Aufgabe 1

(a) Sei $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Dann gilt

  (i) $\Omega \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \implies \Omega \in \mathcal{A}$.

  (ii) $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \implies A, b \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \implies A^c \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \implies A^c \in \mathcal{A}$.

  (iii) $A_j \in \mathcal{A} \forall j \in J \implies A_j \in A_i \forall i \in I \forall j \in J \implies \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}_i \forall i \in I \implies \bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}$.

(b) Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ und $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Dann sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$ σ-Algebren (wie man durch genaues Hinschauen sehr schnell sieht). Allerdings ist $\mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ keine σ-Algebra, da $\{1, 3\} \cap \{2, 3\} = \{3\}$ nicht in $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}$ enthalten ist.

(c) (i) $f^{-1}(\Omega) = \mathcal{X}$.

  (ii) Sei $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{A})$. Es gilt $f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{A}) \implies A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A} \implies f^{-1}(A^c) \in f^{-1}(\mathcal{A}) \implies f^{-1}(A)^c \in f^{-1}(\mathcal{A})$.

  (iii) Seien $f^{-1}(A_n) \in f^{-1}(\mathcal{A}) \forall n \in \mathbb{N}$. Es gilt $f^{-1}(A_n) \in f^{-1}(\mathcal{A}) \forall n \in \mathbb{N} \implies A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \implies f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \in f^{-1}(\mathcal{A}) \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \in f^{-1}(\mathcal{A})$.

(d) (a) Wegen $\Omega \cap T = T$ liegt T in $\mathcal{A}_{|T}$.

  (b) Sei $A \in \mathcal{A}_{|T}$. Dann $\exists B \in \mathcal{A}$ mit $B \cap T = A$. Mit B liegt auch B^c in $\mathcal{A}$. Dann liegt aber auch $B^c \cap T = T \setminus B$ in $\mathcal{A}_{|T}$. Dabei ist $T \setminus B$ das Komplement von B bezüglich T.

  (c) Sei $A_n \in \mathcal{A}_{|T} \forall n \in \mathbb{N}$. Dann $\exists B_n \in \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}_n \cap T = A_n \forall n \in \mathbb{N}$. Da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, liegt auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ in $\mathcal{A}$ und somit $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) \cap T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\mathcal{A}_{|T}$.

Aufgabe 2

(a) Zunächst gilt $A, B \in \mathcal{A} \implies B \setminus A \in \mathcal{A}$. Da $A \subset B$ dürfen wir B als disjunkte Vereinigung schreiben, $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}((B \setminus A) \uplus A) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(A)$, woraus schon die Behauptung folgt.

(b) Es gilt $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| = |\mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) - (\mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(B \cap A))| = |\mathbb{P}(A \setminus B) - \mathbb{P}(B \setminus A)| \leq \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A \triangle B)$.

(c) Wir greifen die Definition aus dem Hinweis auf, $B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$ und können damit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ als disjunkte Vereinigung der B_n darstellen,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \biguplus_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Insbesondere erhalten wir also

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

Nun können wir für jedes $\mathbb{P}(B_N)$ die Monotonieeigenschaft ausnutzen, $\mathbb{P}(B_n) \leq \mathbb{P}(A_n)$, da $B_n \subset A_n$ und schließen also

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(d) Analog zu gerade eben schreiben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} B_i\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{n} B_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt benutzen, dass $A_{n-1} \subset A_n$.

Aufgabe 3

(a) Der Induktionsanfang ist offensichtlich wahr, $\mathbb{P}(A_1) = (-1)^0 \cdot \mathbb{P}(A_1)$. Gelte die Behauptung also für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann folgern wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) =& \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j \cap A_{n+1}\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
& - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap A_{n+1})\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
& - \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_j\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}((A_{k_1} \cap A_{n+1}) \cap \dots \cap (A_{k_j} \cap A_{n+1}))\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
& - \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_j\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j} \cap A_{n+1})\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n+1\} \\ \forall i:\, k_i \neq n+1}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
& + \sum_{j=2}^{n+1}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{\{k_1,\dots,k_j\}\subset\{1,\dots,n+1\} \\ \exists i:\, k_i = n+1}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) \\
=& \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n+1\} \\ \forall i:\, k_i \neq n+1}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) \\
& + \sum_{j=1}^{n+1}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\substack{\{k_1,\dots,k_j\}\subset\{1,\dots,n+1\} \\ \exists i:\, k_i = n+1}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right)
\end{aligned}$$

Für $j = n+1$ gilt $\{k_1, \dots, k_j\} = \{1, \dots, n+1\}$. Daher können wir die beiden Summen im letzten Schritt einfach zusammenfassen und erhalten

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n+1}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right),$$

was zu zeigen war.

