Übung 1 *Normen im unendlich-dimensionalen Vektorraum*
Betrachten wir den Raum $C^0([0,1],\mathbb{R})$ der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen Funktionen. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung
$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \ , \quad f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$$
ist eine Norm auf $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

b) Die Abbildung
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx \ , \quad f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$$
ist eine Norm auf $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

c) Betrachten Sie für $x_k = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N},\ k > 0$ die Funktionenfolge
$$u_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1]\setminus[x_k, x_{k+1}] \\ \sin\left(\frac{x_k - x}{x_k - x_{k+1}} \cdot \pi\right) & \text{für } x \in [x_k, x_{k+1}] \end{cases} \tag{1}$$
und berechnen Sie $\|u_k\|_1$ und $\|u_k\|_\infty$ für $k \longrightarrow \infty$.
Warum können diese beiden Normen nicht äquivalent sein?

(5 Punkte)

Übung 2 *Frobeniusnorm*
Die Frobenius-Norm einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist definiert als
$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Zeigen Sie:

(i) Die Frobenius-Norm (FN) definiert eine Norm auf $\mathbb{K}^{n\times n}$.

(ii) FN ist verträglich mit der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$.

(iii) FN Frobenius-Norm ist submultiplikativ.

(5 Punkte)

Übung 3 *Strömung in Rohrleitungsnetzwerken (Praktische Übung)*

Auf dem letzten Übungsblatt sollten Sie das lineare Gleichungssystem für ein Rohrleitungsnetzwerk aufstellen. In dieser Aufgabe widmen wir uns der Implementierung.

a) Schreiben Sie ein Programm, das das Gleichungssystem für beliebiges $N \geq 3$ aufstellt und auf den Bildschirm ausgibt.

b) Welche Normen sind in der Klasse `DenseMatrix` schon definiert? Implementieren Sie eine Methode, die auch die Frobenius-Norm berechnet. Berechnen Sie alle Normen für das lineare Gleichungssystem aus a) für $N = 10$.

c) Die Potenzmethode ist ein iteratives numerisches Verfahren zur Berechnung des betragsgrößten Eigenwertes und des dazugehörigen Eigenvektors einer Matrix.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein Startvektor $r_0 \in \mathbb{R}^n$, $Ar_0 \neq 0$ gegeben. In jedem Iterationsschritt berechnet man

$$r_{k+1} = \frac{Ar_k}{\|Ar_k\|},$$

d.h. die aktuelle Näherung r_k wird auf die Matrix A angewandt und dann normiert. Die Vektoren r_k konvergieren gegen einen Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert, sofern dieser Eigenwert dem Betrage nach einfach ist und seine algebraische Vielfachheit gleich seiner geometrischen Vielfachheit ist. Der Rayleigh-Quotient

$$\lambda_k = \frac{(r_k, Ar_k)_2}{(r_k, r_k)_2}$$

liefert im Grenzwert den entsprechenden Eigenwert, wobei $(.,.)_2$ für das euklidische Skalarprodukt steht.

Implementieren Sie dieses Verfahren, welches den größten Eigenwert und dazu entsprechenden Eigenvektor berechnet. Wenden Sie es auf das Gleichungssystem aus a) für $N = 10$.

Wichtige Hinweise:

- Für die Bearbeitung dieser Aufgabe benötigen Sie die HDNum Bibliothek.
- Sie haben für die Bearbeitung dieser Aufgabe **2 Wochen** Zeit.
- Verwenden Sie das mit dem Übungszettel zur Verfügung gestellte Programmgerüst!
- Teilaufgaben b) und c) können unabhängig von Teilaufgabe a) gelöst werden.
- Kompilieren:

  ```
  g++ -std=c++11 -I../hdnum/ -o rohrleitungsnetzwerk rohrleitungsnetzwerk.cc
  ```

  Der Pfad zur Headereinbindung nach der `-I` Option bezieht sich auf den Fall, falls die Datei `rohrleitungsnetzwerk.cc` sich in einem Verzeichnis (bspw. `Blatt 4`) parallel zu `hdnum/` befindet. Bei einem anderen Ablageort der Datei müssen Sie diesen Pfad entsprechend anpassen. Die Option `-std=c++11` lässt Ihren Kompiler im C++-11 Modus laufen. Dies ist optional und wird in dieser Vorlesung nicht zwingend benötigt.
- Mit dem Werkzeug `doxygen` (als Paket in allen gängigen Linux-Distributionen verfügbar) können Sie eine hilfreiche Dokumentation für HDNum generieren lassen. Informationen zum Vorgehen finden Sie in der `README.md` in HDNum.
- Bitte den C++ *Style Guide* beachten!

(10 Punkte)