Aufgabe 3

(a) Ein Ring ist genau dann reduziert, wenn das Nilradikal $\mathfrak{N} = 0$ ist. Wir fassen das Nilradikal $\mathfrak{N}$ als A-Modul auf. Dann gilt nach Satz 7.19

$$\mathfrak{N} = 0 \Leftrightarrow (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{N} = 0 \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A.$$

Nach Korollar 7.8 ist $(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{N}$ das Nilradikal von $A_\mathfrak{p}$. Insbesondere ist das Nilradikal von A genau dann 0, wenn das Nilradikal für alle $A_\mathfrak{p}$ 0 ist.

(b) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist nicht nullteilerfrei. Es ist $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(3) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ nullteilerfrei, also ist (3) ein Primideal. Analog ist auch $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nullteilerfrei, also ist (2) ein Primideal. Wegen $(4) = (2)$ und $(5) = (1)$ sind das die beiden Primideale von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Es ist

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}_{(2)} = \{1, 3, 5\}^{-1}\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

Würde eine gerade Zahl $2x$ im Zähler stehen, so wäre $3 \cdot 2x = 6x = 0$ und damit $\frac{2x}{s} = 0$. Da alle ungeraden Zahlen von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ bereits in $\{1, 3, 5\}$ enthalten sind, sind alle Elemente von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}_{(2)}$ außer 0 bereits Einheiten und insbesondere keine Nullteiler.

Völlig analog ist

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}_{(3)} = \{1, 2, 4, 5\}^{-1}\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

Würde eine durch 3 teilbare Zahl $3x$ im Zähler stehen, so wäre $2 \cdot 3x = 6x = 0$ und damit $\frac{3x}{s} = 0$. Da alle nicht durch drei teilbaren Zahlen von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ bereits in $\{1, 2, 4, 5\}$ enthalten sind, sind alle Elemente von $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}_{(3)}$ außer 0 bereits Einheiten und insbesondere keine Nullteiler.

Damit ist für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ der Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei, aber wegen $2 \cdot 3 = 0$ ist $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ nicht nullteilerfrei.

Aufgabe 4

(a) Jede offene Menge lässt sich nach Blatt 4, Aufgabe 4a als Vereinigung von Mengen der Form $D(f_i)$ schreiben. Ist also eine Überdeckung von $D(f)$ durch offene Mengen $(U_i)_{i \in I_0}$ gegeben, so gilt $U_i = \bigcup_{j \in J_i} D(f_j)$ und insgesamt

$$D(f) = \bigcup_{i \in I_0} \bigcup_{j \in J_i} D(f_j) = \bigcup_{j \in I := \bigcup_{i \in I_0} J_i} D(f_i).$$

Wir werden zeigen, dass eine endliche Teilmenge $J \subset I$ bereits ausreicht. Dann erhalten wir die ebenfalls endliche Menge $J_0 = \{i \in I_0 \colon \exists j \in J \colon j \in J_i\} \subset I_0$ und damit eine endliche Teilüberdeckung.

Wir müssen nur noch zeigen, dass für $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ eine endliche Teilmenge $J \subset I$ bereits genügt. Es gilt $V(f) = \bigcap_{i \in I} V(f_i) = V(\{f_i | i \in I\})$. Das bedeutet

$$\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \colon \quad f \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow f_i \in \mathfrak{p} \forall i.$$

Sei nun $\mathfrak{a}$ das von den f_i erzeugte Ideal. Dann ist $r(\mathfrak{a}) \in \operatorname{Spec} A$ und es gilt $\forall i \in I \colon f_i \in \mathfrak{p}$. Also folgt

$$f \in r(\mathfrak{a}) \implies \exists n \in \mathbb{N} \colon f^n \in \mathfrak{a} \implies f^n = \sum_{i \in J} g_i f_i$$

für $g_i \in A \forall i \in J$, wobei J eine endliche Teilmenge von I ist. Es gilt also

$$f \in \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \implies \{f_i | i \in J\} \in \mathfrak{p}$$

und

$$\{f_i | i \in J\} \in \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \implies f^n \operatorname{im} \mathfrak{p} = r(\mathfrak{p}) \implies f \in \mathfrak{p}.$$

Wir erhalten

$$V(f) = V(\{f_i | i \in J\}) = \bigcap_{i \in J} V(f_i)$$

und durch Bildung des Komplements

$$D(f) = \bigcup_{i \in J} D(f_i).$$

Da J endlich ist folgt daraus die Behauptung.

(b) Nach Blatt 4, Aufgabe 4a lässt sich jede offene Menge O von $\operatorname{Spec} A$ als Vereinigung von Mengen der Form $D(f)$ schreiben. Ist O quasikompakt, so besitzt diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung und O lässt sich als endliche Vereinigung von offenen Mengen der Form $D(f)$ schreiben.

Sei nun $O = \bigcup_{j=1}^n D(f_j)$ und sei $O = \bigcup i \in I U_i$ eine offene Überdeckung von O. Dann gilt

$$O = \bigcup_{j=1}^n D(f_j) = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i \in I} (D(f_j) \cap U_i)$$

Durch $\bigcup_{i \in I} (D(f_j) \cap U_i)$ ist eine Überdeckung für $D(f_j)$ gegeben. Diese besitzt nach Teilaufgabe a eine endliche Teilüberdeckung $D(f_j) = \bigcup_{i \in J_j} (D(f_j) \cap U_i)$. Es folgt

$$O = \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i \in J_j} (D(f_j) \cap U_i) \subset \bigcup_{i \in \bigcup_{j=1}^n J_j} U_i.$$

Da $\bigcup_{j=1}^n J_j$ als endliche Vereinigung endlicher Mengen wieder endlich ist, haben wir damit die gesuchte endliche Teilüberdeckung gefunden und O ist quasikompakt.