

# Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2020/21

Universität Heidelberg  
Mathematisches Institut  
Prof. Dr. A. Schmidt  
Dr. M. Leonhardt

Blatt 09

Abgabetermin: Freitag, 22.01.2021, 9:15 Uhr

---

**Aufgabe 1.** (*Galoisgruppe*) (6 Punkte) Es sei  $f = X^4 - 4X^2 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$ . Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper  $L$  von  $f$  über  $\mathbb{Q}$  sowie  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  und alle Zwischenkörper von  $L/\mathbb{Q}$ . (*Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für eine Nullstelle  $\alpha$  von  $f$  die Menge der Nullstellen von  $f$  gleich  $\{\pm\alpha, \pm 3/\alpha\}$  ist.*)

**Aufgabe 2.** (*Beispiele*) (6 Punkte, je 1 Punkt) Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Die Erweiterung  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})/\mathbb{Q}$  ist eine Galoiserweiterung.
- (b) Es sei  $f = X^4 + 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$  und  $L$  über  $\mathbb{Q}$  ein Zerfällungskörper von  $f$ . Dann ist  $[L : \mathbb{Q}]$  ein Teiler von 24.
- (c) Es sei  $L/\mathbb{Q}$  ein Zerfällungskörper des Polynoms  $X^3 - 2$ . Dann ist  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  zyklisch.
- (d) Es sei  $L/\mathbb{Q}$  ein Zerfällungskörper eines Polynoms von Grad 3. Dann hat  $L/\mathbb{Q}$  höchstens 4 echte Zwischenkörper.
- (e) Es sei  $K$  ein Körper mit  $\text{char}(K) \neq 2$  und  $f = X^4 - a \in K[X]$  irreduzibel sowie  $L/K$  ein Zerfällungskörper von  $f$ . Dann ist  $\text{Gal}(L/K)$  nicht zyklisch.
- (f) Es sei  $L/K$  eine Galoiserweiterung. Dann hat  $L/K$  höchstens  $2^{[L:K]}$  viele Zwischenkörper.

**Aufgabe 3.** (*Kreisteilungskörper*) (6 Punkte, je 3 Punkte) Es sei  $n \geq 3$  und  $L = \mathbb{Q}(\mu_n)$ .

- (a) Bestimmen Sie die von der komplexen Konjugation induzierte Permutation  $\pi$  von  $\mu_n$ . Wir wählen eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel  $\zeta_n \in \mathbb{C}$  und identifizieren  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  mit  $\mu_n$  via  $k \mapsto \zeta_n^k$ . Bestimmen Sie die von  $\pi$  induzierte Permutation von  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $[L : L \cap \mathbb{R}] = 2$  sowie  $L \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$ .

**Aufgabe 4.** (*Funktionenkörper*) (6 Punkte; je 2 Punkte) Es sei  $K$  ein Körper und  $L = K(Y)$  der Funktionenkörper in der Variablen  $Y$ .

- (a) Zeigen Sie, dass es für jedes  $a \in K$  ein eindeutiges  $\sigma_a \in \text{Aut}_K(L)$  gibt mit  $\sigma_a(Y) = Y + a$ .
- (b) Es sei  $G := \{\sigma_a \mid a \in K\}$ . Zeigen Sie, dass  $G$  eine Untergruppe von  $\text{Aut}_K(L)$  ist, die isomorph zu  $(K, +)$  ist. Falls  $K$  unendlich ist, zeigen Sie weiter  $L^G = K$ .
- (c) Nun sei  $\text{char}(K) = p > 0$  und  $H := \{\sigma_a \mid a \in \mathbb{F}_p\} \subset G$ . Zeigen Sie, dass  $L^H = K(Z)$  mit  $Z = Y^p - Y$ .