Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik

Björn Malte Schäfer | Anja Butter

Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

9. Übungsblatt

Ausgabe 08.12.2020 – Besprechung 25.01-28.01.2021

1. Lösung:

(a)

$$E = m\gamma c^2 = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 \tag{1}$$

Für $v \ll c$ gilt

$$E = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2 \tag{2}$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}c^2|_{v=0} + m\frac{v}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}|_{v=0} \cdot v + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} + \frac{3\frac{v^2}{c^2}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{5/2}}\right)|_{v=0} \cdot v^2 \tag{3}$$

$$= mc^2 + \frac{1}{2}m \cdot v^2 \tag{4}$$

(b)

$$\frac{E_{3/4}}{E_0} = \gamma \tag{5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}} \tag{6}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{7}} \tag{7}$$

$$= 1.5 \tag{8}$$

$$\frac{E_{9/10}}{E_0} = \gamma \tag{9}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{9}{10}\right)^2}} \tag{10}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{19}} \tag{11}$$

$$= 2.3 \tag{12}$$

2. Lösung:

Die Geschwindigkeitskomponenten des Lichts, wie sie Beobachter 1 bzw. 2 messen sind :

$$u_x = -c\cos\theta\,, \quad u_y = -c\sin\theta \tag{13}$$

bzw.

$$u'_x = -c\cos\theta'\,, \quad u'_y = -c\sin\theta'. \tag{14}$$

Setzt man dies in die angegebene Geschwindigkeits-Transformation ein, erhält man

$$-c\cos\theta = \frac{-c\cos\theta' + v}{1 + \frac{-c\cos\theta' v}{c^2}} \;\rightarrow\; \cos\theta = \frac{\cos\theta' - v/c}{1-(v/c)\cos\theta'} \tag{15}$$

und

$$-c\sin\theta = \frac{-c\sin\theta'}{\gamma(1+\frac{-c\cos\theta' v}{c^2})} \;\rightarrow\; \sin\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma(1-(v/c)\cos\theta')} \tag{16}$$

Benutzt man nun die angegebene Identität: $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$, erhält man

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{\frac{\sin\theta'}{\gamma(1-(v/c)\cos\theta')}}{1+\frac{\cos\theta'-v/c}{1-(v/c)\cos\theta'}} = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\theta'}{1-(v/c)\cos\theta' + \cos\theta' - (v/c)} \\ &= \frac{1}{\gamma}\frac{1}{1-(v/c)}\frac{\sin\theta'}{1+\cos\theta'} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\tan\left(\frac{\theta'}{2}\right) \qquad (17)\end{aligned}$$

wobei $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$.

Daher sieht der Beobachter, der sich schneller auf die Quelle zubewegt (also der in S'), einen kleineren Winkel. Man beachte: Die Geschwindigkeit der Quelle spielt bei dieser relativen Beziehung keine Rolle, wohl aber bei den Absolutwinkeln.

3. Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= \exp(i\alpha_k A_k)\exp(i\alpha_j A_j)^\dagger && (18)\\ &= \exp(i\alpha_k A_k)\exp(-i\alpha_j^* A_j^\dagger) && (19)\\ &= \exp(i\alpha_k A_k)\exp(-i\alpha_j A_j^\dagger) \leftarrow \alpha_j \in \mathbb{R} && (20)\\ &= \exp(i\alpha_k(A_k - A_j^\dagger)) \leftarrow A \text{ hermitesch} && (21)\\ &= \mathbb{1} && (22)\end{aligned}$$

(b) U unitär $\rightarrow U^\dagger = U^{-1}$

$$U^\dagger \exp(iA)U = U^\dagger \sum_n \frac{(iA)^n}{n!}U \tag{23}$$
$$= \sum_n \frac{i^n}{n!}U^\dagger A^n U \tag{24}$$
$$= \sum_n \frac{i^n}{n!}U^\dagger (AUU^\dagger)^n U \tag{25}$$
$$= \sum_n \frac{i^n}{n!}(U^\dagger AU)^n \tag{26}$$
$$= \exp(iU^\dagger AU) \tag{27}$$

(c)

$$\det A = \overline{\det A^\dagger} \tag{28}$$
$$= \overline{\det(-A)} \tag{29}$$
$$= (-1)^n \overline{\det A} \tag{30}$$
$$= (-1)^n \det A \leftarrow A \in \mathbb{R} \tag{31}$$
$$\tag{32}$$

$\rightarrow \det A \neq 0$ kann nur eine Lösung sein falls n gerade ist. Falls A nicht reel ist, ergeben sich weiter Lösungen, wenn die Determinante imaginär ist.

(d) Wir können ablesen, dass

$$a = \alpha + \gamma \tag{33}$$
$$b = \beta + \delta \tag{34}$$
$$c = \beta - \delta \tag{35}$$
$$d = \alpha - \gamma \tag{36}$$

Anders ausgedrückt ist

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \tag{37}$$

Die Determinante der Abbildung ist -4. Somit ist die Abbildung invertierbar und jede Matrix A kann eindeutig durch die Koeffizienten $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ bestimmt werden.

(e) Zunächst stellen wir fest, dass

$$\sigma_0 = \mathbb{1} = \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = -\sigma_3^2 \tag{38}$$
$$\text{und} \quad \sigma_0\sigma_i = \sigma_i\sigma_0 = \sigma_i \quad \text{für } i \in 0, 1, 2, 3 \tag{39}$$

Desweiteren ist

$$\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1 = -\sigma_3 \tag{40}$$
$$\sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1 = -\sigma_2 \tag{41}$$
$$\sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = \sigma_1 \tag{42}$$

Somit verschwindet die Spur (Trace) $\mathrm{Tr}(\sigma_i\sigma_j)$ für $i \neq j$ und es ergibt sich:

$$\mathrm{Tr}(A\sigma_m) = \mathrm{Tr}(\sum_n \alpha_n\sigma_n\sigma_m) \tag{43}$$
$$= \sum_n \alpha_n \mathrm{Tr}(\sigma_n\sigma_m) \tag{44}$$
$$= \alpha_m \mathrm{Tr}(\sigma_m^2) \tag{45}$$

Damit erhalten wir

$$\alpha_m = \frac{\mathrm{Tr}(A\sigma_m)}{\mathrm{Tr}(\sigma_m^2)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A\sigma_m) & \text{für } n = 0, 1, 2 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A\sigma_m) & \text{für } n = 3 \end{cases} \tag{46}$$