Kapitel 9

Elliptische Funktionen

Für zwei $\mathbf{R}$-linear unabhängige komplexe Zahlen ω_1 und ω_2 (im folgenden auch Perioden genannt) sei

$$\Gamma = \mathbf{Z} \cdot \omega_1 + \mathbf{Z} \cdot \omega_2$$

das von den Perioden aufgespannte Gitter. Für jedes Translat $\mathcal{F} = z_0 + \mathcal{F}_0$ der Parallelogramms $\mathcal{F}_0 = \{u \cdot \omega_1 + v \cdot \omega_2 \ : \ 0 \leq u, v \leq 1\}$ gilt dann

$$\mathbf{C} \ = \ \Gamma + \mathcal{F} \ .$$

Wir betrachten jetzt sogenannte elliptische Funktionen: Per Definition sind dies **meromorphe** Funktionen $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, welche **doppelperiodisch** $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$ sind oder welche gleichbedeutend dazu

$$f(z + \gamma) = f(z) \quad , \quad \gamma \in \Gamma$$

erfüllen. Summen, Produkte etc. elliptischer Funktionen in diesem Sinne sind offensichtlich wieder elliptisch. Die elliptischen Funktionen zum Gitter Γ bilden daher einen Körper. Weiterhin gilt: Ist $f(z)$ elliptisch, dann auch die Ableitung $f'(z)$.

Bemerkung: Ist $f(z)$ eine elliptische Funktion zum Gitter $\Gamma = \mathbf{Z} \cdot \omega_1 + \mathbf{Z} \cdot \omega_2$, dann ist $f(z/\omega_1)$ eine elliptische Funktion zum Gitter $\Gamma = \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \cdot \omega_2/\omega_1$. Man kann daher obdA annehmen: eine der beiden Perioden ist gleich 1 und die andere Periode $\tau = \omega_2/\omega_1$ erfüllt $Im(\tau) > 0$.

9.1 Bedingungen an die Null- und Polstellen

Sei $f(z)$ eine solche elliptische Funktion. Wir nehmen an $f(z)$ sei nicht konstant. Dann ist $g(z) = f'(z)/f(z)$ wieder eine elliptische Funktion. Wir wählen $\mathcal{F}$ so, dass kein (!) Pol und keine (!) Nullstelle von $f(z)$ auf dem Rand von $\mathcal{F}$ liegt. Sei γ der geschlossene stückweise glatte Weg über die stückweise linear parametrisierter Ränder des Parallelogramms $\mathcal{F}$ gebildet im Gegenuhrzeigersinn. Aus der Periodizität von $g(z)$ folgt dann

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)dz = 0} \ ,$$

da sich die Integrale über jeweils zwei gegenüberliegende Wände wegheben.

Analog zeigt man

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma zg(z)dz \ \in \ \Gamma} \ .$$

Beweis: Die Wege $\varphi_i : [0,1] \to \mathbf{C}$ definiert durch $\varphi_i(t) = f(t\cdot\omega_i)$ sind glatt und geschlossen, und nach Annahme liegt $z = 0$ nicht auf φ_i. Daher sind die Umlaufzahlen $N(\varphi_i, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\omega_i} g(z)dz$ wohldefiniert und ganzzahlig. Das Integral $\int_\gamma zg(z)dz$ ist

$$\int_0^{\omega_1} zg(z)dz + \int_0^{\omega_2}(\omega_1 + z)g(z)dz - \int_0^{\omega_1}(z+\omega_2)g(z)dz - \int_0^{\omega_2} zg(z)dz \ ,$$

also gegeben

$$= \omega_1 \cdot \int_0^{\omega_2} g(z)dz - \omega_2 \cdot \int_0^{\omega_1} g(z)dz \ .$$

Daraus folgt die Behauptung. QED

Die obigen beiden Integralformeln für $g(z) = f'(z)/f(z)$ liefern mit Hilfe des Residuensatzes Bedingungen an die Nullstellen und Polstellen einer nicht konstanten elliptischen Funktion $f(z)$. Aus den Formeln von Abschnitt 5.7 folgt nämlich unter obigen Annahmen an $f(z)$ und $\mathcal{F}$

1. Die Zahl der Nullstellen von $f(z)$ in $\mathcal{F}$ ist gleich der Zahl der Polstellen von $f(z)$ in $\mathcal{F}$ (beides gezählt mit Vielfachheiten). Man nennt diese Zahl N die Ordnung der elliptischen Funktion $f(z)$.

2. Sind $a_1, ..., a_N$ die Nullstellen von $f(z)$ und $b_1, .., b_N$ die Polstellen von $f(z)$ in $\mathcal{F}$ (beides gezählt mit Vielfachheiten), dann gilt

$$a_1 + \cdots + a_N - b_1 - \cdots - b_N \ \in \ \Gamma \ .$$

Bemerkung. Für eine elliptische Funktion $f(z)$, hat $f(z) - const$ die selben Pole. Wendet man Aussage 1. an auf $f(z) - const$ anstelle von $f(z)$, sieht man dass eine nicht konstante elliptische Funktion *jeden (!) Funktionswert in* $\mathbf{C}$ *gleich oft an nimmt* (bei richtiger Zählweise). Daraus folgt, dass eine nichtkonstante elliptische Funktion mindestens eine Polstelle besitzen muss ($N \geq 1$). Aus Bedingung 2. folgt sogar

$$N \geq 2 \ ,$$

denn anderfalls erhielte man den Widerspruch $a_1 \in b_1 + \Gamma$.

