

# Modulformen 1

Wintersemester 2021

Vorlesungsskript

Dr. Hendrik Kasten

20. Juli 2021

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Möbius-Transformationen</b>	<b>3</b>
1.1	Die Gruppe der Möbius-Transformationen . . . . .	3
1.2	Fixpunkte von Möbius-Transformationen . . . . .	6
1.3	Gruppenaktionen via Möbius-Transformationen . . . . .	10
1.4	Die volle Modulgruppe . . . . .	15
1.5	Kongruenzuntergruppen . . . . .	21
1.6	Übungsaufgaben . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Der Begriff der Modulform</b>	<b>31</b>
2.1	Fourier-Entwicklungen . . . . .	31
2.2	Die elementare Theorie . . . . .	35
2.3	Die Valenzformel . . . . .	41
2.4	Das Petersson-Skalarprodukt . . . . .	50
2.5	Übungsaufgaben . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Modulformen zur vollen Modulgruppe</b>	<b>59</b>
3.1	Eisenstein-Reihen . . . . .	59
3.2	Der Struktursatz für holomorphe Modulformen . . . . .	67
3.3	Poincaré-Reihen . . . . .	71
3.4	Der Struktursatz für meromorphe Modulformen . . . . .	77
3.5	Übungsaufgaben . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Hecke-Theorie</b>	<b>83</b>
4.1	Die allgemeine Hecke-Algebra . . . . .	83
4.2	Die Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe . . . . .	89
4.3	Hecke-Operatoren . . . . .	96
4.4	Hecke-Eigenformen . . . . .	100
4.5	Algebraizität der Fourier-Koeffizienten normierter Hecke-Eigenformen . . . . .	106
4.6	Übungsaufgaben . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Der Eichler-Shimura-Isomorphismus</b>	<b>112</b>
5.1	Die Polynomdarstellung . . . . .	112
5.2	Das Shimura-Produkt . . . . .	118

---

5.3	Der Eichler-Shimura-Isomorphismus . . . . .	124
5.4	Übungsaufgaben . . . . .	137
<b>6</b>	<b>Manins Periodensatz</b> . . . . .	<b>139</b>
6.1	Perioden von Spitzenformen . . . . .	139
6.2	Kettenbrüche . . . . .	143
6.3	Perioden und Hecke-Operatoren . . . . .	154
6.4	Das Lemma von Heilbronn . . . . .	156
6.5	Der Periodensatz . . . . .	162

---

## Möbius-Transformationen

---

In diesem Kapitel behandeln wir mit den Möbius-Transformationen eine spezielle Klasse von Abbildungen, die für die Theorie der Modulformen von grundlegender Bedeutung sind. Erstmals systematisch untersucht wurden die Möbius-Transformationen von ihrem Namensgeber AUGUST FERDINAND MÖBIUS (1790 - 1868).

### 1.1 Die Gruppe der Möbius-Transformationen

Für eine beliebige invertierbare komplexe  $(2 \times 2)$ -Matrix

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \mid \det A \neq 0\}$$

ist durch

$$\varphi_M(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ \infty & \text{für } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

für  $c \neq 0$  beziehungsweise

$$\varphi_M(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{d} & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für  $c = 0$  eine meromorphe Funktion  $\varphi_M$  auf  $\overline{\mathbb{C}}$  gegeben,

denn: Im Fall  $c = 0$  ist  $\varphi_M$  offensichtlich ein Polynom von Grad  $n = 1$  und insbesondere eine meromorphe Funktion auf  $\overline{\mathbb{C}}$ . Im Fall  $c \neq 0$  ist  $\varphi_M|_{\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}}$  holomorph, und  $-\frac{d}{c}$  wegen

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{c} \cdot \frac{1}{z - (-\frac{d}{c})} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(-\frac{d}{c}), \text{ } r \text{ hinreichend klein,}$$

ein Pol erster Ordnung. Hierbei ist zu beachten, dass  $\frac{az+b}{cz+d}$  für  $z = -\frac{d}{c}$  wegen  $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  von Null verschieden ist.  $\varphi_M|_{\mathbb{C}}$  ist also eine meromorphe Funktion auf  $\mathbb{C}$ . Desweiteren gilt auf einer kleinen Umgebung von  $z = 0$  in  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$

$$\hat{\varphi}_M(z) = \varphi_M\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a\frac{1}{z} + b}{c\frac{1}{z} + d} = \frac{a + bz}{c + dz} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{a}{c},$$

die Singularität von  $\varphi_M$  in  $\infty$  ist also hebbar. #

**Definition 1.1.** Für  $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  beliebig heißt die so definierte meromorphe Funktion  $\varphi_M$  eine **Möbius-Transformation**.

Nach Konstruktion gilt offensichtlich

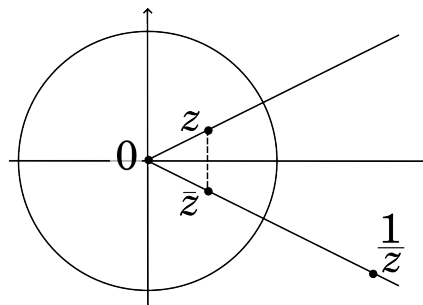
$$\varphi_{\lambda M} = \varphi_M \quad \text{für alle } M \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) \text{ und } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Es gibt insbesondere keinen Eins-zu-eins-Zusammenhang zwischen Matrizen aus  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  und Möbius-Transformationen.

**Beispiel 1.2.** Wählen wir

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}),$$

so erhalten wir die Möbius-Transformation  $z \mapsto \frac{1}{z}$ , die insbesondere  $M\langle 0 \rangle = \infty$  und  $M\langle \infty \rangle = 0$  erfüllt.



Veranschaulichen können wir uns diese als Hintereinanderausführung der Spiegelung an der reellen Achse und der Inversion am Einheitskreis.

**Proposition 1.3.** (a) Für alle  $M, N \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  gilt  $\varphi_M \circ \varphi_N = \varphi_{MN}$ .

(b) Für alle  $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  ist  $\varphi_M$  bijektiv mit Umkehrabbildung  $(\varphi_M)^{-1} = \varphi_{M^{-1}}$ .

(c) Die Möbius-Transformationen bilden bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

*Beweis.* Behauptung (b) folgt aus (a), wenn man dort  $M^{-1}$  für  $N$  einsetzt, und Behauptung (c) folgt aus (a) und (b),

denn: Die Assoziativität der Hintereinanderausführung folgt aus (a) und der Assoziativität der Matrizenmultiplikation.  $\varphi_{I_2} = \text{id}$  ist offensichtlich das neutrale Element. Nach (b) hat jede Möbius-Transformation schließlich ein Inverses. #

Behauptung (a) kann man schließlich direkt nachrechnen. Mit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

gilt nämlich außerhalb der Sonderfälle

$$\begin{aligned} (\varphi_M \circ \varphi_N)(z) &= \varphi_A\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) = \frac{a \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + b}{c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d} \\ &= \frac{a(a'z + b') + b(c'z + d')}{c(a'z + b') + d(c'z + d')} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \\ &= \varphi_{MN}(z). \end{aligned}$$

Den Rest rechnet man analog nach. (vgl. Übungsaufgabe 1.1) □

Geometrisch sind drei spezielle Typen von Möbius-Transformationen interessant, die wir nun untersuchen wollen. Da man alle anderen Möbius-Transformationen auf diese zurückführen kann, nennt man sie **Elementartypen**. Diese sind

**Die Inversion.** Der erste Elementartyp ist die bereits studierte Inversion aus Beispiel 1.2.

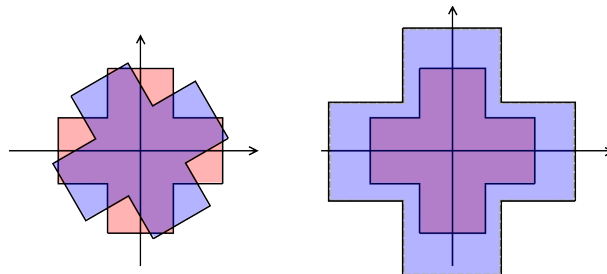
**Drehstreckungen.** Für

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ist durch

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} az & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

eine Drehstreckung mit Drehwinkel  $\varphi \in \mathbb{R}$  und Streckungsfaktor  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  gegeben.



**Verschiebungen.** Für

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit einem beliebigen } b \in \mathbb{C}$$

ist durch

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} z + b & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

eine Verschiebung um den festen Vektor  $b$  gegeben.

**Proposition 1.4.** *Die Gruppe der Möbius-Transformationen wird von den Elementartypen erzeugt.*

*Beweis.* Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Ist hierbei  $c = 0$ , so gilt

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & \text{für } z \neq \infty, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

und wir können  $\varphi_M$  als Hintereinanderausführung einer Drehstreckung und einer Translation darstellen.

Ist  $c \neq 0$ , so errechnet man sofort

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} & \text{für } z \notin \{-\frac{d}{c}, \infty\}, \\ \infty & \text{für } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

Dies lässt sich auf folgende Weise aus Inversionen, Drehstreckungen und Translationen zusammensetzen.

$$z \mapsto cz \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{bc - ad}{c(cz + d)} \mapsto \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)} = \varphi_M(z);$$

die beiden Sonderfälle überprüft man wieder separat. (vgl. Übungsaufgabe 1.2) □

## 1.2 Fixpunkte von Möbius-Transformationen

**Definition 1.5.** Sei  $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . Ein Punkt  $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$  heißt **Fixpunkt** bezüglich der Möbius-Transformation  $\varphi_M$ , falls  $\varphi_M(z_0) = z_0$  gilt.

**Beispiel 1.6.** (a) Für  $M = I_2$  ist jeder Punkt Fixpunkt von  $\varphi_M$ .

(b) Für  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  hat  $\varphi_M$  genau einen Fixpunkt, nämlich  $z_0 = \infty$ .

(c) Für  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  hat  $\varphi_M$  genau zwei Fixpunkte, nämlich  $z_0 = \infty$  und  $z_1 = -1$ .

**Proposition 1.7.** Jede von der Identität verschiedene Möbius-Transformation hat entweder genau einen oder genau zwei Fixpunkte.

*Beweis.* Sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$  mit  $\varphi_M \neq \text{id}$ .

**Fall 1:**  $c = 0$ . Nach Definition ist dann  $\infty$  ein Fixpunkt von  $\varphi_M$  und wegen  $d \neq 0$  können wir

$$\varphi_M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad \text{für alle } z \neq \infty$$

schreiben. Für  $a = d$  hat dies keinen weiteren Fixpunkt,

denn: Für  $b \neq 0$  ist dies klar, da wir so eine Translation um  $\frac{b}{d} \neq 0$  erhalten. Andererseits kann nicht gleichzeitig  $c = 0$ ,  $a = d$  und  $b = 0$  gelten, da sonst  $M$  als skalares Vielfaches der Einheitsmatrix trivial operierte, was wir in unserer Voraussetzung ausgeschlossen hatten. #

Nehmen wir also  $a \neq d$  an. Dann gilt

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ Fixpunkt von } \varphi_M \iff \frac{a}{d}z_0 + \frac{b}{d} = z_0 \iff z_0 = \frac{b}{d-a}.$$

In diesem Fall hat also  $\varphi_M$  genau einen oder genau zwei Fixpunkte.

**Fall 2:**  $c \neq 0$ . In diesem Fall ist weder  $\infty$  noch  $-\frac{d}{c}$  ein Fixpunkt von  $\varphi_M$ . Betrachten wir also  $z \notin \{-\frac{d}{c}, \infty\}$ . Ähnlich wie in Fall 1 gilt dann

$$\begin{aligned} z_0 \text{ Fixpunkt von } \varphi_M &\iff \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0 \\ &\iff cz_0^2 + (d-a)z_0 - b = 0 \\ &\iff z_0^2 + \frac{d-a}{c}z_0 - \frac{b}{c} = 0 \\ &\iff \left(z_0 + \frac{d-a}{2c}\right)^2 = \frac{b}{c} + \frac{(d-a)^2}{4c^2}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat genau dann zwei komplexe Lösungen für  $z_0 + \frac{d-a}{2c}$  und somit auch für  $z_0$ , falls die rechte Seite ungleich Null ist. Ist andererseits die rechte Seite gleich Null, so ist offensichtlich  $z_0 = -\frac{d-a}{2c}$  die einzige Lösung. Auch in diesem Fall hat also  $\varphi_M$  genau einen oder genau zwei Fixpunkte.  $\square$

**Korollar 1.8.** Jede Möbius-Transformation ist durch die Angabe der Bilder dreier verschiedener Punkte eindeutig festgelegt.

*Beweis.* Seien  $\varphi$  und  $\psi$  Möbius-Transformationen und seien  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  mit

$$\varphi(z_k) = \psi(z_k) \quad \text{für } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Da die Möbius-Transformationen nach Proposition 1.3 eine Gruppe bilden, ist  $\psi^{-1} \circ \varphi$  wieder eine Möbius-Transformation. Diese hat nach Konstruktion die drei Fixpunkte  $z_1, z_2, z_3$ , ist nach Proposition 1.7 also die Identität. Es folgt  $\psi = \varphi$  und somit das Korollar.  $\square$



An dieser Stelle ist die offensichtliche nächste Frage, ob es andersherum auch für vorgegebene Bilder von drei Punkten  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  immer eine Möbius-Transformation gibt, die diese annimmt. Zur Beantwortung dieser Frage müssen wir ein wenig ausholen.

**Proposition 1.9.** *Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  paarweise verschiedene Punkte und  $z \in \mathbb{C}$  ein weiterer Punkt. Seien weiter Abbildungen gegeben wie folgt:*

Für  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ :

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{(z-z_2)(z_1-z_3)}{(z-z_3)(z_1-z_2)} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = z_3, \\ \frac{z_1-z_3}{z_1-z_2} & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für  $z_1 = \infty$ :

$$DV(z, \infty, z_2, z_3) := \begin{cases} \frac{z-z_2}{z-z_3} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = z_3, \\ 1 & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für  $z_2 = \infty$ :

$$DV(z, z_1, \infty, z_3) := \begin{cases} \frac{z_1-z_3}{z-z_3} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = z_3, \\ 0 & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

für  $z_3 = \infty$ :

$$DV(z, z_1, z_2, \infty) := \begin{cases} \frac{z-z_2}{z_1-z_2} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}, \\ \infty & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

In jedem Fall ist  $DV(z, z_1, z_2, z_3)$  eine Möbius-Transformation mit

$$DV(z_1, z_1, z_2, z_3) = 1, \quad DV(z_2, z_1, z_2, z_3) = 0 \quad \text{und} \quad DV(z_3, z_1, z_2, z_3) = \infty. \quad (1.1)$$

Für  $z \notin \{z_1, z_2, z_3\}$  heißt die Zahl  $DV(z, z_1, z_2, z_3)$  das **Doppelverhältnis** der Punkte  $z, z_1, z_2, z_3$ .

**Bemerkung 1.10.** (a) Die Spezialfälle für  $z_k = \infty$  mit einem  $k \in \{1, 2, 3\}$  ergeben sich aus dem endlichen Fall durch den Grenzübergang  $z_k \rightarrow \infty$ .

(b) Nach Korollar 1.8 ist  $DV(z, z_1, z_2, z_3)$  für gegebene  $z_1, z_2, z_3$  die einzige Möbius-Transformation, die (1.1) erfüllt.

**Beweis (Proposition 1.9).** Wir zeigen die Proposition nur im Fall  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Die Fälle, in denen einer der Punkte  $z_1, z_2, z_3$  gleich  $\infty$  ist, behandelt man genauso (vgl. Übungsaufgabe 1.3).

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} z_1 - z_3 & -z_2(z_1 - z_3) \\ z_1 - z_2 & -z_3(z_1 - z_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Da nach Voraussetzung die Punkte  $z_1, z_2, z_3$  paarweise verschieden sind, gilt

$$\det M = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3) \neq 0$$

und somit  $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ . Wegen

$$\frac{(z_1 - z_3)z - z_2(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)z - z_3(z_1 - z_2)} = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_3\}$$

stimmt  $DV(z, z_1, z_2, z_3)$  in diesem Fall offensichtlich mit der Möbius-Transformation  $\varphi_M$  überein und erfüllt bereits nach Definition

$$DV(z_3, z_1, z_2, z_3) = \infty.$$

Durch Einsetzen in die Formel der Proposition sieht man zudem sofort

$$\begin{aligned} DV(z_1, z_1, z_2, z_3) &= \frac{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_2)} = 1, \\ DV(z_2, z_1, z_2, z_3) &= \frac{(z_2 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_2)} = 0. \end{aligned}$$

□

**Korollar 1.11.** Sind  $(z_1, z_2, z_3)$  und  $(w_1, w_2, w_3)$  jeweils Tripel paarweise verschiedener Punkte aus  $\overline{\mathbb{C}}$ , so gibt es genau eine Möbius-Transformation  $\varphi$  mit

$$\varphi(z_k) = w_k \quad \text{für } k \in \{1, 2, 3\}.$$

*Beweis.* Nach Proposition 1.9 gibt es durch Doppelverhältnisse definierte Möbius-Transformationen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  mit

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= 1, & \varphi_1(z_2) &= 0, & \varphi_1(z_3) &= \infty, \\ \varphi_2(w_1) &= 1, & \varphi_2(w_2) &= 0, & \varphi_2(w_3) &= \infty. \end{aligned}$$

Da die Möbius-Transformationen nach Proposition 1.3 unter Hintereinanderausführung eine Gruppe bilden, ist auch  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  eine Möbius-Transformation. Nach Konstruktion erfüllt diese die verlangten Eigenschaften. Mit Korollar 1.8 folgt die Eindeutigkeit. □

**Proposition 1.12** (Invarianz des Doppelverhältnisses). Seien  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  paarweise verschieden und  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  beliebig, und sei  $\varphi$  eine beliebige Möbius-Transformation. Dann gilt

$$DV(\varphi(z), \varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3)) = DV(z, z_1, z_2, z_3).$$

*Beweis.* Wie im Beweis von Korollar 1.11 eingesehen lässt sich jede Möbius-Transformation  $\varphi$  schreiben als  $\varphi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  mit zwei durch Doppelverhältnisse gegebenen Möbius-Transformationen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , die

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= 1, & \varphi_1(z_2) &= 0, & \varphi_1(z_3) &= \infty, \\ \varphi_2(\varphi(z_1)) &= 1, & \varphi_2(\varphi(z_2)) &= 0, & \varphi_2(\varphi(z_3)) &= \infty. \end{aligned}$$

erfüllen. Das ist äquivalent zu

$$\varphi_2(\varphi(z)) = \varphi_1(z),$$

was nach Einsetzen der Definitionen von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  die Behauptung ergibt.  $\square$

### 1.3 Gruppenaktionen via Möbius-Transformationen

**Definition 1.13.** Sei  $G = (G, \star)$  eine Gruppe und  $S$  eine Menge. Man sagt dann,  $G$  **operiere** (von links) auf  $S$ ,<sup>1</sup> falls es eine Abbildung

$$\circ : \begin{cases} G \times S & \rightarrow S, \\ (g, s) & \mapsto g \circ s \end{cases}$$

gibt mit

- (i) Das neutrale Element  $e_G$  von  $G$  erfüllt  $e_G \circ s = s$  für alle  $s \in S$ .
- (ii) Es gilt  $(g \star h) \circ s = g \circ (h \circ s)$  für alle  $g, h \in G$  und alle  $s \in S$ .

Weiter nennt man

- $G_s := \{g \in G \mid g \circ s = s\}$  den **Stabilisator** von  $s$  in  $G$ ,
- $G \circ s := \{g \circ s \mid g \in G\}$  die **Bahn** von  $s$  unter  $G$ .

Durch  $t \sim s :\iff t \in G \circ s$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $S$  gegeben, und man hat eine disjunkte Zerlegung

$$S = \bigsqcup_j (G \circ s_j),$$

wobei  $s_j$  ein Vertretersystem der verschiedenen Bahnen durchläuft. Gibt es dabei nur eine Bahn, so nennt man die Aktion von  $G$  auf  $S$  auch **transitiv**.

**Beispiel 1.14.** Die Gruppe  $GL_2(\mathbb{C})$  operiert via Möbius-Transformationen

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbb{C}) \times \overline{\mathbb{C}} &\rightarrow \overline{\mathbb{C}}, \\ (M, z) &\mapsto \varphi_M(z) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Um nicht mit der Verwendung des Wortes „Operation“ ungute Assoziationen zu wecken, werden wir im Folgenden stets von der **Aktion** der Gruppe  $G$  auf der Menge  $S$  sprechen, wenn  $G$  auf  $S$  operiert. Umgekehrt klingt es auch nicht besonders schön zu sagen, die Gruppe  $G$  „agiere“ auf  $S$ . Unsere Notation ist in diesem Fall also eine zusammengesetzte.

transitiv auf der RIEMANN'schen Zahlenkugel<sup>2</sup>  $\overline{\mathbb{C}}$ ,

denn: Dass  $GL_2(\mathbb{C})$  auf  $\overline{\mathbb{C}}$  operiert, folgt mit Teil (a) von Proposition 1.3 und da die Einheitsmatrix offensichtlich trivial operiert. Die Transitivität folgt mit Korollar 1.11. #



Wir wollen nun die Elemente von  $GL_2(\mathbb{C})$  danach klassifizieren, wie sie auf  $\overline{\mathbb{C}}$  operieren.

Nach dem Satz über die JORDAN'sche Normalform<sup>3</sup> aus der Linearen Algebra ist jedes  $M \in GL_2(\mathbb{C})$  zu einer der folgenden Matrizen konjugiert:

- (i)  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ ,
- (ii)  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ ,
- (iii)  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}^\times$ .

In Fall (i) ist hierbei  $\varphi_M$  trivial. In Fall (ii) ist  $\varphi_M$  im Wesentlichen<sup>4</sup> eine Translation

$$z \mapsto \begin{cases} z + \lambda^{-1} & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

und  $M$  heißt *parabolisch*. In Fall (iii) ist die Transformation im Wesentlichen eine Homothetie

$$z \mapsto \begin{cases} cz & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases} \quad \text{mit } c := \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\},$$

und  $M$  heißt *elliptisch*, falls  $|c| = 1$ , *hyperbolisch*, falls  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  und *loxodromisch* sonst. Diese Bezeichnungen gelten nicht nur für die jeweilige Matrix  $M$  sondern auch für die zugehörige Möbius-Transformation  $\varphi_M$ .

Wir beschränken uns nun auf Matrizen aus  $SL_2(\mathbb{C})$  – das ist keine starke Einschränkung, da das Zentrum  $\mathbb{C} \cdot I_2$  ja trivial operiert – und können so die Möbius-Transformationen über die Spur der zugehörigen Matrizen klassifizieren.<sup>5</sup>

**Proposition 1.15.** Sei  $M \in SL_2(\mathbb{C}) \setminus \{\pm I_2\}$ . Dann gilt

$$M \text{ ist } \begin{cases} \text{parabolisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \in \{\pm 2\}, \\ \text{elliptisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ und } |\operatorname{tr}(M)| < 2, \\ \text{hyperbolisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R} \text{ und } |\operatorname{tr}(M)| > 2, \\ \text{loxodromisch} & \iff \operatorname{tr}(M) \notin \mathbb{R}. \end{cases}$$

<sup>2</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

<sup>3</sup>Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

<sup>4</sup>Bis auf den Beitrag der Konjugationsmatrizen: Möbius-Transformationen sind im Allgemeinen nicht konjugationsinvariant. Eine offensichtliche Ausnahme bildet Fall (i), in dem die betrachteten Matrizen im Zentrum liegen.

<sup>5</sup>Das ist naheliegend, da die Spur einer Matrix bekanntlich konjugationsinvariant ist.

*Beweis.* Wegen  $\det M = 1$  und  $M \notin \{\pm I_2\}$  ist die Jordan'sche Normalform von  $M$  von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C}^\times \setminus \{\pm 1\}.$$

Die erste Äquivalenz ist damit offensichtlich und wir müssen uns nur noch mit Matrizen beschäftigen, deren Normalform vom zweiten Typ ist.

Ist nun  $M$  elliptisch, so gilt für das zugehörige  $\lambda$  nach Definition  $|\lambda|^2 = |\frac{\lambda}{\lambda^{-1}}| = 1$ ; es liegt also auf dem Einheitskreis. Mit  $\lambda \notin \{\pm 1\}$  folgt

$$\operatorname{tr}(M) = \lambda + \lambda^{-1} = \lambda + \bar{\lambda} = 2\operatorname{Re}(\lambda) \in (-2, 2) \subseteq \mathbb{R}.$$

Ist  $M$  hyperbolisch, so gilt für das zugehörige  $\lambda$  nach Definition  $\lambda^2 = \frac{\lambda}{\lambda^{-1}} \in \mathbb{R}_{>0}$  und insbesondere  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Es folgt

$$|\operatorname{tr}(M)| = |\lambda| + |\lambda|^{-1} > 2 \iff |\lambda|^2 + 1 > 2|\lambda| \iff (|\lambda| - 1)^2 > 0.$$

Letztere Aussage ist korrekt wegen  $\lambda \notin \{\pm 1\}$ .

Sei nun umgekehrt  $M$  konjugiert zu  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$  mit reeller Spur  $\lambda + \lambda^{-1}$ . Falls  $\lambda$  reell ist, muss  $M$  nach Definition hyperbolisch sein. Ist  $\lambda$  nicht reell, so folgt mit  $\lambda^{-1} = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2}$  sofort  $|\lambda| = 1$  und  $M$  ist elliptisch.

Nebenbei haben wir mit dem letzten Argument gezeigt, dass  $M$  nicht loxodromisch sein kann, wenn seine Spur reell ist. Die letzte Äquivalenz folgt, da die vier Bedingungen auf der rechten Seite sich paarweise gegenseitig ausschließen.  $\square$

Wir schränken uns nun noch weiter auf Matrizen aus  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  ein. Dann gilt:

**Proposition 1.16.** (a) Die Gruppe  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  operiert transitiv auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ .

(b) Die Gruppe  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  operiert transitiv auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

(c)  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})_i = \operatorname{SO}_2(\mathbb{R})$ .

(d) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{SL}_2(\mathbb{R}) / \operatorname{SO}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{H}, \\ M \cdot \operatorname{SO}_2(\mathbb{R}) &\mapsto M\langle i \rangle \end{aligned}$$

ist eine Bijektion von Mengen.<sup>6</sup>

*Beweis.* Als Untergruppe von  $\operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$  operiert  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  auf der Riemann'schen Zahlenkugel  $\bar{\mathbb{C}}$ . Um zu zeigen, dass  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  operiert, langt es daher zu zeigen,

<sup>6</sup>Versieht man  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{R})$  mit der Teilraumtopologie von  $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$ , so wird diese Bijektion sogar zu einem Homöomorphismus.

dass für jedes  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  und jedes  $z \in \mathbb{H}$  der Bildpunkt  $M\langle z \rangle$  wieder in  $\mathbb{H}$  liegt. Das ist der Fall, denn in dieser Situation gilt

$$\mathrm{Im}(M\langle z \rangle) = \mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}\right) \stackrel{\det M=1}{=} \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2} > 0. \quad (1.2)$$

Um die Transitivität der Gruppenaktion zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass es für alle  $z = x + iy \in \mathbb{H}$  ein  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  mit  $M\langle i \rangle = z$  gibt. Das ist der Fall, denn in dieser Situation gilt

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \langle i \rangle = \frac{\sqrt{y}i + \frac{x}{\sqrt{y}}}{\frac{1}{\sqrt{y}}} = x + iy = z.$$

Insgesamt haben wir somit Behauptung (a) gezeigt.

Zum Beweis von Behauptung (b) stellen wir zunächst fest, dass Matrizen aus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  wegen ihrer reellen Einträge offensichtlich Elemente aus  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  wieder in diese Menge abbilden und  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  somit auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  operiert. Die Transitivität der Aktion folgt, da ein beliebiges  $s \in \mathbb{R}$  von  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -s \end{pmatrix}$  nach  $\infty$  geschickt wird.

Wir wollen nun Behauptung (c) zeigen. Zum Einen gilt für ein  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$

$$M\langle i \rangle = i \iff a = d \text{ und } b = -c.$$

Zum Anderen folgt in dieser Situation aus  $\det(M) = 1$  auch  $a^2 + b^2 = 1$  und wir sind fertig.

Behauptung (d) ergibt sich schließlich wie folgt:

$$\mathbb{H} \stackrel{(a)}{\cong} \{ \{ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid M\langle i \rangle = z \} \mid z \in \mathbb{H} \} \stackrel{(c)}{=} \{ M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \mid M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \}.$$

□

Es fällt nun auf, dass es in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  nach Proposition 1.15 keine loxodromischen Elemente geben kann. Die restlichen Typen lassen sich über die Fixpunkte der zugehörigen Möbius-Transformationen klassifizieren.

**Proposition 1.17.** Sei  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ . Dann gilt

$$M \text{ ist } \begin{cases} \text{parabolisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau einen Fixpunkt und dieser liegt in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \\ \text{elliptisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau zwei Fixpunkte, diese sind zueinander konjugiert} \\ & \text{und einer von ihnen liegt in } \mathbb{H}, \\ \text{hyperbolisch} & \iff \varphi_M \text{ hat genau zwei Fixpunkte und diese liegen in } \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \end{cases}$$

<sup>7</sup>Da wir  $z \in \mathbb{H}$  gewählt haben, entfällt die bei Möbius-Transformationen sonst übliche Fallunterscheidung und wir können einheitlich  $M\langle z \rangle = \frac{az+b}{cz+d}$  schreiben.

*Beweis.* Nach Teil (a) von Proposition 1.16 gibt es zu jedem  $z \in \mathbb{H}$  ein  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  mit  $M\langle i \rangle = z$ . Nach Teil (c) derselben Proposition gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_z &= M \cdot \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \right\} \cdot M^{-1} \\ &= M \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in [0, 2\pi) \right\} \cdot M^{-1}. \end{aligned}$$

Der Stabilisator von  $z$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  besteht also ausschließlich aus Matrizen, die in  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$  konjugiert zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi)$$

sind. Mit der Ausnahme von  $\pm I_2$  haben daher Elemente von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ , die ein  $z \in \mathbb{H}$  festlassen, je zwei verschiedene Eigenwerte von Betrag 1, sind definitionsgemäß also elliptisch.

Andererseits ist  $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$  auch der Stabilisator von  $-i$ , und mit  $M\langle i \rangle = z$  gilt offensichtlich auch  $M\langle -i \rangle = \bar{z}$ . Ein Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ , das ein  $z \in \mathbb{H}$  stabilisiert, lässt also auch dessen komplex Konjugiertes  $\bar{z} \in \overline{\mathbb{H}}$  fest.<sup>8</sup> Nach Proposition 1.7 hat jede nichttriviale Möbius-Transformation höchstens zwei Fixpunkte in  $\overline{\mathbb{C}}$ . Es folgt, dass jedes Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$  höchstens ein  $z \in \mathbb{H}$  stabilisieren kann.

Zusammengefasst: Wenn ein Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ein  $z \in \mathbb{H}$  stabilisiert, dann ist es entweder  $\pm I_2$  oder elliptisch. In letzterem Fall sind  $z$  und  $\bar{z}$  die einzigen Fixpunkte.

Sei nun  $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Da  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  nach Teil (b) von Proposition 1.16 transitiv auf  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  operiert, gibt es ein  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  mit  $M\langle \infty \rangle = s$ . Wie für die Stabilisatoren in der oberen Halbebene gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_s = M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_\infty \cdot M^{-1}. \quad (1.3)$$

Der Stabilisator von  $\infty$  lässt sich leicht aus Definition 1.1 ablesen; es gilt nämlich

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$  mit mindestens einem Fixpunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  hat demnach reelle Eigenwerte, ist also entweder parabolisch oder hyperbolisch. Eine parabolische Transformation hat als Konjugat einer Translation offensichtlich nur einen Fixpunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , eine hyperbolische Transformation als Konjugat der Multiplikation mit einem  $c \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$  zwei.

Da die Zerlegung von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$  in elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente disjunkt ist, folgt die Proposition.  $\square$

<sup>8</sup> $\overline{\mathbb{H}}$  bezeichnet hier die untere Halbebene der komplexen Zahlen mit negativem Imaginärteil.

**Korollar 1.18.** Seien  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$  und  $m \in \mathbb{Z}$  mit  $M^m \neq \pm I_2$ . Dann gilt:  $M^m$  ist genau dann elliptisch bzw. parabolisch bzw. hyperbolisch, wenn  $M$  es auch ist.

*Beweis.* Die Rückrichtung folgt unmittelbar aus Proposition 1.17 und der Tatsache, dass wegen (1.3) jede Potenz einer parabolischen Matrix wieder parabolisch ist. Die Hinrichtung folgt dann mit der vollständigen Zerlegung von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$  in elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente.  $\square$

**Definition 1.19.** Sei  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  eine Untergruppe. Dann definieren wir

- (a) Ein Punkt  $z \in \mathbb{H}$  heißt ein **elliptischer Punkt** bezüglich  $\Gamma$ , wenn es ein elliptisches Element  $M \in \Gamma$  gibt mit  $M\langle z \rangle = z$ .
- (b) Ein Punkt  $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  heißt ein **parabolischer Punkt** oder eine **Spitze** bezüglich  $\Gamma$ , wenn es ein parabolisches Element  $M \in \Gamma$  gibt mit  $M\langle s \rangle = s$ .

**Proposition 1.20.** Sei  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  eine Untergruppe, und sei  $z \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  ein elliptischer bzw. parabolischer Punkt bezüglich  $\Gamma$  mit einem elliptischen bzw. parabolischen  $M \in \Gamma$  mit  $M\langle z \rangle = z$ . Dann ist für alle  $A \in \Gamma$  auch  $A\langle z \rangle$  wieder elliptisch bzw. parabolisch.

*Beweis.* Mit  $M$  ist auch  $AMA^{-1}$  elliptisch bzw. parabolisch, und es gilt

$$(AMA^{-1})\langle A\langle z \rangle \rangle = A\langle z \rangle.$$

$\square$

**Definition 1.21.** Eine Teilmenge  $F \subseteq \mathbb{H}$  heißt **Fundamentalebereich** für die Aktion einer Untergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{H}$ , wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt.

- (i)  $F$  ist zusammenhängend und abgeschlossen in  $\mathbb{H}$ .<sup>9</sup>
- (ii) Jeder Punkt  $z \in \mathbb{H}$  ist zu einem Punkt in  $F$  äquivalent.
- (iii) Je zwei verschiedene Punkte aus dem Inneren von  $F$  sind inäquivalent.

## 1.4 Die volle Modulgruppe

Wir wollen in diesem Abschnitt die gegen Ende von Abschnitt 1.3 eingeführten Begriffe für die Aktion der **vollen Modulgruppe**  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  explizit bestimmen.

**Proposition 1.22.** (a) Die Menge der Spitzen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist durch  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  gegeben.

(b) Jedes parabolische Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist von der Form  $M \cdot A \cdot M^{-1}$  mit  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und

$$A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

<sup>9</sup> $\mathbb{H}$  ist mit der Teilraumtopologie bezüglich  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  ausgestattet.



*Beweis.* Sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ein beliebiges parabolisches Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Nach Proposition 1.17 hat dann  $\varphi_M$  genau einen Fixpunkt  $s$ . Ist  $s \neq \infty$ , so folgt sofort  $c \neq 0$ <sup>10</sup> und es gilt

$$s = M\langle s \rangle = \frac{as + b}{cs + d}.$$

Der Punkt  $s$  ist also eine Nullstelle des quadratischen Polynoms

$$\begin{aligned} cX^2 + (d - a)X - b &= cX^2 + (d - a)X + \frac{1 - ad}{c} & (ad - bc = \det(M) = 1) \\ &= cX^2 + (d - a)X + \frac{(a + d)^2 - 4ad}{4c} & ((a + d)^2 = \mathrm{tr}(M)^2 = 4) \\ &= cX^2 + (d - a)X + \frac{(a - d)^2}{4c} \\ &= c \cdot \left(X - \frac{a - d}{2c}\right)^2, \end{aligned}$$

also offensichtlich in  $\mathbb{Q}$ . Es folgt, dass die Menge der Spitzen in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  enthalten ist.

Umgekehrt ist der Punkt  $\infty$  tatsächlich eine Spitze von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = \infty \quad \text{und} \quad \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Ist weiter  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ , so finden wir mit dem **erweiterten euklidischen Algorithmus** aus der Linearen Algebra zwei ganze Zahlen  $u, t$  mit  $pt - uq = 1$ . Es folgt

$$\begin{pmatrix} p & u \\ q & t \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} p & u \\ q & t \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = \frac{p}{q}.$$

Mit Proposition 1.20 ist dann auch  $\frac{p}{q}$  eine Spitze, so dass wir nun insgesamt Teil (a) der Proposition gezeigt haben.

Teil (b) folgt sofort, da jedes parabolische Element (genau) eine Spitze stabilisiert und die Stabilisatoren der Spitzen gerade die  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Konjugate von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$  sind.  $\square$

**Bemerkung 1.23.** Im Beweis von Proposition 1.22 haben wir sogar mehr gezeigt als behauptet, wir haben nämlich gezeigt, dass die Menge der Spitzen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  nichts anderes als die  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Bahn von  $\infty$  ist. Die Spitzen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  bilden also bezüglich der in Definition 1.13 eingeführten Äquivalenzrelation eine Äquivalenzklasse. Nach **Bemerkung 18.9** aus der Algebra gilt zudem

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle \infty \rangle = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}. \quad (1.4)$$

**Proposition 1.24.** (a) Die Menge der elliptischen Punkte von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist durch  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle i \rangle \cup \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle \rho \rangle$  mit  $\rho = e^{2\pi i/3}$  gegeben.

<sup>10</sup>Ist  $c = 0$ , so liegt  $M$  in

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \{ \pm \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \}.$$

Da parabolische Elemente genau einen Punkt aus  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  stabilisieren, folgt entgegen unserer Annahme  $s = \infty$ .



(b) Jedes elliptische Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist von der Form  $M \cdot A \cdot M^{-1}$  mit  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und

$$A \in (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_i \cup \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_o) \setminus \{\pm I_2\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

*Beweis.* Ist  $M$  ein elliptisches Element von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , so ist

$$\mathrm{tr}(M) \in \{-1, 0, 1\}$$

nach Proposition 1.15. Für das charakteristische Polynom von  $M$  folgt somit

$$\mathrm{charpoly}(M) = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M) \in \{X^2 + 1, X^2 \pm X + 1\}.$$

Nehmen wir nun an, es gelte  $\mathrm{charpoly}(M) = X^2 + 1$ , das heißt  $\mathrm{tr}(M) = 0$  und  $\det(M) = 1$ . Zu zeigen ist dann, dass jede Matrix  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  mit  $\det(M) = -a^2 - bc = 1$  konjugiert zu einer der Matrizen  $\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist. Wir können dabei ohne Einschränkung annehmen, dass  $a$  von allen Zahlen  $a + c\mathbb{Z}$  den kleinsten Absolutbetrag hat und also  $|c| \geq 2|a|$  gilt,

denn: Hat  $a + ck$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  den kleinsten Absolutbetrag aller Zahlen  $a + c\mathbb{Z}$ , so betrachten wir statt  $M$  die dazu konjugierte Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ck & -2ak - ck^2 + b \\ c & -(a + ck) \end{pmatrix}.$$

#

Ohne Einschränkung dürfen wir dann außerdem  $|b| \leq |a|$  annehmen,

denn: Gilt nämlich  $|b| > |a|$ , so folgt

$$1 = \det(M) = -a^2 - bc \stackrel{-bc > 0}{=} -a^2 + |b||c| \geq -a^2 + 2|a||b| > -a^2 + 2a^2 = a^2$$

und somit  $a = 0$ . Es folgt  $M \in \{\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ , und wir sind fertig. #

Es gibt daher eine Zahl  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ , für die die Diagonaleinträge der zu  $M$  konjugierten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \varepsilon b & b \\ -2\varepsilon a + c - b & -(a + \varepsilon b) \end{pmatrix}.$$

einen echt kleineren Absolutbetrag haben als  $a$ . Ist dieser Betrag gleich Null, so ist die neue Matrix in  $\{\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$  enthalten, und wir sind fertig. Ansonsten wiederholen wir die gesamte Argumentation rekursiv mit der jeweils neu erhaltenen Matrix. Da der Absolutbetrag der Diagonaleinträge dabei in jedem Schritt echt kleiner wird, terminiert dieser Algorithmus, und die Behauptung ist bewiesen.

Ganz ähnlich zeigt man den Fall  $\mathrm{charpoly}(M) = X^2 \pm X + 1$  (Übung!) und somit Behauptung (b). Behauptung (a) folgt, indem man für jedes elliptische Element  $M \cdot A \cdot M^{-1}$  die quadratische Gleichung  $MAM^{-1}\langle z \rangle = z$  löst. Wegen

$$MAM^{-1}\langle M\langle z \rangle \rangle = M\langle z \rangle \iff A\langle z \rangle = z$$

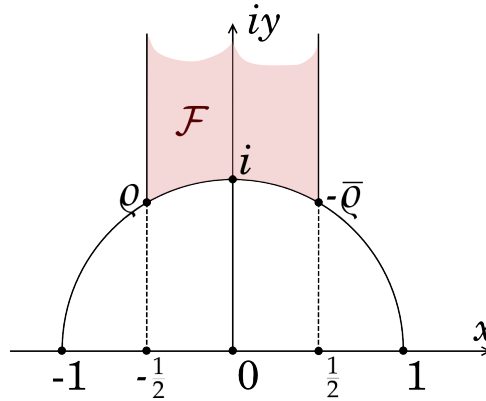
genügt es dabei, die speziellen Matrizen aus Aussage (b) zu betrachten.  $\square$

**Bemerkung 1.25.** Analog zur Bemerkung nach Proposition 1.22 stellen wir fest, dass es zwei Äquivalenzklassen elliptischer Punkte von  $SL_2(\mathbb{Z})$  gibt, die durch  $i$  und  $\rho$  vertreten werden.

**Satz 1.26.** Die Menge

$$\mathcal{F} := \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1 \text{ und } |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$$

ist ein Fundamentalbereich für die Aktion von  $SL_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$  und wird auch als **Standardfundamentaltbereich** bezeichnet.



*Beweis.* Wir müssen die drei Bedingungen (i)-(iii) aus Definition 1.21 überprüfen. Bedingung (i), also der Zusammenhang und die Abgeschlossenheit, ist klar.

Wir wollen nun Bedingung (ii) überprüfen und erinnern uns daran, dass nach (1.2)

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

gilt. Jede Bahn  $SL_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle$  in  $\mathbb{H}$  enthält Punkte maximalen Imaginärteils und diese sind charakterisiert durch

$$\operatorname{Im}(w) \text{ maximal in } SL_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle \iff |cw+d| \geq 1 \text{ für alle } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \operatorname{ggT}(c, d) = 1,$$

denn: Für ein festes  $z \in \mathbb{H}$  definiert die Ungleichung  $|cz+d| \leq 1$  ein Kompaktum in  $\mathbb{R}^2$ . Der Durchschnitt dieses Kompaktums mit dem Gitter  $\mathbb{Z}z + \mathbb{Z}$  ist endlich, so dass die Ungleichung nur endlich viele Lösungen  $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$  hat. Es gilt andererseits

$$|cz+d| \leq 1 \iff \operatorname{Im}(M\langle z \rangle) \geq \operatorname{Im}(z) \quad \text{für alle } M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Da der Imaginärteil von  $M\langle z \rangle$  nur von der zweiten Zeile von  $M$  abhängt, gibt es innerhalb einer Bahn Punkte maximalen Imaginärteils.

Sei nun  $w \in SL_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle$ . Dann gilt

$$\operatorname{Im}(w) \text{ maximal in } SL_2(\mathbb{Z})\langle z \rangle \iff \operatorname{Im}(w) \geq \operatorname{Im}(M\langle z \rangle) \text{ für alle } M \in SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\iff \operatorname{Im}(w) \geq \operatorname{Im}(M(w)) \text{ für alle } M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$$

$$\iff |cw + d| \geq 1 \text{ für alle } \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

wobei wir für die zweite Äquivalenz benutzt haben, dass  $w$  und  $z$  in derselben Bahn liegen. Die Behauptung folgt mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \implies ad - bc = \det(M) = 1 \implies \operatorname{ggT}(c, d) = 1$$

und

$$(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } \operatorname{ggT}(c, d) = 1 \implies \exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } ad - bc = 1 \text{ und also } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

wobei sich die letzte Folgerung aus dem **erweiterten euklidischen Algorithmus** aus der Linearen Algebra ergibt. #

Nun nutzen wir aus, dass der Imaginärteil unter Anwendung von Translationen  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mit  $b \in \mathbb{Z}$  unverändert bleibt. Offensichtlich gibt es für jedes  $w \in \mathbb{H}$  ein  $b \in \mathbb{Z}$  mit

$$|\operatorname{Re}(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle w \rangle)| = |\operatorname{Re}(w + b)| \leq \frac{1}{2}.$$

Wir haben also gezeigt, dass jeder Punkt  $z \in \mathbb{H}$  zu einem Punkt in

$$\mathcal{F}' := \{z \in \mathbb{H} \mid |cz + d| \geq 1 \text{ für alle } c, d \in \mathbb{Z} \text{ mit } \operatorname{ggT}(c, d) = 1 \text{ und } |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$$

äquivalent ist. Bedingung (ii) folgt, wenn wir  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$  zeigen können. Dem ist aber so, denn: Wegen  $\operatorname{ggT}(1, 0) = 1$  ist offensichtlich  $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ .

Sei jetzt umgekehrt  $z = x + iy \in \mathcal{F}$ , und seien  $c, d \in \mathbb{Z}$  mit  $\operatorname{ggT}(c, d) = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |cz + d|^2 &= (cx + d)^2 + c^2y^2 = c^2(x^2 + y^2) + 2cdx + d^2 = c^2|z|^2 + 2cd\operatorname{Re}(z) + d^2 \\ &\stackrel{z \in \mathcal{F}}{\geq} c^2 - |cd| + d^2 \geq 1, \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung gilt, weil die quadratische Form  $X^2 - XY + Y^2$  positiv definit ist.<sup>11</sup> #

<sup>11</sup>Eine (binäre) quadratische Form  $q(X, Y)$  heißt **positiv semidefinit**, wenn

$$q(x, y) \geq 0 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

gilt. Erfüllt sie zusätzlich

$$q(x, y) = 0 \iff (x, y) = (0, 0),$$

so heißt die Form **positiv definit**. Das ist die von uns benutzte Eigenschaft. In **Definition 22.13** aus der Linearen Algebra ist festgelegt, dass  $q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$  genau dann positiv (semi-)definit ist, wenn die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

diese Eigenschaft hat. Im Fall von  $q(X, Y) = X^2 - XY + Y^2$  lassen sich die Eigenwerte leicht zu  $\lambda_1 = \frac{1}{2} > 0$  und  $\lambda_2 = \frac{3}{2} > 0$  berechnen; die quadratische Form ist also tatsächlich positiv definit.



Es verbleibt Bedingung (iii) zu zeigen. Seien dafür  $z, w$  zwei Punkte aus dem Inneren von  $\mathcal{F}$  mit  $w = M\langle z \rangle$  für ein  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, es gelte

$$\mathrm{Im}(z) \leq \mathrm{Im}(w) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

und somit

$$|c| \cdot \mathrm{Im}(z) = |\mathrm{Im}(cz + d)| \leq |cz + d| \leq 1. \quad (1.5)$$

Nach Definition von  $\mathcal{F}$  gilt  $\mathrm{Im}(z) > \mathrm{Im}(\varrho) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Nach (1.5) folgt daraus  $|c| \leq 1$ .

**Fall 1:**  $|c| = 1$ . Aus (1.5) erhalten wir sofort  $|z \pm d| \leq 1$ . Andererseits gilt

$$|z + \tilde{d}| > 1 \quad \text{für alle } (z + \tilde{d}) \in (\mathring{\mathcal{F}} + \tilde{d}) \text{ mit } \tilde{d} \in \mathbb{Z},$$

so dass der Fall  $|c| = 1$  nicht eintreten kann.

**Fall 2:**  $c = 0$ . Wegen  $\det(M) = ad = 1$  gilt dann  $a = d \in \{\pm 1\}$  und somit

$$w = M\langle z \rangle = z \pm b.$$

Da  $z$  und  $w$  beide im Inneren von  $\mathcal{F}$  liegen, folgt  $b = 0$  und somit  $w = z$ .

Insgesamt folgt, dass  $z$  und  $w$  aus dem Inneren von  $\mathcal{F}$  nur dann äquivalent sein können, wenn sie übereinstimmen.  $\square$

**Korollar 1.27.** Die Gruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  wird erzeugt von den Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Beweis.* Sei  $\langle S, T \rangle \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  die von  $S$  und  $T$  erzeugte Untergruppe und  $z \in \mathbb{H}$ . Dann gibt es ein  $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$  mit  $\tilde{M}\langle z \rangle \in \mathcal{F}$ ,

denn: Wie im Beweis von Bedingung (ii) in Satz 1.26 sehen wir ein, dass jede  $\langle S, T \rangle$ -Bahn in  $\mathbb{H}$  Elemente maximalen Imaginärteils enthält, und wählen ein  $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$ , für das  $\tilde{M}\langle z \rangle$  maximalen Imaginärteil hat. Wieder wie im Beweis von Bedingung (ii) in Satz 1.26 finden wir eine natürliche Zahl  $b$  mit

$$|\mathrm{Re}((T^b \tilde{M})\langle z \rangle)| \leq \frac{1}{2}.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass der Betrag von  $w := (T^b \tilde{M})\langle z \rangle$  mindestens 1 ist. Nehmen wir dafür an, es gälte  $|w| < 1$ . Dann erhielten wir nach Anwendung von  $S \in \langle S, T \rangle$

$$\mathrm{Im}(S\langle w \rangle) = \frac{\mathrm{Im}(w)}{|w|^2} > \mathrm{Im}(w),$$

was nicht sein kann, da ja der Imaginärteil von  $w$  als maximal in  $\langle S, T \rangle\langle z \rangle$  gewählt war.  $\#$

Wir wählen nun einen festen Punkt  $z_0$  im Inneren von  $\mathcal{F}$  und eine Matrix  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Nach der soeben gezeigten Behauptung gibt es dann ein  $\tilde{M} \in \langle S, T \rangle$  mit  $(\tilde{M}M)\langle z_0 \rangle \in \mathcal{F}$ . Da  $\mathcal{F}$  insbesondere Bedingung (iii) für Fundamentalbereiche erfüllt und  $z_0$  im Inneren von  $\mathcal{F}$  gewählt war, folgt  $(\tilde{M}M)\langle z_0 \rangle = z_0$ . Da es nach Proposition 1.24 und der Definition von  $\mathcal{F}$  im Inneren von  $\mathcal{F}$  keine elliptischen Punkte gibt, folgt  $(\tilde{M}M) \in \{\pm I_2\}$  nach Proposition 1.17 und somit

$$M \in \langle -I_2, S, T \rangle \stackrel{S^2 = -I_2}{=} \langle S, T \rangle.$$

□

**Korollar 1.28.** Für einen Punkt  $z \in \mathcal{F}$  ist der Stabilisator in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gegeben durch

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_z = \begin{cases} \langle S \rangle & \text{falls } z = i, \\ \langle ST \rangle & \text{falls } z = \varrho, \\ \langle TS \rangle & \text{falls } z = -\bar{\varrho}, \\ \langle -I_2 \rangle & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Ordnung der erzeugenden Gruppenelemente ist hierbei 2 im Falle von  $-I_2$ , 4 im Falle von  $S$  und 6 im Falle von  $ST$  bzw.  $TS$ .

*Beweis.* Folgt direkt aus Satz 1.26 und Proposition 1.24. □

## 1.5 Kongruenzuntergruppen

In diesem Abschnitt wollen wir eine besonders wichtige Klasse von Untergruppen der vollen Modulgruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  betrachten, die sogenannten Kongruenzuntergruppen. Um diese einzuführen müssen wir ein wenig ausholen. Sei  $N \in \mathbb{N}$ ,<sup>12</sup> und sei

$$\bar{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \\ n & \mapsto \bar{n} \end{cases}$$

die kanonische Projektion modulo  $N$ . Dann ist durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

ein Gruppenhomomorphismus  $\bar{\cdot} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  mit Kern

$$\Gamma(N) := \{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid M \equiv I_2 \pmod{N}\}$$

gegeben. Nach **Bemerkung 2.10** aus der Algebra ist daher  $\Gamma(N)$  ein **Normalteiler**, also eine Untergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M^{-1}\Gamma M = \Gamma$  für alle  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

<sup>12</sup>In diesem Skript ist null keine natürliche Zahl und wir schreiben stets  $\mathbb{N} := \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$  und  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ .



**Definition 1.29.** Die oben eingeführten Gruppen  $\Gamma(N)$  für  $N \in \mathbb{N}$  heißen die **Hauptkongruenzuntergruppen** von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Eine Untergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , die eine Hauptkongruenzuntergruppe enthält, nennt man **Kongruenzuntergruppe** von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

**Beispiel 1.30.** Für jedes  $N \in \mathbb{N}$  sind

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\},$$

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}$$

Kongruenzuntergruppen.

Nach Übungsaufgabe 1.8 haben Kongruenzuntergruppen endlichen Index<sup>13</sup> in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , es gibt also für jede Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ein  $n \in \mathbb{N}$  und Matrizen  $A_1, \dots, A_n \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{\nu=1}^n \Gamma A_\nu. \quad (1.6)$$

Da die negative Einheitsmatrix  $-I_2$  trivial operiert, aber nicht in jeder Kongruenzuntergruppe enthalten sein muss, ist es für viele Anwendungen von Vorteil, sich dieser Matrix zu entledigen. Für eine beliebige Untergruppe  $G \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  führen wir daher die Notation

$$\overline{G} := G \cdot \{\pm I_2\} / \{\pm I_2\}$$

ein. Hat  $G$  endlichen Index in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , so folgt offensichtlich

$$\varepsilon \cdot [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{G}] = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : G] \quad \text{mit } \varepsilon \in \{1, 2\}.$$

Sei nun  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine Kongruenzuntergruppe. Statt der Zerlegung (1.6) von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  in  $\Gamma$ -Nebenklassen betrachten wir nun eine Zerlegung von  $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$  in  $\overline{\Gamma}$ -Nebenklassen

$$\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \bigsqcup_{\mu=1}^m \overline{\Gamma} A_\mu \quad \text{mit } A_1, \dots, A_m \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}, \quad (1.7)$$

wobei in der oben eingeführten Notation  $m = n/\varepsilon$  gilt.

Da die Kongruenzuntergruppen Teilmengen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sind, müssen auch die zugehörigen Mengen von elliptischen und parabolischen Elementen in den entsprechenden Mengen zu  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  enthalten sein. Das trifft dann nach Definition auch auf die elliptischen bzw. parabolischen Punkte zu. Tatsächlich stimmt die Menge der Spitzen bezüglich einer Kongruenzuntergruppe mit derjenigen bezüglich  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  überein.

<sup>13</sup>Der **Index**  $[G : H]$  einer Untergruppe  $H$  in einer Gruppe  $G$  ist definiert als die Mächtigkeit der Menge (sic!)  $H \backslash G$  der Linksnebenklassen, siehe Definition 2.5 aus der Algebra.



**Proposition 1.31.** *Die Menge der Spitzen bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist durch  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  gegeben.*

*Beweis.* Die eine Inklusion ist klar: Jede Spitze bezüglich  $\Gamma$  ist nach Definition insbesondere eine Spitze bezüglich  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und somit nach Proposition 1.22 in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ .

