Modulformen 1 – Übungsgruppe 10. November 2021

Wintersemester 2021/22

A: Besprechung 2.Übungszettel

Aufgabe 1

(a) mod ist offensichtlich ein Homomorphismus. Zu $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ finden wir das gewünschte Element $\left(\begin{smallmatrix} a+kN & b+lN \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ für $k, l \in \mathbb{Z}$ und $c' \equiv c \mod N$ bzw. $d' \equiv d \mod N$. Damit ist φ surjektiv und der Homomorphiesatz für Gruppen liefert:

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = |{}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}/_{\ker(\varphi)}| = |\mathrm{Bild}(\varphi)| = |\mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right)| \ .$$

(b) In der ersten Spalte einer Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{\nu_p}\mathbb{Z})$ wird jede Kombination bis auf den Fall $p \not| \ \mathrm{ggT}(a, b)$ zugelassen. Aus insgesamt $p^{2\nu_p}$ Möglichkeiten müssen wir also $p^{2\nu_p - 2}$ Wahlen entfernen, da für jedes p^2-te Paar $p \,|\, a$ oder $p \,|\, b$ gilt. In der zweiten Spalte dürfen wir auch keine Linearkombination η zulassen, sodass $p \not| \ \mathrm{ggT}(\eta)$ gilt. Hierzu müssen $p^{2\nu_p - 1}$ Möglichkeiten ausgeschlossen werden. Insgesamt ergibt sich also:

$$|\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{\nu_p}\mathbb{Z})| = \underbrace{\left(p^{2\nu_p} - p^{2\nu_p - 2}\right)}_{\#\text{erste Spalte}} \cdot \underbrace{\left(p^{2\nu_p} - p^{2\nu_p - 1}\right)}_{\#\text{zweite Spalte}} = p^{4\nu_p} \cdot \left(1 - p^{-2}\right)\left(1 - p^{-1}\right) \ .$$

(c) Durch $\det : \mathrm{GL}_2\left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p}\mathbb{Z}\right) \to \left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p}\mathbb{Z}\right)^\times$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker(\det) = \mathrm{SL}_2\left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p}\mathbb{Z}\right)$ gegeben. Wegen $\left|\left(\mathbb{Z}/p^{\nu_p}\mathbb{Z}\right)^\times\right| = p^{\nu_p} - p^{\nu_p - 1}$ (Satz 5.3 †) und dem Resultat aus (b) folgt die Gleichheit der Mächtigkeit aus dem Homomorphiesatz.

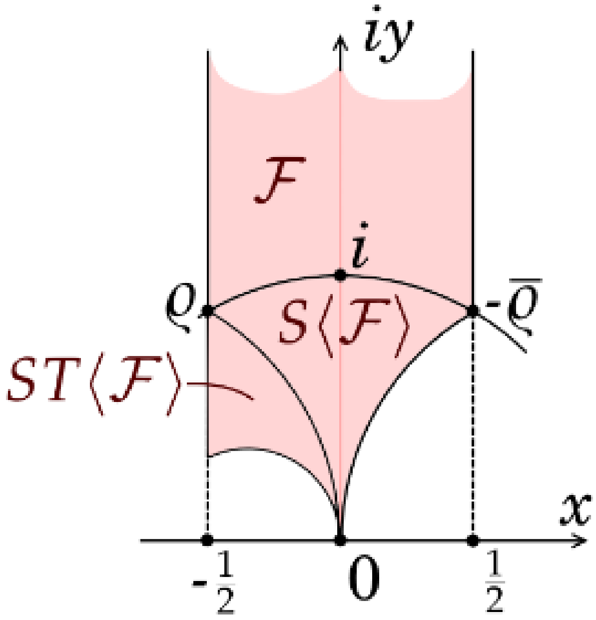
(d) Zu einer Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ findet man ein N mit $\Gamma(N) \subseteq \Gamma$. Mit dem Resultat aus (c) wissen wir, dass $\Gamma(N)$ endlichen Index in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ hat. Die Behauptung folgt mit dem Satz von Lagrange $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] \cdot [\Gamma : \Gamma(N)]$.

