7) K lokaler Kp, L/K Galois, endlich.

$$\begin{tikzcd} & L^{nr} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\ L \arrow[dr, dash] & K^{nr} \arrow[d, dash] \\ & K \end{tikzcd}$$

max. unverzw. Erw.

$$\mathrm{Frob}(L/K) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L^{nr}/K) \mid \sigma|_{K^{nr}} = \varphi_K^k\}$$

$$\varphi_K^k \in \mathrm{Gal}(K^{nr}/K) \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \cong \overline{\langle \varphi_K \rangle}$$

für $\sigma \in \mathrm{Frob}(L/K)$ definiere $\Sigma = (L^{nr})^{\overline{\langle\sigma\rangle}}$

(a) z.z. $[\Sigma : K] < \infty$

$$[\Sigma:K] = [L^{nr\,\overline{\langle\sigma\rangle}} : K] = \underbrace{[L^{nr\,\overline{\langle\sigma\rangle}} : (K^{nr})^{\overline{\langle\sigma\rangle}}]}_{\leq [L:K]} \underbrace{[(K^{nr})^{\overline{\langle\sigma\rangle}} : K]}_{= k\ (*)} < \infty$$

$$\begin{tikzcd} & L^{nr} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \Sigma \arrow[drr, dash] & L \arrow[dr, dash] & K^{nr} \arrow[d, dash] \\ & & K \end{tikzcd}$$

$(*)$: $\mathrm{Gal}((K^{nr})^{\overline{\langle\sigma\rangle}}/K) = \dfrac{\mathrm{Gal}(K^{nr}/K)}{\mathrm{Gal}(K^{nr}/(K^{nr})^{\overline{\langle\sigma\rangle}})} \cong \hat{\mathbb{Z}}/\overline{\langle\sigma\rangle} \cong \hat{\mathbb{Z}}/\overline{\langle\varphi_K^k\rangle}$

$$\cong \hat{\mathbb{Z}}/k\hat{\mathbb{Z}} \cong \frac{\varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{\varprojlim k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \varprojlim \frac{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \varprojlim \mathbb{Z}/(n,k)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

(b) z.z. $\Sigma^{nr} = L^{nr} \iff L^{nr}/\Sigma$ unverzweigt $\iff \mathrm{Gal}(L^{nr}/\Sigma) \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\kappa(\Sigma))$

da ganz $\underbrace{L^{nr}/}_{\text{n. verzw.}} \underbrace{L'/\Sigma}_{\text{unverzw.}}$ abh. von L

Bew:

siehe Blatt 2

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathbb{Z}} \cong \overline{\langle\sigma\rangle} = \mathrm{Gal}(L^{nr}/\underset{(L^{nr})^{\overline{\langle\sigma\rangle}}}{\Sigma}) \arrow[d] \\ \hat{\mathbb{Z}} \cong \overline{\langle\varphi_K^k\rangle} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\overline{\mathbb{F}}_q^{\overline{\langle\sigma\rangle}}) \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Gal}(L^{nr}/\Sigma) = \varprojlim_{\substack{L^{nr}/\Sigma'/\Sigma \\ \Sigma' \text{ endl.}}} \mathrm{Gal}(\Sigma'/\Sigma)$$

$$\mathrm{Gal}(\Sigma'/\Sigma) \leftarrow \frac{\mathrm{Gal}(L^{nr}/\Sigma)}{\mathrm{Gal}(L^{nr}/\Sigma')} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

c) Folgt aus dem Diagramm in (b)

d) $\mathrm{Frob}(L|K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L|K)$ ist surj.