Wir wollen nun zeigen, dass umgekehrt auch jedes  $s \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  tatsächlich eine Spitze bezüglich  $\Gamma$  ist. Da  $\Gamma$  eine Kongruenzuntergruppe ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , für das die Hauptkongruenzuntergruppe  $\Gamma(N)$  in  $\Gamma$  enthalten ist. Mit derselben Argumentation wie gerade eben langt es dann zu zeigen, dass  $s$  von einem parabolischen Element aus  $\Gamma(N)$  stabilisiert wird. Sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine Matrix mit  $M\langle\infty\rangle = s$ . Dann gilt

$$M \cdot \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - Nac & Na^2 \\ -Nc^2 & 1 + Nac \end{pmatrix} \in \Gamma(N),$$

wobei wir im letzten Schritt  $ad - bc = \det(M) = 1$  verwendet haben. Die Behauptung folgt, da  $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  den Punkt  $\infty$  stabilisiert.  $\square$

In Bemerkung 1.23 haben wir gezeigt, dass alle Spitzen in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  in derselben  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Bahn liegen. Für eine beliebige Kongruenzuntergruppe  $\Gamma$  stimmt das nicht mehr: Hier kann die Menge der Spitzen in mehrere  $\Gamma$ -Bahnen zerfallen. Jede solche  $\Gamma$ -Bahn nennt man eine **Spitzenklasse** bezüglich  $\Gamma$ . Zu einer gegebenen Spitze  $s$  bezüglich  $\Gamma$  nennen wir die Spitzenklasse  $\mathfrak{s} := \Gamma\langle s \rangle$ ; die Menge der Spitzenklassen bezüglich  $\Gamma$  bezeichnen wir mit  $\mathrm{Cusps}(\Gamma)$ .

**Beispiel 1.32.** *Die Punkte  $\infty$  und 0 liegen bezüglich  $\Gamma_0(2)$  nicht in derselben Spitzenklasse, denn: Die Menge der Matrizen in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , deren Möbius-Transformationen  $\infty$  auf 0 schicken, ist durch*

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid a = 0 \right\}$$

*gegeben, und es ist offensichtlich, dass diese Menge leeren Durchschnitt mit  $\Gamma_0(2)$  hat.* #

**Proposition 1.33.** *Die Menge der Spitzenklassen in  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  bezüglich einer beliebigen Kongruenzuntergruppe  $\Gamma$  ist endlich.*

*Beweis.* Da der Index von  $\Gamma$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  endlich ist, können wir in der Notation von (1.7)

$$\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \langle \infty \rangle = \bigcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} A_\mu \langle \infty \rangle$$

schreiben. Offensichtlich enthält also die Menge  $\{A_1 \langle \infty \rangle, \dots, A_m \langle \infty \rangle\}$  ein Vertretersystem der Spitzenklassen bezüglich  $\Gamma$ , und die Proposition ist gezeigt.  $\square$

Einer gegebenen Spitzenklasse lässt sich mit der sogenannten Breite eine quantifizierende Invariante zuordnen. Diese wollen wir nun einführen und müssen dafür zunächst ein wenig ausholen.



**Lemma 1.34.** Sei  $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$  und seien  $s \in \mathfrak{s}$  und  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M\langle\infty\rangle = s$  beliebig. Dann hängt die Menge

$$H_{\mathfrak{s}} := M^{-1}\Gamma M \cap \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$$

nicht von der Wahl von  $s$  und  $M$  ab und trägt die Struktur einer Untergruppe von endlichem Index in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$ .

*Beweis.* Seien für diesen Beweis  $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$ ,  $s \in \mathfrak{s}$  eine beliebige Spitze und  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine beliebige Matrix mit  $M\langle\infty\rangle = s$  fest gewählt. Es folgt

$$\tilde{M} \in \Gamma_s \iff \tilde{M}\langle s \rangle = s \iff M^{-1}\tilde{M}M\langle\infty\rangle = \infty \iff M^{-1}\tilde{M}M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$$

und somit auch

$$\Gamma_s = \Gamma \cap M\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}M^{-1}.$$

Offensichtlich erhalten wir so eine injektive Abbildung

$$\Gamma_s \backslash (M\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}M^{-1}) \hookrightarrow \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

und wir erkennen, dass die Untergruppe  $\Gamma_s$  endlichen Index in  $M\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}M^{-1}$  hat. Wir konjugieren mit  $M$  und sehen, dass

$$M^{-1}\Gamma_s M = M^{-1}\Gamma M \cap \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} = H_{\mathfrak{s}}$$

eine Untergruppe von endlichem Index in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$  ist.

Zum Beweis des Lemmas verbleibt zu zeigen, dass  $H_{\mathfrak{s}}$  als Menge nicht von der Wahl von  $s$  und  $M$  abhängt. Seien dafür  $\tilde{s} \in \mathfrak{s}$  eine weitere Spitze und  $\tilde{M} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine beliebige Matrix mit  $\tilde{M}\langle\infty\rangle = \tilde{s}$ . Wegen  $\tilde{s} \sim s$  gibt es ein  $S \in \Gamma$  mit  $S\langle\tilde{s}\rangle = s$ . Mit diesem gilt  $(S\tilde{M}M^{-1})\langle s \rangle = s$  und somit  $S\tilde{M}M^{-1} \in \Gamma_s$ . Es folgt

$$H_{\mathfrak{s}} = M^{-1}\Gamma_s M = M^{-1}(S\tilde{M}M^{-1})^{-1}\Gamma_s(S\tilde{M}M^{-1})M = \tilde{M}^{-1}S^{-1}\Gamma_s S\tilde{M} = \tilde{M}^{-1}\Gamma_{\tilde{s}}\tilde{M},$$

was das Lemma zeigt. □

**Lemma 1.35.** Die Untergruppen  $H \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$  von endlichem Index sind gegeben durch:

- (i)  $\langle T^h \rangle$  mit  $h \in \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $\langle -(T^{-h}) \rangle$  mit  $h \in \mathbb{N}$ ,
- (iii)  $\langle T^h, -I_2 \rangle$  mit  $h \in \mathbb{N}$ .

In allen drei Fällen gilt  $h = [\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}} : \overline{H}]$ .

*Beweis.* Bekanntlich gilt

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z} \right\} = \langle T \rangle \oplus \{\pm I_2\}.$$

Die Untergruppen von endlichem Index in  $\langle T \rangle$  sind gerade diejenigen von Typ (i), da bekanntermaßen die Untergruppen von endlichem Index in der zyklischen Gruppe  $\mathbb{Z}$  von der Gestalt  $h\mathbb{Z}$  mit einem  $h \in \mathbb{N}$  sind. Die erste Teilbehauptung folgt daraus sofort. Da weiter in allen drei Fällen  $\bar{H} \cong \langle T^h \rangle$  gilt, erhalten wir stets

$$h = [\langle T \rangle : \langle T^h \rangle] = [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty} : \bar{H}]$$

und somit auch die zweite Teilbehauptung.  $\square$

**Definition 1.36.** Sei  $s \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$  und  $s \in \mathfrak{s}$  beliebig. Dann heißt die natürliche Zahl

$$h_\Gamma(s) := h_\Gamma(\mathfrak{s}) := [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty} : \bar{H}_s]$$

die **Breite** der Spitze  $s$  bzw. der Spitzenklasse  $\mathfrak{s}$ . Gilt in der Fallunterscheidung von Lemma 1.35

$$H_s = \langle -(T^{-h_\Gamma(s)}) \rangle = \langle -(T^{-h_\Gamma(\mathfrak{s})}) \rangle,$$

so heißt die Spitze  $s$  bzw. die Spitzenklasse  $\mathfrak{s}$  **irregulär**, ansonsten **regulär**.

**Bemerkung 1.37.** Ist  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ein Normalteiler, so haben offensichtlich alle Spitzenklassen von  $\Gamma$  dieselbe Breite und sind entweder alle regulär oder alle irregulär.



Die Breiten der Spitzenklassen der gegebenen Kongruenzuntergruppe  $\Gamma$  erfüllen eine erstaunliche Eigenschaft, für deren Beweis wir noch ein gruppentheoretisches Lemma benötigen, eine Verallgemeinerung der **Bahnengleichung 18.10** aus der Algebra:

**Lemma 1.38.** Sei  $(G, \star)$  eine Gruppe,  $S$  eine Menge, auf der  $G$  über eine Abbildung  $\circ : G \times S \rightarrow S$  transitiv operiert, und  $U \subseteq G$  eine Untergruppe von endlichem Index. Dann gilt:

(a) Für jedes  $s \in S$  hat  $U_s$  endlichen Index in  $G_s$  und es gibt eine Einbettung

$$U_s \backslash G_s \hookrightarrow U \backslash G$$

mit Bild  $U \backslash (U \star G_s)$ .

(b) Für ein festes  $s_0 \in S$  ist durch

$$U \star g \mapsto (U \star g) \circ s_0 = U \circ (g \circ s_0)$$

eine Surjektion  $U \backslash G \twoheadrightarrow U \backslash S$  gegeben und für jedes  $s \in S$  hat das Urbild von  $U \circ s$  unter dieser Surjektion die Kardinalität  $[G_s : U_s]$ .

(c) Es gilt

$$\sum_{s \in U \backslash S} [G_s : U_s] = [G : U],$$

wobei  $s$  in der Summe links ein Vertretersystem der Aktion von  $U$  auf  $S$  durchlaufe.



*Beweis.* Im Spezialfall, dass  $U \trianglelefteq G$  ein Normalteiler ist, folgt Behauptung (a) unmittelbar mit dem **Ersten Isomorphiesatz** für Gruppen aus der Algebra. Auf den Fall einer beliebigen Untergruppe  $U \subseteq G$  lässt sich der Beweis dort leicht anpassen.

Wir zeigen nun Behauptung (b). Wegen der Transitivität von  $\circ$  existiert für jedes  $s \in S$  ein  $g_s \in G$  mit  $g_s \circ s_0 = s$ , so dass die angegebene Abbildung tatsächlich surjektiv ist. Bezeichne nun

$$F_{U \circ s} := \{U \star g \in U \backslash G \mid U \circ (g \circ s_0) = U \circ s\}$$

das Urbild von  $U \circ s$  unter dieser Surjektion. Da  $G$  auf sich selbst via Rechtstranslation transitiv operiert, durchläuft mit  $g$  auch  $\tilde{g} := g \star g_s^{-1}$  ganz  $G$  und es gilt

$$\begin{aligned} F_{U \circ s} &\cong \{U \star \tilde{g} \in U \backslash G \mid U \circ ((\tilde{g} \star g_s) \circ s_0) = U \circ s\} \\ &= \{U \star \tilde{g} \in U \backslash G \mid U \circ (\tilde{g} \circ s) = U \circ s\} \\ &= U \backslash (U \star G_s) \\ &\stackrel{(a)}{\cong} U_s \backslash G_s. \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich die Behauptung über die Kardinalität und somit Behauptung (b).

Behauptung (c) erhalten wir nun durch

$$[G : U] = |U \backslash G| = \sum_{s \in U \backslash S} |F_{U \circ s}| \stackrel{(b)}{=} \sum_{s \in U \backslash S} [G_s : U_s],$$

wobei  $s$  jeweils ein Vertretersystem der Aktion von  $U$  auf  $S$  durchlaufe. □

**Proposition 1.39.** *Es gilt*

$$\sum_{\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)} h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) = [\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}].$$

*Beweis.* Setzen wir in Teil (c) von Lemma 1.38

$$G = \overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}, \quad U = \overline{\Gamma}, \quad S = \mathbb{Q} \cup \{\infty\},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} [\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}] &= \sum_{s \in \overline{\Gamma} \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [(\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})})_s : (\overline{\Gamma})_s] \\ &= \sum_{s \in \overline{\Gamma} \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}_s : \overline{\Gamma}_s] \\ &= \sum_{s \in \overline{\Gamma} \backslash (\mathbb{Q} \cup \{\infty\})} [\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}_{\infty} : \overline{H}_s] = \sum_{\mathfrak{s}} h_{\Gamma}(\mathfrak{s}), \end{aligned}$$

wobei wir beim vorletzten Gleichheitszeichen die beteiligten Gruppen mit einer Matrix  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M\langle\infty\rangle = s$  konjugiert haben, was den Wert des Index erhält. □

Bei den elliptischen Punkten kann verschiedenes passieren, bis dahin, dass es überhaupt keine mehr gibt. Das sieht man gut an dem folgenden Beispiel.

**Beispiel 1.40.** Für  $N \in \mathbb{N}_{>1}$  gibt es bezüglich  $\Gamma(N)$  keine elliptischen Punkte,

denn: Nach Proposition 1.24 sind alle elliptischen Elemente von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  zu einer der Matrizen

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

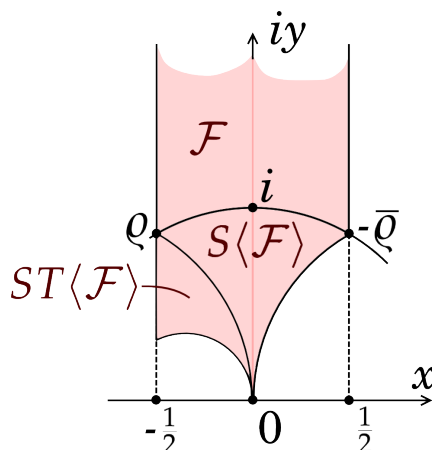
konjugiert. Für  $N > 1$  liegt keine dieser Matrizen in  $\Gamma(N)$ , denn sie sind modulo  $N$  nicht kongruent zur Einheitsmatrix  $I_2$ . Die Behauptung folgt, da  $\Gamma(N)$  als Normalteiler von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  die  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Konjugate seiner Elemente enthält. #

Fundamentaltbereiche für die Aktion von Kongruenzuntergruppen kann man aus dem aus Satz 1.26 bekannten Fundamentaltbereich  $\mathcal{F}$  gewinnen. Tatsächlich ist in der Notation von (1.7)

$$\bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle \quad (1.8)$$

nach Übungsaufgabe 1.11 ein Fundamentaltbereich für die Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$ .

**Beispiel 1.41.** Ein Rechtsvertretersystem von  $\Gamma_0(2)$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist durch  $\{I_2, S, ST\}$  gegeben, siehe Übungsaufgabe 1.10. Die folgende Abbildung stellt also einen möglichen Fundamentaltbereich von  $\Gamma_0(2)$  dar:



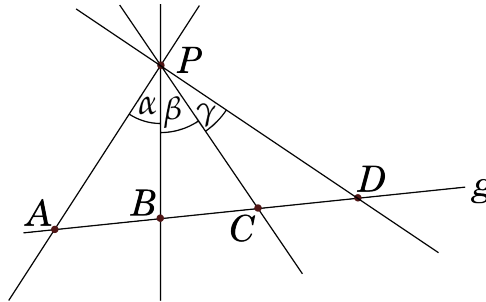
## 1.6 Übungsaufgaben

**Aufgabe 1.1.** Beenden Sie den Beweis von Proposition 1.3.

**Aufgabe 1.2.** Beenden Sie den Beweis von Proposition 1.4.

**Aufgabe 1.3.** Beenden Sie den Beweis von Proposition 1.9.

**Aufgabe 1.4.** In der komplexen Ebene seien vier paarweise verschiedene Geraden mit gemeinsamem Schnittpunkt  $P \in \mathbb{C}$  gegeben und weiter eine Gerade  $g$ , die nicht durch  $P$  geht und die anderen Geraden wie in der Abbildung dargestellt in Punkten  $A, B, C, D \in \mathbb{C}$  schneidet.



Zeigen Sie, dass für das Doppelverhältnis der Punkte  $A, B, C, D$  dann die Identität

$$\text{DV}(A, B, C, D) = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \sin(\beta)}$$

gilt, wobei die Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  wie in der Abbildung definiert seien. Insbesondere hängt also das Doppelverhältnis  $\text{DV}(A, B, C, D)$  nicht von der genauen Lage von  $g$  ab.

**Hinweis:** Im Beweis dürfen Sie den **Sinussatz** aus der Elementargeometrie verwenden, der besagt, dass in einem beliebigen Dreieck mit Ecken  $X, Y, Z \in \mathbb{C}$  und Innenwinkeln  $\varphi$  bei  $X$  und  $\psi$  bei  $Y$  die Gleichung

$$\frac{\sin(\varphi)}{|Y - Z|} = \frac{\sin(\psi)}{|X - Z|}$$

gilt.

**Aufgabe 1.5.** Sei  $s \in \mathbb{C}$ , und sei  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  hyperbolisch mit  $M\langle s \rangle = s$ . Zeigen Sie, dass dann  $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  gilt.

**Aufgabe 1.6.** Seien  $z_1, z_2$  zwei Punkte in  $\mathbb{H}$ , und seien  $U_1$  bzw.  $U_2$  offene Umgebungen von  $z_1$  bzw.  $z_2$ , deren kompakte Abschlüsse in  $\mathbb{H}$  liegen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle bis auf endlich viele teilerfremde Paare  $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$  gilt die Abschätzung

$$\sup \{ \text{Im}(M\langle z \rangle) \mid M = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ und } z \in U_1 \} < \inf_{z \in U_2} \text{Im}(z).$$

(b) Es gibt nur endlich viele Matrizen  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit

$$M\langle U_1 \rangle \cap U_2 \neq \emptyset.$$

**Hinweis:** Benutzen Sie die Tatsache, dass Möbius-Transformationen zu Matrizen aus  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  als Homöomorphismen auf  $\mathbb{H}$  operieren.



**Aufgabe 1.7.** Zeigen Sie, dass für  $N \in \mathbb{N}$  und  $p \nmid N$  prim durch

$$\Gamma := \Gamma_1(N) \cap \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}^{-1} \cdot \Gamma_1(N) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \right)$$

eine Kongruenzuntergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gegeben ist.

**Aufgabe 1.8.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen, um zu zeigen, dass für ein beliebiges  $N \in \mathbb{N}$  der Index  $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]$  endlich ist.

(a) Der Gruppenhomomorphismus  $\mathrm{mod}(N) : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$  ist surjektiv, und es folgt

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = |\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})|.$$

Sei  $N = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p}$  die Primfaktorzerlegung von  $N$ . Nach dem Chinesischen Restsatz gilt dann

$$|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = \prod_{p \text{ prim}} |\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})|.$$

$$(b) \quad |\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})| = p^{4v_p}(1 - p^{-1})(1 - p^{-2}).$$

$$(c) \quad |\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{v_p}\mathbb{Z})| = p^{3v_p}(1 - p^{-2}).$$

Insgesamt haben wir sogar etwas mehr gezeigt, nämlich

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \cdot \prod_{\substack{p \text{ prim} \\ p|N}} (1 - p^{-2}).$$

Außerdem folgt nun leicht:

(d) Jede Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist von endlichem Index.

**Aufgabe 1.9.** In dieser Aufgabe überprüfen wir durch konkretes Nachrechnen Proposition 1.39 im Spezialfall  $\Gamma = \Gamma_0(p)$  für eine Primzahl  $p$ . Zeigen Sie dafür die folgenden Aussagen:

$$(a) \quad [\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma_0(p)}] = p + 1.$$

$$(b) \quad \Gamma_0(p)\langle\infty\rangle = \left\{ \begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix} \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ mit } \mathrm{ggT}(r, s) = 1 \text{ und } p \mid s \right\} \cup \{\infty\} \text{ und } h_{\Gamma_0(p)}(\infty) = 1.$$

$$(c) \quad \Gamma_0(p)\langle 0 \rangle = \left\{ \begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix} \mid r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ mit } \mathrm{ggT}(r, s) = 1 \text{ und } p \nmid s \right\} \text{ und } h_{\Gamma_0(p)}(0) = p.$$

**Aufgabe 1.10.** Zeigen Sie, dass  $\{I_2, S, ST\}$  ein Rechtsvertretersystem von  $\Gamma_0(2)$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist. Ist es auch ein Linksvertretersystem?

**Aufgabe 1.11.** Es sei  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine Kongruenzuntergruppe und sei

$$\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \bigsqcup_{\mu=1}^m \overline{\Gamma A_\mu} \quad \text{mit } A_1, \dots, A_m \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$

eine Zerlegung von  $\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$  in  $\bar{\Gamma}$ -Nebenklassen wie in (1.7), so dass  $\mathcal{F}_\Gamma := \bigcup_k A_k \langle \mathcal{F} \rangle$  zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass dann  $\mathcal{F}_\Gamma$  ein Fundamentalbereich der Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  ist.

**Hinweis:** Verwenden Sie beim Nachweis der Eigenschaft (iii) eines Fundamentalbereichs den **Satz von Baire**, der besagt, dass für eine nicht-leere offene Menge  $U \subseteq \mathcal{F}_\Gamma$ , die eine abzählbare Vereinigung von in  $U$  abgeschlossenen Mengen  $U_k$  ist, ein  $k$  mit  $\mathring{U}_k \neq \emptyset$  existiert.

## Der Begriff der Modulform

In diesem Kapitel führen wir mit den Modulformen das Hauptstudienobjekt unserer Vorlesung ein. Diese sind meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ , die sich unter Möbius-Transformationen wohlverhalten und deshalb eine Fourier-Entwicklung aufweisen. In Abschnitt 2.1 werden wir daher zunächst Fourier-Entwicklungen in diesem Kontext studieren, was uns erlaubt, in Abschnitt 2.2 den Begriff der Modulform zu definieren. Interessante Beispiele werden wir erst in Kapitel 3 kennenlernen; in Abschnitt 2.3 werden wir aber mit der Valenzformel eine beschreibende Eigenschaft für Modulformen nachweisen, mit deren Hilfe wir immerhin zeigen können, zu welchen Parametern es keine Modulformen geben kann.

### 2.1 Fourier-Entwicklungen

Sei  $D \subseteq \mathbb{C}$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  *periodisch*, es gebe also eine Periode  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$\{z + \omega \mid z \in D\} \subseteq D \quad \text{und} \quad f(z + \omega) = f(z) \quad \text{für alle } z \in D.$$

**Beispiel 2.1.**  $e^z$  hat Periode  $2\pi i$  und  $\sin z, \cos z$  haben Periode  $2\pi$ .

**Bemerkung 2.2.** Hat eine gegebene Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  Periode  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , so hat

$$g : \begin{cases} \frac{1}{\omega} \cdot D & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \mapsto f(z\omega) \end{cases}$$

Periode 1, denn offenbar gilt

$$g(z + 1) = f((z + 1)\omega) = f(z\omega + \omega) = f(z\omega) = g(z).$$

In diesem Abschnitt beschränken wir uns daher auf die Untersuchung 1-periodischer Funktionen.



Wir betrachten nun für  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  das Gebiet

$$D_{a,b} := \{z \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Im}(z) < b\}. \quad (2.1)$$

Dieses wird offensichtlich durch die Abbildung

$$e : \begin{cases} D_{a,b} & \rightarrow \mathbb{C}, \\ z & \rightarrow q := e^{2\pi iz} \end{cases}$$

auf das Ringgebiet

$$D_r^R := \{q \in \mathbb{C} \mid r := e^{-2\pi b} < |q| < e^{-2\pi a} =: R\}$$

in der komplexen  $q$ -Ebene abgebildet, wobei wir die Rechenregeln  $e^{-2\pi\infty} = 0$  und  $e^{-2\pi(-\infty)} = \infty$  verwenden.

Sei nun  $f : D_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  speziell eine holomorphe, 1-periodische Funktion. Dann ist die durch  $f_\infty \circ e = f$  gegebene Funktion  $f_\infty : D_r^R \rightarrow \mathbb{C}$  wohldefiniert,

denn: Für  $z \neq \tilde{z}$  mit  $e^{2\pi iz} = e^{2\pi i\tilde{z}}$  gilt  $z - \tilde{z} \in \mathbb{Z}$  und somit  $f(z) = f(\tilde{z})$ . #

Außerdem ist  $f_\infty : D_r^R \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph,

denn: Für  $q_0 \in D_r^R$  beliebig sei  $(q_\nu)_{\nu=1}^\infty$  eine Folge in  $D_r^R \setminus \{q_0\}$  mit Grenzwert  $q_0$  und  $q_\nu = e^{2\pi iz_\nu}$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}$  mit je einem geeigneten  $z_\nu \in D_{a,b}$ . Wegen

$$q_\nu - q_0 = e^{2\pi iz_\nu} - e^{2\pi iz_0} = e^{2\pi iz_0} (e^{2\pi i(z_\nu - z_0)} - 1)$$

geht  $e^{2\pi i(z_\nu - z_0)}$  für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen 1. Stetige Funktionen respektieren Grenzprozesse; nach Anwendung des Hauptzweigs des Logarithmus geht also  $\operatorname{Log} e^{2\pi i(z_\nu - z_0)}$  für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen  $\operatorname{Log} 1 = 0$ . Nach Definition des Logarithmus gibt es andererseits für jedes  $\nu \geq 1$  eine ganze Zahl  $m_\nu$  mit

$$\operatorname{Log} e^{2\pi i(z_\nu - z_0)} = 2\pi i(z_\nu - z_0) + 2\pi i m_\nu = 2\pi i(z_\nu + m_\nu) - 2\pi i z_0.$$

Ersetzen wir also  $z_\nu$  durch  $\tilde{z}_\nu := z_\nu + m_\nu$ , so geht  $\tilde{z}_\nu$  für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen  $z_0$ . Mit der 1-Periodizität von  $f$  und  $z \mapsto e^{2\pi iz}$  folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{f_\infty(q_\nu) - f_\infty(q_0)}{q_\nu - q_0} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{f(z_\nu) - f(z_0)}{e^{2\pi iz_\nu} - e^{2\pi iz_0}} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{f(\tilde{z}_\nu) - f(z_0)}{e^{2\pi i\tilde{z}_\nu} - e^{2\pi iz_0}} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\tilde{z}_\nu - z_0}{e^{2\pi i\tilde{z}_\nu} - e^{2\pi iz_0}} \cdot \frac{f(\tilde{z}_\nu) - f(z_0)}{\tilde{z}_\nu - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i e^{2\pi iz_0}} \cdot f'(z_0) \end{aligned}$$

und somit die komplexe Differenzierbarkeit von  $f_\infty$  in  $q_0$ . #



Nach **Satz 6.20** aus der Funktionentheorie hat  $f_\infty$  also eine auf Kompakta in  $D_r^R$  gleichmäßig absolut konvergente LAURENT-Entwicklung<sup>14</sup> um  $q = 0$  von der Form

$$f_\infty(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n \quad \text{für alle } q \in D_r^R$$

mit Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|q|=q} \frac{f_\infty(q)}{q^{n+1}} dq \quad \text{für ein } q \in (r, R),$$

wobei über die Kreislinie genau einmal im positiven Sinne integriert wird. Setzen wir in der Koeffizientenformel die Parametrisierung der Integrationskurve ein, so erhalten wir

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f_\infty(qe^{2\pi i t})}{(qe^{2\pi i t})^{n+1}} \cdot 2\pi i q \cdot e^{2\pi i t} dt = \int_0^1 f_\infty(qe^{2\pi i t}) (qe^{2\pi i t})^{-n} dt.$$

Setzen wir  $z_0 := \frac{\log q}{2\pi i}$ , so haben wir insgesamt den folgenden Satz gezeigt.

**Satz 2.3.** Gelte  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , und sei  $f : D_{a,b} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit Periode 1. Dann hat  $f$  eine **FOURIER-Entwicklung**<sup>15</sup>

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) e^{2\pi i n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) q^n =: f_\infty(q) \quad \text{für alle } z \in D_{a,b}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten  $a_n(f) \in \mathbb{C}$ .<sup>16</sup> Die Reihe ist gleichmäßig absolut konvergent auf Kompakta in  $D_{a,b}$  und es gilt die Formel

$$a_n(f) = \int_{\gamma} f(z) e^{-2\pi i n z} dz \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

mit  $\gamma(t) = z_0 + t$  für  $t \in [0, 1]$ .

Das folgende Beispiel einer Fourier-Entwicklung werden wir in Abschnitt 3.1 benötigen:

**Beispiel 2.4.** Sei  $k \geq 2$  eine ganze Zahl, und sei  $D_{0,\infty} = \mathbb{H}$  die obere Halbebene. Dann gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H},$$

denn: Für eine beliebige kompakte Teilmenge  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  gibt es ein  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $K \subseteq \overline{U_c(0)}$ , also mit

$$|z - n| \geq |n| - |z| \geq |n| - c \geq \frac{|n|}{2} \quad \text{für alle } n \geq 2c.$$

<sup>14</sup>Pierre Alphonse Laurent (1813-1854)

<sup>15</sup>Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

<sup>16</sup>Wir werden manchmal diese Gleichungskette ausnutzen und etwas schlampig  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f) q^n$  für die Fourier-Entwicklung einer 1-periodischen Funktion  $f$  schreiben.

Es folgt

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2c}} |z - n|^{-k} \leq 2^k \cdot \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2c}} \frac{1}{n^k} < \infty$$

und somit die gleichmäßig absolute Konvergenz der Reihe auf der linken Seite unserer Behauptung auf dem beliebigen Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Insbesondere stellt diese Reihe eine auf  $\mathbb{H}$  holomorphe Funktion dar. Wegen der absoluten Konvergenz können wir sie auch umordnen und sehen so ein, dass die untersuchte Funktion 1-periodisch ist. Nach Satz 2.3 hat daher die linke Seite als holomorphe, 1-periodische Funktion auf  $\mathbb{H}$  eine Fourier-Entwicklung.

Mit dem Satz von MITTAG-LEFFLER<sup>17</sup> aus der Funktionentheorie lässt sich die Partialbruchzerlegung

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{z - n} + \frac{1}{z + n} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - n)^{-1}.$$

des Kotangens und deren absoluter Konvergenz herleiten. Andererseits gilt für alle  $z \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned} \pi \cot(\pi z) &= \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \pi \frac{\frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{2}}{\frac{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}{2i}} = \pi i \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \\ &= \pi i \frac{(q - 1) + 2}{q - 1} = \pi i \left( 1 + \frac{2}{q - 1} \right) \\ &= \pi i \left( 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} q^n \right) = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei wir die Formel für die geometrische Reihe anwenden dürfen, da für  $z \in \mathbb{H}$  die Voraussetzung  $|q| < 1$  erfüllt ist. Fügen wir diese beiden Resultate zusammen, so erhalten wir

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (z - n)^{-1} = \pi i - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Da beide Seiten dieser Gleichung auf Kompakta in  $\mathbb{H}$  gleichmäßig absolut konvergieren, dürfen wir sie beliebig oft ableiten. Wie man leicht überprüft, ergibt  $(k - 1)$ -maliges Ableiten nach  $z$

$$(-1)^k (k - 1)! \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^k} = (2\pi i)^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} q^n$$

und somit die Behauptung. #

Wenn wir darauf achten, dass  $f_{\infty}(q)$  in  $q = 0$  keine nicht-isolierte Singularität erhält, können wir Satz 2.3 auf eine meromorphe Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  mit ganzzahliger Periode anwenden, um für eine solche Funktion eine Fourier-Entwicklung zu erhalten. Wir definieren nun:

<sup>17</sup>Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927)

**Definition 2.5.** (a) Zu einer holomorphen, 1-periodischen Funktion  $f : D_{a,\infty} \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es nach Satz 2.3 eine holomorphe Funktion  $f_\infty : D_0^R \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f_\infty \circ e = f$ , wobei wir die dort eingeführte Notation benutzen. Wir nennen  $f$  **holomorph** bzw. **meromorph in  $z = \infty$** , wenn  $f_\infty$  in  $q = 0$  holomorph bzw. meromorph ist.

(b) Sei  $h \in \mathbb{N}$ . Zu einer holomorphen,  $h$ -periodischen Funktion  $f : D_{a,\infty} \rightarrow \mathbb{C}$  ist nach Bemerkung 2.2 die Funktion  $g(z) := f(hz)$  holomorph und 1-periodisch. Die Funktion  $f$  heißt **holomorph** bzw. **meromorph in  $z = \infty$** , wenn dies im Sinne von (a) auf die Funktion  $g$  zutrifft.

(c) Sei nun speziell  $a = 0$ , und sei  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  eine meromorphe,  $h$ -periodische Funktion mit  $h \in \mathbb{N}$ . Wir nennen  $f$  **holomorph** bzw. **meromorph in  $z = \infty$** , wenn

- die Menge

$$\{y \in \mathbb{R}_{>0} \mid \text{es gibt eine Polstelle von } f \text{ mit Imaginärteil } y\}$$

nach oben beschränkt ist, so dass die Einschränkung von  $f$  auf ein geeignetes  $D_{a,\infty}$  holomorph ist,

- diese Einschränkung  $f|_{D_{a,\infty}}$  im Sinne von (b) holomorph bzw. meromorph in  $z = \infty$  ist.

## 2.2 Die elementare Theorie

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff der Modulform bezüglich einer beliebigen, fest vorgegebenen Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  einführen. Modulformen sind meromorphe Funktionen auf der komplexen oberen Halbebene  $\mathbb{H}$ , die sich unter den in Kapitel 1 behandelten Möbius-Transformationen wohlverhalten bzw. invariant unter dem mit diesen verwandten PETERSSON'sche Strichoperator<sup>18</sup> sind, den wir nun definieren werden.

**Proposition 2.6.** Für beliebiges  $k \in \mathbb{Z}$  ist über die Zuordnung  $(M, f) \mapsto f|_k M$  mit

$$(f|_k M)(z) := \det(M)^{\frac{k}{2}} (cz + d)^{-k} f(M\langle z \rangle)$$

eine Aktion von

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ := \{M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \det(M) > 0\}$$

auf der Menge der auf  $\mathbb{H}$  meromorphen Funktionen gegeben, wobei die Potenz der Determinante über den Hauptzweig des Logarithmus definiert ist.<sup>19</sup> Der zugehörige Operator  $\cdot|_k$  heißt der **( $k$ -te) Petersson'sche Strichoperator**.

*Beweis.* Für ein beliebiges  $z \in \mathbb{H}$  und  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$  setzen wir  $j(M, z) := cz + d$ .<sup>20</sup> Wie man leicht überprüft, gilt dann für beliebige  $M, \tilde{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$  und alle  $z \in \mathbb{H}$  die **Kozykelbeziehung**

$$j(M\tilde{M}, z) = j(M, \tilde{M}\langle z \rangle)j(\tilde{M}, z).$$

<sup>18</sup>Hans Petersson (1902-1984)

<sup>19</sup>Man beachte, dass die Potenz der Determinante so gewählt wurde, dass das Zentrum von  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$  trivial operiert. Wir lassen allerdings in diesem Kapitel nur Matrizen mit Determinante 1 operieren, wo dieser Faktor keine Rolle spielt.

<sup>20</sup>Diese Schreibweise ist in der Theorie der Modulformen etabliert und hat den Vorteil, ohne Namen für die Einträge der Matrix  $M$  auszukommen.

Es folgt für dieselben Matrizen  $M, \tilde{M}$  und alle  $z \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
 (f|_k(M\tilde{M}))(z) &= \det(M\tilde{M})^{\frac{k}{2}} j(M\tilde{M}, z)^{-k} f(M\tilde{M}\langle z \rangle) \\
 &= \det(M)^{\frac{k}{2}} \det(\tilde{M})^{\frac{k}{2}} (j(\tilde{M}, z)^{-k} j(M, \tilde{M}\langle z \rangle)^{-k}) f(M\langle \tilde{M}\langle z \rangle \rangle) \\
 &= \det(\tilde{M})^{\frac{k}{2}} j(\tilde{M}, z)^{-k} \left( \det(M)^{\frac{k}{2}} j(M, \tilde{M}\langle z \rangle)^{-k} f(M\langle \tilde{M}\langle z \rangle \rangle) \right) \\
 &= \det(\tilde{M})^{\frac{k}{2}} j(\tilde{M}, z)^{-k} (f|_k M)(\tilde{M}\langle z \rangle) \\
 &= ((f|_k M)|_k \tilde{M})(z).
 \end{aligned}$$

Da offensichtlich für alle  $z \in \mathbb{H}$  die Beziehung  $(f|_k I_2)(z) = f(z)$  gilt, folgt die Proposition.  $\square$

**Lemma 2.7.** Ist  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  eine meromorphe Funktion mit

$$(f|_k \tilde{M})(z) = f(z) \quad \text{für alle } \tilde{M} \in \Gamma,$$

so hat  $f|_k M$  für  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M\langle \infty \rangle = s \in \mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$  die Periode

$$\tilde{h}_\Gamma(s) := \tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s}) := \begin{cases} h_\Gamma(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ regulär,} \\ 2h_\Gamma(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ irregulär.} \end{cases}$$

*Beweis.* Im Beweis von Lemma 1.34 haben wir  $H_{\mathfrak{s}} = M^{-1}\Gamma_{\mathfrak{s}}M$  eingesehen. Für ein beliebiges  $M^{-1}\tilde{M}M \in H_{\mathfrak{s}}$  gilt daher nach Voraussetzung

$$(f|_k M)|_k(M^{-1}\tilde{M}M) = f|_k(MM^{-1}\tilde{M}M) = f|_k(\tilde{M}M) = f|_k M.$$

Das Lemma folgt daher unmittelbar aus Definition 1.36.  $\square$

Lemma 2.7 belegt die Sinnhaftigkeit der folgenden Definition:

**Definition 2.8.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$  beliebig. Eine meromorphe Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$(V_1) \quad (f|_k M)(z) = f(z) \quad \text{für alle } M \in \Gamma,$$

$$(V_2) \quad f|_k M \text{ ist meromorph in } z = \infty \quad \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

heißt eine (**meromorphe**) **Modulform** von **Gewicht**  $k$  bezüglich  $\Gamma$ .

Nach Definition ist die Nullfunktion  $f \equiv 0$  eine meromorphe Modulform bezüglich  $\Gamma$  und beliebigen Gewichts. Für  $f \not\equiv 0$  ist dies anders:

**Bemerkung 2.9.** Das Gewicht einer meromorphen Modulform  $f \not\equiv 0$  bezüglich  $\Gamma$  ist eindeutig bestimmt,

denn: Sei  $f$  eine Modulform bezüglich  $\Gamma$  sowohl von Gewicht  $k$  als auch von Gewicht  $\ell$  mit  $k \neq \ell \in \mathbb{Z}$  und sei  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ . Nach Axiom  $(V_1)$  gilt dann

$$(cz + d)^k f(z) = f(M\langle z \rangle) = (cz + d)^\ell f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

und also auch

$$(cz + d)^k = (cz + d)^\ell \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H} \text{ mit } f(z) \neq 0, \quad (2.3)$$

wobei nach **Korollar 1 des Identitätssatzes** aus der Funktionentheorie die Nullstellenmenge von  $f$  in  $\mathbb{H}$  abgeschlossen ist und aus isolierten Punkten besteht.

Als Kongruenzuntergruppe hat  $\Gamma$  nach Übungsaufgabe 1.8 endlichen Index in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Wegen (1.4) ist daher  $\Gamma$  nicht vollständig in

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c = 0 \right\}$$

enthalten, weshalb wir ohne Einschränkung  $M \notin \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ , also  $c \neq 0$ , annehmen können. Wenden wir auf Gleichung (2.3) den **Identitätssatz für Potenzreihen** aus der Funktionentheorie an, so folgt insbesondere die Gleichheit der Grade  $k = \ell$  und somit unsere Behauptung.  $\#$

Axiom  $(V_2)$  lässt sich noch etwas hübscher formulieren. Dafür müssen wir ein wenig ausholen:

**Lemma 2.10.** Sei  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  eine meromorphe Funktion, die Axiom  $(V_1)$  bezüglich  $\Gamma$  mit einem Gewicht  $k$  erfüllt. Seien weiter  $\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)$  eine Spitzenklasse,  $s, \tilde{s} \in \mathfrak{s}$  und  $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M\langle\infty\rangle = s$  und  $\tilde{M}\langle\infty\rangle = \tilde{s}$ . Dann gilt:

Ist  $f|_k M$  meromorph in  $z = \infty$ , so auch  $f|_k \tilde{M}$ .

*Beweis.* Da für  $f \equiv 0$  nichts zu zeigen ist, können wir ohne Einschränkung annehmen,  $f$  und damit auch  $f|_k M$  und  $f|_k \tilde{M}$  seien nicht konstant null. Nach Definition 2.5 und Lemma 2.7 hat  $f|_k M$  dann eine Fourier-Entwicklung

$$(f|_k M)(z) = \sum_{n=N}^{\infty} a_n(f|_k M) (q^{\frac{1}{h_\Gamma(s)}})^n \quad (2.4)$$

mit einem  $N \in \mathbb{Z}$  und Koeffizienten  $a_n(f|_k M) \in \mathbb{C}$ . Da  $s$  und  $\tilde{s}$  nach Voraussetzung  $\Gamma$ -äquivalent sind, gibt es ein  $A \in \Gamma$  mit  $A\langle\tilde{s}\rangle = s$ . Offenbar liegt  $M^{-1}A\tilde{M}$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ , es gibt also ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $M^{-1}A\tilde{M} = \pm T^k$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (f|_k \tilde{M})(z) &= (f|_k (A\tilde{M}))(z) \\ &= (f|_k (MM^{-1}A\tilde{M}))(z) \\ &= ((f|_k M)|_k (M^{-1}A\tilde{M}))(z) \\ &= \pm \sum_{n=N}^{\infty} a_n(f|_k M) e^{\frac{2\pi i n(z+k)}{h_\Gamma(s)}} \\ &= \sum_{n=N}^{\infty} (\pm a_n(f|_k M) e^{\frac{2\pi i n k}{h_\Gamma(s)}}) e^{\frac{2\pi i n z}{h_\Gamma(s)}}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die wegen der Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung eindeutig bestimmte Fourier-Entwicklung von  $f|_k \tilde{M}$  gefunden. Die Funktion  $f|_k \tilde{M}$  ist also meromorph in  $z = \infty$  und das Lemma bewiesen.  $\square$

Im Beweis von Lemma 2.10 haben wir noch etwas mehr bewiesen, denn wir haben auch gezeigt, dass der kleinste Index  $n \in \mathbb{Z}$ , für den der  $n$ -te Fourier-Koeffizient nicht verschwindet, in beiden Fourier-Entwicklungen übereinstimmt. Insbesondere können wir wohldefiniert die folgenden Begriffe einführen:

**Definition 2.11.** Sei  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  eine meromorphe Funktion, die Axiom  $(V_1)$  bezüglich  $\Gamma$  mit einem Gewicht  $k$  erfüllt. Seien weiter  $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$ ,  $s \in \mathfrak{s}$  und  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M\langle\infty\rangle = s$ .

- (a) Ist dann  $(f|_k M)(z)$  in  $z = \infty$  holomorph bzw. meromorph, so nennen wir  $f$  **holomorph** bzw. **meromorph in der Spitze  $s$**  bzw. der Spitzenklasse  $\mathfrak{s}$ .
- (b) Den kleinsten Index  $n \in \mathbb{Z}$ , für den der Fourier-Koeffizient  $a_n(f|_k M)$  in (2.4) nicht verschwindet, nennen wir die **Ordnung**  $\text{ord}_\Gamma(f; s)$  bzw.  $\text{ord}_\Gamma(f; \mathfrak{s})$  von  $f$  in der Spitze  $s$  bzw. der Spitzenklasse  $\mathfrak{s}$ .

In dieser Sprache fordert Axiom  $(V_2)$  also Meromorphie in allen Spitzen bezüglich  $\Gamma$  ein und nach Lemma 2.10 ist dies äquivalent zu dem folgenden, leichter zu überprüfenden Axiom:

$(V'_2)$   $f$  ist meromorph in jedem  $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$ .<sup>21</sup>

Im für uns wichtigsten Fall  $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  gibt es nach Bemerkung 1.23 nur eine Äquivalenzklasse von Spitzen. Nach  $(V'_2)$  genügt es in diesem Fall also, die Meromorphie einer meromorphen Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  in  $z = \infty$  zu überprüfen.

Die Menge der meromorphen Modulformen festen Gewichts zur gegebenen Kongruenzuntergruppe  $\Gamma$  trägt offensichtlich die Struktur eines  $\mathbb{C}$ -Vektorraums. Diesen und einige wichtige Untervektorräume wollen wir nun benennen.

**Definition 2.12.** (a) Für den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der meromorphen Modulformen von Gewicht  $k$  bezüglich  $\Gamma$  schreiben wir  $V_k(\Gamma)$ .

(b) Den Unterraum der auf ganz  $\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  holomorphen Modulformen aus  $V_k(\Gamma)$  bezeichnen wir mit  $M_k(\Gamma)$  und nennen seine Elemente die (**ganzen**) **Modulformen** von Gewicht  $k$  bezüglich  $\Gamma$ .

(c) Für den Unterraum der in allen Spitzen verschwindenden Modulformen aus  $M_k(\Gamma)$  schreiben wir  $S_k(\Gamma)$ ; seine Elemente heißen die **Spitzenformen** von Gewicht  $k$  bezüglich  $\Gamma$ .

Im Spezialfall  $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  schreiben wir auch einfacher  $V_k$ ,  $M_k$ ,  $S_k$  statt  $V_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ ,  $M_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ ,  $S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ .

Multipliziert man zwei meromorphe Modulformen bezüglich  $\Gamma$ , so erhält man wieder eine meromorphe Modulform bezüglich  $\Gamma$ . Die jeweiligen Gewichte addieren sich hierbei auf. Wir formalisieren diese Entdeckung und erinnern dazu zunächst an ein Konzept aus der Algebra:

**Definition 2.13.** Seien  $K$  ein Körper und  $(M, +)$  ein kommutatives Monoid. Eine  $M$ -**Graduierung** auf einem gegebenen  $K$ -Vektorraum  $V$  ist ein System  $(V_m)_{m \in M}$  von Untervektorräumen von  $V$  mit

$$V = \bigoplus_{m \in M} V_m.$$

<sup>21</sup>Nach Proposition 1.33 ist dies eine endliche Menge.

Eine **M-Graduierung** auf einer gegebenen  $K$ -Algebra  $A$  ist eine Graduierung auf  $A$  als Vektorraum mit

$$A_m \cdot A_{\tilde{m}} \subseteq A_{m+\tilde{m}} \quad \text{für alle } m, \tilde{m} \in M.$$

**Proposition 2.14.**

$$V(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\Gamma), \quad M(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma) \quad \text{und} \quad S(\Gamma) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\Gamma)$$

sind  $\mathbb{Z}$ -graduierete  $\mathbb{C}$ -Algebren. Im Spezialfall  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  schreiben wir auch einfacher  $V$ ,  $M$ ,  $S$  statt  $V(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ ,  $M(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ ,  $S(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ .

*Beweis.* Nach Bemerkung 2.9 ist das Gewicht einer nichttrivialen meromorphen Modulform eindeutig. Damit folgt, dass

$$V(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k(\Gamma), \quad M(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_k(\Gamma) \quad \text{und} \quad S(\Gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} S_k(\Gamma)$$

jeweils direkte Summen von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen sind. Auf  $V(\Gamma)$  – und analog auf  $M(\Gamma)$  bzw.  $S(\Gamma)$  – lässt sich durch

$$\begin{aligned} V_k(\Gamma) \times V_\ell(\Gamma) &\rightarrow V_{k+\ell}(\Gamma), \\ (f, g) &\mapsto fg \end{aligned}$$

eine Multiplikation definieren,

denn: Als Produkt zweier auf  $\mathbb{H}$  meromorphen Funktionen ist  $fg$  wieder auf  $\mathbb{H}$  meromorph. Zudem gilt für alle  $M \in \Gamma$

$$\begin{aligned} (fg)(M\langle z \rangle) &= f(M\langle z \rangle) \cdot g(M\langle z \rangle) \\ &= j(M, z)^k f(z) \cdot j(M, z)^\ell g(z) \\ &= j(M, z)^{k+\ell} (fg)(z), \end{aligned}$$

so dass  $fg$  Axiom  $(V_1)$  bezüglich  $\Gamma$  mit Gewicht  $k + \ell$  erfüllt. Die Fourier-Entwicklung von  $fg$  ergibt sich als das Produkt der jeweiligen Fourier-Entwicklungen von  $f$  und  $g$ . Die Meromorphie in  $z = \infty$  von  $fg$  folgt also aus der entsprechenden Eigenschaft von  $f$  und  $g$ . Das Produkt  $fg$  erfüllt daher auch Axiom  $(V'_2)$ , so dass insgesamt die Behauptung folgt.  $\#$

Also haben wir eine wohldefinierte Multiplikation, bezüglich derer sich das Gewicht additiv verhält, was  $V(\Gamma)$  – und analog auf  $M(\Gamma)$  bzw.  $S(\Gamma)$  – zu einer  $\mathbb{Z}$ -graduiereten  $\mathbb{C}$ -Algebra macht.  $\square$

Wir haben noch keine Beispiele für Modulformen angegeben und werden dies auch erst in Kapitel 3 nachholen, weil die Konstruktion der klassischen Beispiele recht aufwändig ist. Erste Überlegungen zu Modulformen können wir jedoch schon hier anstellen.

**Proposition 2.15.** Gilt  $-I_2 \in \Gamma$ , so folgt  $V_k(\Gamma) = \{0\}$  für alle ungeraden Werte von  $k$ .



*Beweis.* Ist  $-I_2 \in \Gamma$ , so gilt nach  $(V_1)$  für ein beliebiges  $f \in V_k(\Gamma)$

$$f(z) = (f|_k(-I_2))(z) = (0 \cdot z + (-1))^{-k} f((-I_2)\langle z \rangle) = (-1)^k f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Für ungerades  $k$  folgt sofort  $f \equiv 0$ , wie behauptet.  $\square$

**Proposition 2.16.** Seien  $f \in V_k(\Gamma)$  mit einem beliebigen  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n := [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$  und  $A_1, \dots, A_n$  ein Vertretersystem von  $\Gamma$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  wie in (1.6). Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Für alle  $v \in \{1, \dots, n\}$  ist  $A_v^{-1}\Gamma A_v \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine Kongruenzuntergruppe und es gilt

$$f|_k A_v \in V_k(A_v^{-1}\Gamma A_v).$$

(b) Es gilt

$$\mathrm{tr}(f) := \sum_{v=1}^n f|_k A_v \in V_k \quad \text{und} \quad F := \prod_{v=1}^n f|_k A_v \in V_{kn}.$$

Die durch  $f \mapsto \mathrm{tr}(f)$  induzierte Abbildung  $V_k(\Gamma) \rightarrow V_k$  wird als **Spurbildung** bezeichnet.

*Beweis.* Für den Beweis von Behauptung (a) sei  $v \in \{1, \dots, n\}$  fest gewählt. Da  $\Gamma$  eine Kongruenzuntergruppe ist, gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , für das die Hauptkongruenzuntergruppe  $\Gamma(N)$  in  $\Gamma$  enthalten ist. Für ein beliebiges  $M \in \Gamma(N)$  gilt

$$M = A_v^{-1}(A_v M A_v^{-1}) A_v \quad \text{und} \quad A_v M A_v^{-1} \equiv A_v A_v^{-1} \equiv I_2 \pmod{N},$$

also  $M \in A_v^{-1}\Gamma(N)A_v$ . Es folgt

$$\Gamma(N) \subseteq A_v^{-1}\Gamma(N)A_v \subseteq A_v^{-1}\Gamma A_v$$

und somit, dass die Gruppe  $A_v^{-1}\Gamma A_v$  eine Kongruenzuntergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist. Die Funktion  $f|_k A_v$  ist meromorph auf  $\mathbb{H}$  nach Proposition 2.6, erfüllt Axiom  $(V_1)$  bezüglich  $A_v^{-1}\Gamma A_v$  mit Gewicht  $k$  wegen

$$(f|_k A_v)|_k(A_v^{-1} M A_v) = f|_k(A_v A_v^{-1} M A_v) = f|_k(M A_v) = (f|_k M)|_k A_v = f|_k A_v \quad \text{für alle } M \in \Gamma,$$

und Axiom  $(V_2)$  wegen

$$\begin{aligned} (f|_k A_v)|_k M &= f|_k(A_v M) \text{ meromorph in } z = \infty \text{ für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ \iff f|_k M &\text{ meromorph in } z = \infty \text{ für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir nun Behauptung (a) gezeigt.

Zum Beweis von Behauptung (b) stellen wir zunächst fest, dass wir im Beweis von Aussage (a) insbesondere gezeigt haben, dass es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$f|_k A_v \in V_k(\Gamma(N)) \quad \text{für alle } v \in \{1, \dots, n\}$$

gibt. Nach Proposition 2.14 gelten  $\text{tr}(f) \in V_k(\Gamma(N))$  und  $F \in V_{nk}(\Gamma(N))$ . Es verbleibt zu zeigen, dass  $\text{tr}(f)$  und  $F$  Axiom  $(V_1)$  bezüglich  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  – und nicht nur bezüglich  $\Gamma(N)$  – erfüllt. Dies gilt aber, denn für alle  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  gilt

$$\begin{aligned} \text{tr}(f)(M\langle z \rangle) &= \sum_{v=1}^n (f|_k A_v)(M\langle z \rangle) & F(M\langle z \rangle) &= \prod_{v=1}^n (f|_k A_v)(M\langle z \rangle) \\ &= \sum_{v=1}^n j(M, z)^k ((f|_k A_v)|_k M)(z) & &= \prod_{v=1}^n j(M, z)^k \cdot ((f|_k A_v)|_k M)(z) \\ &= j(M, z)^k \cdot \sum_{v=1}^n (f|_k (A_v M))(z) & &= j(M, z)^{nk} \cdot \prod_{v=1}^n (f|_k (A_v M))(z) \\ &= j(M, z)^k \cdot \text{tr}(f)(z) & &= j(M, z)^{nk} \cdot F(z), \end{aligned}$$

wobei die jeweils letzte Gleichheit gilt, da mit  $A_v$  auch  $A_v M$  ein Vertretersystem von  $\Gamma$  in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  durchläuft,

denn: Offensichtlich gilt

$$\text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M = \left( \bigsqcup_{v=1}^n \Gamma A_v \right) \cdot M = \bigsqcup_{v=1}^n \Gamma(A_v M). \quad (2.5)$$

#

Es folgt Behauptung (b). □

### 2.3 Die Valenzformel

Für meromorphe Modulformen bezüglich der vollen Modulgruppe gilt die folgende bemerkenswerte Formel:

**Satz 2.17.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$  und  $0 \neq f \in V_k$ . Dann gilt die **Valenzformel**, auch  $\frac{k}{12}$ -**Formel** genannt, die besagt:

$$\text{ord}(f; \infty) + \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(f; i) + \frac{1}{3} \cdot \text{ord}(f; \varrho) + \sum_{z \not\sim i, \varrho} \text{ord}(f; z) = \frac{k}{12}.$$

Hierbei laufe  $z$  über die Elemente eines Vertretersystem modulo  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  in  $\mathbb{H}$ , die weder zu  $i$  noch zu  $\varrho$  äquivalent sind.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass die Summe in der Valenzformel stets endlich ist: Nach Definition 2.8 ist jedes  $f \in V_k$  meromorph in  $z = \infty$  und nach Definition 2.5 gibt es ein  $C_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$C_1 > y \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ die Imaginärteil einer Polstelle von } f \text{ sind.}$$

Zudem gibt es ein  $C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$C_2 > y \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ die Imaginärteil einer Nullstelle von } f \text{ sind,}$$

denn: Bekanntermaßen ist  $f$  holomorph auf  $D_{C_1, \infty}$  und hat Periode 1. Nach Satz 2.3 hat  $f$  daher eine Fourier-Entwicklung, es gibt also eine holomorphe Funktion  $f_\infty : D_0^{e^{-2\pi C_1}} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$(f_\infty \circ e)(z) = f(z) \quad \text{für alle } z \in D_{C_1, \infty},$$

die sich wegen  $f \in V_k$  meromorph nach  $U_{e^{-2\pi C_1}}(0)$  fortsetzen lässt. Gäbe es kein  $C_2$  wie in der Behauptung, läge in jeder noch so kleinen Umgebung von  $q = 0$  eine Nullstelle von  $f_\infty$ , so dass  $q = 0$  kein Pol von  $f_\infty$  sein könnte. Der Punkt  $q = 0$  wäre also ein Häufungspunkt von Nullstellen der auf  $U_{e^{-2\pi C_1}}(0)$  holomorphen Funktion  $f_\infty$ , die dort nach Korollar 1 des Identitätssatzes aus der Funktionentheorie konstant null sein müsste.



