Im Folgenden sei M stets eine Matrix $\in M_{n,n}(K)$ und V ein K-VR.

1 invertierbar

- $\mathrm{rg}(M) = n$
- $\det M \neq 0$
- $M \in \mathrm{GL}_n(K)$
- $\det M = 1 \implies M \in \mathrm{SL}_n(K)$

2 diagonalisierbar

- Es gibt eine Basis von V aus Eigenvektoren von M.
- $\exists S \in \mathrm{GL}_n(K) : S^{-1}MS$ hat Diagonalgestalt
- notwendig: $\chi_{\text{char}}(M)$ zerfällt in Linearfaktoren $\Leftrightarrow$ trigonalisierbar
- hinreichend: $\chi_{\text{char}}(M)$ zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren
- $\displaystyle\sum_{\lambda \text{ EW von } M} \mu_{\text{geo}} = n$

3 symmetrisch

- Spezialfall von hermitesch in $\mathbb{R}$
- symmetrisch $\Leftrightarrow M = M^t$ (antisymmetrisch $\Leftrightarrow M = -M^t$)
- $\exists S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit S^tMS hat Diagonalgestalt
- $K = \mathbb{C}$: $\exists S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S^tMS = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, 0, \ldots, 0)$
- $K = \mathbb{R}$: $\exists S \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $S^tMS = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{r_+}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r_-}, 0, \ldots, 0)$

4 positiv definit

- Die dazugehörige Bilinearform ist positiv definit.
- $\exists$ obere Dreiecksmatrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $G = T^tT$
- $\exists T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $G = T^tT$
- $\exists T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $(T^{-1})^tG(T^{-1}) = E_n$, dabei ist T die Transformationsmatrix von der Standardbasis zu einer Orthogonalbasis bezüglich der von M induzierten Bilinearform.
- Die k-ten Hauptminoren sind positiv.

5 orthogonal

- Spezialfall von unitär in $\mathbb{R}$
- $M^t M = E_n$
- Die assoziierte lineare Abbildung ist eine Isometrie
- $M \in O(n)$
- $\det M = 1 \implies M \in \mathrm{SO}(n)$

6 adjungiert

- Ist M^* die Adjungierte von M, so gilt für die assoziierten linearen Abbildungen f und f^*: $h(x, f(y)) = h(f^*(x), y)$, wobei
  - $K = \mathbb{R}$: V euklidisch (h positiv definit und symmetrisch), h bilinear, $M^* = M^t \implies h(x, f(y)) = x^t M y = (M^t x)^t y = h(f^*(x), y)$
  - $K = \mathbb{C}$: V unitär (h positiv definit und hermitesch), h sesquilinear, $M^* = \overline{M}^t \implies h(x, f(y)) = x^t \overline{My} = (\overline{M}^t x)^t y = h(f^*(M), y)$
- offensichtlich ist (in Bezug auf die Matrix) $K = \mathbb{R}$ ein Spezialfall von $K = \mathbb{C}$, da $\overline{M} = M$ für $K = \mathbb{R}$.

7 hermitesch (selbstadjungiert)

- $M = M^*$
- für $K = \mathbb{R}$ äquivalent zu symmetrisch
- hermitesche Sesquilinearform: $h(v, w) = \overline{h(w, v)} \implies$ Fundamentalmatrix ist hermitesch.
- $\implies$ normal

8 unitär

- $MM^* = E_n$
- für $K = \mathbb{R}$ äquivalent zu orthogonal
- $h(Mx, My) = x^t M^t \overline{M} y = \overline{\overline{x}^t M^* M \overline{y}} = x^t y = h(x, y)$
- $\implies$ normal

9 normal

- $MM^* = M^* M$