Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I

7. Übungsblatt

Abgabe bis zum 5.12.19, 9:15 Uhr

Aufgabe 1 ($1 + 2 + 2 + 1$ Punkte)**.** Für einen Körper K betrachten wir den Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$. Wir definieren die Teilmenge

$$W = \{f \in V \mid f(n) + f(n+1) + f(n+2) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) W ist ein Untervektorraum von V.

(b) Sind $f, g \in W$ derart, dass $f(1) = g(1)$ und $f(2) = g(2)$ gelten, so ist $f = g$.

(c) W ist endlich erzeugt.

(d) Bestimmen Sie die Dimension von W.

Aufgabe 2 ($4 \cdot 1{,}5$ Punkte)**.** Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Vektoren $u = (0, 1, 2)$, $v = (2, 1, 0)$, $w = (1, 1, 1)$, $x = (1, 0, 0)$. Bestimmen Sie in jedem der folgenden Fälle, ob das gegebene System linear unabhängig ist. Bestimmen Sie ferner, ob es sich jeweils um ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis des $\mathbb{R}^3$ handelt.

(a) (u, v).

(b) (u, v, w).

(c) (u, v, x).

(d) (u, v, w, x).

Aufgabe 3 ($3 + 2 + 1$ Punkte)**.** Es seien U, V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K. Wir betrachten lineare Abbildungen $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$.

(a) Zeigen Sie: $\mathrm{Rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{Rg}(f), \mathrm{Rg}(g))$.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, in welchem die Ungleichung strikt ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, in welchem Gleichheit gilt.

Aufgabe 4 (2+4 Punkte)**.** Sei K ein Körper und U, V zwei K-Vektorräume. Sei ferner $f\colon U \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Ist $f^*\colon V^* \to U^*$ injektiv, so ist f surjektiv.

(b) f ist genau dann injektiv, wenn f^* surjektiv ist.