Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 4

Besprechung in den Übungsgruppen am 11. November 2019

1. Hausaufgabe: Skalar- und Vektorprodukt

Zeigen Sie die folgenden Relationen unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention sowie der Levi-Civita- und Kronecker-Symbole.

a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *

2. Hausaufgabe: Vektorraum der Polynome

Betrachten Sie den Vektorraum der Polynome vom Grad N (d.h. die Polynome dürfen höchstens Terme der Ordnung x^N enthalten) auf dem Intervall $[-1, 1]$. Das Skalarprodukt der Polynome $p(x)$ und $q(x)$ sei durch

$$\langle p(x), q(x) \rangle \equiv \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, p(x)\, q(x)$$

definiert. Gegeben seien außerdem die drei Polynome

$$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x, \quad \text{und} \quad p_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right).$$

Dies sind die ersten drei *Legendre-Polynome*, die unter anderem in Bereichen der Elektrodynamik und der Quantenmechanik als Basis verwendet werden.

a) Welchen Vektorraum V spannen die Polynome p_0 bis p_2 auf? Beweisen Sie ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass diese drei Polynome eine Basis von V sind.

c) Ist diese Basis orthogonal? Ist sie orthonormal?

3. Hausaufgabe: Elektron im Magnetfeld

Auf ein Teilchen mit der Ladung q und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ wirkt im elektrischen Feld $\vec{E}$ und magnetischen Feld $\vec{B}$ die *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right),$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Betrachten Sie nun eine Ladung in einem verschwindenden elektrischen Feld und dem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B_z)^\top$.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Geschwindigkeiten des Teilchens in x-,y- und z-Richtung auf. Führen Sie dabei die Frequenz $\omega \equiv qB_z/(mc)$ ein.

b) Lösen Sie zunächst die Differentialgleichung für $v_z(t)$ für die Anfangsbedingung $v_z(t = 0) = v_{z0}$.

---

* *Hinweis:* Bitte beachten Sie, dass das Vektorprodukt nicht assoziativ ist, sodass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ gilt!

c) Entkoppeln Sie die Differentialgleichungen für v_x und v_y, indem Sie beide Gleichungen ein weiteres Mal nach der Zeit ableiten und die ursprünglichen Differentialgleichungen in die Ergebnisse einsetzen.

d) Lösen Sie die resultierenden Differentialgleichungen für die Anfangsgeschwindigkeiten $v_x(t = 0) = v_{x0}$ und $v_y(t = 0) = 0$. Verwenden Sie außerdem, dass die Differentialgleichungen aus a) einen Zusammenhang zwischen v_x und v_y fordern, der *für alle Zeiten* gelten muss.

e) Bestimmen Sie die Trajektorie des Elektrons für die Anfangsbedingungen $y(t = 0) = v_{x0}/\omega$ und $x(t = 0) = z(t = 0) = 0$. Skizzieren Sie diese.

f) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Teilchens. Ist diese erhalten?

g) Bestimmen Sie den Drehimpuls des Teilchens im Bezug auf die z-Achse†. Ist dieser erhalten?

4. ***Präsenzaufgabe:*** **Gravitationspotential zweier Teilchen**

Ein Teilchen der Masse M erzeugt in seiner Umgebung das Gravitationspotential

$$\Phi = -\frac{GM}{r},$$

wobei G die Gravitationskonstante und r der Abstand zum Teilchen ist. Das Gravitationspotential ist definiert als $\Phi \equiv E_{\text{pot}}/m$, wobei E_{pot} die potentielle Energie und m die Masse eines Testteilchens ist. Der Vorteil des Potentials gegenüber der potentiellen Energie ist, dass es unabhängig von den Eigenschaften der Testteilchens ist.

Betrachten Sie nun zwei Teilchen der Masse M, die auf der x-Achse eines Koordinatensystems liegen und den Abstand $+d/2$ und $-d/2$ vom Ursprung haben. Welches Gravitationspotential erwarten Sie an einem Punkt auf der x-Achse mit dem Abstand $a > d/2$ vom Ursprung? Ab welcher Distanz kann das Potential beider Teilchen durch das einer Punktmasse angenähert werden, wenn man einen relativen Fehler von einem Prozent in Kauf nimmt?

5. Verständnisfragen

a) Nennen Sie die wesentlichen Unterschiede zwischen einem Skalar- und dem Vektorprodukt.

b) Beschreiben Sie die Kronecker- und Levi-Civita-Symbole und erklären Sie, wozu sie gut sind.

c) Erklären Sie den Begriff der Umkehrpunkte einer gebundenen Bewegung.