Der folgende fundamentale Satz besagt nun, dass diese beiden notwendigen Bedingungen 1. und 2. auch hinreichend sind.

Abelsches Theorem. *Für die Existenz einer nichtkonstanten elliptischen Funktion $f(z)$ zum Gitter Γ mit Nullstellen $a_1, ..., a_M$ und Polstellen $b_1, .., b_N$ (gezählt mit Vielfachheiten und obdA im Inneren eines geeigneten Parallelogrammes $\mathcal{F}$) sind die Bedingungen $N = M$ und $\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{N} b_\nu \in \Gamma$ notwendig und hinreichend.*

Zum Beweis des Abelschen Theorems benutzen wir die sogenannten

9.2 Thetafunktionen

Für gegebenes Periodengitter Γ ist eine **Thetafunktion** eine **holomorphe** Funktion

$$\theta : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$$

mit dem Transformationsverhalten

$$\boxed{\theta(z+\gamma) \ = \ exp\Big(a(\gamma)z + b(\gamma)\Big) \cdot \theta(z)} \quad , \quad \gamma \in \Gamma$$

für geeignete komplexe Konstanten $a(\gamma), b(\gamma)$, welche von $\gamma \in \Gamma$ abhängen. Insbesondere erfüllt $g(z) = \theta'(z)/\theta(z)$ dann die Gleichungen $g(z+\gamma) = a(\gamma) + g(z)$. Daraus folgt notwendiger Weise

$$a(\gamma + \gamma') = a(\gamma) + a(\gamma') \quad , \quad \gamma, \gamma' \in \Gamma \ .$$

Bemerkung 1: Ist $\theta(z)$ eine Thetafunktion, dann liefert logarithmisches Ableiten

$$\frac{\theta'(z+\gamma)}{\theta(z+\gamma)} \ = \ a(\gamma) + \frac{\theta'(z)}{\theta(z)} \ .$$

Insbesondere ist dann $f(z) = -(\theta'(z)/\theta(z))'$ eine elliptische Funktion.

Bemerkung 2: Ist a eine Nullstelle einer Thetafunktion $\theta(z)$, dann ist auch $a+\gamma$ eine Nullstelle von $\theta(z)$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Eine Thetafunktion ist durch ihre Nullstellen im wesentlichen festgelegt. Eine Thetafunktion ohne Nullstellen schreibt sich nämlich auf $\mathbf{C}$ in der Form $\theta(z) = exp(Q(z))$ für eine ganze Funktion $Q(z)$. Aus dem Transformationsverhalten von $\theta(z)$ folgt dann $Q(z)'' = Q(z+\gamma)''$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Als ganze elliptische Funktion ist $Q(z)''$ aber dann notwendig konstant, und damit ist $Q(z)$ ein quadratisches Polynom in z.

Beweis des Abelschen Theorems: ObdA kann man annehmen $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \tau$ mit $Im(\tau) > 0$. Ausserdem können wir $\sum_{i=1}^N a_i = \sum_{i=1}^N b_i$ annehmen indem man a_N um einen geeigneten Gitterpunkt $\gamma \in \Gamma$ abändert.

Sei $\theta(z)$ eine Thetafunktion für Γ mit einer einzigen Nullstelle. Durch Translation des Arguments kann man dann annehmen, diese Nullstelle sei $z = 0$. In diesem Fall ist dann

$$f(z) = \prod_{i=1}^N \frac{\theta(z-a_i)}{\theta(z-b_i)}$$

meromorph und doppelperiodisch (!) und hat per Definition die gewünschten Null- und Polstellen.

Zum Beweis des Abelschen Theorems genügt daher die Existenz der

Riemannschen Thetafunktion

$$\boxed{\theta(\tau,z) = \textstyle\sum_{n\in\mathbf{Z}}\ exp(\pi i\tau n^2 + 2\pi i z n)}$$

Wegen $Im(\tau) > 0$ und $|exp(\pi i\tau n^2 + 2\pi i z n)| \leq const \cdot exp(-Im(\tau)n^2)$ für $z \in K$ (und ein Kompaktum K in $\mathbf{C}$) konvergiert diese Reihe kompakt als Funktion von z, und ist daher eine holomorphe Funktion der Variable z. Offensichtlich gilt

$$\theta(\tau, z+1) = \theta(\tau, z)$$

und quadratische Ergänzung $\tau n^2 + 2(z+\tau)n = \tau(n+1)^2 - \tau + 2z(n+1) - 2z$ liefert durch Verschieden der Variable n um eins

$$\theta(\tau, z+\tau) = exp(-2\pi i z - \pi i\tau)\cdot\theta(\tau,z)\ .$$

Die Zahl N der Nullstellen der Riemannschen Thetafunktion $\theta(z) = \theta(\tau, z)$ gezählt im Inneren eines geeignet gewählten Parallelogramms $\mathcal{F}$ ist nach dem Residuensatz und Bemerkung 1 (beachte $a(1) = 0$ und $a(\tau) = -2\pi i$)

