Funktionalanalysis - Übungsblatt 3

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 10. November 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Aufgabe 3.1 4 Punkte

Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen für einen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ äquivalent sind:

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) $\overline{B_1(0)} \subset X$ ist kompakt.

(iii) Jede beschränkte Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.2 b).

Aufgabe 3.2 4 Punkte

Es sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum und $\|\cdot\|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm. Zeigen Sie die Polarisationsidentitäten, d.h. für alle $v, w \in V$

$$
\begin{aligned}
&(i)\ \langle v|w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right) && (\mathbb{K} = \mathbb{R})\\
&(ii)\ \langle v|w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \imath\|v+\imath w\|^2 + \imath\|v-\imath w\|^2\right) && (\mathbb{K} = \mathbb{C})
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.3 4 Punkte

Die sogenannten Legendre-Polynome $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien gegeben durch

$$P_n(x) := \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n (x^2-1)^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass $P_n \in C([-1,1])$ tatsächlich Polynome vom Grad n sind mit

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \qquad \forall\, x \in [-1,1].$$

(b) Betrachten Sie auf $C([-1,1])$ das Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

(Sie müssen nicht zeigen, dass es sich tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt). Zeigen Sie, dass P_n orthogonal zu den Monomen $x \mapsto x^m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ ist.

(c) Folgern Sie, dass $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ im Prähilbertraum $(C([-1,1]), (\cdot,\cdot))$ ein Orthonormalsystem darstellt, d.h. dass $(P_n, P_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4 4 Punkte

Sei L die lineare Hülle aller Funktionen $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $e_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h.

$$L = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } k \in \{1, ..., n\} : a_k, \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass L mit

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(x)^* g(x) \, \mathrm{d}x \qquad \forall\, f, g \in L$$

zu einem Prähilbertraum über $\mathbb{C}$ wird.
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Eulersche Darstellungsformeln für die trigonometrischen Funktionen.

(b) Sei H eine Vervollständigung von L bezüglich der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Norm $\| \cdot \|$. Zeigen Sie

$$\|e_\lambda - e_\mu\|^2 = 2 \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq \mu$$

und folgern Sie, dass H nicht separabel ist.