INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 2 — 01. Mai 2020

Abgabe bis Fr. 08.05.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Aus diversen organisatorischen Gründen haben wir uns dazu entschlossen, doch nicht die Gruppenabgabefunktion von Moodle zu nutzen. Gebt daher bitte genauso ab, wie letzte Woche, d. h. genau eine (beliebige) Person aus dem Abgabeteam lädt die Lösungen hoch und wir tragen die Punkte für beide ein. Dabei sollte die abgebende Funktion die Korrektur, die sie in Moodle von den Tutoren erhält, an die zweite Person weiterleiten. Die Punkte werden in MÜSLI eingetragen.
- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei:
  Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf.
  Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf.* Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.

Themen:

- Funktionenräume
- Fourier-Entwicklung
- Orthogonalsystem
- Parsevalsche Gleichung

Aufgabe 2.1 (7 Punkte): Legendre-Polynome als Orthogonalsystem

<u>MOTIVATION:</u> In der Vorlesung haben wir bereits gesehen, dass die trigonometrischen Funktionen

$$c_0(x) := 1, \quad c_k(x) := \cos(kx), \quad s_l(x) := \sin(lx), \quad k, l \in \mathbb{N}$$

ein Orthogonalsystem in $R([0, 2\pi])$ bzgl. des L^2-Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)_2$, das für $f, g \in R([0, 2\pi])$ gegeben ist durch

$$(f, g)_2 := \left(\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x \right)^{1/2},$$

ist. In dieser Aufgabe schauen wir uns ein Orthogonalsystem für $R([-1, 1])$ bzgl. des L^2-Skalarproduktes $(\cdot, \cdot)_2$, das für $f, g \in R([-1, 1])$ gegeben ist durch

$$(f, g)_2 := \left(\int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)} \mathrm{d}x \right)^{1/2},$$

an. Dieses Orthogonalsystem ist das System der *Legendre-Polynome*. Legendre-Polynome spielen in verschiedenen Bereichen der Mathematik eine Rolle, insbesondere in der numerischen Analysis oder auch bei neuralen Netzen. Weitere Infos findet man bspw. bei Wikipedia. Üblicherweise ergibt sich aus der Konstruktion der Legendre-Polynome, dass diese orthogonal sind. In dieser Aufgabe wollen wir aber ausgehend von der expliziten Darstellung der Legendre-Polynome durch die Rodrigue's Formel diese Eigenschaft überprüfen.

<u>AUFGABE:</u> Gegeben seien die Legendre-Polynome $P_n(x),\ n \in \mathbb{N}_0$ in der expliziten Darstellung der Rodrigue's Formel

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$$

(a) Man zeige, dass

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall n,m \in \mathbb{N}_0, n \neq m.$$

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right)\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left((x^2-1)^m\right)\mathrm{d}x = (-1)^k\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left((x^2-1)^n\right)\cdot\frac{\mathrm{d}^{m+k}}{\mathrm{d}x^{m+k}}\left((x^2-1)^m\right)\mathrm{d}x$$

für alle $n,m \in \mathbb{N}_0,\ n \geq m,\ 0 \leq k \leq n.$ $\boxed{2}$

(b) Man zeige für festes $n \in \mathbb{N}_0$ mittels „endlicher Induktion“[1], dass

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-k}(1+x)^{n+k}\mathrm{d}x, \quad k = 0,\dots,n. \quad \boxed{2}$$

(c) Man nutze das Ergebnis aus (b) und die gegebene Gleichung aus (a), um für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen, dass

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}. \quad \boxed{3}$$

<u>Lösungsvorschlag:</u>

(a) $n \neq m$: Setzt man Rodrigues Formel für die P_n ein, erhält man:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\cdot\frac{1}{2^m m!}\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\left(x^2-1\right)^m\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{1}{2^m m!}\cdot\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\left(x^2-1\right)^m\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\left(x^2-1\right)^m\right)\mathrm{d}x = 0$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $n > m$. Wählt man dann beim gegeben Tipp $k = m+1 \leq n$, so erhält man

$$(-1)^{m+1}\left(\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-(m+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(m+1)}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\cdot\frac{\mathrm{d}^{2m+1}}{\mathrm{d}x^{2m+1}}\left(\left(x^2-1\right)^{m+1}\right)\mathrm{d}x\right) = 0$$

da $(x^2-1)^m$ ein Polynom vom Grad $2m$ ist, das durch $(2m+1)$-maliges Ableiten 0 wird.

