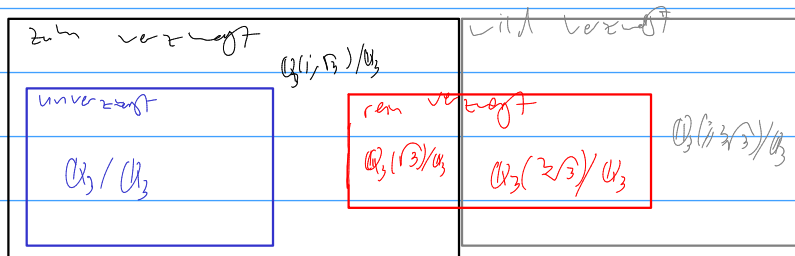


Aufgabe 1 (Verzweigung).**(4 Punkte)**

Wir betrachten die Eigenschaften „unverzweigt“, „rein verzweigt“, „zahm verzweigt“ und „wild verzweigt“ von Erweiterungen lokaler Körper.

- (a) Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm dieser Eigenschaften und in jeden möglichen Schnitt (von mindestens einer) dieser Eigenschaften ein Beispiel einer solchen Erweiterung und begründen Sie dies.



1 ist teilerfremd zu jeder natürlichen Zahl.

Jede unverzweigte Erweiterung hat per Definition Verzweigungsindex 1.

Daher ist für unverzweigte Erweiterungen der Verzweigungsindex stets teilerfremd zur Charakteristik des Restklassenkörpers \Rightarrow Alle unverzweigten Erweiterungen sind zahm verzweigt.

$\mathbb{Q}_3/\mathbb{Q}_3$ ist offensichtlich unverzweigt.

3 hat Bewertung 1 in \mathbb{Q}_3 und ist daher Uniformisierende.

Mit AZT I folgt, dass $\mathbb{Q}_3(i, \sqrt{3})/\mathbb{Q}_3$ rein verzweigt ist vom Verzweigungsgrad 2.

Die Restklassenkörpercharakteristik ist 3. Wegen $(2, 3) = 1$ ist diese Erweiterung zahm verzweigt.

Die Erweiterung $\mathbb{Q}_3(i, \sqrt{3})/\mathbb{Q}_3$ ist rein verzweigt vom Verzweigungsgrad 3.

Die Restklassenkörpercharakteristik ist 3. Wegen $(3, 3) = 3$ ist diese Erweiterung wild verzweigt.

In \mathbb{Q}_3 hat die Gleichung $X^2 + 1$ keine Nullstellen, da sie sonst im Restklassenkörper \mathbb{F}_3 eine Nullstelle haben müsste. Das ist aber nicht der Fall, da $1^2 = 2^2 = 1 \pmod{3}$.

Daher erhalten wir durch Adjunktion von i eine echte unverzweigte Erweiterung.

Da diese Erweiterung unverzweigt ist, bleibt 3 eine Uniformisierende in $\mathbb{Q}_3(i)$.

Daher ist die Erweiterung $\mathbb{Q}_3(i, \sqrt{3})/\mathbb{Q}_3$ weder unverzweigt noch rein verzweigt, aber immer noch zahm verzweigt, da der Verzweigungsgrad weiterhin 2 ist.

Analog ist die Erweiterung $\mathbb{Q}_3(i, 2\sqrt{3})/\mathbb{Q}_3$ nicht rein verzweigt, aber wild verzweigt, da der Verzweigungsgrad und die Restklassenkörpercharakteristik beide 3 und somit nicht teilerfremd sind.

(b) Wir betrachten die folgenden Eigenschaften von Klassen \mathcal{E} algebraischer Körpererweiterungen (in einem algebraischen Abschluss):

(VK) Verkettung: $L|K \in \mathcal{E}$ & $M|L \in \mathcal{E} \Rightarrow L|M \in \mathcal{E}$

(BW) *Basiswechsel*: $L|K \in \mathcal{E}$ & $K'|K$ beliebig $\Rightarrow L \cdot K'|K' \in \mathcal{E}$

(Komp) *Kompositum*: $L_1|K \in \mathcal{E}$ & $L_2|K \in \mathcal{E} \Rightarrow L_1 \cdot L_2|K \in \mathcal{E}$

Zeichnen Sie eine Tabelle, in der veranschaulicht wird, welche der obigen Klassen von Erweiterungen lokaler Körper welche der Eigenschaften (VK), (BW) und (Komp) erfüllen und begründen Sie dies.

[illegible]