2. Übungsblatt - Lösungsskizzen

Aufgabe 5 (Dynkin-Systeme, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und Ω eine endliche Menge mit $|\Omega| = 2n$. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{D} := \{A \subseteq \Omega : |A| \text{ gerade } \}$$

ein Dynkin-System ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ jedoch für $n \geq 2$ **keine** σ-Algebra ist.

Lösung 5. (a) Zu zeigen sind die drei Eigenschaften eines Dynkin-Systems über Ω:

(i) Es ist $|\Omega| = 2n$ gerade. Daher ist $\Omega \in \mathcal{D}$.

(ii) Seien $D, E \in \mathcal{D}$ mit $D \subseteq E$. Dann gibt es $k, m \in \mathbb{N}$, $m \geq k$ mit $|D| = 2k$, $|E| = 2m$, und es ist $|E \setminus D| = 2m - 2k = 2(m - k)$ gerade. Daher gilt $E \setminus D \in \mathcal{D}$.

(iii) Seien $(D_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ disjunkt. Dann gibt es $(a_i)_{i\in N} \subseteq \mathbb{N}$ mit $|D_i| = 2 \cdot a_i$ und

$$\left|\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i\right| \overset{D_i \text{ disjunkt}}{=} \sum_{i\in\ \mathbb{N}} |D_i| = 2 \cdot \sum_{i\in\ \mathbb{N}} a_i$$

ist gerade. Daher gilt $\dot{\bigcup}_{i\in\ \mathbb{N}} D_i \in \mathcal{D}$.
Anmerkung: Es gilt stets $\left|\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i\right| \leq 2n$ *endlich, da* $|\Omega| = 2n$ *und somit höchstens* $2n$ *nichttriviale disjunkte Mengen aus* $\mathcal{D}$ *ausgewählt werden können.*

(b) Für $n \geq 2$ ist $\mathcal{D}$ keine σ-Algebra. Wegen $n \geq 2$ gilt $|\Omega| = 2n \geq 4$, d.h. wir können drei verschiedene Elemente $a, b, c \in \Omega$ wählen. dann gilt

$$\begin{aligned} |\{a, b\}| = 2 &\Longrightarrow \{a, b\} \in \mathcal{D}, \\ |\{b, c\}| = 2 &\Longrightarrow \{b, c\} \in \mathcal{D}, \\ |\{a, b\} \cup \{b, c\}| = |\{a, b, c\}| = 3 &\Longrightarrow \{a, b, c\} \notin \mathcal{D}. \end{aligned}$$

D.h. die Eigenschaft (iii) einer σ-Algebra ist nicht erfüllt.

Aufgabe 6 (Eindeutigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) Beweisen Sie Satz 03.18 **(Maßeindeutigkeitssatz)** aus dem Skript mit Hilfe der Beweisstrategie 03.17:
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$ und $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{A}$. Es gelte

$$\mathbb{P}_1(E) = \mathbb{P}_2(E) \qquad \forall E \in \mathcal{E}.$$

Zeigen Sie, dass dann schon $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ folgt.

(b) Sei nun $\Omega = \{a,b,c,d\}$ und $\mathcal{E} = \{A, C\}$ mit $A = \{a,b\}$ und $C = \{b,c\}$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E}) = 2^\Omega$ und dass zwei nicht-identische Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_i$ auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ existieren mit

$$\mathbb{P}_1(E) = \mathbb{P}_2(E) \quad \text{für alle } E \in \mathcal{E}.$$

Warum ist der Maßeindeutigkeitssatz aus (a) hier nicht anwendbar?

Lösung 6.

(a) Wir verwenden Beweisstrategie 03.17 (Prinzip der guten Mengen):

- **Schritt 1:** Wir definieren

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$$

und zeigen, dass es sich dabei um ein Dynkin-System handelt:

(i) Es gilt $\Omega \in \mathcal{D}$, da $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ nach Voraussetzung W'maße sind und damit gilt $\mathbb{P}_1(\Omega) = 1 = \mathbb{P}_2(\Omega)$.