(b) IA: $k = 0$:

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{n!n!}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-0}(1+x)^{n+0}\mathrm{d}x$$

[1] Damit ist gemeint, dass man wie bei einer vollständigen Induktion vorgeht, aber diese nicht für k gegen unendlich führen kann, sondern nur bis $k = n$, da der Induktionsschritt $k \to k+1$ nur für $k < n$ funktioniert.

IV:

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-k}(1+x)^{n+k}dx$$

gelte für festes aber beliebiges $k \in \{0,\dots,n-1\}$

IS: $k \to k+1 (\leq n)$:

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\mathrm{d}x \overset{IV}{=} \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-k}(1+x)^{n+k}\mathrm{d}x$$

Erhalte mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\underbrace{(1-x)^{n-k}}_{u}\underbrace{(1+x)^{n+k}}_{v'}\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{1}{n+k}\left[\underbrace{(1-x)^{n-k}}_{u}\underbrace{(1+x)^{n+k}}_{v}\right]_{-1}^{1}}_{=0(\text{da } n-k\neq 0)} - \frac{n-k}{n+k}\int_{-1}^{1}-(1-x)^{n-k-1}(1+x)^{n+k+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{n-k}{n+k}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-(k+1)}(1+x)^{n+k+1}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n dx &= \frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}\frac{(n-k)}{(n+k+1)}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-(k+1)}(1+x)^{n+k+1}dx \\
&= \frac{(n!)^2}{(n-(k+1))!(n+k+1)!}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-(k+1)}(1+x)^{n+k+1}dx
\end{aligned}$$

(c)

$$I_{n,n} := \int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)dx$$

Für $n = m$ und $k = m$ erhalten wir aus dem Tipp von (a):

$$I_{n,n} = (-1)^n \cdot \int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\cdot\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\mathrm{d}x$$

Nun betrachten wir den rechten Faktor $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)dx$. $(x^2-1)^n$ ist ein Polynom vom Grad $2n$. Durch $2n$-maliges gliedweises Ableiten werden also alle Summanden bis auf den, der ursprünglich vom Grad $2n$ ist, null. Wir erhalten daher:

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\left(\left(x^2-1\right)^n\right)\mathrm{d}x = \left(x^{2n}\right)^{(2n)} = (2n)!$$

Für $I_{n,n}$ ergibt sich somit:

$$I_{n,n} = (-1)^n\cdot(2n)!\cdot\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\mathrm{d}x$$

Diesen Ausdruck kann man mit Hilfe von (b) weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
I_{n,n} &= (-1)^n \cdot (2n)! \cdot \int_{-1}^{1} \left(x^2-1\right)^n \mathrm{d}x \\
&= (2n)! \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^n \cdot (1+x)^n \mathrm{d}x \\
&\overset{(b)\text{ mit } k=n}{=} (2n)! \frac{(n!)^2}{0!(2n)!} \int_{-1}^{1} \dots dx \\
&= \frac{(2n)! \cdot n!}{(n+1)\cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n} \mathrm{d}x \\
&= (n!)^2 \cdot \left[\frac{1}{2n+1}(1+x)^{2n+1}\right]_{-1}^{1} \\
&= (n!)^2 \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot (n!)^2 \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1} \\
&= \frac{2}{2n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.2 (5 Punkte): Fourier-Entwicklung

Die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \min\left(x - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - x\right).$$

Man zeige, dass für die Fourier-Entwicklung $F_\infty^f(x)$ gilt

$$F_\infty^f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos\left((2k-1)x\right).$$

<u>Lösungsvorschlag:</u>

Zunächst halten wir fest: $f(x) = \begin{cases} x - \pi/2, & 0 \le x < \pi/2 \\ \frac{3\pi}{2} - x, & \pi/2 \le x \le 2\pi \end{cases}$.