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \theta'(z)/\theta(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 -a(\tau) dz = 1 \ .$$

Integriert wird hierbei wie üblich über den Rand eines geeignet gewählten Parallelogramms $\mathcal{F}$. Damit ist das Abelsche Theorem bewiesen. QED

Bemerkung 3: Für $z_0 = 1/2 - \tau/2$ gilt

$$\theta(\tau, z_0) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n exp(\pi i \tau (n^2 - n)) \ .$$

Unter der Substitution $n \mapsto 1 - n$ bleibt $n^2 - n$ invariant und $(-1)^n$ nimmt ein Vorzeichen auf. Also $\theta(\tau, z_0) = -\theta(\tau, z_0)$. Somit ist $z_0 + \Gamma$ die Nullstellenmenge von $\theta(\tau, z)$. Setze dann $\theta(z) := \theta(\tau, z_0 + z)$.

Die Weierstraß Funktion $\wp(z)$

Nach Bemerkung 1 hat die elliptische Funktion $f(z) = -(\theta(z)'/\theta(z))'$ eine doppelte Polstelle in den Punkten aus Γ und ist sonst holomorph. Somit ist $f(z)$ von der Ordnung $N = 2$. Substrahiert man den nullten Term der Laurententwicklung im Punkt Null erhält man eine elliptische Funktion $\wp(z)$ mit denselben Eigenschaften und

$$\wp(z) = z^{-2} + 3a_1 z^2 + 5a_2 z^4 + \cdots \ ,$$

denn notwendigerweise gilt $\wp(-z) = \wp(z)$ [da beide Laurent Entwicklung $z^{-2} + \sum_{i \geq 1} c_i z^i$ bei $z = 0$ und Pole nur in Γ besitzen]. Es folgt

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + 6a_1 \, z + 20a_2 \, z^3 + \cdots$$

sowie $\wp'(-z) = -\wp'(z)$. Eine kleine Rechnung[1] zeigt dann, dass die folgende elliptische Funktion

$$\boxed{(\wp'(z))^2 - 4\wp(z)^3 + 60a_1 \cdot \wp(z) + 140a_2 = 0}$$

ganz ist und in $z = 0$ verschwindet, also konstant Null ist.

Die Funktion $\wp'(z)$ hat die Ordnung $N = 3$ mit dreifachen Polen in Γ. Da sie ungerade ist, muss sie drei Nullstellen in den 2-Teilungspunkten $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ und $(\omega_1 + \omega_2)/2$ besitzen. Wegen $N = 3$ sind dies bereits alle Nullstellen (bis auf Γ-Äquivalenz).

[1] Wegen $\wp'(z)^2 = 4z^{-6} - 24a_1 z^{-2} - 80a_2 + ...$ und $\wp(z)^3 = z^{-6} + 3z^{-4}(3a_1 z^2 + 5a_2 z^4) + ...$.

9.3 Der Funktionenkörper $\mathbf{C}(\Gamma)$

Sei $\mathbf{C}(\Gamma)$ der Körper aller elliptischen Funktionen zum Gitter Γ und $\mathbf{C}(\Gamma)^+$ der Unterkörper der Funktionen $f \in \mathbf{C}(\Gamma)$ mit $f(-z) = f(z)$.

Für $f_\pm(z) = \frac{1}{2}(f(z) \pm f(-z))$ ist $f \in \mathbf{C}(\Gamma)$ von der Form $f = f_+ + f_-$ mit f_+ und $\wp' \cdot f_-$ in $\mathbf{C}(\boldsymbol{\Gamma})^+$. Beachte auch $\wp \in \mathbf{C}(\Gamma)^+$.

Für $f \in \mathbf{C}(\Gamma)^+$ liegt das Produkt $g(z) = f(z)\prod_i(\wp(z) - \wp(b_i))$ über die Polstellen $b_i \neq 0$ in $\mathcal{F}$ der Funktion f im Körper $\mathbf{C}(\Gamma)^+$ und hat nur noch Polstellen in Γ. Durch Induktion nach der Polordnung im Nullpunkt zeigt man daher leicht, dass $g(z)$ ein Polynom in $\wp(z)$ ist.

