

# Theoretische Physik III für Lehramtsstudenten: Elektrodynamik und Quantenmechanik

Matthias Bartelmann<sup>1</sup> und Jörg Jäckel<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut für Theoretische Astrophysik

<sup>2</sup> Institut für Theoretische Physik

Universität Heidelberg



UNIVERSITÄT  
HEIDELBERG  
ZUKUNFT  
SEIT 1386

Dieses Vorlesungsskript baut wesentlich auf den Skripten auf, die von apl.-Prof. Sandra Klevansky und Dr. Eduard Thommes entwickelt und verwendet wurden. Herzlichen Dank an beide dafür! Bisher enthält das Skript nur den Teil über Elektrodynamik.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Maxwell'schen Gleichungen</b>	<b>1</b>
1.1	Vorbemerkungen . . . . .	1
1.2	Grundbegriffe . . . . .	2
1.3	Die Maxwell'schen Gleichungen . . . . .	5
1.4	Materialkonstanten . . . . .	9
1.5	Übergang zum Gauß'schen Einheitensystem . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>13</b>
2.1	Das Coulombsche Gesetz . . . . .	13
2.2	Das elektrostatische Potential . . . . .	14
2.3	Potential der Punktladung . . . . .	15
2.4	Potential und Feld eines Dipols . . . . .	17
2.5	Eindeutigkeit des Potentials . . . . .	18
2.6	Beispiele für Potentiale und Felder . . . . .	20
2.7	Ladung im äußeren Feld . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Dielektrika</b>	<b>25</b>
3.1	Makroskopische Mittelung . . . . .	25
3.2	Grenzbedingungen . . . . .	27
3.3	Kugel im Dielektrikum . . . . .	28
3.4	Molekulare Polarisierbarkeit . . . . .	32
3.5	Molekulare Polarisierbarkeit . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>35</b>

4.1	Das Vektorpotential . . . . .	35
4.2	Geladene, rotierende Kugel . . . . .	36
4.3	Das Biot-Savartsche Gesetz . . . . .	39
4.4	Das magnetische Moment . . . . .	41
4.5	Magnetisierungsstrom und Magnetisierung . . . . .	43
4.6	Grenzbedingungen für $\vec{B}$ und $\vec{H}$ . . . . .	45
4.7	Homogen magnetisierte Kugel . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Elektromagnetische Wellen</b>	<b>49</b>
5.1	Eichinvarianz . . . . .	49
5.2	Wellen im Vakuum . . . . .	50
5.3	Ebene Wellen . . . . .	51
5.4	Monochromatische ebene Wellen . . . . .	53
5.5	Polarisation ebener Wellen . . . . .	55
5.6	Wellen in homogenen, linearen Medien . . . . .	56
5.7	Brechung und Reflexion . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Spezielle Relativitätstheorie</b>	<b>61</b>
6.1	Lorentz-Transformation . . . . .	61
6.2	Eigenschaften der Minkowski-Welt . . . . .	64
6.3	Vierergeschwindigkeit und Lorentzkraft . . . . .	65
6.4	Bewegung in homogenen Feldern . . . . .	67
6.5	Bewegung in kombinierten Feldern . . . . .	70

# Kapitel 1

## Die Maxwellschen Gleichungen

### 1.1 Vorbemerkungen

- Die Elektrodynamik beschreibt elektrische und magnetische Kräfte auf Ladungen und Magnetpole. Diese Kräfte werden als Wirkungen eines Feldes aufgefasst, des elektromagnetischen Feldes. Die spezielle Relativitätstheorie zeigt, dass elektrische und magnetische Felder in gewissen Grenzen ineinander umgewandelt werden können: Was dem einen Beobachter als elektrisches Feld erscheint, kann einem anderen als magnetisches Feld erscheinen und umgekehrt. Die Vereinigung von elektrischem und magnetischem Feld tritt erst ganz zu Tage, wenn die Elektrodynamik relativistisch formuliert wird.
- Felder sind z.B. skalare oder vektorielle Funktionen des Raums. Sie können sich ausbreiten und haben damit eine eigene Dynamik, die von Feldgleichungen beschrieben wird. Damit wird die Fernwirkungstheorie der Newtonschen Mechanik aufgegeben. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Feldes stellt sich als endlich heraus.
- Während die klassische Mechanik vier Entitäten unterscheidet, nämlich Körper, Kräfte, Raum und Zeit, und diese als getrennt voneinander auffasst, verbindet die Feldtheorie Kräfte und Raum. Da die spezielle Relativitätstheorie Raum und Zeit verknüpft, entsteht eine enge Verbindung zwischen Feldern und der Raum-Zeit-Struktur, die bedeutet, dass Feldtheorie letztendlich notwendigerweise relativistisch formuliert werden muss.
- Zur relativistischen Formulierung der Elektrodynamik werden wir in dieser Vorlesung zwar nicht kommen, aber wir werden die Elektrodynamik so formulieren, dass elektrische und magnetische Felder dieselben Einheiten bekommen. Damit soll betont werden, dass sie letztlich Komponenten eines einzigen Feldes sind.

- Physikalische Theorie beruht auf Axiomen, die den begrifflichen Rahmen der Theorie setzen. So wie die Newtonschen Axiome den Rahmen der klassischen Mechanik festlegen, können die Maxwellschen Gleichungen als Axiome der Elektrodynamik aufgefasst werden. Sie entspringen aus der Verallgemeinerung von Erfahrung und sind daher wie alle Axiome idealisiert. Wir stellen in dieser Vorlesung die Maxwellschen Gleichungen an den Anfang, allerdings zunächst in integraler Form, woraus sich ihr physikalischer Gehalt klarer ergibt.
- Jede physikalische Theorie gewinnt ihren Sinn erst aus der Semantik ihrer Begriffe, nicht aus den Gleichungen. Wir beginnen daher damit, Begriffe der Elektrodynamik einzuführen, bevor wir mathematische Beziehungen zwischen ihnen betrachten.

## 1.2 Grundbegriffe

- Grundlegend ist der Begriff der Ladung als empirisch gegebene Eigenschaft der Materie, die in vieler Beziehung noch fundamentaler als die Masse ist. Die Ladung des Elektrons etwa könnte als fundamentale Einheit aufgefasst werden. Stattdessen führt man zunächst eine Ladungseinheit neu ein, das Coulomb (C), in dessen Einheit die Elektronenladung

$$e = -1,60 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.1)$$

ist.

- Ein elektrisches Feld wirkt auf eine Testladung so, dass die ausgeübte Kraft pro Ladung als elektrische Feldstärke eingeführt werden kann,

$$\text{elektrische Feldstärke } \vec{E} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}. \quad (1.2)$$

- Die Einheit der Kraft ist das Newton im mks-System. Da wir später aus guten Gründen das Gaußsche cgs-System (cm, g, s) einführen werden, sei hier an die Umrechnung vom mks- in das cgs-System erinnert:

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = 10^5 \text{ dyn} \quad (1.3)$$

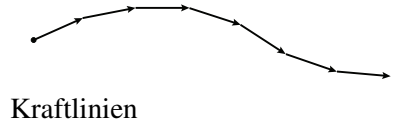
- Ebenso gilt für die Einheiten der Energie und der Leistung

$$\begin{aligned} 1 \text{ J} &= 1 \text{ Nm} = 10^5 \text{ dyn} \cdot 10^2 \text{ cm} = 10^7 \text{ erg} \\ 1 \text{ W} &= 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

- Wir werden später sehen, wie sich die Einheit der Ladung im cgs-System ausdrücken lässt. Die Einheit der Feldstärke ist offenbar zunächst

$$[\vec{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}}. \quad (1.5)$$

- Kraftlinien entstehen, indem man an jedem Punkt im Raum der Richtung des Feldes folgt. Oft ist es nützlich, das Feld als Bündel von Kraft- oder Feldlinien aufzufassen, auch wenn sie nicht „zählbar“ sind.



Kraftlinien

- *Spannung* wird durch

$$U := - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.6)$$

definiert, also als Integral über die Feldstärke längs eines Weges zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$ . Die Einheit der Spannung ist offenbar

$$[U] = \frac{\text{Nm}}{\text{C}} =: \text{V} \quad (\text{Volt}). \quad (1.7)$$

Das bedeutet, dass die Einheit der elektrischen Feldstärke auch als

$$[\vec{E}] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (1.8)$$

dargestellt werden kann. Wenn die Spannung unabhängig vom Weg zwischen  $A$  und  $B$  wird, nennt man sie auch *Potentialdifferenz*.

- Von der Feldstärke  $\vec{E}$  verschieden ist die Wirkung des Feldes  $\vec{E}$  auf Medien, womit auch ein Vakuum gemeint sein kann. Diese Wirkung wird (eher aus historischen Gründen) als *dielektrische Verschiebung*  $\vec{D}$  bezeichnet.
- Die dielektrische Verschiebung wird so definiert, dass eine punktförmige Ladung  $q$  vermittelt ihres Feldes  $\vec{E}$  einen Fluss von  $\vec{D}$  hervorruft. Dieser Fluss von  $\vec{D}$  wird der Ladung  $q$  gleichgesetzt,

$$q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}, \quad (1.9)$$

wobei  $d\vec{A}$  ein längs der äußeren Flächennormalen der Fläche  $A$  gerichtetes Flächenelement ist.

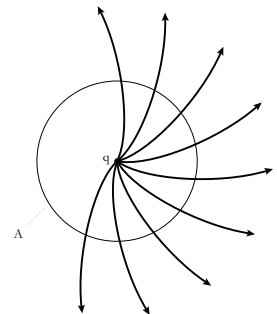
- Wenn  $A$  die Oberfläche einer auf  $q$  zentrierten Kugel vom Radius  $r$  ist, folgt offenbar aus Symmetriegründen

$$q = 4\pi r^2 |\vec{D}|. \quad (1.10)$$

- Die dielektrische Verschiebung muss daher die Einheit

$$[\vec{D}] = \frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \quad (1.11)$$

bekommen; das ist *nicht* dieselbe Einheit wie die von  $\vec{E}$ !

Fluss einer Ladung  $q$  durch eine Fläche  $A$

- Ladungen, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche strömen, definieren die *Stromdichte*  $\vec{j}$ , deren Richtung die Strömungsrichtung angibt. Offenbar ist die Einheit von  $\vec{j}$

$$[\vec{j}] = \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}} . \quad (1.12)$$

- Die Änderung der dielektrischen Verschiebung mit der Zeit,

$$\frac{d\vec{D}}{dt} =: \dot{\vec{D}} , \quad (1.13)$$

hat dieselbe Einheit. Es war die zentrale Leistung James Clerk Maxwells in der Elektrodynamik zu erkennen, dass dieser zeitlichen Änderung der *Verschiebungstrom* entspricht, der mit  $\vec{j}$  zu einem Gesamtstrom zusammenzufassen ist:

$$\begin{aligned} \text{Gesamtstrom} &= \text{Verschiebungstrom} + \text{Ladungstrom} \\ &= \dot{\vec{D}} + \vec{j} . \end{aligned} \quad (1.14)$$

- Ähnlich der Ladung weist man einem magnetischen Material eine „Polstärke“ zu. In Analogie zum magnetischen Feld einer Stromschleife wird zunächst ein *magnetisches Moment*

$$m = \text{Strom} \cdot \text{Fläche} \quad (1.15)$$

definiert, dessen *magnetische Polstärke* indirekt proportional zum Abstand abfällt, also:

$$\text{magnetische Polstärke} = \frac{\text{Strom} \cdot \text{Fläche}}{\text{Abstand}} . \quad (1.16)$$

- Weist man der Stromstärke die weitere Einheit Ampère (A) zu, folgt zunächst aus der Definition der Stromdichte

$$\text{Strom} = \text{Stromdichte} \cdot \text{Fläche} , \quad (1.17)$$

also

$$1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2 \text{s}} \cdot \text{m}^2 = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}} \Rightarrow 1 \text{ C} = 1 \text{ As} , \quad (1.18)$$

was für die Polstärke die Einheit

$$[\text{Polstärke}] = \frac{\text{A m}^2}{\text{m}} = \text{Am} \quad (1.19)$$

ergibt.

- Die *magnetische Feldstärke* ist nun definiert als die magnetische Kraft pro Polstärke,

$$\text{magnetische Feldstärke } \vec{B} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Polstärke}} , \quad (1.20)$$

mit der Einheit

$$[\vec{B}] = \frac{\text{N}}{\text{Am}} . \quad (1.21)$$



- Als Einheit der Spannung hatten wir das Volt eingeführt,

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}} \Rightarrow 1 \frac{\text{N}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}}, \quad (1.22)$$

womit die Einheit von  $\vec{B}$  auch in die Form

$$[\vec{B}] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} =: \text{T} \quad (\text{Tesla}) \quad (1.23)$$

gebracht werden kann.

- Wie im Fall des elektrischen Feldes bezeichnet man die Wirkung des Magnetfeldes auf Medien durch einen neuen Vektor  $\vec{H}$ , die *magnetische Erregung*, die mit der Polstärke in denselben Zusammenhang gebracht wird wie die Ladung mit der dielektrischen Verschiebung:

$$[\vec{H}] = \frac{\text{Polstärke}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{Am}}{\text{m}^2} = \frac{\text{A}}{\text{m}}. \quad (1.24)$$

- Die Unterscheidung zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  wird später verschwinden (zunächst im Vakuum), aber diese Einführung zeigt, dass  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bzw.  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  paarweise verschiedenen Ursprungs sind. Den

$$\text{Intensitätsgrößen} \quad \vec{E}, \vec{B} \quad (1.25)$$

stehen

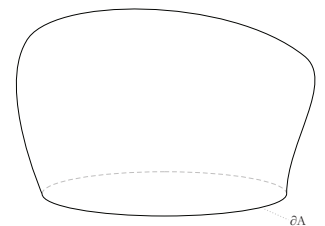
$$\text{Quantitätsgrößen} \quad \vec{D}, \vec{H} \quad (1.26)$$

gegenüber. Während die Intensitätsgrößen beschreiben, wie stark das elektromagnetische Feld ist, geben die Quantitätsgrößen an, wie sehr ein Medium darauf reagiert.

## 1.3 Die Maxwellschen Gleichungen

- Wir betrachten zunächst die Größen  $\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$ , den *magnetischen Fluss* bzw. die magnetische Durchflutung, und  $\int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$ , den Strom. Dabei ist  $A$  eine beliebig geformte Fläche,  $d\vec{A}$  deren gerichtetes Flächenelement, und  $\partial A$  deren Rand.
- Unter  $\int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$  kann man salopp die „Anzahl der Feldlinien“ verstehen, die durch  $A$  treten, auch wenn Feldlinien streng genommen nicht zählbar sind.
- Analog definieren wir längs geschlossener Kurven die elektrische und die magnetische *Ringspannung*,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s}. \quad (1.27)$$



Eine beliebig geformte Fläche  $A$  und ihr Rand  $\partial A$

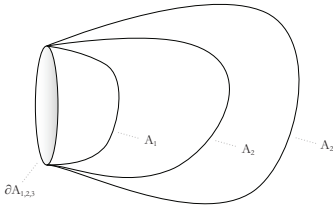
- Damit gelten dann das *Faradaysche Induktionsgesetz*

$$\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.28)$$

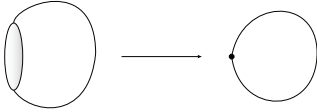
und das *Ampèresche Gesetz*

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}. \quad (1.29)$$

- Das Minuszeichen im Faradayschen Induktionsgesetz vertritt die *Lenzsche Regel*.
- Die Änderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche  $A$  ist also gleich der negativen elektrischen Ringspannung am Rand  $\partial A$  der Fläche, und der Strom durch die Fläche ist gleich der magnetischen Ringspannung an deren Rand.
- Die Flächen und ihre Randkurven sind dabei beliebig! So lange etwa die Randkurve dieselbe bleibt, wird der magnetische Fluss oder der Strom durch die Fläche derselbe bleiben, wie auch immer die Fläche geformt sein mag.



Verschiedene Flächen mit derselben Randkurve



Wenn die Randkurve zum Punkt schrumpft, schließt sich die Fläche

- Insbesondere kann die Randkurve zu einem Punkt schrumpfen, so dass gilt:

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = - \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.30)$$

und

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (1.31)$$

(jetzt: Integrale über geschlossene Flächen!). Damit ist dann

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \text{zeitlich konstant}, \quad (1.32)$$

und das bedeutet, dass  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{A}$  konstant bleiben muss, auch wenn das Magnetfeld abgeschaltet wird! Als Konstante kommt daher nur die null in Betracht. Daraus folgt

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (1.33)$$

- Ebenso können wir mit dem Strom argumentieren: Da der Gesamtstrom sich aus Ladungsstrom  $\vec{j}_q$  und Verschiebungsstrom zusammensetzt, folgt aus

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{A} = - \oint \vec{\dot{D}} \cdot d\vec{A}. \quad (1.34)$$

Wenn die Fläche  $A$  zeitlich festgehalten wird, ist

$$\oint \vec{\dot{D}} \cdot d\vec{A} = \frac{d}{dt} \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}, \quad (1.35)$$

und damit

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = - \int dt \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{A} + \text{konst.} . \quad (1.36)$$

- Physikalisch ist

$$- \int dt \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{A} = q \quad (1.37)$$

die gesamte Ladung, die sich innerhalb von  $A$  ansammelt. Also ist

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = q + \text{konst.} . \quad (1.38)$$

- Dies muss auch dann gelten, wenn alle Ladungen entfernt und alle Ströme abgeschaltet werden, also kommt für die Konstante wieder nur die Null in Betracht. Daher ist

$$\oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = q . \quad (1.39)$$

Damit wird bestätigt, dass unsere Definition von  $\vec{D}$  im Einklang mit dem Ampèreschen Gesetz steht und dass die Interpretation von  $\vec{D}$  als Beitrag zum Strom für diese Übereinstimmung *notwendig* ist.

- Die Gleichung (1.33),

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 , \quad (1.40)$$

wurde von Hertz interpretiert als „es gibt keinen wahren Magnetismus“: Der magnetische Fluss durch *jede* geschlossene Fläche verschwindet; das Magnetfeld hat keine Quellen im Sinne magnetischer Ladungen.

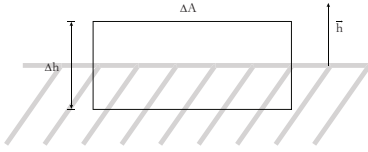
- Aus der Gleichung (1.39) folgt durch Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \frac{dq}{dt} = - \oint \vec{j}_q \cdot d\vec{A} . \quad (1.41)$$

Das ist die Gleichung der *Ladungserhaltung*: Innerhalb einer geschlossenen Fläche kann sich die Gesamtladung nur um den Strom durch diese Fläche ändern.

- Damit haben wir die Maxwell-Gleichungen in integraler Form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} &= - \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} &= \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} \\ \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} &= 0 \\ \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} &= q \end{aligned} \quad (1.42)$$



Prisma, das von einer Grenzfläche durchquert wird

- **Beispiel:** Wir können die Maxwell-Gleichungen gleich dazu benutzen, Grenzbedingungen aufzustellen:
- Sei eine Grenzfläche zwischen zwei Medien gegeben, und wir wollen wissen, welche Bedingung an  $\vec{B}$  an dieser Grenzfläche zu stellen sei. Dazu umschließen wir einen Ausschnitt der Grenzfläche mit einem Prisma der Höhe  $\Delta h$  und der Grundfläche  $\Delta A$  und erhalten zunächst, für  $\Delta h \rightarrow 0$ ,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} \rightarrow \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot \Delta A + \vec{B}' \cdot \vec{n}' \cdot \Delta A = 0 \quad (1.43)$$

wobei  $\vec{n}' = -\vec{n}$  ist. Damit folgt

$$B'_n = B_n, \quad (1.44)$$

das heißt die Normalkomponenten von  $\vec{B}$  bleiben über die Grenzfläche hinweg erhalten.

