Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 10

Besprechung in den Übungsgruppen am 13. Januar 2020

1. Hausaufgabe: Kugeln, die von Türmen fallen

Da die Erde rotiert, muss auf alle bewegten Objekte die Corioliskraft wirken. Diese ist jedoch so schwach, dass wir sie im Alltag nicht wahrnehmen. Experimentell wurde die Existenz dieser Scheinkraft durch Fallexperimente nachgewiesen. Ein sehr genaues Fallexperiment führte Edwin Hall um 1900 an der Harvard University in den USA durch, indem er 948 Kugeln aus einer Höhe von 23 m fallen ließ und deren Abweichung von einer geradlinigen Bahn bestimmte.

Machen Sie eine Vorhersage für den Betrag und die Richtung der Ablenkung durch die Corioliskraft in diesem Experiment. Verwenden Sie dafür, dass der Breitengrad der Harvard University 42° Nord ist.*

2. Hausaufgabe: Nachweihnachtliche Coriolis-Diät

Nach Weihnachten stellen Sie erschrocken fest, dass Sie durch Zimtsterne, Vanillekipferl, Lebkuchen und so weiter um 5 % ihres vorherigen Gewichts zugenommen haben. Dies würden Sie gerne rückgängig machen und fragen zunächst Ihren Ernährungsberater, der Ihnen viel Bewegung empfiehlt. Um ganz sicher zu gehen, fragen Sie noch einmal bei Ihrem Guru nach, der Ihnen rät, sich bevorzugt nach Osten zu wenden. Von dieser Aussage sind Sie zunächst etwas verwirrt, bis Ihnen einfällt, dass die Erde sich ja dreht.

a) Wie schnell müssten Sie in Heidelberg nach Osten laufen, damit Sie dank der Corioliskraft wieder ihr altes Gewicht haben? Verwenden Sie hierfür, dass der Breitengrad von Heidelberg 49,42° Nord ist.

b) Warum sollten Sie gerade nach Osten laufen und was passiert, wenn Sie stattdessen nach Süden, Norden oder Westen laufen?

c) Wie groß ist bei dieser Geschwindigkeit die Beschleunigung, die Sie von Ihrer geraden Bahn ablenkt? In welche Richtung wirkt sie?

3. Hausaufgabe: Matrixdiagonalisierung

Berechnen Sie die Eigenwerte und die auf eins normierten Eigenvektoren von

a) $$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 0 \end{pmatrix},$$

b) $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

* *Hinweis:* Da die Ablenkungen sehr klein sind, können Sie die Corioliskraft analog zum Abschnitt 8.3.3 des Skriptes näherungsweise auf der geradlinigen Bahn bestimmen. Eine solche Näherung wird als *Born-Näherung* bezeichnet.

4. Hausaufgabe: Trägheitstensor einer diskreten Massenverteilung

Betrachten Sie zwei Punktmassen m_1 und m_2, die durch eine masselose Stange verbunden sind. Die Koordinaten der Massenpunkte seien $\vec{x}_1 = (a, a, 0)^\top$ und $\vec{x}_2 = (-a, a, 0)^\top$ mit $a > 0$.

a) Berechnen Sie die Elemente des Trägheitstensors Θ_{ij} dieser diskreten Massenverteilung bezüglich des Koordinatenursprungs.

b) Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente und Hauptträgheitsachsen.

c) Wie groß ist das Trägheitsmoment für eine Drehung um eine Achse, die durch den Koordinatenursprung und den Punkt $\vec{P} = (1, 1, 1)^\top$ verläuft?†

5. Verständnisfragen

a) Welche Scheinkräfte treten in beschleunigten Bezugssystemen auf?

b) Benennen Sie die wesentlichen Eigenschaften der Coriolis- und der Zentrifugalkraft.

c) Wodurch sind Lagrange-Punkte definiert und wo treten sie auf?

d) Was ist ein Tensor und wie können Sie ihn darstellen?

e) Wie und wozu bestimmen Sie das charakteristische Polynom?

f) Wie bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers?

