\mathbb{Z}$ ist und bestimme gegebenenfalls multiplikative Inverse.

Lösung:

(a) (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\overline{m} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ sodass

$$\overline{m} \cdot \overline{k} = \overline{1}$$

beziehungsweise

$$m \cdot k \equiv 1 \pmod{n} .$$

Also existiert wiederum ein $j \in \mathbb{Z}$ sodass

$$mk + nj = 1 .$$

Sei nun $d = \mathrm{ggT}(m, n)$, dann gibt es $\tilde{m}, \tilde{n} \in \mathbb{Z}$ sodass $m = d\tilde{m}, n = d\tilde{n}$. Damit folgt:

$$1 = mk + nj = d\tilde{m}k + d\tilde{n}j = d(\tilde{m}k + \tilde{n}j)$$

Insbesondere gilt $d \mid 1$ und folglich, da per Definition $d \geq 0$ ist,

$$\mathrm{ggT}(m, n) = d = 1 .$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es gelte $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Nach Folgerung 2.6 existieren dann Elemente $u, v \in \mathbb{Z}$ sodass

$$un + vm = 1 .$$

Es folgt

$$vm = 1 - un \equiv 1 \pmod{n}$$

und insbesondere

$$\overline{v} \cdot \overline{m} = \overline{1} \text{ in } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

und somit $\overline{m} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$.

(b) Nach (a) genügt es, jeweils ggTs zu bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned}51 &= 1 \cdot 42 + 9\\ 42 &= 4 \cdot 9 + 6\\ 9 &= 1 \cdot 6 + \mathbf{3}\\ 6 &= 2 \cdot 3 + 0\end{aligned}$$

Es ist also $\operatorname{ggT}(42, 51) = 3$ und daher nach (a) $\overline{42} \notin (\mathbb{Z}/51\mathbb{Z})^\times$.
Weiterhin ist:

$$\begin{aligned}55 &= 1 \cdot 42 + 13\\ 42 &= 3 \cdot 13 + 3\\ 13 &= 4 \cdot 3 + \mathbf{1}\\ 3 &= 3 \cdot 1 + 0\end{aligned}$$

Es ist also $\operatorname{ggT}(42, 55) = 1$ und daher nach (a) $\overline{42} \in (\mathbb{Z}/55\mathbb{Z})^\times$.
Aus den obigen Gleichungen erhalten wir zudem durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned}1 &= 13 - 4 \cdot 3\\ &= 13 - 4(42 - 3 \cdot 13)\\ &= 55 - 1 \cdot 42 - 4(42 - 3(55 - 1 \cdot 42))\\ &= 13 \cdot 55 - 17 \cdot 42\end{aligned}$$

Es gilt also $\overline{42}^{-1} = \overline{-17} = \overline{38}$ in $\mathbb{Z}/55\mathbb{Z}$.

13. Aufgabe: *(1,5+1,5+1,5+1,5 Punkte, Der Ring $\mathbb{Z}[i]$)* Sei $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Mit der üblichen Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen wird $\mathbb{Z}[i]$ zu einem nullteilerfreien Ring. Sei $\delta\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$ gegeben durch $a + bi \mapsto |a + bi|^2 = a^2 + b^2$.

(a) Man zeige, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ ein Element $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ existiert mit $|z - (a + bi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Man zeige: Für alle $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ mit $w \neq 0$ gibt es $q \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\delta(z - q \cdot w) \leq \frac{1}{2}\delta(w)$.

(c) Man zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Euklidischer Ring ist.

(d) Man berechne einen größten gemeinsamen Teiler von 9 und $3 + 4i$ in $\mathbb{Z}[i]$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus in $\mathbb{Z}[i]$.

Lösung:

(a) Bezeichne mit $[-]\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ die Funktion, die zur nächsten ganzen Zahl rundet. Um dies wohldefiniert zu machen, wähle für zwei Möglichkeiten die Größere, also $[0.5] = 1$. Dann gilt: $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ -\frac{1}{2} \leq x - [x] \leq \frac{1}{2}$ $(\star)$.
Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a' + ib'$, a', $b' \in \mathbb{R}$. Dann definiere $a = [a'] \in \mathbb{Z}$ und $b = [b'] \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}|z - (a + ib)| = |a' - a + i(b' - b)| &= \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2} = \sqrt{(a' - [a'])^2 + (b' - [b'])^2}\\ &\leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

wobei die Ungleichung aus $(\star)$ folgt und da $\sqrt{-}$ monoton steigend auf $\mathbb{R}_0^+$ ist.

