Aufgabe 1. **(6 Punkte)**

Sei E/F eine Galoiserweiterung. Wir betrachten E als topologischen Raum mit der diskreten Topologie. Zeigen Sie, dass die (Teilraumtopologie der) KO-Topologie auf $\mathrm{Gal}(E/F) \subseteq \mathrm{Map}(E,E)$ mit der Krulltopologie übereinstimmt.

Hinweis: Verwenden Sie Blatt 2, Aufgabe 4 (c) und die Tatsache, dass eine stetige bijektive Abbildung von einem kompakten Raum in einen Hausdorffraum bereits ein Homöomorphismus ist.

E mit der diskreten Topologie ist hausdorffsch $\overset{\text{2.4c}}{\Rightarrow}$ Map(E,E) hausdorffsch

$\Rightarrow$ Gal(E/K) mit KO-Top ist hausdorffsch

$\varphi: \underbrace{\mathrm{Gal}(E/F)_{Krull}}^{\text{kompakt}} \longrightarrow \overbrace{\mathrm{Gal}(E/F)_{KO-Top}}^{\text{hausdorffsch}}$ Homöomorphismus $\Leftrightarrow$ Top. stimmt überein

φ ist offensichtlich bijektiv $\Rightarrow$ z.z. φ stetig

Dafür z.z.: Die offenen Mengen $C(K,U)$ (mit $U \subseteq E$ bel., $K \subset E$ kompakt $\Leftrightarrow$ K endl.) der KO-Topologie sind offen in der Krulltopologie.

Bem: OE $K \cap F = U \cap F = \emptyset$, da jedes $\sigma|_F = id_F$.
Entweder ist also $K \cap F \subseteq U \cap F \Rightarrow C(K,U) = C(K \cap F^c, U \cap F^c)$ oder
$K \cap F \not\subseteq U \cap F \Rightarrow C(K,U) = \emptyset$

K kompakt $\Rightarrow$ K endl.

OE $U \subseteq \bigcup_{x \in K} NST(f_x) =: \tilde{K}$, da $\sigma(K) \subset \tilde{K}$ $\forall \sigma \in \mathrm{Gal}(F/E)$, sonst $C(K,U)$ leer.

Es gilt $C(K,U) = \bigcap_{\alpha \in K} C(\alpha, U)$

schließlich gilt $C(\alpha,U) = \coprod_{\beta \in U} C(\alpha,\beta)$ und wir erhalten

$C(K,U) = \bigcap_{\alpha \in K} \coprod_{\beta \in U} C(\alpha,\beta)$

Ist $C(\alpha,\beta)$ offen $\forall \alpha,\beta$, so auch $C(K,U)$ (endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen erhalten Offenheit).

$C(\alpha,\beta) = \{\sigma \in \mathrm{Hom}_F(E,E) : \sigma(\alpha) = \beta\}$

$C(\alpha,\beta) = \sigma \circ \mathrm{Gal}(E/F(\alpha))$ für

$\sigma: F(\alpha) \to F(\beta)$

$\Rightarrow C(\alpha,\beta)$ offen

$\square$

2)

Aufgabe 2 (Standardauflösung von $\mathbb{Z}$ als G-Modul). **(4 Punkte)**
Sei G eine Gruppe. Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ betrachten wir die freie abelsche Gruppe

$$X_n := \mathbb{Z}[G^{n+1}] = \{\sum_{i=1}^{k} a_i \underline{g}_i \,|\, k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}, \underline{g}_i \in G^{n+1}\},$$

wobei $G^0 = \{1\}$ und folglich $X_{-1} = \mathbb{Z}$ ist. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $G \times G^{n+1} \to G^{n+1}, (g, (g_0, \ldots, g_n)) \mapsto (gg_0, \ldots, gg_n)$ setzt sich zu einer Operation $G \times X_n \to X_n$ fort, die X_n zu einem G-Linksmodul macht.

$$g \sum_{i=1}^{k} a_i \underline{g}_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \, g\underline{g}_i$$

$$(g+h) \quad " \quad = \quad " \quad (g+h)\underline{g}_i = \sum_{i=1}^{k} a_i g\underline{g}_i + \sum_{i=1}^{k} a_i h \underline{g}_i$$

$$gh \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \underline{g}_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \, g h \underline{g}_i = g\left(h \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \underline{g}_i\right)$$