Satz. *$\mathbf{C}(\Gamma)$ ist gleich dem Körper $\mathbf{C}(\wp)$ der gebrochen rationalen Funktionen in $\wp(z)$ und es gilt*

$$\boxed{\mathbf{C}(\Gamma) = \mathbf{C}(\Gamma)^+ + \wp'(z) \cdot \mathbf{C}(\Gamma)^+} \ .$$

Folgerung. *Für $P(x) = 4x^3 - 60a_1x - 140a_2$ gilt*

$$\boxed{\mathbf{C}(\Gamma) = \mathbf{C}(\wp)\big(\sqrt{P(\wp)}\big)} \ .$$

Bemerkung. Die Funktion $\wp'(z)$ ist ungerade, hat Pole nur in Γ und ist von der Ordnung $N = 3$. Das gilt auch für die auf $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ kompakt konvergente Reihe $\sum_{\gamma\in\Gamma}(z+\gamma)^{-3}$. Der Vergleich der Laurentreihen bei $z = 0$ zeigt

$$\wp'(z) = -2\sum_{\gamma\in\Gamma}(z+\gamma)^{-3} \ ,$$

denn die Differenz beider Seiten ist ungerade und hat als elliptische Funktion die Ordnung $N \leq 1$, ist daher also Null.

Folgerung. *Es gilt $a_1 = \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma}\gamma^{-4}$ und $a_2 = \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma}\gamma^{-6}$.*

Taylorentwicklung zeigt $\sum_{\gamma\neq 0}(z-\gamma)^{-3} = \sum_{\gamma\neq 0}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(i+2)!/2}{\gamma^{3+i}}\frac{z^i}{i!}$, wie man durch sukzessives Ableiten von $(z-\gamma)^{-3}$ an der Stelle $z = 0$ sieht. Die ersten Terme von $\wp'(z)$ sind daher $-2z^{-3} + 6z\sum_{0\neq\gamma\in\Gamma}\gamma^{-4} + 20z^3\sum_{0\neq\gamma\in\Gamma}\gamma^{-6} + \cdots$.

9.4 Elliptische Differentiale

Ist $f \in \mathbf{C}(\Gamma)$ eine elliptische Funktion, nennt man $f(z)dz$ ein elliptisches Differential. Man schreibt $df(z) = f'(z)dz$ und die Ableitung f' liegt für $f \in \mathbf{C}(\Gamma)$ wieder in $\mathbf{C}(\Gamma)$.

Residuen. Für ein elliptisches Differential $f(z)dz$ folgt wegen $\int_\gamma f(z)dz = 0$ (für γ wie Abschnitt 9.1) aus dem Residuensatz

$$\boxed{\sum_{z_\nu} Res_{z=z_\nu}(f(z)) = 0}$$

wobei die Summe über Γ-Repräsentanten z_ν der Pole in $\mathcal{F}$ läuft. Man nennt ein elliptisches Differential $f(z)dz$ ein *Differential von der* 2. *Gattung*, wenn seine Residuen alle Null sind.

Man nennt $f(z)dz$ ein *Differential* 3. *Gattung*, wenn die elliptische Funktion f höchstens einfache Pole besitzt. Für endlich viele Γ-inäquivalente Punkte z_ν und Zahlen z_ν in $\mathbf{C}$ mit $\sum_\nu z_\nu = 0$ gibt es ein Differential 3. Gattung mit Polen in z_ν und den Residuen c_ν. Dies zeigt man durch Induktion nach der Zahl der Pole. Im Fall von zwei Punkten folgt die Behauptung sofort aus dem Abelschen Theorem. Es folgt

Satz. *Jedes elliptische Differential schreibt sich als eine Summe von einem elliptischen Differential 2. Gattung und einem elliptischen Differential 3. Gattung. Die Zerlegung ist eindeutig bis auf ein Vielfaches von dz, d.h. bis auf ein holomorphes Differential (Differential 1.Gattung).*

9.5 Integrale

Das Integral eines elliptischen Differential $f(z)dz$ ist allgemein nicht erklärt, wohl aber das eines Differentiales zweiter Gattung. Dann ist

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

erklärt für alle z_0, z, die nicht Pole von f sind. Wegen dem Residuensatz hängt $F(z)$ nicht ab von der Wahl eines Verbindungsweges von z_0 nach z und es gilt $F'(z) = f(z)$. Durch anschliessende Betrachtung der Laurentreihe in den Polen von $f(z)$ kann man dann $F(z)$ in den Polen erklären und erhält so eine wohldefinierte meromorphe Funktion auf ganz $\mathbf{C}$, die durch $f(z)$ bis auf eine Integrationskonstante eindeutig festgelegt ist. Die Funktion $F(z)$ ist im Allgemeinen aber nicht elliptisch. Jedoch gilt für $\gamma \in \Gamma$

$$F(z+\gamma) = F(z) + c_f(\gamma)$$

für eine Integrationskonstante $c_f(\gamma) \in \mathbf{C}$, die offensichtlich

$$c_f(\gamma+\gamma') = c_f(\gamma) + c_f(\gamma')$$

für alle γ, γ' in Γ erfüllt. Man kennt $c_f(\gamma)$, wenn man $c_f(\omega_1)$ und $c_f(\omega_2)$ für Erzeuger ω_1, ω_2 des Gitters Γ kennt. Natürlich hängt $c_f(\gamma)$ -linear von f ab.

