Funktionalanalysis - Übungsblatt 11

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 19. Januar 2024, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

---

Aufgabe 11.1 4 Punkte

[1+1.5+1.5 Punkte]

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine schwach konvergente Folge mit $x_n \rightharpoonup x$. Zeigen Sie, dass $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Es sei nun $A \subset X$ eine abgeschlossen und konvexe Menge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

b) A ist **schwach folgenabgeschlossen**, d.h. für jede in X schwach konvergente Folge $x_k \rightharpoonup x$ mit $x_k \in A$ ist auch $x \in A$.

c) Sei nun $(X, \|\cdot\|)$ ein reflexiver Banachraum und zusätzlich A nicht-leer. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $y \in A$ mit

$$\|x - y\| = \inf_{a\in A} \|x - a\|.$$

Aufgabe 11.2 4 Punkte

[1+1+2 Punkte]

Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **gleichmäßig konvex**, falls es für jedes $\varepsilon \in (0, 2)$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\|x\| = \|y\| = 1 \text{ und } \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \|x - y\| < \varepsilon.$$

(a) Zeigen Sie, dass Prähilberträume $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gleichmäßig konvex sind.

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $(\ell_\infty^{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ nicht gleichmäßig konvex ist.

(c) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum und $x, x_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen

  (i) $x_n \to x$ in X für $n \to \infty$.

  (ii) $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 11.3 4 Punkte

[2.5 +1.5 Punkte]

Es sei $1 < p < \infty$.

(a) Sei $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset B_1(0)$ und $\|\psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 1$ (Hierbei bezeichnet $\operatorname{supp}\psi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) \neq 0\}}$ den Träger der Funktion ψ). Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$

$$f_k : B_1(0) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto k^{n/p}\psi(kx).$$

Zeigen Sie, dass $\|f_k\|_{L_p(B_1(0))} = \|\psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 1$, $f_k(x) \to 0$ für $x \neq 0$ und $f_k \rightharpoonup 0$ in $L_p(B_1(0))$ für $k \to \infty$.

Bitte wenden!

(b) Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $\mu > 0$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ-periodisch, d.h. $h(x+\mu) = h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\|h\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} < \infty$. Wir definieren $g_k(x) = h(kx)$. Zeigen Sie, dass $\|g_k\|_{L_p(\Omega)} \leq \|h\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$ und

$$g_k \rightharpoonup \overline{h} := \frac{1}{\mu}\int_0^\mu h \,\mathrm{d}\lambda \qquad \text{in} \quad L_p(\Omega).$$

Hinweis. Betrachten Sie zunächst $\overline{h} = 0$ und verwenden Sie, dass Treppenfunktionen dicht liegen in $L_p(\Omega)$.

Aufgabe 11.4 4 Punkte

[1.5+1+0.5+1 Punkte]

Seien X, Y ein Banachräume. Dann gilt

a) Ist $\Phi : X \to Y$ ein Isomorphismus, dann ist X reflexiv genau dann wenn Y reflexiv ist.

b) X ist reflexiv $\Rightarrow$ X' ist reflexiv.

c) X' ist reflexiv $\Rightarrow$ X ist reflexiv.
Hinweis: Sie können ohne Beweis annehmen, dass abgeschlossene Teilräume eines reflexiven Banachraums selbst reflexiv sind (siehe Schritt (III) im Beweis von Satz 4.23).

d) X ist reflexiv und separabel $\Leftrightarrow$ X' ist reflexiv und separabel.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 9.3.