---

†*Hinweis:* Der Drehimpuls in Bezug auf eine Achse ist definiert als der Drehimpuls bezüglich des nächstgelegenen Punktes auf dieser Achse; bewegt sich das Teilchen entlang der Achse, verschiebt sich dieser Punkt.

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 4: Lösungen

1. Hausaufgabe: Skalar- und Vektorprodukt

a) Für den Beweis können die Vektoren zunächst in einer orthonormalen Basis $\{\vec{e}_i\}$ dargestellt werden, von da an geht es (kleinschrittig) weiter,

$$\begin{aligned}
&(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) \\
&= \langle a_i\,\vec{e}_i \times b_j\,\vec{e}_j, c_l\,\vec{e}_l \times d_m\,\vec{e}_m\rangle && \text{Darstellung der Vektoren in der Basis}\\
&= a_i\,b_j\,c_l\,d_m\,\langle \vec{e}_i\times\vec{e}_j, \vec{e}_l\times\vec{e}_m\rangle && \text{Bilinearität des Skalar- und Vektorprodukts}\\
&= a_i\,b_j\,c_l\,d_m\,\langle \varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_k, \varepsilon_{lmn}\,\vec{e}_n\rangle && \text{Definition des Vektorprodukts}\\
&= a_i\,b_j\,c_l\,d_m\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,\langle \vec{e}_k, \vec{e}_n\rangle && \text{Bilinearität des Skalarprodukts}\\
&= a_i\,b_j\,c_l\,d_m\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn}\,\delta_{kn} && \text{Skalarprodukt in orthonormaler Basis}\\
&= a_i\,b_j\,c_l\,d_m\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm} && \text{Kronecker-Symbol und zyklisches Vertauschen}\\
&= a_i\,b_j\,c_l\,d_m\left(\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}\right) && \text{Def. des Produkts zweier Levi-Civita-Symbole}\\
&= a_i\,b_j\,c_l\,d_m\left(\langle\vec{e}_i,\vec{e}_l\rangle\,\langle\vec{e}_j,\vec{e}_m\rangle - \langle\vec{e}_i,\vec{e}_m\rangle\,\langle\vec{e}_j,\vec{e}_l\rangle\right)\\
&= \langle a_i\,\vec{e}_i, c_l\,\vec{e}_l\rangle\,\langle b_j\,\vec{e}_j, d_m\,\vec{e}_m\rangle - \langle a_i\,\vec{e}_i, d_m\,\vec{e}_m\rangle\,\langle b_j\,\vec{e}_j, c_l\,\vec{e}_l\rangle\\
&= (\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})\,(\vec{b}\cdot\vec{c}).
\end{aligned}$$

b) Die Lösung erfolgt analog zur a), nur mit etwas weniger Zwischenschritten,

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= a_i\,b_j\,c_k\left[\vec{e}_i\times(\vec{e}_j\times\vec{e}_k)\right] = a_i\,b_j\,c_k\,\varepsilon_{jkl}\,(\vec{e}_i\times\vec{e}_l) = a_i\,b_j\,c_k\,\varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{ilm}\,\vec{e}_m\\
&= a_i\,b_j\,c_k\,\varepsilon_{jkl}\,\varepsilon_{lmi}\,\vec{e}_m = a_i\,b_j\,c_k\left(\delta_{jm}\,\delta_{ki} - \delta_{ji}\,\delta_{km}\right)\vec{e}_m\\
&= b_j\,\vec{e}_j\,\langle a_i\,\vec{e}_i, c_k\,\vec{e}_k\rangle - c_k\,\vec{e}_k\,\langle a_i\,\vec{e}_i, b_j\,\vec{e}_j\rangle = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}).
\end{aligned}$$

2. Hausaufgabe: Vektorraum der Polynome

a) Die drei Vektoren spannen den Vektorraum der Polynome vom Grad 2 auf. Um dies zu zeigen, muss man beweisen, dass jedes Polynom von Grad 2 durch eine Linearkombination der drei Polynome dargestellt werden kann. Ein allgemeines Polynom von Grad 2 hat die Form

$$P(x) = A + Bx + Cx^2.$$

Die Linearkombination der Polynome p_0 bis p_2 ergibt

$$P'(x) = a + bx + \frac{c}{2}\left(3x^2 - 1\right).$$

Für $C = 3c/2$, $B = b$ und $A = a - c/2$ kann $P(x)$ durch die Linearkombination $P'(x)$ dargestellt werden.