Wir berechnen die Fourier-Entwicklung (FE) F_∞^f in der Form $F_\infty^f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}$ Um uns später die Berechnung zu vereinfachen, stellen wir zunächst fest (s. ZÜ-02):

- $\left(e^{-ik(x)}\right)' = (-ik)e^{-ikx}$
- $$\begin{aligned}\int e^{-ikx} dx &= \frac{1}{-ik} e^{-ikx} + c, c \in \mathbb{C} \\ &= \frac{i}{k} c^{-1kx} + c, c \in \mathbb{C}\end{aligned}$$
- $e^{-ik\cdot 0} = e^0 = 1$
- $e^{-ik\cdot 2\pi} = 1$

- $e^{-ik\cdot\pi} = \begin{cases} -1, & k \in 2\mathbb{Z}-1 \\ 1, & k \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$
- $\int_0^{2\pi} e^{-ikx}dx = 0, k \in \mathbb{Z}$
- $\int_0^{\pi} e^{-ikx}dx = \begin{cases} \frac{-2i}{k} & , \quad k \in 2\mathbb{Z}-1 \\ 0 & , \quad k \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$
- $\int_\pi^{2\pi} e^{-ikx}dx = -\int_0^{\pi} e^{-ikx}dx = \begin{cases} \frac{2i}{k} & u \in 2\mathbb{Z}-1 \\ 0 & k \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$

Nun rechnen wir:

$$\begin{aligned}
2\pi c_k = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx &= \int_0^{\pi} \underbrace{(x-\pi/2)}_{u}\underbrace{e^{-ikx}}_{v'}dx + \int_\pi^{2\pi} \underbrace{(\frac{3\pi}{2}-x)}_{u}\underbrace{e^{-ikx}}_{v'}dx \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} \frac{i}{k}\left[(x-\pi/2)e^{-ikx}\right]_0^{\pi} - \frac{i}{k}\int_0^{\pi} 1\cdot e^{-ikx}dx \Big\} (*) \\
&+ \frac{i}{k}\left[\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)e^{-ikx}\right]_\pi^{2\pi} - \frac{i}{k}\int_\pi^{2\pi}(-1)\cdot e^{-ikx}dx \Big\} (**)
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{i}{k}\left[\frac{\pi}{2}\left(e^{-ik\pi}+1\right) - \int_0^{\pi} e^{-ikx}dx\right] \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \frac{i}{k}\cdot\begin{cases} 0+\frac{2i}{k}, & k \in 2\mathbb{Z}-1 \\ \pi/2\cdot 2 - 0, k \in 2\mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2}{k^2}, & k \in 2\mathbb{Z}-1 \\ \frac{\pi i}{k}, & k \in 2\mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(**) &= \frac{i}{k}\left[\frac{\pi}{2}\left(-1-1\cdot e^{-ik\pi}\right) + \int_\pi^{2\pi} e^{-ikx}dx\right] \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \frac{i}{k}\cdot\begin{cases} \pi/2(-1-(-1)) + \frac{2i}{k}, & k \in 2\mathbb{Z}-1 \\ \pi/2(-1-1)+0, k \in 2\mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2}{k^2}, & k \in 2\mathbb{Z}-1 \\ -\frac{\pi i}{k}, & k \in 2\mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\implies 2\pi c_k = (*) + (**) = \begin{cases} -\frac{2}{k^2} - \frac{2}{k^2} & , \quad k \in 2\mathbb{Z}-1 \\ \frac{\pi i}{k} - \frac{\pi i}{k}, & k \in 2\mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} -4/k^2 & , k \in 2\mathbb{Z}-1 \\ 0 & , \quad 4 \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\implies F_\infty^f(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx} \\
&= \sum_{k\in 2\mathbb{Z}-1} \frac{-2}{\pi k^2}e^{-ikx} \overset{\text{Euler}}{=} -\sum_{k\in 2\mathbb{Z}-1}\frac{2}{\pi k^2}(\cos(-kx) + i\sin(-kx))
\end{aligned}$$