- Die Maxwell-Gleichungen können nun mithilfe der Sätze von Stokes und Gauß in differentielle Form gebracht werden. Wenn  $\partial A$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $A$  berandet, folgt aus dem Stokesschen Satz

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} &= \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}, \\ \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

- Der Gaußsche Satz besagt

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} &= \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot dV, \\ \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) \cdot dV, \end{aligned} \quad (1.46)$$

wobei  $V$  das Volumen ist, das  $A$  einschließt. Wenn wir die Ladung  $q$  noch durch ein Volumenintegral der *Ladungsdichte* ausdrücken,

$$\int_V \rho \cdot dV = q, \quad (1.47)$$

erhalten wir mit (1.45) und (1.46) aus (1.42)

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \dot{\vec{B}} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} = \vec{j}_q + \dot{\vec{D}} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho. \end{aligned} \quad (1.48)$$

das sind die acht Maxwell-Gleichungen in differentieller Form.

- Die Kontinuitätsgleichung kann ebenso in differentielle Form gebracht werden: Aus (1.41) folgt mit (1.47) und dem Gaußschen Satz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho dV &= - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q) dV \\ \Rightarrow \dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_q &= 0. \end{aligned} \quad (1.49)$$

## 1.4 Materialkonstanten

- Zur Verknüpfung von  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  bzw.  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  sind offenbar weitere Gleichungen nötig, denn die Maxwell-Gleichungen stellen acht Gleichungen für die 16 Größen  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\rho$ ,  $\vec{j}$  bereit.
- Üblich sind die linearen Annahmen

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.50)$$

in denen die Materialkonstanten

Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$   
 Permeabilitätskonstante  $\mu$   
 Leitfähigkeit  $\sigma$

auftauchen. Offenbar sind deren Einheiten

$$\begin{aligned} [\epsilon] &= \frac{\text{As}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{As}}{\text{N}} = \frac{\text{C}}{\text{Vm}} \\ [\mu] &= \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \\ [\sigma] &= \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{V}} = \frac{\text{A}}{\text{Vm}} =: \frac{1}{\Omega\text{m}}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

worin das Ohm als

$$1 \Omega := 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} \quad (1.52)$$

definiert wurde.

- Die Dielektrizitätskonstante des Vakuums ist

$$\epsilon_0 = 8.859 \times 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}. \quad (1.53)$$

für Medien ist  $\epsilon > \epsilon_0$ . Die Permeabilität des Vakuums ist

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}, \quad (1.54)$$

was aus der Definition des Ampère folgt. *Paramagnetische* Materialien haben  $\mu > \mu_0$ , *diamagnetische*  $\mu < \mu_0$ . Damit bekommen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}\mu \vec{H} &= -\vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \sigma \vec{E} + \epsilon \dot{\vec{E}} &= \vec{\nabla} \times \vec{H} \\ \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{H}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \dot{\vec{E}}) &= \rho.\end{aligned}\quad (1.55)$$

Das sind also acht Gleichungen für die sieben Größen  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  und  $\rho$ . Die ersten beiden Gleichungen stellen sechs Bedingungen an die sechs Größen  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$ , die zweiten beiden Gleichungen stellen Zusatzbedingungen.

- Aus der Kontinuitätsgleichung folgt mittels der Materialkonstanten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\sigma}{\epsilon} \epsilon \vec{E} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0, \quad (1.56)$$

wenn die Ortsabhängigkeit von  $\sigma/\epsilon$  vernachlässigt wird. diese Differentialgleichung hat offenbar die Lösung

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\sigma t/\epsilon} =: \rho_0 e^{-t/\tau}, \quad (1.57)$$

worin  $\tau := \epsilon/\sigma$  die Relaxionszeit ist. Für ideale Leiter ist  $\tau \rightarrow 0$  wegen  $\sigma \rightarrow \infty$ , also  $\rho = 0$  nach beliebig kurzer Zeit.

## 1.5 Übergang zum Gaußschen Einheitensystem

- Wir haben bisher die neuen Einheiten C, A, V und  $\Omega$  eingeführt, außerdem waren selbst für das Vakuum die Materialkonstanten  $\mu_0$  und  $\epsilon_0$  notwendig. Wir führen nun ein Einheitensystem ein, in dem  $\mu_0 = 1$  und  $\epsilon_0 = 1$  werden sollen.
- Dazu führen wir hilfsweise skalare Größen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  und  $\nu$  ein, mit denen wir die Felder und die Ladungen skalieren,

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \alpha \vec{E}, & \vec{D}' &= \beta \vec{D}, & \vec{H}' &= \gamma \vec{H}, & \vec{B}' &= \delta \vec{B}, \\ \rho' &= \nu \rho, & \vec{j}' &= \nu \vec{j}.\end{aligned}\quad (1.58)$$

Weiter verlangen wir, dass sich die Produkte  $\vec{E} \cdot \vec{D}$  und  $\vec{E}' \cdot \vec{D}'$  höchstens um einen reinen Zahlenwert  $Z$  unterscheiden sollen, während  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\nu$  zunächst dimensionsbehaftete Konstanten sein können. Schließlich soll noch  $\rho \vec{E} = \rho' \vec{E}'$  sein.

- Damit folgt dann:

$$\alpha\nu = 1, \quad \nu = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha\beta = Z = \gamma\delta. \quad (1.59)$$

Außerdem führen wir

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \alpha = \frac{\delta}{\Gamma} = \frac{Z}{\gamma\Gamma}, \quad \beta = \gamma\Gamma, \\ \delta &= \frac{Z}{\gamma}, \quad \nu = \frac{1}{\alpha} = \frac{\gamma\Gamma}{Z} \end{aligned} \quad (1.60)$$

ein und erhalten damit aus den Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\vec{B}}' &= -\Gamma\vec{\nabla} \times \vec{E}' & \dot{\vec{D}}' + Z\vec{j}_q &= \Gamma\vec{\nabla} \times \vec{H}' \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}' &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{D}' &= Z\rho' \end{aligned} \quad (1.61)$$

sowie aus den Materialgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{D}' &= \epsilon' \vec{E}' \Rightarrow \epsilon' = \frac{\gamma^2 \Gamma^2}{Z} \epsilon \\ \vec{B}' &= \mu' \vec{H}' \Rightarrow \mu' = \frac{Z}{\gamma^2} \mu. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Da wir  $\epsilon_0 = 1 = \mu_0$  erreichen wollen, müssen wir also

$$\gamma^2 = Z\mu_0, \quad \gamma^2 \Gamma^2 = \frac{Z}{\epsilon_0} \quad (1.63)$$

setzen.

- Betrachten wir  $\epsilon_0$  und  $\mu_0$  genauer, ergibt sich, dass das Produkt  $\epsilon_0\mu_0$  die Einheit eines inversen Geschwindigkeitsquadrates hat,

$$[\epsilon_0\mu_0] = \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{-2}. \quad (1.64)$$

Offenbar bedingt das, dass

$$\left[ \frac{Z}{\gamma^2 \Gamma^2} \cdot \frac{\gamma^2}{Z} \right] = \frac{1}{\Gamma^2} \quad (1.65)$$

ebenfalls die Dimension eines inversen Geschwindigkeitsquadrates hat. Wir erreichen dies, indem wir

$$\Gamma = c \quad (1.66)$$

setzen, also gleich der Lichtgeschwindigkeit. Schließlich setzen wir noch

$$Z = 4\pi \quad (1.67)$$

und erhalten die Maxwell-Gleichungen im *Gaußschen System*:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{B}} &= -c\vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \dot{\vec{D}} + 4\pi\vec{j}_q &= c\vec{\nabla} \times \vec{H} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho .\end{aligned}\tag{1.68}$$

- Aus (1.63) folgt zunächst:

$$[\gamma] = \sqrt{\frac{Vs}{Am}} ,$$

demnach ist, mit (1.60) und (1.7)

$$[\nu] = [\gamma\Gamma] = \sqrt{\frac{Vm}{As}} = \sqrt{\frac{Nm^2}{C^2}} = \sqrt{\frac{m^3 kg}{s^2}} \frac{1}{C} \propto \sqrt{\frac{cm^3 g}{s^2}} \frac{1}{C} .\tag{1.69}$$

Die Einheit der Ladung wird also auf rein „mechanische“ Einheiten zurückgeführt:

$$[q] = \frac{cm^{3/2}g^{1/2}}{s} .\tag{1.70}$$

Ebenso ergeben sich die Einheiten

$$\begin{aligned}[\vec{E}] = [\vec{D}] &= \frac{g^{1/2}}{cm^{1/2}s} \\ [\vec{B}] = [\vec{H}] &= \frac{g^{1/2}}{cm^{1/2}s} = [\vec{E}] = [\vec{D}] .\end{aligned}\tag{1.71}$$

Im Vakuum entfällt die Unterscheidung zwischen  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  bzw.  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$ , und  $\mu$  und  $\epsilon$  werden zu reinen Zahlenfaktoren.

- Quantitativ ergibt sich für den Faktor  $\nu$

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{\gamma\Gamma}{Z} = \frac{c\sqrt{Z\mu_0}}{Z} = 10^{-7/2}c\sqrt{\frac{kg m^3}{s^2}} \frac{1}{C} \\ &= 10c\sqrt{\frac{g cm^3}{s^2}} \frac{1}{C} .\end{aligned}\tag{1.72}$$

für die Elementarladung folgt daraus

$$\begin{aligned}e &= 10c \cdot 1.6 \times 10^{-19} \sqrt{\frac{g cm^3}{s^2}} \\ &= 4.8 \times 10^{-10} \sqrt{\frac{g cm^3}{s^2}} .\end{aligned}\tag{1.73}$$

Wir werden von nun an in diesem Einheitensystem arbeiten, das auch als konventionelles Gaußsches System bezeichnet wird.



# Kapitel 2

## Elektrostatik

### 2.1 Das Coulombsche Gesetz

- Elektrostatik handelt von den Feldern ruhender Ladungen. Ströme werden ignoriert. Damit nehmen die Maxwell'schen Gleichungen die Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.1)$$

an, denn Magnetfelder werden ebenfalls vernachlässigt.

- Betrachtet man eine Punktladung im Ursprung, dann erzeugt diese ein radialsymmetrisches Feld  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ . Integriert man die Divergenzgleichung aus (2.1) über eine Kugel mit Radius  $r$  um den Ursprung, erhält man nach dem Gauß'schen Satz

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi q, \quad (2.2)$$

denn das Volumenintegral über die „Ladungsdichte“  $\rho$  der Punktladung ergibt die Gesamtladung in der Kugel.

- Aus (2.2) folgt für die Feldstärke der Punktladung

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r = \frac{q}{r^3} \vec{r}. \quad (2.3)$$

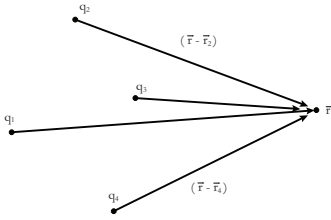
Nach Definition der Feldstärke erfährt eine Ladung  $q'$  in diesem Feld die Kraft

$$\vec{F}(r) = q' \vec{E}(r) = \frac{qq'}{r^2} \vec{e}_r; \quad (2.4)$$

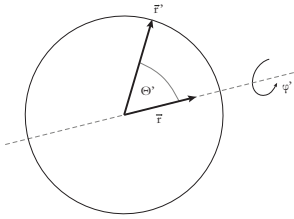
das ist das *Coulomb-Gesetz*. Hätten wir im Abschnitt 1.5 darauf verzichtet, den Faktor  $Z = 4\pi$  einzuführen, müsste er hier im Nenner der rechten Seite auftauchen.

- Eine Ansammlung von Punktladungen  $q_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) an den Orten  $\vec{r}_i$  erzeugt das Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (2.5)$$



Die Felder einzelner Punktladungen werden linear überlagert.



Zur Berechnung des Feldes einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung

denn die Maxwell-Gleichungen sind *linear* in den Feldern und ihren Quellen, sodass die Felder einfach linear superponiert werden können.

- Denkt man sich eine kontinuierliche Ladungsdichte  $\rho$  in „Punktladungen“  $\rho \Delta V$  zerlegt, erhält man aus (2.5) durch Grenzübergang zu infinitesimalem Volumen  $\Delta V \rightarrow d^3 V$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3 V' \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.6)$$

**Beispiel:** Eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte

$$\rho = \rho_0 e^{-r/r_0} \quad (0 \leq r < \infty) \quad (2.7)$$

hat das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_0^\infty r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\rho_0 e^{-r'/r_0}(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (2.8)$$

- Legt man  $\vec{r}$  in Richtung der z-Achse, ist

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{r}' = \begin{pmatrix} r' \sin \theta' \cos \varphi' \\ r' \sin \theta' \sin \varphi' \\ r' \cos \theta' \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

und das Integral kann ausgeführt werden.

## 2.2 Das elektrostatische Potential

- Betrachten wir den Faktor  $(\vec{r} - \vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|^3$  im Integranden der Gleichung (2.6) näher. Offenbar können wir ihn in die Form

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.10)$$

bringen, denn:

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= -\vec{\nabla} \left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-3/2} \cdot 2 \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{pmatrix} \\ &= \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

und damit lässt sich das elektrische Feld der Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}')$  als Gradient des *elektrostatischen Potentials*

$$\phi(\vec{r}) := \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.12)$$

schreiben:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) . \quad (2.13)$$

Da die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet, ist damit die Gleichung (2.1)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0 \quad (2.14)$$

identisch erfüllt. Die andere Gleichung (2.1) ergibt die *Poisson-Gleichung* für das Potential,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = 4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = -4\pi\rho . \quad (2.15)$$

In ladungsfeien Gebieten erfüllt  $\phi$  offenbar die *Laplace-Gleichung*

$$\Delta\phi = 0 . \quad (2.16)$$

## 2.3 Das Potential der Punktladung und die Delta-Funktion

- Zu einer Punktladung  $q$  am Ort  $\vec{r}'$  gehört das Potential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (2.17)$$

wir zeigen dies, indem wir die Punktladung zunächst in den Ursprung schieben,  $\vec{r}' = 0$ , und dann den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten anwenden,

$$\begin{aligned} \Delta f(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

wenn  $r \neq 0$  ist. Damit erfüllt  $\phi$  abseits der Punktladung die Laplace-Gleichung, wie es sein muss. Um  $\phi$  bei  $r = 0$  zu untersuchen, betrachten wir das Volumenintegral um den Ursprung

$$\int_V d^3r \Delta \left( \frac{q}{r} \right) = \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{q}{r} \right) = - \int_{\partial V} \frac{q}{r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{A} = -4\pi q , \quad (2.19)$$

das heißt in beliebig kleinen Volumina um die Punktladung erfüllt das Potential die Gleichung

$$\int d^3r \Delta\phi = -4\pi q , \quad (2.20)$$

was wir aufgrund der Poisson-Gleichung auch erwarten müssen.

- Es ist zum Rechnen wünschenswert, die Punktladung ebenso als Ladungsdichte schreiben zu können wie kontinuierliche Massenverteilungen. Dazu brauchen wir eine „Funktion“, die außer am Ort der Punktladung überall verschwindet und die, integriert über ein Volumen, das den Ort der Punktladung enthält, gleich eins ergibt. Das erfüllt die Dirac'sche Delta-„Funktion“,

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0), \quad \int \delta(x) dx = 1. \quad (2.21)$$

Im mathematischen Sinn handelt es sich dabei eigentlich um eine Distribution, die wir aber trotzdem im allgemeinen üblichen Sprachgebrauch als Delta-Funktion bezeichnen. Sie verallgemeinert das Kronecker-Symbol für kontinuierliche „Indizes“  $x$ .

- Sei  $f(x)$  eine beliebige Funktion, dann ist offenbar wegen (2.21)

$$\int f(x) \delta(x - a) dx = f(a), \quad (2.22)$$

wenn das Integrationsgebiet den Punkt  $a$  enthält.

- Man kann die Delta-Funktion als Grenzfall stetiger Funktionen auffassen. Beispielsweise geht die Gaußfunktion

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma} e^{-x^2/\sigma^2} \quad (2.23)$$

für  $\sigma \rightarrow 0$  in eine Delta-Funktion über. Ihr Integral ist normiert auf eins, und sie fällt im Grenzfall  $\sigma \rightarrow 0$  beliebig schnell auf Null, außer bei  $x = 0$ .

- Einige Eigenschaften der Delta-Funktion werden in den Übungen behandelt. Die Verallgemeinerung der Delta-Funktion auf drei Dimensionen ist

$$\delta(\vec{x} - \vec{a}) = \delta(x_1 - a_1) \delta(x_2 - a_2) \delta(x_3 - a_3). \quad (2.24)$$

Eine Punktladung bzw. eine Menge von  $N$  Punktladungen lässt sich damit schreiben als eine Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \text{bzw.} \quad \rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (2.25)$$

Offenbar gilt dann, etwa im letzteren Fall,

$$q = \int \rho(\vec{r}) d^3 r = \sum_{i=1}^N q_i, \quad (2.26)$$

wenn das Volumenintegral alle  $\vec{r}_i$  mit  $(1 \leq i \leq N)$  einschließt.

- Unsere vorherige Rechnung zum Potential der Punktladung lässt sich mittels der Delta-Funktion auf die Form

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.27)$$

bringen, denn offenbar ist damit

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \quad (r \neq 0) \quad \text{und} \quad \int \Delta \frac{1}{r} d^3r = -4\pi, \quad (2.28)$$

wenn um den Ursprung integriert wird. Das Potential

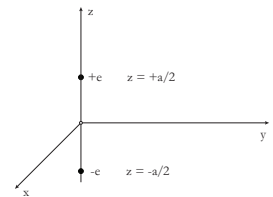
$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (2.29)$$

erfüllt damit die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta\phi(\vec{r}) &= \Delta \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = \int \rho(\vec{r}') [-4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')] d^3r' \\ &= -4\pi\rho(\vec{r}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

## 2.4 Potential und Feld eines Dipols

- Gegeben sei ein Dipol, d.h. eine Anordnung von zwei Punktladungen  $-e$  und  $+e$  an den Orten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  mit  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = a$ . Der Einfachheit halber legen wir die Dipolachse (d.h. den Vektor  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ ) in  $z$ -Richtung und die Ladung symmetrisch zur  $x$ - $y$ -Ebene, d.h.



Elektrischer Dipol

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a/2 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

als *Dipolmoment* wird definiert

$$\vec{p} := q_1 \vec{r}_1 + q_2 \vec{r}_2 = -e \vec{r}_1 + e \vec{r}_2 = e(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (2.32)$$

mit  $|\vec{p}| = ea$ . Das Potential des Dipols ist offensichtlich

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_2|}, \quad (2.33)$$

wobei

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_1| &= \left[ x^2 + y^2 + \left( z + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ |\vec{r} - \vec{r}_2| &= \left[ x^2 + y^2 + \left( z - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.34)$$

sind. Wir nehmen nun  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg a$  an und nähern

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_1| &\approx [x^2 + y^2 + z^2 + az]^{1/2} = r \sqrt{1 + \frac{az}{r^2}} \approx r \left(1 + \frac{az}{2r^2}\right), \\ |\vec{r} - \vec{r}_2| &\approx r \left(1 - \frac{az}{2r^2}\right), \end{aligned} \quad (2.35)$$

womit wir fern vom Dipol das Potential

$$\phi(\vec{r}) \approx -\frac{e}{r} \left(1 - \frac{az}{2r^2}\right) + \frac{e}{r} \left(1 + \frac{az}{2r^2}\right) = \frac{eaz}{r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (2.36)$$

erhalten, wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = e(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r} = e \left(\frac{a}{2}z + \frac{a}{2}z\right) = eaz \quad (2.37)$$

ist.

- Das elektrische Feld fern vom Dipol ist damit

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta - \frac{1}{r}\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi. \quad (2.38)$$

In Kugelkoordinaten ist

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \frac{2p \cos\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{p \sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}}{r^3}; \quad (2.39)$$

das Feld fern vom Dipol fällt also wie  $r^{-3}$  ab.

## 2.5 Randbedingungen und die Eindeutigkeit des Potentials

- Die Lösungen von Differentialgleichungen wie der Poisson- oder der Laplacegleichung sind erst dann eindeutig festgelegt, wenn ihre Werte am Rand  $\partial V$  eines Volumens  $V$  vorgegeben werden. Man prägt den Lösungen damit Bedingungen auf, die auf diesem Rand gelten sollen.
- Besondere Bedeutung haben zwei Arten von Randbedingungen. Es genügt für die Eindeutigkeit des Potentials, entweder  $\phi$  am Rand  $\partial V$  vorzugeben (sogenannte Dirichlet-Randbedingungen) oder die senkrechte Ableitung  $\partial\phi/\partial\vec{n}$  am Rand von  $V$  (Neumann-Randbedingungen), um eine eindeutige Lösung zu erhalten.
- Seien also zwei beliebige Potentiale  $\phi_1$  und  $\phi_2$  vorgegeben, die Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen erfüllen. Beide müssen der Poisson-Gleichung genügen,

$$\Delta\phi_{1,2} = -4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \Delta(\phi_1 - \phi_2) = 0. \quad (2.40)$$

Wenn sich also die beiden Potentiale um eine Funktion

$$u := \phi_1 - \phi_2 \quad (2.41)$$

unterscheiden, muss  $u$  die Laplace-Gleichung  $\Delta u = 0$  erfüllen.

