Übungsblatt 4

Abgabetermin: 18.05.2017, 9:20 Uhr.

Auf dem gesamten Übungsblatt bezeichne K einen Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$.

Aufgabe 1 *(2+2+2 = 6 Punkte)*

a) Sei γ eine Bilinearform auf einem Vektorraum V. Zeigen Sie: Es existiert eine symmetrische Bilinearform γ_s und eine antisymmetrische Bilinearform γ_a mit $\gamma(v, w) = \gamma_s(v, w) + \gamma_a(v, w)$ für alle $v, w \in V$.

b) Untersuchen Sie die folgende Bilinearform (Beispiel 20.2.(b) der Vorlesung) auf die Eigenschaften „symmetrisch“, „antisymmetrisch“, „alternierend“, „nichtausgeartet“ und „perfekt“: $K = \mathbb{R}$, $V = \mathcal{C}[0, 1], \gamma(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

c) Sei γ eine perfekte Bilinearform auf eine Vektorraum V. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Für jeden Untervektorraum $W \subseteq V$ definiert die Einschränkung $\gamma| W \times W$ eine perfekte Bilinearform auf W.

Aufgabe 2 *(2+2 = 4 Punkte)*

Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Wir definieren den Polynomring in n Variablen induktiv per $K[X_1, \ldots, X_n] = (K[X_1, \ldots, X_{n-1}])[X_n]$. Ein Polynom $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ heisst homogen von Grad m, wenn es eine Linearkombination von Monomen der Form $X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_m}$ (für geeignete $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$) ist.

a) Zeigen Sie: Es existieren Bijektionen zwischen den folgenden Mengen:

- { homogene Polynome von Grad 2 in $K[X_1, \ldots, X_n]$};
- { symmetrische Bilinearformen auf K^n };
- { symmetrische Matrizen in $M(n \times n, K)$}.

b) Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V = n < \infty$. Man gebe eine Formel für $\dim_K(\mathrm{Quad}(V))$ in Abhängigkeit von n an.

Bitte wenden

Aufgabe 3 *(2+2+2 = 6 Punkte)*

Seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume. $q_V \in \mathrm{Quad}(V)$ und $q_W \in \mathrm{Quad}(W)$ heißen äquivalent genau dann, wenn ein Vektorraum-Isomorphismus $f : V \to W$ existiert mit $q_W \circ f = q_V$.

a) Zeigen Sie: q_V und q_W sind äquivalent genau dann, wenn die quadratischen Räume (V, γ_{q_V}) und (W, γ_{q_W}) isomorph sind.

b) Sei $\dim(V) = n$ und sei $q \in \mathrm{Quad}(V)$ mit $\mathrm{Rang}(\gamma_q) = r$. Zeigen Sie: Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K \backslash \{0\}$ so dass q äquivalent ist zu

$$q' : K^n \to K, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2.$$

c) Sei $K = \mathbb{R}, \dim_K(V) = n, q \in \mathrm{Quad}(V)$. Zeigen Sie: Es existieren $r_+, r_- \in \mathbb{N}_0$ so dass q äquivalent ist zu

$$q' : K^n \to K, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + \ldots + x_{r_+}^2 - x_{r_++1}^2 - \ldots - x_{r_++r_-}^2.$$

Die Zahlen r_+, r_- sind durch q eindeutig bestimmt.