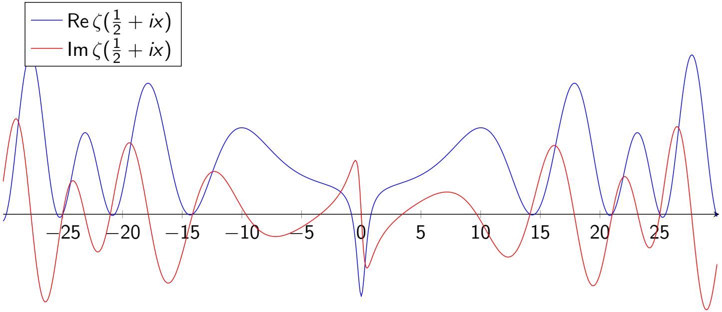
Die Riemannsche Zeta-Funktion

Josua Kugler

03.11.2020

Definition (Riemannsche ζ-Funktion)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$



Lemma (Konvergenzgebiet)

$\zeta(s)$ *konvergiert normal auf der offenen Halbebene* $\operatorname{Re} s > 1$.

Beweis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}}.$$

□

Lemma (Eulerprodukt)

Die Riemannsche ζ-Funktion lässt sich als absolut konvergentes unendliches Produkt schreiben:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Beweis.

$$\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

□

Beweis.

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

□

Beweis.

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} \left(p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

□

Beweis.

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \sum_{\nu_1,\dots,\nu_m=0}^{\infty} \left(p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

$\square$

Beweis.

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{\nu_1,\dots,\nu_m=0}^{\infty}\left(p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

□

Beweis.

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{\nu_1,\dots,\nu_m=0}^{\infty}\left(p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

$\square$

Beweis.

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{\nu_1,\dots,\nu_m=0}^{\infty}\left(p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

$\square$

Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\sum_p \left|1 - \frac{1}{1-p^{-s}}\right| = \sum_p \left|1 - \sum_{m=0}^{\infty} p^{-ms}\right|$$
$$\leq \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \left|p^{-ms}\right|$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{-s}\right|$$

□

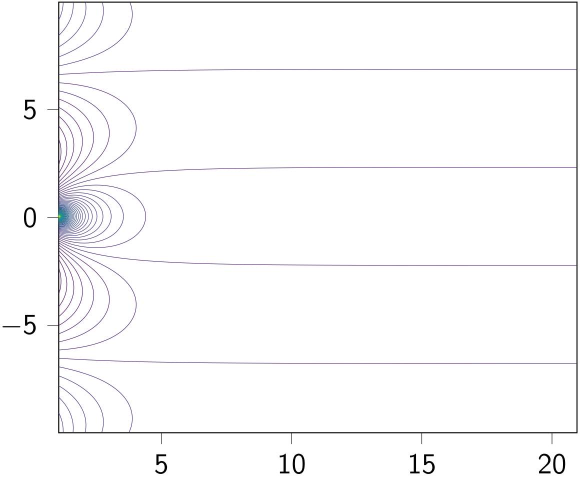


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Betrag.

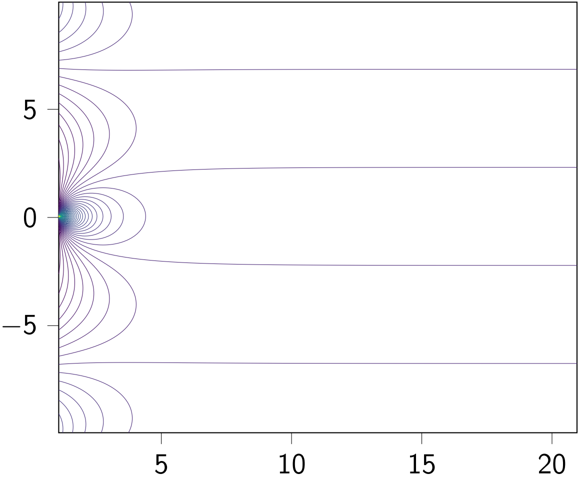


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Realteil.