- Am Rand  $\partial V$  sollen die Potentiale zudem die Bedingungen

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \vec{n}} \quad (2.42)$$

erfüllen. Für die Differenz  $u$  bedeutet das, dass sie den Randbedingungen

$$u = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad (2.43)$$

genügen muss.

- Aus dem Gauß'schen Satz folgt schließlich, dass für eine beliebige Funktion  $u$

$$\int_V [u \Delta u + (\vec{\nabla} u)^2] dV = \oint_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dA . \quad (2.44)$$

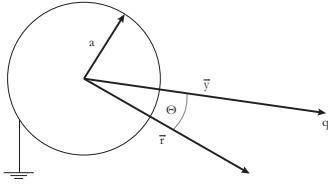
Hier verschwindet der erste Term auf der linken Seite wegen (2.40), und die rechte Seite wegen (2.43). Also folgt

$$\int_V (\vec{\nabla} u)^2 dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} u = 0 \quad \text{in } V , \quad (2.45)$$

weshalb  $u$  in  $V$  konstant sein muss. Bei Dirichlet'schen Randbedingungen ist  $u = 0$  am Rand, muss also überall Null sein, und mithin ist  $\phi_1 = \phi_2$ . Bei Neumann'schen Randbedingungen unterscheiden sich die beiden Potentiale höchstens um eine unwichtige Konstante.

- Wir können daraus gleich eine wichtige Schlussfolgerung ziehen. Betrachten wir einen Hohlraum, dessen Wände elektrisch leiten, etwa eine Schachtel aus Metall. Da die Oberfläche der Schachtel leitet, muss auf ihr das Potential konstant sein. Im Inneren befinden sich keine Ladungen, sodass das Potential dort die Laplace-Gleichung  $\Delta \phi = 0$  erfüllen muss. Offenbar löst ein konstantes Potential diese Gleichung, und es erfüllt auch die (Dirichlet'sche) Randbedingung. Wegen der Eindeutigkeit des Potentials ist diese Konstante dann nicht nur eine, sondern *die* Lösung.
- Das Potential im Inneren eines Hohlraums mit leitendem Rand ist also konstant, sein Gradient verschwindet, und daher muss auch das elektrische Feld im Inneren dieses Hohlraums verschwinden. Wir gelangen so zu der wichtigen Einsicht, dass ein von einem Leiter umschlossenes Volumen frei von elektrischen Feldern ist. Das ist die Grundlage des Faraday'schen Käfigs.

## 2.6 Beispiele zur Berechnung von Potentialen und Feldern



Zur Berechnung des Potentials einer geerdeten, leitenden Kugel

- **Geerdete, leitende Kugel im Feld einer Ladung  $q$ :** Vorgegeben sei eine Kugel mit Radius  $a$ , die geerdet ist und daher auf ihrer Oberfläche das Potential  $\phi = 0$  hat. Eine Ladung  $q$  sei an irgend einem Ort  $\vec{y}$  angebracht, und wir wollen Potential und Feld am Ort  $\vec{r}$  bestimmen.
- Offenbar handelt es sich um ein Problem mit Dirichlet-Randbedingungen, da auf der Oberfläche der Kugel das Potential vorgegeben ist. Wir suchen ein Potential der Form

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|} + F(\vec{r}, \vec{y}), \quad (2.46)$$

wobei die noch unbekannte Funktion  $F$  im betrachteten Volumen (also außerhalb der Kugel) die Laplace-Gleichung  $\Delta F = 0$  erfüllen und so festgelegt werden muss, dass  $\phi$  auf der Kugeloberfläche verschwindet.

- Es liegt nahe, die Funktion  $F$  so anzusetzen, als würde sie durch eine gedachte Ladung  $q'$  innerhalb der Kugel erzeugt,

$$F(\vec{r}, \vec{y}) = -\frac{q'}{|\vec{r} - B\vec{y}|}. \quad (2.47)$$

Wenn der dimensionslose Faktor  $B$  so gewählt ist, dass  $B\vec{y}$  innerhalb der Kugel liegt, erfüllt  $F$  die Laplace-Gleichung außerhalb der Kugel sofort.

- Wir setzen also an

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{q'}{|\vec{r} - B\vec{y}|} \quad (2.48)$$

und suchen nach der Ladung  $q'$  und dem Faktor  $B$  so, dass  $\phi = 0$  auf der Kugeloberfläche erreicht wird, also bei  $|\vec{r}| = a$ . Dabei haben wir aus Symmetriegründen vorausgesetzt, dass die gedachte Ladung  $q'$  bei  $B\vec{y}$  auf der Verbindungslinie vom Kugelmittelpunkt nach  $\vec{y}$  liegt.

- Wir legen den Kugelmittelpunkt in den Ursprung und verlangen

$$\begin{aligned} \phi(|\vec{r}| = a, \vec{y}) = 0 &= \frac{q}{\sqrt{a^2 - 2ay \cos \theta + y^2}} \\ &- \frac{q'}{\sqrt{a^2 - 2aBy \cos \theta + B^2 y^2}}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Daraus erhalten wir zunächst

$$a^2 + B^2 y^2 - 2aBy \cos \theta = A^2 (a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta). \quad (2.50)$$



Werten wir diese Gleichung einmal für  $\cos \theta = -1$  und einmal für  $\cos \theta = 0$  aus, folgen die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned}(a+y)^2 &= \frac{q'^2}{q'^2} (a+By)^2, \\ a^2 + y^2 &= \frac{q'^2}{q'^2} (a^2 + B^2 y^2),\end{aligned}\quad (2.51)$$

deren Differenz gleich auf

$$B = \frac{q'^2}{q^2} \quad (2.52)$$

führt. Setzen wir dies in die zweite Gleichung (2.51) ein, folgt für  $B$  die gemisch-quadratische Gleichung

$$B^2 y^2 - B(a^2 + y^2) + a^2 = 0 \quad (2.53)$$

Sie hat die beiden Lösungen

$$B = \frac{a^2}{y^2}, \quad B = 1, \quad (2.54)$$

von denen offenbar nur die erste brauchbar ist. Die gedachte Ladung muss also am Ort  $a^2 \vec{y}/y^2$  sitzen und die Ladung  $q' = -qa/y$  bekommen.

- Damit lautet das Potential außerhalb der geerdeten, leitenden Kugel

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{qa}{y \left| \vec{r} - \frac{a^2}{y^2} \vec{y} \right|}, \quad (2.55)$$

und wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist diese auch die einzige. Das elektrische Feld ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|^3} (\vec{r} - \vec{y}) - \frac{aq}{y} \frac{1}{\left| \frac{a^2}{y^2} \vec{y} - \vec{r} \right|^3} \left( \vec{r} - \frac{a^2}{y^2} \vec{y} \right). \quad (2.56)$$

Das Innere der Kugel muss feldfrei sein, weil ihre Oberfläche leitet. Völlig analog zu der Sprungbedingung an  $\vec{B}$  an Oberflächen, die wir unter I.3 hergeleitet hatten, erhalten wir hier

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \vec{E}_2 \cdot \vec{n} = -\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = 4\pi\sigma, \quad (2.57)$$

wobei  $\sigma$  eine Flächenladung ist. Mit (2.55) folgt, da  $\vec{n}$  in Richtung von  $\vec{e}_r$  zeigt,

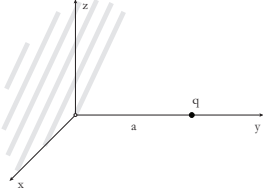
$$4\pi\sigma = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{qa \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}{(a^2 + y^2 - 2ay \cos \theta)^{3/2}}. \quad (2.58)$$

Diese Flächenladung sorgt dafür, dass innerhalb der Kugel das Feld verschwindet. Integriert man  $\sigma(a)$  über alle Winkel, erhält man die gedachte Ladung  $q'$ ,

$$\int \sigma(y, \theta) a^2 d\Omega = q' , \quad (2.59)$$

wie es nach dem Gaußschen Satz sein muss.

- **Ladung vor einer leitenden Platte:** Als weiteres Beispiel stellen wir eine Ladung  $q$  im Abstand  $a$  vor eine unendlich ausgedehnte, leitende Platte. Die Platte sei in der  $x$ - $z$ -Ebene, und die Ladung  $q$  sei bei  $x = z = 0, y = a$ .



Ladung vor einer leitenden Platte

- Wieder schreiben wir das Potential in der allgemeinen Form

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{y}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - B\vec{y}|} , \quad (2.60)$$

denn weil die Platte leitet, muss sie eine Äquipotentialfläche sein. Aus Symmetriegründen erwarten wir eine Ladung anderen Vorzeichens, die an der Platte gespiegelt ist,

$$q' = -q \quad \text{und} \quad B = -1 , \quad (2.61)$$

also

$$\phi(\vec{r}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{y}|} , \quad (2.62)$$

die in der Tat die Bedingung erfüllt, in der  $x$ - $z$ -Ebene (d.h. bei  $\vec{r} = (x, 0, z)$ ) zu verschwinden, denn dort ist

$$|\vec{r} - \vec{y}| = |\vec{r} + \vec{y}| . \quad (2.63)$$

Das Potential können wir in kartesischen Koordinaten durch

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y - a)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + z^2 + (y + a)^2}} \quad (2.64)$$

ausdrücken. Mit  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{q}{r} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 - 2ay}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 + 2ay}{r^2}}} \right] \\ &\approx \frac{q}{r} \left( 1 + \frac{ay}{r^2} - 1 + \frac{ay}{r^2} \right) = 2 \frac{qay}{r^3} \quad (\text{für } r \gg a) . \end{aligned} \quad (2.65)$$

das elektrische Feld senkrecht zur Platte ist

$$\begin{aligned} E_y(\vec{r}) &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{q}{2r} \left[ \left( 1 + \frac{a^2 - 2ay}{r^2} \right)^{-3/2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{a^2 - 2ay}{r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{a^2 + 2ay}{r^2} \right)^{-3/2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{a^2 + 2ay}{r^2} \right) \right] . \end{aligned} \quad (2.66)$$

nun ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{a^2 \pm 2ay}{x^2 + y^2 + z^2} \right) &= \frac{\pm 2ar^2 - (a^2 \pm 2ay) \cdot 2y}{r^4} \\ &= \pm \frac{2a}{r^2} \left[ 1 \mp \frac{ay}{r^2} + \frac{2y^2}{r^2} \right]\end{aligned}\quad (2.67)$$

und daher bei  $y = 0$ , also an der Platte:

$$\begin{aligned}E_y(\vec{r}) &= \frac{q}{2r} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-3/2} \cdot \left( -\frac{4a}{r^2} \right) = -\frac{2aq}{r^3} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-3/2} \\ &= -\frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{3/2}}.\end{aligned}\quad (2.68)$$

demnach wird die Flächenladung

$$\sigma = \frac{E_y(\vec{r})}{4\pi} = -\frac{aq}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}\quad (2.69)$$

induziert, deren Integral über die gesamte Ebene  $-q$  ergeben muss (und ergibt)!

## 2.7 Wechselwirkung einer Ladung mit einem äußeren Feld

- Sei  $\rho(\vec{r})$  eine Ladungsverteilung in einem äußeren Feld  $\phi(\vec{r})$ . Wir denken uns die Ladung in infinitesimale Teile  $\delta q = \rho \delta V$  zerlegt, die von außen in das Feld gebracht werden.
- Auf jede Ladung  $\delta q$  wirkt die Kraft

$$\delta \vec{F} = \vec{E} \cdot \delta q.\quad (2.70)$$

Um also die Ladung vom Unendlichen an den Ort  $\vec{r}$  zu transportieren, muss die Arbeit

$$\begin{aligned}\delta W &= - \int_{\infty}^{\vec{r}} \delta \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \delta q \cdot d\vec{s} = \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{\nabla} \phi \delta q \cdot d\vec{s} \\ &= \phi(\vec{r}) \delta q = \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) \delta V\end{aligned}\quad (2.71)$$

verrichtet werden. Die Ladungsverteilung hat somit die *potentielle Energie*

$$W = \int \phi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) dV.\quad (2.72)$$

Entwickeln wir das Feld in eine Taylorreihe bis zur ersten Ordnung,

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 + \vec{\nabla} \phi \Big|_0 \cdot \vec{r} + \dots,\quad (2.73)$$

können wir wegen

$$\vec{\nabla}\phi\Big|_0 = -\vec{E}(0) \quad (2.74)$$

schreiben:

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0 - \vec{r} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{2} x_i x_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \Big|_0 + \dots \quad (2.75)$$

Damit lautet die potentielle Energie bis zur 1. Ordnung

$$W = q\phi_0 - \vec{E}(0) \underbrace{\int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV'}_{=\vec{p}} \quad (2.76)$$

Man sagt, der Monopol  $q$  koppelt an das Potential, der Dipol  $\vec{p}$  an die Feldstärke.

- Sei etwa  $\vec{E}_1$ , das Fernfeld eines Dipols  $\vec{p}_1$ , dann ist nach (2.38)

$$\vec{E}_1 = -\frac{\vec{p}_1 - 3(\vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r}{r^3} \quad (2.77)$$

Der Monopol verschwindet für einen zweiten Dipol  $\vec{p}_2$ , woraus sich die potentielle Energie der Wechselwirkung zweier Dipole zu

$$W = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} - \frac{3}{r^3} (\vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r)(\vec{p}_2 \cdot \vec{e}_r) \quad (2.78)$$

ergibt. Offensichtlich hängt die Wechselwirkungsenergie der beiden Dipole nicht allein vom Abstand, sondern auch von der relativen Orientierung der beiden Dipole zueinander ab.

# Kapitel 3

## Dielektrika

### 3.1 Makroskopische Mittelung

- Materie besteht aus positiv und negativ geladenen Teilchen, die in der Regel nach außen hin fast oder völlig neutral sind, weil sich die mikroskopischen Ladungen makroskopisch ausgleichen. Diese Ladungen bewegen sich, wenn das Medium nicht bei absolut verschwindender Temperatur ist, in der Regel mit hohen Frequenzen regellos um ihre Ruhelagen.
- Das gesamte  $\vec{E}$ -Feld solcher Ladungsverteilungen wäre aus dem Integral über alle beteiligten Ladungen zu bestimmen, wobei dynamische Gleichungen zu verwenden wären, weil sich die geladenen Teilchen bewegen.
- Die gesamte, detaillierte Information über die so entstehenden mikroskopischen  $\vec{E}$ -Felder wird aber in der Regel überhaupt nicht gebraucht, statt dessen mittelt man die mikroskopischen Felder über makroskopische Volumina, die viele Teilchen enthalten, die aber immer noch klein gegenüber den Gesamtabmessungen des Systems sind. Dadurch entstehen makroskopisch gemittelte Felder  $\vec{E}$  und makroskopisch gemittelte Ladungsdichten  $\rho$ .
- Diese sind jetzt zeitlich konstant, denn die thermischen Bewegungen der einzelnen Ladungen sind regellos und finden auf Skalen statt, die per Definition klein gegenüber den Mittlungsvolumina  $V$  sind. Daher können die elektrostatischen Gleichungen auf die makroskopischen Felder angewandt werden.
- Moleküle haben üblicherweise keine statischen Dipolmomente, aber Dipolmomente können durch äußere Felder hervorgerufen werden. Etwa vorhandene Ladungen und diese Dipole mitteln wir nun über das Volumen  $V$  des Mediums. Dazu führen wir mithilfe

von Delta-Funktionen die mikroskopische Ladungsdichte  $\tilde{\rho}$  und eine ebenfalls mikroskopische Dipoldichte  $\tilde{\vec{\pi}}$  ein,

$$\tilde{\rho}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad \tilde{\vec{\pi}}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (3.1)$$

ein, die sich aus den Beiträgen der einzelnen Moleküle zusammensetzen. Ferner definieren wir durch

$$\rho(\vec{r}) := \frac{1}{V} \int dV' \tilde{\rho}(\vec{r} + \vec{r}'), \quad \vec{P}(\vec{r}) := \frac{1}{V} \int dV' \tilde{\vec{\pi}}(\vec{r} + \vec{r}') \quad (3.2)$$

eine mittlere Ladungsdichte und die *Polarisation*  $\vec{P}$ . Wie die Definition besagt, ist die Polarisation die gemittelte Dipoldichte im Medium. Die Volumina, über die gemittelt wird, werden als groß genug angesehen, um viele Moleküle zu enthalten, und zugleich als klein genug gegenüber den äußeren Abmessungen des Dielektrikums.

- Wir hatten in Kapitel 1 die dielektrische Verschiebung eingeführt, um die Reaktion eines Mediums auf eine Feldstärke  $\vec{E}$  zu beschreiben, wobei im Vakuum  $\vec{D} = \vec{E}$  war, was wir durch Einführung Gaußscher Einheiten erreicht hatten. Gleichung (1.69) sagt (unter anderem), dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad (3.3)$$

sei, wobei nun  $\vec{D}$  und  $\rho$  als makroskopisch gemittelte Größen aufzufassen sind. Wenden wir die Divergenz auf das elektrische Feld an, das sich aus der makroskopisch gemittelten Ladungsdichte und der Polarisation  $\vec{P}$  ergibt, zeigt eine längere Rechnung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{D} - 4\pi\vec{\nabla} \cdot \vec{P}. \quad (3.4)$$

- Mit (3.4) erhalten wir die dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \vec{E}(\vec{r}) + 4\pi\vec{P}(\vec{r}), \quad (3.5)$$

wobei  $\vec{E}$  jetzt als makroskopisch gemittelte Feldstärke aufzufassen ist. Die Polarisation  $\vec{P}$  beschreibt die Antwort des Mediums auf ein anregendes elektrisches Feld  $\vec{E}$ , sodass im Medium die Feldstärke  $\vec{E}$  zur dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}$  wird.

- Wegen des angenommenen linearen Zusammenhangs zwischen  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$ ,  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$  (vgl. Abschnitt 1.4), folgt

$$\vec{E} + 4\pi\vec{P} = \epsilon\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}\vec{E} =: \chi_e\vec{E}, \quad (3.6)$$

also ebenso ein linearer Zusammenhang zwischen  $\vec{P}$  und  $\vec{E}$ , in dem die *dielektrische Suszeptibilität*  $\chi_e$  definiert wurde.

## 3.2 Grenzbedingungen

- Wir gehen davon aus, dass die Dielektrizität  $\varepsilon$  eine Konstante ist und mit ihr auch die Suszeptibilität  $\chi_e$ . Damit gilt einerseits für die dielektrische Verschiebung, wegen  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = 4\pi \int_V dV \rho = 4\pi q, \quad (3.7)$$

und ebenso für das elektrische Feld  $\vec{E}$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi(q + q_p), \quad (3.8)$$

worin  $q_p$  die Ladung ist, die durch die Polarisation des Mediums entsteht. Zu ihr gehört die Ladungsdichte

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad (3.9)$$

so dass insgesamt gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho = \vec{\nabla} \cdot [\vec{E} + 4\pi\vec{P}] = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - 4\pi\rho_p, \quad (3.10)$$

also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_p). \quad (3.11)$$

- Während die Quellen von  $\vec{D}$  die freien Ladungen  $\rho$  sind, tragen sowohl die freien wie die durch Polarisation induzierten Ladungen als Quellen zu  $\vec{E}$  bei.
- Wir betrachten nun, wie in 1.3, eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Die Grenzfläche schließen wir durch ein Prisma der Höhe  $\Delta h$  und der Grundfläche  $\Delta A$  so, dass  $\Delta A$  lokal parallel zur Grenzfläche liegt:
- Nun gilt, wegen (3.7),

$$(\vec{D}_1 \cdot \vec{n} - \vec{D}_2 \cdot \vec{n})\Delta A = 4\pi\Delta q, \quad (3.12)$$

wobei  $\Delta q$  die vom Prisma eingeschlossene Ladung ist. Da die Höhe des Prismas verschwindend klein wird, kann es sich dabei nur um eine Flächenladung auf der Grenzfläche handeln. Mit

$$\sigma := \frac{\Delta q}{\Delta A} \quad \text{folgt} \quad D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma \quad (3.13)$$

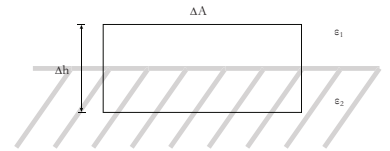
für die Änderung der Normalenkomponente von  $\vec{D}$ .

