Modulformen 1 – Übungsgruppe 17. November 2021

Wintersemester 2021/22

A: Besprechung 3.Übungszettel

Aufgabe 1

(a) Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Ableiten von $f(M\langle z\rangle) = (cz+d)^k \cdot f(z)$, denn links erhält man $\frac{1}{(cz+d)^2} f'(\frac{az+b}{cz+d})$ und rechts $ck(cz+d)^{k-1}f(z) + (cz+d)^k \cdot f'(z)$.

(b) Die Transformationseigenschaft folgt sofort. Besitzt f für $\mathrm{Im}(z) > y_0 > 0$ eine Fourier-Entwicklung (Satz 2.3) der Form

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n(f) \exp(2\pi i n z) \text{ mit } a_{n_0}(f) \neq 0 \text{ ,}$$

so erhält man für $\tilde{f} = \frac{f'}{f}$ eine entsprechende Entwicklung

$$\tilde{f}(z) = 2\pi i n_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n(\tilde{f}) \exp(2\pi i n z) \text{ .}$$

Die 1-Klammer hat also bei ∞ höchstens einen Pol, sodass $[f,g] \in M_{k+l+2}$ folgt.

(c) Nachrechnen für $f \in M_k, g \in M_l$ und $h \in M_m$ mit $k,l,m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

(a) Für $z = x + iy$ gilt mit $y > y_0 > 0$ die Abschätzung

$$|\vartheta(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\exp(\pi i n^2 x - \pi n^2 y)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi n^2 y_0) \text{ ,}$$

weswegen $|\vartheta|$ beschränkt ist. Liegt z in einem Kompaktum von $\mathbb{H}$, so ist $-n^2 y \leq -\frac{1}{2}n^2 y$ für fast alle $n \in \mathbb{Z}$. Somit stellt $\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$ eine konvergente Majorante als Teilreihe einer geometrischen Reihe dar. ϑ konvergiert also lokal gleichmäßig und ist deshalb holomorph in z.

(b) Die erste Transformationseigenschaft ist klar. Wir zeigen nun die zweite ausführlich und betrachten hierzu für festes $z \in \mathbb{H}$ die Funktion

$$f(w) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\pi i z (n+w)^2\right) \text{ .}$$

Diese ist 1-periodisch und lässt sich für $w = u + iv$ in $f(w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(2\pi i m w)$ mit

$$a_m = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\pi i z (n+w)^2 - 2\pi i m w\right) \mathrm{d}u$$

entwickeln. Aufgrund der lokalen gleichmäßigen Konvergenz kann man die Summe und das Integral vertauschen, sodass die Substitution durch $u \mapsto u - n$ folgendes liefert:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0-n}^{1-n} \exp\left(\pi i z (u+iv)^2 - 2\pi i m (u+iv)\right) \cdot \exp\left(2\pi i m n\right) \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\pi i (z w^2 - 2 m w)\right) \mathrm{d}u$$

$$\overset{\text{quad. Erg.}}{=} \exp\left(-\pi i m^2 \tfrac{1}{z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\pi i z \left(w - \frac{m}{z}\right)^2\right) \mathrm{d}u = \exp\left(\pi i m^2 \frac{-1}{z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pi i z u^2) \, \mathrm{d}u \text{ .}$$

Mit der Translation von u erhält man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\pi i z(n+w)^2\right) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pi i z u^2)\,\mathrm{d}u}_{=\sqrt{\frac{i}{z}}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\pi i n^2 \frac{-1}{z}\right) \exp(2\pi i n w)\ .$$

Beide Seiten sind lokal in konvergente Potenzreihen entwickelbar, stellen analytische Funktionen in z dar, sodass man die Gleichheit nur für den rein imaginären Fall $z = iy$ zeigen muss. Da dies eine nicht-diskrete Teilmenge ist, lässt sich mit dem Identitätssatz (Satz 4.8) die gewünschte **Jacobi'sche Thetatransformationsformel** für $w = 0$ konkretisieren.

