# Gewöhnliche Differentialgleichungen - Übungsblatt 2

Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Christian Düll

**Abgabe:** 5. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

---

**Aufgabe 2.1** 4 Punkte

Gegeben sei das Anfangswertproblem $(t, y) \in \mathbb{R}^2$

$$y' = y^{\frac{3}{4}}, \qquad y(1) = 1. \tag{1}$$

und die Funktion

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \psi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -3 \\ \left(\frac{t}{4} + \frac{3}{4}\right)^4, & t > -3 \end{cases}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und (1) löst.

b) Begründen Sie, warum das Anfangswertproblem (1) lokal eindeutig lösbar ist.

c) Zeigen Sie, dass (1) nicht global eindeutig lösbar ist, indem Sie eine von $\psi$ verschiedene globale Lösung von (1) bestimmen. Warum ist das kein Widerspruch zur lokalen Version des Satzes von Picard-Lindelöf?

**Aufgabe 2.2** 3 Punkte

Finden Sie die Lösung der logistischen Gleichung

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = au(b-u), & t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

mit Parametern $a, b > 0$.

*Hinweis: Beweisen und verwenden Sie die Partialbruchzerlegung* $\frac{1}{(b-u)u} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{b-u}\right)$.

**Aufgabe 2.3** 4 Punkte

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen und bestimmen Sie das maximale Existenzintervall

1. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2 \cos(t)$ für $t \geq 0$ mit Anfangswert $y(0) = 1$.

2. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2ty + t$ für $t \geq 0$ mit Anfangswert $y(0) = 1$.

**Aufgabe 2.4** 5 Punkte

Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen mittels Variation der Konstanten

a) $y' = -2y + x$, $y(0) = 0$

b) $y' + y\sin(x) = \sin(2x)$

c) $y' = y + \cos(x)$, $y(0) = y_0$.