- Völlig analog erhält man für  $\vec{E} \cdot \vec{n}$

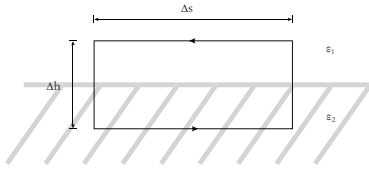
$$E_{1n} - E_{2n} = 4\pi(\sigma + \sigma_p). \quad (3.14)$$

Da  $\vec{E}$  nach wie vor ein Gradient ist, gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (3.15)$$



Prisma über einer Grenzfläche



Geschlossene Kurve um eine Grenzfläche

- Daraus erhalten wir Grenzbedingungen wie folgt: Wir schließen die Grenzfläche durch eine Kurve ein, die oberhalb und unterhalb der Grenzfläche parallel dazu verläuft und deren Höhe  $\Delta h$  beliebig klein wird. Mit dem Stokesschen Satz folgt aus (3.15)

$$\int_A (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{A} = 0 = \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_{1t} - E_{2t}, \quad (3.16)$$

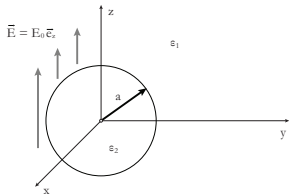
wobei  $E_{1t}, E_{2t}$  die Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  auf beiden Seiten der Grenzfläche sind. Die Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  sind also an einer Grenzfläche stetig;

### 3.3 Kugel im Dielektrikum

- Gegeben sei eine Kugel vom Radius  $a$  mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_2$ , eingebettet in ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1$ . In Abwesenheit der Kugel sei ein homogenes elektrisches Feld

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \quad (3.17)$$

in diesem Gebiet. Wie sehen Potential und Feld in Anwesenheit der Kugel aus?



Kugel im Dielektrikum

- Die Kugel sei auf den Ursprung zentriert. Aufgrund der Symmetrie liegt es nahe, Zylinderkoordinaten  $r, \varphi$  und  $z$  einzuführen. Wir brauchen außerdem den Winkel  $\theta$  zwischen Ortsvektoren und der  $\vec{z}$ -Achse.
- Das  $\vec{E}$ -Feld wird die Kugel polarisieren, d.h. es werden Polarisationsladungen auf der Kugeloberfläche auftreten. Da es sich dabei nicht um wahre Ladungen handelt, wird die Normalkomponente von  $\vec{D}$  auf der Kugeloberfläche stetig sein,

$$D_{r2} = D_{r1}. \quad (3.18)$$

außerdem muss die tangentielle Komponente von  $\vec{E}$  auf der Kugeloberfläche stetig sein,

$$E_{\theta 1} = E_{\theta 2} \quad (3.19)$$

(wegen der Symmetrie muss  $E_\varphi = 0$  sein).

- Die Gleichungen, die erfüllt sein müssen, sind demnach

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 = \varepsilon_i \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \Rightarrow \Delta \phi = 0, \quad (3.20)$$

denn die beiden  $\varepsilon_i$  seien konstant.



- In großem Abstand von der Kugel muss das äußere Potential

$$\phi_1 = -E_0 z \quad \text{für} \quad z \gg a \quad (3.21)$$

sein. Durch die polarisierte Oberflächenladung wird außerdem die Kugel von außen wie ein Dipol aussehen, denn wegen der Konstanz von  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  wird  $\vec{P}$  parallel zum angelegten  $\vec{E}$ -Feld sein. Nach (2.36) ist das Potential eines Dipols

$$\phi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} . \quad (3.22)$$

Wir setzen also das Potential außerhalb der Kugel mit

$$\phi_1 = -E_0 z + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (3.23)$$

an. Innerhalb wird

$$\phi_2 = -E_i z \quad (3.24)$$

sein, da die Medien linear reagieren. Sowohl  $\phi_1$  wie  $\phi_2$  erfüllen die Laplace-Gleichung.

- Die Grenzbedingung (3.18) erfordert

$$\varepsilon_1 \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = \varepsilon_2 \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right|_{r=a} , \quad (3.25)$$

also, mit (3.23) und (3.24):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \left. \frac{\partial}{\partial r} \left[ -E_0 r \cos \theta + p_z \frac{\cos \theta}{r^2} \right] \right|_{r=a} &= \varepsilon_2 \left. \frac{\partial}{\partial r} (-E_i r \cos \theta) \right|_{r=a} \\ \Rightarrow \varepsilon_1 \left[ -E_0 \cos \theta - 2p_z \frac{\cos \theta}{a^3} \right] &= -\varepsilon_2 E_i \cos \theta . \end{aligned} \quad (3.26)$$

weiterhin verlangt (3.19)

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right|_{r=a} , \quad (3.27)$$

woraus

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ -E_0 r \cos \theta + p_z \frac{\cos \theta}{r^2} \right] \right|_{r=a} &= \left. \frac{\partial}{\partial \theta} (-E_i r \cos \theta) \right|_{r=a} \\ \Rightarrow E_0 a \sin \theta - p_z \frac{\sin \theta}{a^2} &= E_i a \sin \theta \end{aligned} \quad (3.28)$$

folgt. Insbesondere muss (3.26) bei  $\theta = 0$  gelten, also

$$\varepsilon_1 \left( E_0 + \frac{2p_z}{a^3} \right) = \varepsilon_2 E_i , \quad (3.29)$$

und (3.28) bei  $\theta = \pi/2$ , also

$$E_0 - \frac{p_z}{a^3} = E_i . \quad (3.30)$$

- Daraus folgt durch Eliminierung von  $p_z/a^3$  aus (3.30)

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} [E_0 + 2(E_0 - E_i)] \Rightarrow E_i \left(1 + 2\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) = 3E_0 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\ \Rightarrow E_i &= E_0 \cdot \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

mithin ist

$$\phi_2 = -E_0 \cdot \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} r \cos \theta . \quad (3.32)$$

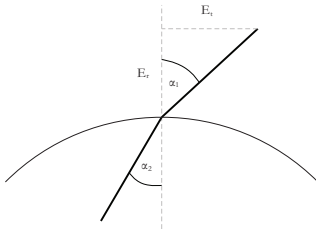
- Schließlich folgt aus (3.30) mit (3.31)

$$p_z = a^3(E_0 - E_i) = a^3 E_0 \left(1 - \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right) = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^3 E_0 , \quad (3.33)$$

also für das Potential im Außenraum

$$\phi_1 = -E_0 r \cos \theta + E_0 a^3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\cos \theta}{r^2} . \quad (3.34)$$

- An der Oberfläche der Kugel tritt eine Brechung auf, die wir zunächst für  $\vec{E}$  betrachten. Die Normalkomponente von  $\vec{E}$  ist



Normal- und Tangentialkomponente des  $\vec{E}$ -Feldes

$$\begin{aligned} E_{r1} &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = E_0 \cos \theta + 2E_0 \cos \theta \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \text{außen,} \\ E_{r2} &= -\frac{\partial \phi_2}{\partial r} \Big|_{r=a} = E_0 \cos \theta \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \text{innen;} \end{aligned} \quad (3.35)$$

die Tangentialkomponente bleibt stetig. Bezeichnet  $\alpha$  den Winkel zwischen der Normalen und der Richtung von  $\vec{E}$ , folgt

$$\tan \alpha_1 = \frac{E_{t1}}{E_{r1}} , \quad \tan \alpha_2 = \frac{E_{t2}}{E_{r2}} . \quad (3.36)$$

also

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{E_{r2}}{E_{r1}} = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} . \quad (3.37)$$

- Ebenso folgt für das  $\vec{D}$ -Feld

$$\begin{aligned} D_{r1} &= D_{r2} . \\ D_{\theta 1} &= -\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -\varepsilon_1 E_0 \left( a \sin \theta - a \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \sin \theta \right) , \\ D_{\theta 2} &= -\varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = -E_0 \frac{3\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a \sin \theta . \end{aligned} \quad (3.38)$$

- Wenn  $\beta$  der Winkel zwischen  $\vec{D}$  und der Normalenrichtung ist, folgt

$$\begin{aligned} \tan \beta_1 &= \frac{D_{\theta 1}}{D_{r1}} , \quad \tan \beta_2 = \frac{D_{\theta 2}}{D_{r2}} , \quad \text{und damit} \\ \frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} &= \frac{D_{\theta 1}}{D_{\theta 2}} = \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_2 + \varepsilon_1}{3\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} . \end{aligned} \quad (3.39)$$

- $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  werden also auf dieselbe Weise gebrochen. Wenn die Kugel „dichter“ als das umgebende Dielektrikum ist, also  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , ist offenbar

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} < 1, \quad (3.40)$$

mithin werden dann  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  zur Normalen *hin* gebrochen (im Gegensatz zur Optik!)

- Die Polarisation  $\vec{P}$  wird durch die Oberflächenladung  $\sigma_p$  auf der Kugel hervorgerufen. Wegen (3.9) ist

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \int_{\partial V} \vec{P} \cdot d\vec{A} = -\sigma_p A \Rightarrow P_{1r} - P_{2r} = -\sigma_p. \quad (3.41)$$

nun ist wegen (3.6)

$$P_{1r} = \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} E_{1r}, \quad P_{2r} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} E_{2r} \quad (3.42)$$

und damit, mit (3.35)

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{\varepsilon_2 - 1}{4\pi} E_0 \cos \theta \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \\ &\quad - \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} \left( 1 + 2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) E_0 \cos \theta \\ &= -\frac{E_0 \cos \theta}{4\pi} \left( \frac{\varepsilon_1 - 1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot 3\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_2 - 1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \cdot 3\varepsilon_1 \right) \\ &= -3 \frac{E_0 \cos \theta}{4\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

- Dazu gehört offenbar die Ladungsdichte

$$\rho_p(\vec{r}) = \sigma_p \delta(r - a). \quad (3.44)$$

ihr Monopol verschwindet offensichtlich. Ihr Dipolmoment ist

$$\vec{p} = \int \sigma_p a \vec{e}_r \cdot d\vec{A}, \quad (3.45)$$

weil es sich durch die Überlagerung aller Dipole ergeben muss, die sich aus den infinitesimalen Ladungen  $\sigma_p dA$  auf der Kugeloberfläche bilden lassen. Das Integral in (3.45) lautet in kartesischen Komponenten

$$\vec{p} = -3 \frac{E_0 a^3}{4\pi} \int d\varphi \int \sin \theta d\theta \cos \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Nur die  $z$ -Komponente überlebt die Integration über  $\varphi$ . Sie ergibt

$$p_z = -3 \frac{E_0 a^3}{4\pi} \int d\varphi \int \sin \theta d\theta \cos^2 \theta = -E_0 a^3. \quad (3.47)$$

Daher ist das Dipolmoment der induzierten Flächenladungen

$$\vec{p} = p_z \vec{e}_z = -E_0 a^3 \vec{e}_z, \quad (3.48)$$

und dessen Potential ist

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\frac{E_0 a^3 \cos \theta}{r^2}, \quad (3.49)$$

also genau das in (3.34) geforderte Potential.

### 3.4 Molekulare Polarisierbarkeit

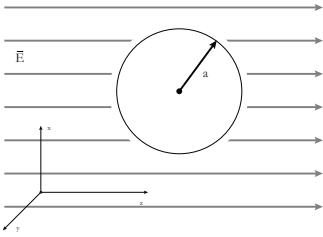
- Unter der Annahme, dass das Dielektrikum linear auf das äußere Feld reagiert, war die Polarisation proportional zum  $\vec{E}$ -Feld,

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \quad (3.50)$$

vgl. (3.6). Nach (3.2) und (3.1) setzt sich die Polarisation aus den Dipolmomenten der einzelnen Moleküle zusammen,

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \frac{1}{V} \int_V dV' \pi(\vec{r} + \vec{r}') = \frac{1}{V} \int_V \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \delta(\vec{r} + \vec{r}' - \vec{r}_i) \\ &= \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = n \langle \vec{p} \rangle, \end{aligned} \quad (3.51)$$

wobei  $\langle \vec{p} \rangle$  das mittlere Dipolmoment pro Molekül und  $n$  deren Anzahlichte ist.



Zur molekularen Polarisierbarkeit

- Das mittlere Dipolmoment wird etwa proportional zum angelegten *lokalen* Feld  $\vec{E}_{\text{loc}}$  sein, nicht zum makroskopisch gemittelten Feld  $\vec{E}$ . Um  $\vec{E}_{\text{loc}}$  zu bestimmen zerlegen wir es in das makroskopische Feld  $\vec{E}$  und das Feld der Polarisation um das betrachtete Molekül herum. Dazu umgeben wir das betrachtete Molekül mit einer Kugel vom Radius  $a$ .

- Das äußere Feld  $\vec{E}$  erzeugt eine Flächenladung  $\sigma$  auf der Innenseite des kugelförmigen Hohlraums, zu der wegen (3.41) die Polarisation

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = -P \cos \theta = \sigma \quad (3.52)$$

gehört. Das Vorzeichen ergibt sich daraus, dass  $\vec{n}$  nun nach innen zeigt.

- Das Ladungselement  $\sigma dA = \sigma a^2 d\Omega = \sigma a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$  erzeugt am Ort des Moleküls das Coulombfeld

$$d\vec{E} = -\frac{\sigma a^2 \sin \theta d\theta d\varphi}{a^2} \vec{e}_r, \quad (3.53)$$

das in  $z$ -Richtung die Komponente

$$dE_z = d\vec{E} \cdot \vec{e}_z = -\sigma \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi = P \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi \quad (3.54)$$

hat; Integration über die Kugel ergibt

$$E_z = 2\pi P \int_{-1}^{+1} \cos^2 \theta d(\cos \theta) = \frac{4\pi}{3} P. \quad (3.55)$$

- Nun ist also

$$\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} P \vec{e}_z = \vec{P} \left( \frac{1}{\chi_e} + \frac{4\pi}{3} \right) \quad (3.56)$$

wegen (3.50). Unter der Annahme

$$\langle \vec{p} \rangle = \gamma \vec{E}_{\text{loc}} \quad \text{folgt} \quad \langle \vec{p} \rangle = \gamma \vec{P} \left( \frac{1}{\chi_e} + \frac{4\pi}{3} \right) \quad (3.57)$$

oder, mit (3.51)

$$\begin{aligned} \vec{P} &= n \langle \vec{p} \rangle = n\gamma \vec{P} \left( \frac{1}{\chi_e} + \frac{4\pi}{3} \right) \\ \Rightarrow 1 &= n\gamma \left( \frac{1}{\chi_e} + \frac{4\pi}{3} \right) \\ \Rightarrow \chi_e &= \left( \frac{1}{n\gamma} - \frac{4\pi}{3} \right)^{-1} = \frac{n\gamma}{1 - \frac{4\pi}{3} n\gamma}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

- Außerdem war die Suszeptibilität nach (3.6) durch

$$\chi_e = \frac{\varepsilon_1 - 1}{4\pi} \quad (3.59)$$

mit der Dielektrizitätskonstanten verknüpft. Damit schließt man aus (3.58) auf die *Clausius-Mossotti-Formel*

$$\gamma = \frac{1}{n \left( \frac{4\pi}{\varepsilon - 1} + \frac{4\pi}{3} \right)} = \frac{3}{4\pi n} \frac{\varepsilon - 1}{3 + \varepsilon - 1} = \frac{3}{4\pi n} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \quad (3.60)$$

für die *molekulare Polarisierbarkeit*  $\gamma$ .

### 3.5 Modell für die molekulare Polarisierbarkeit

- Ein einfaches Modell für die molekulare Polarisierbarkeit lässt sich unter der Annahme konstruieren, Elektronen seien harmonisch an (ortsfeste) Kerne gebunden. Die Bewegungsgleichung für ein solches Elektron ist

$$m\ddot{\vec{x}} + m\omega^2 \vec{x} = -e\vec{E}, \quad (3.61)$$

wobei  $\omega$  die Oszillationsfrequenz des Elektrons ist.

- Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ist

$$\vec{x} = \vec{x}_0 e^{i\omega t} - \frac{e}{m\omega^2} \vec{E}, \quad (3.62)$$

ergibt also das Dipolmoment

$$\vec{p} = -e\vec{x} = -e\vec{x}_0 e^{i\omega t} + \frac{e^2}{m\omega^2} \vec{E} \quad (3.63)$$

für das Elektron.

- Gemittelt über Zeiten, die gegenüber der Schwingungszeit  $\omega^{-1}$  lang sind, verschwindet der erste Term, und das mittlere Dipolmoment wird zu

$$\langle \vec{p} \rangle = \frac{e^2}{m\omega^2} \vec{E}, \quad (3.64)$$

woraus die molekulare Polarisierbarkeit

$$\gamma = \frac{e^2}{m\omega^2} \quad (3.65)$$

folgt.

# Kapitel 4

## Magnetostatik

### 4.1 Das Vektorpotential

- Wir gehen ähnlich wie in der Elektrostatik von stationären Feldern aus, setzen also  $\dot{\vec{B}} = 0$  voraus, und verlangen außerdem  $\dot{\vec{D}} = 0$ . Dann gilt aufgrund der Maxwell-Gleichungen (1.69)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (4.1)$$

worin jetzt  $\vec{j}$  der reine Ladungsstrom ist (weil kein Verschiebungsstrom auftritt). Im Vakuum gilt außerdem  $\mu = 1$ ,  $\vec{H} = \vec{B}$ , und damit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.2)$$

Das Magnetfeld hat offenbar nur dort eine Rotation, wo die Stromdichte nicht verschwindet. Außerhalb von Leitern ist offenbar auch  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ , sodass dort  $\vec{H} = \vec{\nabla} \phi_M$  als Gradient eines magnetischen Skalarpotentials  $\phi_M$  geschrieben werden kann. Im Gegensatz zum elektrischen Feld, das *überall* als Gradient eines Potentials  $\phi$  geschrieben werden kann, brauchen wir hier eine allgemeinere Beschreibung, die in Leitern und außerhalb gilt.

- Wegen der ersten Gleichung (4.1) folgt, dass jede Rotation einer beliebigen Funktion  $\vec{A}$  als  $\vec{B}$ -Feld dort eingesetzt werden kann, denn da die Divergenz einer Rotation identisch verschwindet, folgt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4.3)$$

da außerdem die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet, kann  $\vec{A}$  durch  $\vec{A} + \vec{\nabla} \psi$  verändert werden, ohne dass das  $\vec{B}$ -Feld sich ändert,

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \psi. \quad (4.4)$$

dieser Spezialfall einer *Eichtransformation* wird uns später mehr beschäftigen.

- Setzt man  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  an, muss wegen der zweiten Gleichung (4.1) bzw. der Gleichung (4.2) gelten

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \quad (4.5)$$

wobei im zweiten Schritt die Vektoridentität für doppelte Kreuzprodukte verwendet wurde.

- Wir verwenden nun die Eichfreiheit (4.4), um  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  zu erreichen, d.h. wir suchen eine Funktion  $\psi$  so, dass

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{A} + \vec{\nabla}\psi] = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta\psi = 0 \quad (4.6)$$

gilt. Das ist immer möglich, denn wegen (2.29) genügt es,

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (4.7)$$

zu setzen. Mit dieser so genannten Coulomb-Eichung folgt aus (4.5) die Bedingung

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (4.8)$$

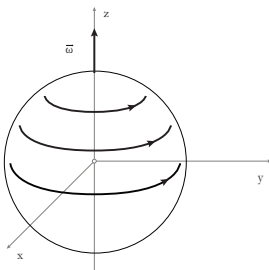
oder, wieder mit (2.29)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'. \quad (4.9)$$

dies ist das *Vektorpotential* des magnetischen Feldes. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass für  $\vec{A}$  aus (4.9) die Eichbedingung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  gilt.

- Da das Vektorpotential ebenso wie das skalare Potential  $\phi$  aus einer Poisson-Gleichung folgt, gelten die Aussagen aus 2.5 und 2.6 über die Eindeutigkeit des Potentials genauso für das Vektorpotential.