(b) Die Abbildung

$$d_n \colon X_{n+1} \to X_n, \quad (g_0, \ldots, g_{n+1}) \mapsto \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (g_0, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}),$$

ist ein Homomorphismus von G-Linksmoduln.

$$d_n(\underline{g} + \underline{h}) = d_n(g_0 + h_0, \ldots, g_{n+1} + h_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (g_0+h_0, \ldots, \widehat{g_i + h_i}, \ldots, g_{n+1}+h_{n+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (h_0, \ldots, \widehat{h_i}, \ldots, h_{n+1})$$

$$= d_n(\underline{g}) + d_n(\underline{h})$$

$$d_n(g \cdot \underline{g}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (gg_0, \ldots, \widehat{gg_i}, \ldots, gg_{n+1}) = g \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{n+1})$$

$$= g \, d_n(\underline{g})$$

(c) Es ist $d_n \circ d_{n+1} = 0$, d.h. $(X_\bullet, d_\bullet)$ ist ein Komplex von G-Linksmoduln.

Da $(0,\dots,0,\underset{j}{1},0,\dots,0)$ ein Es ist, genügt es für alle diese Elemente zu zeigen, dass $d_n \circ d_{n+1}((0,\dots,\underset{j}{1},\dots,0)) = 0 \ \forall j$.

Es gilt

$$d_n \circ d_{n+1}((0,\dots,\underset{j}{1},\dots,0)) = d_n\Big(\sum_{i=0}^{n+2}(-1)^i(0,\dots,g_i,0,\underset{j}{1},0,\dots,0)\Big)$$

$$= d_n\Big(\sum_{i<j}(-1)^i(0,\dots,\underbrace{1}_{j-1\text{-te Stelle}},\dots,0) + \sum_{i\geq j}(-1)^i(0,\dots,0,\underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}},0\dots0)\Big)$$

$$= d_n\Big(\Big(0,\dots,0,\underbrace{\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i}_{j-1\text{-te Stelle}},\underbrace{\sum_{i=j+1}^{n+2}(-1)^i}_{j\text{-te Stelle}},0,\dots,0\Big)\Big)$$

Ist j gerade, so ist $\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i = 0$, sonst 1.

$$\sum_{i=j+1}^{n+2}(-1)^i = \begin{cases} j \text{ gerade}, n \text{ gerade}: & 0 \\ \quad '' \quad , n \text{ ungerade}: & -1 \\ j \text{ ungerade}, n \text{ gerade}: & 1 \\ \quad '' \quad , n \text{ ungerade}: & 0 \end{cases}$$

$$d_n \circ d_{n+1}((0,\dots,1,\dots,0)) = \begin{cases} j \text{ gerade}, n \text{ gerade}: & d_n(0) = 0 \\ \quad '' \quad , n \text{ ungerade}: & d_n(0,\dots,0,\underset{j-1}{-1},\underset{j}{0},\dots,0) = -(0,\dots,\overset{0}{\overset{\|}{\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i}},\overset{0}{\overset{\|}{\sum_{i=j+1}^{n+1}(-1)^i}},0,\dots,0) = 0 \\ j \text{ ungerade}, n \text{ gerade}: & d_n(0,\dots,\underset{j-1}{1},\underset{j}{1},0,\dots,0) = -(0,\dots,\underset{j-2}{\sum_{i=0}^{j-2}(-1)^i},\underset{j-1}{\sum_{i=j}^{n+1}(-1)^i},0,\dots,0) + (0,\dots,\underset{j-1}{\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i},\underset{j}{\sum_{i=j+1}^{n+1}(-1)^i},0,\dots,0) \\ \quad '' \quad , n \text{ ungerade}: & d_n(0,\dots,\underset{j-1}{1},\underset{j}{0},0,\dots,0) = -(0,\dots,\underset{\underset{0}{\|}}{\underset{j-2}{\sum_{i=0}^{j-2}(-1)^i}},\underset{\underset{0}{\|}}{\underset{j-1}{\sum_{i=j}^{n+1}(-1)^i}},0,\dots,0) = 0 \end{cases}$$