Dies träge dann offensichtlich auch auf die Einschränkung von  $f$  auf  $D_{C_1, \infty}$  und nach demselben Korollar auch für  $f$  auf ganz  $\mathbb{H}$  ohne die Polstellenmenge von  $f$  zu. Im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes erhielten wir nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz aus der Funktionentheorie  $f \equiv 0$ . #



Insgesamt folgt, dass sämtliche Null- und Polstellen von  $f$  im Gebiet  $D_{0,C}$  mit

$$C := \max\{C_1, C_2\}$$

liegen. Nach der Definition von Meromorphie und dem bereits oben verlinkten Korollar des Identitätssatzes sind die Null- und die Polstellenmenge von  $f$  jeweils abgeschlossen in  $D_{0,2C}$  und bestehen nur aus isolierten Punkten. Die Menge  $\overline{D_{0,C}} \cap \mathcal{F}$  ist offensichtlich abgeschlossen in  $D_{0,2C}$  und beschränkt, also kompakt. Es folgt, dass  $f$  nur endlich viele Null- bzw. Polstellen in  $\overline{D_{0,C}} \cap \mathcal{F}$  hat. Die Endlichkeit der Summe in der Valenzformel folgt, da  $\overline{D_{0,C}} \cap \mathcal{F}$  nach Konstruktion ein Vertretersystem modulo  $SL_2(\mathbb{Z})$  sämtlicher Punkte in  $\mathbb{H}$  mit  $\text{ord}(f; z) \neq 0$  enthält.

Für den Nachweis der Valenzformel nehmen wir nun zunächst an,  $f$  habe auf dem Rand  $\partial\mathcal{F}$  keine Null- und Polstellen mit der möglichen Ausnahme der Punkte  $i$  und  $\varrho$  (und dann auch  $-\bar{\varrho}$ ). Sei  $\gamma$  die in Abbildung 2.1 rot dargestellte stückweise glatte geschlossene Kurve, die in mathematisch positiver Richtung einfach durchlaufen werde.

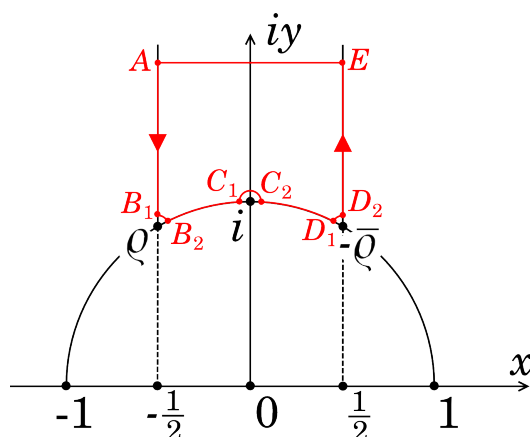


Abbildung 2.1: Die Punkte  $A$  und  $E$  sind so gewählt, dass es – mit möglicher Ausnahme von  $\infty$ , das wir uns hier als  $\lim_{y \rightarrow \infty} iy$  vorstellen sollten – keine Null- oder Polstelle von  $f$  mit Imaginärteil größer  $\text{Im}(A) = \text{Im}(E)$  gibt. Die Punkte  $B_1, B_2$  bzw.  $C_1, C_2$  bzw.  $D_1, D_2$  sind so gewählt, dass das Kurvenstück von  $q$  bzw.  $i$  bzw.  $-\bar{q}$  bis zu ihnen Länge  $\varepsilon > 0$  hat. Hierbei ist  $\varepsilon$  so klein gewählt, dass im Inneren der Kurve  $\gamma$  von jeder Null- und Polstelle von  $f$  – mit möglicher Ausnahme von  $q$  und  $i$  – jeweils genau ein Vertreter modulo  $\Gamma$  liegt.

Nach Konstruktion und dem **Argumentprinzip** aus der Funktionentheorie gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\substack{z \in \mathcal{F} \\ z \neq i, q}} \text{ord}(f; z).$$

Wir wollen das Integral nun auch abschnittsweise per Hand ausrechnen und das Ergebnis mit dieser Formel vergleichen.

- (i) Die Geradenstücke  $\overline{AB_1}$  und  $\overline{ED_2}$  werden unter Anwendung von  $T$  aufeinander abgebildet. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{ED_2}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(T\langle z \rangle)}{f(T\langle z \rangle)} dT\langle z \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(z+1)}{f(z+1)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB_1}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \end{aligned}$$

- (ii) Der Kreisbogen  $\widehat{B_1 B_2}$  von  $B_1$  nach  $B_2$  wird parametrisiert durch  $z = q + \varepsilon e^{it}$  für  $t \in [\alpha(\varepsilon), \frac{\pi}{2}]$  mit einem geeigneten Winkel  $\alpha(\varepsilon)$ . In einer den Kreisbogen ganz enthaltenden punktierten Kreisscheibe um  $q$  können wir  $f$  nach dem **Satz von der Laurent-Entwicklung** aus der Funktionentheorie schreiben als

$$f(z) = (z - q)^m g(z)$$

mit  $m = \text{ord}(f; \varrho)$  und einer in der ganzen Kreisscheibe holomorphen Funktion  $g$  mit  $g(\varrho) \neq 0$ . In dieser Notation gilt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - \varrho} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_1 \hat{B}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(\varepsilon)} \left( \frac{m}{\varepsilon e^{it}} + \frac{g'(\varrho + \varepsilon e^{it})}{g(\varrho + \varepsilon e^{it})} \right) i \varepsilon e^{it} dt \\ &= \frac{m}{2\pi} (\alpha(\varepsilon) - \frac{\pi}{2}) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha(\varepsilon)} \frac{g'(\varrho + \varepsilon e^{it})}{g(\varrho + \varepsilon e^{it})} e^{it} dt \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{m}{2\pi} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right) + 0 \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \text{ord}(f; \varrho), \end{aligned}$$

denn der Integrand im zweiten Term ist beschränkt. Analog gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{D_1 \hat{D}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{6} \cdot \text{ord}(f; \varrho),$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Ordnungen in  $-\bar{\varrho}$  wegen der Äquivalenz dieselben wie in  $\varrho$  sind, und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2} \cdot \text{ord}(f; i).$$

- (iii) Die Kreisbögen  $B_2 \hat{C}_1$  und  $D_1 \hat{C}_2$  werden unter Anwendung von  $S$  aufeinander abgebildet, denn auf der Einheitskreislinie gilt

$$S\langle z \rangle = -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2} = -\bar{z}, \quad \text{also } S\langle x + iy \rangle = -x + iy.$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{D_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{f'(S\langle z \rangle)}{f(S\langle z \rangle)} dS\langle z \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{f'(S\langle z \rangle)}{z^k f(z)} \left( \frac{\partial S\langle z \rangle}{\partial z} \right) dz. \quad (2.6)$$

Leiten wir die gerade schon benutzte Beziehung  $f(S\langle z \rangle) = z^k f(z)$  ab, so erhalten wir

$$f'(S\langle z \rangle) \frac{\partial S\langle z \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} f(S\langle z \rangle) = k z^{k-1} f(z) + z^k f'(z).$$

Eingesetzt in (2.6) ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{D_1 \hat{C}_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{k z^{k-1} f(z) + z^k f'(z)}{z^k f(z)} dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \left( \frac{k}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)} \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{k}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.
\end{aligned}$$

Für das erste Integral auf der rechten Seite gilt hierbei

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{B_2 \hat{C}_1} \frac{k}{z} dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{k}{2\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{k}{12}.$$

- (iv) Die Abbildung  $e : z \mapsto e^{2\pi iz}$  bildet das Geradenstück  $\overline{EA}$  auf eine genau einmal negativ durchlaufene Kreislinie  $K$  um  $q = 0$  ab, in deren Inneren mit der möglichen Ausnahme von  $q = 0$  keine Null- und Polstellen von  $f \circ e^{-1}$  liegen. Mit dem bekannten Zusammenhang

$$f(z) = \sum_{n \geq N} a_n(f) e^{2\pi i n z} = \sum_{n \geq N} a_n(f) q^n = (f \circ e^{-1})(q)$$

zwischen der Fourier-Entwicklung von  $f$  bei  $z = \infty$  und der Laurent-Entwicklung von  $f \circ e^{-1}$  um  $q = 0$  gilt dann

$$f'(z) = 2\pi i \sum_{n \geq N} n a_n(f) e^{2\pi i n z} = 2\pi i q \sum_{n \geq N} n a_n(f) q^{n-1} = 2\pi i q (f \circ e^{-1})'(q)$$

und somit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{EA}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{2\pi i q (f \circ e^{-1})'(q)}{(f \circ e^{-1})(q)} \frac{dq}{2\pi i q} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{(f \circ e^{-1})'(q)}{(f \circ e^{-1})(q)} dq \\
&= -\text{ord}((f \circ e^{-1}); 0) \\
&= -\text{ord}(f; \infty),
\end{aligned}$$

wobei die vorletzte Gleichheit mit dem Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral folgt.

Offensichtlich haben wir hiermit die Valenzformel für den Fall bewiesen, dass  $f$  auf  $\partial \mathcal{F}$  mit der möglichen Ausnahme von  $i$  und  $\rho$  keine Null- und Polstellen hat. Für den Fall, dass es doch solche Null- und Polstellen gibt, modifiziert man die Integrationskurve wie in Abbildung 2.2 angegeben und verfährt entsprechend.

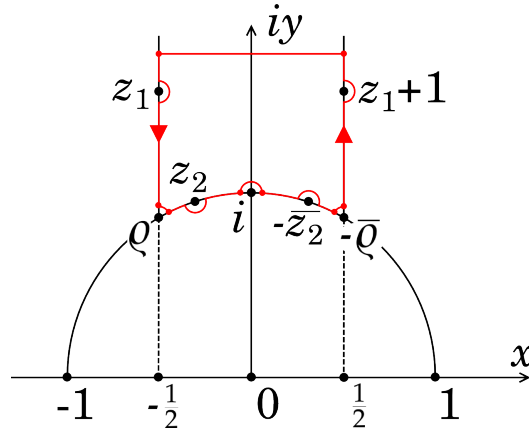


Abbildung 2.2: Die Punkte  $z_1$  und  $z_2$  repräsentieren die beiden möglichen Typen von Null- bzw. Polstellen, die nun noch hinzukommen. Man beachte, dass die jeweiligen Kreisbögen unter  $T$  bzw.  $S$  aufeinander abgebildet werden.

□

Die Valenzformel 2.17 lässt sich auf meromorphe Modulformen bezüglich der beliebigen Kongruenzuntergruppe  $\Gamma$  verallgemeinern.

**Satz 2.18.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$  und  $0 \neq f \in V_k(\Gamma)$ . Für ein beliebiges  $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$  setzen wir zudem

$$\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}} := \begin{cases} 2 & -I_2 \in \Gamma \text{ oder } \mathfrak{s} \text{ ist irregulär,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt die **Valenzformel**

$$\sum_{z \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{\text{ord}(f; z)}{|\Gamma_z|} + \sum_{\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}} = \frac{k \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]}{24},$$

wobei  $z$  ein Vertretersystem modulo  $\Gamma$  in  $\mathbb{H}$  durchläuft.

*Beweis.* Seien  $n := [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$  und  $A_1, \dots, A_n$  ein Vertretersystem von  $\Gamma$  in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  wie in (1.6). Nach Teil (b) von Proposition 2.16 gilt dann

$$F := \prod_{v=1}^n f|_k A_v \in V_{kn},$$

so dass wir die bereits bewiesene Valenzformel 2.17 auf  $F$  anwenden können. Es gilt dann

$$\text{ord}(F; \infty) + \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; i) + \frac{1}{3} \cdot \text{ord}(F; \rho) + \sum_{\substack{z \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \\ z \neq i, \rho}} \text{ord}(F; z) = \frac{kn}{12},$$

wobei  $z$  über die Elemente eines Vertretersystem modulo  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  in  $\mathbb{H}$  laufe, die weder zu  $i$  noch zu  $\rho$  äquivalent sind. Mit Korollar 1.28 lässt sich dies umformulieren zu

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{ord}(F; \infty) + \sum_{z \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \frac{\mathrm{ord}(F; z)}{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_z|} = \frac{kn}{24}, \quad (2.7)$$

wobei  $z$  ein komplettes Vertretersystem modulo  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  in  $\mathbb{H}$  durchlaufe.

Für ein festes  $z \in \mathbb{H}$  gilt

$$\mathrm{ord}(F; z) = \sum_{\nu=1}^n \mathrm{ord}(f|_k A_\nu; z) = \sum_{\nu=1}^n \mathrm{ord}(f; A_\nu \langle z \rangle) = \sum_{w \in \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle} [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_w : \Gamma_w] \cdot \mathrm{ord}(f; w), \quad (2.8)$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass die Ordnung von  $f$  an der Stelle  $A_\nu \langle z \rangle$  nicht von der Wahl von  $A_\nu$  abhängt, und Teil (b) von Lemma 1.38 auf

$$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \quad U = \Gamma, \quad S = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle$$

angewendet haben. Da  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_w$  endlich und unabhängig von der Wahl von  $w \in \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle$  ist, gilt

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_w : \Gamma_w] = \frac{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_z|}{|\Gamma_w|}$$

und eingesetzt in (2.8) somit

$$\frac{\mathrm{ord}(F; z)}{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_z|} = \sum_{w \in \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle} \frac{\mathrm{ord}(f; w)}{|\Gamma_w|}.$$

Summieren wir über ein Vertretersystem der Aktion von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$ , so erhalten wir

$$\sum_{z \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \frac{\mathrm{ord}(F; z)}{|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_z|} = \sum_{z \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}} \sum_{w \in \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle z \rangle} \frac{\mathrm{ord}(f; w)}{|\Gamma_w|} = \sum_{w \in \Gamma \backslash \mathbb{H}} \frac{\mathrm{ord}(f; w)}{|\Gamma_w|}. \quad (2.9)$$

Die Valenzformel folgt nun aus (2.7) und (2.9), wenn wir

$$\frac{1}{2} \cdot \mathrm{ord}(F; \infty) = \sum_{\mathfrak{s} \in \mathrm{Cusps}(\Gamma)} \frac{\mathrm{ord}_\Gamma(f; \mathfrak{s})}{e_{\Gamma, \mathfrak{s}}} \quad (2.10)$$

zeigen können. Dafür müssen wir ein wenig ausholen: Wir betrachten den Quotienten  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \langle T \rangle$  mit der natürlichen Aktion von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  über Linkstranslation und die Abbildung

$$\pi : \begin{cases} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \langle T \rangle & \twoheadrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty & \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \langle \infty \rangle = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, \\ M \cdot \langle T \rangle & \mapsto M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty & \mapsto M \langle \infty \rangle. \end{cases}$$

Diese ist offensichtlich surjektiv, verträglich mit den jeweiligen Aktionen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und bildet die Klasse  $I_2 \cdot \langle T \rangle = \langle T \rangle$  auf  $\infty$  ab. Faktorisieren wir überall von links  $\Gamma$  heraus, erhalten wir die surjektive Abbildung

$$\pi_\Gamma : \begin{cases} \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \langle T \rangle & \twoheadrightarrow \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty & \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cusps}(\Gamma), \\ \Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle & \mapsto \Gamma \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty & \mapsto \Gamma \langle M \langle \infty \rangle \rangle. \end{cases}$$



Für ein beliebiges  $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$  gilt nach Definition von  $\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}$

$$|\pi_{\Gamma}^{-1}(\mathfrak{s})| = \frac{2}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}}. \quad (2.11)$$

Betrachten wir nun noch die surjektive Abbildung

$$\pi_{\Gamma, T} : \begin{cases} \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) & \twoheadrightarrow \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) / \langle T \rangle, \\ \Gamma \cdot M & \mapsto \Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle. \end{cases}$$

Für  $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$ ,  $s \in \mathfrak{s}$  und  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M\langle\infty\rangle = s$  gilt dann

$$|\pi_{\Gamma, T}^{-1}(\Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle)| = \tilde{h}_{\Gamma}(\mathfrak{s}) := \begin{cases} h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ regulär,} \\ 2h_{\Gamma}(\mathfrak{s}) & \text{für } \mathfrak{s} \text{ irregulär,} \end{cases} \quad (2.12)$$

denn: Aus der Definition von  $\pi_{\Gamma, T}$  können wir

$$|\pi_{\Gamma, T}^{-1}(\Gamma \cdot M \cdot \langle T \rangle)| = [\langle T \rangle : (M^{-1}\Gamma M) \cap \langle T \rangle]$$

ablesen. Nach Lemma 1.34 gilt

$$H_{\mathfrak{s}} = M^{-1}\Gamma M \cap \text{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} = M^{-1}\Gamma M \cap \langle T, -I_2 \rangle$$

und nach Lemma 1.35 lassen sich drei Fälle unterscheiden:

**Fall 1:**  $H_{\mathfrak{s}} = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle$ . Dann gilt  $M^{-1}\Gamma M \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle$ .

**Fall 2:**  $H_{\mathfrak{s}} = \langle -(T^{-h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}) \rangle$ . Dann gilt  $M^{-1}\Gamma M \cap \langle T \rangle = \langle -(T^{-h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}) \rangle \cap \langle T \rangle = \langle T^{2h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle$ .

**Fall 3:**  $H_{\mathfrak{s}} = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}, -I_2 \rangle$ . Dann gilt  $M^{-1}\Gamma M \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})}, -I_2 \rangle \cap \langle T \rangle = \langle T^{h_{\Gamma}(\mathfrak{s})} \rangle$ .

Mit Definition 1.36 folgt hieraus die Behauptung. #

Nach Definition 1.29 gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\Gamma(N) \subseteq \Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Nach Konstruktion ist  $\Gamma(N)$  normal in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , so dass nach Bemerkung 1.37 für alle  $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma(N))$  der Wert  $\tilde{h}_{\Gamma(N)}(\mathfrak{s})$  übereinstimmt, so dass wir auf die Kennzeichnung der jeweiligen Spitzenklasse verzichten und kurz  $\tilde{h}_{\Gamma(N)}$  schreiben können. Betrachten wir nun noch die surjektive Abbildung

$$\pi_{\Gamma(N), \Gamma} : \begin{cases} \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) & \twoheadrightarrow \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ \Gamma(N) \cdot M & \mapsto \Gamma \cdot M. \end{cases}$$

Wie man anhand des Beweises des **Zweiten Isomorphiesatzes** für Gruppen aus der Algebra leicht einsieht, gilt dann für alle  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$

$$|\pi_{\Gamma(N), \Gamma}^{-1}(\Gamma \cdot M)| = [\Gamma : \Gamma(N)]. \quad (2.13)$$



Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; \infty) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{ord}(F; \infty)}{\tilde{h}_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}} \\
&\stackrel{\text{Aufgabe 2.4}}{=} \frac{1}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]} \cdot \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma(N)}(F; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{\tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\
&= \frac{1}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]} \cdot \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma(N)}(\prod_{v=1}^n f|_k A_v; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{\tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\
&= \frac{1}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]} \cdot \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\sum_{v=1}^n \text{ord}_{\Gamma(N)}(f|_k A_v; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{\tilde{h}_{\Gamma(N)}}
\end{aligned}$$

Nach Teil (b) von Definition 2.11 gilt

$$\text{ord}_{\Gamma(N)}(f|_k A_v; \mathfrak{s}_N) = \text{ord}_{\Gamma(N)}(f; A_v \langle \mathfrak{s}_N \rangle) \quad \text{für alle } \mathfrak{s}_N \in \text{Cusps}(\Gamma(N)).$$

Da  $\Gamma(N)$  normal in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist, gilt

$$\begin{aligned}
A_v \langle (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M) \rangle &= (A_v \Gamma(N)M) \langle \infty \rangle \\
&= (\Gamma(N)A_v M) \langle \infty \rangle \\
&= (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)A_v M).
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(F; \infty) \\
&= \frac{1}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]} \cdot \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\sum_{v=1}^n \text{ord}_{\Gamma(N)}(f; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)A_v M))}{\tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\
&= \frac{1}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]} \cdot \sum_{v=1}^n \left( \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma(N)}(f; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)A_v M))}{\tilde{h}_{\Gamma(N)}} \right) \\
&= \frac{[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]}{2 \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]} \cdot \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma(N)}(f; (\pi_{\Gamma(N)} \circ \pi_{\Gamma(N),T})(\Gamma(N)M))}{\tilde{h}_{\Gamma(N)}} \\
&\stackrel{\text{Aufgabe 2.4}}{=} \frac{1}{2 \cdot [\Gamma : \Gamma(N)]} \cdot \sum_{\Gamma(N)M \in \Gamma(N) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; (\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T} \circ \pi_{\Gamma(N),\Gamma})(\Gamma(N)M))}{\tilde{h}_{\Gamma}((\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T} \circ \pi_{\Gamma(N),\Gamma})(\Gamma(N)M))} \\
&\stackrel{(2.13)}{=} \frac{1}{2} \cdot \sum_{\Gamma M \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; (\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T})(\Gamma M))}{\tilde{h}_{\Gamma}((\pi_{\Gamma} \circ \pi_{\Gamma,T})(\Gamma M))} \\
&\stackrel{(2.12)}{=} \frac{1}{2} \cdot \sum_{\Gamma M \langle T \rangle \in \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z}) / \langle T \rangle} \text{ord}_{\Gamma}(f; \pi_{\Gamma}(\Gamma M \langle T \rangle)) \\
&\stackrel{(2.11)}{=} \sum_{\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)} \frac{\text{ord}_{\Gamma}(f; \mathfrak{s})}{\epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}}},
\end{aligned}$$

also (2.10) und somit auch die Valenzformel.  $\square$

Eine wichtige Anwendung der Valenzformel ist, dass wir mit ihr eine Aussage über die Struktur der Vektorräume  $M_k(\Gamma)$  und  $S_k(\Gamma)$  treffen können. Für nicht-positive Werte von  $k$  werden wir dies gleich durchführen und zeigen, dass es dort nicht sehr viele holomorphe Modulformen gibt. In Kapitel 3 werden wir diese Methode wieder aufgreifen und im Spezialfall  $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mithilfe der sogenannten EISENSTEINreihen<sup>22</sup> interessantere Aussagen für allgemeines  $k$  beweisen.

**Korollar 2.19.** Es gilt  $M_k(\Gamma) = \begin{cases} \{0\} & \text{für } k < 0, \\ \mathbb{C} & \text{für } k = 0. \end{cases}$

*Beweis.* Gäbe es für ein  $k < 0$  eine ganze Modulform  $f \in M_k(\Gamma)$  ungleich 0, so wäre aufgrund der Holomorphie von  $f$  die linke Seite der Valenzformel 2.18 nicht-negativ, die rechte nach Voraussetzung jedoch negativ. Ein solches  $f$  kann es also nicht geben.

Die Inklusion  $\mathbb{C} \subseteq M_0(\Gamma)$  ist klar. Andererseits liegt für jedes  $f \in M_0(\Gamma)$  und jedes  $z_0 \in \mathbb{H}$  auch

$$g(z) := f(z) - f(z_0) \in M_0(\Gamma).$$

Wegen der Holomorphie von  $g$  und  $g(z_0) = 0$  kann  $g$  die Valenzformel 2.18 nicht erfüllen. Es folgt  $g \equiv 0$  und somit  $f \equiv f(z_0) \in \mathbb{C}$ .  $\square$

## 2.4 Das Petersson-Skalarprodukt

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist die Konstruktion eines „natürlichen“ Skalarprodukts auf dem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $S_k(\Gamma)$  der Spitzenformen von Gewicht  $k \in \mathbb{Z}$  bezüglich der fest vorgegebenen Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Hierzu benötigen wir zunächst ein  $\Gamma$ -invariantes Maß (vgl. hier) auf  $\mathbb{H}$ .



**Lemma 2.20.** Die Differentialform

$$d\omega(z) := \frac{dx \wedge dy}{y^2} \quad \text{für alle } z = x + iy \in \mathbb{H}$$

ist invariant unter  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$ , es gilt also

$$d\omega(M\langle z \rangle) = d\omega(z) \quad \text{für alle } M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+ \text{ und alle } z = x + iy \in \mathbb{H}.$$

<sup>22</sup>Ferdinand Gotthold Max Eisenstein (1823-1852)

*Beweis.* Einerseits gilt für alle  $z = x + iy \in \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
 d\omega(z) &= \frac{1}{y^2} \cdot (dx \wedge dy) \\
 &= \frac{i}{2y^2} \cdot (0 - i \cdot dx \wedge dy - i \cdot dx \wedge dy + 0) \\
 &= \frac{i}{2y^2} \cdot (dx \wedge dx - i \cdot dx \wedge dy + i \cdot dy \wedge dx + dy \wedge dy) \\
 &= \frac{i}{2y^2} \cdot (dx + i \cdot dy) \wedge (dx - i \cdot dy) \\
 &= \frac{i}{2y^2} \cdot (dz \wedge \overline{dz}).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Andererseits gilt für ein beliebiges  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^+$  und ein beliebiges  $z \in \mathbb{H}$

$$\frac{dM\langle z \rangle}{dz} = \frac{d \frac{az+b}{cz+d}}{dz} = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{\det(M)}{j(M,z)^2}. \tag{2.15}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 d\omega(M\langle z \rangle) &\stackrel{(2.14)}{=} \frac{i}{2 \cdot \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^2} \cdot (dM\langle z \rangle \wedge \overline{dM\langle z \rangle}) \\
 &\stackrel{(2.15)}{=} \frac{i}{2 \cdot \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^2} \cdot \left( \frac{\det(M) \cdot dz}{j(M,z)^2} \wedge \frac{\overline{\det(M) \cdot dz}}{j(M,z)^2} \right) \\
 &\stackrel{(1.2)}{=} \frac{i \cdot |j(M,z)|^4}{2 \cdot \det(M)^2 \cdot y^2} \cdot \frac{\det(M)^2}{|j(M,z)|^4} \cdot (dz \wedge \overline{dz}) \\
 &\stackrel{(2.14)}{=} d\omega(z)
 \end{aligned}$$

und somit das Lemma. □



**Lemma 2.21.** Seien  $F_1$  und  $F_2$  Fundamentalbereiche für die Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$ , so dass die Ränder  $\partial F_1$  von  $F_1$  und  $\partial F_2$  von  $F_2$  Nullmengen, also Mengen von Maß Null, sind. Sei  $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  messbar (vgl. *hier*) und  $\Gamma$ -invariant, gelte also  $g(M\langle z \rangle) = g(z)$  für alle  $M \in \Gamma$ . Weiter gelte

$$\int_{F_1} |g(z)| d\omega(z) < \infty,$$

also dass  $|g|$  über  $F_1$  integrierbar ist – dies impliziert, dass auch  $g$  über  $F_1$  integrierbar ist. Dann ist  $g$  auch über  $F_2$  integrierbar und es gilt

$$\int_{F_2} g(z) d\omega(z) = \int_{F_1} g(z) d\omega(z).$$

*Beweis.* Nach Eigenschaft (ii) in Definition 1.21 gilt

$$\mathbb{H} = \bigcup_{M \in \Gamma} M\langle F_1 \rangle = \bigcup_{M \in \Gamma} M\langle F_2 \rangle, \tag{2.16}$$

nach Eigenschaft (iii) zudem

$$M\langle F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle F_1 \rangle = \emptyset \quad \text{für alle } M \neq \pm \tilde{M} \text{ in } \bar{\Gamma}. \quad (2.17)$$

Da mit  $\partial F_1$  auch für alle  $M, \tilde{M} \in \bar{\Gamma}$  die Translate  $M\langle \partial F_1 \rangle, \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle$  Nullmengen sind, trifft dies folglich für  $M \neq \pm \tilde{M}$  auch auf

$$\begin{aligned} M\langle F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle F_1 \rangle &= M\langle F_1^\circ \cup \partial F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle F_1^\circ \cup \partial F_1 \rangle \\ &= (M\langle F_1^\circ \rangle \cup M\langle \partial F_1 \rangle) \cap (\tilde{M}\langle F_1^\circ \rangle \cup \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle) \\ &\stackrel{(2.17)}{=} (M\langle F_1^\circ \rangle \cap \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle) \cup (M\langle \partial F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle F_1^\circ \rangle) \cup (M\langle \partial F_1 \rangle \cap \tilde{M}\langle \partial F_1 \rangle) \end{aligned}$$

zu. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{F_1} g(z) \, d\omega(z) &= \int_{\mathbb{H} \cap F_1} g(z) \, d\omega(z) \\ &\stackrel{(2.16)}{=} \int_{(\cup_{M \in \bar{\Gamma}} M\langle F_2 \rangle) \cap F_1} g(z) \, d\omega(z) \\ &= \int_{\cup_{M \in \bar{\Gamma}} (M\langle F_2 \rangle \cap F_1)} g(z) \, d\omega(z), \end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, dass es sich hierbei um eine abzählbare Vereinigung messbarer Mengen handelt. Da die paarweisen Durchschnitte nach der obigen Überlegung jeweils Nullmengen sind, gilt die abzählbare Additivität des Integrals und somit

$$\begin{aligned} \int_{F_1} g(z) \, d\omega(z) &= \sum_{M \in \bar{\Gamma}} \int_{M\langle F_2 \rangle \cap F_1} g(z) \, d\omega(z) \\ &= \sum_{M \in \bar{\Gamma}} \int_{F_2 \cap M^{-1}\langle F_1 \rangle} g(M\langle z \rangle) \, d\omega(M\langle z \rangle) \\ &\stackrel{2.20}{=} \sum_{M \in \bar{\Gamma}} \int_{F_2 \cap M^{-1}\langle F_1 \rangle} g(z) \, d\omega(z) \\ &= \dots = \int_{F_2} g(z) \, d\omega(z). \end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.22.** Der Rand des in Satz 1.26 eingeführten Standardfundamentaltbereichs  $\mathcal{F}$  für die Aktion von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$  ist offensichtlich eine Nullmenge. Weiter gilt

$$\mathrm{vol}(\mathcal{F}) := \int_{\mathcal{F}} d\omega(z) = \frac{\pi}{3} < \infty,$$

denn: Setzen wir für ein beliebiges  $c \in \mathbb{R}_{>1}$

$$\mathcal{F}_c := \mathcal{F} \cap \{z = x + iy \in \mathbb{H} \mid y \leq c\},$$

so gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{F}} d\omega(z) &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} \frac{dx \wedge dy}{y^2} \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} \frac{d^2x \cdot y - dy \wedge dx}{y^2} + i \cdot \frac{d^2y \cdot y - dy \wedge dy}{y^2} \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} d\left(\frac{dx + i dy}{y}\right) \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{F}_c} d\left(\frac{dz}{y}\right) \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\partial \mathcal{F}_c} \frac{dz}{y},
 \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit mit dem **Satz von Stokes** aus der Höheren Analysis ergibt. Für das Integral über die Strecke

$$z(t) = t + ic \quad \text{mit } t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

gilt

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d(t+ic)}{c} = \frac{1}{c} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{c} \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 0.$$

Die Integrale über die beiden Strecken

$$z(t) = \pm \frac{1}{2} + it \quad \text{mit } t \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, c\right]$$

heben sich auf, da letztere in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und der Integrand offensichtlich invariant unter der Ersetzung  $z \mapsto z + 1$  ist. Es verbleibt das Integral über den Kreisbogen

$$z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{mit } t \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right].$$

Dieses Integral muss reellwertig sein und hat damit den Wert

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dz(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\sin t} dt &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{i \cos t - \sin t}{\sin t} dt \\
 &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{Re} \left( \frac{i \cos t - \sin t}{\sin t} \right) dt \\
 &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (-1) dt \\
 &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.21 stimmt das Volumen sämtlicher Fundamentalbereiche für die Aktion von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$ , deren Rand eine Nullmenge ist, überein, so dass sich der Wert  $\mathrm{vol}(\mathcal{F})$  auch als Volumen der kompakten Riemann'schen Fläche

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \stackrel{1.16}{\cong} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$$

interpretieren lässt.

Wir suchen nun nach einem aus Modulformen bzgl.  $\Gamma$  zusammengesetzten Integranden, der  $\Gamma$ -invariant und auf  $\mathbb{H}$  beschränkt ist.

**Proposition 2.23.** Für  $k \in \mathbb{Z}$  und  $f \in M_k(\Gamma)$  setzen wir

$$g(z) := y^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Es gelten nun die folgenden Aussagen:

- (a)  $g$  ist  $\Gamma$ -invariant.
- (b) Ist speziell  $f \in S_k(\Gamma)$ , so ist  $g$  auf  $\mathbb{H}$  beschränkt.

*Beweis.* Behauptung (a) können wir einfach nachrechnen. Tatsächlich gilt für jedes  $M \in \Gamma$  und jedes  $z = x + iy \in \mathbb{H}$

$$g(M\langle z \rangle) = \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^{\frac{k}{2}} \cdot |f(M\langle z \rangle)| \stackrel{(1.2), (V_1)}{=} \frac{y^{\frac{k}{2}}}{|j(M, z)|^k} \cdot |j(M, z)^k \cdot f(z)| = y^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)| = g(z).$$

Zum Beweis von Behauptung (b) genügt es nach (2.16) und Aussage (a), die Beschränktheit von  $g$  auf einem Fundamentalbereich der Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  nachzuweisen. Sei

$$\mathcal{F}_\Gamma := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle \quad \text{für } A_1, \dots, A_m \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \text{ mit } \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \bigsqcup_{\mu=1}^m \bar{\Gamma} A_\mu$$

ein solcher Fundamentalbereich, wie wir ihn in (1.8) eingeführt haben. Sei nun  $c \in \mathbb{R}_{>1}$  beliebig. Dann ist  $g$  als stetige Funktion auf dem Kompaktum

$$(\mathcal{F}_\Gamma)_c := \bigcup_{\mu=1}^m A_\mu \langle \mathcal{F}_c \rangle$$

beschränkt. Es verbleibt also zu zeigen, dass  $g$  für  $z \rightarrow A_\mu \langle \infty \rangle$  mit  $\mu \in \{1, \dots, m\}$  beschränkt ist, wobei wir  $z \in \mathcal{F}_\Gamma$  annehmen dürfen. Wir verlagern diese Fragestellung für die verschiedenen Werte von  $\mu$  durch Anwenden der jeweiligen Matrix  $A_\mu^{-1}$  in den Standardfundamentalbereich  $\mathcal{F}$ . Die Proposition folgt nun, wenn wir für alle  $\mu \in \{1, \dots, m\}$

$$\mathrm{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle) \rightarrow \infty \text{ für } A_\mu^{-1} \langle z \rangle \in \mathcal{F} \implies g(z) \rightarrow 0$$

zeigen können. Tatsächlich hat nach  $(V_2)$  für jedes  $\mu \in \{1, \dots, m\}$  die Funktion  $f|_k A_\mu$  in  $\infty$  eine Fourier-Entwicklung der Form

$$(f|_k A_\mu)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_k A_\mu) q^{\frac{n}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Lassen wir auf beiden Seiten  $A_\mu^{-1}$  operieren, so erhalten wir

$$f(z) = j(A_\mu^{-1}, z)^{-k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_k A_\mu) e^{\frac{2\pi i n A_\mu^{-1}(z)}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Für ein beliebiges  $z \in A_\mu \langle \mathcal{F} \rangle \setminus A_\mu \langle \mathcal{F}_c \rangle$  folgt  $\text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle) > c$  und somit

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |y|^{\frac{k}{2}} \cdot |f(z)| \\ &= |y|^{\frac{k}{2}} \cdot |j(A_\mu^{-1}, z)|^{-k} \cdot \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f|_k A_\mu) e^{\frac{2\pi i n A_\mu^{-1}(z)}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}} \right| \\ &\stackrel{(1.2)}{\leq} |\text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle)|^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\frac{2\pi \text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle)}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f|_k A_\mu)| \cdot e^{-\frac{2\pi(n-1)\text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle)}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}} \\ &\leq |\text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle)|^{\frac{k}{2}} \cdot e^{-\frac{2\pi \text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle)}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f|_k A_\mu)| \cdot e^{-\frac{2\pi(n-1)c}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}} \\ &= \frac{|\text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle)|^{\frac{k}{2}}}{e^{\frac{2\pi \text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle)}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}}} \cdot \left( e^{\frac{2\pi c}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f|_k A_\mu)| \cdot e^{-\frac{2\pi n c}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}} \right) \\ &= \frac{|\text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle)|^{\frac{k}{2}}}{e^{\frac{2\pi \text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle)}{h_\Gamma(A_\mu(\infty))}}} \cdot \text{konst.} \\ &\stackrel{\text{Im}(A_\mu^{-1} \langle z \rangle) \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0. \end{aligned}$$

Es folgt Behauptung (b). □

**Definition 2.24.** Für  $k \in \mathbb{Z}$  und  $f, g \in M_k(\Gamma)$  mit  $f \cdot g \in S_{2k}(\Gamma)$  ist das **PETERSSON-Skalarprodukt**<sup>23</sup> definiert durch

$$\langle f | g \rangle_\Gamma := \frac{1}{[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \bar{\Gamma}]} \cdot \int_F f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z), \quad (2.18)$$

wobei  $F$  einen Fundamentalbereich für die Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  bezeichne, dessen Rand eine Nullmenge in  $\mathbb{H}$  ist. Im Fall  $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  schreiben wir auch kurz  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  statt  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}$ .

**Satz 2.25.** Seien  $k \in \mathbb{Z}$  und  $f, g \in M_k(\Gamma)$  mit  $f \cdot g \in S_{2k}(\Gamma)$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

---

<sup>23</sup>Hans Petersson (1902-1984)



(a) Das Integral in (2.18) konvergiert absolut und ist unabhängig von der Wahl des benutzten Fundamentalbereichs  $F$ .

(b) Die Zuordnung

$$\begin{aligned} S_k(\Gamma) \times S_k(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (f, g) &\mapsto \langle f | g \rangle_\Gamma \end{aligned}$$

definiert ein Skalarprodukt auf  $S_k(\Gamma)$ .

(c) Gilt zusätzlich  $f, g \in M_k(\tilde{\Gamma})$  für eine weitere Kongruenzuntergruppe  $\tilde{\Gamma} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ , so gilt

$$\langle f | g \rangle_{\tilde{\Gamma}} = \langle f | g \rangle_\Gamma,$$

das Petersson-Skalarprodukt ist in diesem Sinne also unabhängig von der Wahl von  $\Gamma$ .

*Beweis.* Wegen  $|f(z)\overline{g(z)}y^k| = y^k \cdot |(fg)(z)|$  können wir daher Proposition 2.23 anwenden und erhalten die  $\Gamma$ -Invarianz und Beschränktheit des Integranden  $f(z)\overline{g(z)}y^k$  auf  $\mathbb{H}$ . Da  $\mathcal{F}_\Gamma$  eine endliche Vereinigung von Kopien des Standardfundamentalbereichs  $\mathcal{F}$  ist, ergibt sich mit Beispiel 2.22

$$\int_{\mathcal{F}_\Gamma} d\omega(z) < \infty$$

und daher auch

$$\int_{\mathcal{F}_\Gamma} |f(z)\overline{g(z)}y^k| d\omega(z) < \infty.$$

Die Unabhängigkeit von der Wahl des Fundamentalbereichs und somit auch Behauptung (a) folgt nun mit Lemma 2.21.

Behauptung (b), dass also das Petersson-Skalarprodukt eingeschränkt auf  $S_k(\Gamma) \times S_k(\Gamma)$  die Eigenschaften eines Skalarprodukts erfüllt, ist schnell überprüft und soll hier nicht vorgeführt werden.

Es verbleibt Behauptung (c) zu zeigen. Da für je zwei Kongruenzuntergruppen  $\Gamma, \tilde{\Gamma}$  ihr Durchschnitt  $\Gamma \cap \tilde{\Gamma}$  wieder eine Kongruenzuntergruppe ist, können wir dabei ohne Einschränkung  $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$  annehmen. Analog zu (1.7) gilt dann

$$\bar{\Gamma} = \bigsqcup_{q=1}^r \tilde{\Gamma} B_q \quad \text{mit } B_1, \dots, B_r \in \bar{\Gamma}$$

und für einen beliebigen Fundamentalbereich  $\mathcal{F}_\Gamma$  für die Aktion von  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}$  ist analog zu (1.8) durch

$$\mathcal{F}_{\tilde{\Gamma}} := \bigcup_{q=1}^r B_q \langle \mathcal{F}_\Gamma \rangle$$

ein Fundamentalbereich für die Aktion von  $\tilde{\Gamma}$  auf  $\mathbb{H}$  gegeben. Wegen der in Teil (a) gezeigten Wohldefiniertheit des Petersson-Skalarprodukt unter der Wahl eines Fundamentalbereichs gilt nun

$$\langle f | g \rangle_{\tilde{\Gamma}} = \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \tilde{\Gamma}]} \cdot \int_{\mathcal{F}_{\tilde{\Gamma}}} f(z)\overline{g(z)}y^k d\omega(z)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \tilde{\Gamma}]} \cdot \int_{\bigcup_{q=1}^r B_q(\mathcal{F}_\Gamma)} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\
&\stackrel{f, g \in M_k(\Gamma)}{=} \frac{[\Gamma : \tilde{\Gamma}]}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \tilde{\Gamma}]} \cdot \int_{\mathcal{F}_\Gamma} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\
&= \frac{1}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]} \cdot \int_{\mathcal{F}_\Gamma} f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z) \\
&= \langle f \mid g \rangle_\Gamma
\end{aligned}$$

und somit Behauptung (c). □

## 2.5 Übungsaufgaben

**Aufgabe 2.1.** Zeigen Sie für eine beliebige Kongruenzuntergruppe  $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und ein beliebige Gewichte  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  die folgenden Aussagen über Modulformen und Ableitungen:

- (a)  $f \in V_0(\Gamma) \implies f' \in V_2(\Gamma)$ .
- (b)  $f \in V_k(\Gamma), g \in V_\ell(\Gamma) \implies \ell f'g - kf'g' \in V_{k+\ell+2}(\Gamma)$ .
- (c)  $f \in V_k(\Gamma), g \in V_\ell(\Gamma) \implies \ell(\ell+1)f''g - 2(k+1)(\ell+1)f'g' + k(k+1)fg'' \in V_{k+\ell+4}(\Gamma)$ .

**Bemerkung:** Die aufgeführten Modulformen sind Beispiele sogenannter RANKIN-COHEN-Klammern.<sup>24</sup> Diese wurden 1994 von ZAGIER<sup>25</sup> benannt, als dieser Rankin-Cohen-Algebren als theoretischen Überbau für diese einführt.

**Aufgabe 2.2.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass jede Modulform  $f \in M_k \setminus S_k$  mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{H}$  besitzt.

**Aufgabe 2.3.** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

eine holomorphe Funktion darstellt, für  $\mathrm{Im}(z) > 1$  beschränkt ist und den Transformationsformeln

$$\vartheta(z+2) = \vartheta(z) \quad \text{und} \quad \vartheta\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{i}} \cdot \vartheta(z)$$

genügt, wobei die Quadratwurzel aus  $\frac{z}{i}$  über den Hauptzweig des Logarithmus definiert ist. Folgern Sie daraus

$$\vartheta^8 \in M_4(\langle T^2, S \rangle).$$

**Aufgabe 2.4.** Seien  $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$  zwei Kongruenzuntergruppen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und sei  $f \in V_k(\Gamma) \subseteq V_k(\tilde{\Gamma})$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Seien weiter  $\tilde{s} \in \mathrm{Cusps}(\tilde{\Gamma})$  und  $s$  das Bild von  $\tilde{s}$  unter der natürlichen Abbildung  $\mathrm{Cusps}(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \mathrm{Cusps}(\Gamma)$ . Zeigen Sie:

<sup>24</sup>Robert Alexander Rankin (1915-2001), Henri Cohen (\* 1946)

<sup>25</sup>Don Bernard Zagier (\* 1951)

(a)  $h_\Gamma(\mathfrak{s}) \mid h_\Gamma(\tilde{\mathfrak{s}})$  und  $\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s}) \mid \tilde{h}_\Gamma(\tilde{\mathfrak{s}})$ .

(b)  $\frac{\text{ord}_\Gamma(f; \tilde{\mathfrak{s}})}{\tilde{h}_\Gamma(\tilde{\mathfrak{s}})} = \frac{\text{ord}_\Gamma(f; \mathfrak{s})}{\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s})}$ .

**Aufgabe 2.5.** (a) Seien  $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine Kongruenzuntergruppe,  $\mathfrak{s} \in \text{Cusps}(\Gamma)$ ,  $s \in \mathfrak{s}$  und  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M\langle\infty\rangle = s$ . Seien weiter  $k \in \mathbb{Z}$  und  $f \in M_k(\Gamma)$  mit Fourier-Entwicklung

$$(f|_k M)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f|_k M)(q^{\frac{1}{h_\Gamma(\mathfrak{s})}})^n.$$

Zeigen Sie: Gilt

$$a_n(f|_k M) = 0 \quad \text{für } n = 0, \dots, \lfloor \frac{k \cdot \epsilon_{\Gamma, \mathfrak{s}} \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]}{24} \rfloor,$$

so folgt bereits  $f \equiv 0$ .

(b) Zeigen Sie für eine Kongruenzuntergruppe  $-I_2 \notin \Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , die mindestens eine reguläre Spitze besitzt, die Abschätzung

$$\dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma) \leq 1 + \lfloor \frac{k \cdot [\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]}{24} \rfloor.$$

**Aufgabe 2.6.** Sei  $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  eine Kongruenzuntergruppe, sei  $k$  eine ganze Zahl und seien  $f, g \in M_k(\Gamma)$  mit  $f \cdot g \in S_{2k}(\Gamma)$ . Sei weiter

$$\Omega(f, g)(z) := f(z) \overline{g(z)} (\text{Im} z)^k d\omega(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle  $M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})^+$  gilt

$$\Omega(f|_k M, g|_k M)(z) = \Omega(f, g)(M\langle z \rangle).$$

(b) Für alle  $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})^+$  mit  $M\Gamma M^{-1} \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  gilt

$$[\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} : \bar{\Gamma}] = [\overline{\text{SL}_2(\mathbb{Z})} : M\bar{\Gamma}M^{-1}].$$

Seien ab sofort  $f$  und  $g$  bereits beide Spitzenformen. Zeigen Sie dann auch die folgenden Aussage:

(c) Für alle  $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Q})^+$  mit  $M\Gamma M^{-1} \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  und  $f, g \in M_k(M\Gamma M^{-1})$ , sowie ihre **Adjunkte**  $M^\# := \det(M) \cdot M^{-1}$  gilt

$$\langle f|_k M \mid g|_k M \rangle_\Gamma = \langle f \mid g \rangle_\Gamma \quad \text{und} \quad \langle f|_k M \mid g \rangle_\Gamma = \langle f \mid g|_k M^\# \rangle_\Gamma.$$

## Modulformen zur vollen Modulgruppe

In Kapitel 2 haben wir den Begriff der Modulform eingeführt, aber keine interessanten Beispiele kennengelernt. Mit den Eisenstein-Reihen und den Thetareihen gibt es zwei Hauptklassen holomorpher Modulformen bezüglich der vollen Modulgruppe, aus denen sich jeweils die komplette Algebra dieser Modulformen erzeugen lässt. In diesem Kapitel studieren wir die Eisenstein-Reihen und leiten mit ihrer Hilfe aus der Valenzformel 2.17 mit den Struktursätzen 3.12 und 3.22 explizite Beschreibungen der Vektorräume  $M_k$  und  $V_k$  der holomorphen bzw. meromorphen Modulformen von Gewicht  $k$  bezüglich der vollen Modulgruppe her. In Abschnitt 3.3 verallgemeinern wir die Eisenstein-Reihen zu POINCARÉ-Reihen<sup>26</sup> und zeigen, dass sich mit diesen und dem in Abschnitt 2.4 eingeführten Petersson'schen Skalarprodukt die Fourier-Koeffizienten von Spitzenformen auslesen lassen.

### 3.1 Eisenstein-Reihen

In Proposition 2.16 haben wir mit der Spurbildung eine Möglichkeit kennengelernt, aus einer Modulform bezüglich einer Kongruenzuntergruppe  $\Gamma$  eine Modulform bezüglich der vollen Modulgruppe  $SL_2(\mathbb{Z})$  zu konstruieren. Der Gedanke hierbei war, durch Summation über ein Vertretersystem die Invarianz unter dem Petersson'schen Strichoperator und also Axiom  $(V_1)$  bezüglich der vollen Modulgruppe zu erzwingen.

Mit einer ähnlichen Idee betrachten wir für ein gerades  $k \in \mathbb{Z}$ <sup>27</sup> die Reihe

$$\sum_{M \in SL_2(\mathbb{Z})} (1|_k M)(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

In ihrem Konvergenzgebiet erfüllt diese automatisch Axiom  $(V_1)$ . Da wegen  $(1|_k T^b)(z) = 1$  für alle  $b \in \mathbb{Z}$  unabhängig von  $z$  unendlich viele Summanden Betrag 1 haben, ist dieses Konvergenzgebiet allerdings leer. Wir wollen dies verbessern. Tatsächlich gilt für zwei Matrizen

<sup>26</sup>Henri Poincaré (1854-1912)

<sup>27</sup>Da wir ein nichttriviales Element von  $M_k$  suchen, dürfen wir uns nach Proposition 2.15 ohne Einschränkung auf gerade Werte von  $k$  beschränken.

$M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ :

$$(1|_k M)(z) = (1|_k \tilde{M})(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \iff \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \cdot M = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \cdot \tilde{M},$$

denn: Die linke Seite der Behauptung ist offensichtlich äquivalent zu

$$j(M\tilde{M}^{-1}, z)^{-k} = (1|_k(M\tilde{M}^{-1}))(z) = 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Da wir  $k$  als gerade vorausgesetzt haben, ist dies äquivalent zu

$$M\tilde{M}^{-1} \in \langle T, -I_2 \rangle = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty,$$

was die Behauptung zeigt. #

Davon inspiriert definieren wir:

**Definition 3.1.** Sei  $k \geq 4$  eine gerade ganze Zahl. Dann heißt

$$E_k(z) := \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} (1|_k M)(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{H},$$

wobei  $M$  ein Vertretersystem von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  durchläuft, die (**normierte**) **Eisenstein-Reihe** vom Gewicht  $k$ .

Mit den Eisenstein-Reihen erhalten wir unsere erste nichttriviale Klasse von Beispielen holomorpher Modulformen:

**Satz 3.2.** Für jede gerade ganze Zahl  $k \geq 4$  liegt die Eisenstein-Reihe  $E_k$  in  $M_k$ .

Wir beweisen Satz 3.2 in den folgenden Resultaten, führen aber keinen geschlossenen Beweis.

Wieder mit den Argumenten aus dem Beweis von Proposition 2.16 sehen wir, dass auch die durch  $E_k(z)$  gegebene Funktion in ihrem Konvergenzgebiet Axiom  $(V_1)$  erfüllt. Wir untersuchen daher nun die Konvergenz von  $E_k(z)$  und stellen dafür zunächst

$$E_k(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} j(M, z)^{-k} = 1 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \mathrm{ggT}(c,d)=1, c>0}} (cz + d)^{-k} \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \quad (3.1)$$

fest. Dies gilt,

denn: Offensichtlich hat jeder Summand links die Gestalt  $(cz + d)^{-k}$  mit  $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$ . An dieser Stelle lässt sich auch die Wohldefiniertheit von  $E_k$  klären: Da  $k$  als gerade vorausgesetzt war, gilt

$$j(-M, z)^{-k} = j(M, z)^{-k}.$$

Dass auf beiden Seiten über dieselben Paare  $(c, d)$  aufsummiert wird, ergibt sich nun unmittelbar aus (1.4). #

**Lemma 3.3.** Für jede gerade ganze Zahl  $k \geq 4$  konvergiert  $E_k$  gleichmäßig absolut auf Bereichen der Form

$$D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}(z) \geq \varepsilon, \operatorname{Re}(z)^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}\} \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Insbesondere ist die durch  $E_k$  gegebene Funktion auf  $\mathbb{H}$  holomorph.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass für ein festes  $z \in \mathbb{H}$  die Reihe  $E_k(z)$  konvergiert. Dafür betrachten wir die Funktion

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x,y) & \mapsto \left| \frac{xz+y}{xi+y} \right|^k. \end{cases}$$

Diese hat offensichtlich die folgenden Eigenschaften:

- $f(x,y) > 0$  für alle  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .
- $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und alle  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .
- $f$  nimmt auf dem Kompaktum  $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  sein Minimum an, ist dort also durch eine Konstante  $C > 0$  nach unten beschränkt.

Erinnern wir uns an die **Polarkoordinatendarstellung** in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  aus der Funktionentheorie und wenden diese drei Eigenschaften von  $f$  an, so erhalten wir

$$f(x,y) \geq C \quad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Diese Abschätzung gilt natürlich insbesondere für  $(x,y) = (c,d) \in \mathbb{Z}^2$  mit  $\operatorname{ggT}(c,d) = 1$ , so dass wir

$$|cz + d|^{-k} \leq \frac{1}{C} \cdot |ci + d|^{-k}$$

erhalten. Die Konvergenz von  $E_k(z)$  für festes  $z \in \mathbb{H}$  folgt also mit dem **Majorantenkriterium** aus der Analysis, wenn wir

$$\sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \operatorname{ggT}(c,d)=1}} |ci + d|^{-k} < \infty$$

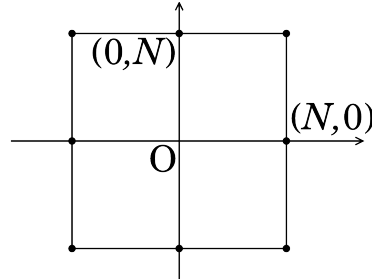
zeigen können. Hierbei haben wir die euklidische Norm  $|ci + d| = \sqrt{c^2 + d^2}$  verwendet. Das müssen wir jedoch nicht, da in  $\mathbb{R}^2$  alle Normen äquivalent sind. Insbesondere dürfen wir statt der euklidischen die **Maximumsnorm**

$$\|(x,y)\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}$$

verwenden, und es genügt

$$\sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \operatorname{ggT}(c,d)=1}} \|(c,d)\|_\infty^{-k} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{|\{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \operatorname{ggT}(c,d)=1 \text{ und } \|(c,d)\|_\infty = N\}|}{N^k} < \infty$$

zu zeigen. Wie man der Abbildung



entnimmt, gilt hierbei

$$|\{(c, d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{ggT}(c, d) = 1 \text{ und } \|(c, d)\|_\infty = N\}| \leq 8N.$$

Die Konvergenz von  $E_k(z)$  für festes  $z \in \mathbb{H}$  folgt mit

$$8 \cdot \sum_{N=1}^{\infty} N^{1-k} < \infty \quad \text{für } k > 2.$$

Zum Beweis des Lemmas genügt es wegen  $k > 2$ , der soeben gezeigten Konvergenz von  $E_k(z)$  für festes  $z \in \mathbb{H}$  und dem Majorantenkriterium zu zeigen, dass es ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$|cz + d|^2 \geq \delta |ci + d|^2 = \delta(c^2 + d^2) \quad \text{für alle } z \in D_\varepsilon \text{ und alle } c, d \in \mathbb{Z}.$$

Schreiben wir wie üblich  $z = x + iy$ , so lässt sich dies äquivalent umformen dazu, dass es ein  $\delta > 0$  gibt mit

$$(x^2 + y^2 - \delta)c^2 + 2xcd + (1 - \delta)d^2 \geq 0 \quad \text{für alle } z \in D_\varepsilon \text{ und alle } c, d \in \mathbb{Z}.$$

Etwas algebraischer formuliert heißt das nichts anderes als, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $z \in D_\varepsilon$  die quadratische Form

$$(x^2 + y^2 - \delta)X^2 + 2xXY + (1 - \delta)Y^2$$

positiv semidefinit ist.<sup>11</sup> Es gilt also zu zeigen, dass es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $z \in D_\varepsilon$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 - \delta & x \\ x & 1 - \delta \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist, also für die Hauptminoren gilt

- (i)  $x^2 + y^2 - \delta \geq 0$ ,
- (ii)  $(x^2 + y^2 - \delta)(1 - \delta) - x^2 = -\delta x^2 + (1 - \delta)y^2 - \delta(1 - \delta) \geq 0$ .