Beispiel 1: Für $f(z) = 1$ ist $F(z) = z$ und $c(\omega_1) = \omega_1$ sowie $c(\omega_2) = \omega_2$.

Beispiel 2: Für $f(z) = -\wp(z)$ ist $F_wp(z) = -\int_{z_0}^z \wp(w)dw$ die Zetafunktion von Weierstraß. Die Integrationskonstante wird so gewählt, dass $F_\wp(z) = z^{-1} + 0 + \sum_{i\geq 1} c_i z^i$ gilt. Sei $\eta_1 = c(\omega_1)$ sowie $\eta_2 = c(\omega_2)$. Da $F_\wp(z)$ jetzt einfache Pole in Γ besitzt, folgt aus dem Residuensatz durch Integration über den Rand eines geeignenten Bereichs $\mathcal{F}$ (mit Null nicht auf dem Rand)

$$2\pi i = 2\pi i\, Res_{z=0}(F_\wp(z)) = \int_\gamma F_\wp(z)dz \ .$$

Die 4 Integrationsstücke liefern $\int_0^{\omega_1}(F_\wp(z) - F_\wp(z+\omega_2))dz = -\eta_2\omega_1$ und $\int_0^{\omega_2}(F_\wp(z+\omega_1) - F_\wp(z))dz = \eta_1\omega_2$ wegen $F_\wp(z+\omega_\nu) - F_\wp(z) = \eta_\nu$. Es folgt

$$\boxed{\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = 2\pi i} \ .$$

Folgerung. *Die Gruppenhomomorphismen $c_f : \Gamma \to \mathbf{C}$ sind für die zwei Funktionen $f(z) = 1$ und $f(z) = \wp(z)$ nicht $\mathbf{C}$-linear abhängig.*

Der Raum der Gruppenhomomorphismen $\Gamma \to \mathbf{C}$ hat die $\mathbf{C}$-Dimension zwei.

Folgerung. *Für jedes Differential $g(z)dz$ zweiter Gattung existieren zwei Konstanten α und β in $\mathbf{C}$ derart, dass für $f(z) = g(z) - \alpha - \beta \cdot \wp(z)$ und alle $\gamma \in \Gamma$ gilt $c_f(\gamma) = 0$. Das heißt, es gilt $f(z) = h'(z)$ für ein $h \in \mathbf{C}(\Gamma)$.*

Für Differentiale 3. Gattung $f(z)dz$ kann man die logarithmische Stammfunktion $F(z)$ mit $dlog(F) = f(z)dz$ untersuchen. Dies löst man mit Hilfe von Bemerkung 1 (Übungsaufgabe).

9.6 Algebraische Differentiale

Wir betrachten Polynome drittes Grades $P(x) = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$ mit den Nullenstellen e_1, e_2, e_3 in $\mathbf{C}$. Wir setzen $y = \sqrt{P(x)}$ und betrachten den Körper aller $f(x,y) = R(x,y)/Q(x,y)$ für Polynome R und Q in den Variablen x, y und untersuchen das Integral $f(x,y)dx$.

Fallen zwei Nullstellen e_i zusammen, ist $y = (x-e_i)\sqrt{x-e_j}$ und $f(x,y)$ lässt sich als eine gebrochen rationale Funktion in der Variablen $w = \sqrt{x-e_j}$ schreiben! Wegen $dx = 2wdw$ lässt sich in diesem Fall das Integral durch Partialbruchzerlegung leicht berechnen. Seien daher oBdA *alle Nullstellen e_i paarweise verschieden*. Durch eine Translation von x kann man oBdA auch annehmen $P(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ für $g_2, g_3 \in \mathbf{C}$.

Bemerkung: Angenommen[2] es sei $g_2 = 60\sum_{\gamma\neq 0}\gamma^{-4}$ und $g_3 = 140\sum_{\gamma\neq 0}\gamma^{-6}$, mit Summation der γ über ein elliptisches Periodengitter Γ. Dann kann man mit Hilfe der Substitution $x = \wp(z)$ und $y = \wp'(z)$ das Differential $\eta = f(x,y)dx = f(\wp(z), \wp'(z))\,\wp'(z)dz$ ersatzweise über z integrieren. *Ist η von der 2. Gattung*, dann wissen wir von der letzten Folgerung bereits

$$\eta = dh(z) + \alpha \cdot dz + \beta \cdot \wp(z)dz$$

für ein $h \in \mathbf{C}(\Gamma)$. Dies berechnet mit Hilfe der Weierstraßschen Zetafunktion $F_\wp(z)$ das zugehörige Integral

$$\int_{x_0}^{\wp(z)} f(x,y)dx = h(z) + \alpha \cdot z + \beta \cdot F_\wp(z)\ .$$

Beispiel. $\int_{\wp z_0}^{\wp(z)} \frac{dx}{y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\wp'(z)dz}{\wp'(z)} = z - z_0$.

