Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

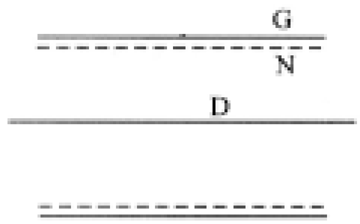
Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 2

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 26. - 30. April 2021
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Verständnisfragen*

a) *James Franck* (1882-1964) und *Gustav Hertz* (1887-1975) haben 1913 das Ihnen bekannte Experiment durchgeführt. Nebenstehend sehen Sie die Skizze des Versuchsaufbaus, der so beschrieben wurde: '[..] *D* ist ein Platindraht, dessen mittleres Stück dünner ist und durch elektrischen Strom zum Glühen gebracht werden kann. *N* ist ein feines Platindrahtnetz, welches den Draht *D* im Abstand von vier Zentimetern zylindrisch umgibt, und *G* eine zylindrische Platinfolie, welche von *N* einen Abstand von 1 bis 2 mm hatte. [..] Die meisten Ansätze laufen darauf hinaus, dass die Frequenz einer bestimmten Eigenschwingung eines Elektrons multipliziert mit der Konstanten *h* gleich der zur Ionisation benötigten Energie gesetzt wird.'



Beschreiben Sie den Franck-Hertz-Versuch und vergleichen Sie, welche Bauteile des heutigen Aufbaus der Originalveröffentlichung entsprechen. Schreiben Sie den letzten Satz des Zitats als Gleichung auf. Wie deutet man heute die angesprochene Frequenz und führt diese zur Ionisation?

b) Was ist ein Vektorraum? Was versteht man unter einem Hilbertraum? Erklären Sie, warum die Quantenmechanik einen Vektorraum zur Beschreibung physikalischer Zustände verwendet.

c) Erläutern Sie den Begriff 'linearer Operator'. Geben Sie Beispiele für solche Operatoren.

2. *Kommutatoralgebra*

Wir betrachten Operatoren $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ und deren Kommutator $[\cdot,\cdot]$ auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$.

a) Zeigen Sie, dass die Produktregel gilt:

$$[\hat{A}\,\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\,\hat{B} \quad \text{und} \quad [\hat{A}, \hat{B}\,\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\,\hat{C}\,.$$

b) Zeigen Sie die Jacobi-Identität:

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0.$$

Im Folgenden wollen wir annehmen, dass die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ jeweils mit ihrem Kommutator vertauschen, d.h. $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = 0$ und $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$.

c) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\,\hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}] \quad \text{und} \quad [\hat{A}^n, \hat{B}] = n\,\hat{A}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}].$$

Sind Ihnen diese sowie die Produktregel aus Teilaufgabe a) von einer anderen Rechenoperation vertraut?

d) Wir definieren die Funktion $F(\lambda)$ der Operatoren $\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}$ durch

$$F(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda \hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{\lambda \hat{\mathrm{B}}}\, \mathrm{e}^{-\lambda(\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}})}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}F(\lambda) = \lambda[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]F(\lambda)$ ist. Folgern Sie durch Integration dieser Differentialgleichung, dass

$$\mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{B}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\frac{1}{2}[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{B}}]} \quad \text{und} \quad \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{B}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{B}}}\, \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{[\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{B}}]}$$

Bemerkung: Die letzteren Formeln sind Spezialfälle der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel, wonach für zwei allgemeine Operatoren $\hat{\mathrm{A}}$ und $\hat{\mathrm{B}}$ gilt

$$\mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{B}}} = \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+Z(\hat{\mathrm{A}},\hat{\mathrm{B}})}$$

mit der Funktion

$$Z(\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}) = \frac{1}{2}[\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}] + \frac{1}{12}[\hat{\mathrm{A}}, [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]] - \frac{1}{12}[\hat{\mathrm{B}}, [\hat{\mathrm{A}}, \hat{\mathrm{B}}]] + \cdots\,,$$

worin die weiteren Terme höhere Kommutatoren enthalten. Insbesondere ist also im Allgemeinen $\mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}}\, \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{B}}} \neq \mathrm{e}^{\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}}$.
Der oben betrachtete Fall, dass zwei Operatoren jeweils mit ihrem Kommutator vertauschen, tritt in der Quantenmechanik oft auf, etwa wenn der Kommutator eine komplexe Zahl ist - wie z.B. der Kommutator von Orts- und Impulsoperator.

3. *Planck'sches Strahlungsgesetz*

Die Energiedichte der Hohlraumstrahlung im Frequenzintervall $[\nu, \nu + \mathrm{d}\nu]$ ist gegeben durch

$$u_\nu\, \mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}\right) - 1}\, \mathrm{d}\nu,$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum ist, c die Lichtgeschwindigkeit, k_B die Boltzmann-Konstante und T die Temperatur der Hohlraumstrahlung.

a) Bestimmen Sie die Energiedichte u_λ im Wellenlängenbereich $[\lambda, \lambda + \mathrm{d}\lambda]$. Zeigen Sie, dass das *Wien'sche Verschiebungsgesetz* $\lambda_\mathrm{max} T = \text{const.}$ gilt. Hierbei ist λ_max die Wellenlänge, bei der u_λ maximal wird.

b) Leiten Sie das *Stefan-Boltzmann-Gesetz* für die Gesamtenergiedichte $u = aT^4$ her. Bestimmen Sie a. Wie sähe die Proportionalität zwischen u und T allgemein in d Raumdimensionen aus und warum?*

c) Bestimmen Sie die Frequenz $\tilde{\nu}_\mathrm{max}$, bei der die spektrale Photonendichte $n(\nu)$ maximal wird. Wie sieht die Proportionalität zwischen der Gesamtphotonendichte n und T aus?