Nach Definition von  $D_\varepsilon$  genügt es  $\delta < \varepsilon^2$  zu setzen, um Bedingung (i) zu erfüllen. Für Bedingung (ii) nehmen wir nun ohne Einschränkung  $\delta < 1$  an. Dann gilt für alle  $z \in D_\varepsilon$  die Abschätzung

$$-\delta x^2 + (1 - \delta)y^2 - \delta(1 - \delta) \geq -\delta \varepsilon^{-1} + (1 - \delta)\varepsilon^2 - \delta(1 - \delta),$$

und Bedingung (ii) folgt, wenn wir zeigen können, dass es ein  $\delta \in (0, 1)$  gibt mit

$$\varepsilon^2 \geq \delta \frac{\varepsilon^{-1} + (1 - \delta)}{1 - \delta}.$$

Das Lemma folgt, da die rechte Seite offensichtlich für  $\delta \rightarrow 0$  gegen Null geht.  $\square$

Zum Beweis von Satz 3.2 verbleibt  $(V_2')$ , also die Holomorphie von  $E_k$  in  $z = \infty$ , nachzuweisen.

**Lemma 3.4.** Für jede gerade ganze Zahl  $k \geq 4$  ist die Eisenstein-Reihe  $E_k$  holomorph in  $z = \infty$  und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E_k(z) = 1.$$

*Beweis.* Zu zeigen ist nach Definition 2.5 und dem **Riemann'schen Hebbarkeitssatz** aus der Funktionentheorie, dass  $E_k \circ e^{-1}$  in einer kleinen Umgebung von  $q = 0$  beschränkt ist. Das ist sicherlich richtig, wenn

$$\lim_{q \rightarrow 0} (E_k \circ e^{-1})(q) = \lim_{z \rightarrow \infty} E_k(z)$$

existiert. Sei also  $(z_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{H}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Im}(z_n) = \infty$ . Wegen  $E_k(z+1) = E_k(z)$  für alle  $z \in \mathbb{H}$  können wir ohne Einschränkung  $|\text{Re}(z_n)| \leq \frac{1}{2}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  annehmen. Dann liegen alle Punkte  $z_n$  ab einem hinreichend großen  $n$  in

$$D_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid \text{Im}(z) \geq 1, \text{Re}(z)^2 \leq 1\}.$$

Nach Lemma 3.3 konvergiert die Eisenstein-Reihe  $E_k$  auf  $D_1$  gleichmäßig, so dass wir den Grenzübergang gliedweise vollziehen dürfen. Wir erhalten

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E_k(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_k(z_n) = 1 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1, c>0}} \lim_{n \rightarrow \infty} (cz_n + d)^{-k} = 1,$$

womit das Lemma gezeigt ist.  $\square$

Da nun Satz 3.2 bewiesen ist und wir wissen, dass die Eisenstein-Reihe  $E_k$  für jede gerade ganze Zahl  $k \geq 4$  in  $M_k$  liegt, interessieren wir uns für ihre Fourier-Entwicklung, die interessante zahlentheoretische Informationen kodiert.

**Satz 3.5.** Die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihe  $E_k$  mit  $k \geq 4$  ganz und gerade ist durch

$$E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

gegeben, wobei

$$\zeta(k) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$$



den Wert der **Riemann'schen Zetafunktion** an der Stelle  $k$  bezeichnet und

$$\sigma_{k-1}(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{k-1}$$

die  $(k-1)$ -te **Teilersummenfunktion** definiert.

*Beweis.* Da die Reihe nach Lemma 3.3 absolut konvergiert, dürfen wir sie in einen Teil mit  $c = 0$  und einen Teil mit  $c \neq 0$  aufspalten und erhalten so

$$E_k(z) = 1 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1, c>0}} (cz+d)^{-k} = 1 + \frac{1}{\zeta(k)} \cdot \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d \in \mathbb{Z}} (cz+d)^{-k}.$$

Desweiteren gilt für alle ganzen  $k \geq 2$

$$\sum_{d \in \mathbb{Z}} (w+d)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} e^{2\pi i d w} \quad \text{für alle } w \in \mathbb{H},$$

wie wir in Beispiel 2.4 eingesehen haben. Wenden wir dies mit  $w = cz$  an, und nutzen wieder aus, dass  $k$  gerade ist, so erhalten wir

$$E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} d^{k-1} q^{cd}.$$

Setzen wir nun  $n := cd$ , so durchläuft  $d$  alle positiven Teiler von  $n$ , und es gilt

$$E_k(z) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{k-1} \right) q^n.$$

Nach Definition der  $(k-1)$ -ten Teilersummenfunktion haben wir somit den Satz bewiesen.  $\square$

Mithilfe der im Folgenden eingeführten **BERNOULLI-Zahlen**<sup>28</sup> lässt sich die Fourier-Entwicklung aus Satz 3.5 noch etwas systematischer darstellen.

**Lemma 3.6.** Die **Bernoulli-Zahlen**  $B_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  sind definiert durch die Taylor-Entwicklung von


$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad \text{für alle } z \in U_{2\pi}(0).$$

Für sie gelten die folgenden Eigenschaften.

- (i)  $B_n \in \mathbb{Q}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Speziell gelten  $B_0 = 1$  und  $B_1 = -\frac{1}{2}$ .

<sup>28</sup>Jakob I. Bernoulli (1655-1705), wobei die Bezeichnung „I.“ zur Abgrenzung von seinem ebenfalls in der Mathematik tätigen Großneffen Jakob II. Bernoulli (1759-1789) dient.

- (ii) Es gilt die Rekursionsformel  $(-1)^n B_n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_\nu$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (iii) Für ungerades  $n > 1$  gilt  $B_n = 0$ .
- (iv) Für gerades  $n \geq 2$  gilt  $B_n = \frac{(-1)^{n/2-1} n!}{2^{n-1} \pi^n} \zeta(n)$ .

 *Beweis.* Zunächst gilt es den Konvergenzbereich der Taylor-Reihe aus dem Lemma zu bestimmen. Dafür betrachten wir die Funktion  $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ . Diese hat in  $z_0 = 0$  eine hebbare Singularität und nimmt dort den Wert 1 an. Desweiteren hat sie Polstellen in den Punkten  $z_\nu = 2\pi i \nu$  für alle  $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Das sind alle Singularitäten von  $f$ . Nach dem **Potenzreihenentwicklungssatz** aus der Funktionentheorie konvergiert also die Taylor-Reihe von  $f$  um  $z = 0$  in  $U_{2\pi}(0)$ .

Sei also  $z \in U_{2\pi}(0)$ . Dann gilt zum einen

$$1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \lim_{z \rightarrow 0} z^n = B_0.$$

Zum anderen haben wir

$$\begin{aligned} -z &= z \left( \frac{1 - e^z}{e^z - 1} \right) = z \left( \frac{1}{e^z - 1} - \frac{e^z}{e^z - 1} \right) = z \left( \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{1 - e^{-z}} \right) = \frac{z}{e^z - 1} - \frac{-z}{e^{-z} - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (1 - (-1)^n) z^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{2B_n}{n!} z^n, \end{aligned}$$

so dass wir nach Koeffizientenvergleich

$$B_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad B_n = 0 \quad \text{für alle ungeraden } n > 1$$

und insbesondere (iii) erhalten. Daraus, aus  $B_0 = 1$  und aus der Rekursionsformel (ii) für  $n + 1$  folgt  $B_n \in \mathbb{Q}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und somit Behauptung (i).

Die Rekursionsformel (ii) wiederum folgt mit Koeffizientenvergleich aus

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} B_\nu \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \frac{B_\nu}{\nu!(n-\nu)!} z^n \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!\mu!} z^{\nu+\mu} & (\mu := n - \nu) \\ &= \left( \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{B_\nu}{\nu!} z^\nu \right) \cdot \left( \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{\mu!} \right) \\ &= \frac{z}{e^z - 1} \cdot e^z \\ &= \frac{-z}{e^{-z} - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot B_n \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Es verbleibt Behauptung (iv) zu zeigen. Dafür setzen wir  $z = 2\pi iw$ . Für  $w \in U_1(0)$  gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} (2\pi iw)^n &= \frac{2\pi iw}{e^{2\pi iw} - 1} = \pi iw \frac{2}{e^{2\pi iw} - 1} \\ &= \pi iw \left( \frac{e^{2\pi iw} + 1}{e^{2\pi iw} - 1} - \frac{e^{2\pi iw} - 1}{e^{2\pi iw} - 1} \right) = \pi iw \left( \frac{e^{\pi iw} + e^{-\pi iw}}{e^{\pi iw} - e^{-\pi iw}} - 1 \right) \\ &= \pi w (\cot(\pi w) - i). \end{aligned}$$

Mit  $B_1 = -\frac{1}{2}$  folgt

$$\pi w \cot(\pi w) = 1 + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2} (2\pi)^n B_n}{n!} w^n \quad \text{für alle } w \in U_1(0).$$

Andererseits gilt mit der Partialbruchzerlegung (2.2) des Kotangens

$$\begin{aligned} \pi w \cot(\pi w) &= 1 + w \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{w - m} + \frac{1}{m} \right) = 1 + w \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{1}{w - m} + \frac{1}{w + m} \right) \\ &= 1 + 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{w^2 - m^2} = 1 - 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{w}{m})^2} \\ &= 1 - 2w^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{w}{m} \right)^{2n} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n+2}} \right) w^{2n+2} \\ &= 1 - 2 \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \zeta(n) w^n. \end{aligned}$$

Behauptung (iv) folgt aus einem weiteren Koeffizientenvergleich. □

Nach Lemma 3.6 ist die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihen durch

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n \quad (3.2)$$

gegeben. Mit  $B_4 = -\frac{1}{30}$  und  $B_6 = \frac{1}{42}$  gilt also im Speziellen

$$E_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \quad \text{und} \quad E_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n.$$

**Bemerkung 3.7.** Da die Bernoulli-Zahlen nach Lemma 3.6 rationale Zahlen sind, trifft dies auch auf die Fourier-Koeffizienten der normierten Eisenstein-Reihen  $E_k$  mit  $k \geq 4$  ganz und gerade zu. In den Spezialfällen  $E_4$  und  $E_6$  sehen wir, dass die Koeffizienten sogar ganzzahlig sind.

### 3.2 Der Struktursatz für holomorphe Modulformen

Eine wichtige Anwendung der Valenzformel 2.17 ist, dass wir mit ihr und unserem Wissen um die Eisenstein-Reihen eine Aussage über die Struktur der Vektorräume  $M_k$  und  $S_k$  treffen können. Um diese übersichtlicher präsentieren zu können, führen wir zunächst eine weitere Modulform ein:

**Proposition 3.8.** *Die Diskriminante*

$$\Delta(z) := \frac{1}{1728} (E_4^3 - E_6^2) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}$$

ist eine Funktion in  $S_{12}$ . Ihre Fourier-Entwicklung ist von der Form

$$\Delta(z) = 0 + q - 24 q^2 \pm \text{Terme höherer Ordnung}.$$

*Beweis.* Wegen der Algebrenstruktur von  $M$  liegen  $E_4^3$  und  $E_6^2$  und somit auch  $\Delta$  im Vektorraum  $M_{12}$ . Der Rest der Proposition ergibt sich, wenn wir die explizit bekannten Fourier-Entwicklungen von  $E_4$  und  $E_6$  dazu benutzen, um ebensolche für  $E_4^3$  und  $E_6^2$  zu bestimmen. In der Tat gelten

$$\begin{aligned} E_4^3(z) &= 1 + 720 q + 179280 q^2 + \text{Terme höherer Ordnung}, \\ E_6^2(z) &= 1 - 1008 q + 220752 q^2 \pm \text{Terme höherer Ordnung}. \end{aligned}$$

□

In Übungsaufgabe 3.2 zeigen wir, dass die Fourier-Koeffizienten von  $\Delta$  ganze Zahlen sind.

**Proposition 3.9.** (a) Für gerades<sup>29</sup>  $k$  gilt

$$M_k = \begin{cases} \{0\} & \text{für } k < 0, \\ \mathbb{C} & \text{für } k = 0, \\ \{0\} & \text{für } k = 2, \\ \mathbb{C}E_k \oplus S_k & \text{für } k \geq 4. \end{cases}$$

(b) Die Abbildung  $f \mapsto f \cdot \Delta$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraumisomorphismus von  $M_{k-12}$  nach  $S_k$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Die Fälle für  $k \leq 0$  haben wir bereits in Korollar 2.19 gezeigt. Im Fall  $k = 2$  ist die Lösbarkeit der Valenzformel gleichbedeutend damit, nicht-negative ganze Zahlen  $n_q, n_i$  und  $n_{\text{sonst}}$  mit

$$\frac{n_q}{3} + \frac{n_i}{2} + n_{\text{sonst}} = \frac{1}{6}$$

<sup>29</sup>Dass die Vektorräume  $M_k$  für ungerades  $k$  nur aus der Null bestehen, hatten wir schon in Proposition 2.15 eingesehen.

zu finden. Da es solche Zahlen nicht gibt, folgt die Behauptung auch in diesem Fall. Für  $k \geq 4$  betrachten wir eine Modulform  $f \in M_k$  mit Fourier-Entwicklung  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)q^n$  und setzen  $g := f - a_0(f)E_k$ . Nach Definition hat  $E_k$  konstanten Fourier-Koeffizienten 1, so dass  $g$  in  $S_k$  liegt. Es folgt  $f = a_0(f)E_k + g \in \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ .

Zum Beweis von Behauptung (b) genügt es, die Surjektivität der Zuordnung  $f \mapsto f \cdot \Delta$  zu überprüfen; die Injektivität ist klar. Für eine beliebige Spitzenform  $g \in S_k$  setzen wir  $f := g/\Delta$ . Es gilt

$$0\text{-ord}(\Delta; \infty) = 1 \quad \text{und} \quad 0\text{-ord}(\Delta; z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}, \quad (3.3)$$

denn: Nach Proposition 3.8 ist der Koeffizient von  $q$  bei der Fourier-Entwicklung von  $\Delta$  gerade 1; es gilt also  $0\text{-ord}(\Delta; \infty) = 1$ . Der Rest der Behauptung ist eine direkte Anwendung der Valenzformel 2.17. #

Es folgt zum einen die Holomorphie von  $f$  auf  $\mathbb{H}$ . Zum anderen folgt wegen  $g \in S_k$

$$0\text{-ord}(f; \infty) = 0\text{-ord}(g; \infty) - 0\text{-ord}(\Delta; \infty) = 0\text{-ord}(g; \infty) - 1 \geq 0$$

und somit die Holomorphie von  $f$  in  $\infty$ . Wegen  $g \in M_k$  und  $\Delta \in M_{12}$  gilt  $f \in M_{k-12}$ , und wir haben ein Urbild gefunden.  $\square$

**Korollar 3.10** (Dimensionsformel). *Sei  $k \geq 0$  gerade. Dann gilt*

$$\dim M_k = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{für } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 & \text{für } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

*Beweis.* Nach Proposition 3.9 gilt

$$S_k = \{0\} \quad \text{und somit} \quad M_k = \mathbb{C}E_k \quad \text{für } k \in \{4, 6, 8, 10\}.$$

Zusammen mit den in der Proposition explizit angegebenen Fällen  $k \in \{0, 2\}$  folgt so die Behauptung für  $0 \leq k \leq 10$ . Wieder nach Proposition 3.9 gilt

$$\dim M_k = 1 + \dim S_k = 1 + \dim M_{k-12} \quad \text{für alle } k \geq 4$$

und somit induktiv die Behauptung.  $\square$

**Korollar 3.11.** *Sei  $k \geq 4$  gerade. Dann gilt bezüglich des Petersson-Skalarprodukts*

$$\mathbb{C}E_k = S_k^\perp := \{f \in M_k \mid \langle f \mid g \rangle = 0 \text{ für alle } g \in S_k\}.$$

*Beweis.* Nach Teil (b) von Satz 2.25 ist das Petersson-Skalarprodukt eingeschränkt auf  $S_k$  ein Skalarprodukt und somit insbesondere nicht ausgeartet. Daher folgt

$$S_k^\perp \cap S_k = \{0\}.$$

Andererseits gilt nach Teil (a) von Proposition 3.9

$$M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k.$$

Damit und wegen der Linearität des Petersson-Skalarprodukts genügt es zum Beweis des Korollars

$$\langle g \mid E_k \rangle = 0 \quad \text{für alle } g \in S_k$$

zu zeigen. Nach den Definitionen 2.24 und 3.1 gilt

$$\begin{aligned} \langle g \mid E_k \rangle &= \int_{\mathcal{F}} \overline{E_k(z)} g(z) y^k d\omega(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \left( \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \overline{(1|_k M)(z)} g(z) \mathrm{Im}(z)^k \right) d\omega(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \left( \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \overline{(1|_k M)(z)} g(M\langle z \rangle) (1|_k M)(z) \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^k |(1|_k M)(z)|^{-2} \right) d\omega(z) \\ &= \int_{\mathcal{F}} \left( \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} g(M\langle z \rangle) \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^k \right) d\omega(z). \end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe gilt

$$\begin{aligned} \langle g \mid E_k \rangle &= \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left( \int_{\mathcal{F}} g(M\langle z \rangle) \mathrm{Im}(M\langle z \rangle)^k \right) d\omega(z) \\ &= \int_{\bigcup_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} M\langle \mathcal{F} \rangle} g(z) \mathrm{Im}(z)^k d\omega(z). \end{aligned}$$

Für geeignete Wahlen eines Vertretersystems von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist analog zu Übungsaufgabe 1.11 die Menge

$$\mathcal{F}_{\infty} := \bigcup_{M \in \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}} \setminus \overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}} M\langle \mathcal{F} \rangle = \bigcup_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} M\langle \mathcal{F} \rangle$$

ein Fundamentalbereich für die Aktion von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$  auf  $\mathbb{H}$ , wobei analog zu Lemma 2.21 das Integral nicht von der Wahl dieses Vertretersystems abhängt. Wählen wir speziell

$$\mathcal{F}_{\infty} = \{z \in \mathbb{H} \mid |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\},$$

so erhalten wir mit  $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) q^n$

$$\begin{aligned} \langle g \mid E_k \rangle &= \int_0^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(z) (\mathrm{Im} z)^k d\omega(z) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) e^{-2\pi n y} y^{k-2} e^{2\pi i n x} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i n x} dx \right) a_n(g) e^{-2\pi n y} y^{k-2} dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

**Satz 3.12** (Struktursatz für holomorphe Modulformen). *Für  $k \geq 0$  gerade gilt*

$$M_k = \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N} \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \mathbb{C} E_4^\alpha E_6^\beta.$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass die angegebenen Funktionen den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $M_k$  erzeugen.

**Fall 1:**  $k \leq 6$ . Das haben wir bereits im Beweis von Korollar 3.10 eingesehen.

**Fall 2:**  $k = 8$ . Nach Korollar 3.10 gilt  $\dim M_8 = 1$ . Andererseits sind die konstanten Terme der Fourier-Entwicklungen von  $E_8, E_4^2 \in M_8$  definitionsgemäß beide 1. Es folgt  $E_8 = E_4^2$  und somit die Behauptung für  $k = 8$ .

**Fall 3:**  $k = 10$ . Nach Korollar 3.10 gilt  $\dim M_{10} = 1$ . Andererseits sind die konstanten Terme der Fourier-Entwicklungen von  $E_{10}, E_4 E_6 \in M_{10}$  nach Definition beide 1. Es folgt  $E_{10} = E_4 E_6$  und somit die Behauptung für  $k = 10$ .

**Fall 4:**  $k \geq 12$ . In diesem Fall gibt es offenbar stets  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  mit  $4\alpha + 6\beta = k$ , und die Fourier-Entwicklung der zugehörigen Modulform  $g := E_4^\alpha E_6^\beta$  hat den konstanten Term 1. Sei nun  $f \in M_k$  eine beliebige Modulform mit Fourier-Entwicklung  $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(f) q^n$ . Dann ist  $f - a_0(f)g \in S_k$ , nach Teil (b) von Proposition 3.9 gibt es also ein  $h \in M_{k-12}$  mit

$$f - a_0(f)g = h\Delta.$$

Nach Definition ist die Diskriminante eine  $\mathbb{C}$ -Linearkombination von  $E_4^3$  und  $E_6^2$ . Wir können nun annehmen, schon gezeigt zu haben, dass sich  $h$  als  $\mathbb{C}$ -Linearkombination von „Monomen“  $E_4^\gamma E_6^\delta$  mit  $4\gamma + 6\delta = k - 12$  schreiben lässt. Tatsächlich stellt dieser Fall den Schritt von  $k - 12$  auf  $k$  eines Induktionsbeweises dar, dessen Anfang wir in den Fällen  $k \leq 10$  behandelt haben.

Nun wollen wir zeigen, dass die Menge

$$\{E_4^\alpha E_6^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N} \text{ mit } 4\alpha + 6\beta = k\}$$

$\mathbb{C}$ -linear unabhängig ist. Für den Beweis unterscheiden wir die Fälle  $k \equiv 0 \pmod{4}$  und  $k \equiv 2 \pmod{4}$ . Wir zeigen hier nur den ersten Fall; der zweite geht sehr ähnlich und soll in der Übung gezeigt werden. Nehmen wir also an, es gelte

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N} \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \lambda_{\alpha, \beta} E_4^\alpha E_6^\beta = 0 \quad \text{mit gewissen } \lambda_{\alpha, \beta} \in \mathbb{C}. \quad (3.4)$$

Wegen  $4\alpha + 6\beta = k$  ist im von uns behandelten Fall  $\beta$  gerade, es gibt also ein  $\beta' \in \mathbb{N}$  mit  $\beta = 2\beta'$ . Für dieses gilt dann  $\alpha = \frac{k}{4} - 3\beta'$  und somit

$$E_4^\alpha E_6^\beta = E_4^{\frac{k}{4}-3\beta'} E_6^{2\beta'} = E_4^{\frac{k}{4}} \left( \frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'}.$$

Eingesetzt in (3.4) erhalten wir so

$$E_4^{\frac{k}{4}} \sum_{\beta' \in \mathbb{N}} \lambda_{\frac{k}{4}-3\beta', 2\beta'} \left( \frac{E_6^2}{E_4^3} \right)^{\beta'} = 0.$$

Nehmen wir nun an, es gäbe einen Koeffizienten ungleich Null in dieser Gleichung. Dann wäre  $E_6^2/E_4^3$  Nullstelle eines von Null verschiedenen Polynoms aus  $\mathbb{C}[X]$  und somit gleich einer Konstanten,

denn: Die meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{H}$  bilden nach Proposition 6.23 aus der Funktionentheorie einen Körper  $\mathcal{M}(\mathbb{H})$ , der  $\mathbb{C}$  umfasst. Ein von Null verschiedenes Polynom  $P \in \mathbb{C}[X]$  hat also in  $\mathcal{M}(\mathbb{H})$  höchstens  $\deg(P)$  Nullstellen.

Es folgt, dass alle Nullstellen von  $P$  in  $\mathcal{M}(\mathbb{H})$  konstant sind, da es nach dem Fundamentalsatz der Algebra aus der Funktionentheorie bereits  $\deg(P)$  Nullstellen von  $P$  in  $\mathbb{C}$  gibt. #

Diese Konstante wäre gleich Null,

denn: Zum Einen gilt

$$E_6(i) = (E_6|_6 S)(i) = i^{-6} E_6\left(-\frac{1}{i}\right) = -E_6(i)$$

und somit  $E_6(i) = 0$ . Zum Anderen gilt nach (3.2)

$$E_4(i) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{-2\pi n} > 0.$$

#

Es folgte  $E_6 \equiv 0$ , was nicht sein kann. Es gibt also keinen Koeffizienten ungleich Null, und wir haben die lineare Unabhängigkeit im Fall  $k \equiv 0 \pmod{4}$  bewiesen.  $\square$

### 3.3 Poincaré-Reihen

In diesem Abschnitt wollen wir ein Phänomen untersuchen, dem wir in einem Spezialfall bereits in Abschnitt 3.2 begegnet sind. In Korollar 3.11 haben wir für gerades  $k \geq 4$

$$a_0(g) = 0 = \langle g | E_k \rangle \quad \text{für alle } g \in S_k$$



festgestellt, wobei  $a_0(g)$  den 0-ten Fourier-Koeffizienten von  $g$  bezeichne. Mit Methoden aus der Funktionalanalysis stellt man fest, dass sich dieser Zusammenhang verallgemeinern lässt: Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} S_k &\rightarrow \mathbb{C}, \\ g &\mapsto a_n(g) = n\text{-ter Fourier-Koeffizient von } g \end{aligned}$$

ist ein lineares Funktional. Nach dem Darstellungssatz von FRÉCHET-RIESZ<sup>30</sup> existiert für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein eindeutig bestimmtes  $\tilde{P}_{n,k} \in S_k$  mit der  $(n, k)$ -**Fréchet-Riesz-Eigenschaft**

$$a_n(g) = \langle g | \tilde{P}_{n,k} \rangle \quad \text{für alle } g \in S_k.$$

Wir geben nun  $\tilde{P}_{n,k}$  explizit an und weisen diese Eigenschaft nach.

**Definition 3.13.** Seien  $k \geq 4$  eine gerade ganze Zahl und  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann heißt die formale Reihe

$$P_{n,k}(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} (e^{2\pi i n \cdot} |_k M)(z) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} j(M, z)^{-k} e^{2\pi i n M\langle z \rangle},$$

wobei  $M$  ein Vertretersystem von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  durchläuft, die  $n$ -te **Poincaré-Reihe** vom Gewicht  $k$  bezüglich  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Der Begriff der Poincaré-Reihe ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl des Vertretersystems, das  $M$  durchläuft, da die Matrizen in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$  als Translationen um ganze Zahlen operieren und die Exponentialfunktion  $2\pi i$ -periodisch ist.

**Beispiel 3.14.** Offensichtlich gilt  $P_{0,k} = E_k \in M_k \setminus S_k$ ; nach dem eingangs erwähnten Korollar 3.11 erfüllt  $P_{0,k}$  also die  $(0, k)$ -Fréchet-Riesz-Eigenschaft.

**Satz 3.15.** Für  $n \geq 1$  und gerades  $k \geq 4$  gilt  $P_{n,k} \in S_k$ .

*Beweis.* Wie schon im Fall der Eisenstein-Reihe ist nach Konstruktion klar, dass die durch  $P_{n,k}$  gegebene Funktion in ihrem Konvergenzgebiet Axiom  $(V_1)$  erfüllt. Tatsächlich konvergiert  $P_{n,k}$  auf ganz  $\mathbb{H}$ ,

denn: Wegen  $M\langle z \rangle \in \mathbb{H}$  für alle  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und alle  $z \in \mathbb{H}$  gilt

$$|e^{2\pi i n M\langle z \rangle}| < 1$$

und daher auch

$$\sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} |j(M, z)|^{-k} |e^{2\pi i n M\langle z \rangle}| < \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} |j(M, z)|^{-k}$$

sodass die Reihe der Absolutbeträge bzgl.  $P_{n,k}$  durch die Reihe der Absolutbeträge bzgl.  $E_k$  majorisiert wird. Letztere konvergiert nach Lemma 3.3 auf Kompakta in  $\mathbb{H}$  gleichmäßig. Da die

<sup>30</sup>Maurice René Fréchet (1878-1973) und Frigyes Riesz (1880-1956)



Teilsommen in  $P_{n,k}$  offensichtlich auf  $\mathbb{H}$  holomorphe Funktionen darstellen, folgt die Holomorphie von  $P_{n,k}$  auf  $\mathbb{H}$  mit dem **Approximationssatz von Weierstraß** aus der Funktionentheorie. #

Es verbleibt zu zeigen, dass  $P_{n,k}$  in  $z = \infty$  verschwindet. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gilt für  $z \in \mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} P_{n,k}(z) &\stackrel{(3.1)}{=} \lim_{z \rightarrow \infty} \left( e^{2\pi i n z} + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1, c>0 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \right) \\ &= 0 + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1, c>0 \\ ad-bc=1}} \lim_{z \rightarrow \infty} \left( (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Summiert wird hierbei über die Paare  $(c,d)$ , und zu jedem Paar ist ein Paar  $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$  mit  $ad-bc=1$  zu bestimmen. Dies ist unabhängig von der Wahl von  $a,b \in \mathbb{Z}$ , denn ist auch  $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in \mathbb{Z}^2$  ein solches Paar, so gilt  $\tilde{a} = a + mc$  und  $\tilde{b} = b + md$  für ein  $m \in \mathbb{Z}$ ,

denn: Für  $k, \ell \in \mathbb{Z}$  gilt

$$ad-bc = (a+k)d - (b+\ell)c = (ad-bc) + (kd-\ell c) \iff kd-\ell c = 0.$$

Wegen  $\text{ggT}(c,d)=1$  bedingt dies  $c \mid k$  und  $d \mid \ell$ , wir erhalten also

$$\frac{k}{c} \cdot cd - \frac{\ell}{d} \cdot cd = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{k}{c} = \frac{\ell}{d} =: m \in \mathbb{Z}.$$

Die Behauptung folgt, da umgekehrt die angegebenen Werte für  $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{Z}$  offensichtlich die Determinantenbedingung erfüllen. #

In (3.5) gilt

$$\frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H} \quad \text{und also} \quad |e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}}| < 1,$$

so dass wegen  $(cz+d)^{-k} \rightarrow 0$  jeder einzelne Summand verschwindet. Insgesamt haben wir den Satz gezeigt.  $\square$

**Satz 3.16.** Für  $n \geq 1$  und gerades  $k \geq 4$  erfüllt

$$\tilde{P}_{n,k} := \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} \cdot P_{n,k}$$

die  $(n,k)$ -Fréchet-Riesz-Eigenschaft.

*Beweis.* Für ein beliebiges

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(g) q^m \in S_k$$

zeigt man analog zum Beweis von Korollar 3.11

$$\begin{aligned}
 \langle g \mid P_{n,k} \rangle &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(z) e^{2\pi i n z} (\operatorname{Im} z)^k d\omega(z) \\
 &= \int_0^\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{m=1}^\infty a_m(g) e^{2\pi i m z} \overline{e^{2\pi i n z}} y^{k-2} \right) dx \wedge dy \\
 &= \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(m-n)x} dx \right) a_m(g) e^{-2\pi(m+n)y} y^{k-2} dy.
 \end{aligned}$$

Für je zwei ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  ist bekanntlich das **KRONECKER-Delta**<sup>31</sup> gegeben durch

$$\delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt offenkundig

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i r x} dx = \delta_{r,0} \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Z}$$

und somit auch

$$\begin{aligned}
 \langle g \mid P_{n,k} \rangle &= \int_0^\infty \sum_{m=1}^\infty \delta_{m,n} a_m(g) e^{-2\pi(m+n)y} y^{k-2} dy \\
 &= \int_0^\infty a_n(g) e^{-4\pi n y} y^{k-2} dy \\
 &= \frac{a_n(g)}{(4\pi n)^{k-1}} \cdot \int_0^\infty e^{-y} y^{k-2} dy.
 \end{aligned}$$

Nach Übungsaufgabe 3.7 nimmt das Integral auf der rechten Seite den Wert  $(k-2)!$  an, so dass wir den Satz gezeigt haben.  $\square$

**Korollar 3.17.** Für  $k \geq 4$  gerade gilt

$$S_k = \langle P_{n,k} \mid n \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

*Beweis.* Dass die Poincaré-Reihen Spitzenformen sind, haben wir in Satz 3.15 gezeigt. Nehmen wir nun an, die  $P_{n,k}$  erzeugten nicht ganz  $S_k$ . Nach Satz 22.9 aus der Linearen Algebra gäbe es dann eine Spitzenform  $g(z) = \sum_{m=1}^\infty a_m(g) q^m \in S_k \setminus \{0\}$  mit

$$\langle g \mid P_{n,k} \rangle = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 3.16 gälte für diese

$$a_n(g) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

also  $g(z) \equiv 0$ , was wir ausgeschlossen hatten.  $\square$

<sup>31</sup>Leopold Kronecker (1823-1891)



**Bemerkung 3.18.** Nach Übungsaufgabe 3.4 bildet sogar  $\{P_{1,k}, \dots, P_{d,k}\}$  mit  $d = \dim_{\mathbb{C}} S_k$  eine Basis von  $S_k$ .

**Satz 3.19.** Für  $n \geq 1$  und  $k \geq 4$  gerade hat die Poincaré-Reihe  $P_{n,k}$  die Fourier-Entwicklung

$$P_{n,k}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(n, k) q^m$$

mit

$$g_m(n, k) := \delta_{m,n} + 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c} \cdot K(m, n, c) \cdot J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right),$$

wobei

$$K(m, n, c) := \sum_{\substack{d \bmod (c) \\ \text{ggT}(c,d)=1}} e^{2\pi i \frac{md+nd'}{c}} \quad \text{mit } dd' \equiv 1 \bmod (c) \quad (\text{KLOOSTERMAN-Summe})^{32}$$

$$J_{k-1}(x) := \left(\frac{x}{2}\right)^{k-1} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^{\ell}}{\ell!(k-1+\ell)!} \quad (\text{BESSEL-Funktion})^{33}.$$

seien.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} P_{n,k}(z) &\stackrel{(3.5)}{=} e^{2\pi i n z} + \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{ggT}(c,d)=1, c>0 \\ ad-bc=1}} (cz+d)^{-k} e^{2\pi i n \frac{az+b}{cz+d}} \\ &= e^{2\pi i n z} + \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{\tilde{d} \bmod (c) \\ \text{ggT}(c,\tilde{d})=1 \\ a\tilde{d}-b\tilde{c}=1}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+\tilde{d})^{-k} e^{2\pi i n \frac{a(z+m)+\tilde{b}}{c(z+m)+\tilde{d}}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

denn: Zu einem festen  $c > 0$  und einem festen Vertretersystem  $\tilde{d} \bmod (c)$  schreiben wir jedes  $d \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}(c, d) = 1$  in der Form

$$d = \tilde{d} + mc \quad \text{mit } \tilde{d} \text{ im vorgegebenen Vertretersystem und } m \in \mathbb{Z}.$$

Mit  $\tilde{b} = b - ma$  folgt

$$1 = ad - bc = a(\tilde{d} + mc) - (\tilde{b} + ma)c = a\tilde{d} - \tilde{b}c$$

und die obige Darstellung folgt durch Ausklammern von  $c$  und  $a$ . #

<sup>32</sup>Hendrik Douwe Kloosterman (1900-1968)

<sup>33</sup>Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

Im Folgenden schreiben wir wieder  $d$  und  $b$  statt  $\tilde{d}$  und  $\tilde{b}$ . Wir wollen nun die innere Summe auf der rechten Seite von (3.6) genauer untersuchen und holen dafür ein wenig aus. Für beliebiges  $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$  und alle  $z \in \mathbb{H}$  gilt zunächst

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (z+m)^{-k} e^{-2\pi i \nu \frac{1}{z+m}} = 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(4\pi\sqrt{m\nu}) \cdot e^{2\pi i m z}, \quad (3.7)$$

denn: Die linke Seite von (3.7) konvergiert gleichmäßig absolut auf Kompakta in  $\mathbb{H}$  und geht für  $z \rightarrow \infty$  gegen null – das zeigt man wie im Beweis von Satz 3.15. Sie hat daher nach Satz 2.3 eine Fourier-Entwicklung

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{\mu} q^{\mu} \quad \text{mit } c_{\mu} = \int_{ic}^{ic+1} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} (z+m)^{-k} e^{-2\pi i \nu \frac{1}{z+m}} \right) e^{2\pi i \mu z} dz.$$

Man kann nachweisen, dass es sich hierbei im Wesentlichen um eine Integraldarstellung eines bestimmten Wertes der Bessel-Funktion handelt, genauer gilt

$$c_{\mu} = 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}(4\pi\sqrt{m\nu}),$$

was die Behauptung zeigt. Die benötigten Formeln finden sich in den üblichen Integraltabellen; der Nachweis ist uns hier zu mühsam. #

Sei nun  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  eine beliebige Matrix in  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ . Ersetzen wir in (3.7) erst  $z$  durch  $z + \frac{d}{c}$  und  $\nu$  durch  $\frac{\nu}{c^2}$  und multiplizieren dann mit  $c^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c}}$ , so erhalten wir für beliebiges  $\nu \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m) + d)^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a(z+m)+b}{c(z+m)+d}} \\ &= \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m}{\nu}\right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{m\nu}}{c}\right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(va+md)} e^{2\pi i m z}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

denn: Die linke Seite von (3.7) wird so zu

$$\begin{aligned} & c^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c}} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left((z + \frac{d}{c}) + m\right)^{-k} e^{-2\pi i \frac{\nu}{c^2} \frac{1}{(z + \frac{d}{c}) + m}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m) + d)^{-k} e^{2\pi i \nu \frac{a}{c} - 2\pi i \frac{\nu}{c} \frac{1}{cz+d+cm}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m) + d)^{-k} e^{2\pi i \frac{\nu}{c} \left(\frac{a(cz+d+cm)-1}{cz+d+cm}\right)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m) + d)^{-k} e^{2\pi i \frac{\nu}{c} \left(\frac{ac(z+m)+(ad-1)}{c(z+m)+d}\right)} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m) + d)^{-k} e^{2\pi i \frac{\nu}{c} \left(\frac{ac(z+m)+bc}{c(z+m)+d}\right)} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c(z+m)+d)^{-k} e^{2\pi i v \left( \frac{a(z+m)+b}{c(z+m)+d} \right)}$$

und die rechte Seite zu

$$\begin{aligned} & c^{-k} e^{2\pi i v \frac{a}{c}} \cdot 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{mc^2}{v} \right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1} \left( 4\pi \sqrt{\frac{mv}{c^2}} \right) \cdot e^{2\pi i m(z + \frac{d}{c})} \\ &= \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{m}{v} \right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1} \left( \frac{4\pi \sqrt{mv}}{c} \right) \cdot e^{2\pi i v \frac{a}{c}} e^{2\pi i m(z + \frac{d}{c})} \\ &= \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{m}{v} \right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1} \left( \frac{4\pi \sqrt{mv}}{c} \right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(va+md)} e^{2\pi i m z}. \end{aligned}$$

#

Setzen wir nun (3.8) mit  $v = n$  in (3.6) ein, so erhalten wir unter Beachtung von  $ad = 1 - bc \equiv 1 \pmod{c}$

$$\begin{aligned} P_{n,k}(z) &= e^{2\pi i n z} + \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{\substack{d \pmod{c} \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} \frac{2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}}{c} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{m}{n} \right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1} \left( \frac{4\pi \sqrt{mn}}{c} \right) \cdot e^{\frac{2\pi i}{c}(na+md)} e^{2\pi i m z} \\ &= e^{2\pi i n z} + \sum_{c=1}^{\infty} 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{c} \left( \frac{m}{n} \right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1} \left( \frac{4\pi \sqrt{mn}}{c} \right) \cdot \sum_{\substack{d \pmod{c} \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad-bc=1}} e^{\frac{2\pi i}{c}(na+md)} \cdot q^m \\ &= e^{2\pi i n z} + \sum_{c=1}^{\infty} 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{c} \left( \frac{m}{n} \right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1} \left( \frac{4\pi \sqrt{mn}}{c} \right) \cdot K(m, n, c) \cdot q^m. \end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz lassen sich die Summen über  $c$  und über  $m$  vertauschen. Das führt zu

$$\begin{aligned} P_{n,k}(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \delta_{m,n} + \sum_{c=1}^{\infty} 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{1}{c} \left( \frac{m}{n} \right)^{\frac{k-1}{2}} J_{k-1} \left( \frac{4\pi \sqrt{mn}}{c} \right) \cdot K(m, n, c) \right) q^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left( \delta_{m,n} + 2\pi \cdot (-1)^{\frac{k}{2}} \left( \frac{m}{n} \right)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sum_{c=1}^{\infty} \frac{1}{c} \cdot K(m, n, c) \cdot J_{k-1} \left( \frac{4\pi \sqrt{mn}}{c} \right) \right) q^m. \end{aligned}$$

□

### 3.4 Der Struktursatz für meromorphe Modulformen

Mithilfe der Eisenstein-Reihen lassen sich ohne Mühe auch meromorphe Modulformen einführen.

**Proposition 3.20.** *Die  $j$ -Invariante oder auch absolute Invariante*

$$j(z) := \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$$

liegt in  $V_0$ , ist holomorph auf  $\mathbb{H}$  und hat einen einfachen Pol in  $z = \infty$ .

*Beweis.* Wegen  $\Delta(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{H}$  ist  $j$  holomorph auf  $\mathbb{H}$ . Zudem gilt

$$\text{ord}(j; \infty) = \text{ord}(E_4^3; \infty) - \text{ord}(\Delta; \infty) = 0 - 1 = -1.$$

Da sowohl  $E_4^3$  als auch  $\Delta$  in  $M_{12}$  liegen, folgt  $j \in V_0$  aus der Algebrenstruktur von  $V$ . □

Vermöge der  $j$ -Invarianten und des Struktursatzes 3.12 können wir die Vektorräume  $V_k$  der meromorphen Modulformen von Gewicht  $k$  bezüglich der vollen Modulgruppe beschreiben. Dazu holen wir ein wenig aus.

**Proposition 3.21.**  *$j$  liefert eine Bijektion  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \cong \mathbb{C}$ .*

*Beweis.* Nach Proposition 3.20 liegt für ein beliebiges  $\lambda \in \mathbb{C}$  die Funktion  $j_\lambda := j - \lambda$  in  $V_0$ , ist holomorph auf  $\mathbb{H}$  und hat einen einfachen Pol in  $z = \infty$ . Es langt offensichtlich zu zeigen, dass  $j_\lambda$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{C}$  eine modulo  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  eindeutig bestimmte Nullstelle hat. Dafür wenden wir auf  $j_\lambda$  die Valenzformel 2.17 an und erhalten

$$-1 + \frac{n}{2} + \frac{n'}{3} + n'' = \text{ord}(j_\lambda; \infty) + \frac{1}{2} \cdot \text{ord}(j_\lambda; i) + \frac{1}{3} \cdot \text{ord}(j_\lambda; \varrho) + \sum_{z \neq i, \varrho} \text{ord}(j_\lambda; z) = \frac{0}{12} = 0$$

mit drei geeigneten Zahlen  $n, n', n'' \in \mathbb{N}_0$ . Man kann leicht überprüfen, dass die einzigen Lösungen  $(n, n', n'') \in \mathbb{N}_0^3$  dieser DIOPHANTischen Gleichung<sup>34</sup> durch  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$  und  $(0, 0, 1)$  gegeben sind. Die Proposition folgt. □

**Satz 3.22** (Struktursatz für meromorphe Modulformen). *Für  $k$  gerade gilt*

$$V_k = \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}}.$$

*Beweis.* Wir zeigen etwas mehr, dass nämlich für eine meromorphe Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i)  $f \in V_k$ .
- (ii) Es gibt ein  $\ell \in \mathbb{Z}$  mit  $f \in \frac{M_{\ell+k}}{M_\ell}$ .
- (iii)  $f \in \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}}.$

---

<sup>34</sup>Diophantos von Alexandria (Lebensdaten nicht genau bekannt, zwischen -100 und 350)

Gelte zunächst Aussage (iii). Dann gibt es Polynome

$$P(X) = \sum_{\mu=0}^m a_{\mu} X^{\mu}, \quad Q(X) = \sum_{\nu=0}^n b_{\nu} X^{\nu} \quad \in \mathbb{C}[X]$$

mit

$$f = \frac{P(j)}{Q(j)} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \quad \text{und} \quad Q(j)(z) \neq 0.$$

Setzen wir die Definition der  $j$ -Invarianten ein, so erhalten wir

$$f = \frac{\sum_{\mu=0}^m a_{\mu} \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^{\mu}}{\sum_{\nu=0}^n b_{\nu} \left(\frac{E_4^3}{\Delta}\right)^{\nu}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} = \frac{\Delta^n \cdot \sum_{\mu=0}^m a_{\mu} (E_4^3)^{\mu} \Delta^{m-\mu}}{\Delta^m \cdot \sum_{\nu=0}^n b_{\nu} (E_4^3)^{\nu} \Delta^{n-\nu}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}}.$$

Wir unterscheiden nun in Abhängigkeit von Vorzeichen von  $k$  zwei Fälle:

**Fall 1:**  $k \geq 0$ . Dann sind Zähler und Nenner holomorphe Modulformen vom Gewicht  $12(m+n) + 4k$  bzw.  $12(m+n) + 3k$ .

**Fall 2:**  $k < 0$ . Dann schreiben wir

$$f = \frac{\Delta^n \cdot \sum_{\mu=0}^m a_{\mu} (E_4^3)^{\mu} \Delta^{m-\mu}}{\Delta^m \cdot \sum_{\nu=0}^n b_{\nu} (E_4^3)^{\nu} \Delta^{n-\nu}} \cdot \frac{E_6^{\frac{-k}{2}}}{E_4^{-k}}.$$

Hier sind Zähler und Nenner holomorphe Modulformen vom Gewicht  $12(m+n) - 3k$  bzw.  $12(m+n) - 4k$ .

In beiden Fällen folgt sofort Aussage (ii).

Dass Aussage (ii) Aussage (i) impliziert, ist klar.

Es verbleibt noch zu zeigen, dass aus Aussage (i) wieder Aussage (iii) folgt. Sei dafür  $f \in V_k$  nicht konstant null und seien weiter  $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$  Vertreter der Äquivalenzklassen modulo  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  der Polstellen von  $f$  sowie  $-m_{\varrho} := \text{ord}(f; z_{\varrho})$  für  $\varrho \in \{1, \dots, r\}$ . Dann erfüllt die Funktion

$$P(z) := \prod_{\varrho=1}^r (j(z) - j(z_{\varrho}))^{m_{\varrho}} \quad \in \mathbb{C}(j) \subseteq V_0$$

für alle  $\varrho \in \{1, \dots, r\}$  die Eigenschaft

$$\text{ord}(P; z_{\varrho}) \stackrel{3.21}{=} \text{ord}((j(z) - j(z_{\varrho}))^{m_{\varrho}}; z_{\varrho}) = m_{\varrho} \cdot \text{ord}(j(z) - j(z_{\varrho}); z_{\varrho}) \geq m_{\varrho}.$$

Es folgt, dass  $Pf$  in  $V_k$  liegt und auf  $\mathbb{H}$  holomorph ist. Wegen  $P \in \mathbb{C}[j]$  dürfen wir daher zum Beweis von Aussage (iii) ohne Einschränkung annehmen,  $f$  sei auf  $\mathbb{H}$  holomorph, und sonst  $Pf$  statt  $f$  untersuchen. Wegen  $\text{ord}(\Delta; \infty) = 1$  ist  $g := \Delta^{-\text{ord}(f; \infty)} f$  in  $z = \infty$  holomorph und somit



eine Modulform aus  $M_{k-12 \operatorname{ord}(f;\infty)}$ . Nach dem Struktursatz 3.12 ist  $g$  daher eine Linearkombination von Monomen  $E_4^\alpha E_6^\beta$  mit  $4\alpha + 6\beta = k - 12 \operatorname{ord}(f;\infty)$ .<sup>35</sup> Wegen  $f = \frac{g}{\Delta^{-\operatorname{ord}(f;\infty)}}$  genügt es also, die Behauptung für Funktionen vom Typ

$$\frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^{-\operatorname{ord}(f;\infty)}} \quad \text{mit } 4\alpha + 6\beta = k - 12 \operatorname{ord}(f;\infty)$$

zu zeigen. Für Zahlen  $\alpha, \beta$ , die hier vorkommen, gilt insbesondere

$$\alpha \equiv k \pmod{3} \quad \text{und} \quad 2\beta \equiv -k \pmod{4},$$

so dass wir  $\alpha = 3\tilde{\alpha} + k$  und  $\beta = 2\tilde{\beta} - \frac{k}{2}$  schreiben können. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{E_4^\alpha E_6^\beta}{\Delta^{-\operatorname{ord}(f;\infty)}} &= \frac{(E_4^3)^{\tilde{\alpha}} E_4^k (E_6^2)^{\tilde{\beta}} E_6^{-\frac{k}{2}}}{\Delta^{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}} \\ &= \frac{(E_4^3)^{\tilde{\alpha}}}{\Delta^{\tilde{\alpha}}} \cdot \frac{(E_6^2)^{\tilde{\beta}}}{\Delta^{\tilde{\beta}}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \\ &= j^{\tilde{\alpha}} \cdot \left( \frac{E_4^3}{\Delta} - \frac{E_4^3 - E_6^2}{\Delta} \right)^{\tilde{\beta}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \\ &= j^{\tilde{\alpha}} \cdot (j - 1728)^{\tilde{\beta}} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \in \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{\frac{k}{2}}} \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

**Bemerkung 3.23.** Schreiben wir kurz  $\mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ . Dann gilt: Der Quotient  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$  lässt sich auf natürliche Weise mit der Struktur einer kompakten Riemann'schen Fläche ausstatten, indem man die Ränder des Standardfundamentaltbereichs  $\mathcal{F}$  identifiziert. In dieser Sprache besagt Proposition 3.21, dass  $j$  einen Isomorphismus Riemann'scher Flächen

$$\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^* \cong \overline{\mathbb{C}}$$

liefert, so dass sich  $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$  topologisch mit der 2-Sphäre  $\mathcal{S}^2$  in  $\mathbb{R}^3$  identifizieren lässt. Im Spezialfall  $k = 0$  entspricht Satz 3.22 dann der Tatsache, dass die einzigen meromorphen Funktionen auf  $\mathcal{S}^2$  die rationalen Funktionen sind.

### 3.5 Übungsaufgaben

**Aufgabe 3.1.** Sei  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n$  in  $S_k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

<sup>35</sup>So etwas gibt es nach Konstruktion. Man bemerke, dass wegen der vorausgesetzten Holomorphie von  $f$  in  $\mathbb{H}$  die Valenzformel 2.17 für  $f$

$$\operatorname{ord}(f; \infty) \leq \frac{k}{12}$$

besagt.

(a) Es gibt eine Konstante  $c$  mit

$$|f(z)| \leq c \cdot e^{-2\pi \operatorname{Im}(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H} \text{ mit } \operatorname{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Es gibt eine Konstante  $C > 0$  mit

$$|a_n(f)| \leq C \cdot n^{\frac{k}{2}} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

**Aufgabe 3.2.** Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten der Spitzenform  $\Delta \in S_{12}$  ganze Zahlen sind.

*Hinweis:* Zeigen Sie dafür zunächst

$$\sigma_3(n) \equiv \sigma_5(n) \pmod{12} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Aufgabe 3.3.** (a) Drücken Sie  $E_{16}$  als Polynom in  $E_4$  und  $E_6$  aus.

(b) Nach Übungsaufgabe 2.1 gilt

$$f := E'_{12}\Delta - E_{12}\Delta' \in V_{26}.$$

Zeigen Sie  $f \in M_{26}$  und drücken Sie  $f$  als Polynom in  $E_4$  und  $E_6$  aus.

**Aufgabe 3.4.** Sei  $k \geq 4$  eine gerade ganze Zahl. Nach Korollar 3.17 erzeugen die Poincaré-Reihen  $P_{n,k}$  mit  $n \geq 1$  den Raum  $S_k$ . Zeigen Sie, dass

$$\{P_{1,k}, P_{2,k}, \dots, P_{d,k}\} \quad \text{mit } d = \dim_{\mathbb{C}}(S_k)$$

eine Basis von  $S_k$  bildet.

**Aufgabe 3.5.** Sei  $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n$  die Fourier-Entwicklung der Diskriminante  $\Delta \in S_{12}$ . Zeigen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Äquivalenz

$$\tau(n) = 0 \iff P_{n,12} \equiv 0 \iff g_n(n, 12) = 0.$$

**Bemerkung:** Die Zuordnung  $n \mapsto \tau(n)$  nennt man die RAMANUJAN- $\tau$ -Funktion.<sup>36</sup> Einer Vermutung von LEHMER<sup>37</sup> zufolge gilt  $\tau(n) \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 3.6.** In dieser Aufgabe zeigen wir die **Ramanujan-Kongruenz**

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für die Fourier-Koeffizienten  $\tau(n)$  der Diskriminante  $\Delta \in S_{12}$ . Zeigen Sie dafür zunächst die Aussagen

(a)  $E_{12}(z) = 1 + \frac{65520}{691} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n)q^n.$

(b)  $691 \cdot (E_{12} - E_6^2) = (65520 + 691 \cdot 1008) \cdot \Delta.$

<sup>36</sup>Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

<sup>37</sup>Derrick Henry Lehmer (1905-1991)

und folgern Sie die Behauptung durch Vergleich der Fourier-Koeffizienten auf beiden Seiten. Beachten Sie hierbei Übungsaufgabe 3.2.

**Aufgabe 3.7.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Das Integral

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

konvergiert absolut für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(z) > 0$  und stellt dort eine holomorphe Funktion dar. Diese nennen wir die **Gammafunktion**.

**Hinweis:** Zerlegen Sie das Integral in ein Integral von 0 bis 1 und eines von 1 bis  $\infty$  und behandeln Sie diese gesondert.

(b) Es gilt die Funktionalgleichung  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .

**Hinweis:** Benutzen Sie partielle Integration.

(c) Es gilt  $\Gamma(1) = 1$  und mit (b) also  $\Gamma(n+1) = n!$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

### Hecke-Theorie

---

Die HECKE-Theorie<sup>38</sup> studiert spezielle Operatoren auf der Menge der holomorphen Modulformen eines festen Gewichts  $k$ . Zu diesen Operatoren gehört eine Algebra, die sogenannte Hecke-Algebra. Letztere stellt ein recht allgemeines Konzept dar, das wir in Abschnitt 4.1 in größerer Allgemeinheit behandeln wollen. In Abschnitt 4.2 studieren wir dann den Spezialfall einer Hecke-Algebra zur vollen Modulgruppe und wenden in den Abschnitten 4.3 und 4.4 deren Elemente auf holomorphe Modulformen zur vollen Modulgruppe an. Als Anwendung der Hecke-Theorie leiten wir im abschließenden Abschnitt 4.5 Algebraizitätsaussagen über die Fourier-Koeffizienten geeigneter holomorpher Modulformen her.

#### 4.1 Die allgemeine Hecke-Algebra

**Definition 4.1.** Ein Paar  $(R, S)$  aus einem Monoid  $S$  und einer darin enthaltenen Gruppe  $R \subseteq S$ , so dass für alle  $s \in S$  die Doppelnebenklasse  $RsR$  aus nur endlich vielen  $R$ -Linksnebenklassen besteht, nennen wir ein **Hecke-Paar**.

**Beispiel 4.2.** Ein Paar  $(R, S)$  zweier Gruppen  $R \subseteq S$  ist trivialerweise ein Hecke-Paar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (a)  $R$  ist eine endliche Untergruppe von  $S$ ,
- (b)  $R$  ist in  $S$  normal.

Wir führen in Beispiel 4.4 ein erstes interessantes Beispiel eines Hecke-Paares ein, benötigen dafür aber zunächst das folgende Lemma:

---

<sup>38</sup>Erich Hecke (1887-1947)

**Lemma 4.3.** Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\mathbb{M}^n := \{M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det(M) = n\} = \bigsqcup_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod (d)}} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

wobei  $b$  ein volles Vertretersystem modulo  $d$  durchläuft, also etwa  $b \in \{1, 2, \dots, d\}$ .

*Beweis.* Offensichtlich ist die rechte Seite in der linken enthalten. Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion und betrachten dazu eine beliebige Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^n.$$

Wegen  $ad - bc = n > 0$  können  $a$  und  $c$  nicht gleichzeitig Null sein. Mit  $g := \mathrm{ggT}(a, c) \in \mathbb{N}$  sind daher  $-\frac{c}{g}$  und  $\frac{a}{g}$  teilerfremd und nach dem **erweiterten euklidischen Algorithmus** aus der Linearen Algebra gibt es  $e, f \in \mathbb{Z}$  mit  $e\frac{a}{g} + f\frac{c}{g} = 1$  und

$$\begin{pmatrix} e & f \\ -\frac{c}{g} & \frac{a}{g} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

so dass wir ohne Einschränkung  $c = 0$  annehmen können. Wegen  $\det M = n$  gilt dann  $ad = n$ . Nach möglicher Multiplikation mit  $-I_2$  dürfen wir zudem ohne Einschränkung  $d > 0$  annehmen. Für ein beliebiges  $h \in \mathbb{Z}$  gilt weiter

$$T^h \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + dh \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

so dass wir ohne Einschränkung annehmen können, dass  $b$  in einem geeigneten Restesystem modulo  $d$  liegt.