6. Ein Kreuzworträtsel für die Weihnachtszeit

Waagerecht

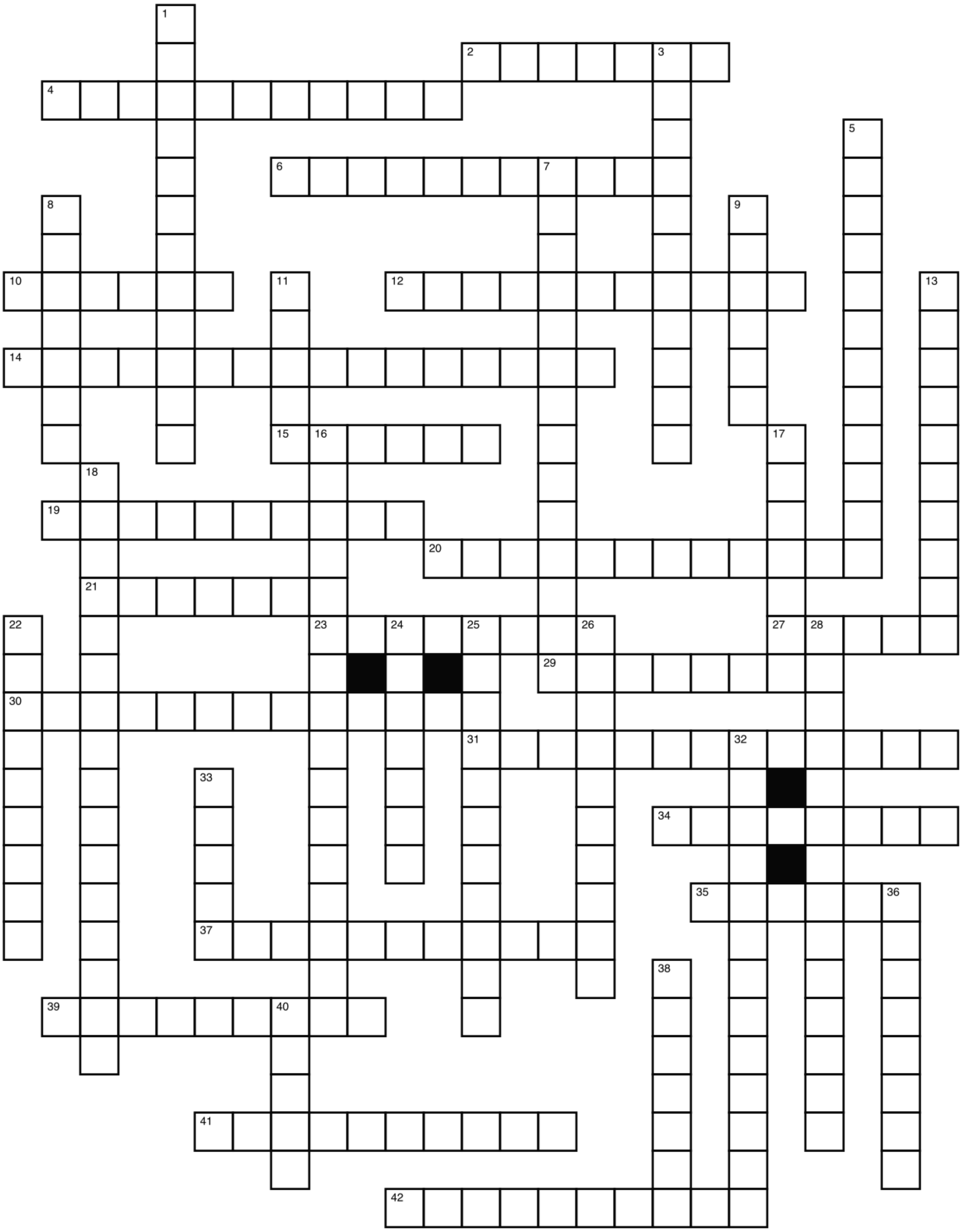
2. nach ihm sind Transformationen von einem Inertialsystem ins nächste benannt **4.** parametrisiert eine Kurve **6.** trennt bei drei Körpern den Einflussbereich der beiden schweren **10.** kann beim Integrieren einer Differentialgleichung helfen **12.** das Skalarprodukt ist's, das Vektorprodukt nicht **14.** beschreibt die Ablenkung von Teilchen **15.** erleichtert Kurvenintegrale **19.** setzt kinetische und potentielle Energie im homogenen Potential in Verbindung **20.** zur Lösung inhomogener Differentialgleichungen neben der homogenen benötigt **21.** beschreibt die höchste Ableitung in einer Differentialgleichung **23.** Keplerbahn bei großen Energien **27.** dargestellt durch komplexe Exponentialfunktionen **29.** machen aus n Vektoren ein Skalar, in linearer Weise **30.** bei Matrizen: A_{ij} statt A_{ji} **31.** in rotierenden Bezugssystemen proportional zur Geschwindigkeit **34.** die Rotation hiervon wird immer Null **35.** wichtig zum Nähern **37.** nur in beschleunigten Bezugssystemen **39.** wird zur Lösung inhomogener Differentialgleichungen variiert **41.** ihr Quadrat verhält sich proportional zur dritten Potenz der Halbachse **42.** ändert den Drehimpuls

