Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis I

WS 19/20

Blatt 07 - Update-Nr.: 2 09.12.2019

ARSnova-Code: 67 52 65 62

Abgabe bis Fr. 13.12.19, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)

Informationen:

- Fröhlichen Nikolaustag wünschen wir Ihnen!
- 'Nice to know': Zu dem Thema der Umordnung von nicht (absolut) konvergenten Reihen gibt es eine Vielzahl von teils durchaus unterhaltsamen, nichtsdestotrotz aber ernstzunehmenden, Ergebnissen. Besonders populär geworden ist die folgende „Gleichung“:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}.$$

Insbesondere ein Video[1] des Kanals *Numberphile* auf Youtube hierzu ist sehr bekannt geworden. Selbst *The New York Times* hat schon darüber berichtet[2]. Neben den Links beim Youtube-Video gibt es auch einen Blogpost [3], der weitere interessante Links dazu enthält. Auch wenn das Ergebnis unseriös wirken mag, gibt es tatsächlich Anwendungsfälle für solche Summationen und diverse Arten, wie divergente Reihen summiert werden können.[4]

Themen:

- Reihen
- Konvergenz und absolute Konvergenz
- Konvergenzkriterien für Reihen
- Vollständigkeit

Hinweise zur Bearbeitung:

- Die folgenden, in der Zentralübung vom 04.12.19 besprochenen, Grenzwerte sind auf diesem Blatt nützlich und dürfen auch im weiteren Verlauf der Vorlesung genutzt werden. Wir empfehlen Ihnen zudem, sich diese zu merken, da diese häufig hilfreich sind. Hierbei bezeichnet e die Eulersche Zahl[5]:

$$(*) \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

[1] https://www.youtube.com/watch?v=w-I6XTVZXww
[2] https://www.nytimes.com/2014/02/04/science/in-the-end-it-all-adds-up-to.html
[3] http://www.bradyharanblog.com/blog/2015/1/11/this-blog-probably-wont-help
[4] siehe z. B. hier: https://en.wikipedia.org/wiki/Divergent_series
[5] https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Zahl

- Jede konvergente Reihe können wir auch als Grenzwert der Folge ihrer Partialsummen auffassen. Jede konvergente Reihe ist also auch eine konvergente Folge und in einem vollständigen Körper somit auch eine Cauchy-Folge. Die Cauchy-Folgen-Eigenschaft gibt Ihnen also eine äquivalente Bedingung für die Konvergenz einer Reihe. Überlegen Sie sich, wie die Cauchy-Folgen-Eigenschaft (siehe VL-05-2019-11-06) für Reihen aussieht und wie entsprechend die äquivalente Konvergenzbedingung für Reihen aussieht. Dieses Kriterium wird auch Cauchy-Kriterium für Reihen genannt. Dieses Kriterium kann insbesondere bei Aufgabe 7.2 (a) nützlich sein.
- Die Sätze von Aufgabe 7.2 dürfen Sie bei den anderen Aufgaben dieses Übungsblattes verwenden, auch wenn Sie Aufgabe 7.2 vielleicht nicht selbst lösen können. Die ersten beiden Sätze wurden nachträglich dem Schema zur Analyse von Reihen, wie es in der Zentralübung vom 04.12.19 besprochen wurde, hinzugefügt.

Aufgabe 7.1 (4 Punkte): Konvergenz und Grenzwerte von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{5}{3^{k+1}},$ 1

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k},$ 1

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)},$ 1

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{2k-2}5^{1-k}}{2^{k-2}}.$ 1

Bemerkung: Alle der konvergenten Reihen lassen sich auf Reihen zurückführen, zu denen Sie den Grenzwert bereits ohne größeren Aufwand berechnen können.

Aufgabe 7.2 (8 Punkte): Weiteres zu Konvergenzkriterien

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen, d. h.

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{und} \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = 0.$$ 3

Bemerkung: Die Kontraposition dieses Satzes liefert ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Reihe.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen, d. h.

$$a_{n+1} \leq a_n \quad \text{und} \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass dann die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ das gleiche Konvergenzverhalten hat wie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$, d. h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert.}$$ 2

Achtung: Die Grenzwerte müssen dabei nicht gleich sein!
Lösungen, die nicht 1:1 dem Beweis aus dem Skript von Prof. Rannacher entsprechen, geben zusätzliches Karma und zusätzlichen Lernerfolg ;)

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge mit $a_n > 0$. Beweisen Sie, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$ 2

Was folgt daraus für das Verhältnis zwischen Quotienten- und Wurzelkriterium? 1

Aufgabe 7.3 (6 Punkte): Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$, 1

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k-1}{2^k}$, 1

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{k-3}{7k}\right)^k$, 1

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2}$, 1

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt[k]{k}-1\right)$. 2

Tipp: Sie dürfen bei (e) ohne Beweis die üblichen Logarithmusgesetze, wie Sie sie aus der Schule kennen, sowie $\ln(k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *und* $e^x \geq 1+x$ *für* $x \geq 0$ *verwenden..*

Aufgabe 7.4 (2 Punkte): Alternative Definition von Vollständigkeit

Satz 3.14 (VL-13-2019-12-04) besagt, dass die Vollständigkeit der reellen Zahlen impliziert, dass jede absolut konvergente Reihe auch konvergiert. Zeigen Sie nun, dass auch die Rückrichtung korrekt ist und dass daher die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ äquivalent zu der Tatsache ist, dass jede absolut konvergente reelle Reihe auch konvergiert.

D. h. zeigen Sie, dass die Tatsache, dass jede absolut konvergente reelle Reihe auch konvergiert, impliziert, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist.

'Nice to know': Das gilt sogar in normierten Vektorräumen, die wir im nächsten Semester kennen und lieben lernen. Sprich, ein normierter Vektorraum ist genau dann vollständig, wenn jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Insbesondere folgt also in den komplexen Zahlen - welche kein angeordneter Körper sind - aus absoluter Konvergenz auch immer Konvergenz.