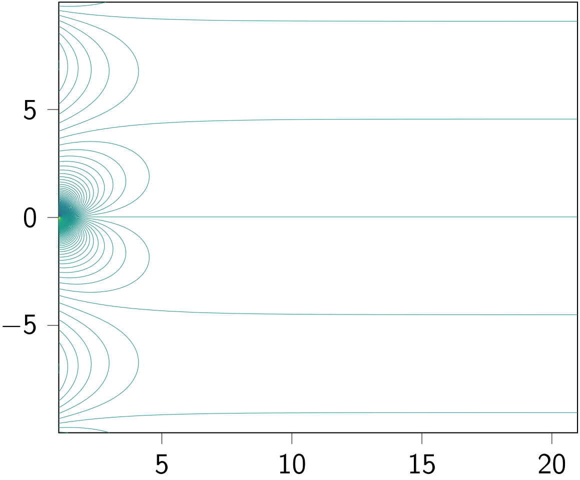


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Imaginärteil.

Definition (θ-Funktion)

Die Thetafunktion ist gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}.$$

Definition (θ-Funktion)

Die Thetafunktion ist gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}.$$

- konvergiert für $\operatorname{Im} z > 0$ (Majorantenkriterium)

Definition (θ-Funktion)

Die Thetafunktion ist gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}.$$

- konvergiert für $\operatorname{Im} z > 0$ (Majorantenkriterium)
- erfüllt die Thetatransformationsformel:

$$\theta(z) = \theta\left(-\frac{1}{z}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{z}}$$

$$\Leftrightarrow \theta(it) = \theta\left(-\frac{1}{it}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{it}} = \theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}}.$$

Lemma

Die Funktion

$$R_\infty(s) := \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

ist ganz.

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t (n^2-1)} \leq B(t) \leq B(1) =: B.$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq B e^{-\pi t}$.
Daraus folgt

$$\int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq B \cdot \int_1^{\infty} e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leq B \cdot C \cdot \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

$\square$

Theorem

Die Riemannsche ζ-Funktion besitzt eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, wobei an der Stelle 1 eine einfache Polstelle vorliegt. Außerdem genügt

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| t \mapsto \pi n^2 t$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
\pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Bigg| \sum_{n=1}^\infty,\ s \mapsto s/2
\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
\sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \sum_{n=1}^\infty, \; s \mapsto s/2
\end{aligned}
$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\ \sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \sum_{n=1}^\infty, \; s \mapsto s/2 \\ \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \sum_{n=1}^\infty n^{-s} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
\sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \sum_{n=1}^\infty,\ s \mapsto s/2 \\
\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}$$

Beweis.

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\operatorname{Re} s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= \pi^{-\operatorname{Re} s/2} \Gamma(\operatorname{Re} s/2) \zeta(\operatorname{Re} s)$$
$$< \infty$$

gilt nach dem Satz von Fubini/Tonelli für absolut konvergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_0(s)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_\infty(s)}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \underbrace{\int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_0(s)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_\infty(s)} \\
&= R_0(s) + R_\infty(s)
\end{aligned}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$\Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\ &= \int_0^1 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} && \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} && \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(iu\right) \cdot u^{\frac{1}{2}} - 1}{2} u^{-s/2-1} \mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} && \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(iu\right) \cdot u^{\frac{1}{2}} - 1}{2} u^{-s/2-1} \mathrm{d}u \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}}-1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \frac{1}{2}\frac{2}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{2}\frac{2}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty
\end{aligned}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \frac{1}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}}-1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \frac{1}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty \\
&= R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\
&= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s)\\ &= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\\ \zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right)\end{aligned}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$
$$= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right)$$

- R_∞ und Γ sind ganz

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s)\\ &= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\\ \zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right)\end{aligned}$$

