Die Riemannsche ζ-Funktion.

Josua Kugler

12. Oktober 2020

Def. 1 (Riemannsche ζ-Funktion)**.**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Lemma 1 (Konvergenzgebiet)**.** *Die Riemannsche ζ-Funktion konvergiert für Re $s > 1$.*

Beweis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}}.$$

Diese Reihe konvergiert, wie aus der reellen Analysis bekannt, für $\operatorname{Re} s > 1$. □

Lemma 2 (Eulerprodukt)**.** *Die Riemannsche ζ-Funktion lässt sich in Produktform schreiben:*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Beweis. Wir entwickeln in eine geometrische Reihe,

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

benutzen den Cauchyschen Multiplikationssatz

$$= \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m = 0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s}$$

sowie die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung und erhalten

$$= \sum_{n \in \mathcal{A}(m)} n^{-s},$$

wobei $\mathcal{A}(m)$ die Menge aller natürlichen Zahlen bezeichne, die keine von $p_1, \ldots, p_m$ verschiedenen Primteiler besitzen. Für $m \to \infty$ folgt daraus

$$\lim_{m \to \infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Wegen

$$\sum_p \left|1 - \frac{1}{1-p^{-s}}\right| \leq \sum_p \sum_m \left|p^{-ms}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{-s}\right|$$

konvergiert das Eulerprodukt für $\mathrm{Re}(s) > 1$. □

Def. 2 (Thetafunktion)**.**

$$\theta(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}.$$

Die Thetafunktion konvergiert für $\mathrm{Im}\ z > 0$.

Lemma 3. *Es gilt die θ-Transformationsformel*

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \theta\left(-\frac{1}{z}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{z}} \\ \Leftrightarrow \theta(it) &= \theta\left(-\frac{1}{it}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{it}} \\ &= \theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Beweis. Was genau heißt zitieren? Soll ich die Transformationsformel für diese spezielle Thetafunktion beweisen? Oder darf ich sie einfach so annehmen? □

Lemma 4. *Die Funktion $R_\infty(s) := \int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t}$ ist ganz.*

Beweis. Schreibt man $\theta(it)$ aus, so erhält man

$$R_\infty(s) = \int_1^\infty \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Da $\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t}$ für $t \to \infty$ exponentiell abfällt, spielt der polynomielle Term t^s für $t \to \infty$ keine Rolle und das Integral konvergiert für beliebiges $s \in \mathbb{C}$. □

Lemma 5. *Die Riemannsche ζ-Funktion besitzt eine analytische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$, sodass $\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$ genügt.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\ \pi^{-s}\Gamma(s)\frac{1}{n^{2s}} &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \sum \\ \pi^{-s}\Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{aligned}$$

Satz von Beppo Levi beziehungsweise Abschätzen durch eigentliches Integral $\to$ Vertauschen von Integral und Summe

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| \text{Gilt für Re } s > \frac{1}{2}$$

Einsetzen der Thetafunktion

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_\infty(s)} \\
&= \int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} + R_\infty(s) && |\theta - \text{Transformation} \\
&= \int_0^1 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} + R_\infty(s) && \Big| t \mapsto t^{-1} \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s} \frac{\mathrm{d}t}{t} + R_\infty(s) \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s} \frac{\mathrm{d}t}{t} + R_\infty(s) \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot t^{-s} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s} \frac{\mathrm{d}t}{t} + R_\infty(s) \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}-s} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty\left(\frac{1}{2} - s\right) + R_\infty(s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-s} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}$$

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s) = R_\infty(s) + R_\infty\left(\frac{1}{2} - s\right) + \frac{1}{1-2s} + \frac{1}{2s} \qquad \Big| s \mapsto \frac{s}{2}$$

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \left(R_\infty\left(\frac{s}{2}\right) + R_\infty\left(\frac{1-s}{2}\right) + \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} \right)$$

Da Γ und R_∞ ganze Funktionen sind und $\Gamma(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$, handelt es sich hierbei um eine meromorphe Funktion, die für Re $s > 1$ mit $\zeta(s)$ übereinstimmt und Singularitäten höchstens in $s = 0$ und $s = 1$ besitzt. Wegen

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \frac{1}{2\Gamma(1)}$$

handelt es sich an der Stelle 0 allerdings um eine hebbare Singularität. An der Stelle $s = 1$ liegt eine einfache Polstelle vor. Damit haben wir die analytische Fortsetzung der ζ-Funktion gefunden. Außerdem kann man aus der Gleichung

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = R_\infty\left(\frac{s}{2}\right) + R_\infty\left(\frac{1-s}{2}\right) + \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s}$$

sofort die Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$ ablesen. $\square$

Lemma 6 (Riemannsche Vermutung)**.** *$\forall\, 0 < \operatorname{Re} s < 1$ gilt:*

$$\zeta(s) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} s = \frac{1}{2},$$

d.h. alle nichttrivialen Nullstellen haben Realteil $\frac{1}{2}$.

Beweis. ja schön wärs... $\square$