(b) Zuerst seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta((a+ib)\cdot(c+id)) &= \delta(ac-bd+i(bc+ad)) = (ac-bd)^2+(bc+ad)^2\\ &= a^2c^2-2abcd+b^2d^2+b^2c^2+2abcd+a^2d^2\\ &= a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2 = (a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2)\\ &= \delta(a+ib)\cdot\delta(c+id)\,,\end{aligned}$$

δ ist also multiplikativ. Dadurch ist auch $|-|$ multiplikativ, da $\sqrt{-}$ es auch ist.

Seien dann $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ mit $w \neq 0$. Da $w \neq 0$, ist $\frac{z}{w} \in \mathbb{C}$. Wähle dann $q \in \mathbb{Z}[i]$ wie in (a) für eine Zahl in $\mathbb{C}$ als $q = \left[\frac{z}{w}\right]$ ($[-]$ wird in offensichtlicher Weise von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ erweitert). Dann gilt ebenfalls mit (a) und der Multiplikativität von $|-|$, dass

$$\delta(z-q\cdot w) = |z-q\cdot w|^2 = \left|\frac{z}{w}-q\right|^2\cdot|w|^2 = \left|\frac{z}{w}-q\right|^2\cdot\delta(w) \leq \frac{1}{2}\delta(w)\,.$$

(c) Zuerst einmal ist $\mathbb{Z}[i]$ natürlich nullteilerfrei. Darüber hinaus, lässt sich die Normfunktion problemfrei auf $\mathbb{Z}[i]\setminus\{0\}$ einschränken, wie im Skript gefordert.

Seien nun $f, g \in \mathbb{Z}[i]$ mit $g \neq 0$. Dann wähle $q \in \mathbb{Z}[i]$ wie in (b) durch $q = \left[\frac{f}{g}\right]$ und setze dann $r = f - q\cdot g \in \mathbb{Z}[i]$. Mit dem Ergebnis von (b) gilt dann

$$\delta(r) = \delta(f-q\cdot g) \leq \frac{1}{2}\delta(g) < \delta(g)\,,$$

da mit $g \neq 0$ auch $\delta(g) \neq 0$ ist. Somit ist $\mathbb{Z}[i]$ euklidisch.

(d) Nachdem in der (c) das „Rezept“ geliefert worden ist, wie man mit Rest teilt, kann nun der euklidische Algorithmus angewendet werden. Definiere dann wie im Skript $a_0 = 9$ und $a_1 = 3+4i$. Setze im ersten Schritt

$$\begin{aligned}q_0 &= \left[\frac{a_0}{a_1}\right] = \left[\frac{9}{3+4i}\right] = \left[\frac{9(3-4i)}{9+16}\right] = \left[\frac{27}{25}-\frac{36}{25}i\right] = 1-i\,,\\ a_2 &= a_0 - q_0\cdot a_1 = 9-(1-i)\cdot(3+4i) = 9-(7+i) = 2-i\,.\end{aligned}$$

Da $a_2 \neq 0$ wird ein weiter Schritt benötigt

$$\begin{aligned}q_1 &= \left[\frac{a_1}{a_2}\right] = \left[\frac{3+4i}{2-i}\right] = \left[\frac{(3+4i)(2+i)}{5}\right] = \left[\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i\right] = 2i\,,\\ a_3 &= a_1 - q_1\cdot a_2 = 3+4i-2i\cdot(2-i) = 3+4i-2-4i = 1\,.\end{aligned}$$

Wieder ist $a_3 \neq 0$, also noch ein weiter Schritt mit

$$\begin{aligned}q_2 &= \left[\frac{a_2}{a_3}\right] = \left[\frac{2-i}{1}\right] = 2-i\,,\\ a_4 &= a_2 - q_2\cdot a_3 = 2-i-1\cdot(2-i) = 0\,.\end{aligned}$$

Da $a_4 = 0$ ist, folgt mit Satz 3.6, dass $a_3 = 1$ der größte gemeinsame Teiler ist.

14. Aufgabe: *(6 Punkte, Wann ist ein Ring ein Körper?)* Sei $R \neq 0$ ein Ring. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) R ist ein Körper.

(ii) $R[t]$ ist ein Euklidischer Ring.

(iii) $R[t]$ ist ein Hauptidealring.

Bemerkung: Für die Definition des Ringes $R[t]$ siehe Aufgabe 4.

Lösung: (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Bemerkung 3.2(b) und Satz 4.6 aus der LA1 wird $K[t]$ durch $\delta = \deg$ zu einem euklidischen Ring, da man eindeutig mit Rest teilen kann.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nach Satz 3.3 ist jeder euklidische Ring ein Hauptidealring, also auch $R[t]$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $x \in R \setminus \{0\}$. Das Ziel ist zu zeigen, dass $x \in R^\times$.