Es bleibt nur noch j ungerade, n gerade:

$$-(0,\dots,\overset{0}{\overset{\|}{\underset{j-2}{\sum_{i=0}^{j-2}(-1)^i}}},\underset{j-1}{\sum_{i=j}^{n+1}(-1)^i},0,\dots,0) + (0,\dots,\underset{j-1}{\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i},\underset{\underset{0}{\|}}{\underset{j}{\sum_{i=j+1}^{n+1}(-1)^i}},0,\dots,0) = (0,\dots,0,\underset{j-1}{\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i},0,\dots,0) = 0$$

$\square$

(d) Die Abbildungen $(h_n\colon X_i \to X_{i+1})_{n\geq -1}$ mit $h_n((g_0,\dots,g_n)) = (1,g_0,\dots,g_n)$ bilden eine Nullhomotopie. Insbesondere ist der Komplex $(X_\bullet, d_\bullet)$ exakt.

$$\begin{tikzcd}
X_{n+1} \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift right, "id"'] \arrow[d, shift left, "0"] & X_n \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, shift right, "id"'] \arrow[d, shift left, "0"] \arrow[dl, "h_n"'] & X_{n-1} \arrow[d, shift right, "id"'] \arrow[d, shift left, "0"] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \\
X_{n+1} \arrow[r, "d_n"'] & X_n \arrow[r, "d_{n-1}"'] & X_{n-1}
\end{tikzcd}$$

$$(d_n \circ h_n + h_{n-1} \circ d_{n-1})(g_0, \dots, g_n)$$

$$= d_n(1, g_0, \dots, g_n) + h_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (1, g_0, \dots, \hat{g}_{i-1}, \dots, g_n) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i ((-1)^i, g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$$

$$= (g_0, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i (1, g_0, \dots, \hat{g}_{i-1}, \dots, g_n) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i ((-1)^i, g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$$

$$= (g_1, \dots, g_n) - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (1, g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i ((-1)^i, g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$$

$$= (g_0, \dots, g_n) = id(g_0, \dots, g_n)$$

$$\Rightarrow d_n \circ h_n + h_{n-1} \circ d_{n-1} = id_n$$

$\Rightarrow$ $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}_{\geq -1}}$ ist homotopieäquivalent zum Nullkomplex, Insbesondere sind alle Homologiegruppen trivial und der Komplex ist exakt

$\square$

Aufgabe 3 (Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}^2$-Modul). **(4 Punkte)**
Wir betrachten die freie abelsche Gruppe $G = \mathbb{Z}^2$ mit Standardbasis (e_1, e_2). Zeigen Sie:

(a) Die Ringabbildung $\mathbb{Z}[t_1,t_2] \to \mathbb{Z}[G], t_i \mapsto e_i$, faktorisiert über einen Isomorphismus $S^{-1}\mathbb{Z}[t_1,t_2] \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[G]$ für eine geeignete multiplikativ abgeschlossene Menge $S \subset \mathbb{Z}[t_1,t_2]$.

$$2 \cdot t_1^3 + 3 \cdot t_2^5 \longmapsto 2 \cdot e_1^3 + 3 \cdot e_2^5 = 2 \cdot \binom{3}{0} + 3 \cdot \binom{0}{5}$$

$$\mathbb{Z}[G] = \sum_{i=1}^{k} a_i g_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad g_i \in (\mathbb{Z}^2, +)$$

$$S = \{ t_1^i t_2^j \mid i, j \in \mathbb{N}_0 \}$$

$$\mathbb{Z}[G] \longrightarrow S^{-1}\mathbb{Z}[t_1, t_2]$$

$$ae_1 + be_2 \longmapsto \left(\begin{cases} t_1^a & a \geq 0 \\ \frac{1}{t_1^{-a}} & a < 0 \end{cases} \right) \cdot \left(\begin{cases} t_2^b & b \geq 0 \\ \frac{1}{t_2^{-b}} & b < 0 \end{cases} \right)$$

ist wohldefiniert, da durch $ae_1 + be_2$ alle Elemente von G beschrieben ~~sind~~ und G ein ES von $\mathbb{Z}[G]$ darstellt.

$$S^{-1}\mathbb{Z}[G_1, G_2] \longrightarrow \mathbb{Z}[G]$$

$$\frac{\sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} t_1^i t_2^j}{t_1^c t_2^d} \longmapsto \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} (i e_1 + j e_2) - (c e_1 + d e_2)$$

Durch Einsetzen erkennt man, dass beide Abbildungen invers sind. Außerdem handelt es sich jeweils um Ringhomomorphismen, wir erhalten also den geforderten Ring-ISO

Wir verwenden im Folgenden die Identifikation $\mathbb{Z}[G] \cong S^{-1}\mathbb{Z}[t_1,t_2]$.