b) Die drei Polynome bilden eine Basis des Vektorraums, wenn sie diesen aufspannen und linear unabhängig sind. Ersteres wurde bereits in a) gezeigt. Die Polynome sind linear unabhängig, wenn die Linearkombination $P'(x)$ für alle Werte x genau dann verschwindet, wenn alle Koeffizienten a bis c verschwinden,

$$P'(x) = a + bx + \frac{c}{2}\left(3x^2 - 1\right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies ist der Fall, wenn

$$a - \frac{c}{2} = 0, \qquad b = 0 \quad \text{und} \quad \frac{3c}{2} = 0$$

gilt. Daraus folgt trivialerweise, dass $a = b = c = 0$ sein muss. Somit sind die Polynome linear unabhängig und eine Basis des dreidimensionalen Vektorraums V.

c) Die Basis ist orthogonal, wenn das Skalarprodukt zweier unterschiedlicher Polynome identisch verschwindet,

$$\langle p_0, p_1\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, x = 0 \qquad \text{antisym. Funktion integriert über sym. Intervall,}$$

$$\langle p_1, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \frac{1}{2}\left(3x^3 - x\right) = 0 \qquad \text{antisym. Funktion integriert über sym. Intervall,}$$

$$\langle p_0, p_2\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left(x^3 - x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1 - 1 + 1 - 1) = 0.$$

Die Basis ist somit orthogonal.

Eine Basis ist orthonormal, wenn sie orthogonal ist und das Skalarprodukt jedes Basisvektors mit sich selbst genau eins ist. Für den Basisvektor p_0 ergibt sich

$$\langle p_0, p_0\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2.$$

Die Basis ist also nicht orthonormal.

3. Hausaufgabe: Elektron im Magnetfeld

a) Für die gegebenen $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder ergibt sich die Kraft

$$\vec{F} = \frac{q}{c}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{qB_z}{c}\begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit $\vec{F} = m\vec{a}$ ergibt sich die Gleichung

$$\frac{qB_z}{c}\begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix}$$

und somit die drei Differentialgleichungen

$$\dot{v}_x = \frac{qB_z}{mc} v_y = \omega v_y, \qquad \dot{v}_y = -\frac{qB_z}{mc} v_x = -\omega v_x \quad \text{und} \quad \dot{v}_z = 0, \tag{I}$$

wobei $\omega \equiv qB_z/(mc)$ eingeführt wurde.

b) Die Differenzialgleichung $\dot{v}_z = 0$ kann direkt integriert werden. Für die Anfangsbedingung $v_z(t = 0) = v_{z0}$ ergibt sich

$$v_z(t) = v_{z0}.$$

c) Einmaliges Ableiten der verbleibenden zwei und Einsetzen der ursprünglichen Differentialgleichungen führt zu

$$\ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x, \qquad \text{und} \qquad \ddot{v}_y = -\omega \dot{v}_x = -\omega^2 v_y.$$

Damit sind die beiden Differentialgleichungen entkoppelt.

d) Die beiden Differentialgleichungen können analog zur Aufgabe 1 auf dem 3. Übungsblatt gelöst werden. Mit dem integrierenden Faktor $2\dot{v}_x$ ergibt sich

$$2\dot{v}_x \ddot{v}_x = -\omega^2 \cdot 2\dot{v}_x v_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{v}_x^2 = -\omega^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{v}_x}{v_x} = \pm \mathrm{i}\omega$$
$$\Rightarrow \quad v_x(t) = \exp\left(\pm \mathrm{i}\omega t\right).$$

Die allgemeine Lösung ist dann

$$v_x(t) = A' \exp\left(\mathrm{i}\omega t\right) + B' \exp\left(-\mathrm{i}\omega t\right),$$

was äquivalent ist zu

$$v_x(t) = A \cos\left(\omega t\right) + B \sin\left(\omega t\right).$$

Für v_y erhält man analog

$$v_y(t) = C \cos\left(\omega t\right) + D \sin\left(\omega t\right).$$

Jetzt müssen noch die Konstanten bestimmt werden. Die Anfangsbedingungen $v_x(t=0) = v_{x0}$ und $v_y(t=0) = 0$ liefern

$$A = v_{x0} \qquad \text{und} \qquad C = 0.$$

Die anderen beiden Konstanten müssen mit Hilfe der ursprünglichen Differentialgleichungen (I) bestimmt werden, denn beim Ableiten dieser Gleichungen sind Informationen verloren gegangen, die man sich nun wiederholen muss. Man erhält

$$\dot{v}_y = D\omega \cos\left(\omega t\right) \stackrel{!}{=} -\omega v_x = -\omega \left[v_{x0} \cos\left(\omega t\right) + B \sin\left(\omega t\right)\right].$$

