Aufgabe 1

(a) Da es sich um eine natürliche Matrixnorm handelt, ist $\|\cdot\|$ insbesondere submultiplikativ und es gilt

$$\|P\| = \left\|P^2\right\| \leq \|P\| \, \|P\| \implies 1 \leq \|P\| \, .$$

(b) " $\implies$ " :

$$(Ax, y)_2 = (Ax)^T \overline{y} = x^T A^t \overline{y} = x^T \overline{Ay} = (x, Ay).$$

"$\Longleftarrow$" : Insbesondere gilt für alle $1 \leq i, j, \leq n$:

$$a_{ji} = e_i^T A^T e_j = e_i^T A^T \overline{e_j} = (Ae_i, e_j) = (e_i, Ae_j) = e_i^T \overline{Ae_j} = e_i^T \overline{A} e_j = \overline{a_{ij}}.$$

Es gilt also $A^T = \overline{A}$.

(c) Da d eine Diagonalmatrix ist, schreiben wir $D =: \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Es gilt daher $D = C \cdot C$ mit $C \coloneqq \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Für $B \coloneqq QCQ^T$ gilt

$$B \cdot B = QCQ^T QCQ^T \overset{Q \text{ orthogonal}}{=} QC^T CQ^t = QDQ^T = A.$$

Aufgabe 2

(a) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt aus positiver Definitheit sofort, dass A hermitesch ist. Also lässt sich für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ der Spektralsatz anwenden und es existiert eine Orthonormalbasis $(x_1, \ldots, x_n)$ aus Eigenvektoren von A. Bezüglich dieser Basis ist

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Nun können wir den Raleigh-Quotienten berechnen. Es gilt

$$R_A(x) = \frac{(Ax, x)_2}{(x, x)_2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n Ax_i\alpha_i\right)^T \overline{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)}}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i\right)^T \overline{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)}} \overset{x_i x_j = \delta_{ij}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^T \alpha_i \overline{x_i \alpha_i}}{\sum_{i=1}^n x_i^T \alpha_i \overline{x_i \alpha_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2}$$

Das Supremum bzw. erreichen wir also durch geschickte Wahl der α_i. Maximal wird die Summe wenn wir alle $\alpha_i = 0$ außer dem Koeffizienten des maximalen Eigenwerts $\lambda_{\max}$. Dann erhalten wir

$$\sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} R_A(x) = \lambda_{\max}$$

und analog

$$\inf_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} R_A(x) = \lambda_{\min}.$$

(b) Völlig analog zu Bemerkung 6.2 im Skript. Dort wird die Matrix A als positiv definit und symmetrisch vorausgesetzt, der Beweis ist aber für eine positiv definite und daher hermitesche Matrix über $\mathbb{C}$ verbatim derselbe.

Aufgabe 3

Wir benutzen Ansatz 1:
Definiere: $G := \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} | \; A \text{ ist untere Dreiecksmatrix und alle Einträge auf der Hauptdiagonalen sind 1en}\}$

(a) Behauptung: G ist eine Gruppe.

Beweis. (G1) Seien $A, B \in G$, wobei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ und $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$. Weiter gilt für A, B, dass $a_{ij} = b_{ij} = 0, \forall i < j$ und $a_{ij} = b_{ij} = 1, \forall i = j$. Damit folgt für das Produkt $C = AB$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \begin{cases} 0 & i < j \\ 1 & i = j \\ \sum\limits_{k=j}^{i} a_{ik} b_{kj} & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit ist C wieder in G.

(G2) Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix E_n, da für alle $A \in G$ gilt: $E_n A = A E_n = A$ und $E_n \in G$

(G3) Sei $A \in G$. Es ist $\det(A) = 1$, weshalb A regulär ist. Es existiert also ein $A^{-1} \in \mathbb{K}^n$
Behauptung: $A^{-1} \in G$: Betrachte den Algorithmus zum invertieren einer Matrix A: Bringe Matrix A durch Zeilen-/Spaltenumformungen auf die Einheitsmatrix E_n, wobei jede Umformung auch mit der Einheitsmatrix E_n durchgeführt wird. Erhalte somit nach endlich vielen Schritten aus E_n die Matrix A^{-1}. Nun ist A eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonalen. Um A auf die Einheitsmatrix zu bringen, werden immer nur Vielfache einer Zeile auf die Zeilen unterhalb dieser addiert, weshalb alle Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen unberührt bleiben:

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ a_{21} & 1 & & & & 0 & 1 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 1 & & & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\ a_{n1} & & & & 1 & 0 & & & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -a_{21} \quad -a_{31} \quad \cdots \quad -a_{n1} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & -a_{21} & 1 & & & \\ 0 & a_{32} & 1 & & & -a_{31} & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 & -a_{n1} & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & & -a_{21} & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & * & -a_{32} & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 & * & & & & 1 \end{array}\right) = A^{-1}$$

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir also eine untere Dreiecksmatrix A^{-1}.

□

(b) Behauptung: G ist nicht abelsch

Beweis. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

(c) Wir nehmen an, es gäbe zwei Zerlegungen $L \cdot U = L' \cdot U'$. Da L und L' linke untere Dreiecksmatrizen sind, können wir die Gleichung von links mit L'^{-1} multiplizieren. Daraus erhalten wir $\underbrace{L'^{-1}L}_{L''} \cdot U = U'$, wobei L'' aufgrund der Gruppeneigenschaft wieder eine linke untere Dreiecksmatrix mit 1 auf der Hauptdiagonalen ist. Wir wollen nun zeigen, dass alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonalen stehen, 0 sein müssen. Da die Zerlegung ohne Pivotisierung möglich war, gibt es eine Zerlegung, bei der alle Hauptdiagonalelemente von U nicht 0 sind. Also ist $A = LU$ invertierbar, also muss in jeder Zerlegung U invertierbar sein und damit sind insbesondere alle Diagonalelemente von U nicht 0.

$$L'' \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l''_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l''_{n1} & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & & & u_{1n} \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_{11} & & & u'_{1n} \\ & u'_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & u'_{nn} \end{pmatrix} = U'$$

Nun betrachen wir die erste Spalte dieses Gleichungssystems.

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot u_{11} = u'_{11} \\ l''_{21} \cdot u_{11} + 0 = 0 \\ \vdots \\ l''_{n1} \cdot u_{11} + 0 = 0 \end{pmatrix} \implies \forall 1 < i \leq n\colon\ l''_{i1} = 0$$

Mit diesem Ergebnis können wir nun die zweite Spalte betrachten und erhalten

$$\begin{pmatrix} u_{12} \cdot 1 + u_{22} \cdot 0 = u_{21'} \\ u_{12} \cdot 0 + u_{22} \cdot 1 = u_{22'} \\ u_{12} \cdot 0 + u_{22} \cdot l''_{32} = 0 \\ \vdots \\ u_{12} \cdot 0 + u_{22} \cdot l''_{n2} = 0 \end{pmatrix} \implies \forall 2 < i \leq n\colon\ l''_{i2} = 0$$

Auf diese Weise lässt sich das Schema weiter für alle Spalten weiter fortsetzen, sodass wir erhalten:

$$\forall 1 \leq j \leq n\colon\ \forall j < i \leq n\colon\ l''_{ij} = 0$$

Also ist $L'^{-1} \cdot L = L'' = E_n \Leftrightarrow L = L'$ und auch $L'' \cdot U = U = U'$. Also ist die LU-Zerlegung eindeutig.