Übungsblatt 5

Abgabetermin: 24.05.2017, 17:00 Uhr.

Auf dem gesamten Übungsblatt seien n, m zwei natürliche Zahlen.

Aufgabe 1 *(1+1 = 2 Punkte)*

a) Definiert die Bilinearform $(A, B) \mapsto \mathrm{sp}(A \cdot B)$ ein Skalarprodukt auf $M(n \times n, \mathbb{R})$? (Sie müssen die Bilinearität hier nicht nachprüfen.)

b) Definiert die Bilinearform $(A, B) \mapsto \mathrm{sp}(A^t \cdot B)$ (von Blatt 3, Aufgabe 3.b) ein Skalarprodukt auf $M(n \times m, \mathbb{R})$?

Aufgabe 2 *(2+2 = 4 Punkte)*

Sei $V = \mathbb{R}[X]^{\leq 2}$ der reelle Vektorraum aller Polynome von Grad höchstens 2 und setze $\langle f, g\rangle = \sum_{j=0}^{2} f(j)g(j)$ für $f, g \in V$.

a) Zeigen Sie, dass $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum ist.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Aufgabe 3 *(8 Punkte)*

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Sie dürfen im Folgenden ohne Beweis benutzen, dass ein $Q \in O(n)$ existiert so dass QAQ^{-1} eine Diagonalmatrix ist (dies wird im weiteren Verlauf der Vorlesung bewiesen werden). Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

i) A ist positiv definit, d.h. $x^t \cdot A \cdot x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

ii) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

iii) Für jedes $m \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\det(A[m])$ positiv, wobei $A[m] = (A_{i,j})_{0\leq i,j\leq m} \in M(m \times m, \mathbb{R})$ die Matrix bezeichnet, welche sich aus A durch Streichung der letzten $n - m$ Zeilen und $n - m$ Spalten ergibt.

iv) Es existiert eine eindeutig bestimmte obere Dreiecksmatrix $P \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit positiven Diagonaleinträgen so dass $A = P^t P$ gilt.

(Anleitung: Zeigen Sie zunächst *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* und *iv)* $\Rightarrow$ *i)* durch direkten Beweis. Zeigen Sie dann *i)* $\Leftrightarrow$ *iii)* und *i)* $\Rightarrow$ *iv)* durch vollständige Induktion, wobei Sie zunächst die Eindeutigkeitsaussage in *iv)* ignorieren. Benutzen Sie in einem letzten Schritt (ohne Beweis) die Aussage, dass die Menge der invertierbaren oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bildet, um die Eindeutigkeit von P zu zeigen.)

Bitte wenden

Aufgabe 4 *(1+1+2 = 4 Punkte)*

Sei $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Gilt $|\det(A)| = 1$, so ist A orthogonal.

b) Ist A orthogonal, so gilt $|\det(A)| = 1$.

c) Ist A orthogonal, so existiert ein Eigenwert λ von A mit $|\lambda| = 1$.