Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2020/21

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. M. Leonhardt

Blatt 07 — Wiederholungsblatt
Keine Abgabe. Lösungsskizze am 15.01.2021

Aufgabe 1. *(Bewertung)* Es sei R ein faktorieller Ring, Q sein Quotientenkörper und $\pi \in R$ ein Primelement. Wir definieren die Funktion $v_\pi \colon Q^\times \to \mathbb{Z}$ dadurch, dass $v_\pi(x)$ der Exponent von π in der (eindeutigen) Primfaktorzerlegung von $x \in Q^\times$ ist, und setzen $v_\pi(0) := \infty$. Zeigen Sie, dass v_π eine *Bewertung* von Q ist, d.h. dass für alle $a, b \in Q$ gilt:

(a) $v_\pi(ab) = v_\pi(a) + v_\pi(b)$.

(b) $v_\pi(a+b) \geq \min\{v_\pi(a), v_\pi(b)\}$.

Zeigen Sie außerdem:

(c) Falls $v_\pi(a) \neq v_\pi(b)$, so gilt Gleichheit in (b).

Aufgabe 2. *(Irreduzible Polynome)* Zeigen Sie, dass folgende Polynome irreduzibel sind:

(a) $f = X^3 - 2X^2 + X + 42 \in \mathbb{Q}[X]$.

(b) $f = X^4 - Y^4 + Y^3X + Y^2X^2 + 25X - 15 \in \mathbb{Q}[X, Y]$.

(c) $f = Y^2 - X^3 \in \mathbb{C}[X, Y]$.

Aufgabe 3. *(Körpererweiterungen)*

(a) Es sei K ein nicht-vollkommener Körper mit $\mathrm{char}(K) = p$ und L/K eine endliche Erweiterung. Kann es sein, dass der Separabilitätsgrad $[L : K]_s$ durch p teilbar ist?

(b) Wir betrachten die Erweiterung $L = \mathbb{Q}(\{2^{\frac{1}{2^n}} \mid n \in \mathbb{N}\})$ über $\mathbb{Q}$. Ist die Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ algebraisch? Ist sie separabel? Ist sie endlich? Bestimmen Sie die normale Hülle von L über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4. *(Endliche Körper)*

(a) Es seien $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{F}}_2$ mit Minimalpolynomen $f(X) = X^3 + X^2 + 1$ bzw. $g(X) = X^3 + X + 1$ über $\mathbb{F}_2$. Geben Sie einen expliziten Körperisomorphismus zwischen $\mathbb{F}_2(\alpha)$ und $\mathbb{F}_2(\beta)$ an.

(b) Es sei p eine Primzahl, $q = p^d$ und γ ein Erzeuger der zyklischen Gruppe $\mathbb{F}_q^\times$. Zeigen Sie

$$\mathbb{F}_p(\gamma) = \mathbb{F}_q.$$