Senkrecht

1. verschwindet bei parallelen Vektoren **3.** drei werden benötigt, um zwischen Körper und Inertialsystem zu vermitteln **5.** darf für Objekte der regulären Gruppe nicht verschwinden **7.** ist nur beim Kreis null und bei der Parabel eins **8.** Newton's drittes, gleich der actio **9.** diese Determinante braucht's zum Integrieren in anderen Koordinaten **11.** beim Keplerproblem im Potentialminimum ist dies die Bahn **13.** ist im Zentralpotential erhalten **16.** ersetzt die Masse bei der Drehung eines starren Körpers **17.** muss für orthonormale Matrizen gleich der Transponierten sein **18.** der Dritte im Bund bei Tangential- und Hauptnormalenvektor **22.** existiert für konservative Kraftfelder **24.** sonnennächster Punkt einer Bahn **25.** Streuung in diese Richtung ist nur möglich bei schwererem Target **26.** benötigt für das Kreuzprodukt in Komponenten **28.** hier ist man, wenn alle Kräfte physikalischen Ursprungs sind **32.** unerlässlich bei der Abstandsbestimmung **33.** spannt einen Vektorraum auf **36.** wenn sie verschwindet, ist ein Kraftfeld konservativ **38.** beim inelastischen Stoß nicht erhalten **40.** Differentialoperator

---

† *Hinweis:* Das Trägheitsmoment Θ_e für eine Drehung um eine beliebige Achse, die durch den Einheitsvektor $\vec{e}$ bestimmt ist, erhält man durch die Projektion $\Theta_e = \vec{e}^\top \Theta\, \vec{e} = e_i\, \Theta_{ij}\, e_j$.



Fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 10: Lösungen

1. ***Hausaufgabe:*** **Kugeln, die von Türmen fallen**

Im Folgenden wird das Koordinatensystem so gelegt, dass die Kugeln durch die Gravitation in negative z-Richtung beschleunigt werden. Da ihre Anfangsgeschwindigkeit verschwindet, folgen sie der Trajektorie

$$z(t) = z_0 - \frac{1}{2}gt^2,$$

und ihre Geschwindigkeit beträgt

$$v_z(t) = -gt.$$

Die vektorielle Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ kann wie in der Vorlesung in eine Komponente parallel zur Tangentialebene der Erde (hier die x-y-Ebene) $\omega_\parallel$ und in eine Komponente orthogonal zur Tangentialebene (hier die z-Komponente) $\omega_\perp$ aufgeteilt werden. Wird das Koordinatensystem ferner so wie in der Vorlesung gewählt, dass die x-Achse nach Süden und die y-Achse nach Osten zeigt, ergibt sich

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_\parallel \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\perp \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \omega_\parallel = -\omega\cos\beta \quad \text{und} \quad \omega_\perp = \omega\sin\beta, \tag{I}$$

wobei β der Breitengrad ist und $\omega \equiv |\vec{\omega}|$. Für die Corioliskraft gilt dann

$$\vec{F}_\mathrm{C} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} = 2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} \omega_\parallel \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\perp \end{pmatrix} \right] = 2m \begin{pmatrix} 0 \\ v_z\omega_\parallel \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2m\omega gt\cos\beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Kraft impliziert die Beschleunigung

$$\ddot{y} = 2\omega gt\cos\beta.$$

Die Ablenkung kann dann durch zweimaliges Integrieren gefunden werden, wobei beide Integrationskonstanten verschwinden müssen, da $y(t = 0) = 0$ ist und $\dot{y}(t = 0) = 0$. Damit folgt

$$y = \frac{\omega g\cos\beta}{3}t^3.$$

Die Kugel schlägt zur Zeit T auf, wenn

$$z(T) = 0 = z_0 - \frac{1}{2}gT^2 \qquad \Rightarrow \qquad T = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}.$$

Zu diesem Zeitpunkt beträgt die Ablenkung

$$y(T) = \frac{\omega g\cos\beta}{3}T^3 = \frac{\omega g\cos\beta}{3}\left(\frac{2z_0}{g}\right)^{3/2} = \frac{\omega\cos\beta}{3}\sqrt{\frac{8z_0^3}{g}}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit der Erde ist

$$\omega = \frac{2\pi}{1\,\text{Tag}} = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\,\mathrm{s}^{-1} = \frac{\pi}{43200}\,\mathrm{s}^{-1}. \tag{II}$$

Für das Fallexperiment von Edwin Hall mit $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $z_0 = 23\,\mathrm{m}$ und $\beta = 42°$ ist die Ablenkung

$$y = 0{,}0018\,\mathrm{m} = 1{,}8\,\mathrm{mm}$$

und somit in östlicher Richtung.