- R_∞ und Γ sind ganz
- Γ besitzt keine Nullstellen

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s)\\ &= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\\ \zeta(s) &= \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\right)\end{aligned}$$

- R_∞ und Γ sind ganz
- Γ besitzt keine Nullstellen

$\Rightarrow$ Einzige Singularitäten bei $s = 1$ und $s = 0$. Für $s = 0$ gilt:

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s \cdot \Gamma(s/2)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2\Gamma(s/2+1)} = \frac{1}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{2}$$

Ergebnis

- Für $\operatorname{Re} s > 1$ gilt

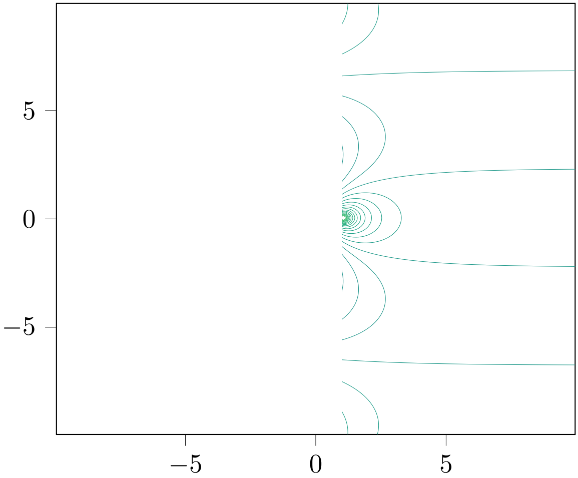
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right).$$

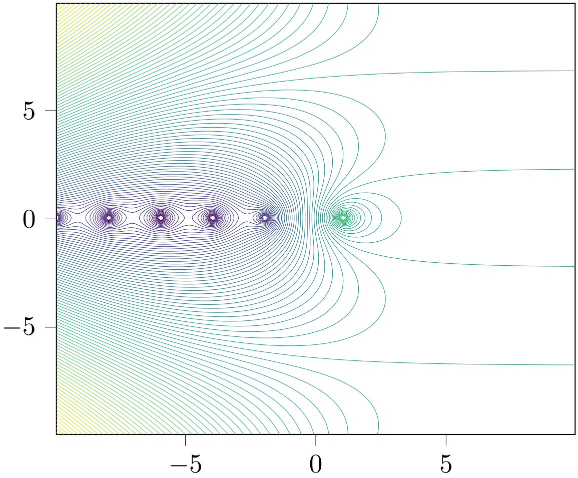
- Damit ist eine analytische Fortsetzung nach ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ gefunden, wobei an der Stelle $s = 1$ eine einfache Polstelle vorliegt.
- Aus der Gleichung

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

erkennt man sofort die geforderte Funktionalgleichung

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$


5
0
−5
−5
0
5


5
0
−5
−5
0
5

Theorem (Riemannsche Hypothese)

Abgesehen von den „trivialen“ Nullstellen bei $s = -2n,\ n \in \mathbb{N}$ *haben alle Nullstellen Realteil* $\frac{1}{2}$.

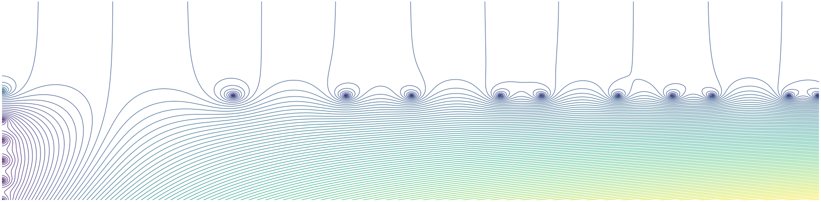


Abbildung: Imaginärteil der ζ-Funktion bei $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ von $\operatorname{Im} s = 0$ bis $\operatorname{Im} s = 50$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