(ii) Seien $D, E \in \mathcal{D}$ mit $D \subseteq E$. Dann gilt $\mathbb{P}_1(E \setminus D) = \mathbb{P}_1(E) - \mathbb{P}_1(D) \overset{E,D\in\mathcal{D}}{=} \mathbb{P}_2(E) - \mathbb{P}_2(D) = \mathbb{P}_2(E \setminus D)$, also auch $E \setminus D \in \mathcal{D}$.

(iii) Seien $(D_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ disjunkt. Dann gilt $\mathbb{P}_1(D_i) = \mathbb{P}_2(D_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und

$$\mathbb{P}_1\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i\right) \overset{\text{disjunkt}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_1(D_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_2(D_i) = \mathbb{P}_2\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i\right).$$

- **Schritt 2:** $\mathcal{E}$ ist nach Annahme ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$.
- **Schritt 3:** Nach Annahme gilt bereits $\mathbb{P}_1(E) = \mathbb{P}_2(E)$ für alle $E \in \mathcal{E}$, d.h. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$.

(b)
- Zeige $\sigma(\mathcal{E}) = \Omega^2$: Wir wissen, dass $\{\{a,b\},\{b,c\}\} = \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ ist, und dass $\sigma(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.
Die Schnitte, Vereinigungen und Komplemente von Elementen aus $\sigma(\mathcal{E})$ müssen also wieder in $\sigma(\mathcal{E})$ liegen! Um herauszufinden, welche Elemente dadurch alle in $\sigma(\mathcal{E})$ enthalten sind, sollte man zunächst versuchen, so kleine Mengen wie möglich zu bilden.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\{a,b\},\{b,c\} \in \sigma(\mathcal{E}) \quad &\Rightarrow \quad \underline{\underline{\{b\}}} = \{a,b\} \cap \{b,c\} \in \sigma(\mathcal{E}) \\
\{a,b\},\{b,c\} \in \sigma(\mathcal{E}) \quad &\Rightarrow \quad \underline{\underline{\{a\}}} = \{a,b\}\backslash\{b,c\} = \{a,b\} \cap \{b,c\}^c \in \sigma(\mathcal{E}) \\
\{a,b\},\{b,c\} \in \sigma(\mathcal{E}) \quad &\Rightarrow \quad \underline{\underline{\{c\}}} = \{b,c\}\backslash\{a,b\} \in \sigma(\mathcal{E}) \\
\{a,b\},\{b,c\} \in \sigma(\mathcal{E}) \quad &\Rightarrow \quad \underline{\underline{\{d\}}} = \Omega\backslash(\{a,b\} \cup \{b,c\}) \in \sigma(\mathcal{E}).
\end{aligned}$$

Da Ω endlich ist, liegt durch das Vereinigen der einelementigen Mengen $\{a\},\{b\},\{c\},\{d\} \in \sigma(\mathcal{E})$ jedes Element von 2^Ω in $\sigma(\mathcal{E})$. Daher gilt $\sigma(\mathcal{E}) = 2^\Omega$.

- ▶ Definition von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ auf $(\Omega, 2^\Omega)$: Die Maße $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ sind durch Angabe ihrer Werte auf $\Omega = \{a, b, c, d\}$ eindeutig bestimmt. Wir wählen:

$$\mathbb{P}_1(\{a\}) = \mathbb{P}_1(\{b\}) = \mathbb{P}_1(\{c\}) = \mathbb{P}_1(\{d\}) = \frac{1}{4},$$

sowie

$$\mathbb{P}_2(\{a\}) = \mathbb{P}_2(\{c\}) = 0, \qquad \mathbb{P}_2(\{b\}) = \mathbb{P}_2(\{d\}) = \frac{1}{2}.$$

