Aufgabe 51

(a) Offensichtlich ist $z^2 \cdot f(z)$ holomorph, sodass höchstens ein Pol 2-ter Ordnung vorliegt. Daher können wir Aufgabe 50 benutzen und erhalten $\mathrm{Res}_0(f) = \frac{1}{1} \lim\limits_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^2 f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^{z+1} - e^{2z+1} = \lim\limits_{z\to 0} e^{z+1} - 2e^{2z+1} = e - 2e = -e$.

(b) Die Taylorentwicklung von $\cos^2(\frac{z}{2})$ ist $\cos^2(\frac{z}{2}) = \frac{(x-\pi)^2}{4} - \frac{(x-\pi)^4}{48} + \mathcal{O}((x-\pi)^5)$. Daraus erhalten wir mit Polynomdivision

$$\frac{1}{\cos^2(\frac{z}{2})} = 4(x-\pi)^{-2} + \frac{1}{3} + \mathcal{O}((x-\pi)).$$

Also ist $\mathrm{Res}_\pi(g) = 0$.

Aufgabe 52

(a) Völlig analog zum Beweis des Satzes von der Gebietstreue betrachten wir nur die Stelle $z = f(z) = 0$ und schließen, dass es eine holomorphe Funktion $h(z)$ mit $f(z) = z^\nu h(z)^\nu$ und $h(0) \neq 0$ auf einer kleinen offenen Kreisscheibe D_ε um 0 gibt. Die Funktion $zh(z)$ bildet nach dem Satz von der Gebietstreue D_ε auf eine andere offene Kreisscheibe D_δ um 0 ab, die dann durch die ν-te Potenz auf eine dritte Kreisscheibe D' um 0 abgebildet wird. Wir wählen dann ein $\zeta \in \mathbb{C}$ so groß, dass $\frac{1}{|\zeta|} < \delta$ und $\frac{1}{\zeta^\nu} \in D$ liegt. Die Gleichung $z^\nu = \frac{1}{\zeta^\nu}$ besitzt dann die ν verschiedenen Lösungen $\frac{z_1}{\zeta}, \ldots, \frac{z_n}{\zeta}$, wobei z_i die i-te Einheitswurzel bezeichne. Alle diese Lösungen liegen wegen $\left|\frac{z_i}{\zeta}\right| = \frac{1}{|\zeta|} < \delta$ in D_δ. Da f injektiv ist, muss auch $zg(z)$ injektiv sein, sonst wäre $(zg(z))^\nu$ nicht injektiv. Also gibt es ν verschiedene Elemente $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu \in D_\varepsilon$ mit $f(\zeta_i) = \frac{1}{\zeta^\nu}$. Aus der Injektivität von f folgt aber, dass dann $\nu = 1$ sein muss und damit $a_1 \neq 0$ in der Laurent-Entwicklung von f. Die Ableitung an der Stelle 0 ist also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big|_{z=0} \sum_{n=1}^\infty a_n z^n = a_1 \neq 0$.

(b) Nach dem Satz über die Umkehrfunktion aus der reellen Analysis folgt, dass die Jacobimatrix von f^{-1} gegeben ist durch $(D_x f(x))^{-1}$. Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen existieren a, b, sodass $D_x f(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Daraus erhalten wir $D_x f^{-1}(x) = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Offensichtlich erfüllt also f^{-1} ebenfalls die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und ist daher auch holomorph.

(c) Nach Aufgabe 44 folgt sofort die Aussage.