UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 27. Oktober 2021

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE I
ÜBUNGSAUFGABEN 2

DEADLINE: Do. 4. Nov. 2021, 15:00.

1. Zeigen Sie: Ein topologischer Raum X is Hausdorffsch genau dann, wenn die Diagonale $\{(x,x) \mid x \in X\}$ abgeschlossen in $X \times X$ ist. Jeder Unterraum eines Hausdorffraums ist Hausdorffsch. Das Produkt zweier Hausdorffräume ist Hausdorffsch.
2. Sei X ein topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist: Für jede Familie $\mathcal{C}$ von abgeschlossenen Teilmengen von X mit
$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}_{\text{fin}}} C \neq \varnothing$$
für alle *endlichen* $\mathcal{C}_{\text{fin}} \subset \mathcal{C}$, gilt
$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \varnothing.$$
3. Zeigen Sie, dass jeder Homöomorphismus $f : X \to Y$ zwischen lokal kompakten Hausdorffräumen zu einem Homöomorphismus ihrer Ein-Punkt-Kompaktifizierungen fortgesetzt werden kann.
4. Sei X ein topologischer Raum, Y ein kompakter topologischer Raum und $X \times Y$ der Produktraum. Sei $x_0 \in X$ ein Punkt. Beweisen Sie: Ist U offen in $X \times Y$ und $\{x_0\} \times Y \subset U$, dann existiert eine offene Umgebung V von x_0 in X, sodass $V \times Y \subset U$.