Es verbleibt zu zeigen, dass die Vereinigung in der Behauptung disjunkt ist – die Endlichkeit ist nach Konstruktion klar. Angenommen, für zwei Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}$$

mit  $ad = n = \tilde{a}\tilde{d}$ ,  $d, \tilde{d} > 0$  und  $b, \tilde{b}$  Vertreter zweier Restklassen modulo  $d$  bzw.  $\tilde{d}$  existiere ein  $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Dann folgt, dass der untere linke Eintrag von  $U$  Null ist, also  $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$ . Es gibt also ein Vorzeichen  $\pm$  und ein  $h \in \mathbb{Z}$  mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & h \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm a & \pm b + hd \\ 0 & \pm d \end{pmatrix}.$$

Einerseits folgt  $\tilde{d} = \pm d$  und wegen  $d, \tilde{d} > 0$  bereits  $\tilde{d} = d$  und somit  $U = T^h$ . Andererseits gilt dann auch  $\tilde{b} = b + hd$ . Wegen  $\tilde{d} = d$  stammen  $b, \tilde{b}$  aus dem gleichen Restesystem modulo  $d$ . Da sie sich nur um ein Vielfaches von  $d$  unterscheiden, folgt  $\tilde{b} = b$  und  $U = I_2$ . Insbesondere haben wir die behauptete Disjunktheit nachgewiesen.  $\square$



**Beispiel 4.4.** Sei

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ := \{Q \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid \det(Q) > 0\}.$$

Dann ist  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$  ein Hecke-Paar,

denn: Für ein beliebiges  $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$  gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $mQ \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  und  $n := \det(mQ) > 0$ . Es gilt deshalb

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot Q \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \frac{1}{m} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot (mQ) \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \subseteq \frac{1}{m} \cdot \mathbb{M}^n.$$

Die  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklasse  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot Q \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  zerfällt (disjunkt) in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Linksnebenklassen. Nach Lemma 4.3 ist diese Zerlegung endlich und explizit bekannt. #

Bezüglich eines gegebenen Hecke-Paares  $(R, S)$  schreiben wir

- $\mathcal{L}(R, S)$  für den  $\mathbb{Z}$ -Modul aller formalen endlichen  $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen von  $R$ -Linksnebenklassen von  $S$ ,
- $\mathcal{H}(R, S)$  für den  $\mathbb{Z}$ -Modul aller formalen endlichen  $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen von  $R$ -Doppelnebenklassen von  $S$ .

Nach Voraussetzung ist jede  $R$ -Doppelnebenklasse  $RsR$  in  $S$  die disjunkte Vereinigung endlich vieler  $R$ -Linksnebenklassen

$$RsR = Rs_1 \sqcup \dots \sqcup Rs_\ell \quad \text{für ein geeignete } s_1, \dots, s_\ell \in S.$$

Wir ordnen  $RsR$  das Element

$$\iota(RsR) := \sum_{j=1}^{\ell} Rs_j \in \mathcal{L}(R, S)$$

zu und setzen  $\iota$  zu der eindeutig bestimmten  $\mathbb{Z}$ -linearen Abbildung

$$\iota : \mathcal{H}(R, S) \rightarrow \mathcal{L}(R, S)$$

fort. Letztere ist offenkundig injektiv; wir wollen nun ihr Bild studieren. Die Gruppe  $S$  operiert per Rechtsmultiplikation auf der Menge ihrer  $R$ -Linksnebenklassen und in  $\mathbb{Z}$ -linearer Fortsetzung auf  $\mathcal{L}(R, S)$ . Den Untermodul der  $R$ -Invarianten unter dieser Aktion bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}(R, S)^R$ . Dann ist

$$\iota : \mathcal{H}(R, S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(R, S)^R$$

ein Isomorphismus von  $\mathbb{Z}$ -Moduln,

denn: Ein Element

$$\sum_{s \in R \setminus S} a_s Rs \in \mathcal{L}(R, S)$$

ist genau dann  $R$ -rechtsinvariant, wenn für alle  $s, t$  mit  $RsR = RtR$  die Koeffizienten  $a_s$  und  $a_t$  übereinstimmen. Genau dann können wir

$$\sum_{s \in R \setminus S} a_s Rs = \sum_{s \in R \setminus S/R} \sum_{\substack{s_j \in R \setminus S \\ Rs_j \subseteq RsR}} a_s Rs_j = \sum_{s \in R \setminus S/R} a_s \iota(RsR) = \iota \left( \sum_{s \in R \setminus S/R} a_s RsR \right) \quad (4.1)$$

schreiben. #

Wir werden von nun an  $\mathcal{L}(R, S)^R$  mit  $\mathcal{H}(R, S)$  identifizieren.

Wir definieren ein Produkt

$$(RsR)(Rt) := \left( \bigsqcup_{j=1}^{\ell} Rs_j \right) (Rt) := \sum_{j=1}^{\ell} Rs_j t \in \mathcal{L}(R, S) \quad (4.2)$$

von  $R$ -Doppelnebenklassen mit  $R$ -Linksnebenklassen. Dieses hängt offensichtlich nicht von der Wahl der Vertreter  $s_j$  und  $t$  ab und lässt sich  $\mathbb{Z}$ -bilinear zu einer Verknüpfung

$$\mathcal{H}(R, S) \times \mathcal{L}(R, S) \rightarrow \mathcal{L}(R, S) \quad (4.3)$$

fortsetzen.

**Proposition 4.5.** *Sei  $(R, S)$  ein Hecke-Paar. Dann ist die in (4.3) definierte Verknüpfung in dem Sinne assoziativ, dass*

$$(\mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}})\mathfrak{L} = \mathfrak{D}(\tilde{\mathfrak{D}}\mathfrak{L}) \quad \text{für alle } \mathfrak{D}, \tilde{\mathfrak{D}} \in \mathcal{H}(R, S) \text{ und } \mathfrak{L} \in \mathcal{L}(R, S)$$

*gilt. Außerdem ist das Produkt zweier Elemente aus  $\mathcal{H}(R, S)$  wieder in  $\mathcal{H}(R, S)$  enthalten. Es folgt, dass  $\mathcal{H}(R, S)$  die Struktur einer assoziativen  $\mathbb{Z}$ -Algebra mit Einselement  $R = Re_S R$  trägt. Diese nennen wir ab sofort die **Hecke-Algebra** des Hecke-Paares  $(R, S)$ .*

*Beweis.* Das Produkt zweier  $R$ -Doppelnebenklassen  $RsR = \bigsqcup Rs_j$  und  $RtR = \bigsqcup Rt_k$  wird durch die Formel

$$(RsR)(RtR) = \sum_{j,k} Rs_j t_k$$

gegeben. Die Assoziativität ist nun klar. Rechtsmultiplikation mit einem Element  $r \in R$  permutiert nur die  $R$ -Linksnebenklassen  $Rt_k$ , das Produkt bleibt also invariant und liegt somit in  $\mathcal{L}(R, S)^R \cong \mathcal{H}(R, S)$  wie behauptet. □

Wir wollen das Produkt in der Hecke-Algebra noch ein wenig besser kennenlernen.

**Proposition 4.6.** *Sei  $(R, S)$  ein Hecke-Paar. Das Produkt zweier  $R$ -Doppelnebenklassen  $RsR = \bigsqcup Rs_j$  und  $RtR = \bigsqcup Rt_k$  wird durch die Formel*

$$(RsR)(RtR) = \sum a_u RuR$$

*gegeben. Dabei durchläuft  $u$  ein Vertretersystem derjenigen  $R$ -Doppelnebenklassen, die in  $RsRtR$  enthalten sind, und es gilt*

$$a_u = |\{(j, k) \mid Ru = Rs_j t_k\}|.$$

*$a_u$  hängt nicht von der Wahl der Vertreter  $s_j$ ,  $t_k$  und  $u$  ab und ist von 0 verschieden, wenn  $RuR$  in  $RsRtR$  enthalten ist.*

*Beweis.* Mit den Überlegungen von (4.1) ist das trivial. □

**Bemerkung 4.7.** Man kann die Koeffizienten  $a_u$  des Produkts in Proposition 4.6 auch wie folgt beschreiben. Sei  $\deg(u)$  die Anzahl aller in  $RuR$  enthaltenen Linksnebenklassen. Dann gilt

$$\deg(u)a_u = |\{(j, k) \mid RuR = Rs_j t_k R\}|.$$

**Definition 4.8.** Sei  $(R, S)$  ein Hecke-Paar. Ein **Antiautomorphismus** von  $(R, S)$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S, \\ s &\mapsto s'. \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften

- $(s')' = s,$  (Involutorisizität)
- $(st)' = t's',$  (Antihomomorphie)
- $s \in R \implies s' \in R.$  (R-Abgeschlossenheit)

Ausgehend von einer  $R$ -Doppelnebenklasse  $\mathfrak{D} = RsR = \bigsqcup Rs_j$  ist auch

$$\mathfrak{D}' := \{s \in S \mid s' \in \mathfrak{D}\} = Rs'R = \bigsqcup Rs'_j$$

wieder eine  $R$ -Doppelnebenklasse. Die so gegebene Zuordnung  $\mathfrak{D} \mapsto \mathfrak{D}'$  lässt sich  $\mathbb{Z}$ -linear zu einer Abbildung auf  $\mathcal{H}(R, S)$  fortsetzen. Diese Fortsetzung ist nicht zwangsläufig antihomomorph, aber es gilt

**Proposition 4.9.** Für ein Hecke-Paar  $(R, S)$  besitze jede  $R$ -Doppelnebenklasse  $RsR$  mit  $s \in S$  ein simultanes Vertretersystem der  $R$ -Rechts- und  $R$ -Linksnebenklassen

$$RsR = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} Rs_j = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} s_j R.$$

Dann definiert jeder Antiautomorphismus  $s \mapsto s'$  des Hecke-Paares  $(R, S)$  einen Antiautomorphismus auf  $\mathcal{H}(R, S)$ .

*Beweis.* Seien

$$\mathfrak{D} = RsR = \bigsqcup Rs_j = \bigsqcup s_j R \quad \text{und} \quad \tilde{\mathfrak{D}} = RtR = \bigsqcup Rt_k = \bigsqcup t_k R.$$

Dann gilt nach Bemerkung 4.7

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}} &= \sum a_u RuR & \text{mit } \deg(u)a_u &= |\{(j, k) \mid RuR = Rs_j t_k R\}|, \\ \tilde{\mathfrak{D}}'\mathfrak{D}' &= (\bigsqcup Rt'_k)(\bigsqcup Rs'_j) = \sum b_u RuR & \text{mit } \deg(u)b_u &= |\{(j, k) \mid RuR = Rt'_k s'_j R\}|. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mit  $(Rs_j t_k R)' = Rt'_k s'_j R$  und  $\deg(u') = \deg(u)$ . □



**Bemerkung 4.10.** Die Voraussetzung von Proposition 4.9 ist schon erfüllt, wenn für alle  $s \in S$  die Anzahl der  $R$ -Rechts- und  $R$ -Linksnebenklassen in  $RsR$  übereinstimmt,

denn: Gelte  $RsR = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} Rs_j = \bigsqcup_{j=1}^{\ell} t_j R$ . Die Behauptung ist offensichtlich gezeigt, wenn wir für jedes  $j$  ein  $u_j$  finden können mit

$$Rs_j = Ru_j \quad \text{und} \quad t_j R = u_j R.$$

Nach Voraussetzung ist  $s_j \in RsR = Rt_j R$ , also

$$s_j = rt_j \tilde{r} \quad \text{mit } r, \tilde{r} \in R.$$

Eine mögliche Wahl für  $u_j$  ist also  $u_j := r^{-1}s_j = t_j \tilde{r}$ . #

**Satz 4.11.** Besitzt das Hecke-Paar  $(R, S)$  einen Antiautomorphismus  $s \mapsto s'$  mit der Eigenschaft

$$RsR = Rs'R \quad \text{für alle } s \in S,$$

so ist die Hecke-Algebra  $\mathcal{H}(R, S)$  kommutativ.

*Beweis.* Besitzt der Antiautomorphismus die geforderte Eigenschaft, so ist er die Identität auf  $\mathcal{H}(R, S)$ . Insbesondere stimmt die Anzahl der  $R$ -Rechts- und  $R$ -Linksnebenklassen überein, so dass wir nach Bemerkung 4.10 Proposition 4.9 anwenden können. Es gilt dann

$$\mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{D}})' = \tilde{\mathfrak{D}}'\mathfrak{D}' = \tilde{\mathfrak{D}}\mathfrak{D}$$

und also der Satz. □

**Beispiel 4.12.** Nach Beispiel 4.4 ist  $(R, S) = (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$  ein Hecke-Paar; es lässt sich also jede Doppelnebenklasse als disjunkte Vereinigung endlich vieler Linksnebenklassen schreiben. Die zugehörige Hecke-Algebra  $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$  ist kommutativ,

denn: Offensichtlich ist hier das Transponieren ein Antiautomorphismus. Nach dem **Elementarteilersatz** aus der Linearen Algebra gibt es zu einer beliebigen Matrix  $M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  Matrizen  $U, \tilde{U} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$  und eindeutig bestimmte **Elementarteiler**  $e_1, e_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  mit  $e_1 \mid e_2$  und

$$UM\tilde{U} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Hat  $M$  positive Determinante, so können wir dabei ohne Einschränkung  $U, \tilde{U} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  und  $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$  annehmen. Durch Transponieren der Gleichung ergibt sich

$${}^t\tilde{U} {}^tM {}^tU = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$$

und somit die Gleichheit der  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklassen

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) {}^tM\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Diese Überlegung gilt offensichtlich auch für ein beliebiges  $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$ , so dass tatsächlich die Hecke-Algebra  $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$  kommutativ ist. #



## 4.2 Die Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe

Wir bestimmen in diesem Abschnitt die Struktur der Hecke-Algebra der vollen Modulgruppe.

**Lemma 4.13.** *Gilt für  $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$  eine der Bedingungen*

- (a)  $N = r \cdot I_2$  mit  $r \in \mathbb{Q}$ ,
- (b)  $M, N \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  mit  $\mathrm{ggT}(\det(M), \det(N)) = 1$ ,

so gilt in  $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+)$

$$(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot MN \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

*Beweis.* In Fall (a) ist die Behauptung klar, da  $N$  dann mit beliebigen Matrizen in  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+$  kommutiert.

In Fall (b) seien für  $X \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  die Elementarteiler mit  $e_1^{(X)}, e_2^{(X)}$  bezeichnet. Dabei gilt nach Konstruktion stets

$$\begin{aligned} e_1^{(X)} &= \mathrm{ggT}\{\text{Einträge von } X\}, \\ e_2^{(X)} &= \frac{\det(X)}{e_1^{(X)}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Behauptung in diesem Fall ist dann äquivalent zur Gültigkeit der Identitäten

$$e_1^{(M)} \cdot e_1^{(N)} = e_1^{(MUN)} \quad \text{und} \quad e_2^{(M)} \cdot e_2^{(N)} = e_2^{(MUN)} \quad \text{für alle } U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Nach dem bereits bewiesenen Fall (a) dürfen wir die Matrix  $M$  durch  $(e_1^{(M)})^{-1} \cdot M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  und die Matrix  $N$  durch  $(e_1^{(N)})^{-1} \cdot N \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$  ersetzen. Wegen

$$\det(M) \cdot \det(N) = \det(M) \cdot \det(U) \cdot \det(N) = \det(MUN)$$

genügt es daher, unter diesen Voraussetzungen

$$e_1^{(MUN)} = 1 \tag{4.5}$$

zu zeigen. Schreiben wir

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

so gilt

$$MUN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(M) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \det(N)b \\ \det(M)c & \det(M)\det(N)d \end{pmatrix}.$$

Jeder gemeinsame Primteiler  $p$  der Einträge dieser Matrix erfüllt insbesondere

$$p \mid a, \quad p \mid \det(N)b \quad \text{und} \quad p \mid \det(M)c.$$

Wegen  $\det(U) = 1$  gilt aber

$$p \nmid b \quad \text{und} \quad p \nmid c$$

und also

$$p \mid \det(N) \quad \text{und} \quad p \mid \det(M).$$

Das steht im Widerspruch zur Teilerfremdheit von  $\det(M)$  und  $\det(N)$ ; einen solchen gemeinsamen Primteiler der Einträge von  $MUN$  kann es also nicht geben. Insgesamt haben wir (4.5) und somit Fall (b) des Lemmas gezeigt.  $\square$

**Bemerkung 4.14.** Schreiben wir in der Situation von Teil (b) von Lemma 4.13

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \quad \text{und} \quad \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_i \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i,$$

so gilt

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot MN \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{i,j} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i,$$

denn: Nach Teil (b) von Lemma 4.13 gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot MN \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &= (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \\ &= \left( \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \right) \cdot \left( \bigsqcup_i \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i \right). \end{aligned}$$

Für ein beliebiges aber festes  $i$  ist nun

$$\begin{aligned} \left( \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \right) \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i) &= \bigcup_j (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot N_i \\ &= \bigcup_j (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot N_i \\ &= (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot N_i \\ &= \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, dass die jeweiligen Mengen auf der rechten Seite für verschiedene Werte von  $i$  disjunkt sind. Sei dafür  $U \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit

$$M_j N_i = U M_{\tilde{j}} N_{\tilde{i}} \quad \text{für geeignete } j, \tilde{j}, i, \tilde{i}.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$N_i (N_{\tilde{i}})^{-1} = (M_j)^{-1} U M_{\tilde{j}}.$$

Die Nenner der Einträge auf der linken Seite sind Teiler von  $|\det(N_i)| = |\det(N)|$ , die auf der rechten Seite Teiler von  $|\det(M_j)| = |\det(M)|$ . Wegen der Teilerfremdheit von  $\det(M)$  und  $\det(N)$  sind also alle Einträge ganze Zahlen und somit  $j = \tilde{j}$  und  $i = \tilde{i}$ .  $\#$

Wir nehmen Teil (a) von Lemma 4.13 zum Anlass, nur noch Doppelnebenklassen ganzzahliger Matrizen zu betrachten, also

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) \quad \text{mit } \mathbb{M} := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})^+ \cap \mathbb{Z}^{2 \times 2} = \{M \in \mathbb{Z}^{2 \times 2} \mid \det M > 0\}.$$

Hierbei ist offensichtlich, dass  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$  in Analogie zu Beispiel 4.4 ein Hecke-Paar ist. In Satz 4.16 werden wir Teil (b) von Lemma 4.13 benutzen, um uns das Studium der Hecke-Algebra  $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$  durch eine geeignete Zerlegung zu erleichtern. Wir führen zunächst die passende Notation ein:

**Definition 4.15.** Für jede Primzahl  $p$  setzen wir

$$\mathbb{M}_p := \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathbb{M}^{p^r}.$$

Offensichtlich ist dann auch  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$  in Analogie zu Beispiel 4.4 ein Hecke-Paar. Die zugehörige Hecke-Algebra

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$$

heißt die  **$p$ -primäre Komponente** der Hecke-Algebra  $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ .

**Satz 4.16.** Die Hecke-Algebra des Paares  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$  ist das Tensorprodukt<sup>39</sup>

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) = \bigotimes_{p \text{ prim}} \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$$

ihrer  $p$ -primären Komponenten.

*Beweis.* Wir können für die Hecke-Algebra  $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$  und für jede ihrer  $p$ -Komponenten  $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$  die jeweilig passenden  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklassen als Basis wählen. Jede Doppelnebenklasse  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $M \in \mathbb{M}^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  besitzt einen eindeutig bestimmten Vertreter der Form

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } e_1, e_2 \in \mathbb{N}, \quad e_1 e_2 = n, \quad e_1 \mid e_2.$$

Jede solche Matrix lässt sich eindeutig als Produkt von ebensolchen Matrizen schreiben, deren Einträge jeweils nur Potenzen einer festen Primzahl sind. Der Satz folgt daher mit Teil (b) von Lemma 4.13.  $\square$

<sup>39</sup>Das Tensorprodukt einer gegebenen Menge von  $\mathbb{Z}$ -Moduln  $\{M_p \mid p \text{ prim}\}$  mit jeweils zugehörigen Basen  $B_p$  kann als der  $\mathbb{Z}$ -Modul mit Basis

$$\bigoplus_{p \text{ prim}} B_p = \bigcup_{\substack{I \text{ endliche Menge} \\ \text{von Primzahlen}}} \left( \prod_{p \in I} B_p \right)$$

interpretiert werden, vgl. Satz 13.3 aus der Algebra.



Offenbar genügt es also zum Studium der Hecke-Algebra die einzelnen  $p$ -Komponenten zu betrachten. Bevor wir dies tun, führen wir Kurzschreibweisen für bestimmte Elemente der Hecke-Algebra ein, nämlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}(a, d) &:= \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) && \text{für } a, d \in \mathbb{N}, \\ \mathfrak{D}(n) &:= \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^n / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) && \text{für } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Wie wir im Beweis von Beispiel 4.12 eingesehen haben, beschreibt dabei die erste Zeile nach dem Elementarteilersatz eine ganz allgemeine Doppelnebenklasse. In dieser Sprache lassen sich nun einige unserer bisherigen Ergebnisse neu formulieren:

**Lemma 4.17.** Für alle  $a, d, n \in \mathbb{N}$  gelten die folgenden Aussagen:

- (a)  $\mathfrak{D}(n) = \sum_{\substack{ad=n \text{ mit } a|d \\ a, d > 0}} \mathfrak{D}(a, d).$
- (b)  $\mathfrak{D}(a, d)\mathfrak{D}(n, n) = \mathfrak{D}(an, dn).$

*Beweis.* Behauptung (a) folgt unmittelbar aus dem Elementarteilersatz und Behauptung (b) ist eine Umformulierung von Teil (a) von Lemma 4.13.  $\square$

Wir wollen nun die Struktur von  $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$  untersuchen. Wie wir bereits im Beweis von Satz 4.16 eingesehen haben, ist dort nach dem Elementarteilersatz jede  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Doppelnebenklasse von der Gestalt

$$\mathfrak{D}(p^{k_1}, p^{k_2}) \quad \text{mit } 0 \leq k_1 \leq k_2. \quad (4.6)$$

Für diese gelten die folgenden Rechenregeln:

**Lemma 4.18.** Für eine beliebige Primzahl  $p$  gilt:

- (a)  $\mathfrak{D}(1, p) = \mathfrak{D}(p) = \mathbb{M}^p.$
- (b)  $\mathfrak{D}(1, p^r) = \mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2}) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}.$
- (c)  $\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) = \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$
- (d)  $\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(1, p^r) = \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(1, p^{r-1}) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}.$
- (e)  $\mathfrak{D}(p^r)\mathfrak{D}(p^s) = \sum_{i=0}^{\min\{r,s\}} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i}) \quad \text{für alle } r, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$

*Beweis.* Behauptung (a) ist ein Spezialfall von Teil (a) von Lemma 4.17.

Behauptung (b) lässt sich elementar nachweisen; für  $p$  prim und  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  gilt:

$$\mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2}) = \sum_{\substack{ad=p^r \text{ mit } a|d \\ a, d > 0}} \mathfrak{D}(a, d) - \mathfrak{D}(p, p) \cdot \sum_{\substack{\tilde{a}\tilde{d}=p^{r-2} \text{ mit } \tilde{a}|\tilde{d} \\ \tilde{a}, \tilde{d} > 0}} \mathfrak{D}(\tilde{a}, \tilde{d})$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{4.17(b)}{=} \sum_{\alpha+\delta=r \text{ mit } 0 \leq \alpha \leq \delta} \mathfrak{D}(p^\alpha, p^\delta) - \sum_{\tilde{\alpha}+\tilde{\delta}=r-2 \text{ mit } 0 \leq \tilde{\alpha} \leq \tilde{\delta}} \mathfrak{D}(p^{\tilde{\alpha}+1}, p^{\tilde{\delta}+1}) \\
&= \mathfrak{D}(1, p^r).
\end{aligned}$$

Für Behauptung (c) stellen wir zunächst  $\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r)$  als Linearkombination

$$\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) = \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^{p^{r+1}} / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} a_M \cdot (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \quad \text{mit } a_M \in \mathbb{Z}$$

von geeigneten Doppelnebenklassen dar. Nach Aussage (a) und Lemma 4.3 ist ein Vertretersystem von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Nebenklassen in  $\mathfrak{D}(p)$  gegeben durch die Matrizen

$$M_j := \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & p \end{pmatrix} \text{ mit } j \in \{0, 1, \dots, p-1\} \quad \text{und} \quad M_p := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für ein  $M \in \mathbb{M}^{p^{r+1}}$ , das in der Notation von (4.4) die Teilbarkeitsbedingung  $p \mid e_1^{(M)}$  erfüllt, führt die Ganzzahligkeit sämtlicher  $pM_j^{-1}$  zu

$$MM_j^{-1} \in \mathbb{M}^{p^r} \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, p\},$$

also zu  $a_M = p + 1$ . Es gibt nur eine Doppelnebenklasse  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  in  $\mathbb{M}^{p^{r+1}}$  mit  $p \nmid e_1^{(M)}$  und für diese ist

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{r+1} \end{pmatrix}$$

ein möglicher Vertreter. Für diesen ist

$$MM_j^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{j}{p} \\ 0 & p^r \end{pmatrix} & \text{für } j < p, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & p^{r+1} \end{pmatrix} & \text{für } j = p \end{cases}$$

ganzzahlig genau für  $j = 0$ ; es gilt hier also  $a_M = 1$ . Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) &= \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + (p+1) \cdot \sum_{\substack{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^{p^{r+1}} / \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ p \mid e_1^{(M)}}} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})M\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\
&\stackrel{4.17(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + (p+1)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) \\
&\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}).
\end{aligned}$$

Behauptung (d) folgt aus dem bisher Gezeigten. Im Fall  $r = 2$  gilt

$$\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(1, p^2) \stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(p)(\mathfrak{D}(p^2) - \mathfrak{D}(p, p))$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^2) - \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p) \\
&\stackrel{(c)}{=} \mathfrak{D}(p^3) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p) - \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p) \\
&\stackrel{4.12}{=} \mathfrak{D}(p^3) + (p-1)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p) \\
&\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^3) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p) \\
&\stackrel{(a)}{=} \mathfrak{D}(1, p^3) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(1, p)
\end{aligned}$$

und im Fall  $r \geq 3$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(1, p^r) &\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(p)(\mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2})) \\
&= \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^r) - \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2}) \\
&\stackrel{4.12, (c)}{=} \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - \mathfrak{D}(p, p)(\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^{r-2})) \\
&\stackrel{(c)}{=} \mathfrak{D}(p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - \mathfrak{D}(p, p)(\mathfrak{D}(p^{r-1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-3})) \\
&= \mathfrak{D}(p^{r+1}) + (p-1)\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - p\mathfrak{D}(p, p)^2\mathfrak{D}(p^{r-3}) \\
&\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - p\mathfrak{D}(p, p)^2\mathfrak{D}(p^{r-3}) \\
&= \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)(\mathfrak{D}(p^{r-1}) - \mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-3})) \\
&\stackrel{(b)}{=} \mathfrak{D}(1, p^{r+1}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(1, p^{r-1}).
\end{aligned}$$

Behauptung (e) zeigen wir über eine Induktion nach  $r$ , wobei der Fall  $r = 0$  trivial ist und der Fall  $r = 1$  durch Aussage (c) gegeben ist. Sei also nun  $2 \leq r \leq s$ <sup>40</sup> und sei als Induktionsvoraussetzung (IV) die Behauptung für  $r-1$  und  $r-2$  bereits gezeigt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}(p^r)\mathfrak{D}(p^s) &\stackrel{(c)}{=} (\mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^{r-1}) - p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r-2}))\mathfrak{D}(p^s) \\
&\stackrel{(IV)}{=} \sum_{i=0}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{(r-1)+s-2i}) - p\mathfrak{D}(p, p) \cdot \sum_{i=0}^{r-2} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{(r-2)+s-2i}) \\
&\stackrel{4.12}{=} \sum_{i=0}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p)\mathfrak{D}(p^{r+s-2i-1}) - \sum_{i=1}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i}) \\
&\stackrel{(c)}{=} \sum_{i=0}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i (\mathfrak{D}(p^{r+s-2i}) + p\mathfrak{D}(p, p)\mathfrak{D}(p^{r+s-2i-2})) - \sum_{i=1}^{r-1} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i}) \\
&= \sum_{i=0}^r p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{r+s-2i}).
\end{aligned}$$

□

Zusammen mit Teil (b) von Lemma 4.13 ergibt sich

<sup>40</sup>Wegen der in Beispiel 4.12 gezeigten Kommutativität der Hecke-Algebra ist das keine echte Einschränkung.

**Korollar 4.19.**  $\mathfrak{D}(m)\mathfrak{D}(n) = \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} d\mathfrak{D}(d,d)\mathfrak{D}\left(\frac{mn}{d^2}\right)$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Wir zerlegen  $m$  und  $n$  in Primzahlpotenzen. Dazu betrachten wir für jede ganze Zahl  $a$  und jede Primzahl  $p$  die  $p$ -adische Bewertung, vgl. Definition 15.1 aus der Algebraischen Zahlentheorie,

$$v_p(a) := \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid p^k \mid a\}. \quad (4.7)$$

Es gilt dann

$$m = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(m)} \quad \text{und} \quad n = \prod_{p \text{ prim}} p^{v_p(n)}$$

und nach Teil (b) von Lemma 4.13 und der in Beispiel 4.12 gezeigten Kommutativität der Hecke-Algebra also auch

$$\mathfrak{D}(m) = \prod_{p \text{ prim}} \mathfrak{D}(p^{v_p(m)}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}(n) = \prod_{p \text{ prim}} \mathfrak{D}(p^{v_p(n)}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(m)\mathfrak{D}(n) &\stackrel{4.12}{=} \prod_{p \text{ prim}} \mathfrak{D}(p^{v_p(m)})\mathfrak{D}(p^{v_p(n)}) \\ &\stackrel{4.18(e)}{=} \prod_{p \text{ prim}} \sum_{i=0}^{\min\{v_p(m), v_p(n)\}} p^i \mathfrak{D}(p, p)^i \mathfrak{D}(p^{v_p(m)+v_p(n)-2i}) \end{aligned}$$

Nach Teil (a) von Lemma 4.13 gilt für jede Primzahl  $p$  und jede natürliche Zahl  $i$  die Rechenregel

$$\mathfrak{D}(p, p)^i = \mathfrak{D}(p^i, p^i).$$

Wenden wir dies an, so erhalten wir

$$\mathfrak{D}(m)\mathfrak{D}(n) = \prod_{p \text{ prim}} \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(p^{v_p(m)}, p^{v_p(n)}) \\ d>0}} d\mathfrak{D}(d,d)\mathfrak{D}\left(\frac{p^{v_p(m)}p^{v_p(n)}}{d^2}\right).$$

Das Korollar folgt durch Ausmultiplizieren und unter nochmaliger Anwendung von Teil (b) von Lemma 4.13.  $\square$

Die Aussagen von Lemma 4.18 münden in folgenden

**Satz 4.20.** Für eine beliebige Primzahl  $p$  gilt

$$\mathcal{H}(\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p) = \mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)],$$

wobei  $\mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)]$  ein freier  $\mathbb{Z}$ -Modul mit Basis  $\{\mathfrak{D}(p, p)^m \mathfrak{D}(p)^n \mid m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}^{41}$  ist (vgl. Definition 29.11 aus der Linearen Algebra).

<sup>41</sup>Elemente von  $\mathcal{H}(\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$  lassen sich also als Polynome in den Variablen  $\mathfrak{D}(p, p)$  und  $\mathfrak{D}(p)$  verstehen.



*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(1, p^2) &\stackrel{4.18(b)}{=} \mathfrak{D}(p^2) - \mathfrak{D}(p, p) \\ &\stackrel{4.18(c)}{=} (\mathfrak{D}(p)^2 - p\mathfrak{D}(p, p)) - \mathfrak{D}(p, p) \\ &= \mathfrak{D}(p)^2 - (p+1)\mathfrak{D}(p, p). \end{aligned}$$

Mit Teil (d) von Lemma 4.18 folgern wir daraus induktiv

$$\mathfrak{D}(1, p^r) \in \mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)] \quad \text{für alle } r \in \mathbb{N}.$$

Mit Teil (b) von Lemma 4.17 und (4.6) erhalten wir, dass alle in  $\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p)$  enthaltenen Doppelnebenklassen bereits in  $\mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)]$  liegen. Hieraus folgt sofort

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p) = \mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)].$$

Um zu zeigen, dass die Monome vom Typ  $\mathfrak{D}(p, p)^m \mathfrak{D}(p)^n$  mit  $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  eine Basis von  $\mathbb{Z}[\mathfrak{D}(p, p), \mathfrak{D}(p)]$  bilden, genügt es nun, ihre  $\mathbb{Z}$ -lineare Unabhängigkeit nachzuweisen. Hierfür genügt es für  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  beliebig diejenigen dieser Monome zu untersuchen, die sich als  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination von Doppelnebenklassen in  $\mathbb{M}^{p^r}$  schreiben lassen, die also  $2m + n = r$  erfüllen. Die Anzahl solcher Monome ist  $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$ . Die  $\mathbb{Z}$ -lineare Unabhängigkeit folgt, da es in  $\mathbb{M}^{p^r}$  offensichtlich genau  $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$  Doppelnebenklassen gibt.  $\square$

**Korollar 4.21.** *Die rationale Hecke-Algebra*

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) := \mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) \otimes \mathbb{Q}$$

erfüllt

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) = \mathbb{Q}[\mathfrak{D}(n) \mid n \in \mathbb{N}].$$

*Beweis.* Nach Teil (c) von Lemma 4.18 gilt

$$\mathfrak{D}(p, p) = \frac{1}{p}(\mathfrak{D}(p)^2 - \mathfrak{D}(p^2))$$

und nach Satz 4.20 also

$$\mathcal{H}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}_p) \otimes \mathbb{Z}[p^{-1}] = \mathbb{Z}[p^{-1}][\mathfrak{D}(p)].$$

Das Korollar folgt nun mit Satz 4.16.  $\square$

### 4.3 Hecke-Operatoren

Seien  $k \in \mathbb{Z}$  und  $M \in \mathbb{M}$  beliebig und sei

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_j \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j$$

eine disjunkte Zerlegung von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Linksnebenklassen. Dann ist durch

$$T_M := T_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \begin{cases} M_k & \rightarrow M_k, \\ f & \mapsto f|_k T_M := \sum_{M_j \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) M \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_k M_j \end{cases}$$

eine lineare Abbildung vom Vektorraum  $M_k$  der holomorphen Modulformen von Gewicht  $k$  bezüglich der vollen Modulgruppe in sich selbst definiert,

denn: Da  $f$  nach Voraussetzung  $(V_1)$  erfüllt und  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), M)$  nach ein Hecke-Paar ist, ist die Summe in der Definition wohldefiniert und endlich. Nach Proposition 2.6 und wegen der Endlichkeit der Summe ist  $f|_k T_M$  holomorph auf  $\mathbb{H}$ . Wegen

$$(f|_k T_M)|_k A = \sum_{M_j \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) M \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_k (M_j A) = \sum_{M_j \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) M \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} f|_k M_j = f|_k T_M$$

für alle  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  erfüllt  $f|_k T_M$  zudem  $(V_1)$ . Da  $f$  nach Voraussetzung  $(V_2)$  erfüllt, sind die (endlich vielen) Funktionen  $f|_k M_j$  sämtlich holomorph bei  $z = \infty$ . Es folgt sofort, dass  $f|_k T_M$  holomorph bei  $z = \infty$  ist und somit  $(V'_2)$  erfüllt. Die Linearität von  $T_M$  ist trivial.  $\#$

In der Sprache der Funktionalanalysis nennt man eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung zwischen zwei  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen auch einen **linearen Operator**; speziell nennt man  $T_M$  auch den **Hecke-Operator** zur Doppelnebenklasse  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Durch  $\mathbb{Q}$ -lineares Fortsetzen erhalten wir für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  und jedes  $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), M)$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, den **Hecke-Operator**

$$T_{\mathfrak{D}} : M_k \rightarrow M_k$$

zu  $\mathfrak{D}$ . In Hinsicht auf Korollar 4.21 interessieren wir uns besonders zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  für den **(normierten)  $n$ -ten Hecke-Operator**

$$T_n : \begin{cases} M_k & \rightarrow M_k \\ f & \mapsto (f|_k T_n)(z) := n^{\frac{k}{2}-1} \cdot (f|_k T_{\mathfrak{D}(n)})(z). \end{cases} \quad (4.8)$$

Wir studieren zunächst die Wirkung des  $n$ -ten Hecke-Operators in einem Beispiel:

**Beispiel 4.22.** Seien  $m, n, k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 4$  gerade. Dann gilt

$$P_{m,k}|_k T_n = \sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left(\frac{n}{d}\right)^{k-1} P_{\frac{mn}{d^2},k},$$

denn: Es gilt

$$\begin{aligned} (P_{m,k}|_k T_n)(z) &\stackrel{(4.8)}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{M_j \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{M}^n} (P_{m,k}|_k M_j)(z) \\ &\stackrel{3.13}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{\substack{M_j \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{M}^n \\ M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty} \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}} (e^{2\pi i m \cdot} |_k M M_j)(z) \end{aligned}$$

$$= n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathbb{M}^n} (e^{2\pi i m \cdot} |_k M)(z).$$

Nach Übungsaufgabe 4.3 ist die Menge

$$\begin{aligned} \{M_j M \mid M_j = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad = n, d > 0, b \bmod (d) \text{ und} \\ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mit } (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2, \mathrm{ggT}(\gamma, \delta) = 1, (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \text{ fix mit } \alpha\delta - \beta\gamma = 1\} \end{aligned}$$

ein Vertretersystem von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty$  in  $\mathbb{M}^n$ . Es folgt

$$\begin{aligned} (P_{m,k}|_k T_n)(z) &= n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \left( \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left( \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod (d)}} e^{2\pi i m \cdot} |_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right) |_k M \right)(z) \\ &= n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \left( \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left( \sum_{\substack{d|n \\ d>0 \\ b \bmod (d)}} n^{\frac{k}{2}} d^{-k} e^{2\pi i m (\frac{n}{d^2} \cdot + \frac{b}{d})} \right) |_k M \right)(z). \end{aligned}$$

Dies lässt sich noch vereinfachen, denn es gilt

$$\sum_{b \bmod (d)} \left( e^{2\pi i \frac{m}{d}} \right)^b = \begin{cases} \sum_{b \bmod (d)} 1 = d & \text{für } d \mid m, \\ \frac{1 - e^{2\pi i m}}{1 - e^{2\pi i \frac{m}{d}}} = 0 & \text{für } d \nmid m. \end{cases} \quad (4.9)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} (P_{m,k}|_k T_n)(z) &= \left( \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left( \sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left( \frac{n}{d} \right)^{k-1} e^{2\pi i m (\frac{n}{d^2} \cdot)} \right) |_k M \right)(z) \\ &= \sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} \left( \frac{n}{d} \right)^{k-1} \cdot \left( \sum_{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} e^{2\pi i \frac{mn}{d^2} \cdot} |_k M \right)(z) \end{aligned}$$

und mit Definition 3.13 somit die Behauptung. #

Ganz allgemein gilt:

**Satz 4.23.** Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) &\rightarrow \mathrm{End}(M_k), \\ \mathfrak{D} &\mapsto (f \mapsto f|_k T_{\mathfrak{D}}) \end{aligned}$$

ein  $\mathbb{Q}$ -Algebrenhomomorphismus, so dass sich die in Abschnitt 4.2 gezeigten Rechenregeln für Elemente der Hecke-Algebra auf die Hecke-Operatoren übertragen. Dabei bildet jeder Hecke-Operator Spitzenformen auf Spitzenformen ab. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$  gilt speziell

$$(f|_k T_n)(z) := (n^{\frac{k}{2}-1} \cdot f|_k T_{\mathfrak{D}(n)})(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{d|\text{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) \right) q^m.$$

*Beweis.* Schreiben wir für zwei Doppelnebenklassen

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_M &:= \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_j \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j, \\ \mathfrak{D}_N &:= \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \bigsqcup_i \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N_i, \end{aligned}$$

so gilt wie in Bemerkung 4.14

$$\iota(\mathfrak{D}_M \mathfrak{D}_N) = \iota\left((\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z})) \cdot (\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot N \cdot \text{SL}_2(\mathbb{Z}))\right) = \sum_{j,i} \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot M_j N_i,$$

wobei nicht ausgeschlossen ist, dass verschiedene Summanden in der Summe rechts übereinstimmen. Es folgt für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und alle  $f \in M_k$

$$f|_k T_{\mathfrak{D}_M \mathfrak{D}_N} = \sum_{j,i} f|_k M_j N_i = \sum_i \left( \sum_j f|_k M_j \right) |_k N_i = (f|_k T_{\mathfrak{D}_M})|_k T_{\mathfrak{D}_N}$$

und in linearer Fortsetzung, dass die Abbildung aus dem Satz ein  $\mathbb{Q}$ -Algebrenhomomorphismus ist.

Für alle  $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  und alle  $f \in M_k$  gilt speziell

$$\begin{aligned} (f|_k T_n)(z) &\stackrel{(4.8)}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{M_j \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{M}^n} (f|_k M_j)(z) \\ &\stackrel{4.3}{=} n^{\frac{k}{2}-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod(d)}} \left( f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right)(z) \\ &= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod(d)}} d^{-k} \cdot f\left(\frac{az+b}{d}\right). \end{aligned}$$

Setzen wir  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$  ein, so erhalten wir

$$(f|_k T_n)(z) = n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \sum_{b \bmod(d)} d^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) e^{2\pi i m \frac{az+b}{d}}$$

$$= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^{-k} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f) e^{2\pi i \frac{am}{d} z} \sum_{b \bmod (d)} \left( e^{2\pi i \frac{m}{d}} \right)^b,$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die absolute Konvergenz der Fourier-Entwicklung von  $f$  ausgenutzt haben. Die innerste Summe auf der rechten Seite lässt sich noch mit (4.9) vereinfachen; dann gilt:

$$\begin{aligned} (f|_k T_n)(z) &= n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} d^{1-k} \cdot \sum_{\substack{m=0 \\ d|m}}^{\infty} a_m(f) e^{2\pi i \frac{am}{d} z} \\ &\stackrel{m \mapsto md}{=} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} a^{k-1} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} a_{md}(f) e^{2\pi i am z} \\ &\stackrel{am \mapsto m}{=} \sum_{\substack{ad=n \\ a,d>0}} \sum_{\substack{m=0 \\ a|m}}^{\infty} a^{k-1} \cdot a_{\frac{m}{a^2}}(f) e^{2\pi i m z} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{a|\operatorname{ggT}(m,n) \\ a>0}} a^{k-1} \cdot a_{\frac{m}{a^2}}(f) \right) q^m. \end{aligned}$$

Hiermit ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  die behauptete Fourier-Entwicklung von  $f|_k T_n$  nachgewiesen. Dass Hecke-Operatoren Spitzenformen auf Spitzenformen abbilden, ergibt sich nun aus dem Spezialfall

$$a_0(f|_k T_n) = \sigma_{k-1}(n) a_0(f) = 0$$

und Korollar 4.21. □

## 4.4 Hecke-Eigenformen

**Definition 4.24.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$ . Eine Modulform  $0 \neq f \in M_k$  heißt eine (*simultane*) **Hecke-Eigenform**, wenn es für jeden Hecke-Operator  $T_{\mathfrak{D}}$  mit  $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$  ein  $\lambda_{\mathfrak{D}}(f) \in \mathbb{C}$  mit

$$T_{\mathfrak{D}} f = \lambda_{\mathfrak{D}}(f) f$$

gibt.

Nach Korollar 4.21 genügt es, die definierende Eigenschaft einer Hecke-Eigenform für alle  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  nachzuweisen. Für eine Hecke-Eigenform  $f \in M_k$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  heißt der Eigenwert

$$\lambda_n(f) := \lambda_{\mathfrak{D}(n)}(f)$$

zum  $n$ -ten Hecke-Operator der  $n$ -te **Hecke-Eigenwert** von  $f$ . Aus Satz 4.23 folgt durch Koeffizientenvergleich zwischen den Fourier-Entwicklungen von  $f$  und  $f|_k T_n$  sofort:

**Lemma 4.25.** Für alle  $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  und jede Hecke-Eigenform  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$  mit Hecke-Eigenwerten  $\lambda_n(f)$  für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \lambda_n(f)a_m(f) &= \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1}a_{\frac{mn}{d^2}}(f) && \text{für allgemeines } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \lambda_n(f)a_1(f) &= a_n(f) && \text{für } m = 1. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt die sogenannte **Multiplizität-Eins-Eigenschaft**: Die Dimension des (simultanen) Eigenraums der Hecke-Operatoren  $T_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  zu den respektiven Eigenwerten  $\lambda_n(f)$  ist genau 1.

Lemma 4.25 bedingt unmittelbar, dass sich die in Korollar 4.19 hergeleitete Rechenregel in der Hecke-Algebra im Wesentlichen auf die Fourier-Koeffizienten einer gegebenen Hecke-Eigenform Rechenregeln überträgt. Genauer gilt:

**Satz 4.26.** Für  $k \in \mathbb{Z}$  und ein nichtkonstantes  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$  sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i)  $f$  ist eine Hecke-Eigenform.
- (ii) Es ist  $a_1(f) \neq 0$  und es gilt

$$a_m(f)a_n(f) = a_1(f) \cdot \sum_{d|\operatorname{ggT}(m,n)} d^{k-1}a_{\frac{mn}{d^2}}(f) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \quad (4.10)$$

mit den Spezialfällen

$$\begin{aligned} a_m(f)a_n(f) &= a_1(f) \cdot a_{mn}(f) && \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \operatorname{ggT}(m, n) = 1, \\ a_p(f)a_{p^r}(f) &= a_1(f) \cdot (a_{p^{r+1}}(f) + p^{k-1}a_{p^{r-1}}(f)) && \text{für } p \text{ prim und } r \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Gilt Aussage (i), so auch (4.10) nach Lemma 4.25. Wäre nun  $a_1(f) = 0$ , so folgte wieder mit dem Lemma

$$a_n(f) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

und also  $f \in \mathbb{C}$ , was im Widerspruch zu unseren Voraussetzungen steht. Es gilt daher  $a_1(f) \neq 0$  und somit insgesamt Aussage (ii).

Gelte umgekehrt Aussage (ii). Summieren wir Gleichung (4.10) für ein beliebiges aber festes  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  über alle  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  auf, so folgt mit der aus Satz 4.23 bekannten Fourier-Entwicklung von  $f|_k T_n$  die Identität

$$a_1(f) \cdot f|_k T_n = a_n(f) \cdot f.$$

Dividieren wir diese durch  $a_1(f) \neq 0$ , so erhalten wir, dass  $f$  eine Hecke-Eigenform mit Hecke-Eigenwerten

$$\lambda_n(f) = \frac{a_n(f)}{a_1(f)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad (4.11)$$

ist, also Aussage (i). □

**Beispiel 4.27.** Für jedes gerade  $k \geq 4$  ist die Eisenstein-Reihe  $E_k \in M_k$  eine Hecke-Eigenform mit Hecke-Eigenwerten  $\lambda_n(E_k) = \sigma_{k-1}(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

denn: Wir zeigen die Behauptung zunächst für  $n = p$  prim. Hier gilt für alle  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} a_m(E_k|_k T_p) &\stackrel{4.23}{=} \begin{cases} a_{pm}(E_k) & \text{für } p \nmid m, \\ a_{pm}(E_k) + p^{k-1} a_{\frac{m}{p}}(E_k) & \text{für } p \mid m \end{cases} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \begin{cases} -\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(pm) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot (\sigma_{k-1}(pm) + p^{k-1} \sigma_{k-1}(\frac{m}{p})) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mit der (elementar nachweisbaren) schwachen Multiplikativität

$$\sigma_{k-1}(m)\sigma_{k-1}(n) = \sigma_{k-1}(mn) \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(m, n) = 1,$$

der  $(k-1)$ -ten Teilersummenfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned} a_m(E_k|_k T_p) &\stackrel{(4.7)}{=} \begin{cases} -\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(p) \cdot \sigma_{k-1}(m) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot (\sigma_{k-1}(p^{v_p(m)+1}) + p^{k-1} \sigma_{k-1}(p^{v_p(m)-1})) \cdot \sigma_{k-1}(\frac{m}{p^{v_p(m)}}) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma_{k-1}(p) \cdot (-\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m)) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot (\sum_{i=0}^{v_p(m)+1} p^{i(k-1)} + \sum_{i=1}^{v_p(m)} p^{i(k-1)}) \cdot \sigma_{k-1}(\frac{m}{p^{v_p(m)}}) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) \cdot 1 & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma_{k-1}(p) \cdot (-\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m)) & \text{für } p \nmid m, \\ -\frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(p) \cdot \sigma_{k-1}(p^{v_p(m)}) \cdot \sigma_{k-1}(\frac{m}{p^{v_p(m)}}) & \text{für } p \mid m > 0, \\ \sigma_{k-1}(p) \cdot 1 & \text{für } p \mid m = 0. \end{cases} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \sigma_{k-1}(p) \cdot a_m(E_k). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$E_k|_k T_p = \sigma_{k-1}(p) \cdot E_k$$

und haben somit die Behauptung im Fall  $n = p$  prim bewiesen. Mit Korollar 4.19 sieht man nun schnell ein, dass  $E_k$  dann auch für alle  $n \in \mathbb{N}$  Eigenform des  $n$ -ten Hecke-Operators und nach Korollar 4.21 also Hecke-Eigenform ist. Der jeweilige  $n$ -te Hecke-Eigenwert ergibt sich aus der Formel für  $a_0(E_k|_k T_n)$  in Satz 4.23. #

**Vorsicht:** Wegen  $a_1(E_k) = -\frac{2k}{B_k} \neq 1$  sind die (normierten) Eisenstein-Reihen  $E_k$  keine normierten Hecke-Eigenformen, die jeweiligen Normierungsbegriffe unterscheiden sich also!

**Beispiel 4.28.** Die Diskriminante  $\Delta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) q^m \in S_{12}$  ist eine Hecke-Eigenform mit Hecke-Eigenwerten  $\lambda_n(\Delta) = \tau(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Ihre Fourier-Koeffizienten genügen den Rechenregeln

$$\tau(m)\tau(n) = \tau(mn) \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(m, n) = 1,$$

$$\tau(p^r)\tau(p) = \tau(p^{r+1}) + p^{11}\tau(p^{r-1}) \quad \text{für } p \text{ prim und } r \in \mathbb{N},$$

denn: Nach Satz 4.23 gilt  $\Delta|_{12}T_n \in S_{12}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und nach der Dimensionsformel 3.10 und Teil (b) von Proposition 3.9 gilt  $\dim_{\mathbb{C}} S_{12} = 1$ . Folglich besitzt  $\Delta$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  einen Hecke-Eigenwert  $\lambda_n(\Delta) \in \mathbb{C}$  und ist daher eine Hecke-Eigenform. Nach Proposition 3.8 gilt zudem  $\tau(1) = 1$  und nach Lemma 4.25 also  $\lambda_n(\Delta) = \tau(n)$ . Die Rechenregeln ergeben sich unmittelbar aus Satz 4.26.  $\#$

Dieses Beispiel war der Ursprung für die Entwicklung der Hecke-Operatoren durch MORDELL<sup>42</sup> im Jahr 1920, der damit insbesondere die von Ramanujan vermutete schwache Multiplikativität der  $\tau$ -Funktion nachwies. Aber erst Hecke erkannte in den 1930er-Jahren die universelle Bedeutung dieser Konstruktion.

Nach Satz 4.26 gilt für eine nichtkonstante Hecke-Eigenform  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$  stets  $a_1(f) \neq 0$ , so dass wir statt  $f$  auch  $a_1(f)^{-1} \cdot f$  betrachten können. Für diese Funktion gelten analog zur Diskriminante in Beispiel 4.28 noch etwas schönere Rechenregeln für die Fourier-Koeffizienten. Wir führen daher die folgende Sprechweise ein:

**Definition 4.29.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$ . Eine Hecke-Eigenform  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(f)q^m \in M_k$  mit  $a_1(f) = 1$  heißt eine *normierte Hecke-Eigenform*.

**Satz 4.30.** Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  ist die Einschränkung eines beliebigen Hecke-Operators  $T_{\mathfrak{D}}$  mit  $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$  auf  $S_k$  selbstadjungiert bezüglich des Petersson-Skalarprodukts; es gilt also

$$\langle f|_k T_{\mathfrak{D}} | g \rangle = \langle f | g|_k T_{\mathfrak{D}} \rangle \quad \text{für alle } f, g \in S_k.$$

*Beweis.* Nach Korollar 4.21 genügt es, den Satz für die  $n$ -ten Hecke-Operatoren zu beweisen. Normalerweise untersucht man dafür zunächst den Spezialfall  $n = p$  prim, indem man das Skalarprodukt über einer geeigneten Kongruenzuntergruppe auswertet, und nutzt dann den durch Korollar 4.19 induzierten Zusammenhang zwischen den Hecke-Operatoren aus, um iterativ die allgemeine Behauptung zu beweisen. Ein alternativer Beweis ergibt sich jedoch unmittelbar aus den uns bereits bekannten Resultaten zu Poincaré-Reihen:

Nach Korollar 3.17 genügt es sogar,

$$\langle f|_k T_n | P_{m,k} \rangle = \langle f | P_{m,k}|_k T_n \rangle \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

zu zeigen. Tatsächlich gilt für die linke Seite der Behauptung

$$\begin{aligned} \langle f|_k T_n | P_{m,k} \rangle &\stackrel{3.16}{=} \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} a_m(f|_k T_n) \\ &\stackrel{4.23}{=} \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,n) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) \end{aligned}$$

---

<sup>42</sup>Louis Joel Mordell (1888-1972)



und für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
 \langle f \mid P_{m,k} \mid_k T_n \rangle &\stackrel{4.22}{=} \sum_{\substack{d \mid \text{ggT}(m,n) \\ d > 0}} \left( \frac{n}{d} \right)^{k-1} \langle f \mid P_{\frac{mn}{d^2}, k} \rangle \\
 &\stackrel{3.16}{=} \sum_{\substack{d \mid \text{ggT}(m,n) \\ d > 0}} \left( \frac{n}{d} \right)^{k-1} \frac{(k-2)!}{(4\pi \frac{mn}{d^2})^{k-1}} a_{\frac{mn}{d^2}}(f) \\
 &= \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} \sum_{\substack{d \mid \text{ggT}(m,n) \\ d > 0}} d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f).
 \end{aligned}$$

□

**Korollar 4.31.** Seien  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f \in S_k$  eine Hecke-Eigenform und  $T_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$ . Dann ist der Hecke-Eigenwert  $\lambda_{\mathfrak{D}}(f)$  eine reelle Zahl.

*Beweis.* Da das Petersson-Skalarprodukt eine hermitesche Bilinearform ist, gilt

$$\begin{aligned}
 \lambda_{\mathfrak{D}}(f) \cdot \langle f \mid f \rangle &= \langle \lambda_{\mathfrak{D}}(f) \cdot f \mid f \rangle = \langle f \mid_k T_{\mathfrak{D}} \mid f \rangle \\
 &\stackrel{4.30}{=} \langle f \mid f \mid_k T_{\mathfrak{D}} \rangle = \langle f \mid \lambda_{\mathfrak{D}}(f) \cdot f \rangle = \overline{\lambda_{\mathfrak{D}}(f)} \cdot \langle f \mid f \rangle.
 \end{aligned}$$

Das Korollar folgt nun mit der positiven Definitheit des Petersson-Skalarprodukts und  $f \neq 0$ . □

**Korollar 4.32.** Seien  $k \in \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl und  $f \in S_k$  eine normierte Hecke-Eigenform. Dann sind die Fourier-Koeffizienten von  $f$  reelle Zahlen und  $f$  liegt also im  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der **reellen Spitzenformen**

$$S_k^{\mathbb{R}} := \{f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) q^m \in S_k \mid a_m(f) \in \mathbb{R} \text{ für alle } m \geq 1\}.$$

*Beweis.* Nach Definition 4.29 und (4.11) gilt für jede normierte Hecke-Eigenform  $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f) q^m \in S_k$  die Identität

$$\lambda_n(f) = a_n(f) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Das Korollar folgt mit Korollar 4.31. □

**Korollar 4.33.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$  und seien  $f, g \in S_k$  zwei normierte Hecke-Eigenformen. Dann gilt

$$f \neq g \iff \langle f \mid g \rangle = 0.$$

*Beweis.* Wegen der Normiertheit von  $f$  und  $g$  gilt

$$f \mid_k T_n = a_n(f) \cdot f \quad \text{und} \quad g \mid_k T_n = a_n(g) \cdot g \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit

$$a_n(f) \cdot \langle f | g \rangle = \langle f |_k T_n | g \rangle \stackrel{4.30}{=} \langle f | g |_k T_n \rangle = \overline{a_n(g)} \cdot \langle f | g \rangle \stackrel{4.31}{=} a_n(g) \cdot \langle f | g \rangle.$$

Aus  $\langle f | g \rangle \neq 0$  folgt somit  $a_n(f) = a_n(g)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und also  $f = g$ .