Beispiel. $\int_{\wp(z_0)}^{\wp(z)} \frac{xdx}{y} = \int_{z_0}^{z} \frac{\wp(z)\wp'(z)dz}{\wp'(z)} = F_\wp(z) - F_\wp(z_0)$ für die Weierstraßsche Zetafunktion $F_\wp(z)$.

Bemerkung. Die obige Annahme über die Verschiedenheit der Nullstelle e_i kann man als Nichtverschwinden der **Diskriminante**

$$\Delta = 16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2$$

[2]In diesem Fall gilt $e_i = \wp(z_i)$ für $z_1 = \omega_1/2$, $z_2 = \omega_2/2$ und $z_3 = (\omega_1+\omega_2)/2$ und die Werte e_i sind paarweise verschieden, da sie jeweils mit der Multiplizität zwei von $\wp(z)$ angenommen werden. D.h. $\wp(z) - e_i$ hat eine doppelte Nullstelle bei $z = z_i$ und wegen der Pol/Nullstellenordnung $N = 2$ keine weitere Nullstelle.

postulieren. Nach dem Satz von den elementar symmetrischen Funktionen lässt sich die Diskriminante berechnen durch die Koeffizienten von $P(x)$. Eine etwas lästige Rechnung gibt dabei für die Diskriminante den Wert

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \ .$$

Wir formulieren jetzt einen in Abschnitt 9.7 und 9.8 zu beweisenden Satz. Mit seiner Hilfe können wir wie oben beschrieben alle Integrale $\int f(x,y)dx$ für $y = \sqrt{P(x)}$ und beliebige kubische Polynome $P(x)$ bestimmen.

Satz. *Für jedes Paar g_2, g_3 von komplexen Zahlen mit der Diskriminante $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ gibt es ein elliptisches Periodengitter Γ mit der Eigenschaft $g_2 = 60\sum_{\gamma\neq 0}\gamma^{-4}$ und $g_3 = 140\sum_{\gamma\neq 0}\gamma^{-6}$.*

Bemerkung. Wegen $g_2(\lambda\cdot\Gamma) = \lambda^{-4}g_2(\Gamma)$, $g_3(\lambda\cdot\Gamma) = \lambda^{-6}g_3(\Gamma)$ und $\Delta \neq 0$ kann man die komplexe Zahl

$$j(\Gamma) = \frac{g_2(\Gamma)^3}{g_2(\Gamma)^3 - 27g_3(\Gamma)^2}$$

betrachten. Der Wert $j(\Gamma)$ hängt nicht von $\lambda \in \mathbf{C}^*$ ab, und für geeignetes λ ist $\lambda\cdot\Gamma = \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\cdot\tau$. Man setzt dann $j(\Gamma) = j(\tau)$ für τ in der oberen komplexen Halbebene $\mathbf{H}$. Man sieht dann sofort, dass *der letzte Satz äquivalent ist zu der Aussage, dass*

$$j : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$$

surjektiv ist. Da g_2 und g_3 holomorph von $\tau \in \mathbf{H}$ abhängen, ist $j = j(\tau)$ eine holomorphe Funktion der Variable τ auf $\mathbf{H}$.

9.7 Fundamentalbereich

Der Wert $j(\Gamma)$ hängt nur vom Gitter ab und nicht von der Wahl der Basis des Gitters. Gilt $\Gamma = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2 = \mathbf{Z}\omega_1' + \mathbf{Z}\omega_2'$. Dann gibt es ganzzahlige 2×2 Matrizen M und N mit $M\binom{\omega_1}{\omega_2} = \binom{\omega_1'}{\omega_2'}$ und $N\binom{\omega_1'}{\omega_2'} = \binom{\omega_1}{\omega_2}$. Es folgt $MN = NM = E$ und damit $\det(M) = \det(N) = \pm 1$.

Insbesondere gilt $\Gamma = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau'$ für τ, τ' in der oberen Halbebene $\mathbf{H}$ genau dann, wenn $M\binom{\tau}{1} = \binom{\tau'}{1}$ bzw.

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gilt für eine unimodulare Matrix deren Determinante Eins. Das heißt also

$$M \in Sl(2, \mathbf{Z}) \ ,$$

und für alle solchen Matrizen gilt

$$\boxed{j(\tau) = j(M\langle\tau\rangle)} \ .$$

Insbesondere gilt also $j(\tau+1) = j(\tau)$. Ein Punkt τ in der komplexen oberen Halbebene kann durch iteriertes Anwenden der zweiten Substitution in den Streifen

$$|Re(\tau)| \leq 1/2$$

gebracht werden.

