Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 7

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 15. Januar

Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Darauf operiert $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und insbesondere die Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ durch Möbius-Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \langle \tau \rangle = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \ .$$

Sei $[\Lambda, k]$ der Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k zur Kongruenzgruppe $\Lambda \subseteq \Gamma$. Die Variable τ ist immer auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ definiert. Die besten vier Aufgaben werden gewertet. Sollpunktzahl 16 Punkte, weitere Punkte zählen als Bonus.

29. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie ein explizites Vertretersystem für die Quotientengruppe $\overline{\Gamma}/\overline{\Gamma}[3]$.

(b) Skizzieren Sie einen Fundamentalbereich zu $\Gamma[3]$.

(c) Bestimmen Sie die Spitzen zu $\Gamma[3]$ und ihre Breite.

30. Aufgabe: (2+2+2+2=8 Punkte) Für ein ganzes $N \geq 2$ sei $\omega_{(a,b)} = \frac{a}{N}\tau + \frac{b}{N} \in \frac{1}{N}W$ ein N-Teilungspunkt des Gitters $W = \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$, der nicht selbst im Gitter liegt. Hier sind $0 \leq a, b < N$ ganze Zahlen. Wir dürfen annehmen dass $\mathrm{ggT}(a,b,N) = 1$, das bedeutet $(a,b) \in \mathcal{S}_N$. Für ein ganzes $k \geq 3$ definiere die Eisensteinreihe

$$G_{(a,b)}(\tau) = \sum_{\gamma \in W} (\omega_{(a,b)} + \gamma)^{-k} \ .$$

(a) Zeigen Sie für ungerades k und $N = 2$, dass $G_{(a,b)}(\tau)$ konstant Null ist.

Im Folgenden nehmen wir an k ist gerade oder $N > 3$. Zeigen Sie:

(b) $G_{(a,b)} \in [\Gamma[N], k]$ ist eine Modulform vom Gewicht k zur Kongruenzgruppe $\Gamma[N]$.

(c) Der Grenzwert $\lim_{\tau \to i\infty} G_{(a,b)}(\tau)$ ist gleich Null genau dann wenn $a \neq 0$.

(d) Zeigen Sie, dass $G_{(a,b)}$ in genau einer Spitze nicht verschwindet.

31. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei Λ eine Kongruenzgruppe. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}(\Lambda) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} [\Lambda, k]$ bildet mit der punktweisen Multiplikation einen Ring. Die Spitzenformen $\mathcal{A}_0(\Lambda) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} [\Lambda, k]_0$ bilden ein Ideal in diesem Ring.

(b) Sei $\Lambda = \Gamma[N]$ und $(M_i)_i$ ein Vertretersystem der Quotientengruppe $\Gamma/\Gamma[N]$. Die Norm definiert einen multiplikativen Homomorphismus

$$\mathcal{N} : \mathcal{A}(\Gamma[N]) \to \mathcal{A}(\Gamma) \quad , \quad f \mapsto \mathcal{N}(f) = \prod_i (f \mid_k M_i) \ .$$

32. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Seien $f, g \in [\Lambda, k]$ Modulformen vom Gewicht k zu einer Kongruenzgruppe $\Lambda \subseteq \Gamma$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)\overline{g(z)}y^k$ ist invariant unter Möbius-Transformationen im Sinne von $i(z) = i(M\langle z\rangle)$ für $z \in \mathbb{H}$ und $M \in \Lambda$.

(b) Sei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich zu Λ. Wenn f oder g eine Spitzenform ist, dann konvergiert das Integral

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2} \ .$$

(c) Dies definiert ein sesquilineares Skalarprodukt auf dem Raum $[\Lambda, k]_0$ der Spitzenformen, welches unabhängig von der Wahl des Fundamentalbereichs $\mathcal{F}$ ist.

Hier gilt wie üblich $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

33. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Für ganzes $N \geq 3$ sei $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}$ ein Charakter mit $\chi(-1) = 1$. Sei $\wp$ die Weierstraß-Funktion zum Gitter $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$. Für $(a, b) \in \mathcal{S}_N$ sei $e_{a,b}(\tau) = \wp(\omega_{(a,b)})$ mit dem N-Teilungspunkt $\omega_{(a,b)} = \frac{a}{N}\tau + \frac{b}{N}$ und definiere damit

$$f^{\chi}_{(a,b)}(\tau) = \frac{1}{2N^2} \sum_{\mu \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(\mu) e_{(\mu a, \mu b)} \ .$$

(a) Zeigen Sie für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ und $\nu \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$:

$$f^{\chi}_{(\nu a, \nu b)} f(M\langle\tau\rangle) = \chi(\nu)^{-1}(\gamma\tau + \delta)^2 f^{\chi}_{(a,b)M}(\tau) \ .$$

(b) Sei F^χ der Vektorraum aufgespannt von allen $f^{\chi}_{(a,b)}$. Zeigen Sie: $F^\chi \cap F^{\chi'} = \{0\}$ für $\chi \neq \chi'$.

(c) Für den trivialen Charakter $\chi = 1$ gilt $\dim(F^1) \geq N \prod_{p|N}(1 + p^{-1}) - 1$.

Hinweis: Siehe Skript Abschnitt 9.12.

34. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Dirichlet-Charakter, durch Null fortgesetzt zu einer Abbildung $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Die zugehörige Dirichlet-Reihe ist

$$L(s, \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Die Dirichletreihe konvergiert kompakt absolut im Gebiet $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

(b) Es gilt die Produktentwicklung $L(s, \chi) = \prod_{\mathrm{ggT}(p,N)=1} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$. Dabei läuft das Produkt über alle Primzahlen die teilerfremd sind zu N.

Hinweis zu a): Integralkriterium.

Frohe Weihnachten!