Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I

Lösungen zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1. Sei K ein Körper der Charakteristik ungleich 2, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$ eine Bilinearform. Zeigen Sie: Es existieren eindeutig bestimmte Bilinearformen γ_s, $\gamma_a \in \mathrm{Bil}(V)$ mit

- γ_s ist symmetrisch,
- γ_a ist antisymmetrisch,
- $\gamma = \gamma_s + \gamma_a$.

Lösung. Ist γ eine Bilinearform, so definieren wir

$$\gamma_s(v, v') = \frac{\gamma(v, v') + \gamma(v', v)}{2}$$

und

$$\gamma_a(v, v') = \frac{\gamma(v, v') - \gamma(v', v)}{2}.$$

Es ist sofort klar, dass γ_s eine symmetrische Bilinearform ist, dass γ_a eine antisymmetrische Bilinearform ist, und dass $\gamma = \gamma_s + \gamma_a$ gilt. Ist $\gamma = \gamma_s' + \gamma_a'$ eine weitere Zerlegung in eine symmetrische und eine antisymmetrische Bilinearform, so gilt durch Bildung der Differenz dass $\gamma_s - \gamma_s'$ gleichzeitig symmetrisch und antisymmetrisch ist, also konstant null. Das gleiche Argument zeigt auch $\gamma_a = \gamma_a'$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 16 & 8 & 10 \\ -3 & 8 & 4 & 11 \\ 3 & 10 & 11 & 16 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ und Zahlen r_+, r_-, r_0 derart, dass

$$T^t A T = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & \mathbf{0}_{r_0} \end{pmatrix}.$$

Lösung. Der Lösungsweg zu dieser Aufgabe ergibt sich aus Theorem 5.20. Wir interpretieren die Matrix A als Darstellungssmatrix einer (symmetrischen) Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^4$ bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^4$, via

$$\langle v, w \rangle_A := v^t A w$$

für $v, w \in \mathbb{R}^4$.

Wir suchen zunächst einen Vektor $w_1 \in \mathbb{R}^4$, mit $\langle w_1, w_1 \rangle_A \neq 0$. Dies ist etwa für $w_1 := e_1$ erfüllt. Als nächstes suchen wir $w_2 \in \mathbb{R}^4$, mit $\langle w_2, w_2 \rangle_A \neq 0$ (sofern möglich) und $\langle w_1, w_2 \rangle_A = 0$. Dazu lösen wir

$$\langle w_1, w_2 \rangle_A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} w_2 = 0$$

Es ist etwa $w_2 := e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ eine Lösung. Für diese gilt auch $\langle w_2, w_2\rangle_A \neq 0$.
Analog suchen wir nun $w_3 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_3\rangle_A &= 0 \\ \langle w_2, w_3\rangle_A &= 0 \\ \langle w_3, w_3\rangle_A &\neq 0 \text{ (sofern möglich)} \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 40 & 20 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses wird etwa gelöst von $w_3 := 2e_1 + e_2 + (-2)e_3$. Wir verfahren weiter und suchen $w_4 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_4\rangle_A &= 0 \\ \langle w_2, w_4\rangle_A &= 0 \\ \langle w_3, w_4\rangle_A &= 0 \\ \langle w_4, w_4\rangle_A &\neq 0 \text{ (sofern möglich)} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 40 & 20 & 40 \\ 0 & 12 & -6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erhalte $w_4 := 4e_1 + (-1)e_2 + (-6)e_3 + 4e_4$ als Basis den Lösungsraums. Man rechnet nach, dass $\langle w_4, w_4\rangle_A = 0$, also für alle möglichen Vektoren, die obiges System lösen. Insgesamt erhalten wir die Basis $\mathcal{C} = (w_i)_{i=1}^4$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 16 & 8 & 10 \\ -3 & 8 & 4 & 11 \\ 3 & 10 & 11 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier können wir bereits ablesen: $r_+ = 2, r_- = 1, r_0 = 1$. Wir müssen die Basis noch geeignet umsortieren und normieren. Setze dazu

$$\begin{aligned} c_1 &:= \left(\sqrt{|\langle w_1, w_1\rangle_A|}\right)^{-1} = \left(\sqrt{6}\right)^{-1} \\ c_2 &:= \left(\sqrt{\langle w_2, w_2\rangle_A}\right)^{-1} = \left(\sqrt{100}\right)^{-1} = 10^{-1} \\ c_3 &:= \left(\sqrt{\langle w_3, w_3\rangle_A}\right)^{-1} = \left(\sqrt{24}\right)^{-1} \end{aligned}$$

sowie $\mathcal{D} := (c_2 w_2, c_3 w_3, c_1 w_1, w_4)$ und erhalte den Basiswechsel

$$\begin{pmatrix} 10^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{24}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\sqrt{6}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{\sqrt{24}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{\sqrt{24}} & 0 & -1 \\ \frac{1}{10} & \frac{-2}{\sqrt{24}} & 0 & -6 \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =: T$$

und damit

$$T^t A T = \begin{pmatrix} E_2 & & \\ & -E_1 & \\ & & \mathbf{0}_1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. Wir betrachten den auf Blatt 12 eingeführten Operator $\int - \mathrm{d}x \colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ und die zugehörige Bilinearform $\gamma\colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \to \mathbb{R}, \gamma(f,g) = \left(\int (f \cdot g)\mathrm{d}x\right)(1_{\mathbb{R}}) \left(= \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)$, deren Fundamentalmatrix zur Basis $(1, x, x^2)$ durch

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass γ positiv definit ist.