Umgekehrt folgt für  $f = g$  wegen der positiven Definitheit des Petersson-Skalarprodukts unmittelbar  $\langle f | g \rangle = \langle f | f \rangle > 0$ .  $\square$

Wir können aus Satz 4.30 noch ein weiteres Korollar ziehen, leiten uns vorher aber noch ein Ergebnis aus der Linearen Algebra über selbstadjungierte Operatoren her.

**Lemma 4.34.** *Sei  $V$  ein endlichdimensionaler komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  und sei  $\{T(i)\}_{i \in I}$  eine Familie miteinander kommutierender selbstadjungierter Operatoren auf  $V$ . Dann besitzt  $V$  eine Orthogonalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren aller  $T(i)$  mit  $i \in I$ .*

*Beweis.* Wegen  $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$  gilt auch  $\dim_{\mathbb{R}} \text{End}_{\mathbb{C}}(V) < \infty$ . Die Operatoren  $T(i)$  mit  $i \in I$  erzeugen daher einen endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum von  $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ , so dass es ohne Einschränkung genügt, das Lemma für eine endliche Menge  $\{T(1), \dots, T(r)\}$  von Operatoren zu zeigen.

In  $V$  gibt es einen gemeinsamen (nichttrivialen) Eigenvektor der  $T(i)$  mit  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,

denn: Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach  $r$ . Da selbstadjungierte Operatoren normal sind, folgt die Behauptung für  $r = 1$  aus dem **Spektralsatz für normale Endomorphismen** aus der Linearen Algebra. Das ist der Induktionsanfang. Sei also nun  $r \geq 2$  und gelte die Behauptung für  $r - 1$ . Sei weiter  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T(1)$  mit zugehörigem Eigenraum

$$V_{\lambda} := \{v \in V \mid T(1)v = \lambda \cdot v\}.$$

Nach Voraussetzung gilt  $T(i)T(1) = T(1)T(i)$  für alle  $i \in \{2, \dots, r\}$  und insbesondere

$$T(i)V_{\lambda} \subseteq V_{\lambda} \quad \text{für alle } i \in \{2, \dots, r\}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt nun  $V_{\lambda}$  einen gemeinsamen (nichttrivialen) Eigenvektor der  $T(i)$  mit  $i \in \{2, \dots, r\}$ . Die Behauptung folgt, da dieser nach Definition von  $V_{\lambda}$  auch ein Eigenvektor von  $T(1)$  ist.  $\#$

Wir zeigen nun das Lemma per Induktion nach  $\dim_{\mathbb{C}} V$ . Für  $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$  ist die Aussage klar; sei also  $\dim_{\mathbb{C}} V \geq 2$ . Wir schreiben

$$V = \mathbb{C}v \oplus (\mathbb{C}v)^{\perp} \quad \text{für einen gemeinsamen Eigenvektor } v \text{ von } T(i) \text{ mit } i \in \{1, \dots, r\}.$$

Da die  $T(i)$  selbstadjungiert sind und  $\mathbb{C}v$  fixieren, lassen sie auch  $(\mathbb{C}v)^{\perp}$  invariant. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt  $(\mathbb{C}v)^{\perp}$  bereits eine Orthogonalbasis aus gemeinsamen Eigenvektoren aller  $T(i)$  mit  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 4.35.** *Sei  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann besitzt  $S_k$  eine Orthogonalbasis aus Hecke-Eigenformen. Diese ist bis auf Permutation und Multiplikation mit Skalaren aus  $\mathbb{C}^{\times}$  eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Die Existenz einer Orthogonalbasis aus gemeinsamen Eigenformen folgt unmittelbar aus Lemma 4.34 mit  $V = S_k$  und  $\{T(i)\}_{i \in I} = \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Die Eindeutigkeitsaussage folgt mit Korollar 4.33.  $\square$



## 4.5 Algebraizität der Fourier-Koeffizienten normierter Hecke-Eigenformen

In diesem Abschnitt wollen wir die Hecke-Theorie benutzen, um Algebraizitätsaussagen über die Fourier-Koeffizienten normierter Hecke-Eigenformen herzuleiten. Um dies tun zu können, müssen wir den Raum der holomorphen Modulformen mit einer zusätzlichen  $\mathbb{Q}$ -Struktur versehen.

**Definition 4.36.** Für  $k \in \mathbb{Z}$  beliebig seien

$$M_k^{\mathbb{Q}} := \{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)q^n \in M_k \mid a_n(f) \in \mathbb{Q} \text{ für alle } n \geq 0\},$$

$$S_k^{\mathbb{Q}} := \{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k \mid a_n(f) \in \mathbb{Q} \text{ für alle } n \geq 1\}.$$

Offensichtlich tragen  $M_k^{\mathbb{Q}}$  und  $S_k^{\mathbb{Q}}$  jeweils die Struktur eines  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums.

Der Struktursatz 3.12 für holomorphe Modulformen ist mit dieser neuen Struktur verträglich:

**Proposition 4.37.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a)  $M_k^{\mathbb{Q}} = \{0\}$  für  $k < 0$ ,  $k = 2$  oder  $k$  ungerade.
- (b)  $M_k^{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}E_k \oplus S_k^{\mathbb{Q}}$  für  $k \geq 4$  gerade.
- (c)  $M_k^{\mathbb{Q}} \cdot M_\ell^{\mathbb{Q}} \subseteq M_{k+\ell}^{\mathbb{Q}}$  für  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ .
- (d) Die Abbildung  $f \mapsto f \cdot \Delta$  ist ein  $\mathbb{Q}$ -Vektorraumisomorphismus von  $M_{k-12}^{\mathbb{Q}}$  nach  $S_k^{\mathbb{Q}}$ .
- (e)  $M_k^{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N} \\ 4\alpha + 6\beta = k}} \mathbb{Q}E_4^\alpha E_6^\beta$  für  $k \geq 0$  gerade.
- (f)  $\dim_{\mathbb{Q}} M_k^{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} M_k$  und  $\dim_{\mathbb{Q}} S_k^{\mathbb{Q}} = \dim_{\mathbb{C}} S_k$ .

*Beweis.* Behauptung (a) folgt wegen  $M_k^{\mathbb{Q}} \subseteq M_k$  sofort aus den Propositionen 2.15 und 3.9.

Zum Beweis von Behauptung (b) stellen wir zunächst fest, dass nach Bemerkung 3.7 für jedes gerade  $k \geq 4$  die Eisensteinreihe  $E_k$  in  $M_k^{\mathbb{Q}}$  liegt. Da  $E_k$  nach Definition konstanten Fourier-Koeffizienten 1 hat, folgt die Behauptung wie im Beweis von Proposition 3.9.

Behauptung (c) ergibt sich unmittelbar aus Proposition 2.14, da das Produkt zweier Fourier-Entwicklungen mit rationalen Koeffizienten wieder rationale Koeffizienten hat.

Behauptung (d) folgt unter Beachtung von Aussage (c) und der in Übungsaufgabe 3.2 gezeigten Ganzzahligkeit der Fourier-Koeffizienten von  $\Delta$  unmittelbar mit Proposition 3.9.

Zum Beweis von Behauptung (e) stellen wir zunächst fest, dass die Summe auf der rechte Seite tatsächlich direkt ist, da aus  $\mathbb{C}$ -linearer Unabhängigkeit sofort  $\mathbb{Q}$ -lineare Unabhängigkeit folgt. Der Rest der Behauptung folgt genau wie im Beweis der Struktursatzes 3.12 für holomorphe Modulformen, wenn wir  $E_4 \in M_4^{\mathbb{Q}}$ ,  $E_6 \in M_6^{\mathbb{Q}}$  und Aussagen (c) und (d) berücksichtigen.

Schließlich ergibt sich Behauptung (f) unmittelbar im Vergleich der Aussagen (d) und (e) mit Proposition 3.9 und dem Struktursatz 3.12.  $\square$

Diese Verträglichkeit gilt auch für Satz 4.23 über Hecke-Operatoren:

**Proposition 4.38.** *Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) & \rightarrow & \mathrm{End}(M_k^{\mathbb{Q}}), \\ \mathfrak{D} & \mapsto & (f \mapsto f|_k T_{\mathfrak{D}}) \end{array}$$

*ein  $\mathbb{Q}$ -Algebrenhomomorphismus. Dabei bildet jeder Hecke-Operator Spitzenformen auf Spitzenformen ab.*

*Beweis.* Aus der Formel für die Fourier-Koeffizienten der Bilder unter den  $n$ -ten Hecke-Operatoren in Satz 4.23 ergibt sich unmittelbar

$$f \in M_k^{\mathbb{Q}} \implies f|_k T_n \in M_k^{\mathbb{Q}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Da nach Korollar 4.21 die rationale Hecke-Algebra von den Elementen  $\mathfrak{D}(n)$  erzeugt wird, folgt

$$f \in M_k^{\mathbb{Q}} \implies f|_k T_{\mathfrak{D}} \in M_k^{\mathbb{Q}} \quad \text{für alle } \mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}).$$

Damit folgt die Proposition aus Satz 4.23.  $\square$

Aus Proposition 4.38 ergibt sich unmittelbar, dass sich jedem Hecke-Operator eine rationale Darstellungsmatrix zuordnen lässt:

**Korollar 4.39.** *Sei  $k \in \mathbb{Z}$ , sei  $d := \dim S_k$  und sei eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $S_k^{\mathbb{Q}}$  gegeben. Dann gibt es einen  $\mathbb{Q}$ -Algebrenhomomorphismus*

$$\varphi : \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) \rightarrow \mathbb{Q}^{d \times d},$$

*der jedem  $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$  die Abbildungsmatrix  $M_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{Q}^{d \times d}$  des zugehörigen Operators  $T_{\mathfrak{D}}$  bezüglich dieser Basis zuordnet.*

Hieraus folgt eine Algebraizitätsaussage für Hecke-Eigenwerte:

**Korollar 4.40.** *Sei  $k \in \mathbb{Z}$ , sei  $d := \dim S_k$  und sei  $f \in S_k$  eine Hecke-Eigenform. Seien weiter  $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$  und  $\lambda_{\mathfrak{D}}(f)$  der Eigenwert von  $f$  bezüglich  $T_{\mathfrak{D}}$ . Dann gilt für den Erweiterungskörper  $\mathbb{Q}(\lambda_{\mathfrak{D}}(f))$*

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\lambda_{\mathfrak{D}}(f)) \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad [\mathbb{Q}(\lambda_{\mathfrak{D}}(f)) : \mathbb{Q}] \leq d.$$

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$  beliebig. Wir wählen eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $S_k^{\mathbb{Q}}$  und betrachten die nach Korollar 4.39 zu  $\mathfrak{D}$  gehörige Abbildungsmatrix  $M_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{Q}^{d \times d}$  von  $T_{\mathfrak{D}}$  bezüglich dieser Basis. Das charakteristische Polynom  $\mathrm{charpoly}(M_{\mathfrak{D}}) \in \mathbb{Q}[X]$  von  $M_{\mathfrak{D}}$  hat Grad  $d$ . Nach Konstruktion

ist  $\lambda_{\mathfrak{D}}(f)$  eine Nullstelle von  $\text{charpoly}(M_{\mathfrak{D}})$ , so dass sein Minimalpolynom  $\text{minpoly}(\lambda_{\mathfrak{D}}(f))$  als Teiler von  $\text{charpoly}(M_{\mathfrak{D}})$  die Abschätzung

$$\deg(\text{minpoly}(\lambda_{\mathfrak{D}}(f))) \leq \deg(\text{charpoly}(M_{\mathfrak{D}})) = d$$

erfüllt. Das Korollar folgt, da das charakteristische Polynom  $\text{charpoly}(M_{\mathfrak{D}})$  nach Korollar 4.31 über  $\mathbb{R}$  in Linearfaktoren zerfällt.  $\square$

Für normierte Hecke-Eigenformen in  $S_k$  folgt nun eine (deutlich tiefere) Algebraizitätsaussage über die Fourier-Koeffizienten:

**Satz 4.41.** Sei  $k \in \mathbb{Z}$  und sei  $f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m(f)q^m \in S_k$  eine normierte Hecke-Eigenform. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist der Fourier-Koeffizient  $a_n(f)$  algebraisch über  $\mathbb{Q}$ .
- (b)  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(a_n(f) \mid n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathbb{R}$  und  $[\mathbb{Q}(a_n(f) \mid n \in \mathbb{N}) : \mathbb{Q}] \leq \dim S_k$ .

*Beweis.* Für eine Hecke-Eigenform  $f \in S_k$  ist die Abbildung

$$\varphi_f : \begin{cases} \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M}) & \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}, \\ \mathfrak{D} & \mapsto \lambda_{\mathfrak{D}}(f) \end{cases}$$

ein  $\mathbb{Q}$ -Algebrenhomomorphismus,

denn: Nach Korollar 4.40 nimmt  $\varphi_f$  tatsächlich Werte in  $\overline{\mathbb{Q}}$  an. Die Behauptung folgt nun mit Korollar 4.21 und da für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  und alle  $r, s \in \mathbb{Q}$  offensichtlich die Rechenregeln

$$\begin{aligned} (rT_m + sT_n)f &= rT_m f + sT_n f = r\lambda_m(f)f + s\lambda_n(f)f = (r\lambda_m(f) + s\lambda_n(f))f, \\ (T_m T_n)f &= \lambda_n(f)T_m f = (\lambda_m(f)\lambda_n(f))f \end{aligned}$$

gelten. #

Mit den Hecke-Eigenwerten  $\lambda_n(f)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $\mathbb{Q}(\lambda_n(f) \mid n \in \mathbb{N})$  offensichtlich ein Teilkörper des **Quotientenkörpers**  $K := \text{Quot}(\text{Bild}(\varphi_f))$ . Weiter gilt

$$[\mathbb{Q}(\lambda_n(f) \mid n \in \mathbb{N}) : \mathbb{Q}] \leq [K : \mathbb{Q}] \leq \dim S_k =: d,$$

denn: Betrachten wir eine beliebige  $(d+1)$ -elementige Teilmenge

$$\{r_1, \dots, r_{d+1}\} = \left\{ \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_{d+1}}{q_{d+1}} \right\} \subseteq K.$$

Dann existieren Urbilder

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &= \sum_{n \in I_1} a_n \mathfrak{D}(n), \dots, \mathfrak{D}_{d+1} = \sum_{n \in I_{d+1}} a_n \mathfrak{D}(n) && \text{von } p_1, \dots, p_{d+1}, \\ \tilde{\mathfrak{D}}_1 &= \sum_{n \in \tilde{I}_1} a_n \mathfrak{D}(n), \dots, \tilde{\mathfrak{D}}_{d+1} = \sum_{n \in \tilde{I}_{d+1}} a_n \mathfrak{D}(n) && \text{von } q_1, \dots, q_{d+1} \end{aligned}$$



unter  $\varphi_f$  mit endlichen, nicht notwendig disjunkten Indexmengen  $I_1, \dots, I_{d+1}, \tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_{d+1} \subseteq \mathbb{N}$ . Setzen wir

$$I := \bigcup_{i=1}^{d+1} I_i \cup \bigcup_{i=1}^{d+1} \tilde{I}_i,$$

so ist die endliche Körpererweiterung  $\mathbb{Q}(\lambda_n(f) \mid n \in I)$  von  $\mathbb{Q}$  in  $K$  enthalten, und da Erweiterungen von Körpern der Charakteristik 0 stets separabel sind, gibt es nach dem **Satz vom primitiven Element** aus der Algebra ein  $r \in \mathbb{Q}(\lambda_n(f) \mid n \in I)$  mit

$$\mathbb{Q}(r) = \mathbb{Q}(\lambda_n(f) \mid n \in I) \subseteq K.$$

Für ein beliebiges Urbild  $\mathfrak{D} \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \mathbb{M})$  von  $r$  unter  $\varphi_f$  gilt nun  $r = \varphi_f(\mathfrak{D}) = \lambda_{\mathfrak{D}}(f)$  und nach Korollar 4.40 somit

$$[\mathbb{Q}(r_1, \dots, r_{d+1}) : \mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}(\lambda_n(f) \mid n \in I) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(r) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\lambda_{\mathfrak{D}}(f)) : \mathbb{Q}] \leq d.$$

Es folgt, dass jede beliebige  $(d+1)$ -elementige Teilmenge von  $K$  über  $\mathbb{Q}$  linear abhängig ist und somit die Behauptung. #

Der Satz folgt nun, da  $\mathrm{Bild}(\varphi_f)$  wegen Korollar 4.31 in den reellen Zahlen enthalten ist und für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Hecke-Eigenwerte  $\lambda_n(f)$  der normierten Hecke-Eigenform  $f \in S_k$  mit den Fourier-Koeffizienten  $a_n(f)$  übereinstimmen.  $\square$

## 4.6 Übungsaufgaben

**Aufgabe 4.1.** Zeigen Sie, dass  $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$  kein Hecke-Paar ist.

**Aufgabe 4.2.** In der Herleitung von Satz 4.11 haben wir Hecke-Paare  $(R, S)$  studiert, in denen für alle  $s \in S$  die Anzahl der  $R$ -Rechts- und  $R$ -Linksnebenklassen in  $RsR$  übereinstimmt. Zeigen Sie, dass diese Voraussetzung für

$$(R, S) = (\langle T \rangle, \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_{\infty}) = \left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid h \in \mathbb{Z} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid ad \neq 0 \right\} \right)$$

nicht erfüllt ist.

**Aufgabe 4.3.** Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{M_j M \mid M_j = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad = n, d > 0, b \bmod (d) \text{ und} \\ M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ mit } (\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}^2, \mathrm{ggT}(\gamma, \delta) = 1, (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \text{ fix mit } \alpha\delta - \beta\gamma = 1\}$$

ein Vertretersystem von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})_{\infty}$  in  $\mathbb{M}^n$  ist.

**Hinweis:** Gehen Sie vor wie im Beweis von Lemma 4.3.

**Aufgabe 4.4.** (a) Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten der Spitzenform

$$(E_6 \cdot \Delta)(z) = q - 528q^2 - 4.284q^3 + O(q^4) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_{18}$$

die (schwache) Multiplikativitätseigenschaft

$$a_n a_m = a_{nm} \quad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{ggT}(n, m) = 1$$

erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass durch die Spitzenformen

$$\begin{aligned} f(z) &:= (E_6^2 \cdot \Delta)(z) = q - 1.032q^2 + 245.196q^3 - 22.072.640q^4 + O(q^5) \\ \tilde{f}(z) &:= \Delta^2(z) = q^2 - 48q^3 + 1.080q^4 + O(q^5) \end{aligned}$$

eine Basis des  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $S_{24}$  gegeben ist. Bestimmen Sie bezüglich dieser Basis die Darstellungsmatrix des Hecke-Operators  $T_2$  auf  $S_{24}$ .

**Aufgabe 4.5.** Seien  $k \in \mathbb{Z}$  und  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k$  eine normierte Hecke-Eigenform. Wir geben in dieser Aufgabe eine geometrische Beschreibung für die Folge von (reellen) Fourier-Koeffizienten  $(a_{p^r}(f))_{r \in \mathbb{N}}$  mit  $p$  prim an und leiten daraus her, dass diese Folge sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Glieder enthält. Eine ausführlichere Version dieses Resultats wurde 2014 von KOHNEN<sup>43</sup> und MARTIN<sup>44</sup> veröffentlicht.

Zeigen Sie also für eine fest gegebene Primzahl  $p$  die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt ein eindeutig bestimmtes  $\theta_p \in [0, \pi]$  mit

$$a_p(f) = 2p^{\frac{k-1}{2}} \cos \theta_p \quad \text{und} \quad a_p(f) \neq 2p^{\frac{k-1}{2}} \text{ für alle } \theta_p \notin \{0, \pi\}.$$

**Hinweis:** Sie dürfen ohne Beweis die (nichttriviale) Abschätzung

$$|a_p(f)|^2 \leq 4p^{k-1}$$

benutzen, die DELIGNE<sup>45</sup> 1974 als Nebenprodukt seines Beweises des WEIL-Vermutungen<sup>46</sup> herleitete.

(b) Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{p^r}(f) \\ a_{p^{r-1}}(f) \end{pmatrix} = A^{r-1} \cdot \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } A := \begin{pmatrix} a_p(f) & -p^{k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Für  $\theta_p \notin \{0, \pi\}$  gilt

$$\begin{pmatrix} a_{p^r}(f) \\ a_{p^{r-1}}(f) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{r+1} - \lambda_2^{r+1} \\ \lambda_1^r - \lambda_2^r \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_{1/2} := \frac{a_p(f) \pm \sqrt{a_p(f)^2 - 4p^{k-1}}}{2}.$$

**Hinweis:** Bringen Sie die Matrix  $A$  aus Teil (b) in Diagonalgestalt, um  $A^{r-1}$  besser berechnen zu können.

<sup>43</sup>Winfried Kohnen \*1953

<sup>44</sup>Yves Leopoldo Martin Gonzalez \* ?

<sup>45</sup>Pierre Deligne \*1944

<sup>46</sup>André Weil (1906-1998)

(d) Für  $\theta_p \notin \{0, \pi\}$  gilt

$$a_{p^r}(f) = p^{r \cdot \frac{k-1}{2}} \frac{\sin((r+1) \cdot \theta_p)}{\sin \theta_p} \quad \text{für alle } r \in \mathbb{N}.$$

**Hinweis:** Drücken Sie  $\lambda_{1/2}$  in Termen von  $\theta_p$  aus.

(e) Für  $\theta_p \notin 2\pi \cdot \mathbb{Q}$  enthält die Folge  $(a_{p^r}(f))_{r \in \mathbb{N}}$  sowohl unendlich viele positive als auch unendlich viele negative Glieder.



## Der Eichler-Shimura-Isomorphismus

In diesem Kapitel finden wir eine algebraische Beschreibung für den Raum der Spitzenformen  $S_k$ : In Abschnitt 5.1 studieren wir explizit gegebene Darstellungen der Gruppe  $GL_2(\mathbb{R})$  und damit auch ihrer Untergruppe  $SL_2(\mathbb{Z})$ . In Abschnitt 5.2 führen wir das SHIMURA-Produkt<sup>47</sup> auf Differentialformen ein und stellen einen Zusammenhang zum Petersson-Skalarprodukt her. In Abschnitt 5.3 führen wir schließlich über die Darstellung aus Abschnitt 5.1 definierte Untervektorräume  $U, V \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$  ein und zeigen, dass die noch zu definierende Periodenabbildung einen Isomorphismus zwischen  $S_k$  und  $V/U$  definiert, den **EICHLER-SHIMURA-ISOMORPHISMUS**.<sup>48</sup>

### 5.1 Die Polynomdarstellung

Sei in diesem Kapitel stets  $\mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}[X, Y]$  der  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum der homogenen Polynome von Grad  $w \in \mathbb{N}$ . Eine Basis von  $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$  ist offensichtlich durch die Monome

$$\{Y^w, XY^{w-1}, \dots, X^{w-1}Y, X^w\}$$

gegeben; insbesondere gilt  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) = w + 1$ .

Wir definieren

$$(X, Y) \cdot M := (X, Y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (aX + cY, bX + dY) \quad \text{für } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ beliebig}$$

und damit Abbildungen

$$\mathbb{P}(M) : \begin{cases} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{P}_w(\mathbb{R}), \\ P(X, Y) & \mapsto P((X, Y) \cdot M) \end{cases} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}^*(M) : \begin{cases} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{P}_w(\mathbb{R}), \\ P(X, Y) & \mapsto P((X, Y) \cdot {}^t M). \end{cases}$$

<sup>47</sup>Goro Shimura (1930-2019)

<sup>48</sup>Martin Maximilian Emil Eichler (1912-1992)

**Lemma 5.1.** *Durch die Zuordnung*

$$\mathbb{P} : \begin{cases} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R})), \\ M & \mapsto \mathbb{P}(M) \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}^* : \begin{cases} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R})), \\ M & \mapsto \mathbb{P}^*(M) \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus bzw. -antihomomorphismus gegeben, die **Polynomdarstellung** bzw. **Polynomantidarstellung** von  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ .<sup>49</sup>

*Beweis.* Wir beweisen das Lemma nur für die Zuordnung  $\mathbb{P}$ ; die Behauptung für  $\mathbb{P}^*$  zeigt man genauso, wenn man berücksichtigt, dass sich beim Transponieren eines Produktes von Matrizen deren Reihenfolge umkehrt.

Zunächst gilt  $\mathbb{P}(M) \in \mathrm{End}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R}))$  für alle  $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ,

denn: Offensichtlich ist  $\mathbb{P}(M)$  wohldefiniert. Da zudem für alle  $P_1, P_2 \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$  und alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(X, Y) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)((X, Y) \cdot M) \\ &= \lambda_1 P_1((X, Y) \cdot M) + \lambda_2 P_2((X, Y) \cdot M) \\ &= \lambda_1 \mathbb{P}(M)(P_1(X, Y)) + \lambda_2 \mathbb{P}(M)(P_2(X, Y)) \end{aligned}$$

gilt, ist  $\mathbb{P}(M)$  auch linear. #

Weiter gilt für alle  $M, \tilde{M} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  und alle  $P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(\tilde{M}))(P)(X, Y) &= \mathbb{P}(M)(\mathbb{P}(\tilde{M})(P))(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(\tilde{M})(P))((X, Y) \cdot M) \\ &= P((X, Y) \cdot M\tilde{M}) \\ &= \mathbb{P}(M\tilde{M})(P)(X, Y). \end{aligned}$$

Hieraus folgt  $\mathbb{P}(M) \in \mathrm{GL}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R}))$  für alle  $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  und die Homomorphie, so dass das Lemma folgt. □

Für ein beliebiges  $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  definieren wir nun die Matrix  $\pi(M) \in \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$  durch

$$\pi(M) \cdot \begin{pmatrix} X^w Y^0 \\ X^{w-1} Y^1 \\ \vdots \\ X^0 Y^w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}^*(M)(X^w Y^0) \\ \mathbb{P}^*(M)(X^{w-1} Y^1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}^*(M)(X^0 Y^w) \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

<sup>49</sup>Ganz allgemein ist eine **Darstellung** bzw. **Antidarstellung** einer Gruppe  $(G, \star)$  auf einem Vektorraum  $V$  ein Homomorphismus bzw. **Antihomomorphismus**  $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ , also eine Abbildung  $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  mit

$$\varrho(g \star h) = \varrho(g) \circ \varrho(h) \quad \varrho(g \star h) = \varrho(h) \circ \varrho(g) \quad \text{für alle } g, h \in G.$$

**Lemma 5.2.** *Durch die Zuordnung*

$$\pi : \begin{cases} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R}), \\ M & \mapsto \pi(M) \end{cases}$$

*ist ein Gruppenhomomorphismus gegeben, die **Matrixdarstellung** von  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ .*

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit von  $\pi$  gilt nach Konstruktion, so dass es zum Beweis des Lemmas ausreicht zu zeigen, dass  $\pi$  ein Gruppenhomomorphismus ist. Seien dafür

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \pi(M\tilde{M}) \cdot \begin{pmatrix} X^w Y^0 \\ X^{w-1} Y^1 \\ \vdots \\ X^0 Y^w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbb{P}^*(M\tilde{M})(X^w Y^0) \\ \mathbb{P}^*(M\tilde{M})(X^{w-1} Y^1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}^*(M\tilde{M})(X^0 Y^w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ((a\tilde{a} + b\tilde{c})X + (a\tilde{b} + b\tilde{d})Y)^w & ((c\tilde{a} + d\tilde{c})X + (c\tilde{b} + d\tilde{d})Y)^0 \\ ((a\tilde{a} + b\tilde{c})X + (a\tilde{b} + b\tilde{d})Y)^{w-1} & ((c\tilde{a} + d\tilde{c})X + (c\tilde{b} + d\tilde{d})Y)^1 \\ \vdots & \vdots \\ ((a\tilde{a} + b\tilde{c})X + (a\tilde{b} + b\tilde{d})Y)^0 & ((c\tilde{a} + d\tilde{c})X + (c\tilde{b} + d\tilde{d})Y)^w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + b(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^w & (c(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + d(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^0 \\ (a(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + b(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^{w-1} & (c(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + d(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^1 \\ \vdots & \vdots \\ (a(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + b(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^0 & (c(\tilde{a}X + \tilde{b}Y) + d(\tilde{c}X + \tilde{d}Y))^w \end{pmatrix} \\ &= \pi(M) \cdot \begin{pmatrix} (\tilde{a}X + \tilde{b}Y)^w & (\tilde{c}X + \tilde{d}Y)^0 \\ (\tilde{a}X + \tilde{b}Y)^{w-1} & (\tilde{c}X + \tilde{d}Y)^1 \\ \vdots & \vdots \\ (\tilde{a}X + \tilde{b}Y)^0 & (\tilde{c}X + \tilde{d}Y)^w \end{pmatrix} \\ &= \pi(M)\pi(\tilde{M}) \cdot \begin{pmatrix} X^w Y^0 \\ X^{w-1} Y^1 \\ \vdots \\ X^0 Y^w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Lemma folgt. □

Offensichtlich ist die Koordinatenabbildung

$$C : \begin{cases} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j & \mapsto C(P) := {}^t(a_w, \dots, a_0) \end{cases}$$

ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen. Im Spezialfall

$$P_{(s_1, s_2)}(X, Y) := \sum_{j=0}^w s_1^{w-j} s_2^j X^{w-j} Y^j \quad \text{für } s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

gilt

$$C(s_1, s_2) := C(P_{(s_1, s_2)}(X, Y)) = {}^t(s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w). \quad (5.2)$$

**Lemma 5.3.** Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$  hat eine Basis aus Polynomen der Form  $P_{(s_1, s_2)}$  mit  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Da  $C$  ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen ist, können wir zum Beweis des Lemmas äquivalent auch zeigen, dass es in  $\mathbb{R}^{w+1}$  eine Basis aus Vektoren der Form  $C(s_1, s_2)$  mit  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$  gibt. Das ist aber der Fall, denn für paarweise verschiedene Werte  $s_2^{(0)}, \dots, s_2^{(w)}$  ist

$$\left( C(1, s_2^{(0)}), \dots, C(1, s_2^{(w)}) \right)$$

eine Vandermonde-Matrix und hat nach **Aufgabe 1** von Übungsblatt 1 aus der Algebraischen Zahlentheorie vollen Rang.  $\square$

**Proposition 5.4.** Es gilt

$$C(\mathbb{P}(M)P) = \pi(M) \cdot C(P) \quad \text{für alle } M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), P \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R}).$$

*Beweis.* Wegen Lemma 5.3 und der Linearität der Abbildungen  $C$ ,  $\pi(M)$  und  $\mathbb{P}(M)$  für alle  $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$  reicht es aus, den Beweis für  $P = P_{(s_1, s_2)}$  mit  $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$  zu führen.

Wir definieren nun durch

$$L(X^{w-j} Y^j) := \binom{w}{j}^{-1} X^{w-j} Y^j \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\}$$

eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$P_{(s_1, s_2)}(X, Y) = L((s_1 X + s_2 Y)^w) = L\left(\left((s_1, s_2) {}^t(X, Y)\right)^w\right) \quad \text{für } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad (5.3)$$

denn: Nach dem binomischen Lehrsatz und der Definition von  $L$  gilt

$$\begin{aligned} L((s_1 X + s_2 Y)^w) &= L\left(\sum_{j=0}^w \binom{w}{j} (s_1 X)^{w-j} (s_2 Y)^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} s_1^{w-j} s_2^j L(X^{w-j} Y^j) \\ &= \sum_{j=0}^w \binom{w}{j} s_1^{w-j} s_2^j \binom{w}{j}^{-1} X^{w-j} Y^j \end{aligned}$$

$$= P_{(s_1, s_2)}(X, Y)$$

und somit die Behauptung. #

Für eine beliebige Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

gilt nun

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M)(P_{(s_1, s_2)})(X, Y) &= P_{(s_1, s_2)}(aX + cY, bX + dY) \\ &\stackrel{(5.3)}{=} L\left((s_1(aX + cY) + s_2(bX + dY))^w\right) \\ &= L\left(((s_1a + s_2b)X + (s_1c + s_2d)Y)^w\right) \\ &= L\left(((s_1, s_2)^t M^t (X, Y))^w\right) \\ &\stackrel{(5.3)}{=} P_{(s_1, s_2)^t M}(X, Y). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} C(\mathbb{P}(M)(P_{(s_1, s_2)})(X, Y)) &\stackrel{(5.4)}{=} C(P_{(s_1, s_2)^t M}(X, Y)) \\ &= C(P_{(as_1 + bs_2, cs_1 + ds_2)}(X, Y)) \\ &\stackrel{(5.2)}{=} {}^t((as_1 + bs_2)^w (cs_1 + ds_2)^0, \dots, (as_1 + bs_2)^0 (cs_1 + ds_2)^w) \\ &= {}^t(\mathbb{P}^*(M)(s_1^w s_2^0), \dots, \mathbb{P}^*(M)(s_1^0 s_2^w)) \\ &= \pi(M) \cdot {}^t(s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w) \\ &= \pi(M) \cdot C(P_{(s_1, s_2)}(X, Y)) \end{aligned}$$

und somit die Proposition. □

**Satz 5.5.** Für jedes gerade  $w$  existiert eine eindeutig bestimmte symmetrische Bilinearform  $[\cdot \mid \cdot]$  auf  $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$  mit

$$\left[ P_{(s_1, s_2)} \mid P_{(t_1, t_2)} \right] = (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w \quad \text{für alle } s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

*Beweis.* Für eine beliebige Matrix  $D = (d_{ij})_{i,j=0}^w \in \mathbb{R}^{(w+1) \times (w+1)}$  gilt

$$(s^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1) = \sum_{i,j=0}^w d_{ij} s^{w-i} t^{w-j} \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R}.$$

Es gibt daher genau eine solche Matrix mit

$$(s^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1) = (s - t)^w \quad \text{für alle } s, t \in \mathbb{R} \tag{5.5}$$

und deren Einträge  $d_{ij}$  sind sämtlich ganzzahlig. Wir setzen nun

$$[P \mid Q] := {}^t C(P) \cdot D \cdot C(Q) \quad \text{für alle } P, Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$$

und nennen  $D$  die **Darstellungsmatrix** von  $[\cdot \mid \cdot]$ . Aufgrund der Linearität von  $C$  ist  $[\cdot \mid \cdot]$  eine Bilinearform auf  $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$ . Die Symmetrie von  $D$  und somit auch die von  $[\cdot \mid \cdot]$  folgt mit

$$\begin{aligned} (s^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1) &\stackrel{(5.5)}{=} (s - t)^w \\ &\stackrel{w \text{ gerade}}{=} (t - s)^w \\ &\stackrel{(5.5)}{=} (t^w, \dots, 1) \cdot D \cdot {}^t(s^w, \dots, 1) \\ &= (s^w, \dots, 1) \cdot {}^t D \cdot {}^t(t^w, \dots, 1). \end{aligned}$$

Es verbleibt nachzuweisen, dass  $[\cdot \mid \cdot]$  die im Satz verlangte Eigenschaft erfüllt und mit dieser eindeutig bestimmt ist. Dafür ersetzen wir in (5.5) die Variablen  $s, t$  durch  $\frac{s_1}{s_2}, \frac{t_1}{t_2}$  mit  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  und multiplizieren die Gleichung anschließend mit  $(s_2 t_2)^w$ .<sup>50</sup> So erhalten wir

$$(s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w) \cdot D \cdot {}^t(t_1^w t_2^0, \dots, t_1^0 t_2^w) = (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w \quad \text{für alle } s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \quad (5.6)$$

und daher auch

$$\begin{aligned} [P_{(s_1, s_2)} \mid P_{(t_1, t_2)}] &= {}^t C(P_{(s_1, s_2)}) \cdot D \cdot C(P_{(t_1, t_2)}) \\ &= (s_1^w s_2^0, \dots, s_1^0 s_2^w) \cdot D \cdot {}^t(t_1^w t_2^0, \dots, t_1^0 t_2^w) \\ &\stackrel{(5.6)}{=} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w; \end{aligned}$$

die Eindeutigkeit folgt schließlich mit der Eindeutigkeit von  $D$ . □

**Korollar 5.6.** *Sei  $w$  gerade. Dann erfüllt die eindeutig bestimmte Bilinearform  $[\cdot \mid \cdot]$  aus Satz 5.5 die Invarianzeigenschaft*

$$[\mathbb{P}(M)(P) \mid \mathbb{P}(M)(Q)] = [P \mid Q] \quad \text{für alle } P, Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) \text{ und } M \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

*Beweis.* Mit derselben Argumentation wie im Beweis von Proposition 5.4 reicht es aus, den Beweis für  $P = P_{(s_1, s_2)}$  und  $Q = P_{(t_1, t_2)}$  mit  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  zu führen.

Für eine beliebige Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$$

schreiben wir

$$\begin{aligned} (s'_1, s'_2) &:= (s_1, s_2) \cdot {}^t M = (as_1 + bs_2, cs_1 + ds_2), \\ (t'_1, t'_2) &:= (t_1, t_2) \cdot {}^t M = (at_1 + bt_2, ct_1 + dt_2). \end{aligned}$$

<sup>50</sup>Dieses Vorgehen ist natürlich strenggenommen nur für  $s_2 \neq 0 \neq t_2$  erlaubt, lässt sich aber problemlos stetig in die Ausnahmefälle fortsetzen.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \left[ \mathbb{P}(M)(P_{(s_1, s_2)}) \mid \mathbb{P}(M)(P_{(t_1, t_2)}) \right] &\stackrel{(5.4)}{=} \left[ P_{(s'_1, s'_2)} \mid P_{(t'_1, t'_2)} \right] \\
 &\stackrel{5.5}{=} (s'_1 t'_2 - s'_2 t'_1)^w \\
 &= ((as_1 + bs_2)(ct_1 + dt_2) - (cs_1 + ds_2)(at_1 + bt_2))^w \\
 &= ((ad - bc)(s_1 t_2 - s_2 t_1))^w \\
 &\stackrel{M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}{=} (s_1 t_2 - s_2 t_1)^w \\
 &\stackrel{5.5}{=} \left[ P_{(s_1, s_2)} \mid P_{(t_1, t_2)} \right]
 \end{aligned}$$

und somit das Korollar.  $\square$

**Korollar 5.7.** Sei  $w$  gerade. Die Darstellungsmatrix  $D$  der eindeutig bestimmten Bilinearform  $[\cdot \mid \cdot]$  aus Satz 5.5 erfüllt

$${}^t \pi(M) \cdot D \cdot \pi(M) = D \quad \text{für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

*Beweis.* Für alle  $P, Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$  und alle  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  gilt

$$\begin{aligned}
 {}^t C(P) \cdot D \cdot C(Q) &= [P \mid Q] \\
 &\stackrel{5.6}{=} [\mathbb{P}(M)(P) \mid \mathbb{P}(M)(Q)] \\
 &= {}^t C(\mathbb{P}(M)(P)) \cdot D \cdot C(\mathbb{P}(M)(Q)) \\
 &\stackrel{5.4}{=} {}^t (\pi(M) \cdot C(P)) \cdot D \cdot (\pi(M) \cdot C(Q)) \\
 &= {}^t C(P) \cdot ({}^t \pi(M) \cdot D \cdot \pi(M)) \cdot C(Q)
 \end{aligned}$$

und also das Korollar.  $\square$

## 5.2 Das Shimura-Produkt

In diesem Abschnitt führen wir mit dem Shimura-Produkt ein Werkzeug zur Untersuchung von Differentialformen auf der oberen Halbebene  $\mathbb{H}$  ein. An die dafür benötigten Grundlagen zu Differentialformen erinnern wir nur kurz und auf die Erfordernisse des uns interessierenden Spezialfalls reduziert.

Wir nennen im Weiteren

$$\{f(z) dz \mid f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}\}$$

die Menge der *holomorphen Differentialformen (erster Ordnung)* auf  $\mathbb{H}$ .

**Definition 5.8.** Sei  $f(z) dz$  eine holomorphe Differentialform auf  $\mathbb{H}$  und sei  $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  eine holomorphe Funktion. Dann heißt die holomorphe Differentialform auf  $\mathbb{H}$

$$F^*(f(z) dz) := f(F(z)) dF(z) = f(F(z)) F'(z) dz$$

der *Rücktransport* von  $f(z) dz$  unter  $F$ .

Sei  $w \in \mathbb{N}$  gegeben und  $k := w + 2$ . Für  $f \in S_k$  und  $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  ist dann  $f(z)z^j dz$  eine holomorphe Differentialform auf  $\mathbb{H}$ . Für ihren Rücktransport unter der Möbiustransformation  $\varphi_M$  mit einem beliebigen  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gilt dann

$$\begin{aligned} \varphi_M^*(f(z)z^j dz) &= f(\varphi_M(z))\varphi_M(z)^j \varphi'_M(z) dz \\ &= f(M\langle z \rangle) \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^j \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} dz \\ &= f(z)(cz+d)^k \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^j (cz+d)^{-2} dz \\ &= f(z)(az+b)^j (cz+d)^{w-j} dz. \end{aligned} \tag{5.7}$$

**Proposition 5.9.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gegeben,  $k := w + 2$  und  $f \in S_k$ . Für eine beliebige Matrix  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gilt dann

$$\varphi_M^*(f(z)z^{(w)} dz) = \pi(M) \cdot (f(z)z^{(w)} dz),$$

wobei wir

$$f(z)z^{(w)} dz := \begin{pmatrix} f(z)z^w dz \\ \vdots \\ f(z)z^0 dz \end{pmatrix}.$$

schreiben und der Rücktransport zeilenweise zu verstehen ist.

*Beweis.* Die Übersetzung in die Sprache der Darstellungen aus Abschnitt 5.1 gelingt, wenn wir dort  $X = z$  und  $Y = 1$  einsetzen. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_M^*(f(z)z^{(w)} dz) &\stackrel{(5.7)}{=} \begin{pmatrix} f(z)(az+b)^w (cz+d)^0 dz \\ \vdots \\ f(z)(az+b)^0 (cz+d)^w dz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(z)\mathbb{P}^*(M)(z^w 1^0) dz \\ \vdots \\ f(z)\mathbb{P}^*(M)(z^0 1^w) dz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{P}^*(M)f(z)(z^w 1^0) dz \\ \vdots \\ \mathbb{P}^*(M)f(z)(z^0 1^w) dz \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(5.1)}{=} \pi(M) \cdot \begin{pmatrix} f(z)(z^w 1^0) dz \\ \vdots \\ f(z)(z^0 1^w) dz \end{pmatrix} = \pi(M) \cdot (f(z)z^{(w)} dz). \end{aligned}$$

□

Wir werden im Folgenden den Realteil von  $f(z)z^{(w)} dz$  untersuchen und dabei insbesondere Proposition 5.9 auf diesen anwenden. Um dies tun zu können, müssen wir zunächst weitere Differentialformen einführen und den Rücktransport auf diesen definieren. Wir nennen also

$$\{g(x,y) dx + h(x,y) dy \mid g, h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R} \text{ glatt}\}$$



die Menge der  $C^\infty$ -Differentialformen erster Ordnung auf  $\mathbb{H}$  und definieren die  $C^\infty$ -Differentialformen von Ordnung  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  auf  $\mathbb{H}$  als die  $n$ -fachen äußeren Produkte  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$  von  $C^\infty$ -Differentialformen erster Ordnung auf  $\mathbb{H}$ ; die  $C^\infty$ -Differentialformen von Ordnung 0 auf  $\mathbb{H}$  sind so gerade die glatten Funktionen.

**Definition 5.10.** Sei  $g(x, y) dx + h(x, y) dy$  eine  $C^\infty$ -Differentialform erster Ordnung auf  $\mathbb{H}$  und sei

$$F : \begin{cases} \mathbb{H} & \rightarrow \mathbb{H}, \\ x + iy & \mapsto u(x, y) + iv(x, y) \end{cases} \quad \text{mit reellwertigen Funktionen } u, v$$

eine glatte Funktion. Dann heißt die  $C^\infty$ -Differentialform erster Ordnung auf  $\mathbb{H}$

$$F^*(g(x, y) dx + h(x, y) dy) := g(F(x, y)) du(x, y) + h(F(x, y)) dv(x, y)$$

der Rücktransport von  $g(x, y) dx + h(x, y) dy$  unter  $F$ . Der Rücktransport einer  $C^\infty$ -Differentialform  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$  von Ordnung  $n \in \mathbb{N}$  auf  $\mathbb{H}$  erklärt sich durch

$$F^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) := F^*(\omega_1) \wedge \dots \wedge F^*(\omega_n),$$

der Rücktransport einer  $C^\infty$ -Differentialform  $f(x, y)$  von Ordnung 0 auf  $\mathbb{H}$  durch

$$F^*(f(x, y)) := f(F(x, y)).$$

Wir erhalten nun das folgende Korollar:

**Korollar 5.11.** Unter den Voraussetzungen von Proposition 5.9 gilt

$$\begin{aligned} \varphi_M^*(\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz)) &= \pi(M) \cdot (\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz)), \\ \varphi_M^*(\operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) &= \pi(M) \cdot (\operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)). \end{aligned}$$

*Beweis.* Wegen  $M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  und (5.1) sind die Einträge von  $\pi(M)$  ganzzahlig und insbesondere reell. Es folgt

$$\begin{aligned} & \varphi_M^*(\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz)) + i \varphi_M^*(\operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) \\ &= \varphi_M^*(\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + i \operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) \\ &\stackrel{5.9}{=} \pi(M) \cdot (\operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + i \operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz)) \\ &= \pi(M) \cdot \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + i \pi(M) \cdot \operatorname{Im}(f(z)z^{(w)} dz) \end{aligned}$$

und nach Vergleich von Real- und Imaginärteilen rechts und links somit das Korollar.  $\square$

**Definition 5.12.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gegeben und sei  $D$  die Darstellungsmatrix der Bilinearform aus Satz 5.5. Weiter sei

$$\omega := {}^t(\omega_w, \dots, \omega_0) \quad \text{bzw.} \quad \eta := {}^t(\eta_w, \dots, \eta_0)$$

ein Spaltenvektor mit  $C^\infty$ -Differentialformen von Ordnung  $\text{ord}(\omega) \in \{0, 1, 2\}$  bzw.  $\text{ord}(\eta) \in \{0, 1, 2\}$  auf  $\mathbb{H}$  als Einträgen. Dann ist das **Shimura-Produkt** von  $\omega$  und  $\eta$  definiert als

$$[\omega \mid \eta] := {}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta}) = ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta}, \quad (5.8)$$

wobei das äußere Produkt zwischen Vektoren von Differentialformen komponentenweise genommen und dann aufaddiert wird.

**Bemerkung 5.13.** Unmittelbar aus Definition 5.12 folgt, dass das Shimura-Produkt eine Sesquilinearform ist. Es ist zudem insofern wohldefiniert als das zweite Gleichheitszeichen in (5.8) gilt,

denn: Schreiben wir  $D = (d_{ij})_{i,j=w}^0$ , so gilt

$$\left. \begin{aligned} {}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta}) &= {}^t\omega \wedge \begin{pmatrix} \sum_{j=w}^0 d_{wj} \bar{\eta}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=w}^0 d_{0j} \bar{\eta}_j \end{pmatrix} = \sum_{i=w}^0 \omega_i \wedge \left( \sum_{j=w}^0 d_{ij} \bar{\eta}_j \right) \\ ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta} &= \left( \sum_{i=w}^0 \omega_i d_{i0}, \dots, \sum_{i=w}^0 \omega_i d_{i0} \right) \wedge \bar{\eta} = \sum_{j=w}^0 \left( \sum_{i=w}^0 \omega_i d_{ij} \right) \wedge \bar{\eta}_j \end{aligned} \right\} = \sum_{i,j=w}^0 d_{ij} (\omega_i \wedge \bar{\eta}_j).$$

#

**Satz 5.14.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gegeben und sei

$$\omega := {}^t(\omega_w, \dots, \omega_0) \quad \text{bzw.} \quad \eta := {}^t(\eta_w, \dots, \eta_0)$$

ein Spaltenvektor mit  $C^\infty$ -Differentialformen von Ordnung  $\text{ord}(\omega) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  bzw.  $\text{ord}(\eta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  auf  $\mathbb{H}$  als Einträgen. Dann erfüllt das Shimura-Produkt von  $\omega$  und  $\eta$  die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (SP_1) \quad \varphi_M^*([\omega \mid \eta]) &= [\varphi_M^*(\omega) \mid \varphi_M^*(\eta)] && \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{R}). \\ (SP_2) \quad ([\pi(M) \cdot \omega \mid \pi(M) \cdot \eta]) &= [\omega \mid \eta] && \text{für alle } M \in \text{SL}_2(\mathbb{R}). \\ (SP_3) \quad d[\omega \mid \eta] &= [d\omega \mid \eta] + (-1)^{\text{ord}(\omega)} [\omega \mid d\eta]. \\ (SP_4) \quad [\omega \mid \eta] &= (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} [\eta \mid \omega]. \end{aligned}$$

Seien nun weiter  $k := w + 2$  und  $f, g \in S_k$ . Schreiben wir

$$\Omega(f, g)(z) := f(z) \overline{g(z)} y^k d\omega(z)$$

für den Integranden des Petersson-Skalarprodukts auf  $S_k$ , so erfüllt das Shimura-Produkt zudem:

$$\begin{aligned} (SP_5) \quad [f(z) z^{(w)} dz \mid g(z) z^{(w)} dz] &= -(2i)^{w+1} \Omega(f, g)(z). \\ (SP_6) \quad 4 [ \text{Re}(f(z) z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z) z^{(w)} dz) ] &= -(2i)^{w+1} \cdot (\Omega(f, if)(z) - \Omega(if, f)(z)) \\ &= (2i)^{w+2} \cdot \Omega(f, f)(z). \end{aligned}$$

*Beweis.* Sei  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  beliebig. Da definitionsgemäß für zwei  $C^\infty$ -Differentialformen der Rücktransport unter  $\varphi_M$  und das äußere Produkt kommutieren, gilt

$$\varphi_M^*([\omega \mid \eta]) = \varphi_M^*({}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta})) = \varphi_M^*({}^t\omega) \wedge \varphi_M^*(D \cdot \bar{\eta}).$$

Die Linearität des Rücktransports bedingt  $\varphi_M^*(D \cdot \bar{\eta}) = D \cdot \varphi_M^*(\bar{\eta})$ . Ferner gilt  $\varphi_M^*({}^t\omega) = {}^t\varphi_M^*(\omega)$ , da der Rücktransport eintragsweise auf den Spalten- bzw. Zeilenvektor wirkt, und  $\varphi_M^*(\bar{\eta}) = \overline{\varphi_M^*(\eta)}$ , da die Aktion des Rücktransports durch die Möbiustransformation  $z \mapsto M(z)$  gegeben ist. Insgesamt erhalten wir damit

$$\varphi_M^*([\omega \mid \eta]) = {}^t\varphi_M^*(\omega) \wedge D \cdot \overline{\varphi_M^*(\eta)} = [\varphi_M^*(\omega) \mid \varphi_M^*(\eta)],$$

so dass wir insgesamt Eigenschaft  $(SP_1)$  nachgewiesen haben.

Zum Beweis von Eigenschaft  $(SP_2)$  betrachten wir für eine beliebige Matrix  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  das Shimura-Produkt

$$[\pi(M) \cdot \omega \mid \pi(M) \cdot \eta] = {}^t(\pi(M) \cdot \omega) \wedge D \cdot \overline{(\pi(M) \cdot \eta)} = ({}^t\omega \cdot {}^t\pi(M)) \wedge (D \cdot \pi(M) \cdot \bar{\eta}).$$

Im Beweis der Wohldefiniertheit in Bemerkung 5.13 haben wir keine besondere Eigenschaft der Matrix  $D$  benutzt. Wir können daher dieselbe Argumentation auf die Matrix  $D \cdot \pi(M)$  anwenden und erhalten

$$[\pi(M) \cdot \omega \mid \pi(M) \cdot \eta] = ({}^t\omega \cdot {}^t\pi(M) \cdot D \cdot \pi(M)) \wedge \bar{\eta} \stackrel{5.7}{=} ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta} = [\omega \mid \eta]$$

und somit Eigenschaft  $(SP_2)$ .

Wir zeigen nun Eigenschaft  $(SP_3)$ . Mit den allgemeinen Rechenregeln der äußeren Ableitung  $d$  gilt

$$d[\omega \mid \eta] = d({}^t\omega \wedge (D \cdot \bar{\eta})) = d({}^t\omega) \wedge (D \cdot \bar{\eta}) + (-1)^{\mathrm{ord} \omega} \cdot {}^t\omega \wedge d(D \cdot \bar{\eta}).$$

Da die Einträge von  $D$  ganze Zahlen sind, kann die Matrix  $D$  aus  $d(D \cdot \bar{\eta})$  herausgezogen werden. Damit erhalten wir

$$d[\omega \mid \eta] = {}^t(d\omega) \wedge (D \cdot \bar{\eta}) + (-1)^{\mathrm{ord} \omega} \cdot {}^t\omega \wedge (D \cdot d\bar{\eta}) = [d\omega \mid \eta] + (-1)^{\mathrm{ord}(\omega)} \cdot [\omega \mid d\eta],$$

wobei wir in der letzten Umformung  $d\bar{\eta} = \overline{d\eta}$  verwendet haben. Dies gilt wegen

$$d\bar{\eta} = d(\overline{\mathrm{Re}(\eta) + i\mathrm{Im}(\eta)}) = \overline{d\mathrm{Re}(\eta) - i \cdot d\mathrm{Im}(\eta)} = \overline{d\eta}.$$

Insgesamt haben wir nun Eigenschaft  $(SP_3)$  nachgewiesen.

Im Beweis von Eigenschaft  $(SP_4)$  nutzen wir aus, dass  $D$  reelle Einträge hat, so dass

$$[\eta \mid \omega] = {}^t\eta \wedge (D \cdot \bar{\omega}) = {}^t\bar{\eta} \wedge (D \cdot \omega)$$

gilt. Mit den allgemeinen Rechenregeln des äußeren Produkts folgt

$$\begin{aligned} \overline{[\eta \mid \omega]} &= (-1)^{\mathrm{ord}(\omega) \mathrm{ord}(\eta)} \cdot {}^t(D \cdot \omega) \wedge \bar{\eta} \\ &= (-1)^{\mathrm{ord}(\omega) \mathrm{ord}(\eta)} \cdot ({}^t\omega \cdot {}^tD) \wedge \bar{\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} \cdot ({}^t\omega \cdot D) \wedge \bar{\eta} \\
&= (-1)^{\text{ord}(\omega) \text{ord}(\eta)} \cdot [\omega \mid \eta],
\end{aligned}$$

wobei wir in der vorletzten Umformung die Symmetrie von  $D$  ausgenutzt haben.