Da aber $(-k)^2 = k^2$ und $\cos(-(-k)x) = \cos(-kx)$ und $\sin(-(-k)x) = -\sin(-kx)$ (durch Vergleich mit der abs. konv. Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$ sehen wir, dass wir umordnen dürfen) erhalten wir:

$$\implies \sum_{k\in 2\mathbb{Z}-1} \frac{2}{\pi k^2} i\sin(-kx) = \sum_{k\in 2\mathbb{N}-1} \frac{2}{\pi k^2} i\sin(-kx) - \sum_{k\in 2\mathbb{N}-1} \frac{2}{\pi k^2} i\underbrace{\sin(-(-k)x)}_{=-\sin(-kx)} = 0$$

Somit verbleibt

$$\begin{aligned} F_\infty^f(x) &= -\sum_{k\in 2{\color{red}\mathbb{Z}}-1} \frac{2}{\pi k^2}\cos(-kx) = -\sum_{k\in 2{\color{red}\mathbb{N}}-1} \frac{2}{\pi k^2}\cos(-kx) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-2)x) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3 (3 Punkte): Parsevalsche Gleichung

Man folgere aus Aufgabe 2.2, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Dabei kann die *Parsevalsche Gleichung* (PG) hilfreich sein. Leider ist diese in der Mitschrift falsch formuliert, sodass wir sie an dieser Stelle nochmal korrekt angeben:

$$\text{(PG)} \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 .$$

Dabei sind c_k die Koeffizienten der Fourier-Entwicklung in der Form

$$F_\infty^f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx}.$$

Bemerkung: Wir stellen also fest, dass die Parsevalsche Gleichung neben ihrer Bedeutung in der Funktionalanalysis auch helfen kann, Ergebnisse beweisen, die auf den ersten Blick überraschend und schwer zu beweisen scheinen. Unsere üblichen Methoden zum Überprüfen von Konvergenz von Reihen scheitern bei dieser Reihe übrigens auch!

Lösungsvorschlag:

Aus der Aufgabenstellung von Aufgabe 2.2 lernen wir

$$F_\infty^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$$

mit

$$a_k = \begin{cases} 0, & k \in 2\mathbb{N}\cup\{0\} \\ \frac{-4}{\pi k^2}, & k \in 2\mathbb{N}-1 \end{cases}, \quad b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Mit der Umrechnung

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & 1k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & k < 0 \end{cases}$$

folgt (wie in der Lösung von 2.2 gesehen):

$$c_k = \begin{cases} 0 & ,k \in 2\mathbb{Z} \\ \frac{-2}{\pi k^2} & ,k \in 2\mathbb{Z}-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = 2\pi \sum_{k \in 2\mathbb{Z}-1} \frac{4}{\pi^2 k^4} &\overset{(*)}{=} 2\pi \cdot 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-2)^4} \\ &= \frac{16}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-2)^4} \end{aligned}$$

$(*)$: Hier dürfen wir umordnen, da $||f||_2^2 < \infty$ wie wir gleich sehen und da Parseval sagt $2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = ||f||_2^2$.
Weiter ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx &= \int_0^{\pi} x^2 - x\pi + \frac{\pi^2}{4} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{9\pi^2}{4} - 3x\pi + x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \left[x^3\right]_0^{\pi} - \frac{\pi}{2} \left[x^2\right]_0^{\pi} + \frac{\pi^3}{4} + \frac{9\pi^3}{4} - \frac{3}{2}\pi \left[x^2\right]_{\pi}^{2\pi} + \frac{1}{3} \left[x^3\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{8}{3}\pi^3 - \pi^3/2 + \frac{\pi^3}{4} + \frac{9}{4}\pi^3 - 6\pi^3 + \frac{3}{2}\pi^3 \\ &= \frac{\pi^3}{12}(32 - 6 + 3 + 27 - 72 + 18) \\ &= \frac{\pi^3}{6} \end{aligned}$$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \pi^3/6 \cdot \frac{\pi}{16} = \frac{\pi^4}{96}$$

Aufgabe 2.4 (5 Punkte): Fourier-Entwicklung von (un-)geraden Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist „gerade" im Falle $f(-x) = f(x)$ und „ungerade" im Falle $f(-x) = -f(x)$. Man zeige, dass die Fourier-Entwicklungen (2π-periodischer) gerader Funktion f_g bzw. ungerader Funktionen f_u die folgende Form haben:

$$F_\infty^{f_g}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) \quad \text{bzw.} \quad F_\infty^{f_u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Man zeige dafür zunächst, dass für 2π-periodische Funktionen f für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{d}x,$$
$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{d}x.$$