Da diese Gleichung für alle Zeiten gelten muss, muss $D = -v_{x0}$ und $B = 0$ sein. Dieses Ergebnis ist ebenfalls konsistent mit der zweiten Gleichung $\dot{v}_x = -\omega v_y$. Insgesamt erhält man also

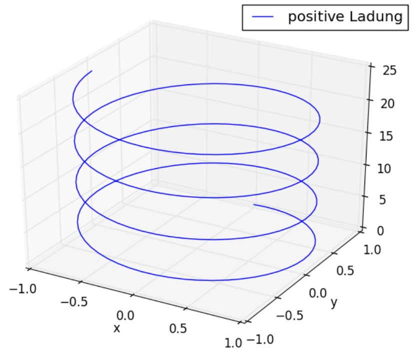
$$v_x(t) = v_{x0} \cos\left(\omega t\right), \qquad v_y(t) = -v_{x0} \sin\left(\omega t\right) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{qB_z}{mc}.$$

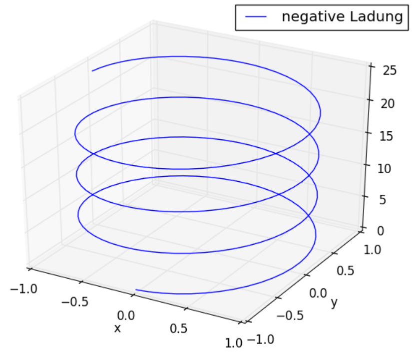
e) Die Trajektorie erhält man durch eine weitere Integration der Geschwindigkeiten aus b) und d),

$$x(t) = \frac{v_{x0}}{\omega} \sin\left(\omega t\right) + C', \qquad y(t) = \frac{v_{x0}}{\omega} \cos\left(\omega t\right) + C'', \quad \text{und} \quad z(t) = v_{z0}\, t + C'''.$$

Mit den Anfangsbedingungen $y(t=0) = v_{x0}/\omega$, $x(t=0) = 0$ und $z(t=0) = 0$ ergibt sich $C' = C'' = C''' = 0$ und somit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{v_{x0}}{\omega} \sin\left(\omega t\right) \\ \frac{v_{x0}}{\omega} \cos\left(\omega t\right) \\ v_{z0}\, t \end{pmatrix}.$$





f) Die kinetische Energie des Teilchens ist

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2}m\left\{v_{z0}^2 + v_{x0}^2\left[\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right]\right\} = \frac{1}{2}m\left(v_{z0}^2 + v_{x0}^2\right).$$

Da die Energie nicht von der Zeit abhängt, ist diese erhalten.

g) Der Punkt auf der Achse, der dem Teilchen am nächsten ist, ist gerade

$$\vec{x}_{\text{Achse}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{z0}\, t \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Drehimpuls bzgl. der z-Achse also

$$\vec{L} = (\vec{x} - \vec{x}_{\text{Achse}}) \times m\vec{v} = m \begin{pmatrix} \frac{v_{x0}}{\omega}\sin(\omega t) \\ \frac{v_{x0}}{\omega}\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{x0}\cos(\omega t) \\ -v_{x0}\sin(\omega t) \\ v_{z0} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{v_{x0}v_{z0}}{\omega}\cos(\omega t) \\ -\frac{v_{x0}v_{z0}}{\omega}\sin(\omega t) \\ \frac{-v_{x0}^2}{\omega} \end{pmatrix}.$$

Die Drehimpulskomponente in z-Richtung ist somit erhalten, die in x- und y-Richtung jedoch nicht. Der Betrag des Drehimpulses ist

$$\begin{aligned}\left|\vec{L}\right| &= \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = m\sqrt{\left(\frac{v_{x0}v_{z0}}{\omega}\right)^2 \cos^2(\omega t) + \left(-\frac{v_{x0}v_{z0}}{\omega}\right)^2 \sin^2(\omega t) + \left(\frac{v_{x0}^2}{\omega}\right)^2} \\ &= \frac{m v_{x0}}{\omega}\sqrt{v_{x0}^2 + v_{z0}^2}\end{aligned}$$

und somit ebenfalls erhalten.