Fundamentalmenge. Betrachte den $Sl(2, \mathbf{Z})$-Orbit von τ in $\mathbf{H}$. Beachte

$$Im(M\langle\tau\rangle) = \frac{Im(\tau)}{|c\tau + d|^2} \ .$$

Gilt $Im(M\langle\tau\rangle) \geq Im(\tau)$, so folgt $|c\tau + d|^2 = c^2 Im(\tau)^2 + (cRe(\tau) + d)^2 \leq 1$. Man sieht sofort, dass es dafür nur endlich viele Möglichkeiten für $c, d \in \mathbf{Z}$ wegen $|c| \leq Im(\tau)^{-1}$ gibt. Die Menge $\{Im(M\langle\tau\rangle) \mid M \in Sl(2, \mathbf{Z}\}$ besitzt also ein Maximum. OBdA sei $Im(\tau)$ bereits dieses *Maximum*, und durch Translation sei oBdA auch $|Re(\tau)| \leq 1/2$. Der Vergleich von $Im(\tau) \geq Im(M\langle\tau\rangle)$ für $M\langle\tau\rangle = -\tau^{-1}$ zeigt dann $Im(\tau) \geq Im(\tau)/|\tau|^2$. Es folgt:

Jeder $Sl(2, \mathbf{Z})$-Orbit in $\mathbf{H}$ besitzt einen Repräsentant τ im Bereich

$$\boxed{|Re(\tau)| \leq 1/2 \quad , \quad |\tau| \geq 1} \ .$$

Insbesondere ist $Im(\tau) \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Angenommen für ein τ in diesem Bereich gelte $Im(M\langle\tau\rangle) \geq Im(\tau)$:

Dann folgt $c \neq 0$ und $Im(\tau) \leq 1$, oder $c = 0$, $d = \pm 1$ und $\pm M$ ist damit eine Translation mit Gleichheit $Im(M\langle\tau\rangle) = Im(\tau)$, was nur für $Re(\tau) = \pm 1/2$ möglich ist. Im ersten Fall ist dagegen $3/4c^2 \leq 1$ (und damit gilt $c = -1, 1$) und $(cRe(\tau) + d)^2 \leq 1/4$ zeigt dann $d = 1, 0, -1$. Der Fall $d \neq 0$ ist nur möglich für $Re(\tau) = \pm 1/2$ und $Im(\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Aus $d = 0$, folgt $|\tau| = 1$ und $b = \pm 1$. Man berechnet dann leicht alle möglichen Fälle durch Fallunterscheidungen.

Folgerung 1: *Die Menge $D \subset \mathbf{H}$ der Punkte τ mit $-1/2 \leq Re(\tau) < 1/2$ und $|\tau| \geq 1$ ist ohne die Punkte mit $|\tau| = 1, Re(\tau) > 0$ ein genauer Fundamentalbereich von $Sl(2,\mathbf{Z})$ auf $\mathbf{H}$.*

Folgerung 2: *Die Kongruenzgruppen $\Gamma(N) \subset Sl(2,\mathbf{Z})$ der Matrizen, die kongruent zur Einheitsmatrix sind modulo N, operieren fixpunktfrei auf $\mathbf{H}$ für $N \geq 2$. Genauer gilt für $M \in \Gamma(N)$ mit $M\langle\tau\rangle = \tau$ dann $M = \pm id$ für $N = 2$ beziehungsweise $M = id$ für $N \geq 3$.*

Beweis von Satz 9.6. Da $j : \mathbf{H} \to \mathbf{C}$ holomorph ist, ist wegem dem Satz von der Gebietstreue das Bild eine offene Menge in $\mathbf{C}$. Ist das Bild auch abgeschlossen, ist das Bild notwendig gleich $\mathbf{C}$ aus Zusammenhangsgründen. Das Bild von $j(\tau)$ wird bereits auf der Menge M der Punkte im Streifen $|Re(\tau)| \leq 1/2$ vom Betrag $|\tau| \geq 1$ angenommen. Sei $j(\tau_n) \to y$ ein Limes für eine Folge mit $\tau_n \in M$. Die Folge $Im(\tau_n)$ ist beschränkt, denn in M gilt

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} |j(\tau)| = \infty \ ,$$

wie wir im nächsten Abschnitt 9.8 zeigen werden. Da jede im Imaginärteil beschränkte Teilmenge von M kompakt ist, besitzt τ_n eine in M konvergente Teilfolge. Es folgt $y \in Bild(j)$ und damit ist $Bild(j)$ abgeschlossen.

9.8 $j(\tau)$ im Limes $Im(\tau) \to \infty$

Die Weierstraßfunktion $\wp$ besitzt folgende konkrete Reihendarstellung vom Mittag-Leffler Typ $(*)$

$$\boxed{\wp(z) = z^{-2} + \textstyle\sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}} \left[(z+\gamma)^{-2} - \gamma^{-2}\right]} \ .$$

Beweis: Dies benutzt, dass der Summand $(z+\gamma)^{-2} - \gamma^{-2} = -\frac{(2\gamma+z)z}{\gamma^2(z-\gamma)^2}$ in Kompakta von $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ durch $C \cdot \gamma^{-3}$ abgeschätzt werden. Daher hat man kompakte Konvergenz im Komplement von Γ sowie doppelten Polstellen in Γ. Gliedweises Ableiten ist daher erlaubt und liefert als Ableitung $-2\sum_{\gamma\in\Gamma}(z+\gamma)^{-3} = \wp'(z)$. Da die Laurententwickung der obigen Reihe keinen konstanten Term aufweist, stimmt sie als Stammfunktion mit $\wp(z)$ überein. QED