Eigenschaft  $(SP_5)$  lässt sich einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned}
[f(z)z^{(w)} dz \mid g(z)z^{(w)} dz] &= {}^t(f(z)z^{(w)} dz) \wedge D(\overline{g(z)}\bar{z}^{(w)}\bar{dz}) \\
&= f(z) {}^t z^{(w)} (dx + i dy) \wedge D\overline{g(z)}\bar{z}^{(w)} (dx - i dy) \\
&= -2if(z)\overline{g(z)} {}^t z^{(w)} D\bar{z}^{(w)} \cdot dx \wedge dy \\
&\stackrel{(5.5)}{=} -2if(z)\overline{g(z)}(z - \bar{z})^w \cdot dx \wedge dy \\
&= -(2i)^{w+1} f(z)\overline{g(z)} y^w \cdot dx \wedge dy \\
&= -(2i)^{w+1} \Omega(f, g)(z).
\end{aligned}$$

Zum Beweis von Eigenschaft  $(SP_6)$  nutzen wir zunächst die Beziehung  $\text{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$  aus. Es gilt also

$$\begin{aligned}
&4 \left[ \text{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] \\
&= \left[ f(z)z^{(w)} dz + \overline{f(z)z^{(w)} dz} \mid if(z)z^{(w)} dz + \overline{if(z)z^{(w)} dz} \right].
\end{aligned}$$

Da das Shimura-Produkt sesquilinear ist, können wir ausmultiplizieren, wobei zwei der Terme wegen  $dz \wedge dz = 0 = \bar{dz} \wedge \bar{dz}$  verschwinden. Wir erhalten so

$$\begin{aligned}
&4 \left[ \text{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] \\
&= \left[ f(z)z^{(w)} dz \mid if(z)z^{(w)} dz \right] + \left[ \overline{f(z)z^{(w)} dz} \mid \overline{if(z)z^{(w)} dz} \right].
\end{aligned}$$

Aus der Definition des Shimura-Produkts und der Ganzzahligkeit der Einträge von  $D$  können wir ablesen, dass für zwei Spaltenvektoren  $\omega, \eta$  mit  $C^\infty$ -Differentialformen die Rechenregel

$$\overline{[\omega \mid \eta]} = \overline{{}^t\omega \wedge D\bar{\eta}} = {}^t\bar{\omega} \wedge D\eta = [\bar{\omega} \mid \bar{\eta}]$$

gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
&4 \left[ \text{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \text{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] \\
&= \left[ f(z)z^{(w)} dz \mid if(z)z^{(w)} dz \right] + \left[ \overline{f(z)z^{(w)} dz} \mid \overline{if(z)z^{(w)} dz} \right] \\
&\stackrel{(SP_5)}{=} - (2i)^{w+1} \Omega(f, if)(z) + \overline{-(2i)^{w+1} \Omega(f, if)(z)} \\
&= - (2i)^{w+1} \cdot (\Omega(f, if)(z) - \Omega(if, f)(z)),
\end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass  $w$  gerade ist. Wir haben nun die erste der behaupteten Gleichheiten nachgewiesen. Weiter gilt:

$$- (2i)^{w+1} \cdot (\Omega(f, if)(z) - \Omega(if, f)(z)),$$

$$\begin{aligned}
&= -(2i)^{w+1} \cdot (f(z)\overline{if(z)}y^w dx \wedge dy - if(z)\overline{f(z)}y^w dx \wedge dy), \\
&= -(2i)^{w+1} \cdot (-2if(z)\overline{f(z)}y^w dx \wedge dy), \\
&= (2i)^{w+2} \cdot \Omega(f, f)(z)
\end{aligned}$$

und somit auch die zweite behauptete Gleichheit von Eigenschaft  $(SP_6)$ .  $\square$

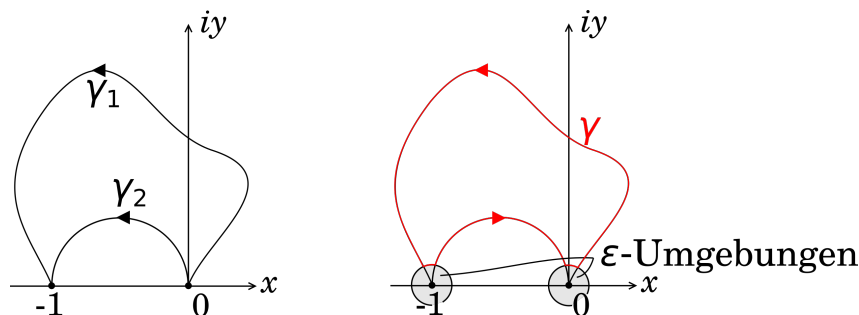
### 5.3 Der Eichler-Shimura-Isomorphismus

**Lemma 5.15.** Sei  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion, so dass für alle  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  die Funktion  $f|_k M$  holomorph in  $z = \infty$  ist. Dann hängt für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^* := \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  das (uneigentliche) Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz := \lim_{\substack{a \rightarrow z_1 \\ b \rightarrow z_2}} \int_a^b f(z) dz$$

wohldefiniert und hängt nur von seinem Anfangs- und Endpunkt ab.

*Beweis.* Seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^*$  und seien  $\gamma_1, \gamma_2$  zwei stückweise glatte Kurven von  $z_1$  nach  $z_2$ , die mit möglicher Ausnahme ihrer Anfangs- und Endpunkte komplett in  $\mathbb{H}$  liegen. Die in der Abbildung rot dargestellte stückweise glatte geschlossene Kurve  $\gamma$  verläuft ganz in  $\mathbb{H}$ .



Nach dem **Cauchy'schen Integralsatz** gilt daher

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Da sich der Integrand stetig nach  $z_1$  und  $z_2$  fortsetzen lässt, erhalten wir nach Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  den Integralwert

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2^-} f(z) dz = 0.$$

Hieraus folgt sofort das Lemma.  $\square$

Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade,  $k := w + 2$  und  $f \in S_k$ . Dann konvergiert für ein beliebiges  $j \in \{0, \dots, w\}$  das **Periodenintegral**

$$\int_0^\infty f(z) z^j dz = \int_0^i f(z) z^j dz + \int_i^\infty f(z) z^j dz \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}, \quad (5.9)$$



denn: Das erste Integral auf der rechten Seite der Behauptung lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned}
 \int_0^i f(z) z^j dz &= \int_{S(\infty)}^{S(i)} f(z) z^j dz \\
 &= \int_{\infty}^i \varphi_S^*(f(z) z^j dz) \\
 &\stackrel{(5.7)}{=} \int_{\infty}^i f(z) (-z)^{w-j} dz \\
 &= (-1)^{w-j+1} \cdot \int_i^{\infty} f(z) z^{w-j} dz,
 \end{aligned}$$

so dass es ausreicht, die Konvergenz des zweiten Integrals auf der rechten Seite der Behauptung zu zeigen. Hierfür stellen wir zunächst fest, dass die Funktion  $e^{-2\pi iz} f(z)$  nach Übungsaufgabe 3.1 für  $\text{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  durch eine Konstante  $c > 0$  beschränkt ist. Insbesondere folgt für alle  $z = iy$  mit  $y \in (1, \infty)$

$$|f(z) z^j dz| \leq c e^{-2\pi y} y^j |d(iy)| = c |q| \left(-\frac{\log |q|}{2\pi}\right)^j \frac{d|q|}{2\pi |q|} = \frac{c}{(2\pi)^{j+1}} (-\log |q|)^j d|q|.$$

Durch partielle Integration sieht man ein, dass das Integral

$$\int_{e^{-2\pi}}^0 (-\log t)^j dt$$

für alle  $j \in \{0, \dots, w\}$  konvergiert, so dass wir eine konvergente Majorante gefunden haben. #

Wir haben somit die Wohldefiniertheit des folgenden Begriffes nachgewiesen:

**Definition 5.16.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade und  $k := w + 2$ . Dann heißt die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$r : \begin{cases} S_k & \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}, \\ f & \mapsto \int_0^{\infty} \text{Re}(f(z) z^{(w)} dz), \end{cases}$$

wobei längs der positiven imaginären Achse integriert wird, die **Periodenabbildung**.

**Lemma 5.17.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade und  $k := w + 2$ . Dann liegt für alle  $f \in S_k$  das Bild  $r(f)$  unter der Periodenabbildung im Untervektorraum

$$V := \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(S)) \cap \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \subseteq \mathbb{R}^{w+1}.$$

*Beweis.* Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  und  $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  beliebig gilt

$$\begin{aligned}
 \pi(M) \cdot \int_{z_1}^{z_2} \text{Re}(f(z) z^{(w)} dz) &= \int_{z_1}^{z_2} (\pi(M) \cdot \text{Re}(f(z) z^{(w)} dz)) \\
 &\stackrel{5.11}{=} \int_{z_1}^{z_2} \varphi_M^*(\text{Re}(f(z) z^{(w)} dz)) \\
 &= \int_{M(z_1)}^{M(z_2)} \text{Re}(f(z) z^{(w)} dz).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

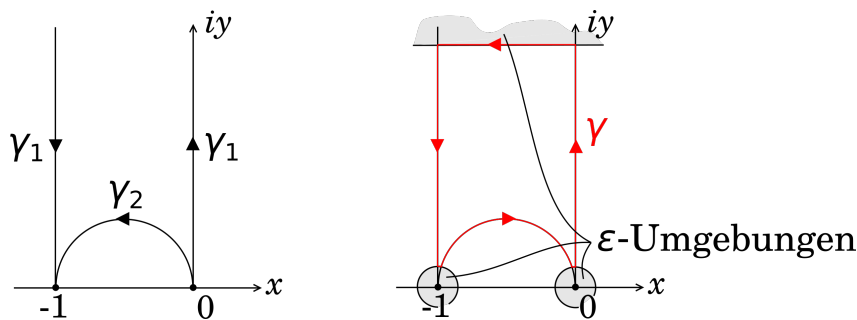
Das Bild von  $f$  unter  $r$  liegt genau dann in  $V$ , wenn  $r(f)$  jeweils im Kern der durch  $I_{w+1} + \pi(S)$  bzw.  $I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)$  gegebenen linearen Abbildung liegt. Dies können wir mithilfe von (5.10) leicht überprüfen: Es gelten

$$\begin{aligned} (I_{w+1} + \pi(S)) \cdot r(f) &\stackrel{(5.10)}{=} \int_0^\infty \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)}) dz + \int_{S\langle 0 \rangle}^{S\langle \infty \rangle} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &= \int_0^\infty \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)}) dz + \int_\infty^0 \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot r(f) &\stackrel{(5.10)}{=} \int_0^\infty \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)}) dz + \int_{ST\langle 0 \rangle}^{ST\langle \infty \rangle} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &\quad + \int_{(ST)^2\langle 0 \rangle}^{(ST)^2\langle \infty \rangle} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)}) dz \\ &= \operatorname{Re} \left( \int_0^\infty f(z)z^{(w)} dz + \int_{-1}^0 f(z)z^{(w)} dz + \int_\infty^{-1} f(z)z^{(w)} dz \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei man das letzte Gleichheitszeichen erhält, indem man im Beweis von Lemma 5.15 erlaubt, dass die Integrationskurven  $\gamma_1, \gamma_2$  endlich viele Spitzen durchlaufen und diese Stellen genauso behandelt wie  $z_1, z_2$ .



□

**Lemma 5.18.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade. Dann ist der Untervektorraum

$$U := (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot \operatorname{Kern}(I_{w+1} - \pi(T)) \subseteq \mathbb{R}^{w+1}$$

in  $V$  enthalten, so dass der Faktorraum  $V/U$  wohldefiniert ist.

*Beweis.* Jedes  $u \in U$  erfüllt

$$u = (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \quad \text{mit einem } t \in \mathbb{R}^{w+1} \text{ mit } (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t = 0. \quad (5.11)$$

Es gilt daher einerseits  $u \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(S))$ ,

denn:

$$\begin{aligned}
 (I_{w+1} + \pi(S)) \cdot u &\stackrel{(5.11)}{=} (I_{w+1} + \pi(S)) \cdot (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \\
 &= (I_{w+1} - \pi(S) + \pi(S) - \pi(S)\pi(S)) \cdot t \\
 &\stackrel{5.2}{=} (I_{w+1} - \pi(S^2)) \cdot t \\
 &= (I_{w+1} - \pi(-I_2)) \cdot t \\
 &\stackrel{(5.1)}{=} 0, \\
 &\quad \text{w gerade}
 \end{aligned}$$

#

und andererseits  $u \in \text{Kern}(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2))$ ,

denn:

$$\begin{aligned}
 &(I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot u \\
 &\stackrel{(5.11)}{=} (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \cdot (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \\
 &= (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST) - \pi(S) - \pi(ST)\pi(S) - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S)) \cdot t \\
 &\stackrel{(5.1)}{=} (\pi(-I_2) + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST) - \pi(S) - \pi(ST)\pi(S) - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S)) \cdot t \\
 &\stackrel{5.2}{=} (\pi(ST)\pi(ST)\pi(ST) + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST) - \pi(S) - \pi(ST)\pi(S) \\
 &\quad - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S)) \cdot t \\
 &= ((\pi(ST) - \pi(S)) + (\pi(ST)\pi(ST) - \pi(ST)\pi(S)) + (\pi(ST)\pi(ST)\pi(ST) \\
 &\quad - \pi(ST)\pi(ST)\pi(S))) \cdot t \\
 &= (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST)) \cdot (\pi(ST) - \pi(S)) \cdot t \\
 &\stackrel{5.2}{=} (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi(ST)\pi(ST)) \cdot \pi(S) \cdot (\pi(T) - I_{w+1}) \cdot t \\
 &\stackrel{(5.11)}{=} 0.
 \end{aligned}$$

#

Insgesamt haben wir das Lemma gezeigt. □

Unmittelbar folgt:

**Korollar 5.19.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade und sei  $k := w + 2$ . Dann induziert die Periodenabbildung  $r$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung von  $S_k$  nach  $V/U$ .

Wir wollen im Folgenden nachweisen, dass die induzierte lineare Abbildung aus Korollar 5.19 injektiv ist. Hierfür müssen wir ein wenig ausholen:



**Definition 5.20.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade. Ein **Kozykel** bezüglich der Darstellung  $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{GL}_{w+1}(\mathbb{R})$  ist eine Abbildung  $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}$  mit der **Kozykelbedingung**

$$\phi(M\tilde{M}) = \phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M}) \quad \text{für alle } M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Nach Korollar 1.27 wird die volle Modulgruppe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  von den Matrizen  $S$  und  $T$  erzeugt. Mit der Kozykelbedingung folgt daher, dass je zwei Kozykel gleich sind, wenn ihre Werte auf  $S$  und  $T$  übereinstimmen.

**Lemma 5.21.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade und sei  $k := w + 2$ . Sei weiter  $f \in S_k$  mit  $r(f) \in U$ , so dass es einen Vektor  $t \in \mathbb{R}^{w+1}$  gibt mit

$$r(f) = (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t \quad \text{und} \quad (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t = 0. \quad (5.12)$$

Dann gilt:

$$\int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz = (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f)) \quad \text{für } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ beliebig.}$$

*Beweis.* Nach der oben beschriebenen Eigenschaft von Kozykeln genügt es zu zeigen, dass die Abbildungen von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  nach  $\mathbb{R}^{w+1}$ , die durch

$$\phi(M) := \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \quad \text{und} \quad \tilde{\phi}(M) := (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f))$$

gegeben sind, Kozykel sind und ihre Werte für die Matrizen  $S$  und  $T$  übereinstimmen. Tatsächlich erfüllen sie die Kozykelbedingung,

denn: Für alle  $M, \tilde{M} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gilt einerseits analog zur Argumentation im Beweis von Lemma 5.17

$$\begin{aligned} \phi(M\tilde{M}) &= \int_0^{(M\tilde{M})(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz + \int_{M(0)}^{(M\tilde{M})(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &\stackrel{(5.10)}{=} \int_0^{M(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz + \pi(M) \cdot \int_0^{\tilde{M}(0)} \mathrm{Re}(f(z)z^{(w)}) \, dz \\ &= \phi(M) + \pi(M)\phi(\tilde{M}) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(M\tilde{M}) &= (I_{w+1} - \pi(M\tilde{M})) \cdot (-t + r(f)) \\ &= I_{w+1} \cdot (-t + r(f)) - \pi(M)\pi(\tilde{M}) \cdot (-t + r(f)) \\ &= I_{w+1} \cdot (-t + r(f)) - \pi(M) \cdot (-t + r(f)) + \pi(M) \cdot (-t + r(f)) \\ &\quad - \pi(M)\pi(\tilde{M}) \cdot (-t + r(f)) \\ &= (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f)) + \pi(M)(I_{w+1} - \pi(\tilde{M})) \cdot (-t + r(f)) \end{aligned}$$

$$= \tilde{\phi}(M) + \pi(M)\tilde{\phi}(\tilde{M}).$$

#

Weiter gelten

$$\begin{aligned}\phi(S) &= \int_0^{S(0)} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= - \int_{S(0)}^{S(\infty)} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &\stackrel{(5.10)}{=} -\pi(S) \cdot \int_0^\infty \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &\stackrel{(5.12)}{=} r(f) - (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot t - \pi(S) \cdot r(f) \\ &= (I_{w+1} - \pi(S)) \cdot (-t + r(f)) \\ &= \tilde{\phi}(S)\end{aligned}$$

und analog zur Argumentation im Beweis von Lemma 5.17

$$\begin{aligned}\phi(T) &= \int_0^{T(0)} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= \int_0^\infty \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) + \int_\infty^{T(0)} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &= \int_0^\infty \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) - \int_{T(0)}^{T(\infty)} \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \\ &\stackrel{(5.10)}{=} (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot r(f) \\ &\stackrel{(5.12)}{=} -(I_{w+1} - \pi(T)) \cdot t + (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot r(f) \\ &= (I_{w+1} - \pi(T)) \cdot (-t + r(f)) \\ &= \tilde{\phi}(T)\end{aligned}$$

und insgesamt also das Lemma.  $\square$

**Lemma 5.22.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade und sei  $k := w + 2$ . Seien weiter  $f \in S_k$  mit  $r(f) \in U$ ,  $t \in \mathbb{R}^{w+1}$  wie in Lemma 5.21 und

$$s := -t + r(f) = -\pi(S) \cdot t. \quad (5.13)$$

Für die beiden  $C^\infty$ -Funktionen

$$\begin{aligned}F(z) &:= -s + \int_0^z \operatorname{Re}(f(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta) && \text{mit } dF(z) = \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz), \\ G(z) &:= \int_0^z \operatorname{Re}(if(\zeta)\zeta^{(w)} d\zeta) && \text{mit } dG(z) = \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz)\end{aligned}$$

gilt dann

$$\pi(M) \cdot F(z) = \varphi_M^*(F)(z) \quad \text{und} \quad \pi(M) \cdot dG(z) = \varphi_M^*(dG(z)) \quad \text{für alle } M \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

*Beweis.* Sei  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Dann gilt analog zur Argumentation im Beweis von Lemma 5.17

$$\begin{aligned} \pi(M) \cdot F(z) &= \pi(M) \cdot \left( -s + \int_0^z \mathrm{Re}(f(\zeta) \zeta^{(w)} d\zeta) \right) \\ &\stackrel{(5.10)}{=} -\pi(M) \cdot s + \int_{M\langle 0 \rangle}^{M\langle z \rangle} \mathrm{Re}(f(\zeta) \zeta^{(w)} d\zeta) \\ &= -\pi(M) \cdot s - \int_0^{M\langle 0 \rangle} \mathrm{Re}(f(\zeta) \zeta^{(w)} d\zeta) + \int_0^{M\langle z \rangle} \mathrm{Re}(f(\zeta) \zeta^{(w)} d\zeta) \end{aligned}$$

Mit Lemma 5.21 und der Definition von  $F$  folgt

$$\begin{aligned} \pi(M) \cdot F(z) &= -\pi(M) \cdot s - (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot (-t + r(f)) + F(M\langle z \rangle) + s \\ &\stackrel{(5.13)}{=} -\pi(M) \cdot s - (I_{w+1} - \pi(M)) \cdot s + F(M\langle z \rangle) + s \\ &= \varphi_M^*(F)(z) \end{aligned}$$

und somit die erste behauptete Gleichung. Die zweite Behauptung des Lemmas folgt unmittelbar aus Korollar 5.11 mit  $if$  statt  $f$ .  $\square$

Wir können nun das angestrebte Injektivitätsresultat beweisen:

**Proposition 5.23.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade und sei  $k := w + 2$ . Dann gilt

$$r(f) \in U \implies f \equiv 0 \quad \text{für alle } f \in S_k.$$

*Beweis.* Es reicht zum Beweis der Proposition aus,

$$\int_{\mathcal{F}} \left[ \mathrm{Re}(f(z) z^{(w)} dz) \mid \mathrm{Re}(if(z) z^{(w)} dz) \right] = 0 \quad (5.14)$$

zu zeigen,

denn: Nach  $(SP_6)$  gilt

$$\int_{\mathcal{F}} \left[ \mathrm{Re}(f(z) z^{(w)} dz) \mid \mathrm{Re}(if(z) z^{(w)} dz) \right] = \frac{(2i)^{w+2}}{4} \cdot \int_{\mathcal{F}} \Omega(f, f)(z) = \frac{(2i)^{w+2}}{4} \cdot \langle f \mid f \rangle$$

und also

$$\int_{\mathcal{F}} \left[ \mathrm{Re}(f(z) z^{(w)} dz) \mid \mathrm{Re}(if(z) z^{(w)} dz) \right] = 0 \iff \langle f \mid f \rangle = 0 \iff f \equiv 0.$$

#

Um das Verschwinden des Integrals in (5.14) zu zeigen, formen wir geeignet um:

$$\int_{\mathcal{F}} \left[ \mathrm{Re}(f(z) z^{(w)} dz) \mid \mathrm{Re}(if(z) z^{(w)} dz) \right] \stackrel{5.22}{=} \int_{\mathcal{F}} [dF \mid dG] \stackrel{(SP_3)}{=} \int_{\mathcal{F}} d[F \mid dG],$$



wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen die allgemeine Rechenregel  $d \circ d = 0$  der äußeren Ableitung ausgenutzt haben. Wenden wir nun noch den **Satz von Stokes** aus der Höheren Analysis an, so erhalten wir

$$\int_{\mathcal{F}} \left[ \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) \mid \operatorname{Re}(if(z)z^{(w)} dz) \right] = \int_{\partial \mathcal{F}} [F \mid dG].$$

Nach Lemma 5.22 folgt die Proposition daher aus Übungsaufgabe 5.2.  $\square$

Wir wollen nun noch zeigen, dass die von der Periodenabbildung induzierte lineare Abbildung auch surjektiv ist. Dazu weisen wir nach, dass die reelle Dimension des Bildes von  $r$  und die Dimension des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $V/U$  übereinstimmen. Aufgrund der in Proposition 5.23 gezeigten Injektivität ist dies äquivalent zu

**Proposition 5.24.** *Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade und sei  $k := w + 2$ . Dann gilt*

$$\dim_{\mathbb{R}} S_k = \dim_{\mathbb{R}} V/U = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U.$$

Für den Beweis von Proposition 5.24 benötigen wir eine genauere Untersuchung des  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$  der homogenen Polynome von Grad  $w$  in  $\mathbb{C}[X, Y]$ :

**Lemma 5.25.** *Für  $w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  beliebig sind die Polynome*

$$(X + \varrho Y)^{w-j} (X + \bar{\varrho} Y)^j \quad \text{mit } j \in \{0, \dots, w\}$$

*Eigenvektoren zum Operator  $\mathbb{P}(ST)$  mit den (nicht notwendigerweise verschiedenen) Eigenwerten  $(-1)^w \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j$  und es gilt*

$$\mathbb{P}_w(\mathbb{C}) = \bigoplus_{j=0}^w \langle (X + \varrho Y)^{w-j} (X + \bar{\varrho} Y)^j \rangle_{\mathbb{C}}.$$

*Beweis.* Es gilt

$$ST = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(ST)(X + \varrho Y)^{w-j} (X + \bar{\varrho} Y)^j &= (Y + \varrho(Y - X))^{w-j} (Y + \bar{\varrho}(Y - X))^j \\ &= ((-\varrho)X + (1 + \varrho)Y)^{w-j} ((-\bar{\varrho})X + (1 + \bar{\varrho})Y)^j \\ &= (-1)^w \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j \cdot \left(X + \frac{-1 - \varrho}{\varrho} Y\right)^{w-j} \left(X + \frac{-1 - \bar{\varrho}}{\bar{\varrho}} Y\right)^j \\ &= (-1)^w \varrho^{w-j} \bar{\varrho}^j \cdot (X + \varrho Y)^{w-j} (X + \bar{\varrho} Y)^j, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass die primitiven dritten Einheitswurzeln  $\varrho$  und  $\bar{\varrho}$  Nullstellen von

$$\frac{X^3 - 1}{X - 1} = X^2 + X + 1$$

sind. Die Polynome

$$(X + \varrho Y)^{w-j}(X + \bar{\varrho} Y)^j \quad \text{mit } j \in \{0, \dots, w\}$$

sind also Eigenvektoren zum Operator  $P(ST)$ , womit wir die erste Behauptung des Lemmas nachgewiesen haben. Zum Beweis der zweiten Behauptung des Lemmas genügt es nun offenbar zu zeigen, dass die  $w + 1$  Eigenvektoren ganz  $\mathbb{P}_w(\mathbb{C})$  aufspannen. Dies zeigen wir per Induktion nach  $w$ . Für  $w = 0$  ist nichts zu zeigen und für  $w = 1$  sind die Eigenvektoren linear unabhängig, weil sich ihre Eigenwerte  $\varrho$  und  $\bar{\varrho}$  voneinander unterscheiden. Nehmen wir nun für ein  $w \geq 2$  an, die Behauptung gelte für alle  $\ell \in \{0, \dots, w - 1\}$ . Dann gilt für ein beliebiges Polynom  $P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j \in \mathbb{P}_w(\mathbb{C})$

$$P(X, Y) = a_0 Y^w + \sum_{j=1}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j = Y \cdot \underbrace{(a_0 Y^{w-1})}_{=: Q_1(X, Y)} + X \cdot \underbrace{\left( \sum_{j=1}^w a_{w-j} X^{w-j-1} Y^j \right)}_{=: Q_2(X, Y)}.$$

Die beiden Polynome  $Q_1, Q_2$  liegen in  $\mathbb{P}_{w-1}(\mathbb{C})$ . Die beiden Polynome  $X, Y$  in  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Nach Induktionsannahme gibt es daher Koeffizienten  $a_j(Q_1), a_j(Q_2) \in \mathbb{C}$  mit  $j \in \{0, \dots, w - 1\}$  und  $a_0(X), a_1(X), a_0(Y), a_1(Y) \in \mathbb{C}$ , so dass

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= (a_0(Y)(X + \varrho Y) + a_1(Y)(X + \bar{\varrho} Y)) \cdot \sum_{j=0}^{w-1} a_j(Q_1)(X + \varrho Y)^{w-j-1}(X + \bar{\varrho} Y)^j \\ &\quad + (a_0(X)(X + \varrho Y) + a_1(X)(X + \bar{\varrho} Y)) \cdot \sum_{j=0}^{w-1} a_j(Q_2)(X + \varrho Y)^{w-j-1}(X + \bar{\varrho} Y)^j \end{aligned}$$

gilt. Die Behauptung ergibt sich durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen gleicher Terme.  $\square$

*Beweis von Proposition 5.24:* Für die im Beweis vorkommenden Rechnungen ist es von Vorteil, statt der Räume  $U, V \subseteq \mathbb{R}^{w+1}$  ihre Urbilder  $C^{-1}(U), C^{-1}(V) \subseteq \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$  unter der Koordinatenabbildung  $C$  zu betrachten. Nach Proposition 5.4 gilt dabei

$$\begin{aligned} C^{-1}(V) &= \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S)) \cap \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(ST) + \mathbb{P}((ST)^2)), \\ C^{-1}(U) &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T)). \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun nach und nach die in diesen beiden Formeln vorkommenden Ausdrücke. Zunächst gilt

$$\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T)) = \langle X^w \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (5.15)$$

denn: Für  $P \in \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$  gilt

$$(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))(P)(X, Y) = P(X, Y) - P(X, X + Y) = 0$$

und nach Mehrfachanwendung dieses Zusammenhangs

$$P(X, Y) = P(X, Y + nX) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt, dass das Polynom  $P$  die Variable  $Y$  nicht enthalten kann und also in  $\langle X^w \rangle_{\mathbb{R}}$  liegt.  $\#$

Hieraus ergibt sich

$$C^{-1}(U) = \langle X^w - Y^w \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{und also} \quad U = \langle {}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \rangle_{\mathbb{R}}, \quad (5.16)$$

denn: Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} C^{-1}(U) &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) \cdot \langle X^w \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle X^w - \mathbb{P}(S)(X^w Y^0) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle X^w - Y^w \rangle_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

#

Als nächstes berechnen wir die Dimension des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $C^{-1}(V)$ . Dieser ist als der Durchschnitt der zwei Untervektorräume

$$\begin{aligned} E &:= \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S)), \\ F &:= \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(ST) + \mathbb{P}((ST)^2)) \end{aligned}$$

definiert. Nach der **Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen** gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} C^{-1}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(E \cap F) = \dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - \dim_{\mathbb{R}}(E + F). \quad (5.17)$$

Um diese Dimensionen besser berechnen zu können, reformulieren wir zunächst  $E$  und  $F$ . Für diese gilt

$$\begin{aligned} E &= \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)), \\ F &= \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST)), \end{aligned} \quad (5.18)$$

denn: Wir zeigen nur die Behauptung über  $E$ ; die Behauptung über  $F$  beweist man komplett analog und gilt nach Übungsaufgabe 5.3. Wegen

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S)) \cdot (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) &= \mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)\mathbb{P}(S) \\ &\stackrel{5.1}{=} \mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S^2) \\ &= \mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(-I_2) \\ &\stackrel{\text{w gerade}}{=} 0 \end{aligned}$$

liegt  $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))$  in  $E$ . Umgekehrt gilt für ein beliebiges  $P \in E$  definitionsgemäß

$$P(X, Y) + P(Y, -X) = (\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S))(P)(X, Y) = 0$$

und also

$$P(X, Y) = \frac{1}{2} \cdot (P(X, Y) - P(Y, -X)) = (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))\left(\frac{1}{2} \cdot P\right)(X, Y) \in \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)).$$

#

Es folgt

$$E + F = \mathbb{P}_w \quad \text{und also} \quad \dim_{\mathbb{R}}(E + F) = w + 1, \quad (5.19)$$

denn: Wegen  $\mathbb{P}(S) \in \text{GL}(\mathbb{P}_w(\mathbb{R}))$  ist  $E + F$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum isomorph zu seinem Bild  $\mathbb{P}(S)(E + F)$ . Mit (5.18) gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S)(E + F) &= \mathbb{P}(S)(\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S)) + \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))) \\ &= \text{Bild}(\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2)) + \text{Bild}(\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T)), \end{aligned} \quad (5.20)$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen wieder  $\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S^2) = \mathbb{P}(-I_2) = \mathbb{P}(I_2)$  benutzt haben.

Betrachten wir nun ein beliebiges  $P \in \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$ . Für dieses gibt es ein  $Q \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$  mit

$$\begin{aligned} P(X, Y) &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(S))(Q)(X, Y) + (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y) \\ &= (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2))(-Q)(X, Y) + (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(T))(Q)(X, Y). \end{aligned}$$

Mit (5.20) folgt also

$$\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T)) \subseteq \mathbb{P}(S)(E + F). \quad (5.21)$$

Mit der **Dimensionsformel für lineare Abbildungen** folgt

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(E + F) &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(S)(E + F) \\ &\geq \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))) \\ &\stackrel{(5.15)}{=} (w + 1) - 1 = w. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass die Inklusion (5.21) keine Gleichheit ist, dass es also in  $\mathbb{P}(S)(E + F)$  ein Element gibt, das nicht in  $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$  liegt. Tatsächlich gilt wegen der Geradheit von  $w$

$$X^w - Y^w = (\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2)) \cdot Y^w \in \text{Bild}(\mathbb{P}(S) - \mathbb{P}(I_2)) \stackrel{(5.20)}{\subseteq} \mathbb{P}(S)(E + F).$$

Läge  $X^w - Y^w$  auch in  $\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$ , so gäbe es ein  $P(X, Y) = \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$  mit

$$\begin{aligned} X^w - Y^w &= (\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))(P)(X, Y) \\ &= P(X, Y) - P(X, X + Y) \\ &= \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j - \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} (X + Y)^j \end{aligned}$$



$$= \sum_{j=1}^w a_{w-j} X^{w-j} (Y^j - (X+Y)^j).$$

Da das Monom  $X^w$  auf der rechten Seite dieser Gleichung nicht vorkommt, kann das nicht sein und wir haben mit  $X^w - Y^w$  ein Element in  $\mathbb{P}(S)(E+F) \setminus \text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(T))$  gefunden. Es ist daher  $\dim_{\mathbb{R}}(E+F) = w+1$  und die Behauptung gezeigt. #

Weiter gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} E = \begin{cases} \frac{w}{2} + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \text{ ungerade,} \\ \frac{w}{2} & \text{für } \frac{w}{2} \text{ gerade} \end{cases} = 2 \cdot \lfloor \frac{w+2}{4} \rfloor, \quad (5.22)$$

denn: Ein Polynom  $P(X, Y) := \sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j \in \mathbb{P}_w(\mathbb{R})$  liegt genau dann im Untervektorraum  $E = \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(S))$ , wenn

$$\sum_{j=0}^w a_{w-j} X^{w-j} Y^j + \sum_{j=0}^w a_{w-j} (-1)^j Y^{w-j} X^j = \sum_{j=0}^w (a_{w-j} + (-1)^{w-j} a_j) X^{w-j} Y^j = 0$$

gilt und somit auch die Relationen

$$a_{w-j} + (-1)^{w-j} a_j = 0 \quad \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\}. \quad (5.23)$$

Offensichtlich sind nach (5.23) die Koeffizienten  $a_{\frac{w}{2}+1}, \dots, a_w$  bereits eindeutig durch die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{\frac{w}{2}-1}$  bestimmt. Zusätzlich gilt

$$a_{\frac{w}{2}} + (-1)^{\frac{w}{2}} a_{\frac{w}{2}} = 0,$$

was für gerades  $\frac{w}{2}$  den Koeffizienten  $a_{\frac{w}{2}}$  auf den Wert 0 festlegt und für ungerades  $\frac{w}{2}$  keine Einschränkung darstellt. Das erste Gleichheitszeichen in der Behauptung folgt nun sofort durch Abzählen. Die zweite Gleichheit erhalten wir mit

$$2 \cdot \lfloor \frac{w+2}{4} \rfloor = 2 \cdot \lfloor \frac{\frac{w}{2}+1}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{w}{2} + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \text{ ungerade,} \\ \frac{w}{2} & \text{für } \frac{w}{2} \text{ gerade.} \end{cases}$$

#

Schließlich gilt noch

$$\dim_{\mathbb{R}} F = w + 1 - \begin{cases} \lfloor \frac{w}{3} \rfloor + 1 & \text{für } w \equiv 0, 2 \pmod{3}, \\ \lfloor \frac{w}{3} \rfloor & \text{für } w \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} = w - 2 \cdot \lfloor \frac{w}{6} \rfloor, \quad (5.24)$$

denn: Nach der **Dimensionsformel für lineare Abbildungen** gilt

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} F &= \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_w(\mathbb{R}) - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))) \\ &= w + 1 - \dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))). \end{aligned} \quad (5.25)$$





Offensichtlich wird  $\text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST))$  von den Eigenvektoren zum Eigenwert 1 aufgespannt. Nach Lemma 5.25 ist die Dimension des Kerns daher durch die Anzahl

$$\begin{aligned}
 & \#\{j \in \{0, \dots, w\} \mid q^{w-j}\bar{q}^j = 1\} \\
 \stackrel{q\bar{q}=1}{=} & \#\{j \in \{0, \dots, w\} \mid q^{w-2j} = 1\} \\
 \stackrel{\text{ord}(q)=3}{=} & \#\{j \in \{0, \dots, w\} \mid w \equiv 2j \pmod{3}\} \\
 = & \#\{j \in \{0, \dots, w\} \mid j \equiv 2w \pmod{3}\} \\
 = & \begin{cases} \#\{0, 3, \dots, w\} & \text{für } w \equiv 0 \pmod{3}, \\ \#\{1, 4, \dots, w-1\} & \text{für } w \equiv 2 \pmod{3}, \\ \#\{2, 5, \dots, w-2\} & \text{für } w \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

gegeben. Das erste Gleichheitszeichen der Behauptung folgt nun sofort durch Abzählen und Einsetzen in (5.25). Die zweite Gleichheit erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \left\lfloor \frac{w}{6} \right\rfloor + 1 &= 2 \cdot \left\lfloor \frac{w}{3} \right\rfloor + 1 = \begin{cases} 2 \cdot \left\lfloor \frac{w}{3} \right\rfloor + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 0 \pmod{3}, \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{w-1}{3} \right\rfloor + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2 \cdot \left\lfloor \frac{w-2}{3} \right\rfloor + 1 & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{w+3}{3} & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{w+1}{3} & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 1 \pmod{3}, \\ \frac{w-1}{3} & \text{für } \frac{w}{2} \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \left\lfloor \frac{w}{3} \right\rfloor + 1 & \text{für } w \equiv 0 \pmod{3}, \\ \left\lfloor \frac{w}{3} \right\rfloor + 1 & \text{für } w \equiv 2 \pmod{3}, \\ \left\lfloor \frac{w}{3} \right\rfloor & \text{für } w \equiv 1 \pmod{3}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

#

Wir zeigen nun die Proposition und führen dazu die bisher gezeigten Resultate zusammen:

$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U &\stackrel{(5.16), (5.17)}{=} (\dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - \dim_{\mathbb{R}}(E + F)) - 1 \\
 &\stackrel{(5.19)}{=} \dim_{\mathbb{R}} E + \dim_{\mathbb{R}} F - w - 2 \\
 &\stackrel{(5.22), (5.24)}{=} 2 \cdot \left\lfloor \frac{w+2}{4} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{w}{6} \right\rfloor - 2
 \end{aligned}$$

Berechnen wir diesen Ausdruck und führen eine Fallunterscheidung bezüglich  $w \pmod{12}$  durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U &= 2 \cdot \begin{cases} \left\lfloor \frac{w+2}{12} \right\rfloor - 1 & \text{für } w \equiv 0 \pmod{12}, \\ \left\lfloor \frac{w+2}{12} \right\rfloor & \text{für } w \not\equiv 0 \pmod{12} \end{cases} \\
 &\stackrel{3.10}{=} 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}} S_k \\
 &= \dim_{\mathbb{R}} S_k.
 \end{aligned}$$

□

Insgesamt haben wir in diesem Abschnitt den folgenden Satz gezeigt:

**Satz 5.26.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade und sei  $k := w + 2$ . Dann induziert die Periodenabbildung  $r$  einen  $\mathbb{R}$ -Isomorphismus  $\tilde{r} : S_k \rightarrow V/U$ , den **Eichler-Shimura-Isomorphismus**.

## 5.4 Übungsaufgaben

**Aufgabe 5.1.** In dieser Aufgabe wollen wir die Polynomdarstellung von  $GL_2(\mathbb{R})$  auf  $\mathbb{P}_w(\mathbb{R})$  in einen allgemeineren Kontext stellen. Hierfür betreiben wir zunächst ein wenig multilineare Algebra:

Ist  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl und  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$  mit Basis  $\{b_1, \dots, b_n\}$ , so ist

- $T^w(V) := \langle b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_w} \mid i_1, \dots, i_w \in \{1, \dots, n\} \rangle_{\mathbb{R}}$  für  $w \in \mathbb{N}$   
das **w-fache Tensorprodukt** von  $V$ .
- $T(V) := \bigoplus_{w=1}^{\infty} T^w(V)$  mit der durch
 
$$\begin{cases} T^w(V) \times T^v(V) & \rightarrow T^{w+v}(V), \\ (b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_w}, b_{j_1} \otimes \dots \otimes b_{j_v}) & \mapsto b_{i_1} \otimes \dots \otimes b_{i_w} \otimes b_{j_1} \otimes \dots \otimes b_{j_v} \end{cases} \quad \text{für alle } w, v \in \mathbb{N}$$
 definierten Multiplikation die **Tensoralgebra** von  $V$ .
- $\text{Sym}(V) := T(V)/I(V)$  mit dem homogenen Ideal  $I(V) := \langle v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V \rangle_K$   
die **symmetrische Algebra** von  $V$ ; für das Produkt von zwei Elementen  $v, w \in \text{Sym}(V)$  schreiben wir  $v \cdot w$ .
- $\text{Sym}^w(V)$ , das Bild von  $T^w(V)$  unter der Projektion auf  $\text{Sym}(V)$ ,  
die **w-te symmetrische Potenz** von  $V$ ; es gilt  $\text{Sym}(V) = \bigoplus_{w=1}^{\infty} \text{Sym}^w(V)$ .

Zeigen Sie nun für  $n, w \in \mathbb{N}$  die folgenden Aussagen:

(a)  $GL_n(\mathbb{R})$  operiert auf  $\text{Sym}^w(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) &\rightarrow GL(\text{Sym}^w(\mathbb{R}^n)), \\ M &\mapsto (v_1 \cdot \dots \cdot v_w \mapsto (Mv_1) \cdot \dots \cdot (Mv_w)). \end{aligned}$$

(b) Der Vektorraum  $\text{Sym}^w(\mathbb{R}^n)$  ist isomorph zum Untervektorraum  $\mathbb{P}_w^{(n)}(\mathbb{R})$  der homogenen Polynome vom Grad  $w$  in  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ .

**Aufgabe 5.2.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade und seien  $F, G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^{w+1}$  zwei  $C^\infty$ -Funktionen mit

$$\varphi_M^*(F(x, y)) = \pi(M) \cdot F(x, y), \quad \varphi_M^*(dG(x, y)) = \pi(M) \cdot dG(x, y) \quad \text{für alle } M \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\partial \mathcal{F}} [F \mid dG] = 0$$

gilt, wobei einfach und im positiven Sinne längs des Randes des Standardfundamentaltbereichs  $\mathcal{F}$  der Aktion von  $SL_2(\mathbb{Z})$  auf  $\mathbb{H}$  integriert werde.

**Hinweis:** Unterteilen Sie die Integrationskurve geschickt in Teilstücke und integrieren Sie einzeln längs derselben.

**Aufgabe 5.3.** Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade. Zeigen Sie, dass dann

$$\text{Bild}(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST)) = \text{Kern}(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(ST) + \mathbb{P}((ST)^2))$$

gilt.

**Aufgabe 5.4.** Sei  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$  gerade und sei  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k$  eine Spitzenform. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die DIRICHLET-Reihe<sup>51</sup>

$$L(f; s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)n^{-s}$$

konvergiert gleichmäßig absolut auf Kompakta in der durch  $\text{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$  gegebenen Halbebene und stellt dort eine holomorphe Funktion dar, die **Hecke-L-Funktion** von  $f$ .

**Hinweis:** Benutzen Sie Übungsaufgabe 3.1.

(b) Es gilt

$$\int_0^{\infty} f(z)z^s \, dz = i^{s+1}(2\pi)^{-s-1}\Gamma(s+1) \cdot L(f; s+1) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \text{Re}(s) > \frac{k}{2},$$

wobei  $\Gamma$  die in Übungsaufgabe 3.7 eingeführte Funktion bezeichne.

Wie für die Konvergenz des Periodenintegrals in Abschnitt 5.3 zeigt man, dass das Integral links auf ganz  $\mathbb{C}$  konvergiert, so dass wir eine holomorphe Fortsetzung von  $L(f; s)$  auf ganz  $\mathbb{C}$  gefunden haben.

---

<sup>51</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

## Manins Periodensatz

In Kapitel 5 haben wir zum Beweis der Wohldefiniertheit der Periodenabbildung sogenannte Periodenintegrale eingeführt. In diesem Kapitel untersuchen wir diese für normierte Hecke-Eigenformen genauer und stellen fest, dass es zwischen diesen interessante Relationen gibt. Erste Beispiele hierfür wurden 1957 von Eichler beschrieben und 1959 von Shimura ergänzt. Die entsprechenden Resultate stehen in engem Zusammenhang zum Eichler-Shimura-Isomorphismus 5.26 und finden sich bei uns in Abschnitt 6.1. Wir folgen hierbei und in Abschnitt 6.5 der 1973 erschienenen Ausarbeitung von MANIN,<sup>52</sup> der weitere Relationen entdeckte und mit dem Periodensatz einen Zusammenhang zwischen diesen Relationen und den Fourier-Koeffizienten der betreffenden Eigenform herleitete. Manins Beweis benutzt dabei Hecke-Theorie und die Theorie der Kettenbrüche. In Abschnitt 6.2 führen wir letztere grundlegend ein und leiten die für uns relevanten Resultate her.

### 6.1 Perioden von Spitzenformen

Seien  $w \in \mathbb{N}$  gerade,  $k := w + 2$  und  $f \in S_k$ . Wie in (5.9) schreiben wir dann für alle  $j \in \{0, \dots, w\}$

$$r_j(f) := \int_0^\infty f(z)z^j dz = i^{j+1} \int_0^\infty f(it)t^j dt.$$

für die *Periodenintegrale* – oder kürzer auch *Perioden* – von  $f$ . Diese erfüllen eine Reihe von Relationen, die wir in folgender Proposition zusammenfassen:

**Proposition 6.1.** *Seien  $w \in \mathbb{N}$  gerade,  $k := w + 2$  und  $f \in S_k$ . Für  $j \in \{0, \dots, w\}$  gelten dann die folgenden Aussagen:*

(a)  $r_j(f) + (-1)^j r_{w-j}(f) = 0,$

---

<sup>52</sup>Yuri Manin (\*1937)

$$(b) \quad r_j(f) + (-1)^j \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda \text{ gerade}}}^j \binom{j}{\lambda} r_{w-j+\lambda}(f) + (-1)^j \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda+j \text{ gerade}}}^{w-j} \binom{w-j}{\lambda} r_{\lambda}(f) = 0,$$

$$(c) \quad \sum_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \text{ ungerade}}}^j \binom{j}{\lambda} r_{w-j+\lambda}(f) + \sum_{\substack{\lambda=0 \\ \lambda+j \text{ ungerade}}}^{w-j} \binom{w-j}{\lambda} r_{\lambda}(f) = 0.$$

*Beweis.* Analog zu unseren Überlegungen im Beweis von Lemma 5.17 zeigt man

$$\begin{aligned} (I_{w+1} + \pi(S)) \cdot \int_0^\infty f(z) z^{(w)} dz &= 0, \\ (I_{w+1} + \pi(ST) + \pi((ST)^2)) \int_0^\infty f(z) z^{(w)} dz &= 0. \end{aligned}$$

Mit Proposition 5.9 lässt sich dies zu

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(z) z^{(w)} dz + \int_0^\infty \varphi_S^*(f(z) z^{(w)}) dz &= 0, \\ \int_0^\infty f(z) z^{(w)} dz + \int_0^\infty \varphi_{ST}^*(f(z) z^{(w)}) dz + \int_0^\infty \varphi_{(ST)^2}^*(f(z) z^{(w)}) dz &= 0 \end{aligned}$$

übersetzen. Mit zeilenweisem Auslesen und (5.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(z) (z^j + (-1)^j z^{w-j}) dz &= 0 && \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\}, \\ \int_0^\infty f(z) (z^j + z^{w-j} (z-1)^j + (-1)^j (z-1)^{w-j}) dz &= 0 && \text{für alle } j \in \{0, \dots, w\}. \end{aligned}$$

Die erste Zeile ergibt sofort Behauptung (a). Wenden wir auf die zweite Zeile den binomischen Lehrsatz an, so erhalten wir für alle  $j \in \{0, \dots, w\}$  die Identität

$$\int_0^\infty f(z) \left( z^j + \sum_{\lambda=0}^j \binom{j}{\lambda} (-1)^{j+\lambda} z^{w-j+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^{w-j} \binom{w-j}{\lambda} (-1)^\lambda z^\lambda \right) dz = 0. \quad (6.1)$$

Aus dieser folgen (b) und (c),

denn: Nach Korollar 4.35 hat  $S_k$  eine Basis aus normierten Hecke-Eigenformen und nach Korollar 4.32 haben diese reelle Fourier-Koeffizienten, liegen also in  $S_k^{\mathbb{R}}$ . Für jedes  $f \in S_k^{\mathbb{R}}$  ist  $f(it) \in \mathbb{R}$  für alle  $t \in \mathbb{R}_{>0}$ . Es folgt

$$r_j(f) = \int_0^\infty f(z) z^j dz = \int_0^\infty f(it) (it)^j i dt = i^{j+1} \int_0^\infty f(it) t^j dt,$$

so dass für  $f \in S_k^{\mathbb{R}}$  die Perioden  $r_{2j+1}(f)$  reell und die Perioden  $r_{2j}(f)$  imaginär sind. Die Behauptung folgt, wenn wir (6.1) in Real- und Imaginärteil aufspalten – zunächst für normierte Hecke-Eigenformen und nach linearer Kombination für beliebige Spitzenformen. #

□

Mit den Beobachtungen gegen Ende des Beweises von Proposition 6.1 lässt sich für reelle Spitzenformen  $f \in S_k^{\mathbb{R}}$  das Bild der Periodenabbildung  $r$  aus Definition 5.16 durch die Periodenintegrale darstellen. In der Notation von Abschnitt 5.3 gilt nämlich

$$\begin{aligned} r(f) &= \int_0^\infty \operatorname{Re}(f(z)z^{(w)} dz) = \int_0^\infty f(z)\operatorname{Re}(z^{(w)} dz) \\ &= {}^t(0, r_1(f), 0, \dots, r_{w-1}(f), 0) \in V, \end{aligned} \quad (6.2)$$

aber auch

$$\begin{aligned} r\left(\frac{1}{i} \cdot f\right) &= \int_0^\infty \operatorname{Re}\left(\frac{1}{i} f(z)z^{(w)} dz\right) = \int_0^\infty f(z)\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i} z^{(w)} dz\right) \\ &= \frac{1}{i} \cdot {}^t(r_0(f), 0, r_2(f), \dots, 0, r_w(f)) \in V, \end{aligned} \quad (6.3)$$

wobei wir für die jeweils zweite Gleichheitszeichen eine Parametrisierung des Integrals längs der imaginären Achse annehmen können. Dieser Zusammenhang ermöglicht es, den Raum  $S_k^{\mathbb{R}}$  vermöge des Eichler-Shimura-Isomorphismus 5.26 durch Periodenintegrale zu beschreiben. Bevor wir dies tun, führen wir noch etwas hilfreiche Notation ein:

**Definition 6.2.** Wir betrachten den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$$\mathbb{R}^{w+1} = \{ {}^t(r_0, r_1, \dots, r_w) \mid r_0, r_1, \dots, r_w \in \mathbb{R} \}$$

als Menge von angeordneten  $(w+1)$ -Tupeln und passend dazu

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{w+1,-} &:= \{ {}^t(r_1, r_3, \dots, r_{w-1}) \mid r_1, r_3, \dots, r_{w-1} \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^{\frac{w}{2}}, \\ \mathbb{R}^{w+1,+} &:= \{ {}^t(r_0, r_2, \dots, r_w) \mid r_0, r_2, \dots, r_w \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^{\frac{w+2}{2}}. \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen aus Proposition 6.1 sind dann Untervektorräume

$$V^- \subseteq \mathbb{R}^{w+1,-} \quad \text{und} \quad V^+ \subseteq \mathbb{R}^{w+1,+}$$

definiert, so dass

- $V^-$  alle Vektoren von  $\mathbb{R}^{w+1,-}$  enthält, die dort den Gleichungen (a) und (b) für ungerades  $j$  und den Gleichungen (c) für gerades  $j$  genügen,
- $V^+$  alle Vektoren von  $\mathbb{R}^{w+1,+}$  enthält, die dort den Gleichungen (a) und (b) für gerades  $j$  und den Gleichungen (c) für ungerades  $j$  genügen.

**Bemerkung 6.3.** Die in Definition 6.2 eingeführten Vektorräume  $V^+$  und  $V^-$  stehen über die kanonischen Einbettungen

$$\iota^\pm : \mathbb{R}^{w+1,\pm} \hookrightarrow \mathbb{R}^{w+1}$$

in enger Beziehung zu den Vektorräumen  $V$  und  $U$  aus Abschnitt 5.3. Es gelten die folgenden beiden Aussagen:

(a) Nach Konstruktion gilt

$$V = \iota^+(V^+) \oplus \iota^-(V^-).$$

(b) Da die Perioden  $r_0(f)$  und  $r_w(f)$  in allen Gleichungen in Proposition 6.1 die gleichen Koeffizienten haben, gilt

$$U \stackrel{(5.16)}{=} \langle {}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \iota^+(V^+).$$

Wir nutzen die Ambiguität der Notation für uns aus und schreiben ab sofort auch einfacher  ${}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \in V^+$ .

Wir erhalten nun die folgende Neuformulierung des Eichler-Shimura-Isomorphismus 5.26 für reelle Spitzenformen:

**Satz 6.4.** Die Abbildung

$$r^- : \begin{cases} S_k^{\mathbb{R}} & \rightarrow V^-, \\ f & \mapsto {}^t(r_1(f), \dots, r_{w-1}(f)) \end{cases}$$

ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraumisomorphismus und die Abbildung

$$r^+ : \begin{cases} S_k^{\mathbb{R}} & \rightarrow V^+, \\ f & \mapsto \frac{1}{i} \cdot {}^t(r_0(f), \dots, r_w(f)) \end{cases}$$

ist ein injektiver  $\mathbb{R}$ -Vektorraumhomomorphismus, dessen Bild eine Hyperebene in  $V^+$  ist, die den Vektor  ${}^t(1, 0, \dots, 0, -1)$  nicht enthält.

*Beweis.* Zunächst ist nach Proposition 6.1 und Definition 6.2 klar, dass  $r^-$  und  $r^+$  beide wohldefiniert sind und also tatsächlich Werte in  $V^-$  bzw.  $V^+$  annehmen.

Nach (6.2) bzw. (6.3) gilt

$$(\iota^- \circ r^-) = r|_{S_k^{\mathbb{R}}} \quad \text{bzw.} \quad (\iota^+ \circ r^+) = r|_{\frac{1}{i} \cdot S_k^{\mathbb{R}}}. \quad (6.4)$$

Es folgt die Injektivität von  $(\iota^- \circ r^-)$  und  $(\iota^+ \circ r^+)$  und somit auch die von  $r^-$  und  $r^+$ .

Nach Proposition 5.23 gilt zudem

$${}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \in V \setminus r(S_k)$$

und mit (6.4) insbesondere auch

$${}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \in V^+ \setminus r^+(S_k^{\mathbb{R}}).$$

Für den Rest des Beweises führen wir Dimensionsbetrachtungen zusammen, die wir schon früher angestellt haben: Aus der Injektivität von  $r^-$  und  $r^+$  sowie aus  ${}^t(1, 0, \dots, 0, -1) \notin r^+(S_k^{\mathbb{R}})$  folgen

$$\dim_{\mathbb{R}} S_k^{\mathbb{R}} \leq \dim_{\mathbb{R}} V^- \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{R}} S_k^{\mathbb{R}} \leq \dim_{\mathbb{R}} V^+ - 1.$$

Im Beweis von Proposition 6.1 haben wir eingesehen, dass  $S_k$  eine Basis aus Spitzenformen mit reellen Fourier-Koeffizienten hat. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 2 \dim_{\mathbb{R}} S_k^{\mathbb{R}} &= 2 \dim_{\mathbb{C}} S_k = \dim_{\mathbb{R}} S_k \\
 &\stackrel{5.24}{=} \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} U \\
 &\stackrel{(5.16)}{=} \dim_{\mathbb{R}} V - 1 \\
 &\stackrel{6.3(a)}{=} \dim_{\mathbb{R}} V^- + (\dim_{\mathbb{R}} V^+ - 1)
 \end{aligned}$$

und insgesamt der Satz. □

## 6.2 Kettenbrüche

Um in Abschnitt 6.3 für alle  $k, n \in \mathbb{N}$  die Perioden der Bilder von Spitzenformen  $f \in S_k^{\mathbb{R}}$  unter dem  $n$ -ten Hecke-Operator  $T_n$  untersuchen zu können, führen wir in diesem Abschnitt mit dem Begriff der Kettenbruchentwicklung reeller Zahlen zunächst ein Hilfsmittel ein. Diese kommt – im Gegensatz etwa zur Dezimalentwicklung – ohne Basiswahl aus und weist darüber hinaus zahlreiche weitere bemerkenswerte Eigenschaften auf:

**Definition 6.5.** Für  $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  mit  $a_1, \dots, a_m > 0$  setzen wir

$$[a_0, a_1, \dots, a_m] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_m}}}}$$

und nennen das Tupel  $((a_0, \dots, a_m), [a_0, \dots, a_m])$  einen **endlichen Kettenbruch** mit Wert  $[a_0, \dots, a_m]$ . Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge reeller Zahlen mit  $a_n > 0$  für  $n \in \mathbb{N}$  und existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, \dots, a_n]$ , dann setzen wir

$$[a_0, a_1, \dots] := \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, \dots, a_n]$$

und nennen das Tupel  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, [a_0, a_1, \dots])$  einen **unendlichen Kettenbruch** mit Wert  $[a_0, a_1, \dots]$ .