4. *Quantisierungsregel von Bohr und Sommerfeld für den harmonischen Oszillator*

Die Quantisierungsregel von Bohr und Sommerfeld besagt, dass der konstante Teil der Wirkung S_0 für ein sich periodisch bewegendes, gebundenes Teilchen der Masse m ein Vielfaches des Planck'schen Wirkungsquantums h sein muss, also

$$S_0 = \oint p\, \mathrm{d}q = nh,$$

wobei q eine verallgemeinerte Koordinate ist, p der dazu kanonisch konjugierte Impuls und $n \in \mathbb{N}$. Das Integral erstreckt sich über eine ganze Periode. Im Folgenden wollen wir daraus die Quantisierung der Energieniveaus für den harmonischen Oszillator herleiten.

**Hinweis:* Benutzen Sie, dass $\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^n}{\exp(x)-1} = \zeta(n+1)\,\Gamma(n+1)$ ist, mit $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ und $\Gamma(n+1) = n!$, falls $n \in \mathbb{N}$.

a) Wie lautet die Differentialgleichung für den ungedämpften harmonischen Oszillator mit der Kreisfrequenz ω in einer Raumdimension x? Wie lauten $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$?

b) Zeigen Sie, ausgehend von obiger Quantisierungsregel, dass der harmonische Oszillator quantisierte Energieniveaus $E_n = n\hbar\omega$ mit $\hbar = h/(2\pi)$ haben muss.

5. Gauß'sches Wellenpaket

Der Zustand eines freien Teilchens in einer Dimension ist zu einem festen Zeitpunkt ($t = 0$) durch die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{\sqrt{2\pi}} \phi(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

im Ortsraum gegeben. Die Funktion $\phi(k)$ sei eine Gauß-Funktion der Form

$$\phi(k) = A\, \mathrm{e}^{-a^2k^2}$$

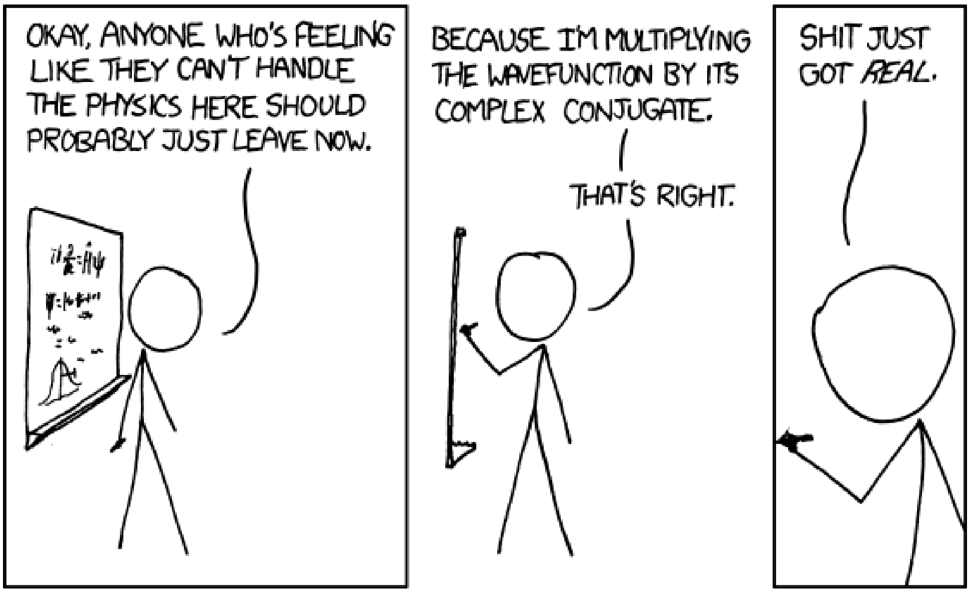
mit Normierung A und $a \in \mathbb{R}$.

a) Was bedeutet die Form der Funktion $\phi(k)$ physikalisch? Bestimmen Sie A so, dass $\langle\phi|\phi\rangle = 1$ ist.

b) Berechnen Sie für den Zustand $\psi(x)$ die Erwartungswerte $\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle$ und $\langle\hat{\mathrm{Q}}^2\rangle$, wobei $\hat{\mathrm{Q}}$ den Ortsoperator bezeichnet.

c) Der Impulsoperator in einer Dimension ist in Ortsdarstellung gegeben durch $\hat{\mathrm{P}} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Berechnen Sie für den Zustand $\psi(x)$ die Erwartungswerte $\langle\hat{\mathrm{P}}\rangle$ und $\langle\hat{\mathrm{P}}^2\rangle$.

d) Berechnen Sie außerdem das Schwankungsprodukt $(\Delta\,\hat{\mathrm{Q}})(\Delta\,\hat{\mathrm{P}})$ und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Unbestimmtheitsrelation, die Sie unter Gleichung (3.11) im Skript finden.



xkcd.com/849