4. ***Präsenzaufgabe:*** **Gravitationspotential zweier Teilchen**

Das Potential beider Teilchen ist die Überlagerung der Einzelteilchen-Potentiale,

$$\Phi_{\text{ges}}(a) = -\frac{GM}{a - d/2} - \frac{GM}{a + d/2} = -4GM\frac{a + d/2 + a - d/2}{4a^2 - d^2} = -\frac{8GM}{a\left[4 - (d/a)^2\right]}.$$

Die Taylor-Expansion erfolgt um $x = (d/a)^2 = 0$. Somit gilt

$$\Phi_{\text{ges}}(x) = -\frac{8GM}{a\,(4 - x)}.$$

Die erste Ableitung von $\Phi_{\text{ges}}(x)$ lautet

$$\Phi'_{\text{ges}}(x) = -\frac{8GM}{a\,(4-x)^2}.$$

Die Taylor-Näherung um $x = 0$ bis zur ersten Ordnung ist demnach gegeben durch

$$\Phi_{\text{ges}} \approx -\frac{2GM}{a} - \frac{GM}{2a}\,x.$$

Der nullte Term ist das Potential eines Teilchens doppelter Masse.

Um den Fehler abzuschätzen, gibt es wieder verschiedene Möglichkeiten: Die unsaubere Methode vergleicht den Term 1. Ordnung mit dem Term 0. Ordnung,

$$\frac{\text{1. Ordnung}}{\text{0. Ordnung}} = \frac{GMx}{2a}\,\frac{a}{2GM} = \frac{x}{4} = \frac{d^2}{4a^2}.$$

Ein ein-prozentiger Fehler tritt bei

$$\frac{d^2}{4a^2} \overset{!}{=} 0{,}01 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{a} = 0{,}2$$

auf. Mathematisch sauber ist die Berechnung des Restglieds, was in diesem Fall auch recht schnell geht,

$$R_1(x) = \int_0^x \mathrm{d}t\,\Phi'_{\text{ges}}(t) = \Phi_{\text{ges}}(x) - \Phi_{\text{ges}}(0) = -\frac{8GM}{a\,(4-x)} + \frac{2GM}{a} = \frac{2GM}{a}\left(1 - \frac{4}{4-x}\right).$$

Mit der Forderung, dass der relative Fehler bei der nullten Näherung unter einem Prozent liegen soll, erhält man

$$\frac{R_1(x)}{\text{0. Ordnung}} = \frac{4}{4-x} - 1 \overset{!}{=} 0{,}01 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{4}{101} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{a} = \frac{2}{\sqrt{101}} \approx 0{,}2.$$

Dieses Ergebnis ist fast identisch mit dem der unsauberen Rechnung. Somit ergibt die Ein-Teilchen-Näherung einen Fehler von einem Prozent oder weniger, sobald man das Potential aus einer Entfernung betrachtet, die fünf mal größer als der Abstand d zwischen den Teilchen ist.

5. Verständnisfragen

a) Das Skalarprodukt bildet zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf den zugrunde liegenden Körper ab, während das Vektorprodukt zwei Vektoren auf einen anderen Vektor abbildet. Das Skalarprodukt ist kommutativ, das Vektorprodukt ist anti-kommutativ, denn $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$. Das Skalarprodukt zweier orthogonaler Vektoren verschwindet, das entsprechende Vektorprodukt tut es nicht, sondern es ergibt einen neuen Vektor, welcher orthogonal zu den beiden anderen ist. Das Skalarprodukt eines Einheitsvektors mit sich selbst ergibt eins, das entsprechende Vektorprodukt ergibt null. Außerdem gilt im $\mathbb{R}^3$, dass $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$ und $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$ ist, wobei $\varphi \in [0, \pi/2]$ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

b) Das Kronecker-Symbol δ_{ij} ist eins, wenn $i = j$ ist und null, wenn $i \neq j$ ist. Das Levi-Civita-Symbol ε_{ijk} ist eins für alle gerade Permutationen von $\{1, 2, 3\}$ und minus eins für alle ungeraden Permutationen von $\{1, 2, 3\}$. Sind mindestens zwei Indizes gleich, so ist es null. Die beiden Symbole vereinfachen die Schreibweise mit Indizes. So lässt sich z.B. die Orthonormalität zweier Basisvektoren $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$ als $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}$ schreiben und die Definition des Vektorprodukts als $\vec{a}\times\vec{b} = \varepsilon_{ijk}\,a_i b_j\,\vec{e}_k$, wobei im letzten Fall zusätzlich die Einstein'sche Summenkonvention gebraucht wurde, nach der über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

c) Umkehrpunkte x_1 und x_2 begrenzen die Bewegung einer Punktmasse. Bei x_1 und x_2 ist die Energie der Punktmasse vollkommen potentieller Natur; seine kinetische Energie ist null. Für Punkte $x_1 < x < x_2$ ist Bewegung in beide Richtungen möglich, und es tritt eine (möglicherweise nicht harmonische) Schwingung zwischen den Umkehrpunkten auf.