(b) Der Gruppenhomomorphismus

$$\partial_1 : \mathbb{Z}[G] \oplus \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[G], \quad (x,y) \mapsto x(t_1 - 1) + y(t_2 - 1)$$

hat Bild $\ker(\varepsilon)$, wobei $\varepsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ die Augmentationsabbildung ist.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}[G] \oplus \mathbb{Z}[G] & \xrightarrow{\partial_1} & \mathbb{Z}[G] & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \\
(x, y) & \longmapsto & x(t_1-1)+y(t_2-1) & \longmapsto & 0 \\
 & & \| & & \\
 & & x \cdot e_1 - x \cdot 0 + y \cdot e_1 - y \cdot 0 & \longmapsto & x - x + y - y \\
 & & & & = 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$ im $\partial_1 \subset$ ker ε

Nach VL ist außerdem $\underset{\substack{\updownarrow \\ t_1 - 1}}{e_1 - 0}$, $\underset{\substack{\updownarrow \\ t_2 - 1}}{e_2 - 0}$ ein ES von ker ε.

Insb lässt sich jedes Element von ker ε schreiben als

$$x(t_1-1)+y(t_2-1).$$

$\Rightarrow$ (x,y) ist ein Urbild unter ∂_1

(c) Der Gruppenhomomorphismus

$$\partial_2 \colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[G] \oplus \mathbb{Z}[G], \quad x \mapsto \big(-x(t_2-1), x(t_1-1)\big)$$

ist injektiv mit Bild $\ker(\partial_1)$.

Injektivität: $\quad (-x(t_2-1), x(t_1-1)) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} -x(t_2-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x(t_1-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array}$

$$\partial_1 \circ \partial_2 (x) = \partial_1(-x(t_2-1), x(t_1-1)) = -x(t_2-1)(t_1-1) + x(t_1-1)(t_2-1) = 0$$

$\Rightarrow$ im $\partial_2 \subset$ ker ∂_1.

Wir zeigen, dass (t_1-1) ein Primideal ist. Dazu betrachten wir das korrespondierende Ideal (e_1-0) in $\mathbb{Z}[G]$. Es folgt $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}]/(e_1-0) = \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$. Da $\mathbb{Z}$ nullteilerfrei ist, ist auch $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ nullteilerfrei. $\Rightarrow$ (e_1-0) PI $\Rightarrow$ (t_1-1) PI.

$(x,y) \in$ ker ∂_1 $\Rightarrow x(t_1-1)+y(t_2-1) = 0 \Rightarrow x(t_1-1) = y(t_2-1) \Rightarrow \begin{array}{l}(t_2-1) \mid x, \\ (t_1-1) \mid y\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = (t_2-1)\cdot x' \\ y = (t_1-1)\cdot y'\end{array}$

$$\Rightarrow x'(t_2-1)(t_1-1) + y'(t_1-1)(t_2-1) = 0 \Rightarrow (x'+y')(t_2-1)(t_1-1) = 0 \overset{\text{ntf.}}{\Rightarrow} x' = -y'$$

$$\Rightarrow (x,y) = ((t_2-1)x, (t_1-1)y) \in \text{im}\, \partial_2 \quad \Rightarrow \quad \text{im}\, \partial_2 = \ker \partial_1$$

$\square$

Aufgabe 4 (Abgeleiteter Limes). **(4 Punkte)**

Sei A ein kommutativer Ring und $M_\bullet \in \mathtt{Fun}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, A\text{-}\mathtt{Mod})$ ein projektives System von A-Moduln mit Übergangsmorphismen $(d_n \colon M_{n+1} \to M_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir betrachten den Homomorphismus $\Delta(M_\bullet) := \mathrm{id} - d \colon \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n \longrightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$ von R-Moduln, wobei d der eindeutige Homomorphismus ist, der durch $\mathrm{pr}_n \circ d = d_n \circ \mathrm{pr}_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ charakterisiert ist. Zeigen Sie:

(a) Die Familie $\left(R^i \colon \mathtt{Fun}(\mathbb{N}^{\mathrm{op}}, A\text{-}\mathtt{Mod}) \to A\text{-}\mathtt{Mod}\right)_{i\geq 0}$ mit

$$R^i(M_\bullet) := \begin{cases} \ker(\Delta(M_\bullet)) & (i=0) \\ \operatorname{coker}(\Delta(M_\bullet)) & (i=1) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

definert einen universellen δ-Funktor.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{n\in\mathbb{N}} M_n \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{n+1}"] & \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n \arrow[d, "\mathrm{pr}_n"] \\
M_{n+1} \arrow[r, "d_n"] & M_n
\end{tikzcd}$$

$R^0 \colon \mathrm{Fun}(\mathbb{N}^{op}, A\text{-Mod}) \to A\text{-Mod}$

$M_\bullet \longmapsto \ker(\Delta(M_\bullet))$

$= \{ x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n : d_n(x_{n+1}) = x_n \ \forall n \}$

$= \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M_n$

Sei $0 \to M'_\bullet \to M_\bullet \to M''_\bullet \to 0$ eine kurze ex. Sequenz.

Nach Schlangenlemma erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker \Delta(M'_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \ker \Delta(M_\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & \ker \Delta(M''_\bullet) \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
& \prod M'_n \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & \prod M_n \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & \prod M''_n \arrow[d, "\Delta"] & \\
& \prod M'_n \arrow[r] \arrow[d] & \prod M_n \arrow[r] \arrow[d] & \prod M''_n \arrow[d] & \\
& \operatorname{coker} \Delta(M'_\bullet) \arrow[r] & \operatorname{coker} \Delta(M_\bullet) \arrow[r] & \operatorname{coker} \Delta(M''_\bullet) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

die wir fortsetzen durch 0. Damit erhalten wir auf natürliche Art und Weise die gefordete lange exakte Sequenz.

Sei $0 \to N_\bullet' \to N_\bullet \to N_\bullet'' \to 0$ eine zweite exakte Sequenz sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M_\bullet' & \to & M_\bullet & \to & M_\bullet'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & N_\bullet' & \to & N_\bullet & \to & N_\bullet'' & \to & 0 \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{array}{ccc} R^0(M_\bullet'') & \xrightarrow{\delta} & R^1(M_\bullet') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^0(N_\bullet'') & \xrightarrow{\delta} & R^1(N_\bullet') \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} \ker \Delta(M_\bullet'') & \xrightarrow{\delta} & \operatorname{coker} \Delta(M_\bullet') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ker \Delta(N_\bullet'') & \xrightarrow{\delta} & \operatorname{coker} \Delta(N_\bullet') \end{array}$$

offensichtlich kommutativ, da Kerne auf Kerne und Kokerne auf Kokerne geschickt werden.

Die Diagramme auf allen anderen Stufen enthalten genug Nullen, dass die Kommutativität auch klar wird.

<u>B.2.2.</u> R ist universell, z.z. R^1 ist auslöschbar.

<u>Bew</u> Die Kategorie $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}^{op}, A\text{-mod})$ hat genügend Injektive (Alg II, 18.1), daher finden wir zu jedem $M_\bullet$ in $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}^{op}, A\text{-mod})$ ein injektives $M_\bullet'$ mit

$$M_\bullet \hookrightarrow M_\bullet'$$

Injektive Objekte in der Kategorie $\mathrm{Fun}(\mathbb{N}^{op}, A\text{-mod})$ haben surj. Übergangsabb. da

$$R^1(M_\bullet) \xrightarrow{R^1(\iota)} R^1(M_\bullet')$$

Da ι_n surjektiv ist, ist $\Delta = id - d$ die Nullabbildung. Insbesondere ist $R^1(M_\bullet') = \operatorname{coker}(\Delta(M_\bullet')) = 0$, d.h. R^1 ist auslöschbar.

$\square$

(b) Es ist $R^i = \lim^i$ für alle $i \geq 0$, wobei $\lim^i := \mathrm{R}^i \lim$.

Wir haben in der (a) bereits gesehen dass

$$R^0(\Gamma_*) := \ker(\Delta(\Gamma_0)) = \varprojlim \Gamma_0 .$$

Aufgrund der Universalität von R ist also $R^i = \lim^i \quad \forall i \geq 0$