2. *Hausaufgabe:* Nachweihnachtliche Coriolis-Diät

a) Das Koordinatensystem wird wieder analog zu Aufgabe 1 gewählt, sodass die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ wieder wie in (I) aufgeteilt werden kann. Bewegt man sich nach Osten, gilt für die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad v \equiv |\vec{v}|.$$

Diese Bewegung führt zu der Corioliskraft

$$\vec{F}_\mathrm{C} = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} = 2m \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} \omega_\parallel \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\perp \end{pmatrix} \right] = 2m \begin{pmatrix} v\omega_\perp \\ 0 \\ -v\omega_\parallel \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2mv\omega\sin\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\equiv \vec{F}_{\mathrm{C},\parallel}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2mv\omega\cos\beta \end{pmatrix}}_{\equiv \vec{F}_{\mathrm{C},\perp}}, \quad \text{(III)}$$

wobei die Corioliskraft in einen Anteil $\vec{F}_{\mathrm{C},\parallel}$ parallel zur Erdoberfläche und einen Anteil $\vec{F}_{\mathrm{C},\perp}$ orthogonal zur Erdoberfläche aufgespalten wurde. Die orthogonale Komponente $\vec{F}_{\mathrm{C},\perp}$ zeigt in z-Richtung und kann somit zu einer Abnahme führen. Um das alte Gewicht zu erreichen, muss

$$\vec{F}_\mathrm{G} + \vec{F}_{\mathrm{C},\perp} = \frac{1}{1 + 0{,}05}\,\vec{F}_\mathrm{G} = \frac{20}{21}\vec{F}_\mathrm{G} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_{\mathrm{C},\perp} = -\frac{1}{21}\vec{F}_\mathrm{G}$$

gelten, wobei $\vec{F}_\mathrm{G}$ die Gravitationkraft ist. Daraus folgt

$$2mv\omega\cos\beta = \frac{mg}{21} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{g}{42\,\omega\cos\beta}.$$

Mit (II) sowie $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ und $\beta = 49{,}42°$ ergibt sich

$$v = 4\,937\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 17\,775\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

Man müsste also mit einer Geschwindigkeit von $17\,775\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ genau nach Osten laufen, um die Gewichtszunahme von 5 % auszugleichen.

b) Die Corioliskraft verändert sich je nach Laufrichtung. Läuft man Richtung Osten, dann wird ihr orthogonaler Anteil $\vec{F}_{\mathrm{C},\perp}$ gerade maximal und zeigt nach oben, da hier $\vec{v}$ und $\vec{\omega}_\parallel$ genau senkrecht aufeinander stehen.

Läuft man nach Süden oder Norden, dann sind Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit (anti-)parallel, sodass die orthogonale Komponente der Corioliskraft verschwindet.

Läuft man nach Westen, zeigt die Corioliskraft in die negative z-Richtung. Statt leichter zu werden, wird man um denselben Betrag schwerer.

c) Zu einer Ablenkung von der geradlinigen Bahn kommt es durch die parallele Komponente der Corioliskraft $\vec{F}_{\mathrm{C},\parallel}$. Für sie gilt nach (III)

$$\vec{F}_{C,\parallel} = 2mv\omega\sin\beta\,\vec{e}_x.$$

Die Beschleunigung ist somit

$$\vec{a} = 2v\omega\sin\beta\,\vec{e}_x = 2 \cdot \frac{g}{42\,\omega\cos\beta}\,\omega\sin\beta\,\vec{e}_x = \frac{g\tan\beta}{21}\,\vec{e}_x = 0{,}056\,g\,\vec{e}_x = 0{,}55\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,\vec{e}_x.$$

Dies ist bereits 5,6 % der Erdbeschleunigung. Die Beschleunigung zeigt in die positive x-Richtung, also nach Süden.