(b) Bestimmen Sie eine obere Dreiecksmatrix Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit $T^t T = G$.

Lösung.

(a) Die Hauptminoren von G sind 1, $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{2160}$, welche allesamt > 0 sind. Nach dem Haupminorenkriterium ist G (und somit auch γ) positiv definit.

(b) Wir bestimmen zuerst eine Orthonomalbasis von $(\mathbb{R}[x]_{\leqslant 2}, \gamma)$. Dazu wenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\underline{v} = (1, x, x^2)$ an. Offenbar ist

$$\gamma(1,1) = \int_0^1 1\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = 1,$$

also setzen wir $w_1 = 1$. Wir definieren $w_2' = x - \gamma(x,1) \cdot 1 = \frac{-1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot x$. Es ist $\gamma(w_2', w_2') = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12}$, also $w_2 = \sqrt{12}x - \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot 1$. Wir definieren nun

$$w_3' = x^2 - \gamma(x^2, 1) \cdot 1 - \gamma(x^2, \sqrt{12}x - \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot 1) \cdot \left(\sqrt{12} \cdot x - \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot 1\right)$$

und berechnen $\gamma(x^2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ und

$$\gamma(x^2, \sqrt{12}x - \frac{\sqrt{12}}{2} \cdot 1) = \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{12} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{12}},$$

also

$$w_3' = x^2 - \frac{1}{3} - (x - \frac{1}{2}).$$

Wir berechnen schließlich

$$\gamma(w_3', w_3') = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} - (x - \frac{1}{2})\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{180}$$

und normieren w_3' durch $w_3 = \sqrt{180} w_3' = 6\sqrt{5} w_3'$. Damit ist

$$T^{-1} = M_{\underline{v}}^{(w_1, w_2, w_3)}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\sqrt{12}}{2} & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{12} & -6\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 6\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

und somit

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

eine Matrix wie gefordert.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie eine Matrix $T \in SO(4)$, sodass

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

Diagonalgestalt hat.

Lösung. Wir bestimmen zuerst das charakteristische Polynom von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante invariant unter elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen ist, formen wir zuerst geschickt um:

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 0 & -1 \\ -1 & t & -1 & 0 \\ 0 & -1 & t & -1 \\ -1 & 0 & -1 & t \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot (-1) \\ \mid \cdot (-1) \\ \longleftarrow + \\ \longleftarrow + \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & -1 \\ -1 & t & -1 & 0 \\ -t & 0 & t & 0 \\ 0 & -t & 0 & t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} t & -2 & 0 & -1 \\ -2 & t & -1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

Aus dem Entwicklungssatz für Blockmatrizen folgt jetzt sofort: $\chi_A(t) = t^2 \cdot (t^2 - 4) = t^2 \cdot (t-2) \cdot (t+2)$. Da die geometrische Vielfachheit immer durch die algebraische Vielfachheit beschränkt ist, sehen wir, dass die Eigenräume zu den Eigenwerten 2 und -2 je eindimensional sind. Entweder durch Lösen des Gleichungssystems mittels des bekannten Verfahrens oder scharfes Hingucken sehen wir, dass für $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ gilt: $Av_1 = 2v_1$. Folglich spannt v_1 den Eigenraum zum Eigenwert 2 auf. Auf die gleiche Weise sehen wir, dass $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t$ den Eigenraum zum Eigenwert -2 aufspannt und mit

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$$
$$v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^t$$

ist eine Basis vom Kern bestimmt. Bezüglich der Basis $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ hat A folglich Diagonalgestalt. Es handelt sich aber noch um keine Orthonormalbasis. Da Eigenvektoren von selbstadjungierten Operatoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander stehen, müssen wir v_1 und v_2 nur normieren und erhalten $w_1 = \frac{1}{2} v_1$ und $w_2 = \frac{1}{2} v_2$.

Leider stehen v_3 und v_4 nicht senkrecht aufeinander, wir verwenden daher das Orthonormalisierungsverfahren: Zuerst setzen wir $w_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_3$ und $w_4' = v_4 - \langle v_4, w_3 \rangle w_3 = v_4 - \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_3 = v_4 + v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^t$. Mit $w_4'' = \frac{1}{\sqrt{2}} w_4'$ erhalten wir eine Transformationsmatrix mit Determinante -1, daher setzen wir $w_4 = -w_4''$ und erhalten

$$T^{-1} = M^{(w_1, w_2, w_3, w_4)}_{(e_1, e_2, e_3, e_4)}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \in SO(4)$$

wie gefordert.