Aufgabe 1

(a) Gilt $\mathrm{ggT}(d, \frac{n}{d}) = 1$, so erhalten wir nach dem chinesichen Restsatz $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\frac{n}{d}\mathbb{Z}$. Damit ist $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ direkter Summand in einem freien Modul ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul offensichtlich frei). Sei nun $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ projektiv. Die Folge

$$0 \to \mathbb{Z}/\frac{n}{d}\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to 0$$

ist exakt, da Multiplikation mit d injektiv ist, die kanonische Projektion $\pi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ trivialerweise surjektiv ist und $\mathrm{im}(\cdot d) = \ker \pi$ gilt. Ist nun $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ projektiv, so zerfällt diese Folge und es gilt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\frac{n}{d}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Nach dem chinesichen Restsatz ist das äquivalent zu $\mathrm{ggT}(d, \frac{n}{d}) = 1$. Ist n keine Primpotenz, so gilt $n = p^k \cdot d$ mit $\mathrm{ggT}(p^k, d) = 1$ für geeignete p, k, d. $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ist als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul nicht frei. Ein beliebiges einelementiges System (x) in $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ist linear abhängig wegen $d \cdot x = 0$. Somit existiert kein nichtleeres linear unabhängiges System und insbesondere keine Basis. Da (1) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist, handelt es sich bei $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ wegen $\mathrm{ggT}(d, p^k) = 1$ um einen endlich erzeugten und projektiven, aber nicht freien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul.

Sei $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$. Sei M ein endlich erzeugter, projektiver $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul. Via der kanonischen Projektion $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ können wir M als $\mathbb{Z}$-Modul auffassen. M besitzt endlich viele Elemente, ist also als $\mathbb{Z}$-Modul endlich erzeugt und nach dem Hauptsatz über endlich erzeugt $\mathbb{Z}$-Moduln gilt

$$M \cong \mathbb{Z}^m \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$$

für Primpotenzen d_i. Da M nur endlich viele Elemente enthält, ist $m = 0$. Aus der Anzahl der Elemente können wir $d_1 \cdots d_k = n$ folgern, woraus $d_i = p_{\phi(i)}^{g_i}$ folgt für geeignet gewählte ϕ, g_i. Nach VL ist $\bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/(p_{\phi(i)}^{g_i})\mathbb{Z}$ genau dann projektiv, wenn $\mathbb{Z}/p_{\phi(i)}^{g_i}\mathbb{Z}$ projektiv ist $\forall i$. Daraus folgt mit dem ersten Teil $\mathrm{ggT}(p_{\phi(i)}^{g_i}, \frac{n}{p_{\phi(i)}^{g_i}}) = 1$. Wegen $\frac{n}{p_{\phi(i)}^{g_i}} = p_1^{e_1} \cdots p_{\phi(i)}^{e_{\phi(i)} - g_i} \cdots p_r^{e_r}$ muss $g_i = e_{\phi(i)}$ gelten, da sonst $p_{\phi(i)} \mid \mathrm{ggT}(p_{\phi(i)}^{g_i}, \frac{n}{p_{\phi(i)}^{g_i}})$. Es gilt also

$$M = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/p_{\phi(i)}^{e_{\phi(i)}}\mathbb{Z}.$$

Identische Werte für $\phi(i)$ können wir zusammenfassen und erhalten

$$M = \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/p_i^{e_i})^{f_i}.$$

(b) Z.Z.: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Beweis. Wir betrachten die Abbildungen

$$\Phi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ a \mapsto \phi_a := (\overline{x} \mapsto \frac{ax}{n})$$

und

$$\Psi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \phi \mapsto n \cdot \phi(1)$$

Ψ ist offensichtlich wohldefiniert. Wir müssen zeigen, dass $\phi_a \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ liegt. $\phi_a(\overline{x})$ ist unabhängig von der Wahl des Vertreters $x \in \mathbb{Z}$. Sei nämlich $\overline{x} = \overline{y}$, also $x - y \in n\mathbb{Z}$, so gilt

$$\phi_a(x) - \phi_a(y) = \frac{ax}{n} - \frac{ay}{n} = \frac{a(x-y)}{n}.$$

Da $x - y$ in $n\mathbb{Z}$ liegen, ist dies eine ganze Zahl und somit gleich 0 in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Weiter gilt

$$r\phi_a(\overline{x}) = r \cdot \frac{ax}{n} = \frac{a(rx)}{n} = \phi_a(\overline{rx}) = \phi_a(r\overline{x})$$

und

$$\phi_a(\overline{x}) + \phi_a(\overline{y}) = \frac{ax}{n} + \frac{ay}{n} = \frac{a(x+y)}{n} = \phi_a(\overline{x+y}) = \phi_a(\overline{x} + \overline{y}).$$

Es gilt $\forall x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$[(\Phi \circ \Psi)(\phi)](x) = \Phi(n \cdot \phi(1))(x) = \phi_{n\cdot\phi(1)}(x) = \frac{n \cdot \phi(1)x}{n} = \phi(1) \cdot x = \phi(x)$$

und

$$(\Psi \circ \Phi)(x) = \Psi(\phi_x) = n \cdot \phi_x(1) = n \cdot \frac{x \cdot 1}{n} = x$$

$\square$

Aufgabe 4

(a)