(c) Zunächst muss nachgewiesen werden, dass ϑ^8 in allen Spitzen und in $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ holomorph sein muss. Ansonsten erfüllt diese Funktion das Transformationsverhalten

$$\vartheta^8\left(T^2\langle z\rangle\right) = \vartheta^8(z) \cdot \underbrace{j(T^2, z)}_{=1} \text{ und } \vartheta^8\left(S\langle z\rangle\right) = \frac{z^4}{i^4} \cdot \vartheta^8(z) = \underbrace{j(S,z)^4}_{=z^4} \cdot \vartheta^8(z)\ ,$$

woraus die Behauptung $\vartheta^8 \in M_4\left(\langle T^2, S\rangle\right)$ folgt.

Aufgabe 3

Für $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ folgt aus $\mathrm{Im}(M\langle z\rangle) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ (Gleichung (1.2)) sofort die Invarianz durch Einsetzen in $\varphi(M\langle z\rangle)$. Da φ auf ganz $\mathbb{H}$ beschränkt ist, ist auch f beschränkt mit $|f(z)| \leq C\,\mathrm{Im}(z)^{-k/2}$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Setzt man $z := x + iy$, so ergibt sich nach Satz 2.3

$$|a_n(f)| = \left| \int_{[iy, iy+1]} f(z) \cdot \exp(-2\pi i n z)\, dz \right| \leq C y^{-k/2} \exp(2\pi n y)$$

und für $y = \frac{1}{n}$ damit die Behauptung.

B: Wiederholung Vorlesungskapitel 2

- FOURIER-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f)q^n =: f_\infty(q)$ (Satz 2.3)
- Meromorphie von f in $z = \infty$ entspricht Meromorphie von f_∞ in $q = 0$ (Definition 2.5)
- PETERSSON-Strichoperator $(f|_k M)(z) := (\det M)^{k/2} j(M,z)^{-k} f(M\langle z\rangle)$ (Proposition 2.6)

Definition: [meromorphe Modulform]
Eine auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit $(f|_k M) = f$ heißt meromorphe Modulform vom Gewicht k bezüglich Γ, falls $(f|_k M)$ meromorph in $z = \infty$ ist.

- Notationen: $\mathbb{C}$-Vektorräume $V_k(\Gamma)$, $M_k(\Gamma)$ und $S_k(\Gamma)$ (Definition 2.12)
- Modulformen ungeraden Gewichts: $-I_2 \in \Gamma \Rightarrow V_k(\Gamma) = \{0\}$ für $k = 2l + 1$ (Proposition 2.15)

Satz: [Valenzformel]
Eine nicht-verschwindende, meromorphe Modulform $f \in V_k$ erfüllt die Valenzformel

$$\operatorname{ord}(f;\infty) + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ord}(f;i) + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{ord}(f;\varrho) + \sum_{z \not\sim i,\rho} \operatorname{ord}(f;z) = \frac{k}{12} \ .$$

- $M_{k<0}(\Gamma) = \{0\}$
- $M_0(\Gamma) = \mathbb{C}$

Definition: [PETERSSON-Skalarprodukt]
Für $k \in \mathbb{Z}$ und $f, g \in M_k(\Gamma)$ mit $f \cdot g \in S_{2k}(\Gamma)$ ist das PETERSSON-Skalarprodukt definiert durch

$$\langle f \mid g \rangle_\Gamma := \frac{1}{\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}\right]} \cdot \int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)} y^k \mathrm{d}\omega(z) \ .$$

- Unabhängigkeit von der Γ-Wahl: $\langle f \mid g \rangle_{\Gamma_1} = \langle f \mid g \rangle_{\Gamma_2}$ für f, g in $M_k(\Gamma_1) \cap M_k(\Gamma_2)$ (Satz 2.25)