3. *Hausaufgabe:* Matrixdiagonalisierung

a) Um die Eigenwerte λ_i der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 0 \end{pmatrix}$$

zu berechnen, bestimmt man zunächst das charakteristische Polynom,

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(2-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0.$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung liefert die gesuchten Eigenwerte,

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 4 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -2.$$

Den zum Eigenwert λ_i gehörigen Eigenvektor $\vec{x}_i$ erhält man aus der Gleichung

$$(A - \lambda_i \mathbb{1}_2)\,\vec{x}_i = 0. \tag{IV}$$

Für den Eigenvektor $\vec{x}_1$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 4$ impliziert dies

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Aus dem resultierenden Gleichungssystem erhält man die Komponenten des Eigenvektors,

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + \sqrt{8}\,x_2 &= 0 \\ \sqrt{8}\,x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \sqrt{2}\,x_2 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Normiert man diesen Vektor auf eins, so ergibt sich schließlich

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Analog dazu erhält man den Eigenvektor $\vec{x}_2$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -2$. Aus (IV) folgt

$$\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$

und damit

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + \sqrt{8}\,x_2 &= 0 \\ \sqrt{8}\,x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = -\sqrt{2}\,x_1 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\sqrt{2}\,x_1 \end{pmatrix}.$$

Normiert man diesen Vektor auf eins, so ergibt sich schließlich

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

b) Das charakteristische Polynom der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

lautet

$$\det(B - \lambda \mathbb{1}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda = -\lambda\,(\lambda^2 - 2) = 0.$$

Die drei Eigenwerte sind somit

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \sqrt{2} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = -\sqrt{2}.$$

Die dazugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_i$ erhält man wiederum durch die Bedingung

$$(B - \lambda_i \mathbb{1}_3)\, \vec{x}_i = 0. \tag{V}$$

Für den Eigenvektor $\vec{x}_1$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ impliziert dies

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Aus dem resultierenden Gleichungssystem erhält man die Komponenten des Eigenvektors,

$$\left.\begin{aligned} x_2 \qquad &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad x_2 = 0, \quad x_3 = -x_1 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

Normiert man diesen Vektor auf eins, so ergibt sich

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenvektor $\vec{x}_2$ zum Eigenwert $\lambda_2 = \sqrt{2}$ folgt aus (V) sofort

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Komponenten des Eigenvektors ergeben sich somit aus

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{2}\, x_1 + x_2 \qquad &= 0 \\ x_1 - \sqrt{2}\, x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - \sqrt{2}\, x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \sqrt{2}\, x_1, \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, x_2 = x_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sqrt{2}\, x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Normiert man diesen Vektor auf eins, so ergibt sich

$$\vec{x}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenvektor $\vec{x}_3$ zum Eigenwert $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ folgt aus (V) sofort

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Komponenten des Eigenvektors ergeben sich somit aus

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{2}\, x_1 + x_2 \qquad &= 0 \\ x_1 + \sqrt{2}\, x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + \sqrt{2}\, x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{2}\, x_1, \quad x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, x_2 = x_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\sqrt{2}\, x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Normiert man diesen Vektor auf eins, so ergibt sich

$$\vec{x}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. ***Hausaufgabe:* Trägheitstensor einer diskreten Massenverteilung**

a) Die Komponenten des Trägheitstensors einer diskreten Massenverteilung sind allgemein durch

$$\Theta_{ij} = \sum_k m_k \left(\vec{x}_k^2 \delta_{ij} - x_{k,i}\, x_{k,j}\right)$$

gegeben, wobei m_k die Masse und $\vec{x}_k$ den Ortsvektor des k-ten Massenpunkts bezeichnet. Im vorliegenden Fall befinden sich die zwei Massen m_1 und m_2 an den Orten $\vec{x}_1 = (a, a, 0)^\top$ und $\vec{x}_2 = (-a, a, 0)^\top$. Damit lauten die Komponenten des Trägheitstensors explizit

$$\begin{aligned}
\Theta_{11} &= m_1 \left(x_{1,2}^2 + x_{1,3}^2\right) + m_2 \left(x_{2,2}^2 + x_{2,3}^2\right) = a^2 \left(m_1 + m_2\right), \\
\Theta_{22} &= m_1 \left(x_{1,1}^2 + x_{1,3}^2\right) + m_2 \left(x_{2,1}^2 + x_{2,3}^2\right) = a^2 \left(m_1 + m_2\right), \\
\Theta_{33} &= m_1 \left(x_{1,1}^2 + x_{1,2}^2\right) + m_2 \left(x_{2,1}^2 + x_{2,2}^2\right) = 2a^2 \left(m_1 + m_2\right), \\
\Theta_{12} &= \Theta_{21} = -m_1 x_{1,1} x_{1,2} - m_2 x_{2,1} x_{2,2} = a^2 \left(m_2 - m_1\right), \\
\Theta_{13} &= \Theta_{31} = -m_1 x_{1,1} x_{1,3} - m_2 x_{2,1} x_{2,3} = 0, \\
\Theta_{23} &= \Theta_{32} = -m_1 x_{1,2} x_{1,3} - m_2 x_{2,2} x_{2,3} = 0.
\end{aligned}$$