## 4.2 Beispiel: Magnetfeld einer geladenen, rotierenden Kugel



Zum Magnetfeld einer rotierenden, geladenen Kugel

- Eine Kugel vom Radius  $R$  trage die Ladung  $q$  und rotiere (starr) mit der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ . Die Ladung sei auf der Kugeloberfläche verteilt und die Drehachse gehe durch das Zentrum der Kugel. Wir suchen das Vektorpotential  $\vec{A}$  und das magnetische Feld  $\vec{B}$  dieser Kugel.
- Die Stromdichte ist durch

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (4.10)$$



gegeben, wobei  $\rho$  die Ladungsdichte ist. Da die Ladung auf der Kugeloberfläche sitzt, ist

$$\rho = \sigma \delta(r - R) = \frac{q}{4\pi R^2} \delta(r - R) , \quad (4.11)$$

wobei  $\sigma$  die Flächenladung ist. Offenbar ist

$$\int \rho(\vec{r}) d^3 r = \frac{q}{4\pi R^2} \int r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \delta(r - R) = q , \quad (4.12)$$

wie es sein muss.

- Die Rotationsgeschwindigkeit  $\vec{v}$  ist

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} , \quad (4.13)$$

und damit ist

$$\vec{j} = \frac{q}{4\pi R^2} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \delta(r - R) , \quad (4.14)$$

woraus mit (4.9) das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{q}{4\pi R^2} (\vec{\omega} \times \vec{r}') \frac{\delta(r' - R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.15)$$

folgt. Darin bleibt das Integral

$$\int d^3 r' \vec{r}' \frac{\delta(r' - R)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} =: F(\vec{r}) \quad (4.16)$$

zu bestimmen. Dazu schreiben wir zunächst

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta']^{1/2} , \quad (4.17)$$

worin  $\theta'$  der Winkel zwischen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  ist. Zur Auswertung des Integrals können wir o.B.d.A.  $\vec{r}$  in Richtung der  $\vec{z}$ -Achse legen, wodurch  $\theta'$  der Polarwinkel wird. es folgt für  $\vec{F}(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= \int r'^2 dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi' \frac{\delta(r' - R)}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} \\ &\times r' \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \theta' \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (4.18)$$

da die Integrale über  $\varphi'$  von 0 bis  $2\pi$  reichen, verschwinden die  $x'$ - und die  $y'$ -Komponenten von  $\vec{F}$ , und für die  $z'$ -Komponente bleibt

$$F_z(\vec{r}) = 2\pi R^3 \int_{-1}^{+1} \frac{d(\cos \theta') \cos \theta'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta'}} . \quad (4.19)$$

das verbleibende Integral ist von der Art

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{\sqrt{a - bx}} , \quad \text{mit } a = r^2 + R^2 , \quad b = 2rR . \quad (4.20)$$

es hat die Lösung

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{\sqrt{a-bx}} &= \frac{2}{3b^2} (-bx - 2a) \sqrt{a-bx} \Big|_{-1}^{+1} \\ &= \frac{2}{3b^2} \left[ (b+2a) \sqrt{a-b} - (-b+2a) \sqrt{a+b} \right] . \quad (4.21) \end{aligned}$$

damit folgt

$$\begin{aligned} F_z(\vec{r}) &= 2\pi R^2 \left( -\frac{2}{3 \cdot 4r^2 R^2} \left[ (2rR + 2(r^2 + R^2)) \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (-2rR + 2(r^2 + R^2)) \sqrt{r^2 + R^2 + 2rR} \right] \right) \\ &= -\frac{2\pi R}{3r^2} \left[ (r^2 + R^2 + rR)|r - R| - (r^2 + R^2 - rR)(r + R) \right] . \end{aligned}$$

innerhalb der Kugel ist  $r < R$ , also  $|r - R| = R - r$ , und

$$\begin{aligned} F_z(\vec{r}) &= -\frac{2\pi R}{3r^2} \left[ (r^2 + R^2)(R - r - R - r) + rR(R - r + R + r) \right] \\ &= -\frac{2\pi R}{3r^2} (-2r(r^2 + R^2) + 2rR^2) = \frac{4\pi}{3} rR , \quad (4.22) \end{aligned}$$

während außerhalb der Kugel gilt

$$\begin{aligned} F_z(\vec{r}) &= -\frac{2\pi R}{3r^2} \left[ (r^2 + R^2)(r - R - r - R) + rR(r - R + r + R) \right] \\ &= -\frac{2\pi R}{3r^2} (-2R(r^2 + R^2) + 2r^2 R) = \frac{4\pi}{3} \frac{R^4}{r^2} . \quad (4.23) \end{aligned}$$

da  $\vec{F}(\vec{r})$  in Richtung von  $\vec{r}$  zeigt (alle anderen Komponenten waren verschwunden), ist

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_z(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r} , \quad (4.24)$$

also ist das Vektorpotential nach (4.15)

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi c R^2} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \begin{cases} \frac{4\pi}{3} R & (r < R) \\ \frac{4\pi}{3} \frac{R^4}{r^3} & (r > R) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{q}{3cR} (\vec{\omega} \times \vec{r}) & (r < R) \\ \frac{qR^2}{3cr^3} (\vec{\omega} \times \vec{r}) & (r > R) \end{cases} , \quad (4.25) \end{aligned}$$

da  $\vec{\omega}$  als konstant angenommen wurde, ist für  $r < R$

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{q}{3cR} \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{q}{3cR} \left[ \vec{\omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{r} \right] \\ &= \frac{q}{3cR} (3\vec{\omega} - \omega_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}) = \frac{2q}{3cR} \vec{\omega} \quad (r < R) . \quad (4.26) \end{aligned}$$

für  $r > R$  dagegen ist

$$\vec{B} = \frac{qR^2}{3c} \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \frac{\vec{r}}{r^3}) = \frac{qR^2}{3c} \left[ \vec{\omega} (\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} \right]. \quad (4.27)$$

nun ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} &= \frac{(\vec{\nabla} \cdot \vec{r})r^3 - \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} r^3)}{r^6} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0, \\ (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \frac{x_j}{r^3} &= (\omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}) \frac{x_j}{r^3} = \omega_i \left[ \frac{r^3 \cdot \delta_{ij} - x_j 3r^2 \frac{x_i}{r}}{r^6} \right] \\ &= \omega_i \left( \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

also, für  $r > R$ ,

$$\vec{B} = \frac{qR^2}{3c} \left( \frac{3}{r^5} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \frac{\vec{\omega}}{r^3} \right) = \frac{qR^2}{3c} \cdot \frac{3(\vec{\omega} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{\omega}}{r^3}. \quad (4.29)$$

ein Vergleich mit (2.38) legt nahe, das *magnetische Dipolmoment*

$$\vec{m} := \frac{qR^2}{3c} \vec{\omega} \quad (4.30)$$

einzuführen, mit dem sich das Magnetfeld außerhalb der Kugel als Dipolfeld

$$\vec{B} = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{m}}{r^3} \quad (r > R) \quad (4.31)$$

schreiben lässt, während innerhalb der Kugel

$$\vec{B} = \frac{2\vec{m}}{R^3} \quad (r < R) \quad (4.32)$$

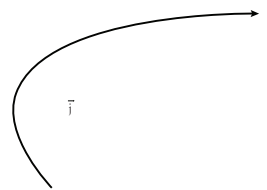
gilt.

## 4.3 Das Biot-Savartsche Gesetz

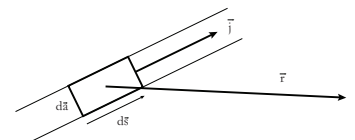
- Sei ein Leiter vorgegeben, in dem ein Strom mit der Stromdichte  $\vec{j}$  fließt. Der Querschnitt des Leiters sei  $d\vec{a}$ , und er sei durch eine Kurve  $\vec{s}(\lambda)$  beschrieben.
- Wir betrachten ein infinitesimales Element des Leiters mit der Länge  $|d\vec{s}|$  und der Richtung  $d\vec{s}$ .
- Im Abstand  $\vec{r}$  erzeugt das Leiterelement das Vektorpotential

$$d\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\vec{j} \cdot d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c} \frac{\vec{j} d^3 r'}{r}, \quad (4.33)$$

wobei  $\vec{r}'$  innerhalb des Leiterelements variiert und daher gegenüber  $\vec{r}$  vernachlässigt werden kann .



Teil einer Stromschleife



Infinitesimales Leiterelement, das von einem Strom durchflossen wird

- Außerhalb ist nach Voraussetzung  $\vec{j} = j d\vec{s}/|d\vec{s}|$  und  $d^3r' = |d\vec{a}| \cdot |d\vec{s}|$ . Der Strom  $I$  ist schließlich

$$I = \vec{j} \cdot d\vec{a} = j |d\vec{a}|, \quad (4.34)$$

denn  $d\vec{a}$  zeigt in Richtung von  $\vec{j}$ .

- Damit folgt für das Element des Vektorpotentials

$$d\vec{A} = \frac{1}{cr} \cdot j \frac{d\vec{s}}{|d\vec{s}|} \cdot |d\vec{a}| \cdot |d\vec{s}| = \frac{I \cdot d\vec{s}}{cr}. \quad (4.35)$$

die Rotation davon ist der Betrag des Leiterelements zum Magnetfeld,

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \vec{\nabla} \times d\vec{A} = \vec{\nabla} \times \frac{I \cdot d\vec{s}}{cr} = -\frac{I \cdot d\vec{s}}{c} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r} \\ &= -\frac{I \cdot d\vec{s}}{c} \times \left( -\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{I}{c} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

das ist das *Biot-Savartsche Gesetz*.

- Beispielsweise erzeugt ein Strom  $I$  in einem kreisförmigen Leiter mit Radius  $R$  das Magnetfeld

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ &= -\frac{I}{c} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R \cos \varphi - r_x \\ R \sin \varphi - r_y \\ 0 - r_z \end{pmatrix} \frac{d\varphi}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

wobei angenommen wurde, dass die Stromschleife in der  $x$ - $y$ -Ebene liegt. Längs der  $z$ -Achse etwa ist  $\vec{r} = (0, 0, r)$ , und damit

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = \left\| \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ -r \end{pmatrix} \right\|^3 = (R^2 + r^2)^{3/2}, \quad (4.38)$$

und

$$\begin{aligned} d\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= - \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \times \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ -r \end{pmatrix} \\ &= R \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ R \end{pmatrix} d\varphi, \end{aligned} \quad (4.39)$$

womit für das  $\vec{B}$ -Feld folgt

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{I}{c} \int_0^{2\pi} R d\varphi \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ R \end{pmatrix} \frac{1}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= 2\pi \frac{I}{c} \frac{R^2}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \vec{e}_z \end{aligned} \quad (4.40)$$

## 4.4 Das magnetische Moment

- Sei eine lokalisierte Stromverteilung vorgegeben, also eine Stromdichte  $\vec{j}(\vec{x})$ , die auf ein endliches Volumen begrenzt ist. Sie erzeugt das Vektorpotential  $\vec{A}$  mit den Komponenten

$$A_i(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{j_i(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} . \quad (4.41)$$

für einen Punkt  $\vec{r}$  weit entfernt von  $V$  kann der Nenner in (4.41) entwickelt werden,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}} \approx \frac{1}{|\vec{r}|} \left( 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{|\vec{r}|^2} \right) , \quad (4.42)$$

wobei nur der Term erster Ordnung in  $|\vec{r}'|$  mitgenommen wurde. Die beiden Terme in (4.42) entsprechen dem Monopol und dem Dipol der Stromverteilung.

- Wir betrachten nun für zunächst beliebige, nicht singuläre Funktionen  $f(\vec{r})$ ,  $g(\vec{r})$  das Integral

$$\int_V d^3 r (f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f) \quad (4.43)$$

und zeigen, dass es verschwindet, wenn  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  ist. Dazu integrieren wir im zweiten Term partiell ,

$$\int_V d^3 r (f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{j} \cdot \vec{\nabla} f) = \int_V d^3 r (f \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g - f \vec{\nabla} \cdot (g \vec{j})) , \quad (4.44)$$

denn die Randterme verschwinden, weil die Stromverteilung nach Voraussetzung lokalisiert ist. Nun verwenden wir im zweiten Term in (4.44) die Identität

$$\vec{\nabla} \cdot (g \vec{j}) = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{\nabla} g , \quad (4.45)$$

denn  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  nach Voraussetzung, also verschwindet, wie behauptet, das Integral (4.44).

- Mit  $f = 1$  und  $g = x_i$  speziell folgt

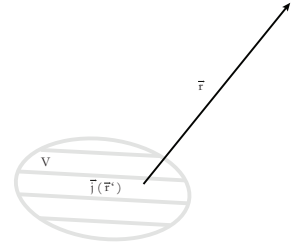
$$\int_V d^3 r \left( j_k \frac{\partial}{\partial x_k} x_i \right) = \int_V d^3 r j_i(\vec{r}) = 0 , \quad (4.46)$$

und damit verschwindet auch der Monopol von  $A_i$ :

$$\frac{1}{c} \int_V \frac{j_i(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{cr} \int_V d^3 r' j_i(\vec{r}') = 0 . \quad (4.47)$$

Den Dipol erhält man, indem man  $f = x_i$  und  $g = x_j$  setzt:

$$\int d^3 r \left( x_i j_k \frac{\partial x_j}{\partial x_k} + x_j j_k \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right) = \int d^3 r (x_i j_j + x_j j_i) = 0 . \quad (4.48)$$



Zur Entwicklung des Vektorpotentials

Daraus erhalten wir für den Dipolterm der  $i$ -Komponente des Vektorpotentials

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{cr^3} \vec{r} \cdot \int_V d^3 r' \vec{r}' j_i(\vec{r}') = \frac{1}{cr^3} x_k \int_V d^3 r' x'_k j_i(\vec{r}') \\
 &= \frac{1}{2cr^3} x_k \int_V d^3 r' [x'_k j_i(\vec{r}') - x'_i j_k(\vec{r}')] \\
 &= -\frac{1}{2cr^3} x_k \epsilon_{ikl} \int_V d^3 r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')]_l \\
 &= -\frac{1}{2cr^3} \left[ \vec{r} \times \int_V d^3 r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \right]_i, \tag{4.49}
 \end{aligned}$$

worin das Levi-Civita-Symbol  $\epsilon_{ijk}$  eingeführt wurde. Das *magnetische Moment*  $\vec{m}$  der Stromverteilung ist durch

$$\vec{m} := \frac{1}{2c} \int_V d^3 r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \tag{4.50}$$

definiert, woraus sich das Vektorpotential in Dipolnäherung zu

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \tag{4.51}$$

ergibt. Das Magnetfeld ist dann

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{m} \left( \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3}. \tag{4.52}$$

wie wir in (4.28) gesehen haben, ist

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0, \quad (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{x_j}{r^3} = m_i \left( \frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} \right), \tag{4.53}$$

also

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{m}}{r^3}, \tag{4.54}$$

das ist das Dipolfeld, das uns schon in (4.31) begegnet war.

- Denkt man sich die Stromverteilung aus einzelnen diskreten Ladungsträgern an den Orten  $\vec{r}_i$  zusammengesetzt, die sich mit den Geschwindigkeiten  $\vec{v}_i$  bewegen, ist

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \vec{v}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \tag{4.55}$$

und das magnetische Moment wird

$$\begin{aligned}
 \vec{m}(\vec{r}) &= \frac{1}{2c} \int_V d^3 r' \left[ \vec{r}' \times \sum_{i=1}^N q_i \cdot \vec{v}_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2c} (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{2cm_i} \vec{L}_i, \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

wobei die Drehimpulse  $\vec{L}_i$  der Ladungsträger eingeführt wurden. Sind alle  $q_i = q$  und  $m_i = m$  gleich, folgt

$$\vec{m}(\vec{r}) = \frac{q}{2cm} \vec{L} \quad (4.57)$$

für den Zusammenhang von Drehimpuls und magnetischen Moment.

## 4.5 Magnetisierungsstrom und Magnetisierung

- Wir haben uns bisher auf Situationen beschränkt, in denen  $\vec{j}$  bekannt war. Dies ist in Medien nicht mehr notwendigerweise der Fall, denn die molekularen oder atomaren Bestandteile dieser Medien können (etwa aufgrund molekularer Ströme) magnetische Momente tragen.
- Wenn  $\vec{j}$  die vorgegebene Stromdichte und  $\vec{m}$  die magnetischen Momente der Moleküle an den Orten  $\vec{r}_i$  sind, ist das gesamte Vektorpotential durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \sum_{i=1}^N \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (4.58)$$

gegeben.

- Analog zur Elektrostatik in Medien führen wir die Magnetisierung  $\vec{M}$  (analog zur Polarisation  $\vec{P}$ ) ein. Sie ist die mittlere Dichte des magnetischen Moments  $\vec{m}$ , oder

$$\vec{M} = n\vec{m} . \quad (4.59)$$

damit kann das Vektorpotential nach einem Grenzübergang zu (makroskopisch) kontinuierlichen Medien in der Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (4.60)$$

geschrieben werden.

- Der zweite Term in (4.60) kann umgeschrieben werden zu

$$\int_V \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' = \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (4.61)$$

oder, wegen der Identität

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{M}) = \vec{\nabla} f \times \vec{M} + f\vec{\nabla} \times \vec{M} , \quad (4.62)$$

in der man  $f := |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$  setzt,

$$\begin{aligned} & \int_V \vec{M}(\vec{r}') \times \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= - \int_V \left[ \vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) - \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^3 r' . \end{aligned} \quad (4.63)$$

der erste Term kann in ein Oberflächenintegral verwandelt werden, das verschwindet. Damit bleibt der zweite Term aus (4.63) im Vektorpotential (4.60) bestehen, und wir bekommen

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') + c \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' . \quad (4.64)$$

der Magnetisierung  $\vec{M}$  entspricht also der Magnetisierungsstrom

$$\vec{j}_M(\vec{r}) = c \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}) . \quad (4.65)$$

das ist das Analogon zur polarisierten Ladungsdichte.

- Wenden wir auf das Vektorpotential  $\vec{A}$  aus (4.64) zwei Mal die Rotation an, folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A} \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_V (\vec{j}(\vec{r}') + \vec{j}_M(\vec{r}')) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' \\ &= \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_M) . \end{aligned} \quad (4.66)$$

es ist also der Gesamtstrom, der in den Maxwell-Gleichungen zur Quelle von  $\vec{B}$  wird.

- Wir hatten in Kapitel 1 die magnetische Erregung  $\vec{H}$  so eingeführt, dass ihre Rotation allein durch Ladungs- und Verschiebungsströme, aber nicht durch den Magnetisierungsstrom gegeben war,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (4.67)$$

(vgl. 1.69). Dementsprechend gilt mit (4.66) und (4.65)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{H} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_M = \vec{\nabla} \times \vec{H} + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M} , \quad (4.68)$$

also

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} , \quad (4.69)$$

in vollkommener Analogie zu (3.5) für den elektrostatischen Fall.



- Ebenfalls in Abschnitt 1 hatten wir die Permeabilität  $\mu$  durch

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (4.70)$$

eingeführt. Mit der *magnetischen Suszeptibilität*  $\chi_M$  (vgl. 3.6) nehmen wir

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} \quad (4.71)$$

an und erhalten

$$\vec{B} = \vec{H}(1 + 4\pi\chi_M) \Rightarrow \mu = 1 + 4\pi\chi_M \quad (4.72)$$

für die Permeabilität  $\mu$ .

- Je nach  $\mu$  bzw.  $\chi_M$  gelten folgende Bezeichnungen:

Diamagnetika:  $\mu < 1$   $\chi_M < 0$

Paramagnetika:  $\mu > 1$   $\chi_M > 0$

Ferromagnetika:  $\mu \gg 1$   $\chi_M \approx \frac{\mu}{4\pi}$ ,  $\mu = \mu(H)$

- Für Paramagnetika ist die Suszeptibilität temperaturabhängig. Es gilt das Curiesche Gesetz

$$\chi_M \propto \frac{1}{T} . \quad (4.73)$$

Paramagnetika sind Medien, deren Moleküle ein eigenes magnetisches Moment haben. In Diamagnetika erzeugen äußere Felder Ströme, die nach der Lenzschen Regel ihrer Ursache entgegen wirken und das Feld im Inneren des Diamagnetikums abschwächen. Daher ist  $\vec{M}$  dort dem Feld  $\vec{H}$  entgegen gerichtet.