Dann gilt tatsächlich $\mathbb{P}_1(\Omega) = \mathbb{P}_2(\Omega) = 1$, d.h. $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ sind Wahrscheinlichkeitsmaße. Weiter ist

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{P}_1(\{a,b\}) & = & \mathbb{P}_1(\{a\}) + \mathbb{P}_1(\{b\}) & = & \frac{1}{2} & = & \mathbb{P}_2(\{a\}) + \mathbb{P}_2(\{b\}) & = & \mathbb{P}_2(\{a,b\}), \\ \mathbb{P}_1(\{b,c\}) & = & \mathbb{P}_1(\{b\}) + \mathbb{P}_1(\{c\}) & = & \frac{1}{2} & = & \mathbb{P}_2(\{b\}) + \mathbb{P}_2(\{c\}) & = & \mathbb{P}_2(\{b,c\}), \end{array}$$

also $\forall E \in \mathcal{E} : \mathbb{P}_1(E) = \mathbb{P}_2(E)$, aber offensichtlich sind $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ nicht identisch auf $(\Omega, 2^\Omega)$. Dies ist nicht verwunderlich, da $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\} \notin \mathcal{E}$ und dadurch $\mathcal{E}$ insbesondere nicht schnittstabil ist. Für $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \cup \{\{b\}\}$ könnte man kein Gegenbeispiel konstruieren.

Aufgabe 7 (Negative Binomialverteilung, 4 = 3 + 1 Punkte).

(a) Sei $\Omega = \mathbb{N}_0$, $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{N}_0}$ und $\mathbb{p} : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ für $p \in (0, 1)$, $r \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Omega$ gegeben durch

$$\mathbb{p}(\omega) = \binom{\omega + r - 1}{\omega} p^r (1-p)^\omega.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{p}$ eine Zähldichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist, d.h. zeigen Sie: $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{p}(\omega) = 1$.
Was kann mit Hilfe dieser Zähldichte modelliert werden?
Anleitung: *Zeigen Sie die Regel* $\binom{\alpha+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-\alpha}{k}$ *für den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten* $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))}{k!}$, *der für* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *und* $k \in \mathbb{N}_0$ *definiert ist. Beweisen Sie dann, dass für die binomische Reihe* $(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^\infty \binom{\alpha}{k} x^k$ *gilt, wobei* $\alpha \in \mathbb{Z}$, $x \in (-1, 1)$.

(b) Nach langjähriger Erfahrung wissen Sie, dass Sie bei einer Runde Skat mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.2$ gewinnen. Sie sind nun zu einem Spieleabend eingeladen worden, bei dem ausschließlich Skat gespielt wird. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau beim 30. Spiel zum sechsten Mal gewinnen?

Lösung 7.

(a) Zunächst zur Formel für den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten: Es gilt

$$\begin{aligned} \binom{\alpha + k - 1}{k} &= \frac{(\alpha + k - 1)(\alpha + k - 2) \ldots (\alpha + k - k)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k(-\alpha - k + 1)(-\alpha - k + 2) \ldots (-\alpha)}{k!} = (-1)^k \binom{-\alpha}{k}. \end{aligned}$$

Nun zur binomischen Reihe. Wir zeigen zuerst die Konvergenz der Reihe für $|x| < 1$ mit Hilfe des Quotientenkriteriums; sei dazu $a_k := \binom{\alpha}{k} x^k$, dann gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k}\right| = \left|\frac{\alpha - k}{k + 1}\right| |x|$$

und damit $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |x| < 1$. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Die Darstellung erhalten wir, in dem wir $f(x) = (1+x)^\alpha$ im Punkt 0 Taylor-Entwickeln. Dazu bestimmen wir die k-ten Ableitungen:

$$f^{(k)}(x) = \alpha\cdots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}$$

und wir erhalten sofort

$$(1+x)^\alpha = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

Bemerkung: Da $f(x) = (1+x)^\alpha$ eine analytische Funktion ist (für $\alpha \geq 0$ handelt es sich um ein Polynom, für $\alpha < 0$ um einen Quotienten von analytischen Funktionen), wird f innerhalb des Konvergenzbereiches tatsächlich durch die Taylorreihe dargestellt.
Damit können wir nun nachrechnen, dass es sich bei $\mathbb{p}$ um eine Zähldichte handelt:

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{p}(\omega) &= \sum_{\omega\in\Omega}\binom{\omega+r-1}{\omega}p^r(1-p)^\omega = p^r\sum_{\omega\in\Omega}\binom{\omega+r-1}{\omega}(1-p)^\omega\\ &= p^r\sum_{\omega\in\Omega}\binom{-r}{\omega}(-1)^\omega(1-p)^\omega = p^r\sum_{\omega\in\Omega}\binom{-r}{\omega}(p-1)^\omega\\ &= p^r(1+(p-1))^{-r} = p^r p^{-r} = 1\end{aligned}$$

Durch diese Zähldichte kann die Anzahl der Misserfolge vor dem r-ten Erfolg bei einem Bernoulli-Schema mit Erfolgswahrscheinlichkeit p modelliert werden, d.h. $\mathbb{p}(\omega)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an genau ω Misserfolge vor dem r-ten Erfolg zu haben.

(b) Um beim 30. Spiel zum 6. Mal zu gewinnen, müssen wir vor dem 6. Erfolg genau 24 Misserfolge haben. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist nach (a) mit $p = 0.2$, $r = 6$, $\omega = 24$:

$$\mathbb{p}(24) = \binom{29}{24}0.2^6 0.8^{24} \approx 0.036$$

Aufgabe 8 (Binomialapprox. der Hypergeometrischen Vtlg, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

(a) Man zeige, dass sich die Zähldichte der hypergeometrischen Verteilung mit Parametern (N, M, n) für $N, M \to \infty$ und $M/N \to p$ durch die Zähldichte der Binomialverteilung mit Parametern (n, p) approximieren lässt.

(b) In einem See befinden sich 1000 Fische, von denen 200 Karpfen sind. Es werden nun (unabhängig voneinander) 10 Fische gefangen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass darunter mindestens 2 Karpfen sind? Geben Sie einmal die exakte Wahrscheinlichkeit an, und einmal die Wahrscheinlichkeit unter Nutzung der Approximation aus (a).

(c) Ein Insekt legt 100 Eier, die sich unabhängig voneinander entwickeln. Aus jedem Ei schlüpft mit Wahrscheinlichkeit 0.01 ein Nachkomme. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens 2 Nachkommen gibt? Geben Sie einmal die exakte Wahrscheinlichkeit an, und einmal die Wahrscheinlichkeit unter Nutzung der Approximation durch eine Poisson-Verteilung (vgl. **Poissonscher Grenzwertsatz** 04.07).

Lösung 8. (a) Die Zähldichte der hypergeometrischen Verteilung $\mathrm{Hyp}_{(N,M,n)}$ lautet:

$$\begin{aligned}
\mathbb{p}(k) &= \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{M!}{k!\cdot(M-k)!}\cdot\frac{(N-M)!}{(n-k)!\cdot(N-M-n+k)!}}{\frac{N!}{n!\cdot(N-n)!}} \\
&= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{\frac{M!}{(M-k)!}\cdot\frac{(N-M)!}{(N-M-n+k)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} \\
&= \binom{n}{k}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(M-i)\cdot\prod_{i=0}^{n-k-1}(N-M-i)}{\prod_{i=0}^{n-1}(N-i)}\cdot\frac{\frac{1}{N^n}}{\frac{1}{N^n}} \\
&= \binom{n}{k}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{M}{N}-\frac{i}{N}\right)\cdot\prod_{i=0}^{n-k-1}\left(1-\frac{M}{N}-\frac{i}{N}\right)}{\prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{i}{N}\right)}
\end{aligned}$$

Alle drei auftretenden Produkte sind endlich (und ebenso die Laufindizes i), und so können wir den Limes $M, N \to \infty$ in die Produkte hereinziehen. Wir nutzen noch $M/N \to p$ und $i/N \to 0$, da i fester Index:

$$\overset{M,N\to\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k}\cdot\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(p-0)\cdot\prod_{i=0}^{n-k-1}(1-p-0)}{\prod_{i=0}^{n-1}(1-0)} \qquad = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}.$$

Das ist die Zähldichte der Binomialverteilung.