Aufgabe 2

(a) Die Aktion $M \circ \mathcal{F}$ auf $\mathbb{H}$ ist wegen $\mathrm{Im}(M\langle z\rangle) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0$ wohldefiniert (Gleichung (1.2)). Da $z \mapsto M\langle z\rangle$ ein Automorphismus auf $\mathbb{H}$ ist, vererbt sich die Topologie auf $\mathcal{F}$ ($\Rightarrow M \circ \mathcal{F}$ abgeschlossen und zusammenhängend). Jeder zu $w \in \mathcal{F}$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-äquivalente Punkt $z \in \mathbb{H}$ ist auch zu $M\langle w\rangle \in M \circ \mathcal{F}$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-äquivalent. Und wenn zwei innere Punkte $z, w \in M \circ \mathcal{F}$ $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-äquivalent wären, so gälte dies auch für $M^{-1}\langle z\rangle$ und $M^{-1}\langle w\rangle$ in $\mathcal{F}$ (↯).

---

† © Vorlesung „Primzahlen - Eine Einführung in die Zahlentheorie“ von Prof. Dr. Otto Forster zum SS 2008



Aufgabe 3

(a) Wir zeigen zunächst, dass $[0]$ und $[\infty]$ Spitzenklassen von $\Gamma_0(p)$ sind und überprüfen, ob diese verschieden sind. Da alle Spitzen in $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ liegen (Proposition 1.31) genügt es zu zeigen, dass jede Restklasse $[s]$ mit $s = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}^*$ mit $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$ in genau diesen Bahnen liegt.
1.Fall: p teilt y, dann existiert ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $cp = y$ und nach dem Euklidischen Algorithmus existieren $b, d \in \mathbb{Z}$ mit $dx + by = 1$. Wir setzen $M := \begin{pmatrix} x & -b \\ cp & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$ mit $M\langle\infty\rangle = s$
2.Fall: p teilt y nicht, dann gilt $\mathrm{ggT}(p, y) = 1$ und auch $\mathrm{ggT}(xp, y) = 1$. Gleichermaßen existieren $b, d \in \mathbb{Z}$ mit $dy + bxp = 1$. Dann folgt $M := \begin{pmatrix} d & x \\ -bp & y \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$ mit $M\langle 0\rangle = s$.

(b) Analog zu (a) finden wir, dass jede Restklasse $[s]$ mit $s = \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}^*$ mit $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$ in den Bahnen von $[0], [\infty]$ und $[-\frac{1}{kp}]$ mit $k \in \{1, \cdots, p-1\}$ liegen muss.
1.Fall: p^2 teilt y, dann liegt s in der Bahn von ∞.
2.Fall: p teilt y und p^2 teilt y nicht, dann betrachte man eine Matrix $M \in \Gamma_0(p^2)$ in der Form $M = \begin{pmatrix} x & b \\ y & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2kp+1 & 2 \\ kp & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kp(2x+b)+x & 2x+b \\ kp(2y+d)c & 2y+d \end{pmatrix}$, sodass $M\langle -\frac{1}{kp}\rangle = s$ gilt.
3.Fall: p teilt y nicht, dann ist $\bar{y}$ eine Einheit von $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ und liegt in der Bahn von 0.
Es bleibt nachzuweisen, dass die Bahnen echt verschieden sind. Hier kann man zeigen:

- $\nexists N \in \Gamma_0(p^2)$ mit $N\langle\infty\rangle = \mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{s} \in \{0, -\frac{1}{kp}\}$.
- $\nexists N \in \Gamma_0(p^2)$ mit $N\langle 0\rangle = -\frac{1}{kp}$.
- $\nexists N \in \Gamma_0(p^2)$ mit $N\langle -\frac{1}{k_1 p}\rangle = -\frac{1}{k_2 p}$ für $k_1 \neq k_2$.

B: Übungsaufgaben

Sei p prim.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrizen $ST^k = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ für $0 \leq k \leq p-1$, zusammen mit I_2, ein Vertretersystem von Rechtsnebenklassen für $\Gamma_0(p)$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ darstellen.

(b) Folgern Sie aus (a), dass $\begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ für $0 \leq k \leq p-1$, zusammen mit I_2, ein Vertretersystem von Linksnebenklassen für $\Gamma_0(p)$ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ darstellt.