## 4.6 Grenzbedingungen für $\vec{B}$ und $\vec{H}$

- Wir hatten bereits in Kapitel 1 gesehen, dass  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  bedingt, dass die Normalkomponente von  $\vec{B}$  über Grenzflächen hinweg stetig sein muss,

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 . \quad (4.74)$$

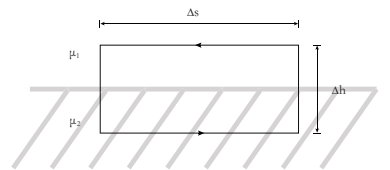
völlig analog zur Betrachtung in 4.2 folgt aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} , \quad (4.75)$$

dass die Tangentialkomponente von  $\vec{H}$  höchstens um den Betrag von Oberflächenströmen springen darf,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \cdot d\vec{A} =: \frac{4\pi}{c} I_s , \quad (4.76)$$

wobei  $I_s$  der Oberflächenstrom ist.



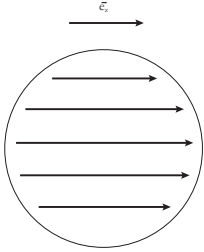
Zu den Grenzbedingungen für  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$

- Wenn Oberflächenströme verschwinden, (*nicht* in Supraleitern!), ist die Tangentialkomponente von  $\vec{H}$  stetig,

$$H_{1t} - H_{2t} = 0 . \quad (4.77)$$

die Bedingung (4.74) und (4.70) erfordern, dass die Normalkomponente von  $\vec{H}$  springt, und zwar um

$$\mu_1 H_{1n} - \mu_2 H_{2n} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_{1n} = \frac{\mu_2}{\mu_1} H_{2n} . \quad (4.78)$$



Zum Magnetfeld einer homogen magnetisierten Kugel

## 4.7 Beispiel: Magnetfeld einer homogen magnetisierten Kugel

- Eine Kugel mit Radius  $R$  sei magnetisiert durch

$$\vec{M} = M_0 \vec{e}_z \quad (4.79)$$

- Da keine Ströme fließen, ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_a = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_a = 0 \quad (4.80)$$

für das äußere Feld. Daher muss es ein magnetisches Skalarpotential  $\phi_M$  geben so, dass  $\vec{B}_a = -\vec{\nabla} \phi_M$  ist und  $\phi_M$  die Laplace-Gleichung  $\Delta \phi_M = 0$  erfüllt. Wir setzen wie in der Elektrostatik für  $\phi_M$  ein Dipolfeld an,

$$\phi_M = \frac{\alpha \cos \theta}{r^2} , \quad (4.81)$$

in dem der Koeffizient  $\alpha$  zu bestimmen bleibt.

- In der Kugel ist  $\vec{H}_i = \vec{B}_i - 4\pi \vec{M}$ , wobei wir aus Symmetriegründen annehmen, dass  $\vec{B}$  ebenfalls in  $z$ -Richtung zeigt,

$$\vec{B}_i = B_0 \vec{e}_z , \quad \vec{H}_i = (B_0 - 4\pi M_0) \vec{e}_z . \quad (4.82)$$

An der Kugeloberfläche gilt nach (4.74) und (4.77)

$$\begin{aligned} \vec{B}_i \cdot \vec{e}_r &= \vec{B}_a \cdot \vec{e}_r , \\ \vec{H}_i \cdot \vec{e}_\theta &= \vec{H}_a \cdot \vec{e}_\theta = \vec{B}_a \cdot \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (4.83)$$

wegen  $\vec{B}_a = -\vec{\nabla} \phi_M$  folgt aus der ersten Gleichung (4.83)

$$B_0 \cos \theta = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \phi_M \right|_R = \frac{2\alpha \cos \theta}{R^3} . \quad (4.84)$$

Ebenso folgt mit  $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta = -\sin \theta$  aus der zweiten Gleichung (4.83)

$$-(B_0 - 4\pi M_0) \sin \theta = - \frac{1}{R} \frac{\partial \phi_M}{\partial \theta} = \frac{\alpha \sin \theta}{R^3} . \quad (4.85)$$

Ein Koeffizientenvergleich in (4.84) und (4.85) ergibt

$$B_0 = \frac{2\alpha}{R^3}, \quad 4\pi M_0 - B_0 = \frac{\alpha}{R^3}, \quad (4.86)$$

woraus sofort

$$M_0 = \frac{3\alpha}{4\pi R^3} \quad \text{oder} \quad \alpha = \frac{4\pi}{3} R^3 M_0 \quad (4.87)$$

folgt, und damit

$$B_0 = \frac{8\pi}{3} M_0, \quad \vec{B}_i = \frac{8\pi}{3} \vec{M}, \quad \vec{H}_i = -\frac{4\pi}{3} \vec{M}. \quad (4.88)$$

Das äußere Feld ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \vec{B}_a &= -\vec{\nabla} \phi_M = -\vec{\nabla} \left( \frac{4\pi}{3} R^3 M_0 \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\ &= -\vec{\nabla} \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right), \end{aligned} \quad (4.89)$$

wobei

$$\vec{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \vec{M} \quad (4.90)$$

eingeführt wurde. Dies ist natürlich wieder ein Dipolfeld (vgl. 4.54), das zum magnetischen Moment  $\vec{m}$  gehört.



# Kapitel 5

## Elektromagnetische Wellen

### 5.1 Eichinvarianz

- In der Elektrostatik hatten wir das elektrische Feld als den negativen Gradienten des Potentials  $\phi$  angesehen. Die Maxwell-Gleichung

$$\vec{B} = -c \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (5.1)$$

zeigt, dass die Beziehungen zwischen den Feldern  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in der Elektrodynamik durch

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5.2)$$

ergänzt werden müssen. Wenn die Potentiale bestimmt sind, sind damit auch die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  festgelegt.

- Umgekehrt gilt dies nicht, da die Felder durch Ableitung aus den Potentialen hervorgehen. Zu einer bestimmten Feldkonfiguration gehören also viele Potentiale. Sei  $f(t, \vec{r})$  eine beliebige Funktion von Zeit und Ort. Mithilfe einer solchen Funktion können wir die Potentiale zunächst gemäß

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (5.3)$$

transformieren. Für die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow -\vec{\nabla}\phi + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} f) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ &= -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}. \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f}_{=0} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

d.h. sie bleiben durch die Transformation (5.3) der Potentiale unverändert.

- Die Transformation (5.3), die *Eichtransformation* der Potentiale, erlaubt es, *eine* Zusatzbedingung an die Potentiale zu stellen. So etwa die, dass das skalare Potential identisch verschwinden soll,

$$\phi = 0 . \quad (5.5)$$

Eine häufige Eichtransformation, die *Coulomb-Eichung*, transformiert die Divergenz des Vektorpotentials zu Null,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 . \quad (5.6)$$

Die *Lorenz-Eichung* stellt dagegen die Bedingung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.7)$$

zwischen den Ableitungen der Potentiale auf.

- Um etwa (5.6) zu erfüllen, muss  $f$  die Poisson-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} f) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \vec{\nabla}^2 f = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \quad (5.8)$$

erfüllen. Da dies nur die räumliche Abhängigkeit von  $f$  festlegt, kann *zusätzlich* noch  $\phi = 0$  verlangt werden.

## 5.2 Wellen im Vakuum

- Im Vakuum sind Ladungs- und Stromdichte gleich Null, und die Maxwell-Gleichungen lauten (vgl. 1.69)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{B}} &= -c \vec{\nabla} \times \vec{E} , & \dot{\vec{E}} &= c \vec{\nabla} \times \vec{B} , \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 , & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 . \end{aligned} \quad (5.9)$$

Felder, die diesen Gleichungen genügen sollen, müssen veränderlich sein. Wäre nämlich  $\dot{\vec{E}} = 0 = \dot{\vec{B}}$ , wären Rotation und Divergenz beider Felder gleichzeitig gleich Null, und die Felder verschwänden.

- Sei nun unter Verwendung der Eichfreiheit angenommen, dass das skalare Potential verschwinde,

$$\phi = 0 , \quad (5.10)$$

dann ist offenbar

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad (5.11)$$

und die Gleichung  $\vec{E} = c\vec{\nabla} \times \vec{B}$  aus (5.9) wird zu

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}. \quad (5.12)$$

Wir verlangen nun zusätzlich die Coulomb-Eichung (5.6), also  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , und erhalten aus (5.12) die Gleichung

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \vec{A} =: \square \vec{A} = 0. \quad (5.13)$$

Das ist eine *Wellengleichung* oder *d'Alembert-Gleichung*, die auch schon in der Mechanik bei der Behandlung kontinuierlicher Medien aufgetreten war.

- Seien  $\vec{\xi}$  und  $\vec{\eta}$  die neuen Koordinaten

$$\vec{\xi} := \vec{x} - \vec{v}t, \quad \vec{\eta} := \vec{x} + \vec{v}t, \quad \vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{\xi} + \vec{\eta}), \quad \vec{v}t = \frac{1}{2}(\vec{\eta} - \vec{\xi}), \quad (5.14)$$

dann lauten die Ableitungen einer beliebigen Funktion  $g(\vec{\eta}, \vec{\xi})$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} g &= \left( \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial g}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial g}{\partial \vec{\eta}} \right) = \frac{\partial g}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial g}{\partial \vec{\eta}}, \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= \left( \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial \vec{\eta}} \right) = -\vec{v} \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{\xi}} + \vec{v} \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{\eta}}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Der Differentialoperator in (5.13) wird also auf

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 &\rightarrow -\left( \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial \vec{\eta}}{\partial \vec{x}} \frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} \right)^2 \\ &= -\frac{\vec{v}^2}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} - \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \vec{\eta}} \right)^2 = 4 \frac{\partial^2}{\partial \vec{\eta} \partial \vec{\xi}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

transformiert, wenn  $\vec{v}^2 = c^2$  ist.

- Seien nun  $g(\vec{\xi})$  und  $h(\vec{\eta})$  zwei beliebige Funktionen von  $\vec{\xi}$  und  $\vec{\eta}$ , ferner  $f(\vec{\eta}, \vec{\xi}) = g(\vec{\xi}) + h(\vec{\eta})$ , dann erfüllt  $f$  offensichtlich die Gleichung (5.16).
- $f$  ist zusammengesetzt aus einer vorwärts- und einer rückwärtslaufenden Welle *beliebiger Form*, d.h. die Lösungen der d'Alembert-Gleichung (5.13) sind beliebig geformte Wellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

## 5.3 Ebene Wellen

- Wir bezeichnen mit  $\vec{n}$  einen Einheitsvektor in Richtung der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\vec{c}$  der Welle,

$$\vec{n} := \frac{\vec{c}}{c} \quad (5.17)$$

und drehen das Koordinatensystem so, dass  $\vec{n}$  mit der positiven  $x$ -Achse zusammenfällt,  $\vec{n} = \vec{e}_x$ .

- Beliebige Funktionen  $g_1(x - ct)$ ,  $g_2(x + ct)$  stellen dann beliebig geformte Wellenprofile dar, die sich mit der Zeit in positiver bzw. negativer  $x$ -Richtung ausbreiten. Weiter sollen  $g_1$  und  $g_2$  nicht von  $y$  und  $z$  abhängen. Sie sind also konstant auf Ebenen  $x = \text{const.}$  und beschreiben daher ebene Wellen.
- Wir verwenden die Eichung  $\phi = 0$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , der zufolge (vgl. 5.2) das elektrische Feld

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.18)$$

lautet. Da  $\vec{A}$  nicht von  $y$  oder  $z$  abhängen kann (weil die Welle in der  $y$ - $z$ -Ebene liegt), folgt aus  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , dass

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0 \quad (5.19)$$

sein muss, also  $A_x = \text{const.}$  Mit der Wellengleichung (5.13) folgt dann

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const.} \quad (5.20)$$

und folglich muss die zu  $A_x$  gehörende Komponente  $E_x$  des elektrischen Feldes konstant sein. Da dies dem angenommenen Wellenverhalten des elektrischen Feldes widerspricht, muss  $A_x = 0$  gesetzt werden. Demnach steht also das Vektorpotential der ebenen Welle senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung.

- Wir betrachten nun Wellen, die in positiver  $x$ -Richtung reisen. Alle Größen hängen dann nur von  $x - ct$  ab, d.h. aus

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5.21)$$

folgt

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{A}' \quad \text{und} \\ B_i &= \left[ \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (x - ct) \cdot A'_k \right] = \epsilon_{ijk} \delta_{j1} A'_k \\ &= \epsilon_{ijk} \vec{e}_{xj} A'_k = (\vec{n} \times \vec{A}')_i, \end{aligned} \quad (5.22)$$

worin  $\vec{n}$  der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle und  $\vec{A}'$  die Ableitung von  $\vec{A}$  nach seinem Argument  $x - ct$  darstellt.

- Da nach der ersten Gleichung (5.22)  $\vec{A}' = \vec{E}$  ist, folgt aus der zweiten

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}. \quad (5.23)$$

Folglich stehen sowohl  $\vec{E}$  als auch  $\vec{B}$  auf der Ausbreitungsrichtung der Welle senkrecht und auch senkrecht aufeinander. Elektromagnetische Wellen im Vakuum sind daher transversal. Weiter haben  $\vec{B}$  und  $\vec{E}$  offenbar denselben Betrag.



## 5.4 Monochromatische ebene Wellen

- Die vor- und rücklaufenden Wellen, die die d'Alembert-Gleichung lösen, haben die Form

$$f(\vec{\eta}, \vec{\xi}) = g(\vec{\xi}) + h(\vec{\eta}), \quad (5.24)$$

mit  $\vec{\xi} = \vec{x} - \vec{v}t = \vec{x} - c\vec{n}t$  bzw.  $\vec{\eta} = \vec{x} + \vec{v}t = \vec{x} + c\vec{n}t$ , wie in (5.14) definiert. Wir greifen nun  $g(\vec{\xi}) = g(\vec{x} - c\vec{n}t)$  heraus.

- Die Welle breitet sich in Richtung  $\vec{n}$  aus, also ist  $\vec{x} = x\vec{n}$  und  $g(\vec{\xi}) = g((x - ct)\vec{n})$ .  $g$  ist konstant auf Ebenen senkrecht zu  $\vec{n}$ . Wir führen zur Beschreibung dieser Ebenen den *Wellenvektor*

$$\vec{k} = k\vec{n} =: \frac{\omega}{c}\vec{n} \quad (5.25)$$

ein, mit dem die Ebenen, auf denen  $g$  konstant ist, durch die Bedingung

$$\vec{k} \cdot (\vec{x} - c\vec{n}t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \text{const.} \quad (5.26)$$

ausgedrückt werden können. In der Umformung

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \omega t + \text{const.} \quad (5.27)$$

stellt die Bedingung (5.26) die Ebenen in Hessescher Normalform dar.

- $g$  ist demnach konstant auf Ebenen konstanter *Phase*

$$\varphi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t, \quad (5.28)$$

wobei der Wellenvektor  $\vec{k}$  der Gradient dieser Phasenfunktion ist,

$$\vec{k} = \vec{\nabla}\varphi. \quad (5.29)$$

Der Abstand einer Wellenfläche vom Ursprung ändert sich gemäß

$$|\vec{x}| = \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{k} (\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) + \frac{\omega t}{k} = \text{const.} + \frac{\omega t}{k}, \quad (5.30)$$

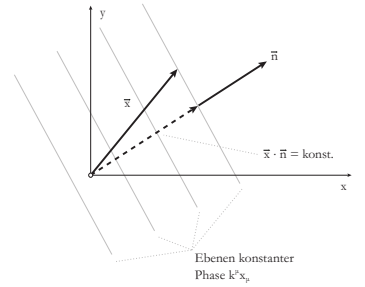
d.h. die Geschwindigkeit der Welle ist

$$v = \frac{\omega}{k} = c \quad \text{bzw.} \quad \vec{v} = \frac{\omega}{k} \frac{\vec{k}}{k} = c\vec{n}. \quad (5.31)$$

- Jede zweimal differenzierbare Funktion der Phase,  $g(\varphi)$ , ist also eine Lösung der Wellengleichung. Insbesondere sind dies die harmonischen Funktionen

$$g(\varphi) = g_0 e^{i\varphi} \quad (5.32)$$

mit beliebiger Amplitude  $g_0$ . Sie stellen die sogenannten *monochromatischen ebenen Wellen* dar. Jedes andere Wellenprofil kann daher durch Überlagerung monochromatischer Wellen zusammengesetzt werden.



Ebenenscharen konstanter Phase

- Es ist bequem, bei der komplexen Schreibweise zu bleiben und etwa die Feldstärke einer monochromatischen ebenen Welle durch

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right], \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \operatorname{Re} \left[ \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right]\end{aligned}\quad (5.33)$$

auszudrücken. Der Realteil stellt sicher, dass trotz der komplexen Formulierung die physikalischen Felder reell bleiben.

- Differentialoperatoren, die auf solche Felder wirken, die in ebene monochromatische Wellen zerlegt wurden, werden zu algebraischen Operatoren. So etwa bewirkt der Gradient eine Multiplikation mit  $i\vec{k}$

$$\vec{\nabla} \longrightarrow i\vec{k}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{E}_0 \cdot (i\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = i\vec{k} \cdot \vec{E}, \quad (5.34)$$

während die Zeitableitung eine Multiplikation mit  $-i\omega$  bewirkt,

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = -i\omega \vec{E}. \quad (5.35)$$

Für Felder, die aus monochromatischen ebenen Wellen zusammengesetzt sind, lauten also die Maxwell-Gleichungen (5.9)

$$\begin{aligned}-i\omega \vec{B} &= -ic\vec{k} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B}, \\ -i\omega \vec{E} &= ic\vec{k} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega}{c} \vec{E}, \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{E} = 0.\end{aligned}\quad (5.36)$$

Die beiden letzten Gleichungen formulieren, dass die Wellen transversal sind.

- Aus der ersten Gleichung (5.36), kombiniert mit der zweiten, folgt

$$\begin{aligned}\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) &= \frac{\omega}{c} \vec{k} \times \vec{B} = -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \\ \Rightarrow -\vec{k}^2 \vec{E} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.\end{aligned}\quad (5.37)$$

Die Beziehung (5.37) zwischen Frequenz  $\omega$  und Wellenvektor  $\vec{k}$  heißt *Dispersionsrelation*. Sie folgt auch durch Anwendung der Wellengleichung auf  $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$ ,

$$\begin{aligned}\square \vec{E} = 0 &\Rightarrow \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \right) \vec{E} = 0 \\ \Rightarrow \left( \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 \right) \vec{E} &= 0 \Rightarrow \vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.\end{aligned}\quad (5.38)$$

## 5.5 Polarisation ebener Wellen

- Zusammen mit der Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$  definieren  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ein Dreibein. Sei etwa  $\vec{k}$  in Richtung der  $x$ -Achse orientiert,  $\vec{E}$  in Richtung der  $y$ -Achse, dann zeigt wegen der ersten Gleichung (5.36)  $\vec{B}$  in Richtung der  $z$ -Achse: Allgemein definiert  $\vec{k}$  den zwei-dimensionalen Raum senkrecht zu  $\vec{k}$ , in dem die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \quad (5.39)$$

gewählt werden können, um ein kartesisches Koordinatensystem aufzuspannen.

- Wegen des engen Zusammenhangs zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  reicht die Angabe von entweder  $\vec{E}$  oder  $\vec{B}$  zur Beschreibung der Welle. Dafür wird üblicherweise das elektrische Feld  $\vec{E}$  gewählt. Man spannt demnach  $\vec{E}$  durch die beiden Richtungen  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$  auf,

$$\vec{E} = (E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad (5.40)$$

wobei  $E_1$  und  $E_2$  komplexe Amplituden sein können, um eine Phasenverschiebung zwischen beiden anzugeben.