Wir betrachten jetzt das Gitter $\Gamma = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ und die Werte $\omega_1 = \frac{1}{2}$, $\omega_2 = \frac{\tau}{2}$ und $\omega_3 = \frac{\tau+1}{2}$. Für $i = 1,2,3$ haben wir bereits die Nullstellen von $P(x)$

$$e_i(\tau) = \wp(\omega_i(\tau))$$

definiert. Als Funktionen von τ können sie durch obige Reihe $(*)$ berechnet werden. Da in vertikalen Streifen $|Re(\tau)| \le C$ mit $Im(\tau) \ge c > 0$ (als Fundamentalmenge) die Summanden von $(*)$ gleichmässig abgeschätzt werden können, vertauscht der Limes $Im(\tau) \to \infty$ mit der Reihensummation. Für $\omega_1 = \frac{1}{2}$ erhält man die konvergente Summe

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} e_1(\tau) = \omega_1^{-2} + \sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} \left[(\omega_1+n)^{-2} - n^{-2}\right] = -8\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^{-2}$$

und für $i = 2,3$ erhält man die konvergente Summe

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} e_i(\tau) = -\sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} n^{-2}\ .$$

Daraus folgt $\lim_{Im(\tau)\to\infty}\Delta(\tau) = 0$ wegen $\lim_{Im(\tau)\to\infty}(e_2(\tau) - e_3(\tau))^2 = 0$. Aus der Konvergenz und dem Nichtverschwinden von

$$\lim_{Im(\tau)\to\infty} g_2(\tau) = 140 \lim_{Im(\tau)\to\infty} \sum_{\gamma\neq 0}\gamma^{-6} = 280\sum_{n=1}^{\infty} n^{-6}$$

für $g_2(\tau) := g_2(\Gamma)$, $\Gamma = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}\tau$ ergibt sich

$$\boxed{\lim_{Im(\tau)\to\infty}|j(\tau)| = \lim_{Im(\tau)\to\infty}\left|\frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}\right| = \infty}\ .$$

Verallgemeinerung: Anstelle der 2-Teilungspunkte $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ kann man für eine natürliche Zahl $N \ge 2$ die N-Teilungspunkte

$$\omega_{a,b} = \frac{a}{N} + \frac{b}{N}\tau$$

betrachten für $a, b \in \mathbf{Z}$ mit $(a,b) \notin N\cdot\mathbf{Z}^2$. Die komplexen Zahlen $\wp(\omega_{a,b})$ sind dann wohldefiniert und definieren in Abhängigkeit von τ holomorphe Funktionen $e_{a,b}(\tau)$ auf $\mathbf{H}$. Diese Funktionen hängen nur ab von a, b modulo $N\mathbf{Z}$. Daher ist oBdA $0 \le a \le N-1$ und $0 \le b \le N-1$.

Es gilt

$$\lim_{\tau\to+\infty} e_{a,0}(\tau) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}(\frac{a}{N}+n)^{-2} - \sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} n^{-2}$$

und $\lim_{\tau\to+\infty} e_{a,b}(\tau) = -\sum_{n\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} n^{-2}$ für $1 \le b \le N-1$.

Beachte:

$$f_{(a,b}, a', b'(\tau) = e_{a,b}(\tau) - e_{a',b'}(\tau) = \sum_{\gamma\in\Gamma}[(\omega_{a,b}+\gamma)^{-2} - (\omega_{a',b'}+\gamma)^{-2}]$$

ist wegen $(\omega_{a,b}^2 - \omega_{a',b'}^2 + 2\gamma\omega_{a,b} - 2\gamma\omega_{a,b})/(\omega_{a,b}+\gamma)^2(\omega_{a',b'}+\gamma)^2 \leq c\gamma^{-3}$ für $\gamma \neq 0$ kompakt konvergent in vertikalen Streifen von $\mathbf{H}$. Für $M \in Sl(2,\mathbf{Z})$ gilt für die so definierte Funktionen:

$$\boxed{f_{(a,b),(a',b')}(M\langle\tau\rangle) = (c\tau+d)^2 \cdot f_{(a,b)M,(a',b')M}(\tau)}\ .$$

Dies folgt aus $(n+m\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta})^{-2} = (\gamma\tau+\delta)^2 \cdot ((\gamma\tau+\delta)n + (\alpha\tau+\beta)m)^{-2}$ und $(m,n)M = (m\alpha+n\gamma, m\beta+n\delta)$ für die Matrix $M = (\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix})$. Für $M \equiv id$ modulo N in $Sl(2,\mathbf{Z})$ gilt daher für alle $f = f_{(a,b),(a',b')}$ die Formel

$$f(M\langle\tau\rangle) = (c\tau+d)^2 \cdot f(\tau)\ .$$

f ist daher *Modulformen vom Gewicht 2* zur Kongruenzgruppe $\Gamma[N]$ im später noch zu erläuternden Sinne.