Die Matrixdarstellung des Trägheitstensors lautet somit

$$\Theta = a^2 \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 - m_1 & 0 \\ m_2 - m_1 & m_1 + m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(m_1 + m_2\right) \end{pmatrix}.$$

b) Die Hauptträgheitsmomente erhält man durch Diagonalisierung des Trägheitstensors. Das charakteristische Polynom kann dann gemäß

$$\det\left(\Theta - \lambda \mathbb{1}_3\right) = \begin{vmatrix} a^2 \left(m_1 + m_2\right) - \lambda & a^2 \left(m_2 - m_1\right) & 0 \\ a^2 \left(m_2 - m_1\right) & a^2 \left(m_1 + m_2\right) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \left(m_1 + m_2\right) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

berechnet werden. Dies resultiert in der Gleichung

$$\begin{aligned}
&\left[a^2 \left(m_1 + m_2\right) - \lambda\right]^2 \left[2a^2 \left(m_1 + m_2\right) - \lambda\right] - \left[a^2 \left(m_2 - m_1\right)\right]^2 \left[2a^2 \left(m_1 + m_2\right) - \lambda\right] \\
&= \left[2a^2 \left(m_1 + m_2\right) - \lambda\right] \left[\lambda^2 - 2\lambda a^2 \left(m_1 + m_2\right) + 4a^4 m_1 m_2\right] = 0.
\end{aligned}$$

Man erhält daher als erstes Hauptträgheitsmoment

$$\Theta_1 = \lambda_1 = 2a^2 \left(m_1 + m_2\right).$$

Die beiden übrigen Hauptträgheitsmomente erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda a^2 \left(m_1 + m_2\right) + 4a^4 m_1 m_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{2,3} = a^2 \left(m_1 + m_2\right) \pm a^2 \left(m_1 - m_2\right).$$

Man erhält daher

$$\Theta_2 = \lambda_2 = 2a^2 m_1 \qquad \text{und} \qquad \Theta_3 = \lambda_3 = 2a^2 m_2.$$

Die Hauptträgheitsachsen sind dann durch die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_i$ gegeben. Die Bedingung dafür lautet analog zu (V)

$$\left(\Theta - \Theta_i \mathbb{1}_3\right) \vec{x}_i = 0.$$

Die (auf eins normierte) Hauptträgheitsachse $\vec{x}_1$ zum Hauptträgheitsmoment $\Theta_1 = 2a^2\,(m_1 + m_2)$ kann daher wie folgt ermittelt werden,

$$\left.\begin{aligned} -(m_1+m_2)\,x_1 + (m_2-m_1)\,x_2 &= 0 \\ (m_2-m_1)\,x_1 - (m_1+m_2)\,x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad x_2 = \frac{m_1+m_2}{m_2-m_1}\,x_1, \quad x_2 = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\,x_1$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die (auf eins normierte) Hauptträgheitsachse $\vec{x}_2$ zum Hauptträgheitsmoment $\Theta_2 = 2a^2 m_1$ kann wie folgt ermittelt werden,

$$\left.\begin{aligned} (m_2-m_1)\,x_1 + (m_2-m_1)\,x_2 &= 0 \\ (m_2-m_1)\,x_1 + (m_2-m_1)\,x_2 &= 0 \\ 2m_2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad x_2 = -x_1, \quad x_3 = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die (auf eins normierte) Hauptträgheitsachse $\vec{x}_3$ zum Hauptträgheitsmoment $\Theta_3 = 2a^2 m_2$ kann schließlich wie folgt ermittelt werden,

$$\left.\begin{aligned} (m_1-m_2)\,x_1 + (m_2-m_1)\,x_2 &= 0 \\ (m_2-m_1)\,x_1 + (m_1-m_2)\,x_2 &= 0 \\ 2m_1x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad x_2 = x_1, \quad x_3 = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Das Trägheitsmoment für eine Drehung um eine beliebige Achse, die durch den Einheitsvektor $\vec{e}$ bestimmt ist, erhält man durch die Projektion

$$\Theta_e = \vec{e}^{\top}\Theta\,\vec{e} = e_i\,\Theta_{ij}\,e_j.$$

Im vorliegenden Fall verläuft die Drehachse durch den Koordinatenursprung und den Punkt $\vec{P} = (1,1,1)^{\top}$. Man erhält daher für den normierten Vektor $\vec{e}$ das Ergebnis

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Trägheitsmoment lautet daher

$$\Theta_e = \frac{a^2}{3}\,[4\,(m_1+m_2) + 2\,(m_2-m_1)] = \frac{2a^2}{3}\,(3m_2+m_1)\,.$$

5. Verständnisfragen

a) Es treten die folgenden 4 Scheinkräfte auf.