Bew: Sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/k)$. Definiere $\tilde{\varphi} \in \underset{\in \mathrm{Gal}(L^{nr}/k)}{\mathrm{Frob}(L/k)}$ s.t. $\tilde{\varphi}|_{k^{nr}} = \varphi_k \in \mathrm{Gal}(k^{nr}/k)$

$L_0 = L \cap k^{nr}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & L^{nr} \arrow[dr, dash] & \\
 & L_0^{nr} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & L \arrow[dl, dash] \\
k^{nr} \arrow[ur, dash, "\cong"] \arrow[dr, dash] & & L_0 \arrow[dl, dash] & \\
 & k & &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Gal}(L_0/k) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q) \Rightarrow \sigma|_{L_0} = \varphi_k^n|_{L_0}$ for $n \in \mathbb{N}$

$= \{(x \longmapsto x^{q^n})\}$

Definiere $\tau \in \mathrm{Gal}(L^{nr}/k)$ durch $\tau = \sigma \tilde{\varphi}^{-n}$

$\tau = \sigma \tilde{\varphi}^{-n}|_{L_0}$ ist die Identität auf $L_0 \Rightarrow \tau \in \mathrm{Gal}(L/L_0)$

Es gilt $\mathrm{Gal}(L^{nr}/L_0^{nr}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Gal}(L/L_0)$ ist surjektiv.

Nehme $\tilde{\tau}$ s.t. $\tilde{\tau}|_L = \tau$.

Definiere $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau} \tilde{\varphi}^n$ $\quad \tilde{\sigma}|_{k^{nr}} = \underbrace{\tilde{\tau}|_{k^{nr}}}_{= id} \tilde{\varphi}^n|_{k^{nr}} = \varphi_k^n$

$\tau|_{L_0} = \sigma|_{L_0} \tilde{\varphi}^{-n}|_{L_0} = \varphi_k^n|_{L_0} \varphi_k^{-n}|_{L_0} = id$

$\tilde{\sigma}|_L = \tilde{\tau}|_L \tilde{\varphi}^n|_L = \sigma \tilde{\varphi}^{-n}|_L \tilde{\varphi}^n|_L = \sigma$

42) Betrachte $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Frob}(L|K)$, $\Sigma = (L^{nr})^{\langle\tilde{\sigma}\rangle}$

$\Pi_{\Sigma_1}, \Pi_{\Sigma_2}$ Uniformisierende von Σ. Es gilt $\Pi_{\Sigma_1} = \Pi_{\Sigma_2}\varepsilon$, $\varepsilon \in U_\Sigma$

z.z. $N_{\Sigma|K}\Pi_{\Sigma_1} = N_{\Sigma|K}\Pi_{\Sigma_2}$ mod $N_{L|K}L^\times$

Bew

Sei $E = \Sigma \cdot L$.

$$\boxed{N_{E|K}x = N_{L|K}N_{E|L}x}$$

$\varepsilon \in U_\Sigma \subseteq U_E \subseteq N_{E|\Sigma}E^\times$ $\quad (N_{E|\Sigma}E^\times = U_E \times \langle\Pi_\Sigma\rangle)$.

d.h. $\varepsilon = N_{E|\Sigma}\delta$, $\delta \in E^\times$

$$N_{\Sigma|K}\Pi_{\Sigma_2} = N_{\Sigma|K}\Pi_{\Sigma_1}\underbrace{N_{\Sigma|K}\varepsilon}_{N_{\Sigma|K}N_{E|\Sigma}\delta}$$

$$N_{\Sigma|K}N_{E|\Sigma}\delta = N_{E|K}\delta = N_{L|K}(N_{E|L}\delta).$$

b) Ist $\tilde{\sigma}|_L = \mathrm{id}_L$, so gilt $L \subseteq \Sigma$, d.h. $N_{\Sigma|K}\Pi_\Sigma = N_{L|K}(N_{\Sigma|L}(\Pi_\Sigma)) \in N_{L|K}L^\times$.

c)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Frob}(L|K) \arrow[r, "\tilde{\Upsilon}_{L|K}"] \arrow[d] & K^\times/N_{L|K}L^\times \\
\mathrm{Gal}(L|K) \arrow[ur, dashed, "\exists\, \Upsilon_{L|K}"'] &
\end{tikzcd}$$

Gruppenhom. (siehe Hinweis)

$\ker(\mathrm{Frob}(L|K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L|K))$

$= \{\tilde{\sigma} \in \mathrm{Frob}(L|K) \mid \tilde{\sigma}|_L = \mathrm{id}_L\} \subseteq \ker(\tilde{\Upsilon}_{L|K})$