Betrachte das Ideal (x, t). Da $R[t]$ Hauptidealring ist folgt, dass ein $f \in R[t]$ existiert mit $(f) = (x, t)$. Also gibt es $p, q \in R[t]$ mit $x = p \cdot f$ und $t = q \cdot f$. Da $R[t]$ ein Hauptidealring ist, ist er auch nullteilerfrei, insbesondere auch R. Dadurch gilt wie in Aufgabe 4 auch $\deg(g \cdot h) = \deg(g) + \deg(h)$ für $g, h \in R[t]$.

Da $\deg(x) = 0$ muss auch $\deg(p) = \deg(f) = 0$. Aus $\deg(t) = 1$ und $\deg(f) = 0$ folgt $\deg(q) = 1$. Also gibt es $a, b, c \in R$ mit $f = a$ und $q = b + c \cdot t$. Zusammen also

$$\begin{aligned} t = f \cdot q = a \cdot b + a \cdot c \cdot t \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c = 1 \quad \Rightarrow \quad a \in R^\times \\ \Rightarrow (f) = (a) = (1) & \end{aligned}$$

Da also $(x) + (t) = (x, t) = (1)$ existieren $r, s \in R[t]$, so dass $rx + st = 1$. Da $\deg(st) = \deg(s) + 1 > 0$ folgt, dass $x \cdot r_0 = 1$ für r_0 der konstante Anteil von r. Also ist $x \in R^\times$ und damit $R^\times = R \setminus \{0\}$, also R ein Körper.

15. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Elementarteiler und Fittingideale)* Man bestimme mit dem Gauß-Verfahren die Elementarteiler der folgenden Matrizen und gebe ihre Fittingideale an:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 10 & 12 & 6 \\ 20 & 12 & 10 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Z})$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 2 \\ -1 & -t & 3 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}[t])$.

Lösung:

Um die Elementarteiler zu bestimmen, verwenden wir den Algorithmus aus der Vorlesung, um die Matrizen in die entsprechende Diagonalform zu bringen:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 10 & 12 & 6 \\ 20 & 12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{S1\leftrightarrow S3} \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 6 & 12 & 10 \\ 10 & 12 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1\leftrightarrow Z2} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 10 \\ 0 & 20 & 0 \\ 10 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3-Z1} \begin{pmatrix} 6 & 12 & 10 \\ 0 & 20 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1\leftrightarrow Z3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 20 & 0 \\ 6 & 12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z3-Z1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 20 & 0 \\ 2 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z1\leftrightarrow Z3} \begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z3-2Z1} \begin{pmatrix} 2 & 12 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & -24 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{S2-6S1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & -24 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z2\leftrightarrow Z3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 10 \\ 0 & 20 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S2\leftrightarrow S3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -24 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{S3+2S2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S2\leftrightarrow S3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & 20 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z3+5Z2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} \xrightarrow{S3+2S2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S2\leftrightarrow S3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 50 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{S3+2S2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 50 & 100 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z3-25Z2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Nun gilt also $A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$ und nach 3.16, 3.17 gilt:

$$\mathrm{Fit}_1(\mathrm{A}) = (2),\ \mathrm{Fit}_2(\mathrm{A}) = (4),\ \mathrm{Fit}_3(\mathrm{A}) = (400)$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 2 \\ -1 & -t & 3 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix} \xrightarrow{Z1\leftrightarrow Z2} \begin{pmatrix} -1 & -t & 3 \\ 1-t & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z2+(1-t)Z1} \begin{pmatrix} -1 & -t & 3 \\ 0 & t^2-t-1 & -3t+5 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix} \xrightarrow{S2-tS1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & t^2-t-1 & -3t+5 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S3+3S1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & t^2-t-1 & -3t+5 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix} \xrightarrow{Z2\leftrightarrow Z3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3-t \\ 0 & t^2-t-1 & -3t+5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3+(t^2-t-1)Z2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3-t \\ 0 & 0 & -t^3+4t^2-5t+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{S3+(3-t)S2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -t^3+4t^2-5t+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Alle Zeilen}\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^3-4t^2+5t-2 \end{pmatrix}$$

Die Fitting-Ideale von B sind also gegeben durch

$$\mathrm{Fit}_1(\mathrm{B}) = \mathrm{Fit}_2(\mathrm{B}) = (1),\ \mathrm{Fit}_3(\mathrm{B}) = (\mathrm{t}^3 - 4\mathrm{t}^2 + 5\mathrm{t} - 2)\,.$$