(i) Die Kraft $-m\left[\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x})\right]$ tritt nur auf, wenn sich die Drehachse ändert.

(ii) Die Corioliskraft $2m\,(\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega})$ beschreibt eine Ablenkung von Massenpunkten, die sich im rotierenden System bewegen.

(iii) Außer an den Polen tritt überall die Zentrifugalkraft $m\,[(\vec{\omega} \times \vec{x}) \times \vec{\omega}] = m\omega\,\vec{y}$ auf, wobei $\vec{y}$ der senkrechte Abstand des Massenpunkts von der Drehachse ist.

(iv) Die Kraft $m\,[(\vec{\omega} \times \vec{a}) \times \vec{\omega}]$ entspricht der Zentrifugalkraft auf den Ursprung.

b) Die Corioliskraft beschreibt eine Ablenkung von Massenpunkten, die sich im rotierenden System bewegen. Sie steht senkrecht auf $\dot{\vec{x}}$ und $\vec{\omega}$ und verschwindet somit für Bewegungen längs der Drehachse. Die Corioliskraft hat ferner zwei Komponenten. Die erste Komponente ist normal zur Erdoberfläche und ungleich null bei Bewegungen in Ost-West-Richtung, während die zweite Komponente auf der Nordhalbkugel der Erde immer nach rechts, auf der Südhalbkugel immer nach links relativ zur Richtung der Bewegung zeigt.

   Die Zentrifugalkraft hängt vom senkrechten Abstand eines Massenpunktes von der Drehachse ab und zeigt auch immer senkrecht von der Drehachse nach außen. Demnach ist die Zentrifugalkraft am Äquator normal zur Erdoberfläche, während sie an den Polen verschwindet. Überall dazwischen kann sie in eine Tangential- und eine Normalkomponente zerlegt werden.

c) Lagrange-Punkte sind Exrema im gemeinsamen Gravitationspotential zweier Massen, die um ihren gemeinesamen Schwerpunkt kreisen. Testmassen sind an diesen Punkten also kräftefrei. Die Lagrange-Punkte 1–3 liegen auf der Verbindungsachse der beiden Massen, wobei der erste zwischen den beiden Massenpunkten liegt, der zweite jenseits des leichteren Körpers liegt und der dritte jenseits des schwereren Körpers liegt. Die Langrange-Punkte 4 und 5 bilden mit den beiden Massen jeweils ein gleichseitiges Dreieck. Während die Punkte 1–3 immer instabil sind, können die Punkte 4 und 5 stabil sein, wenn die leichtere Masse maximal 1/26 so schwer ist wie die schwerere Masse. Instabil heißt hier, dass eine Testmasse, die leicht aus dem Lagrange-Punkt heraus abgelenkt wird, nicht wieder dorthin zurückkehrt, sondern sich immer weiter entfernt.

d) Ein Tensor n-ter Stufe ist eine multilineare Abbildung, die n Vektoren auf den zugrundeliegenden Zahlenkörper abbildet. Die Multilinearität bedeutet, dass der Tensor in jedem seiner Argumente linear ist. Ein Tensor erster Stufe kann durch einen (Dual-)Vektor dargestellt werden, ein Tensor zweiter Stufe durch eine Matrix.

e) Das charakteristische Polynom wird benötigt, um die Eigenwerte einer $N \times N$ Matrix A zu bestimmen. Es ergibt sich aus $\det(A - \lambda \mathbb{1}_N) = 0$. Die Nullstellen des sich ergebenden Polynoms N-ter Ordnung sind die Eigenwerte.

