Aufgabe 3

Es gitl

$$\frac{\|t+y_1-(t+y_2)\|}{\|y_1-y_2\|}=1<\infty,$$

insbesondere ist $t+y$ lokal Lipschitz-stetig bzgl. y und Picard-Lindelöf ist anwendbar. Es gilt $K(y)(t)=0+\int_0^t y+s\mathrm{d}s=\int_0^t y\mathrm{d}s+\frac{t^2}{s}$.

Induktionsanfang: Es gilt $y_1(t)=\frac{t^2}{2}$.

Induktionsannahme: $y_n=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{t^k}{k!}$.

Induktionsschluss: $y_{n+1}=\int_0^t\sum_{k=2}^{n+1}\frac{s^k}{k!}\mathrm{d}s+\frac{t^2}{2}=\sum_{k=2}^{n+2}\frac{t^k}{k!}$. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=e^t-t-1$.

Aufgabe 4

(a) Ist das nicht genau die Definition von Lipschitz-stetig?

(b) Seien π_1 bzw. π_2 die Projektionen auf die t-Komponente von D bzw. die y-Komponente von D. Wähle U derart, dass $U\subset K\subset D$ für ein Kompaktum K. Sei K_t die Ableitung von f an der Stelle t. Dann nimmt $K(t)$ als stetige Abbildung auf einem Kompaktum ein Maximum an, $\sup_{t\in\pi_1(U)}K_t\le C$. Wähle ein U derart, dass $\forall t$

$$\sup_{y_1\ne y_2\in\pi_2(U)}\frac{\|f(t,y_1)-f(t,y_2)-K_t(y_1-y_2)\|}{\|y_1-y_2\|}\le 1.$$

Ein solches U existiert, weil nach Definition der Ableitung für eine Folge von offenen Mengen U_i mit absteigendem Durchmesser $\lim\limits_{i\to\infty}\operatorname{diam}(U_i)=0$ dieser Ausdruck gegen 0 geht. Wir erhalten dann insgesamt

$$\begin{aligned}
L^* &= \sup_{(t,y_1)\ne(t,y_2)\in U}\frac{\|f(t,y_1)-f(t,y_2)\|}{\|y_1-y_2\|}\\
&= \sup_{t\in\pi_1(U)}\sup_{y_1\ne y_2\in\pi_2(U)}\frac{\|f(t,y_1)-f(t,y_2)\|}{\|y_1-y_2\|}\\
&\overset{\Delta-\text{UGL}}{\le} \sup_{t\in\pi_1(U)}\sup_{y_1\ne y_2\in\pi_2(U)}\underbrace{\frac{\|f(t,y_1)-f(t,y_2)-K_t(y_1-y_2)\|}{\|y_1-y_2\|}}_{<1}+\frac{\|K_t(y_1-y_2)\|}{\|y_1-y_2\|}\\
&< \sup_{t\in\pi_1(U)}1+\|K_t\|\le 1+C\\
&<\infty
\end{aligned}$$