(b) Da die Fische unabhängig voneinander gefangen werden, entspricht die Verteilung der Anzahl der gefangenen Karpfen einer hypergeometrischen Verteilung mit Parametern (N, M, n), wobei $N = 1000$ die Anzahl aller Fische im See, $M = 200$ die Anzahl der Karpfen und $n = 10$ die Anzahl der gefangenen Fische. Die Zähldichte lautet

$$\mathbb{p}(k) = \frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Die exakte Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens zwei Karpfen zu fangen, beträgt also (nutze Gegenereignis):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{mindestens 2 Karpfen}) &= 1-\mathbb{P}(\text{0 oder 1 Karpfen}) \\
&= 1-\mathbb{p}(0)-\mathbb{p}(1) = 1-\frac{\binom{N-M}{n}}{\binom{N}{n}}-\frac{M\cdot\binom{N-M}{n-1}}{\binom{N}{n}} \\
&\approx 1-0.106-0.268 = 0.626.
\end{aligned}$$

Nach (a) kann die Zähldichte der hypergeometrischen Verteilung durch die Zähldichte einer Binomialverteilung mit Parametern (n, p) mit $p := M/N$ angenähert werden, falls N, M groß sind. Hier approximieren wir $\mathbb{p}(k)$ durch $\hat{\mathbb{p}}(k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, wobei $p = M/N = 0.2$, $n = 10$. Wir erhalten (wieder mittels des Gegenereignisses):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{mindestens 2 Karpfen}) &= 1-\mathbb{P}(\text{0 oder 1 Karpfen}) \\
&\approx 1-\hat{\mathbb{p}}(0)-\hat{\mathbb{p}}(1) = 1-(1-p)^n-n\cdot p\cdot(1-p)^{n-1} \\
&\approx 1-0.107-0.268 = 0.625.
\end{aligned}$$

(c) Da die Eier sich unabhängig voneinander entwickeln und eine feste Anzahl von $n = 100$ Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit (Nachkomme) $p = 0.01$ durchgeführt wird, folgt die Anzahl der Nachkommen einer Binomialverteilung mit Parametern (n, p), mit Zähldichte $p(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Die exakte Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Nachkommen ist demzufolge (nutze Berechnung über das Gegenereignis):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{mindestens 2 Nachkommen}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{0 oder 1 Nachkomme}) \\
&= 1 - \mathbb{p}(0) - \mathbb{p}(1) = 1 - (1-p)^n - n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \\
&\approx 1 - 0.366 - 0.370 = 0.264
\end{aligned}$$

Nach der Vorlesung (Poissonscher Grenzwertsatz 04.09.) kann die Zähldichte der Binomialverteilung mit Parametern (n, p) für großes n und kleines p durch die Zähldichte einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = n \cdot p$ approximiert werden.

Hier approximieren wir also $\mathbb{p}(k)$ durch $\hat{\mathbb{p}}(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, die Zähldichte einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = n \cdot p = 1$. In diesem Fall erhalten wir (wieder mittels des Gegenereignisses):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{mindestens 2 Nachkommen}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{0 oder 1 Nachkomme}) \\
&\approx 1 - \hat{\mathbb{p}}(0) - \hat{\mathbb{p}}(1) = 1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} - \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = 1 - \frac{2}{e} \approx 0.264
\end{aligned}$$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Monntag, den **23. November 2020, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`