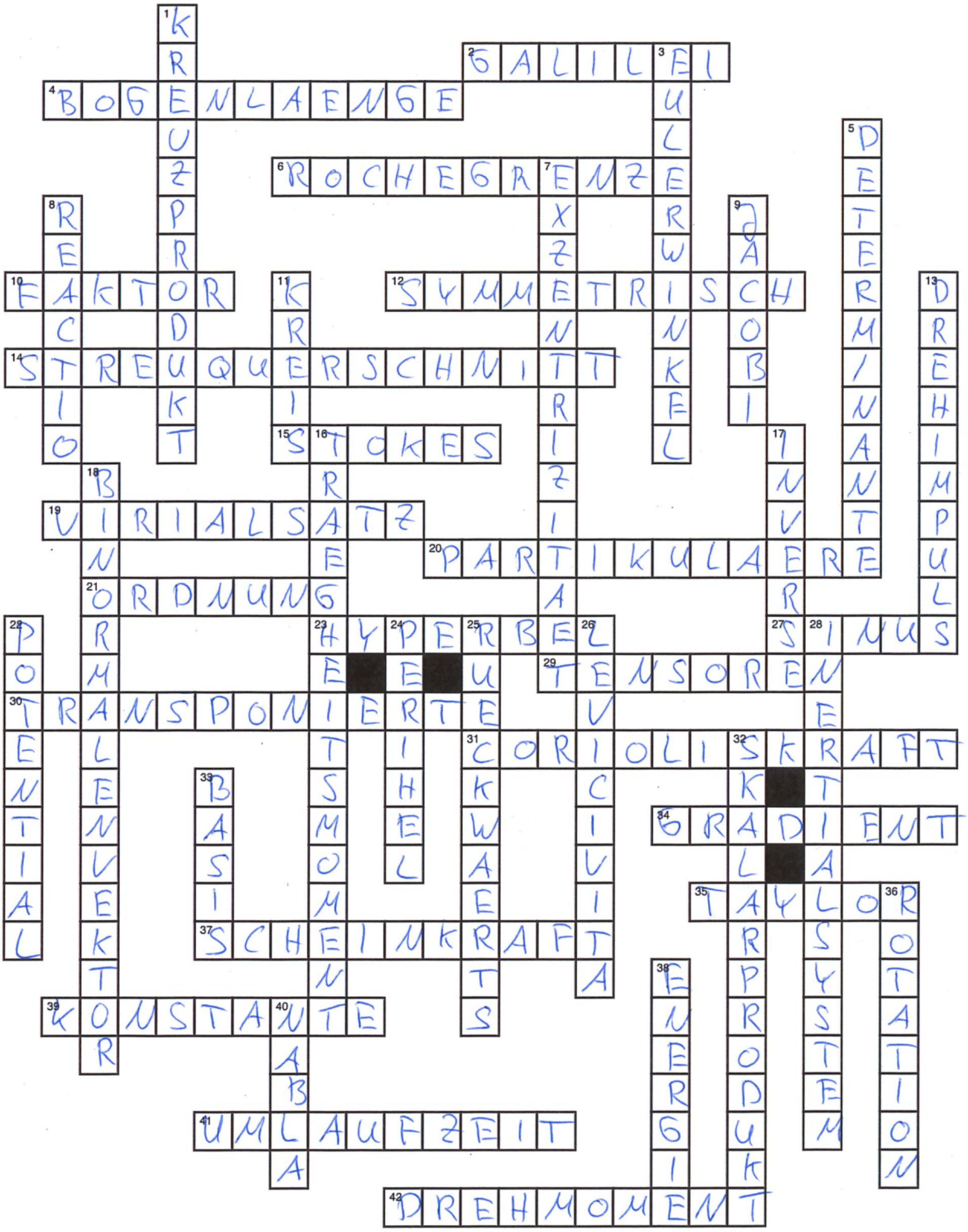
f) Für ein System aus N starr miteinander verbundenen Massenpunkten sind die Komponenten des Trägheitstensors Θ durch

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k} \right)$$

   gegeben, wobei $\vec{x}_i$ der Ortsvektor des i-ten Massenpunkts ist. Die Hauptträgheitsmomente Θ_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ sind die Eigenwerte des Trägheitstensors und können somit mit Hilfe des charakteristischen Polynoms aus

$$\det(\Theta - \lambda \mathbb{1}_3) = 0$$

   ermittelt werden. Die Nullstellen λ_i dieses charakteristischen Polynoms sind dann die Hauptträgheitsmomente, $\Theta_i = \lambda_i$.



1 KREUZPRODUKT
2 GALILEI
3 EULERWINKEL
4 BOGENLAENGE
5 DETERMINANTE
6 ROCHEGRENZE
7 EXZENTRIZITA
8 REACTIO
9 JACOBI
10 FAKTOR
11 KREIS
12 SYMMETRISCH
13 DREHIMPULS
14 STREUQUERSCHNITT
15 STOKES
16 TRAEGHEITSMOMENT
17 INVERS
18 BINORMALENVEKTOR
19 VIRIALSATZ
20 PARTIKULAERE
21 ORDNUNG
22 POTENTIAL
23 HYPERBEL
24 PERIHEL
25 RUECKWAERTS
26 LEVICIVITA
27 SINUS
28 INERTIALSYSTEM
29 TENSOREN
30 TRANSPONIERTE
31 CORIOLISKRAFT
32 SKALARPRODUKT
33 BASIS
34 GRADIENT
35 TAYLOR
36 ROTATION
37 SCHEINKRAFT
38 ENERGIE
39 KONSTANTE
40 NABLA
41 UMLAUFZEIT
42 DREHMOMENT