- Wenn die beiden Wellenzüge nicht phasenverschoben sind, ist die Welle *linear polarisiert* und beschreibt mit der  $\vec{e}_1$ -Achse den Winkel

$$\Theta = \arctan \frac{E_2}{E_1}, \quad (5.41)$$

und ihre Amplitude ist

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}. \quad (5.42)$$

- Wenn beide Wellenzüge relativ zueinander phasenverschoben sind, kann das elektrische Feld durch

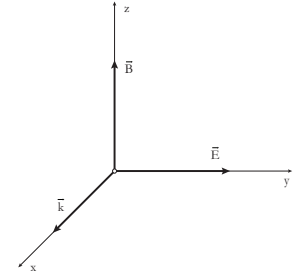
$$\vec{E} = E_1 \vec{e}_1 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi_1)} + E_2 \vec{e}_2 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi_2)} \quad (5.43)$$

beschrieben werden. Um zu sehen, was das bedeutet, gehen wir zum Realteil von (5.43) über, betrachten den Wellenzug bei  $\vec{x} = 0$  und schreiben

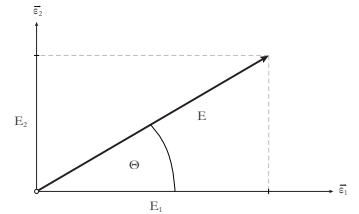
$$E_1(t) = E_1 \cos(\varphi_1 - \omega t), \quad E_2(t) = E_2 \cos(\varphi_2 - \omega t). \quad (5.44)$$

Mit  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$  gewinnen wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos \varphi_1 \cos \omega t + \sin \varphi_1 \sin \omega t, \\ a_2 &= \cos \varphi_2 \cos \omega t + \sin \varphi_2 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (5.45)$$



Relative Orientierung der Vektoren  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{k}$



Zur Polarisationsrichtung

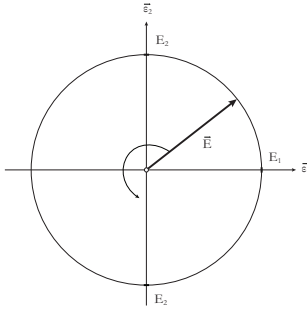
wobei wir  $a_i := E_i(t)/E_2$  eingeführt haben. Durch geeignete Multiplikation mit  $\sin \varphi_i$  bzw.  $\cos \varphi_i$  folgt

$$\begin{aligned} a_1 \sin \varphi_2 - a_2 \sin \varphi_1 &= \cos \omega t \sin \varphi, \\ a_1 \cos \varphi_2 - a_2 \cos \varphi_1 &= \sin \omega t \sin \varphi, \end{aligned} \quad (5.46)$$

wobei  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$  verwendet wurde und  $\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$  die relative Phasenverschiebung zwischen den beiden Wellenzügen ist. Quadrieren wir diese beiden Gleichungen und addieren sie dann, hebt sich die zeitabhängige Phase  $\omega t$  heraus, und es folgt

$$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (5.47)$$

Das ist die Gleichung einer gedrehten Ellipse, die einem Rechteck mit den Seitenlängen  $2/a_1$  und  $2/a_2$  einbeschrieben ist. Man spricht deswegen von *elliptisch polarisiertem Licht*. Der  $\vec{E}$ -Vektor läuft dann auf einer Ellipse um die Ausbreitungsrichtung der Welle.



Drehung der Polarisationsrichtung

- Wenn  $E_1 = E_2$  und die Phasenverschiebung ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi/2$  ist, verschwindet  $\cos \varphi$  und  $\sin^2 \varphi = 1$ . Dann beschreibt (5.47) einen Kreis, und man spricht von rechts- bzw. linkszirkular polarisiertem Licht, je nach dem Vorzeichen der Phasenverschiebung  $\varphi$ .

## 5.6 Wellen in homogenen, linearen Medien

- Wir betrachten nun, wie sich elektromagnetische Wellen in unendlich ausgedehnten, homogenen Medien ausbreiten können, die durch eine (räumlich und zeitlich) konstante Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und die Permeabilität  $\mu$  gekennzeichnet sind.
- Dementsprechend gelten im Medium die linearen Gleichungen

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (5.48)$$

Zudem sei das Medium neutral, d.h. die (freie) Ladungsdichte verschwinde,

$$\rho = 0. \quad (5.49)$$

Demnach lauten die Maxwell-Gleichungen (1.69)

$$\begin{aligned} \mu \dot{\vec{H}} &= -c \vec{\nabla} \times \vec{E}, & \epsilon \dot{\vec{E}} + 4\pi \sigma \vec{E} &= c \vec{\nabla} \times \vec{H}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Wir nehmen zuerst die Rotation der zweiten Gleichung (5.50)

$$\begin{aligned}
 \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} + 4\pi\sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} &= c \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\
 &= c \left[ \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{H})}_{=0} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} \right] \\
 &= -c \Delta \vec{H}, \tag{5.51}
 \end{aligned}$$

und ersetzen  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  aus der ersten Gleichung (5.50). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 -\frac{\epsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -c \Delta \vec{H} \\
 \Rightarrow \Delta \vec{H} &= \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{H}} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{\vec{H}}. \tag{5.52}
 \end{aligned}$$

Genauso können wir mit der ersten Gleichung (5.50) beginnen und aus der zweiten  $\vec{\nabla} \times \vec{H}$  ersetzen, um

$$\Delta \vec{E} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \ddot{\vec{E}} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \dot{\vec{E}} \tag{5.53}$$

zu erhalten. Diese beiden Gleichungen (5.52) und (5.53) heißen auch Telegrafengleichungen.

- Eine Dimensionsbetrachtung zeigt, dass der Ausdruck

$$\lambda := \left( \frac{4\pi\sigma\mu}{c} \right)^{-1} \tag{5.54}$$

die Dimension einer Länge haben muss. Diese Länge gibt an, wie tief elektromagnetische Wellen in ein Medium mit der Leitfähigkeit  $\sigma$  eindringen können. Ist die Leitfähigkeit groß wie etwa in Metallen, geht  $\lambda$  gegen null. In Nichtleitern dagegen,  $\sigma = 0$ , wird  $\lambda$  unendlich groß.

- Wir nehmen nun an, dass die Leitfähigkeit verschwindet. Die Telegrafengleichungen gehen dann in die gewöhnlichen Wellengleichungen

$$\left( \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0, \quad \left( \frac{1}{c'^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{H} = 0 \tag{5.55}$$

über, in denen jetzt aber die Lichtgeschwindigkeit

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{5.56}$$

auftritt. Das Verhältnis

$$n := \frac{c}{c'} = \sqrt{\epsilon\mu} \tag{5.57}$$

heißt *Brechungsindex* aus Gründen, die später deutlich werden. Da in vielen Medien  $\mu \approx 1$  ist, gilt oft  $n \approx \sqrt{\epsilon}$  in guter Näherung.

- Setzen wir wieder monochromatische ebene Wellen

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (5.58)$$

in die Maxwell-Gleichungen (5.50) ein, erhalten wir mit  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ ,  $\partial/\partial \vec{x} \rightarrow i\vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E} &= \frac{\mu\omega}{c} \vec{H}, & \vec{k} \times \vec{H} &= -\frac{\epsilon\omega}{c} \vec{E} \\ \vec{k} \cdot \vec{H} &= 0, & \vec{k} \cdot \vec{E} &= 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

- Die beiden Gleichungen  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 = \vec{k} \cdot \vec{H}$  zeigen, dass die Wellen nach wie vor transversal sind, was eine Folge davon ist, dass  $\epsilon$  als Skalar (und nicht als Tensor) angenommen wurde. Jedoch sind die Beträge von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  nun nicht mehr gleich, denn

$$|\vec{E}| = \frac{\omega\mu}{kc} |\vec{H}|. \quad (5.60)$$

Bilden wir in der zweiten Gleichung (5.59) das Kreuzprodukt mit  $\vec{k}$ ,

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{H}) = \vec{k} \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{H})}_{=0} - k^2 \vec{H} = -\frac{\epsilon\omega}{c} \vec{k} \times \vec{E}, \quad (5.61)$$

folgt mit der ersten Gleichung (5.59), dass  $k$  durch den Zusammenhang

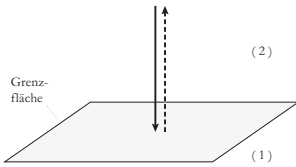
$$k^2 \vec{H} = \frac{\epsilon\omega}{c} \cdot \frac{\mu\omega}{c} \vec{H} = \frac{\omega^2}{c^2} \mu\epsilon \vec{H} \quad (5.62)$$

gegeben sein muss, also durch die Dispersionsrelation

$$k^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c'^2}, \quad (5.63)$$

die die Relation (5.38) für leitende Medien verallgemeinert, wobei der Brechungsindex aus (5.57) verwendet wurde.

## 5.7 Brechung und Reflexion



Reflexion bei senkrechtem Einfall auf eine Grenzfläche

- Wir betrachten nun die Grenzfläche zweier Medien, die durch Indizes 1 und 2 unterschieden werden. Wenn eine elektromagnetische Welle auf die Grenzfläche trifft, wird in der Regel ein Teil reflektiert werden und der Rest in das Medium eindringen.
- Bei verschwindender freier Ladungsdichte gelten die Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}, \quad (5.64)$$

woraus wir bereits in I.3 geschlossen hatten, dass die Normalkomponenten der Felder stetig sein müssen,

$$B_n^{(1)} = B_n^{(2)}, \quad D_n^{(1)} = D_n^{(2)}. \quad (5.65)$$

Bezüglich der Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  benutzen wir die Gleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \dot{\vec{B}}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \dot{\vec{D}}, \quad (5.66)$$

die in Abwesenheit von Strömen gelten. Weiterhin legen wir eine kleine Fläche  $\Delta A$  senkrecht zur Trennfläche und wenden darauf den Stokesschen Satz an:

$$\int_{\Delta A} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial(\Delta A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = (E_t^{(1)} - E_t^{(2)}) l, \quad (5.67)$$

da wir die Höhe  $\Delta h$  der Fläche beliebig klein wählen können. Außerdem haben wir

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta A} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} B_{\perp} (l \cdot \Delta h), \quad (5.68)$$

wobei  $B_{\perp}$  senkrecht zur Fläche  $\Delta A$  steht. Wegen  $\Delta h \rightarrow 0$  verschwindet dies, und die erste Gleichung (5.65) liefert mit (5.66)

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}. \quad (5.69)$$

Ebenso schließt man aus der zweiten Gleichung (5.65), dass

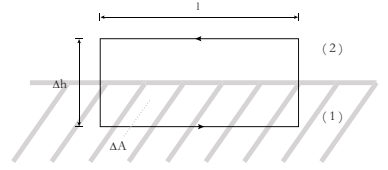
$$H_t^{(1)} = H_t^{(2)}. \quad (5.70)$$

Wir haben also an der Grenzfläche der beiden Medien die Anschlussbedingungen, dass die Normalkomponenten von  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$  sowie die Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  stetig sein müssen.

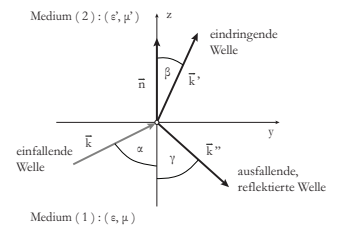
- Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, in dem eine Welle aus einem Medium (1) unter einem Winkel  $\alpha$  auf die Grenzfläche zu einem Medium (2) trifft. Das Medium (1) sei durch  $(\epsilon_1, \mu_1)$  gekennzeichnet, das Medium (2) durch  $(\epsilon_2, \mu_2)$ . Beide Medien seien isotrop.
- Die Grenzfläche liege bei  $z = 0$ . Die einfallende Welle habe den Wellenvektor  $\vec{k}$ , der mit der Flächennormalen der Grenzfläche die  $y$ - $z$ -Ebene aufspanne. Reflektierte und eindringende Welle seien also wie in der Abbildung bestimmt.
- Die einfallende Welle sei also durch

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{B} = n_1 \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{k} \quad (5.71)$$

gegeben, wobei wieder von der Dispersionsrelation (5.63) für Medien Gebrauch gemacht wurde.



Zur Anwendung des Stokesschen Satzes an einer Grenzfläche



Geometrie bei Brechung und Reflexion im allgemeinen Fall

- Entsprechend seien die eindringende Welle

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x}' - \omega' t)} , \quad \vec{B}' = n_2 \frac{\vec{k}' \times \vec{E}'}{k'} \quad (5.72)$$

und die reflektierte Welle

$$\vec{E}'' = \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x}'' - \omega'' t)} , \quad \vec{B}'' = n_1 \frac{\vec{k}'' \times \vec{E}''}{k''} . \quad (5.73)$$

Zunächst müssen bei  $z = 0$  die Stetigkeitsbedingungen

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)} , \quad H_t^{(1)} = H_t^{(2)} , \quad D_n^{(1)} = D_n^{(2)} , \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)} \quad (5.74)$$

erfüllt sein, woraus folgt, dass die Phasenfaktoren bei  $z = 0$  für alle Zeiten gleich sind:

$$e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} = e^{i(\vec{k}' \cdot \vec{x}' - \omega' t)} = e^{i(\vec{k}'' \cdot \vec{x}'' - \omega'' t)} \quad (z = 0) . \quad (5.75)$$

Dies verlangt

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = \vec{k}' \cdot \vec{x}' - \omega' t + 2\pi \cdot m_1 = \vec{k}'' \cdot \vec{x}'' - \omega'' t + 2\pi m_2 \quad (5.76)$$

mit beliebigen ganzen Zahlen  $m_1, m_2$ .

- Gleichung (5.76) muss insbesondere bei  $\vec{x} = 0$  stimmen, wo die Welle auftrifft, und für  $m_1 = 0 = m_2$ , woraus

$$\omega = \omega' = \omega'' \quad (5.77)$$

folgt: Brechung und Reflexion ändern die Frequenz nicht. Ferner impliziert (5.77) mit (5.76)

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \vec{k}' \cdot \vec{x}' = \vec{k}'' \cdot \vec{x}'' , \quad (5.78)$$

also liegen  $\vec{k}, \vec{k}', \vec{k}''$  in einer Ebene, der Einfallsebene.

- Für einen beliebigen Punkt auf der  $y$ -Achse,

$$\vec{x} = y \vec{e}_y , \quad (5.79)$$

ergibt (5.78)

$$ky \sin \alpha = k' y \sin \beta = k'' y \sin \gamma . \quad (5.80)$$

Wegen der Dispersionsrelation und der unveränderten Frequenzen aus (5.77) folgt weiter

$$k = n_1 \frac{\omega}{c} = k'' , \quad k' = n_2 \frac{\omega}{c} \quad (5.81)$$

und damit

$$\sin \alpha = \sin \gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = \gamma , \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1} . \quad (5.82)$$

Dies sind die Gesetze der Brechung und der Reflexion.



# Kapitel 6

## Spezielle Relativitätstheorie und Lorentzkraft

### 6.1 Lorentz-Transformation

- Wir hatten schon in der Einleitung gesehen, dass eine Feldtheorie notwendigerweise relativistisch formuliert werden muss: Feldtheorien verbinden Kräfte mit dem Raum, und Raum und Zeit werden durch die Relativitätstheorie miteinander verknüpft. Die Elektrodynamik als erstes und klassisches Beispiel einer Feldtheorie gibt die Newtonsche Vorstellung der instantanen „Fernwirkung“ auf, akzeptiert eine „Nahwirkung“, die sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, und kommt so zu dem Konzept einer universellen Geschwindigkeit, die vom Bewegungszustand der Bezugssysteme unabhängig ist.
- Die spezielle Relativitätstheorie erhebt zum Prinzip, dass die Lichtgeschwindigkeit  $c$  diese universelle Grenzgeschwindigkeit sei. Aus dieser Forderung ergibt sich, dass Raum- und Zeitkoordinaten  $\vec{x}$  und  $t$  durch die Lorentztransformation untereinander verknüpft sind.
- Zwischen zwei Systemen  $(\vec{x}, t)$  und  $(\vec{x}', t')$ , die sich relativ zueinander entlang ihrer gemeinsamen  $x^1$ -Achse mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegen, vermittelt die *spezielle Lorentztransformation*

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

worin  $\beta = v/c$  die Geschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit und  $\gamma$  der bekannte *Lorentzfaktor*

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.2)$$

ist. Beachten Sie, dass jetzt die Indizes von Vektorkomponenten oben stehen. Das hat einen tieferen mathematischen Sinn, der gleich klar werden wird.

- Die Lorentztransformation tritt in der relativistischen Mechanik an die Stelle der Galileitransformation der klassischen, Newton'schen Mechanik.
- Da bei relativer Bewegung in  $x^1$ -Richtung die Koordinaten  $x^2$  und  $x^3$  nach (6.1) unverändert bleiben, schreiben wir die spezielle Lorentztransformation verkürzt in der zweidimensionalen Form

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

- Offenbar lässt die Lorentztransformation die Größe

$$-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad \text{mit} \quad x^0 := ct \quad (6.4)$$

invariant. Das ist für die spezielle Lorentztransformation aus (6.3) leicht einzusehen, da  $x^2$  und  $x^3$  ohnehin nicht transformiert werden:

$$\begin{aligned} -(x'^0)^2 + (x'^1)^2 &= -(\gamma x^0 + \beta\gamma x^1)^2 + (\beta\gamma x^0 + \gamma x^1)^2 \\ &= -(x^0)^2 \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{=\gamma^{-2}} + (x^1)^2 \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{=\gamma^{-2}} \\ &= -(x^0)^2 + (x^1)^2, \end{aligned} \quad (6.5)$$

Diese Eigenschaft ist physikalisch anschaulich, denn die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, die sich darin ausdrückt, war gerade das Konstruktionsprinzip der Lorentz-Transformation.

- Um den Lorentz-invarianten Ausdruck (6.4) als Quadrat des vierdimensionalen Vektors oder *Vierervektors*  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  schreiben zu können, führen wir in der vierdimensionalen Minkowski-Welt  $(x_0, \vec{x})$  die *Minkowski-Metrik*

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (6.6)$$

anstelle der Euklidischen Metrik

$$(\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

ein. Demzufolge ist der Minkowski-Raum ein vierdimensionaler, hyperbolischer, metrischer Raum.

- Das invariante *Linielement*  $ds$  der Metrik (6.6) wird mit der *Eigenzeit*  $d\tau$  eines Beobachters verknüpft, der sich um den infinitesimalen Vierervektor  $dx = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3)$  bewegt,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \\ &=: -c^2 d\tau^2 . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Die Eigenzeit ist offenbar die Zeit, die im Ruhesystem des jeweiligen Beobachters vergeht: In seinem Ruhesystem hat der Beobachter die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

d.h. zwei aufeinander folgende Ereignisse haben den invarianten Abstand

$$c^2 d\tau^2 = -(dx^0)^2 , \quad (6.10)$$

der im Ruhesystem ein reiner Zeitunterschied ist.

- Die Minkowski-Metrik definiert ein Skalarprodukt zwischen Vierervektoren,

$$\langle x, y \rangle = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu , \quad (6.11)$$

das nicht mehr positiv-semidefinit ist. Durch die Definition

$$x_\nu := \eta_{\mu\nu} x^\mu \quad (6.12)$$

werden *Dualvektoren* eingeführt, die den Index unten tragen. Da die Minkowski-Metrik nicht mehr euklidisch ist, haben Dualvektoren die Komponenten

$$x_\nu = (-x^0, x^i) . \quad (6.13)$$

- Vektoren werden in der älteren Literatur auch als *kontravariant* bezeichnet, Dualvektoren als *kovariant*. Mit der Einsteinschen Summenkonvention ist dann

$$x^2 = \langle x, x \rangle = x_\mu x^\mu = -x_0 x^0 + x_i x^i = -c^2 t^2 + \vec{x}^2 , \quad (6.14)$$

was sich mittels der Metrik in der Form

$$x^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (6.15)$$

schreiben lässt.

- Die Schreibweise der Vierervektoren und ihrer Dualvektoren wird konsistent, wenn die inverse Metrik  $\eta^{-1}$  die Indizes oben trägt, denn dann ist

$$\delta^\mu_\nu x^\nu = x^\mu = \eta^{\mu\alpha} x_\alpha = \eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} x^\nu . \quad (6.16)$$

Also muss

$$\eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (6.17)$$

sein, woraus

$$(\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (6.18)$$

folgt.

