INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 10 | 03. Juli 2020

Abgabe bis Fr. 10.07.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- In den beiden Aufgaben 10.1 und 10.2 müssen Anfangswertprobleme gelöst werden. Dies war nicht Teil der Vorlesung, sondern wurde in der Zentralübung vom 02. Juli 2020 besprochen. Das Lösen von linearen oder separierbaren eindimensionalen Differentialgleichungen 1. Ordnung ist ein klausurrelevantes Thema. Ausnahmsweise ist also der Inhalt der Zentralübung klausurrelevant!

Themen:

- Lineare Differentialgleichungen
- Separierbare Differentialgleichungen
- Existenz und Eindeutigkeit von Lsg.
- Stabilität von Lösungen von DGLn

Aufgabe 10.1 (6 Punkte): Newtonsches Abkühlgesetz

MOTIVATION:

Das Newtonsche Abkühlgesetz besagt, dass die Abkühlrate $T'(t)$ eines gut wärmeleitenden Körpers zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ proportional ist zur Differenz zwischen seiner Temperatur $T(t) \in \mathbb{R}$ und der (in dieser Aufgabe als konstant angenommenen) Umgebungstemperatur T_a. Das heißt es gilt

$$T'(t) = k\left(T(t) - T_a\right), \ t \in [0, \infty),$$

mit einer Konstanten $k < 0$. Bezeichne weiter $T(0)$ die Anfangstemperatur des Körpers zum Startzeitpunkt $t_0 = 0$.

AUFGABE:

(a) Man bestimme die nichtkonstante Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} T'(t) &= k\left(T(t) - T_a\right), \ t \in [0, \infty), \\ T(0) &= T_0 > T_a. \end{aligned}$$ 3

(b) Wie lange dauert es, bis ein Körper bei einer Außentemperatur von $T_a = 20°$ auf $30°$ abgekühlt ist, wenn $T(0) = 100°$ und $T(20) = 60°$ ist? 2

(c) Man bestimme $\lim_{t\to\infty} T(t)$ für die Lösung $T(t)$ des Anfangswertproblems mit den speziellen Daten aus Aufgabenteil (b). 1

Bemerkung: Es darf ohne Beweis angenommen werden, dass $T(t) > T_a$ für alle $t \in [0, \infty)$. Je nach Lösungsweg ist diese Annahme aber gar nicht notwendig, also nicht wundern, wenn Ihr sie nicht braucht.

Bemerkung: Einheiten können in der ganzen Aufgabe vernachlässigt werden.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte): Nichtlineare Differentialgleichung

Man bestimme die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(t) &= -2t(1 + y(t))^2, \ t \in \mathbb{R} \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

für beliebige $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Achtung: Man achte darauf, dass alle Ausdrücke stets wohldefiniert sind und mache ggf. Fallunterscheidungen.

Aufgabe 10.3 (5 Punkte): Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von DGLn

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= (1 + |y(t)|)^{-1}, \ t \in [0, b], \\ y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

wobei $y : [0, b] \to \mathbb{R}$ und $b > 0$.

(a) Man zeige mithilfe des Satzes von Peano, dass eine Lösung $y : [0, b] \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems existiert. Man zeige also insbesondere, dass diese eine Lösung für alle $t \in [0, b]$ wohldefiniert ist und die gegebene Differentialgleichung erfüllt. $\boxed{2}$

(b) Man zeige weiter, dass diese Lösung y für festes $y_0 \in \mathbb{R}$ eindeutig ist. $\boxed{2}$

(c) Sei nun zusätzlich $v : [0, b] \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} v'(t) &= (1 + |v(t)|)^{-1}, \ t \in [0, b], \\ v(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Man zeige, dass

$$|y(t) - v(t)| \leq e^t \, |y_0 - v_0| \ \ \forall t \in [0, b].$$ $\boxed{1}$

Aufgabe 10.4 (5 Punkte): Uneindeutigkeit von Lösungen von DGLn

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= 3(y(t))^{\frac{2}{3}}, \ t \in I \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges abgeschlossenes Intervall mit $0 \in I$ ist.

(a) Man zeige, dass mehrere verschiedene Lösungen für dieses Anfangswertproblem existieren. $\boxed{1}$

(b) Warum widerspricht dies nicht dem Eindeutigkeitssatz aus der Vorlesung? Man begründe die Antwort. $\boxed{2}$

(c) Man zeige weiter, dass sogar unendlich viele verschiedene Lösungen für dieses Anfangswertproblem existieren. $\boxed{2}$