(b) Wir stellen zunächst alle roten Marsmenschen in eine Reihe und nummerieren die Plätze von 1 bis n. Danach teilen wir die grünen Marsmenschen zufällig auf. Wir erhalten also eine Permutation von n grünen Marsmenschen. Daher definieren wir $\Omega = \mathfrak{S}_n$ (Permutationsgruppe von $\{1, \dots, n\}$). Dann ist $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(i) = i\}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass $\{\sigma\}$ für ein $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ eintritt, beträgt genau $\frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} = \frac{1}{n!}$, da alle Permutationen gleichwahrscheinlich sein sollen. Wir definieren also $\mathbb{P}(\{\sigma\}) = \frac{1}{n!}$. Da es sich um einen diskreten Raum handelt, lässt sich jedes Element von $\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(\Omega)$ als disjunkte Vereinigung von den Elementarereignissen $\{\sigma\}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ schreiben. Daher erhalten wir $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{n!}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein ursprüngliches Paar miteinander tanzen wird, beträgt daher

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_j})\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \mathbb{P}(\{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \sigma(k_j) = k_j \forall 1 \le j \le n\})\right)\end{aligned}$$

Es sind also j Werte der Permutation bereits festgelegt, daher dürfen die restlichen $n - j$ Werte beliebig gewählt werden. Dafür gibt es $(n - j)!$ verschiedene Möglichkeiten

$$= \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}\subset\{1,\dots,n\}} \frac{(n-j)!}{n!}\right)$$

Es ist allgemein bekannt, dass es $\binom{n}{j}$ verschiedene Möglichkeiten gibt, j Elemente aus einer Menge von n Elementen auszuwählen

$$\begin{aligned}&= \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \binom{n}{j}\frac{(n-j)!}{n!}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \frac{n!}{(n-j)! \cdot j!}\frac{(n-j)!}{n!}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j!}\end{aligned}$$

Der Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$ beträgt

$$-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}.$$

Aufgabe 4

(a) $\mathbb{F}(x_2) = \mathbb{P}((-\infty, x_2]) = \mathbb{P}((-\infty, x_1] \uplus (x_1, x_2]) = \mathbb{F}(x_1) + \mathbb{P}((x_1, x_2]) \geq \mathbb{F}(x_1)$.

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{F}(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
$\lim\limits_{x \to \infty} \mathbb{F}(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}((-\infty, \infty)) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1$

(c) $\lim\limits_{x_n \searrow x} \mathbb{F}(x_n) = \lim\limits_{x_n \searrow x} \mathbb{P}((-\infty, x] \uplus (x, x_n]) = \mathbb{F}(x) + \lim\limits_{x_n \searrow x} \mathbb{P}((x, x_n]) = \mathbb{F}(x) + \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{F}(x)$

(d) Sei x eine Sprungstelle. Für $x_n \searrow x$ erhalten wir $\lim\limits_{x_n \to x} \mathbb{F}(x_n) = \mathbb{P}((-\infty, x])$. Außerdem gilt $\lim\limits_{x_n \nearrow x} \mathbb{F}(x) = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}((-\infty, x))$. Da x eine Sprungstelle ist, gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \nearrow x} \mathbb{F}(x) &\neq \lim_{x_n \searrow x} \mathbb{F}(x) \\ \mathbb{P}((-\infty, x)) &\neq \mathbb{P}((-\infty, x]) = \mathbb{P}((-\infty, x)) + \mathbb{P}(\{x\}) \\ 0 &\neq \mathbb{P}(\{x\}) \implies x \text{ Atom} \end{aligned}$$

Nach Vorlesung besitzt ein Wahrscheinlichkeitsraum aber höchstens abzählbar viele Atome, woraus sofort die Behauptung folgt.