AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

05. November 2021

Modulformen 1 – Übungsblatt 3

Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $f \in M_k, g \in M_l$ Modulformen vom Gewicht k und l für die Aktion von $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$.

(a) Weisen Sie nach, dass für alle Matrizen aus Γ und alle $z \in \mathbb{H}$ gilt:

$$f'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^{k+2} f'(z) + kc(cz+d)^{k+1} f(z) \ .$$

(b) Wir definieren die **n-te Rankin-Cohen-Klammer** $[f,g]_n$ via

$$[f,g]_n := \sum_{r+s=n} (-1)^r \binom{n+k-1}{s}\binom{n+l-1}{s} f^{(r)} g^{(s)} \ .$$

. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:
(i): $[f,g]_1$ ist eine Spitzenform vom Gewicht $k+l+2$.
(ii): Die 1-Klammer erfüllt die **Jacobi-Identität**:

$$[[f,g]_1,h]_1 + [[g,h]_1,f]_1 + [[h,f]_1,g]_1 = 0 \ .$$

Hinweis zu (b):
Ihnen sollte intuitiv bewusst werden, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ über die Rankin-Cohen-Klammer stets eine Modulform gegeben ist. Sie finden die obigen Resultate sowie weitere spannende Aussagen in Modular Forms and Differential Operators (Don ZAGIER, 1994).

Aufgabe 2 (8 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir die Funktion

$$\vartheta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, z \mapsto \vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i n^2 z) \ ,$$

die so genannte **Theta-Funktion**.

(a) Begründen Sie, dass ϑ holomorph und über $D_{1,\infty} = \{z \in \mathbb{H} : \mathrm{Im}(z) > 1\}$ beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie die Transformationseigenschaften

$$\vartheta(z+2) = \vartheta(z) \text{ und } \vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \vartheta(z) \ ,$$

wobei die Quadratwurzel aus $\frac{z}{i}$ über den Hauptzweig des Logarithmus definiert ist.

(c) Folgern Sie schließlich $\vartheta^8 \in M_4\left(\langle T^2, S\rangle\right)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $f \in S_k$ eine Spitzenform vom Gewicht k. Zeigen Sie die Abschätzung

$$|a_n| \leq C n^{k/2}$$

(Erich HECKE, 1927) und verfolgen Sie hierfür folgende Schritte:

1. Betrachten Sie $\varphi(z) := \mathrm{Im}(z)^{k/2} \cdot f(z)$ und zeigen Sie, dass diese invariant unter $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist.
2. Nehmen Sie stillschweigend an, dass φ beschränkt ist. Wie lässt sich dann f abschätzen?
3. Integrieren Sie schließlich über $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, x \mapsto x + iy$ für ein fest gewähltes $y \in \mathbb{R}^+$ und schätzen Sie die Fourierkoeffizienten $|a_n|$ von f ab. Die Behauptung folgt mit $y = \frac{1}{n}$.

Hinweis:
Im Jahre 1974 hat der belgische Mathematiker Pierre DELIGNE eine noch schärfere Abschätzung, die **Ramanujan-Petersson-Vermutung**

$$|a_n| \leq C(\varepsilon) n^{k-1/2-\varepsilon}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und einer geeigneten Konstante $C > 0$, bewiesen.

Abgabe: online über MaMpf bis Freitag, den 12. November 2021, spätestens um 12 Uhr s. t.