Aufgabe 1

(i) Für $f(x,y) = \begin{pmatrix} -x^3 \\ -y+x^2 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\mathrm{D}f|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$E^0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}, E^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},\ y \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Es gilt in der Notation von Satz 3.29 $A = -1, f(x,y) = x^2, B = 0, g(x,y) = -x^3$ mit $y = \Psi(x)$. Wir erhalten wie in Satz 3.29 (iv) die folgende Gleichung

$$\Psi'(x) \cdot (-x^3) = -\Psi(x) + x^2.$$

(iii) Angenommen, $\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dann gilt $\Psi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$. Eingesetzt in die Gleichung aus (ii) ergibt sich

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^{n+3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2$$
$$\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2}(n-2)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x^2$$

Wir folgern daher $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1$ und für $n \geq 3$ gilt $a_n = (n-2) \cdot a_{n-2}$. Rekursiv ergibt sich $a_{2n} = (n-1)! \cdot 2^{n-1}$. Für den Konvergenzradius erhalten wir schließlich

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} \leq \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(n-1)! \cdot 2^{n-1}}} = 0.$$

(iv) Nach Satz 3.30 und wegen $\sigma(A) = \{-1\} \subset (-\infty, 0)$ genügt es, das Stabilitätsverhalten von 0 bezüglich der reduzierten Gleichung $x' = -x^3$ zu untersuchen. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen ermittelt werden.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{-x^3} = \int \mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2} = t + C \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2t+C}}$$

Für den Anfangswert x_0 erhalten wir $x_0 = x(0) = \frac{1}{\sqrt{C}} \implies C = x_0^{-2}$, wir erhalten $\phi(x_0, t) = \frac{1}{\sqrt{2t + x_0^{-2}}}$.