Funktionalanalysis - Übungsblatt 4

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 17. November 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Aufgabe 4.1 3 Punkte

(a) Beweisen Sie Lemma 2.16 aus der Vorlesung: Ist $C \subset V$ eine konvexe Teilmenge eines normierten linearen Raums V, so sind der Abschluss $\bar{C}$ und für jedes $r > 0$ die r-Umgebung

$$U_r(C) = \{v \in V : \|v - w\| < r \text{ für ein } w \in C\} \equiv \bigcup_{w \in C} B_r(w)$$

von C auch konvex.

(b) Sei $A \subset V$ eine abgeschlossene Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass A genau dann konvex ist, wenn für alle $x, y \in A$ bereits $\frac{1}{2}(x + y) \in A$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst per Induktion, dass für $x, y \in A$ der Ausdruck $\lambda x + (1 - \lambda)y$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ mit $2^n \lambda \in \mathbb{N}$ ebenfalls in A liegt.

Aufgabe 4.2 3 Punkte

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbert Raum und $A \subset H$ eine Teilmenge. Zeigen Sie

(a) $A^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.

(b) $A^\perp = \left(\overline{< A >}\right)^\perp$.

(c) Sei nun $V \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum. Zeigen Sie, dass dann $\left(V^\perp\right)^\perp = V$.

Aufgabe 4.3 3 Punkte

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum.

(a) Sei $A \subset H$ eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Menge und $x \in H$. Zeigen Sie, dass dann für eine Abbildung $P : H \to A$ die folgenden Aussagen äquivalent sind

(i) $\|x - P(x)\| = \inf_{a \in A} \|a - x\|$.

(ii) $\operatorname{Re} \langle x - P(x), a - P(x)\rangle \leq 0 \quad \forall\, a \in A$.

(b) Sei nun $Y \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum und sei $P : H \to Y$ die durch Lemma 2.15 eindeutig definierte **Projektionsabbildung** auf Y, d.h. $P(v) = w_0$ mit

$$\|v - P(v)\| = \|v - w_0\| = \operatorname{dist}(v, Y) = \inf_{w \in Y} \|v - w\|.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung P linear ist und äquivalent charakterisiert durch

$$\langle x - P(x), y\rangle = 0 \quad \forall\, y \in Y. \tag{1}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4.4 3 Punkte

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subset X$ abgeschlossen und konvex mit $0 \in \mathring{M}$ (Inneres von M). Definiere für $x \in X$

$$p(x) := \inf \left\{ \lambda > 0 \;\middle|\; \frac{x}{\lambda} \in M \right\}.$$

(a) Zeigen Sie $0 \leq p(x) < \infty$ für $x \in X$ und dass p sublineares Funktional ist.

(b) Beweisen Sie $M = p^{-1}([0,1])$.

(c) Weisen Sie für $M = \overline{B_1(0)}$ die Gleichheit $p(x) = \|x\|$ für alle $x \in X$ nach.

In dieser Aufgabe wollen wir näher auf die Bemerkung zur Notwendigkeit der Vollständigkeit im Satz von Riesz-Fréchet eingehen.

Aufgabe 4.5 4 Punkte

Betrachten Sie den Raum der abbrechenden reellen Nullfolgen $c_{00} \subset \ell_2$ ausgestattet mit dem ℓ_2 Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Wir definieren den Unterraum

$$W = \left\{ x \in c_{00} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \right\}.$$

(a) Vergewissern Sie sich, dass $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nicht vollständig ist.

(b) Beweisen Sie, dass das Funktional $L : c_{00} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ linear und stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass W abgeschlossen ist und dass das orthogonale Komplement

$$W^{\perp} = \{ y \in c_{00} \mid \langle y, x \rangle = 0 \text{ für alle } x \in W \}$$

in c_{00} trivial ist.

(d) Zeigen Sie, dass L keine Darstellung der Form $Lx = \langle y, x \rangle$ für ein $y \in c_{00}$ und alle $x \in c_{00}$ besitzt.