Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2022

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. K. Hübner
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 13
Abgabe: *Freitag, 22.07.2022, 09:15 Uhr*

Dies ist das letzte Übungsblatt.

Aufgabe 1 (Verzweigung). **(4 Punkte)**
Wir betrachten die Eigenschaften „unverzeigt“, „rein verzweigt“, „zahm verzweigt“ und „wild verzweigt“ von Erweiterungen lokaler Körper.

(a) Zeichen Sie ein Venndiagramm dieser Eigenschaften und in jeden möglichen Schnitt (von mindestens einer) dieser Eigenschaften ein Beispiel einer solchen Erweiterung und begründen Sie dies.

(b) Wir betrachten die folgenden Eigenschaften von Klassen $\mathscr{E}$ algebraischer Körpererweiterungen (in einem algebraischen Abschluss):

(VK) *Verkettung:* $L|K \in \mathscr{E} \quad \& \quad M|L \in \mathscr{E} \quad \Rightarrow \quad L|M \in \mathscr{E}$

(BW) *Basiswechsel:* $L|K \in \mathscr{E} \quad \& \quad K'|K$ beliebig $\quad \Rightarrow \quad L \cdot K'|K' \in \mathscr{E}$

(Komp) *Kompositum:* $L_1|K \in \mathscr{E} \quad \& \quad L_2|K \in \mathscr{E} \quad \Rightarrow \quad L_1 \cdot L_2|K \in \mathscr{E}$

Zeichnen Sie eine Tabelle, in der veranschaulicht wird, welche der obigen Klassen von Erweiterungen lokaler Körper welche der Eigenschaften (VK), (BW) und (Komp) erfüllen und begründen Sie dies.

Aufgabe 2 (Höhere Verzweigungsgruppen). **(8 Punkte)**
Sei $K = \mathbb{Q}_p$ (für eine Primzahl p) und sei $L = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$ (für $n \in \mathbb{N}$ und eine primitive p^n-te Einheitwurzel $\zeta_{p^n} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$).

(a) Bestimmen Sie für jedes $s \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ die s-te Verzweigungsgruppe in der unteren Nummerierung

$$G_s(L/K) := \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \,|\, \forall x \in \mathscr{O}_L\colon v_L(\sigma(x) - x) \geq s+1\}.$$

Hinweis: Für $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $l := \max\{m \in \mathbb{N} \,|\, p^m | k-1\}$ ist $\zeta_{p^n}^{k-1}$ eine primitive $(n-l)$-te Einheitswurzel.

(b) Zeichnen Sie eine Skizze des Graphen der Funktion $\eta_{L|K}\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}, t \mapsto (G_0\colon G_t)^{-1}$, wobei

$$(G_0\colon G_t) := \begin{cases} (G_{-1}\colon G_0)^{-1}, & t = -1; \\ 1, & t \in (-1, 0]; \\ (G_0\colon G_t), & t \in [0, \infty). \end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie für jedes $u \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ die u-te Verzweigunsgruppe in der oberen Nummerierung $G^u(L/K) := G_{\psi(u)}$, wobei $\psi := \varphi^{-1}$ für

$$\varphi\colon \mathbb{R}_{\geq -1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_0^u \eta_{L/K}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3. **(4 Punkte)**
Seien K ein lokaler Körper, K^{sep} ein separabler Abschluss, K^{nr} die maximale unverzweigte Erweiterung und K^{tr} die maximale zahm verzweigte Erweiterung.

(a) Zeigen Sie, dass die Erweiterung $K^{\mathrm{tr}}|K^{\mathrm{nr}}$ galoissch ist und bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{tr}}|K^{\mathrm{nr}})$.

(b) Geben Sie die Galoisgruppen

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}|K) & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{tr}}|K) \arrow[l, two heads] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}|K) \arrow[l, two heads] \\ & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{tr}}|K^{\mathrm{nr}}) \arrow[u, hook] & \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}|K^{\mathrm{tr}}) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

so explizit, wie es Ihnen möglich ist, an und zitieren Sie Quellen zur Begründung.

Wir wünschen Ihnen einen guten Semesterabschluss und viel Erfolg bei der mündlichen Prüfung!