Lösungsvorschlag:
Zunächst zeigen wir für f 2π-periodisch:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$
$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

Wie man sich leicht überlegt, sind $f(x)\sin(nx),\ f(x)\cos(nx)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ als Produkt 2π-periodischer Funktionen wieder 2π-periodisch.
In der Tat gilt für 2π-periodische Funktionen g sogar

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_{0-t}^{2\pi-t} g(x)dx \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

denn

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g(x)dx &= \int_{-t}^{2\pi-t} g(x)dx - \int_{-t}^{0} g(x)dx + \int_{2\pi-t}^{2\pi} g(x)dx \\
&\overset{\text{Periodizität}}{=} \int_{-t}^{2\pi-t} g(x)dx - \int_{-t}^{0} g(x+2\pi)dx + \int_{2\pi-t}^{2\pi} g(x)dx \\
&\overset{(*)}{=} \int_{-t}^{2\pi-t} g(x)dx \underbrace{- \int_{2\pi-t}^{2\pi} g(\tilde{x})d\tilde{x} + \int_{2\pi-t}^{2\pi} g(x)dx}_{} = 0 \\
&= \int_{-t}^{2\pi-t} g(x)dx
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir die Substitution $x + 2\pi := \tilde{x}$ durchgeführt. Mit $t = \pi,\ g(x) = f(x)\sin(kx),\ f(x)\cos(kx)$ folgt die 1. Behauptung.

(a) Für gerades f gilt, da $\sin(kx)$ ungerade ist:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0.
\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von f hat also die Form

$$F_\infty^f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

(b) Für ungerades f gilt analog, da $\cos(kx)$ gerade ist:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f dx = 0 \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx = 0
\end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe von f hat in diesem Fall also die Form

$$F_\infty^f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Bonusaufgabe 2.5 (4 Bonuspunkte): Legendre-Polynome Tipp

Man zeige für $n, m \in \mathbb{N}_0,\ n \geq m$ die in Aufgabe 2.1 (a) vorgegebene Formel

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right)\cdot\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left((x^2-1)^m\right)\mathrm{d}x = (-1)^k \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left((x^2-1)^n\right)\cdot\frac{\mathrm{d}^{m+k}}{\mathrm{d}x^{m+k}}\left((x^2-1)^m\right)\mathrm{d}x$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq k \leq n$ durch „endliche Induktion“. Dabei darf wiederum ohne Beweis verwendet werden, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq k < n$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^2-1)^n = (x^2-1)^{n-k} \cdot p_k(x),$$

wobei p_k ein Polynom - nicht zwingend ein Legendre-Polynom - ist.

Lösungsvorschlag:

IA: $k = 0$ klar

IV: Die Beh. gelte für festes aber bel. $0 \leq k \leq n$.

IS: $k \to k+1 \leq n$

$$\begin{aligned}
I &= (-1)^i \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-i}}{\mathrm{d}x^{n-i}}\left((x^2-1)^n\right) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+i}}{\mathrm{d}x^{m+i}}\left((x^2-1)^m\right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{IV}}{=} (-1)^k \left(\left[\frac{\mathrm{d}^{n-(k+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(k+1)}}\left((x^2-1)^n\right) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k}}{\mathrm{d}x^{m+k}}\left((x^2-1)^m\right) \right]_{-1}^{1} \right) \\
&- \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-(k+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(k+1)}}\left((x^2-1)^n\right) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}\left((x^2-1)^m\right) \mathrm{d}x \\
&= 0 + (-1)^{k+1} \left(\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-(k+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(k+1)}}\left((x^2-1)^n\right) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+(k+1)}}{\mathrm{d}x^{m+(k+1)}}\left((x^2-1)^m\right) \mathrm{d}x \right),
\end{aligned}$$

da $\frac{\mathrm{d}^{n-(i+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(i+1)}}\left((x^2-1)^n\right) = 0$ für $|x| = 1$ und $1 \leq i < n-1$, denn aus $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n = \left(x^2-1\right)^{n-k} p_k(x)$ folgt $\frac{d^k}{dx^k}\left(x^2-1\right)^n\Big|_{|x|=1} = 0.$