- Die (auf zwei Dimensionen reduzierte, spezielle) Lorentztransformation lautet in dieser Schreibweise

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{mit} \quad \Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Entsprechend (6.17) ist außerdem

$$\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha_\nu \quad \text{bzw.} \quad \Lambda^{\mu\nu} = \eta^{\nu\alpha}\Lambda^\mu_\alpha. \quad (6.20)$$

Summiert wird über gleiche Indizes nur dann, wenn sie auf verschiedenen Ebenen stehen, also einer unten und einer oben. Beachten Sie, dass es *nicht* gleichgültig ist, welcher der beiden Indizes der Lorentzmatrix oben und welcher unten steht, denn

$$\begin{aligned} \Lambda_\nu^\mu &= \eta_{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta}\Lambda^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu. \end{aligned} \quad (6.21)$$

## 6.2 Eigenschaften der Minkowski-Welt

- Wir fassen hier kurz einige wesentliche Folgerungen aus der Lorentz-Invarianz der Minkowski-Welt zusammen. Wir drehen dazu wieder das ungestrichene und das gestrichene System so, dass die Relativbewegung der beiden Systeme entlang ihrer gemeinsamen  $x^1$ - bzw.  $x'^1$ -Achse verläuft und unterdrücken die beiden räumlichen Koordinaten  $x^2$  und  $x^3$ .
- Seien zunächst im ungestrichenen System zwei Ereignisse am selben Ort  $x^1 = 0$  im Zeitabstand  $x^0$  gegeben,

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

dann werden diese beiden Ereignisse im gestrichenen System zu

$$x'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x'_2 = \begin{pmatrix} \gamma x^0 \\ \beta\gamma x^0 \end{pmatrix}, \quad (6.23)$$

d.h. sie haben dort den größeren Zeitabstand  $\gamma x^0$ . Bewegte Uhren gehen also langsamer (Zeitdilatation).

- Wir betrachten nun einen Einheitsmaßstab in Bewegungsrichtung im ungestrichenen System, also einen Maßstab, der durch die Vierervektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

begrenzt wird. Er soll zum festen Zeitpunkt  $x'^0 = 0$  im gestrichenen System beobachtet werden. Wegen

$$x'^0 = \gamma x^0 + \beta \gamma x^1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.25)$$

entspricht dies dem Zeitpunkt

$$x^0 = -\beta x^1 = -\beta \quad (6.26)$$

im ungestrichenen System, also ist

$$x'^1 = \beta \gamma x^0 + \gamma x^1 = \gamma(1 - \beta^2) = \sqrt{1 - \beta^2} < 1. \quad (6.27)$$

Bewegte Maßstäbe erscheinen also verkürzt (Lorentzkontraktion).

- Sei schließlich  $w$  die Geschwindigkeit eines Teilchens, das sich längs der  $x^1$ -Achse im ungestrichenen System bewegt, also

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ wt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ wx^0/c \end{pmatrix}. \quad (6.28)$$

- Dies wird transformiert zu

$$x'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma x^0 + \beta \gamma w x^0/c \\ \beta \gamma x^0 + \gamma w x^0/c \end{pmatrix}, \quad (6.29)$$

d.h. die Geschwindigkeit im gestrichenen System beträgt

$$w' = \frac{x'^1}{x'^0} c = \frac{\beta + w/c}{1 + \beta w/c} c = \frac{v + w}{1 + vw/c^2}. \quad (6.30)$$

Das ist das *Geschwindigkeits-Additionstheorem*.

## 6.3 Vierergeschwindigkeit, Viererimpuls und Lorentzkraft

- Da die Zeitkoordinate keine invariante Bedeutung mehr hat, muss die Definition der Geschwindigkeit verändert werden. Die *Vierergeschwindigkeit* wird eingeführt als Ableitung der vierdimensionalen Raum-Zeit-Koordinaten nach der invarianten Eigenzeit,

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (6.31)$$

- Dabei ist

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c} \sqrt{-ds^2} = \frac{1}{c} \sqrt{-dx^\mu dx_\mu} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{x}^2} \\ &= dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{dt}{\gamma} . \end{aligned} \quad (6.32)$$

- Die Komponenten der Vierergeschwindigkeit sind

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \gamma = c\gamma , \quad \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma \vec{v} , \quad (6.33)$$

also ist ihr Minkowski-Quadrat

$$u^2 = u^\mu u_\mu = -\gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = -\gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = -c^2 , \quad (6.34)$$

was natürlich Lorentz-invariant ist. Da  $d\tau$  selbst invariant ist, transformiert sich  $u^\mu$  wie der Vierervektor  $x^\mu$ , ist also selbst einer.

- Entsprechend ist der *Viererimpuls* definiert durch

$$p^\mu = mu^\mu , \quad p^0 = mc\gamma , \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v} . \quad (6.35)$$

Entwickelt bis zur zweiten Ordnung in  $\beta$  ist

$$p^0 \approx mc \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{m}{2}v^2\right) . \quad (6.36)$$

Also spielt  $mc^2$  die Rolle einer *Ruheenergie*.

- Energie  $\mathcal{E}$  und Impuls  $\vec{p}$  werden dementsprechend zu einem Energie-Impuls-Vierervektor zusammengefasst,

$$p^\mu = \left( \frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p} \right) . \quad (6.37)$$

Zur Unterscheidung vom elektrischen Feld  $E$  wird die Energie hier durch  $\mathcal{E}$  ausgedrückt. Die Transformation von Energie und Impuls ist jetzt leicht anzugeben. Nach (6.19) ist

$$p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu , \quad (6.38)$$

also etwa

$$\frac{\mathcal{E}'}{c} = \gamma \frac{\mathcal{E}}{c} + \beta \gamma p^1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} + vp^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad (6.39)$$

- Das Quadrat des Viererimpulses ist

$$p^\mu p_\mu = -\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} + \vec{p}^2 = m^2 u^\mu u_\mu = -m^2 c^2 \quad (6.40)$$

und führt damit auf die *relativistische Energie-Impuls-Beziehung*

$$\mathcal{E}^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4 . \quad (6.41)$$

- Die Kraft, die durch elektromagnetische Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  auf Ladungen ausgeübt wird, kann durch Messung festgestellt oder aus einer Lagrangefunktion abgeleitet werden. Das Ergebnis ist die relativistisch gültige Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} =: \vec{F}_L, \quad (6.42)$$

auf deren rechter Seite die *Lorentzkraft*  $\vec{F}_L$  auftritt. Auf der linken Seite steht die Zeitableitung des relativistischen Impulses  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ .

## 6.4 Bewegung in homogenen, statischen Feldern

- Vorgegeben sei zunächst ein homogenes, statisches elektrisches Feld  $\vec{E} = E \cdot \vec{e}_z$ . Die Bewegung eines Teilchens der Ladung  $e$  ist durch die Lorentzkraft bestimmt (vgl. 6.42),

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B} = e\vec{E}, \quad (6.43)$$

woraus folgt

$$\dot{p}_z = eE, \quad \dot{p}_x = 0 = \dot{p}_y. \quad \text{also} \quad \vec{p} = \vec{p}_0 + eEt\vec{e}_z \quad (6.44)$$

nach der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung (6.41) ist

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + c^2 (eEt)^2} \quad (6.45)$$

die kinetische Energie des Teilchens, wenn die Anfangsbedingung  $p_{z0} = 0$  angenommen wird. Bei  $t = 0$  ist dann

$$\mathcal{E} =: \mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2} \quad (6.46)$$

und damit

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}. \quad (6.47)$$

die Geschwindigkeit folgt dann aus (6.35),

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} = \frac{c^2 (\vec{p}_0 + eEt\vec{e}_z)}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}, \quad (6.48)$$

für die Komponente von  $v$  in Feldrichtung also

$$v_z = \frac{c^2 eEt}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}}. \quad (6.49)$$

durch Integration ergibt sich für die Ortskoordinate

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \int_0^t \frac{c^2 e E t' dt'}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt')^2}} = \frac{1}{2eE} \int_0^{(ceEt)^2} \frac{d(ceEt')^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt')^2}} \\
 &= \frac{1}{2eE} \int_{\mathcal{E}_0^2}^{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{eE} \left( \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} - \mathcal{E}_0 \right), \tag{6.50}
 \end{aligned}$$

während für die anderen Koordinaten folgt

$$\begin{aligned}
 v_x &= \frac{c^2}{\mathcal{E}} p_x = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}} \tag{6.51} \\
 \Rightarrow x &= c^2 p_0 \int_0^t \frac{dt'}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt')^2}} = \frac{cp_0}{eE} \operatorname{arcsinh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0},
 \end{aligned}$$

wenn  $x(t=0) = 0$  gesetzt wird. Dasselbe folgt für  $v_y$  bzw.  $y$ , wenn  $\vec{p}_0$  eine Komponente in  $y$ -Richtung hat.

- Setzen wir  $\vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_x$  und  $z(0) = \mathcal{E}_0/(eE)$  voraus, erhalten wir zunächst aus (6.50)

$$t = \frac{\mathcal{E}_0}{ceE} \sinh \frac{eEx}{cp_0}, \tag{6.52}$$

und damit aus (6.51)

$$z(x) = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_0^2 \sinh^2 \frac{eEx}{cp_0}} = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \cosh \frac{eEx}{cp_0}. \tag{6.53}$$

das Teilchen beschreibt offenbar eine *Kettenlinie*. Im Grenzfall  $v \ll c$  ist  $p_0 \approx mv_0$  und  $E \approx mc^2$ , also

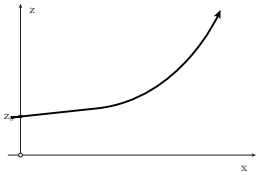
$$z(x) \approx \frac{mc^2}{eE} \cosh \frac{eEx}{cmv_0}. \tag{6.54}$$

Wegen

$$\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} \quad (x \ll 1) \tag{6.55}$$

folgt dann die aus der klassischen (nicht-relativistischen) Mechanik erwartete Wurfparabel,

$$z(x) \approx \frac{mc^2}{eE} \left[ 1 + \left( \frac{eEx}{cmv_0} \right)^2 \frac{1}{2} \right] = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2 + \text{const}. \tag{6.56}$$



Bewegung im homogenen elektrischen Feld



- Im homogenen, statischen Magnetfeld,  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathcal{E}\vec{v}}{c^2} \right), \quad (6.57)$$

wobei im zweiten Schritt verwendet wurde, dass die Energie  $\mathcal{E}$  im reinen Magnetfeld konstant ist. Es folgt dann in Komponenten

$$\dot{v}_z = 0, \quad \dot{v}_x = \frac{c^2 e}{\mathcal{E} c} v_y B = \frac{ceB}{\mathcal{E}} v_y, \quad \dot{v}_y = -\frac{ceB}{\mathcal{E}} v_x. \quad (6.58)$$

Die Größe

$$\frac{ceB}{\mathcal{E}} =: \omega \quad (6.59)$$

hat offenbar die Dimension einer Frequenz, also 1/Zeit. Aus (6.58) erhalten wir

$$(v_x + iv_y)' = -i\omega(v_x + iv_y), \quad (6.60)$$

also eine Gleichung für die komplexe Geschwindigkeit  $v_x + iv_y$ . Der naheliegende Ansatz

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t} \quad (6.61)$$

löst offenbar diese Gleichung. Wir schreiben die (komplexe) Amplitude noch in der Form

$$a = v_t e^{-i\alpha} \quad (6.62)$$

mit reellem  $v_t$  und der Phase  $\alpha$  und erhalten

$$v_x = v_t \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_t \sin(\omega t + \alpha). \quad (6.63)$$

Die Bewegung findet offenbar in der  $x$ - $y$ -Ebene entlang einer Kreisbahn statt, die mit der Kreisfrequenz  $\omega$  durchlaufen wird;  $v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  ist die konstante (tangentielle) Umlaufgeschwindigkeit.

- Integration von (6.63) ergibt

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_t}{\omega} \sin(\omega t + \alpha), \\ y(t) &= y_0 + \frac{v_t}{\omega} \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (6.64)$$

Dabei ist der *Bahnradius* offenbar

$$r = \frac{v_t}{\omega} = \frac{\mathcal{E}v_t}{ceB} = \frac{cp_t}{eB}. \quad (6.65)$$

Die Bewegung in  $z$ -Richtung (längs des Feldes) erfolgt unbeschleunigt, also ist

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t. \quad (6.66)$$

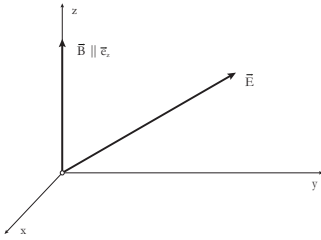
Demnach erfolgt die Bewegung des Teilchens auf einer Schraubenbahn mit Radius (6.65) und Ganghöhe

$$\Delta z = v_{0z} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi v_{0z} \frac{\mathcal{E}}{ceB} = 2\pi v_{0z} \frac{r}{v_t} . \quad (6.67)$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist

$$\omega \approx \frac{ceB}{mc^2} = \frac{eB}{mc} , \quad r \approx \frac{v_t mc}{eB} . \quad (6.68)$$

## 6.5 Bewegung in kombinierten, homogenen und statischen Feldern



Zur Anordnung kombinierter, homogener und statischer Felder

- Wir betrachten nun in nichtrelativistischer Näherung die Bewegung eines Teilchens der Ladung  $e$  und der Masse  $m$ , d.h. der Impuls des Teilchens ist

$$\vec{p} = m\vec{v} , \quad (6.69)$$

und seine Bewegungsgleichung ist

$$m\vec{\dot{v}} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \cdot \vec{v} \times \vec{B} . \quad (6.70)$$

Wir wählen die  $z$ -Richtung in Richtung von  $\vec{B}$ ,  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , und drehen das Koordinatensystem so, dass  $\vec{E}$  in der  $y$ - $z$ -Ebene liegt. Dann lauten die Komponenten der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{e}{c}\dot{y}B , \\ m\dot{y} &= eE_y - \frac{e}{c}\dot{x}B , \\ m\ddot{z} &= eE_z , \end{aligned} \quad (6.71)$$

weil  $\vec{E}$  keine  $x$ -Komponente hat. Die dritte Gleichung (6.71) hat die offensichtliche Lösung

$$z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t + z_0 , \quad (6.72)$$

denn in  $z$ -Richtung wird das Teilchen konstant beschleunigt. Multiplikation der zweiten Gleichung (6.71) mit  $i$  und Addition zur ersten ergibt

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\omega(\dot{x} + i\dot{y}) + i\frac{e}{m}E_y , \quad (6.73)$$

wobei  $\omega$  in der nichtrelativistischen Näherung (6.68) zu verwenden ist, also

$$\omega = \frac{eB}{mc} . \quad (6.74)$$

Diese Gleichung (6.73) braucht die allgemeine Lösung ihrer homogenen Form und eine spezielle inhomogene Lösung. Für die allgemeine homogene Lösung setzen wir an

$$(\dot{x} + i\dot{y})_h = ae^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{C}, \quad (6.75)$$

während eine inhomogene Lösung durch

$$(\dot{x} + i\dot{y})_p = \frac{eE_y}{m\omega} = \frac{cE_y}{B} \quad (6.76)$$

gegeben ist. Die vollständige Lösung lautet also

$$(\dot{x} + i\dot{y}) = ae^{-i\omega t} + \frac{cE_y}{B}, \quad (6.77)$$

wobei die komplexe Zahl  $a$  durch die Anfangsbedingungen gegeben ist.

- Wir setzen

$$a = be^{i\alpha} \quad \text{mit} \quad b \in \mathbb{R} \quad (6.78)$$

und wählen den Zeitnullpunkt so, dass  $a$  rein reell wird. Durch Zerlegung von (6.77) in Real- und Imaginärteil folgt

$$\dot{x} = a \cos \omega t + \frac{cE_y}{B}, \quad \dot{y} = -a \sin \omega t, \quad (6.79)$$

d.h. bei  $t = 0$  zeigt  $v_t$  in Richtung der  $x$ -Achse.

- Offensichtlich sind  $x$  und  $y$  periodische Funktionen der Zeit, wobei der Mittelwert von  $\dot{y}$  verschwindet, der Mittelwert von  $\dot{x}$  aber eine *Driftgeschwindigkeit* darstellt:

$$\langle \dot{x} \rangle_\tau = \frac{cE_y}{B}. \quad (6.80)$$

Offenbar steht die Driftgeschwindigkeit auf  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  senkrecht und hat den Betrag

$$\langle \vec{v} \rangle_\tau = c \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}. \quad (6.81)$$

Die Bahn des Teilchens ergibt sich aus (6.79) durch die weitere Integration nach  $t$ ,

$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{B}t + x_0, \quad y = \frac{a}{\omega} \cos \omega t + y_0. \quad (6.82)$$

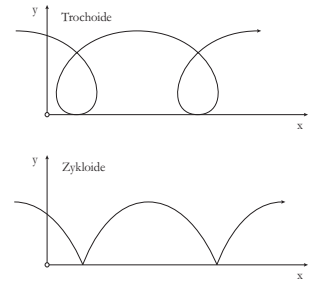
wenn  $x = 0 = y$  bei  $t = 0$  sein sollen, folgt  $x_0 = 0$  und  $y_0 = -a/\omega$ , mithin

$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{cE_y}{B}t, \quad y = \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1). \quad (6.83)$$

Dies stellt eine *Trochoide* dar, die für

$$a = -\frac{cE_y}{B} \quad (6.84)$$

zu einer *Zykloide* entartet.



Trochoide und Zykloide



# Index

- Ampèresches Gesetz, 6
- Bahnradius im Magnetfeld, 69
- Biot-Savartsches Gesetz, 40
- Brechung, 30
- Brechungsgesetz, 60
- Brechungsindex, 57
- Clausius-Mossotti-Formel, 33
- Coulomb, 2
- Coulomb-Eichung, 36, 50
- Coulombsches Gesetz, 13
- Curiesches Gesetz, 45
- d'Alembert-Gleichung, 51
- Delta-Funktion, 16
- Diamagnetika, 45
- diamagnetisch, 9
- dielektrische Verschiebung, 3, 26
- Dielektrizitätskonstante, 9
- Dipol, 17
  - Feld, 18, 42
  - Potential, 17
- Dipolmoment, 17
- Dipolmomente
  - molekulare, 32
- Dispersionsrelation, 54, 58
- Dualvektor, 63
- ebene Wellen
  - monochromatische, 53
- Eichtransformation, 35, 49
- Eigenzeit, 63
- Energie
  - potentielle, 23
- Faradaysches Induktionsgesetz, 6
- Feldstärke
  - elektrische, 2
  - magnetische, 4
- Ferromagnetika, 45
- Flächenladung, 21
- Geschwindigkeits-Additionstheorem, 65
- Kettenlinie, 68
- Laplace-Gleichung, 15
- Leitfähigkeit, 9
- Lenzsche Regel, 6
- Lorentzkontraktion, 65
- Lorentzkraft, 67
- Lorentztransformation, 61
- Lorenz-Eichung, 50
- magnetische Erregung, 5, 44
- magnetischer Fluss, 5
- Magnetisierungsstrom, 44
- Maxwell-Gleichungen
  - differentielle Form, 8
  - Gaußsches System, 11
  - integrale Form, 7
- Minkowski-Metrik, 62
- Mittelung
  - makroskopische, 25
- Moment
  - magnetisches, 4, 42
- Ohm, 9
- Paramagnetika, 45
- paramagnetisch, 9
- Permeabilität, 45
- Permeabilitätskonstante, 9
- Poisson-Gleichung, 15
- Polarisation, 26
  - elliptische, 56
  - lineare, 55
  - zirkulare, 56
- Polarisierbarkeit
  - molekulare, 33
- Polstärke, 4

Potential  
elektrostatishes, 14

Randbedingungen  
Dirichlet'sche, 18  
Neumann'sche, 18

Randbedingungen und Eindeutigkeit, 19

Reflexionsgesetz, 60

Relativitätstheorie  
spezielle, 61

Ringspannung  
elektrische, 6  
magnetische, 5

Ruheenergie, 66

Skalarpotential  
magnetisches, 35

Spannung, 3

Stetigkeit an Grenzflächen, 28

Stetigkeitsbedingungen, 60

Stromdichte, 4

Stromstärke, 4

Summenkonvention  
Einsteinsche, 63

Superposition von Feldern, 14

Suszeptibilität, 26, 45

Telegrafengleichungen, 57

Trochoide, 71

Vektoren  
ko- und kontravariante, 63

Vektorpotential, 36

Verschiebungsstrom, 4

Vierergeschwindigkeit, 66

Viererimpuls, 66

Vierervektor, 62

Wellengleichung, 51

Wellenvektor, 53

Zeitdilatation, 64

Zykloide, 71