Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 8

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 22. Januar

Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Darauf operiert die Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ durch Möbius-Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \langle \tau \rangle = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \ .$$

Seien j und $\lambda(\tau) = (e_3(\tau) - e_2(\tau))/(e_1(\tau) - e_2(\tau))$ die Modulfunktionen aus der Vorlesung. Sie können bei jeder Aufgabe die Ergebnisse der vorherigen nutzen, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben. Die besten vier Aufgaben werden gewertet.

35. Aufgabe: (1+1+2=4 Punkte) Sei $\phi : \Gamma/\Gamma[2] \to \mathrm{Bij}(\{e_1, e_2, e_3\})$ der Isomorphismus aus Aufgabe 28c).

(a) Machen Sie diesen explizit, indem Sie $\phi(T)e_i$ und $\phi(S)e_i$ bestimmen für $i = 1, 2, 3$.

(b) Bestimmen Sie Vertreter von $\Gamma/\Gamma[2]$ als Produkte von S und T.

(c) Zeigen Sie $\{\lambda|_0 M \mid M \in \Gamma\} = \{\lambda, \lambda^{-1}, 1 - \lambda, 1 - \lambda^{-1}, (1 - \lambda)^{-1}, \lambda/(1 - \lambda)\}$.

Hinweis: Für eine Menge X bezeichnet $\mathrm{Bij}(X)$ die Gruppe der Bijektionen $X \to X$.

36. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Wir entwickeln die Eisensteinreihen als Fourierreihen.

(a) Zeigen Sie für ganze $k \geq 2$ und $\tau \in \mathbb{H}$ die Reihenentwicklung

$$(-1)^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \exp(2\pi i n \tau) \ .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst den Fall $k = 2$. Aufgaben 48, 49 aus FT1 sind nützlich.

(b) Sei G_k die Eisensteinreihe zur vollen Modulgruppe von geradem Gewicht $k \geq 4$. Für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ gilt dann

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i \tau n} \ .$$

Hier ist $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ ist die Teilersumme der k-ten Potenzen und $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ für $k \geq 2$.
Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Summationsreihenfolge.

37. Aufgabe: (4 Punkte) Seien $(X, \mathfrak{U}_X)$ und $(Y, \mathfrak{U}_Y)$ topologische Räume. Wir erklären die Produkttopologie $\mathfrak{U}_{X \times Y}$ auf $X \times Y$ als die Topologie erzeugt von der Basis

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathfrak{U}_X, V \in \mathfrak{U}_Y\} \ .$$

Zeigen Sie: Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist gleich der Euklidischen Topologie.

38. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $f : (X, \mathfrak{U}_X) \to (Y, \mathfrak{U}_Y)$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Zeigen Sie: Ist M eine quasikompakte Teilmenge von X, dann ist auch $f(M)$ quasikompakt.

39. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $(X, \mathfrak{U}_X)$ ein topologischer Raum. Wir versehen $X \times X$ mit der Produkttopologie. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Diagonale $\Delta X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.

(b) $(X, \mathfrak{U}_X)$ ist separiert.