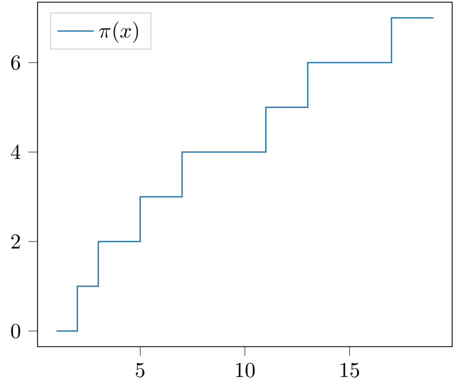


Abbildung: $\pi(x)$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

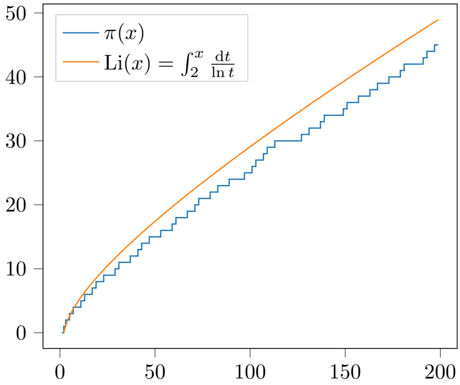


Abbildung: Eine Annäherung für $\pi(x)$.

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

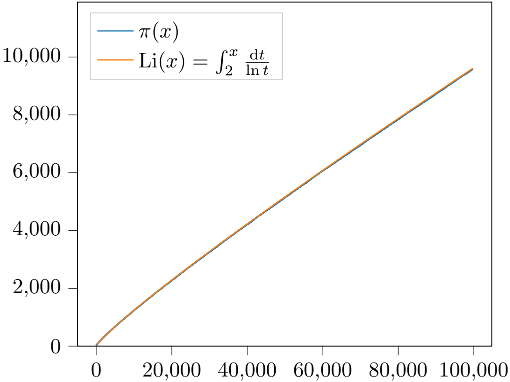


Abbildung: Eine Annäherung für $\pi(x)$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

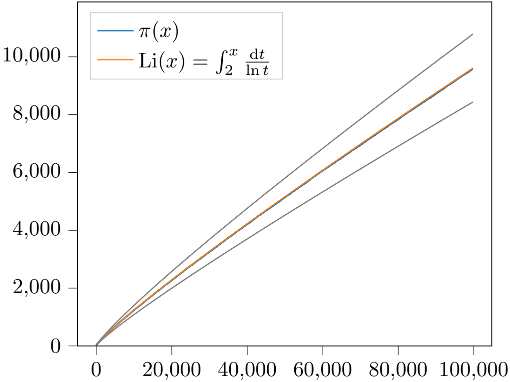


Abbildung: $|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \leq 0.2795 \frac{x}{(\log x)^{3/4}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\log x}{6.455}}\right) \forall x \geq 229$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

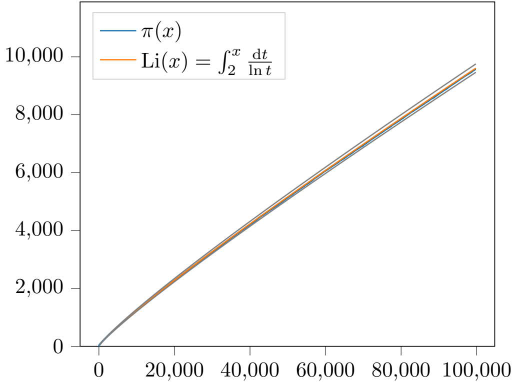


Abbildung: $|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < \frac{\sqrt{x}\log(x)}{8\pi} \forall x \geq 2657$

Literarurverzeichnis

J. Neukirch.
Algebraische Zahlentheorie.
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

E. Freitag., R. Busam
Funktionentheorie 1.
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

T. Trudgian
Updating the error term in the prime number theorem.
Ramanujan Journal. 39 (2):225-234.