Unter einer **Kettenbruchdarstellung** einer reellen Zahl  $x$  verstehen wir einen Kettenbruch, dessen Wert durch  $x$  gegeben ist, also einen Kettenbruch der Form  $((a_0, \dots, a_m), x)$  oder  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, x)$ . Eine solche Kettenbruchdarstellung von  $x$  heißt eine **Kettenbruchentwicklung** von  $x$ , wenn  $a_0 \in \mathbb{Z}$  ist und  $a_n \in \mathbb{N}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sowie  $a_m \neq 1$ , falls die Kettenbruchdarstellung endlich ist.

**Bemerkung 6.6.** Die obige Definition des Wertes endlicher Kettenbrüche lässt sich auch induktiv formulieren: Es ist dann  $[a_0] := a_0$  sowie

$$[a_0, \dots, a_i, a_{i+1}] := [a_0, \dots, a_{i-1}, a_i + \frac{1}{a_{i+1}}] \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$



**Beispiel 6.7.** (a) Es ist

$$\frac{65}{27} = 2 + \frac{11}{27} = 2 + \frac{1}{\frac{27}{11}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{5}{11}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{11}{5}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{2}}}} = [2, 2, 2, 5]$$

und also  $((2, 2, 2, 5), \frac{65}{27})$  eine endliche Kettenbruchentwicklung von  $\frac{65}{27}$ .

(b) Falls der Grenzwert  $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{[1, 1, \dots, 1]}_{n\text{-mal}}$  existiert, dann gilt offensichtlich

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} = 1 + \frac{1}{\phi},$$

also  $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ . Die einzige positive Lösung dieser Gleichung ist  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , der **Goldene Schnitt**. Somit ist vorbehaltlich der Existenz des obigen Grenzwertes  $([1, 1, \dots], \phi)$  eine unendliche Kettenbruchentwicklung des Goldenen Schnittes.

Unser erstes Ziel ist es nun, zu zeigen, dass jede reelle Zahl eine eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklung hat. Hierzu betrachten wir den folgenden Algorithmus:

**Algorithmus 6.8** (Kettenbruchalgorithmus). Es soll die Kettenbruchentwicklung von  $x \in \mathbb{R}$  bestimmt werden.

- ⟨1⟩  $a_0 := \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ ,  $t_0 := x - a_0 \in [0, 1)$  und  $m := 0$ .
- ⟨2⟩ Solange  $t_m \neq 0$  ist, wiederhole ⟨3⟩ – ⟨6⟩:
- ⟨3⟩  $\xi_m := \frac{1}{t_m}$
- ⟨4⟩  $a_{m+1} := \lfloor \xi_m \rfloor \in \mathbb{N}$
- ⟨5⟩  $t_{m+1} := \xi_m - a_{m+1} \in [0, 1)$
- ⟨6⟩  $m := m + 1$

Falls die Schleife ⟨2⟩ – ⟨6⟩ terminiert, falls also nach endlich vielen Schritten  $t_m = 0$  erreicht wird, so ist  $((a_0, \dots, a_m), x)$  die Kettenbruchentwicklung von  $x$ . Falls die Schleife nicht terminiert, so ist  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, x)$  die Kettenbruchentwicklung von  $x$ .

Wir werden im Laufe dieses Abschnittes sehen, dass der Kettenbruchalgorithmus ein korrektes Ergebnis liefert, indem wir den folgenden Satz zeigen:

**Satz 6.9.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- (a) Die Zahl  $x$  besitzt eine eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklung. Diese wird durch den Kettenbruchalgorithmus 6.8 geliefert.
- (b) Die Kettenbruchentwicklung von  $x$  ist genau dann endlich, wenn  $x$  rational ist.

Ist die Kettenbruchentwicklung von  $x$  durch  $((a_0, \dots, a_m), x)$  bzw.  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, x)$  gegeben, dann heißen rationalen Zahlen  $[a_0, \dots, a_n]$  mit  $n \in \mathbb{N}_0$  – und  $n \leq m$  für  $x \in \mathbb{Q}$  – die **Näherungsbrüche** von  $x$ .

Wir werden Satz 6.9 im weiteren Verlauf dieses Abschnitts beweisen und leiten uns dafür zunächst einige Hilfsresultate her. Zuerst betrachten wir jedoch ein Beispiel zur Anwendung des Kettenbruchalgorithmus 6.8 auf rationale Zahlen:

**Beispiel 6.10.** Wie in Beispiel 6.7 (a) gesehen gilt

$$\frac{65}{27} = 2 + \frac{11}{27} = 2 + \frac{1}{\frac{27}{11}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{5}{11}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{11}{5}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}} = [2, 2, 2, 5].$$

Mit den Bezeichnungen aus dem Kettenbruchalgorithmus 6.8 stellt sich diese Rechnung wie folgt dar:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2, & t_0 &= \frac{11}{27}, & \xi_0 &= \frac{27}{11}, \\ a_1 &= 2, & t_1 &= \frac{5}{11}, & \xi_1 &= \frac{11}{5}, \\ a_2 &= 2, & t_2 &= \frac{1}{5}, & \xi_2 &= 5, \\ a_3 &= 5, & t_3 &= 0. \end{aligned}$$

**Lemma 6.11.** Mit den Notationen aus dem Kettenbruchalgorithmus 6.8 gilt für ein beliebiges  $x \in \mathbb{R}$ :

(a) Ist  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $t_m \neq 0$ , dann ist  $x = [a_0, \dots, a_m, \xi_m]$ .

(b) Ist  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $t_m = 0$ , dann ist  $x = [a_0, \dots, a_m]$ . Im Falle  $m \geq 1$  ist dabei  $a_m > 1$ .

Es folgt, dass der Kettenbruchalgorithmus, falls er nach endlich vielen Schritten terminiert, eine endliche Kettenbruchentwicklung von  $x$  von der Form  $((a_0, \dots, a_m), x)$  ausgibt.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a) per Induktion nach  $m$  und setzen dafür  $m = 0$  und  $t_0 \neq 0$ . Dann ist

$$\xi_0 = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{x - a_0}$$

und deshalb

$$x = a_0 + \frac{1}{\xi_0} = [a_0, \xi_0].$$

Das zeigt den Induktionsanfang. Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, wir hätten bereits  $x = [a_0, \dots, a_m, \xi_m]$  für ein  $m \in \mathbb{N}_0$  gezeigt und es gelte  $t_{m+1} \neq 0$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} x &= [a_0, \dots, a_m, \xi_m] = [a_0, \dots, a_m, a_{m+1} + t_{m+1}] = [a_0, \dots, a_m, a_{m+1} + \frac{1}{\xi_{m+1}}] \\ &= [a_0, \dots, a_m, a_{m+1}, \xi_{m+1}] \end{aligned}$$

und somit Behauptung (a).

Wir zeigen nun Behauptung (b). Ist hierbei einerseits  $t_0 = 0$ , so gilt offenbar  $x = [a_0]$ . Ist andererseits  $m \geq 1$  mit  $t_m = 0$ , so ist  $t_{m-1} \neq 0$ , weshalb sich aus Aussage (a) unmittelbar  $x = [a_0, \dots, a_{m-1}, \xi_{m-1}]$  ergibt. Mit  $0 = t_m = \xi_{m-1} - a_m$  folgt  $x = [a_0, \dots, a_m]$ . In diesem Fall ist  $a_m = \xi_{m-1} = \frac{1}{t_{m-1}} > 1$  wegen  $t_{m-1} \in (0, 1)$ .  $\square$

**Lemma 6.12.** Für ein beliebiges  $x \in \mathbb{R}$  sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) Der Kettenbruchalgorithmus 6.8 terminiert bei Eingabe von  $x$  nach endlich vielen Schritten.
- (ii)  $x \in \mathbb{Q}$ .

Insbesondere gibt der Kettenbruchalgorithmus bei Eingabe einer rationalen Zahl eine endliche Kettenbruchentwicklung derselben aus.

*Beweis.* Nehmen wir zunächst (i) an, der Kettenbruchalgorithmus 6.8 terminiere nach Eingabe von  $x$  also nach endlich vielen Schritten. Ist in der dortigen Notation  $t_0 = 0$ , so gilt  $x = [a_0] \in \mathbb{Z}$ . Ist andernfalls  $m \in \mathbb{N}_0$  maximal mit  $t_m \neq 0$ , so folgt mit Lemma 6.11

$$x = [a_0, \dots, a_m, \xi_m] = [a_0, \dots, a_m, a_{m+1}]$$

mit  $a_0 \in \mathbb{Z}$  sowie  $a_1, \dots, a_{m+1} \in \mathbb{N}$  und wir erhalten damit  $x \in \mathbb{Q}$ , also Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt Aussage (ii), sei also  $x \in \mathbb{Q}$ , etwa  $x = \frac{p}{q}$  mit  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ . Da für  $x = 0$  nichts zu zeigen ist, können wir im Folgenden ohne Einschränkung  $x \neq 0$  annehmen. Wir setzen  $r_0 := p$  sowie  $r_1 := q$  und führen den Euklidischen Algorithmus aus:

$$\begin{aligned} r_0 &= a'_0 r_1 + r_2 && \text{mit } a'_0 \in \mathbb{Z} && \text{und } 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= a'_1 r_2 + r_3 && \text{mit } a'_1 \in \mathbb{N} && \text{und } 0 < r_3 < r_2, \\ &\vdots && && \\ r_i &= a'_i r_{i+1} + r_{i+2} && \text{mit } a'_i \in \mathbb{N} && \text{und } 0 < r_{i+2} < r_{i+1}, \\ &\vdots && && \\ r_{m-1} &= a'_{m-1} r_m + r_{m+1} && \text{mit } a'_{m-1} \in \mathbb{N} && \text{und } 0 < r_{m+1} < r_m, \\ r_m &= a'_m r_{m+1} && \text{mit } a'_m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{r_i}{r_{i+1}} &= a'_i + \frac{r_{i+2}}{r_{i+1}} && \text{mit } \frac{r_{i+2}}{r_{i+1}} \in (0, 1) \text{ für alle } i \in \{0, \dots, m-1\}, \\ \frac{r_m}{r_{m+1}} &= a'_m. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$t'_i := \frac{r_{i+2}}{r_{i+1}} \quad \text{für } i \in \{-1, \dots, m-1\} \quad \text{sowie} \quad t'_m := 0,$$

und erhalten

$$\frac{1}{t'_{i-1}} = a'_i + t'_i \quad \text{für } i \in \{0, \dots, m\},$$

wobei  $t'_i \in (0, 1)$  für  $i = 0, \dots, m-1$  ist. Wir vergleichen dies mit den Formeln aus dem Kettenbruchalgorithmus 6.8: Es bezeichne  $((a_i)_{i \in I}, x)$  das Resultat des Kettenbruchalgorithmus bei Eingabe von  $x$ , wobei  $I = \{0, \dots, n\}$  sei, falls der Algorithmus nach  $n \in \mathbb{N}_0$  Schritten abbricht, und  $I = \mathbb{N}_0$  sonst. Die Folge  $(t_i)_{i \in I}$  sei wie im Kettenbruchalgorithmus definiert. Wir zeigen induktiv  $a_i = a'_i$  und  $t_i = t'_i$  für  $i \in \{0, \dots, m\}$ . Insbesondere ist dann  $t_m = t'_m = 0$ , so dass der Kettenbruchalgorithmus nach endlich vielen Schritten abbricht. Sei zunächst  $i = 0$ . Dann ist

$$a_0 = \lfloor x \rfloor = \lfloor \frac{r_0}{r_1} \rfloor = \lfloor \frac{1}{t'_{-1}} \rfloor = a'_0$$

und

$$t_0 = x - a_0 = \frac{1}{t'_{-1}} - a'_0 = t'_0.$$

Sei nun  $0 < i \leq m$ . Aus der Induktionsvoraussetzung ergibt sich  $t_{i-1} = t'_{i-1} \neq 0$  und deshalb

$$a_i = \lfloor \frac{1}{t_{i-1}} \rfloor = \lfloor \frac{1}{t'_{i-1}} \rfloor = a'_i$$

sowie

$$t_i = \frac{1}{t_{i-1}} - a_i = \frac{1}{t'_{i-1}} - a'_i = t'_i.$$

□

Der Beweis hat gezeigt, dass man den Kettenbruchalgorithmus 6.8 für rationale Zahlen als Variante des Euklidischen Algorithmus ansehen kann.

**Beispiel 6.13.** Der Vergleich zwischen Euklidischem Algorithmus und Kettenbruchalgorithmus 6.8 sieht in Beispiel 6.7 (a) wie folgt aus:

$$\begin{array}{ll} 65 = 2 \cdot 27 + 11 & \implies \frac{65}{27} = 2 + \frac{11}{27} \\ 27 = 2 \cdot 11 + 5 & \implies \frac{27}{11} = 2 + \frac{5}{11} \\ 11 = 2 \cdot 5 + 1 & \implies \frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5} \\ 5 = 5 \cdot 1 + 0 & \implies \frac{5}{1} = 5 + 0. \end{array}$$

Als Kettenbruchentwicklung von  $\frac{65}{27}$  ergibt sich wie gehabt  $((2, 2, 2, 5), \frac{65}{27})$ .

Das nächste Lemma zeigt insbesondere, dass es für jede rationale Zahl  $x$  genau eine endliche Kettenbruchentwicklung gibt:

**Lemma 6.14.** Es seien  $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$  sowie  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{N}$  mit  $a_n, b_m \neq 1$  und

$$[a_0, \dots, a_n] = [b_0, \dots, b_m].$$

Dann gilt:  $n = m$  und  $a_i = b_i$  für alle  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

*Beweis.* Ohne Einschränkung gelte  $n \leq m$ . Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach  $n$ . Sei zunächst  $n = 0$ . Wäre dann  $m \geq 1$ , so hätten wir

$$a_0 = b_0 + \frac{1}{[b_1, \dots, b_m]}, \quad (6.5)$$

wobei aufgrund von  $b_m \neq 1$  die Ungleichung

$$0 < \frac{1}{[b_1, \dots, b_m]} < 1$$

gälte. Folglich wäre die linke Seite von (6.5) eine ganze Zahl, die rechte Seite dagegen nicht. Da dies nicht sein kann, folgt aus  $n = 0$  auch  $m = 0$  und weiter  $a_0 = [a_0] = [b_0] = b_0$ .

Im Folgenden seien  $n \geq 1$  und

$$x = [a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]} = b_0 + \frac{1}{[b_1, \dots, b_m]} = [b_0, \dots, b_m].$$

Hierbei ist zu beachten, dass mit demselben Argument wie im Fall  $n = 0$  aus  $n \geq 1$  auch  $m \geq 1$  folgt. Mit  $a_n \neq 1$  und  $b_m \neq 1$  erhalten wir

$$0 < \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]} < 1 \quad \text{sowie} \quad 0 < \frac{1}{[b_1, \dots, b_m]} < 1,$$

und deshalb  $a_0 = \lfloor x \rfloor = b_0$  und schließlich  $[a_1, \dots, a_n] = [b_1, \dots, b_m]$ . Aus der Induktionsannahme folgern wir  $n = m$  und  $a_i = b_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ .  $\square$

Lässt man in Lemma 6.14 die Voraussetzung  $a_n, b_m \neq 1$  weg, gilt die Eindeutigkeitsaussage nicht mehr:

$$[a_0, \dots, a_{n-1}, a_n] = \begin{cases} [a_0, \dots, a_{n-1}, 1] & \text{für } a_n > 1 \text{ oder } n = 0, \\ [a_0, \dots, a_{n-1} + 1] & \text{für } a_n = 1 \text{ und } n \geq 1. \end{cases}$$

Im Folgenden werden wir uns mit der Kettenbruchentwicklung irrationaler Zahlen beschäftigen. Das nächste Lemma hat einen sehr technischen Charakter, wird sich aber im weiteren Verlauf des Abschnitts als nützlich herausstellen und vielfache Anwendung finden:

**Lemma 6.15.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge ganzer Zahlen mit  $a_n \geq 1$  für  $n \geq 1$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} p_{-2} &:= 0, & p_{-1} &:= 1, & p_n &:= a_n p_{n-1} + p_{n-2} & \text{für alle } n \geq 0 & \quad (\text{insb. } p_0 = a_0), \\ q_{-2} &:= 1, & q_{-1} &:= 0, & q_n &:= a_n q_{n-1} + q_{n-2} & \text{für alle } n \geq 0 & \quad (\text{insb. } q_0 = 1), \end{aligned}$$

oder alternativ in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} p_{-1} & p_{-2} \\ q_{-1} & q_{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } n \geq 0.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (a)  $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- (b)  $[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- (c)  $[a_0, \dots, a_n, \xi] = \frac{\xi p_n + p_{n-1}}{\xi q_n + q_{n-1}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0, \xi \in \mathbb{R}_{>0}$ .
- (d)  $q_{n+1} > q_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , insbes.  $q_n \geq n$ .
- (e)  $q_1 \geq q_0$  mit Gleichheit genau für  $a_1 = 1$ .
- (f)  $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- (g)  $p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .
- (h)  $\text{ggT}(p_n, q_n) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis.* Behauptung (a) folgt unmittelbar aus der Rekursionsformel in Matrixschreibweise.

Wir zeigen nun Behauptung (c) per Induktion nach  $n$ . Im Fall  $n = 0$  ist

$$[a_0, \xi] = a_0 + \frac{1}{\xi} = \frac{\xi a_0 + 1}{\xi} = \frac{\xi p_0 + p_{-1}}{\xi q_0 + q_{-1}}.$$

Sei also  $n \geq 1$ . Nach Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\begin{aligned} [a_0, \dots, a_n, \xi] &= [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{\xi}] = \frac{(a_n + \frac{1}{\xi})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{\xi})q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{(a_n \xi + 1)p_{n-1} + \xi p_{n-2}}{(a_n \xi + 1)q_{n-1} + \xi q_{n-2}} = \frac{\xi(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{\xi(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{\xi p_n + p_{n-1}}{\xi q_n + q_{n-1}}. \end{aligned}$$

Für ein beliebiges  $n \in \mathbb{N}_0$  folgt hieraus sofort

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Das ist Behauptung (b).

Zum Beweis der Behauptungen (d) und (e) stellen wir zunächst

$$q_0 = 1, q_1 = a_1 q_0 = a_1 \geq 1 \quad \text{und} \quad q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1}$$

fest. Induktiv ergibt sich  $q_{n+1} > q_n \geq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir zeigen nun Behauptung (f):

$$\begin{aligned} p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= \det \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \det \left( \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \det \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$\begin{aligned} p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2} (a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\ &= a_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \stackrel{(f)}{=} (-1)^n a_n \end{aligned}$$

und somit Behauptung (g).

Abschließend beweisen wir Behauptung (h). Ist  $d \in \mathbb{Z}$  mit  $d \mid p_n$  und  $d \mid q_n$ , so folgt

$$d \mid (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n) = (-1)^n$$

und also  $d = \pm 1$ . Das impliziert  $\text{ggT}(p_n, q_n) = 1$ . □

**Lemma 6.16.** Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge ganzer Zahlen mit  $a_n \geq 1$  für  $n \geq 1$ . In der Notation von Lemma 6.15 gilt dann:

- (a) Die Brüche  $[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$  bilden eine konvergente Folge.
- (b) Die Teilfolge  $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  bzw.  $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  ist streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend. Insbesondere gilt:

$$a_0 = \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots < x < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1} \quad \text{mit } x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots].$$

- (c) Die Zahl  $[a_0, a_1, \dots]$  ist irrational.

Ist  $x = [a_0, \dots, a_m] \in \mathbb{Q}$ , und sind  $\frac{p_0}{q_0}, \dots, \frac{p_m}{q_m}$  die zugehörigen Näherungsbrüche, so gilt Aussage (b) entsprechend mit  $\dots \leq x \leq \dots$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a). Nach Lemma 6.15 gilt

$$\frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \frac{p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i}{q_i q_{i-1}} = \frac{(-1)^{i+1}}{q_i q_{i-1}} \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

und somit

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_0}{q_0} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{p_i}{q_i} - \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \right) = a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{q_i q_{i-1}}.$$

Die Folge  $(\frac{1}{q_i q_{i-1}})_{i \in \mathbb{N}}$  ist nach Lemma 6.15 (d),(e) eine streng monoton fallende Nullfolge, so dass mit dem Leibniz-Kriterium die Reihe auf der rechten Seite konvergiert. Es folgt die Konvergenz von  $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$  und somit Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) stellen wir zunächst fest: Nach Teil (g) von Lemma 6.15 gilt

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}} = (-1)^n \frac{a_n}{q_n q_{n-2}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen  $a_n, q_n, q_{n-2} \geq 1$  folgt daraus für alle  $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &> \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} && \text{für gerades } n, \\ \frac{p_n}{q_n} &< \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} && \text{für ungerades } n \end{aligned}$$

und somit Behauptung (b).

Abschließend zeigen wir Behauptung (c) und nehmen dafür an,  $x = [a_0, a_1, \dots]$  wäre rational. Nach Lemma 6.12 lieferte der Kettenbruchalgorithmus 6.8 in diesem Fall eine endliche Kettenbruchentwicklung  $((b_0, \dots, b_m), x)$  von  $x$ . Diese erfüllte  $b_k = a_k$  für  $k \in \{0, \dots, m\}$ ,

denn: Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach  $k$ . Zunächst gälte  $a_0 = \lfloor x \rfloor = b_0$ . Nehmen wir nun an, es wäre für ein  $k \in \{0, \dots, m\}$  bereits  $[a_0, a_1, \dots] = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, b_k, \dots, b_m]$  gezeigt. Wir setzen  $\xi_{k-1} := [a_k, a_{k+1}, \dots]$ . Das ist aufgrund von Aussage (a) wohldefiniert und es gälte

$$[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \xi_{k-1}] = [a_0, a_1, \dots] = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, b_k, \dots, b_m].$$

Durch Termumformung ergäbe sich  $\xi_{k-1} = [b_k, \dots, b_m]$ , was  $a_k = \lfloor \xi_{k-1} \rfloor = b_k$  zur Folge hätte und die Induktion beendete. #

Mit  $\xi_m = [a_{m+1}, a_{m+2}, \dots]$  erhielten wir  $[a_0, \dots, a_m] = [a_0, \dots, a_m, \xi_m]$ , was nicht sein kann. □

**Beispiel 6.17.** Sei  $a_n = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  wie in Beispiel 6.7 (b). Dann folgt

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{und} \quad q_n = q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

und insbesondere  $p_0 = 1, p_1 = 2, q_0 = 1$  sowie  $q_1 = 1$ . Bezeichnet  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Folge der **FIBONACCI-Zahlen**,<sup>53</sup> dann ergibt sich daraus

$$p_n = F_{n+1} \quad \text{und} \quad q_n = F_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Folge  $\frac{p_n}{q_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n}$  ist nach Teil (a) von Lemma 6.16 konvergent und aus der Überlegung in Beispiel 6.7 erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = [1, 1, \dots] = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

<sup>53</sup>Leonardo da Pisa, genannt Fibonacci (1170-1240)



Aus Lemma 6.16 folgt insbesondere, dass die Folge der Näherungsbrüche, die man über den Kettenbruchalgorithmus 6.8 zu einer irrationalen Zahl  $x$  bestimmt, konvergiert. Im nächsten Lemma zeigen wir, dass der Grenzwert durch  $x$  selbst gegeben ist:

**Lemma 6.18.** Seien  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $((a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, x)$  die Ausgabe des Kettenbruchalgorithmus 6.8 bei Eingabe von  $x$  und  $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Folge der Näherungsbrüche wie in Lemma 6.15. Dann konvergiert die Folge der Näherungsbrüche  $[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$  gegen  $x$ , es ist also  $x = [a_0, a_1, \dots]$ , und es gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &< \frac{1}{q_n q_{n+1}} && \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \\ \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &< \frac{1}{n(n+1)} && \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \\ \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &> \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} && \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Insgesamt liefert der Kettenbruchalgorithmus 6.8 eine unendliche Kettenbruchentwicklung von  $x$  als Ergebnis.

*Beweis.* Die Folge  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  sei wie im Kettenbruchalgorithmus 6.8 definiert. Nach den Lemmata 6.11 und 6.15 (c) gilt dann

$$x = [a_0, \dots, a_n, \xi_n] = \frac{\xi_n p_n + p_{n-1}}{\xi_n q_n + q_{n-1}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

und deshalb

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{(\xi_n p_n + p_{n-1})q_n - p_n(\xi_n q_n + q_{n-1})}{q_n(\xi_n q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(\xi_n q_n + q_{n-1})} \\ &\stackrel{6.15(f)}{=} \frac{(-1)^n}{q_n(\xi_n q_n + q_{n-1})}. \end{aligned}$$

Da der Kettenbruchalgorithmus 6.8 andernfalls an dieser Stelle terminierte, gilt  $a_{n+1} = \lfloor \xi_n \rfloor < \xi_n$  und somit

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(\xi_n q_n + q_{n-1})} < \frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Das zeigt die erste Abschätzung des Lemmas. Nach Teil (d) von Lemma 6.15 gilt  $q_n \geq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , was

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

und also die zweite Abschätzung des Lemmas zur Folge hat. Hieraus folgt offensichtlich auch die Konvergenz der Folge  $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$  der Näherungsbrüche gegen  $x$ .

Es verbleibt die letzte Abschätzung zu zeigen. Wegen  $\xi_n < \lfloor \xi_n \rfloor + 1 = a_{n+1} + 1$  ist

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \frac{1}{q_n(\xi_n q_n + q_{n-1})} > \frac{1}{q_n((a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1} + q_n)} \\ &= \frac{1}{q_n(q_{n+1} + q_n)}. \end{aligned}$$

□

**Lemma 6.19.** Sei  $x = [a_0, \dots, a_m] \in \mathbb{Q}$  und seien  $\frac{p_0}{q_0}, \dots, \frac{p_m}{q_m}$  die zugehörigen Näherungsbrüche. Dann gelten:

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &\leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} && \text{für alle } n \in \{0, \dots, m\}, \\ \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| &> \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} && \text{für alle } n \in \{0, \dots, m\}, \end{aligned}$$

wobei bei der ersten Ungleichung Gleichheit nur im Fall  $n = m - 1$  auftritt.

*Beweis.* Das zeigt man komplett analog zum Beweis von Lemma 6.18. □

Zum Beweis von Satz 6.9 verbleibt zu zeigen, dass jede reelle Zahl eine eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklung besitzt. In Verbindung mit den Lemmata 6.14 und 6.16 (c) genügt dafür das folgende Lemma:

**Lemma 6.20.** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  Folgen ganzer Zahlen mit  $a_n, b_n \geq 1$  für  $n \geq 1$ . Dann gilt:

$$[a_0, a_1, \dots] = [b_0, b_1, \dots] \implies a_n = b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach  $n$  und schreiben dafür  $x := [a_0, a_1, \dots] = [b_0, b_1, \dots]$ . Es folgt nun unmittelbar  $a_0 = \lfloor x \rfloor = b_0$  und somit der Induktionsanfang. Sei nun bereits  $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$  gezeigt. Mit  $\xi := [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$  und  $\xi' := [b_{n+1}, b_{n+2}, \dots]$  ergibt sich dann

$$[a_0, \dots, a_n, \xi] = [b_0, \dots, b_n, \xi'] = [a_0, \dots, a_n, \xi']$$

und also  $\xi = \xi'$ . So erhalten wir  $a_{n+1} = \lfloor \xi \rfloor = \lfloor \xi' \rfloor = b_{n+1}$  und iterativ das Lemma. □

### 6.3 Perioden und Hecke-Operatoren

Seien  $w, n \in \mathbb{N}$  gerade,  $k := w + 2$  und  $f \in S_k$ . In diesem Abschnitt untersuchen wir die Perioden

$$r_J(f|_k T_n) \quad \text{für alle } J \in \{0, \dots, w\} \quad (6.6)$$

des Bildes von  $f$  unter dem  $n$ -ten Hecke-Operator  $T_n$  und zeigen, dass sich diese als ganzzahlige Linearkombination der Perioden  $r_j(f)$  mit  $j \in \{0, \dots, w\}$  schreiben lassen. Als Vorarbeit hierzu beginnen wir mit einer ersten Anwendung der in Abschnitt 6.2 eingeführten Kettenbrüche auf Periodenintegrale:

**Proposition 6.21.** *Seien  $w \in \mathbb{N}$  gerade,  $k := w + 2$  und  $f \in S_k$ . Für alle  $q \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  mit  $|p| < q$  und  $j \in \{0, \dots, w\}$  lassen sich dann die Integrale*

$$\int_0^{\frac{p}{q}} f(z) z^j dz$$

als  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination der Perioden von  $f$  schreiben. Die Koeffizienten dieser Linearkombination sind dabei unabhängig von der Wahl von  $f$ .

*Beweis.* Ohne Einschränkung können wir  $\text{ggT}(p, q) = 1$  annehmen. Für  $0 < p < q$  hat dann  $\frac{p}{q}$  eine Kettenbruchentwicklung der Form

$$\left( (0, a_1, \dots, a_m), \frac{p}{q} \right) \quad \text{mit einem } m \in \mathbb{N}.$$

Sind nun  $\frac{p_0}{q_0}, \dots, \frac{p_m}{q_m}$  die Näherungsbrüche von  $\frac{p}{q}$ , so liegen für ein beliebiges  $i \in \{1, \dots, m\}$  die Matrizen

$$M_i := \begin{pmatrix} p_i & (-1)^{i-1} p_{i-1} \\ q_i & (-1)^{i-1} q_{i-1} \end{pmatrix} \stackrel{6.15(a)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^{i-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{M}_i := \begin{pmatrix} (-1)^i p_{i-1} & -p_i \\ (-1)^{i-1} q_{i-1} & q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

offensichtlich in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  und erfüllen

$$M_i \langle 0 \rangle = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}, \quad M_i \langle \infty \rangle = \frac{p_i}{q_i} \quad \text{sowie} \quad \tilde{M}_i \langle 0 \rangle = -\frac{p_i}{q_i}, \quad \tilde{M}_i \langle \infty \rangle = -\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}.$$

Mit  $\frac{p_0}{q_0} = 0$  und  $\frac{p_m}{q_m} = \frac{p}{q}$  folgt sofort

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{p}{q}} f(z) z^j dz &\stackrel{5.15}{=} \sum_{i=1}^m \int_{\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}}^{\frac{p_i}{q_i}} f(z) z^j dz = \sum_{i=1}^m \int_{M_i \langle 0 \rangle}^{M_i \langle \infty \rangle} f(z) z^j dz \\ &= \sum_{i=1}^m \int_0^\infty \varphi_{\tilde{M}_i}^*(f(z) z^j dz) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^m \int_0^\infty f(z) \mathbb{P}^*(M_i)(z^j 1^{w-j}) dz,$$

wobei wir für das letzte Gleichheitszeichen wie im Beweis von Proposition 5.9 argumentiert haben, und analog

$$\int_0^{-\frac{p}{q}} f(z) z^j dz = - \sum_{i=1}^m \int_0^\infty f(z) \mathbb{P}^*(\tilde{M}_i)(z^j 1^{w-j}) dz.$$

Nach Definition von  $\mathbb{P}^*$  und wegen der Ganzzahligkeit der Koeffizienten von  $M_i$  bzw.  $\tilde{M}_i$  ist  $\mathbb{P}^*(M_i)(z^j 1^{w-j})$  bzw.  $\mathbb{P}^*(\tilde{M}_i)(z^j 1^{w-j})$  eine von der Wahl von  $f$  unabhängige, ganzzahlige Linearkombination der Monome  $z^0, z^1, \dots, z^w$ . Insgesamt haben wir somit die Proposition gezeigt.  $\square$

Nun können wir die Perioden aus (6.6) beschreiben:

**Satz 6.22.** Seien  $w, n \in \mathbb{N}$  gerade und  $k := w + 2$ . Dann gibt es Koeffizienten

$$m_{j,J}(n) \quad \text{für alle } j, J \in \{0, \dots, w\}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $m_{j,J}(n) = 0$  für alle  $j \not\equiv J \pmod{2}$ ,
- (ii)  $r_J(f|_k T_n) = \sum_{j=0}^w m_{j,J}(n) r_j(f)$  für alle  $f \in S_k$ .

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} r_J(f|_k T_n) &= \int_0^\infty (f|_k T_n)(z) z^J dz \\ &\stackrel{??}{=} \int_0^\infty n^{k-1} \cdot \sum_{\substack{ad=n \\ d>0 \\ b \bmod(d)}} d^{-k} \cdot f\left(\frac{az+b}{d}\right) z^J dz \\ &= \int_0^\infty \sum_{0 < d|n} \frac{n^{k-1}}{d^k} \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* f\left(\frac{nz}{d^2} + \frac{b}{d}\right) z^J dz, \end{aligned}$$

wobei der Stern über dem Summenzeichen anzeigen soll, dass die Terme für  $n \in \{\pm \frac{d}{2}\}$  mit Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  zu zählen sind. Nun ziehen wir das Integral in die endliche Summe und substituieren mit  $z \mapsto \frac{d^2 z}{n} - \frac{bd}{n}$ . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} r_J(f|_k T_n) &= \sum_{0 < d|n} \frac{n^{k-1}}{d^k} \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* \int_0^\infty f\left(\frac{nz}{d^2} + \frac{b}{d}\right) z^J dz \\ &= \sum_{0 < d|n} \frac{n^{k-1}}{d^k} \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* \int_{\frac{b}{d}}^\infty f(z) \left(\frac{d^2 z}{n} - \frac{bd}{n}\right)^J \frac{d^2}{n} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{5.15}{=} \sum_{0 < d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{w-J} \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* \left( \int_0^\infty - \int_0^{\frac{b}{d}} \right) f(z) (dz - b)^J dz \\
&= \sum_{0 < d|n} \left(\frac{n}{d}\right)^{w-J} \sum_{|b| \leq \frac{d}{2}}^* \sum_{j=0}^J \binom{J}{j} d^j (-b)^{j-J} \left( \int_0^\infty - \int_0^{\frac{b}{d}} \right) f(z) z^j dz,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit mit dem binomischen Lehrsatz folgt. Somit sind die Perioden  $r_J(f|_k T_n)$  ganzzahlige Linearkombinationen der Größen

$$r_j(f) \quad \text{und} \quad \int_0^{b/d} f(z) z^j dz \quad \text{mit jeweils } 0 \leq j \leq J$$

und nach Proposition 6.21 sogar ganzzahlige Linearkombinationen der Perioden  $r_j(f)$  mit  $j \in \{0, \dots, w\}$  alleine.

REST FEHLT!

□

BIS HIERHIN

## 6.4 Das Lemma von Heilbronn

Mit Blick auf die Anwendung auf die Periodenintegrale wollen wir die in Abschnitt 6.2 eingeführten Kettenbruchentwicklungen benutzen, um bestimmte Lösungsmengen quadratischer Formen zu beschreiben. Hierfür setzen wir:

**Definition 6.23.** Sei  $q > 1$  eine ganze Zahl. Eine **Lösung** der Gleichung

$$q = \Delta\Delta' + \delta\delta' \tag{6.7}$$

ist ein geordnetes Quadrupel  $(\Delta, \Delta', \delta, \delta')$  von Zahlen, die diese Gleichung erfüllen. Eine solche Lösung heißt **zulässig**, wenn sie aus ganzen Zahlen besteht, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $\text{ggT}(\Delta, \delta) = 1$  und  $\text{ggT}(\Delta', \delta') = 1$ ,
- entweder ist  $(\Delta > \delta > 0$  und  $\Delta' > \delta' > 0)$  oder  $(q = \Delta > \delta > 0$  mit  $1 \leq \delta < \frac{q}{2}$  und  $1 = \Delta' > \delta' = 0)$ .

Die Menge der zulässigen Lösungen  $(\Delta, \Delta', \delta, \delta')$  der Gleichung (6.7) induziert eine endliche Familie von Paaren  $(\Delta, \delta)$ , die in diesen Lösungen vorkommen, die Familie  $\mathcal{F}_{\text{zul}(q)}$  der  $q$ -**zulässigen Paare**. Wir werden später Funktionen auf Paaren ganzer Zahlen über diese Familie aufsummieren müssen. Für praktische Zwecke bietet es sich daher an, die Familie  $\mathcal{F}_{\text{zul}(q)}$  als die Menge der unterschiedlichen und mit geeigneten Vielfachheiten ausgestatteten Paare  $(\Delta, \delta)$  zu betrachten.

Im Jahr 1969 erschien das folgende Resultat von HEILBRONN:<sup>54</sup>

<sup>54</sup>Hans Arnold Heilbronn (1908-1975)

**Satz 6.24** (Lemma von Heilbronn). Für eine ganze Zahl  $q > 2$  stimmen die folgenden beiden Familien geordneter Paare ganzer Zahlen überein:

- (i) Die Familie  $\mathcal{F}_{\text{KB}(q)}$  der Paare  $(q_i, q_{i-1})$  aufeinanderfolgender Nenner von Näherungsbrüchen der Kettenbruchentwicklungen beliebiger rationaler Zahlen  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit  $\text{ggT}(p, q) = 1$  und  $1 \leq p < \frac{q}{2}$ .
- (ii) Die Familie  $\mathcal{F}_{\text{zul}(q)}$  der  $q$ -zulässigen Paare.

Zum Beweis des Lemmas von Heilbronn 6.24 drücken wir Kettenbrüche durch Quotienten von Werten bestimmter Polynome aus und schaffen uns so eine Möglichkeit, Kettenbrüche rekursiv zu konstruieren. Als Polynome wählen wir hierbei:

**Definition 6.25.** Für  $m \in \mathbb{Z}_{>-1}$  seien die Polynome  $Q_m \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$  rekursiv definiert durch

$$Q_{-1} := 0, \quad Q_0 := 1 \quad \text{und} \quad Q_m := X_m \cdot Q_{m-1} + Q_{m-2} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Für  $m \in \mathbb{N}$  gilt hierbei offensichtlich  $Q_m \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ , was die Schreibweise  $Q_m(X_1, \dots, X_m)$  an Stelle von  $Q_m(X_1, X_2, \dots)$  rechtfertigt.

Durch einfaches Vergleich der Rekursionsformel der Polynome aus Definition 6.25 mit derjenigen aus Lemma 6.15 erhält man sofort:

**Lemma 6.26.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge natürlicher Zahlen. Dann gilt

$$[0, a_1, \dots, a_m] = \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{Q_m(a_1, \dots, a_m)} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0.$$

Mit  $a_0 := 0$  präzisiert sich dies zu

$$Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m) = p_m \quad \text{und} \quad Q_m(a_1, \dots, a_m) = q_m.$$

Neben der Rekursionsformel aus Definition 6.25 erfüllen die Polynome  $Q_m$  noch weitere Rekursionseigenschaften:

**Lemma 6.27.** Es gelten die folgenden Aussagen:

- (a)  $Q_m(X_1, \dots, X_m) = Q_m(X_m, \dots, X_1)$  für alle  $m \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ .
- (b)  $Q_m(X_1, \dots, X_m) = X_1 Q_{m-1}(X_2, \dots, X_m) + Q_{m-2}(X_3, \dots, X_m)$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .
- (c) Für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  und alle  $0 \leq i \leq m$  gilt

$$\begin{aligned} Q_m(X_1, \dots, X_m) &= Q_i(X_1, \dots, X_i) Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) \\ &\quad + Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) Q_{m-i-1}(X_{i+2}, \dots, X_m). \end{aligned}$$

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Behauptung (a), also die Symmetrie der Polynome  $Q_m$ . Diese Aussage gilt offensichtlich für  $m = -1$  und  $m = 0$ , da die betreffenden Polynome konstant sind, und für  $m = 1$ , da  $Q_1$  ein Polynom in nur einer Variablen ist. Für  $m = 2$  gilt

$$Q_2(X_1, X_2) = X_2 Q_1(X_1) + Q_0 = X_2 X_1 + 1 = Q_2(X_2, X_1).$$

Wir nehmen nun an, die Symmetrie der Polynome  $Q_m$  sei bis zu einem fest gewählten  $m \geq 2$  bereits gezeigt. Durch abwechselndes Anwenden der Rekursionsformel aus Definition 6.25 und der bereits gezeigten Symmetrieeigenschaften erhalten wir dann

$$\begin{aligned} Q_{m+1}(X_1, \dots, X_{m+1}) &\stackrel{6.25}{=} X_{m+1} Q_m(X_1, \dots, X_m) + Q_{m-1}(X_1, \dots, X_{m-1}) \\ &= X_{m+1} Q_m(X_m, \dots, X_1) + Q_{m-1}(X_{m-1}, \dots, X_1) \\ &\stackrel{6.25}{=} X_{m+1} (X_1 Q_{m-1}(X_m, \dots, X_2) + Q_{m-2}(X_m, \dots, X_3)) \\ &\quad + (X_1 Q_{m-2}(X_{m-1}, \dots, X_2) + Q_{m-3}(X_{m-1}, \dots, X_3)) \\ &= X_1 (X_{m+1} Q_{m-1}(X_2, \dots, X_m) + Q_{m-2}(X_2, \dots, X_{m-1})) \\ &\quad + (X_{m+1} Q_{m-2}(X_3, \dots, X_m) + Q_{m-3}(X_3, \dots, X_{m-1})) \\ &\stackrel{6.25}{=} X_1 Q_m(X_2, \dots, X_{m+1}) + Q_{m-1}(X_3, \dots, X_{m+1}) \\ &= X_1 Q_m(X_{m+1}, \dots, X_2) + Q_{m-1}(X_{m+1}, \dots, X_3) \\ &\stackrel{6.25}{=} Q_{m+1}(X_{m+1}, \dots, X_1), \end{aligned}$$

also die Symmetrie von  $Q_{m+1}$  und somit insgesamt Behauptung (a).

Zum Beweis von Behauptung (b) verwenden wir die bereits bekannte Rekursionsformel und erhalten für ein beliebiges  $m$  aus den natürlichen Zahlen

$$\begin{aligned} Q_m(X_1, \dots, X_m) &\stackrel{(a)}{=} Q_m(X_m, \dots, X_1) \\ &\stackrel{6.25}{=} X_1 Q_{m-1}(X_m, \dots, X_2) + Q_{m-2}(X_m, \dots, X_3) \\ &\stackrel{(a)}{=} X_1 Q_{m-1}(X_2, \dots, X_m) + Q_{m-2}(X_3, \dots, X_m). \end{aligned}$$

Schließlich zeigen wir Behauptung (c) und wählen dafür fest ein beliebiges  $m \in \mathbb{N}_0$ . Für  $i = m$  ist dann die Behauptung wegen  $Q_0 = 1$  und  $Q_{-1} = 0$  offensichtlich korrekt. Nehmen wir nun an, die Behauptung gelte für ein festes  $0 < i \leq m$ . Es folgt

$$\begin{aligned} &Q_m(X_1, \dots, X_m) \\ &= Q_i(X_1, \dots, X_i) Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) \\ &\quad + Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) Q_{m-i-1}(X_{i+2}, \dots, X_m) \\ &\stackrel{6.25}{=} (X_i Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) + Q_{i-2}(X_1, \dots, X_{i-2})) Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) \\ &\quad + Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) Q_{m-i-1}(X_{i+2}, \dots, X_m) \\ &= Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1}) (X_i Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) + Q_{m-i-1}(X_{i+2}, \dots, X_m)) \\ &\quad + Q_{i-2}(X_1, \dots, X_{i-2}) Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(b)}{=} Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1})Q_{m-i+1}(X_i, \dots, X_m) \\
&\quad + Q_{i-2}(X_1, \dots, X_{i-2})Q_{m-i}(X_{i+1}, \dots, X_m) \\
&= Q_{i-1}(X_1, \dots, X_{i-1})Q_{m-(i-1)}(X_{(i-1)+1}, \dots, X_m) \\
&\quad + Q_{(i-1)-1}(X_1, \dots, X_{(i-1)-1})Q_{m-(i-1)-1}(X_{(i-1)+2}, \dots, X_m)
\end{aligned}$$

und also die Behauptung für  $i - 1$ . □

Mit diesen Werkzeugen ausgestattet zeigen wir nun das Lemma von Heilbronn:

*Beweis von Satz 6.24.* Sei  $q > 2$  für diesen Beweis fest gegeben.

Wir zeigen zunächst die Inklusion  $\mathcal{F}_{KB(q)} \subseteq \mathcal{F}_{zul(q)}$ . Bezeichne dabei  $m(\frac{p}{q})$  für ein  $p \in \mathbb{N}$  die Länge der Kettenbruchentwicklung von  $\frac{p}{q}$ . Dann gibt es für jedes Paar  $(q_i, q_{i-1}) \in \mathcal{F}_{KB(q)}$  ein Paar  $(p, i)$  in der Indexmenge

$$I_{KB(q)} := \{(p, i) \mid 1 \leq p < \frac{q}{2}, \text{ggT}(p, q) = 1, 1 \leq i \leq m(\frac{p}{q})\},$$

so dass  $q_i$  bzw.  $q_{i-1}$  der Nenner des  $i$ -ten bzw.  $(i - 1)$ -ten Näherungsbruchs der Kettenbruchentwicklung von  $\frac{p}{q}$  ist.

Sei nun ein festes Paar  $(q_i, q_{i-1}) \in \mathcal{F}_{KB(q)}$  gegeben und sei  $(p, i) \in I_{KB(q)}$  ein passendes Indexpaar. Nach Satz 6.9 besitzt die zugehörige rationale Zahl  $\frac{p}{q}$  eine eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklung der Form

$$((a_0, a_1, \dots, a_m), \frac{p}{q}) \quad \text{mit } m := m(\frac{p}{q}).$$

Hierbei gelten die Eigenschaften

$$a_0 \stackrel{6.8}{=} \lfloor \frac{p}{q} \rfloor = 0 \quad \text{wegen } p < q, \quad (6.8)$$

$$a_1 \stackrel{6.8}{=} \lfloor \frac{1}{\frac{p}{q} - a_0} \rfloor \stackrel{(6.8)}{=} \lfloor \frac{q}{p} \rfloor \geq 2 \quad \text{wegen } 1 \leq p < \frac{q}{2}, \quad (6.9)$$

$$a_m \geq 2 \quad \text{nach Teil (b) von Lemma 6.11.} \quad (6.10)$$

Um  $(q_i, q_{i-1})$  als Element von  $\mathcal{F}_{zul(q)}$  zu erkennen, setzen wir

$$\begin{aligned}
\Delta &:= Q_i(a_1, \dots, a_i), & \delta &:= Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}), \\
\Delta' &:= Q_{m-i}(a_{i+1}, \dots, a_m), & \delta' &:= Q_{m-i-1}(a_{i+2}, \dots, a_m)
\end{aligned}$$

und stellen fest, dass nach Lemma 6.26 unabhängig von der Wahl des Paares  $(p, i) \in I_{KB(q)}$  die Identität

$$(\Delta, \delta) = (q_i, q_{i-1})$$

gilt. Zum Beweis der Inklusion  $\mathcal{F}_{KB(q)} \subseteq \mathcal{F}_{zul(q)}$  genügt es daher die  $q$ -Zulässigkeit von  $(\Delta, \delta)$  zu zeigen. Wir weisen die geforderten Eigenschaften sukzessive nach:



Nach Teil (c) von Lemma 6.27 gilt zunächst

$$\Delta\Delta' + \delta\delta' = Q_m(a_1, \dots, a_m) \stackrel{6.26}{=} q_m = q.$$

Weiter ist auch  $\text{ggT}(\Delta, \delta) = \text{ggT}(\Delta', \delta') = 1$ ,

denn: Nach Lemma 6.26 handelt es sich bei  $\Delta$  und  $\delta$  um zwei aufeinanderfolgende Nenner von Näherungsbrüchen aus derselben Kettenbruchentwicklung, so dass es nach Teil (f) von Lemma 6.15 zwei ganze Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit

$$a\Delta + b\delta = 1$$

gibt. Wegen der in Teil (a) von Lemma 6.27 nachgewiesenen Symmetrie der Polynome  $Q_{m-i}$  und  $Q_{m-i-1}$  kann für  $\Delta'$  und  $\delta'$  genauso argumentiert werden und die Behauptung folgt. #

Zudem gelten  $\Delta > \delta > 0$  und  $\Delta' > \delta' \geq 0$ ,

denn: Einerseits gilt

$$\begin{aligned} \Delta &= Q_1(a_1) = a_1 \stackrel{(6.9)}{>} 1 = Q_0 = \delta && \text{für } i = 1, \\ \Delta &= Q_i(a_1, \dots, a_i) \stackrel{6.25}{=} a_i Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) + Q_{i-2}(a_1, \dots, a_{i-2}) \\ &\stackrel{a_i \in \mathbb{N}}{>} Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) + Q_{i-2}(a_1, \dots, a_{i-2}) \\ &\stackrel{6.26}{=} Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) + q_{i-2} \stackrel{6.15}{>} Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) = \delta && \text{für } i \geq 2, \end{aligned}$$

andererseits ist

$$\delta = Q_{i-1}(a_1, \dots, a_{i-1}) \stackrel{6.26}{=} q_{i-1} \stackrel{6.15}{>} 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dass auch  $\Delta' > \delta' \geq 0$  gilt, zeigt man analog. #

Ist nun  $\delta' > 0$ , so haben wir an dieser Stelle die  $q$ -Zulässigkeit von  $(\Delta, \delta)$  nachgewiesen. Im Fall  $\delta' = 0$  gilt ebenfalls  $(\Delta, \delta) \in \mathcal{F}_{\text{zul}(q)}$ ,

denn: Aus dem bisher Gezeigten erhalten wir

$$1 = \text{ggT}(\Delta', \delta') = \text{ggT}(\Delta', 0) = \Delta' \quad \text{und} \quad q_m = q = \Delta\Delta' + \delta\delta' = \Delta = q_i.$$

Mit  $1 \leq i \leq m$  sowie Teil (d) von Lemma 6.15 folgt hieraus  $i = m$ . Wieder mit Lemma 6.15 gilt dann

$$q = q_m = a_m q_{m-1} + q_{m-2} \geq a_m q_{m-1} \stackrel{i=m}{=} a_m \delta \stackrel{(6.10)}{\geq} 2\delta$$

und somit  $1 \leq \delta \leq \frac{q}{2}$ . #

Wir zeigen nun die zweite Inklusion  $\mathcal{F}_{\text{zul}(q)} \subseteq \mathcal{F}_{\text{KB}(q)}$  und betrachten dafür ein festes Paar  $(\Delta, \delta) \in \mathcal{F}_{\text{zul}(q)}$  mit einer zugehörigen zulässigen Lösung  $(\Delta, \Delta', \delta, \delta')$  von (6.7). Wir zeigen nun  $(\Delta, \delta) \in \mathcal{F}_{\text{KB}(q)}$ , dass also  $\delta$  und  $\Delta$  als aufeinanderfolgende Nenner in der Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl  $\frac{p}{q}$  mit  $1 \leq p < \frac{q}{2}$  und  $\text{ggT}(p, q) = 1$  auftauchen, und unterscheiden dafür zwei Fälle:

**Fall 1:**  $\delta' = 0$ . Genau wie im Beweis der ersten Inklusion ist dann  $\Delta = q$ ,  $\Delta' = 1$  und  $1 \leq \delta < \frac{q}{2}$ . Es gelten

$$q = \Delta > \delta > 0 \quad \text{und} \quad \text{ggT}(\delta, q) = \text{ggT}(\Delta, \delta) = 1$$

und die rationale Zahl  $\frac{\delta}{q}$  besitzt eine eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklung der Form

$$((0, a_m, \dots, a_1), \frac{\delta}{q}) \quad \text{mit einem } m \in \mathbb{N}.$$

Nach Lemma 6.26 gilt dabei

$$[0, a_m, \dots, a_1] = \frac{Q_{m-1}(a_{m-1}, \dots, a_1)}{Q_m(a_m, \dots, a_1)} = \frac{\delta}{q},$$

andererseits aber auch

$$[0, a_1, \dots, a_m] = \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{Q_m(a_1, \dots, a_m)} \stackrel{6.27(a)}{=} \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{Q_m(a_m, \dots, a_1)} = \frac{p}{q} \quad \text{für ein } p \in \mathbb{N}.$$

Nach Teil (h) von Lemma 6.15 gilt dann  $\text{ggT}(p, q) = 1$  und nach Teil (b) von Lemma 6.11 gilt  $a_1 \geq 2$ . Letzteres impliziert

$$\begin{aligned} q &= Q_m(a_1, \dots, a_m) \\ &\stackrel{6.27(b)}{=} a_1 Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m) + Q_{m-2}(a_3, \dots, a_m) \\ &\geq 2Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m) + Q_{m-2}(a_3, \dots, a_m) \\ &> 2p \end{aligned}$$

und also  $1 \leq p < \frac{q}{2}$ . Sind  $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_m}$  die Näherungsbrüche von  $\frac{p}{q}$ , so gilt

$$q_{m-1} \stackrel{6.26}{=} Q_{m-1}(a_1, \dots, a_{m-1}) \stackrel{6.27(a)}{=} Q_{m-1}(a_{m-1}, \dots, a_1) \stackrel{\text{ggT}(\delta, q)=1}{=} \delta$$

und mit  $\Delta = q$  somit  $(\Delta, \delta) = (q_m, q_{m-1})$ .

**Fall 2:**  $\delta' \neq 0$ . Dann gelten

$$\Delta > \delta > 0, \quad \Delta' > \delta' > 0 \quad \text{und} \quad \text{ggT}(\Delta, \delta) = \text{ggT}(\Delta', \delta') = 1$$

und die rationalen Zahlen  $\frac{\delta}{\Delta}$  und  $\frac{\delta'}{\Delta'}$  haben eindeutig bestimmte Kettenbruchentwicklungen der Form

$$\begin{aligned} ((0, a_i, \dots, a_1), \frac{\delta}{\Delta}) \quad &\text{mit einem } i \in \mathbb{N}, \\ ((0, a_{i+1}, \dots, a_m), \frac{\delta'}{\Delta'}) \quad &\text{mit einem } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 6.26 gelten dann

$$[0, a_i, \dots, a_1] = \frac{Q_{i-1}(a_{i-1}, \dots, a_1)}{Q_i(a_i, \dots, a_1)} = \frac{\delta}{\Delta},$$

$$[0, a_{i+1}, \dots, a_m] = \frac{Q_{m-i-1}(a_{i+2}, \dots, a_m)}{Q_{m-i}(a_{i+1}, \dots, a_m)} = \frac{\delta'}{\Delta'},$$

andererseits aber auch

$$[0, a_1, \dots, a_m] = \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{Q_m(a_1, \dots, a_m)} \stackrel{6.27(c)}{=} \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{\Delta\delta + \Delta'\delta'} = \frac{p}{q} \quad \text{für ein } p \in \mathbb{N}.$$

Nach Teil (h) von Lemma 6.15 gilt dann  $\text{ggT}(p, q) = 1$  und analog zu den Überlegungen aus Fall 1 folgt  $1 \leq p < \frac{q}{2}$ . Sind  $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_m}{q_m}$  die Näherungsbrüche von  $\frac{p}{q}$ , so gilt  $(\Delta, \delta) = (q_i, q_{i-1})$  mit Lemma 6.26.  $\square$

## 6.5 Der Periodensatz

**Satz 6.28** (Periodensatz von Manin). *Sei  $w \in \mathbb{N}$  gerade und sei  $k := w + 2$ . Sei weiter  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)q^n \in S_k$  eine normierte Hecke-Eigenform. Dann liegen die Verhältnisse*

$$(r_0(f) : r_2(f) : \dots : r_w(f)) \quad \text{und} \quad (r_1(f) : r_3(f) : \dots : r_{w-1}(f))$$

*im Zahlkörper  $\mathbb{Q}(a_n(f) \mid n \in \mathbb{N})$ .*