# Dynamische Systeme Skript

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra

Wintersemester 2021/2022

## Einleitung

Diese Vorlesung wird sich mit dynamischen Systemen beschäftigen, also mit Systemen, die sich in der Zeit ändern. Die Vorlesung wird hauptsächlich in Banach Räumen arbeiten, da hier die Methoden einfacher auf partielle Differenzialgleichungen übertragbar sind.

**Beispiele:**

1. Mechanische Systeme, z.B. Bewegung von Planeten
2. Chemische Systeme, z.B. Reaktionsverläufe
3. biologische Systeme, z.B. Wachstum von Populationen
4. Ökonomische Systeme, z.B. Entwicklung von Angebot und Nachfrage

**Zu Beispiel 1**

*Newtons Gesetz*: Die Beschleunigung eines Massenpunktes $x(t) \in \mathbb{R}^3$ der Masse $m$ ist proportional der ausgeübten Kraft $F$:

$$m\ddot{x}(t) = F.$$

Wie entwickelt sich $x(t)$ bei gegebenem Anfangszustand $x(0), \dot{x}(0)$?

- Bei konstanter Kraft $F = (0, 0, -g)$ kann dies explizit gelöst werden
- Betrachtet man die Gravitationskraft zwischen $N$ Körpern $x_i \in \mathbb{R}^3$ durch

$$m_i\ddot{x}_i(t) = -\sum_{j \neq i} \gamma m_i m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3},$$

  so kann dieses Problem für $N > 2$ nicht mehr explizit gelöst werden. Dies führt zu natürlichen Fragen wie "Gibt es immer Lösungen?", "Kann ein Zusammenstoß $x_i(t) = x_j(t)$ geschehen?", "Gibt es periodische Lösungen?", oder "Ist das Verhalten chaotisch?"

### Zu Beispiel 2

*Chemische Reaktionsnetzwerke.* Sei $x_i$ die Konzentration der Spezies $A_i, i = 1, ..., M$, dann gilt für die stöchiometrischen Koeffizienten $\mu_{ij}, \nu_{ij}$ die Reaktion

$$\sum_{i=1}^{M} \nu_{ij} A_i \xrightarrow{k_j} \sum_{i=1}^{M} \mu_{ij} A_i, \quad j = 1, ..., N.$$

Das Massenwirkungsgesetz ergibt die Differentialgleichung

$$\dot{x}_i = \sum_{i=1}^{N} (\mu_{ij} - \nu_{ij}) K_j \prod_{i=1}^{M} x_i^{\nu_{ij}}.$$

Natürliche Fragen in diesem Zusammenhang wären "Gibt es einen Gleichgewichtspunkt und ist er stabil?", und "Wie hängt das Langzeitverhalten von den Parametern ab?"

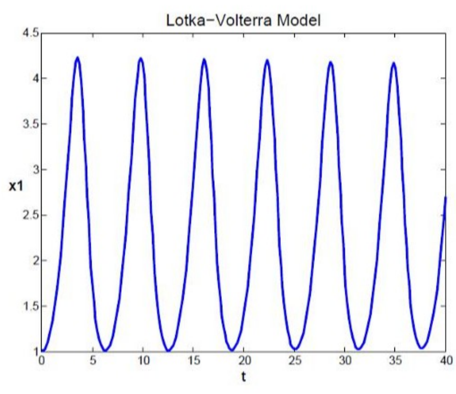
### Zu Beispiel 3

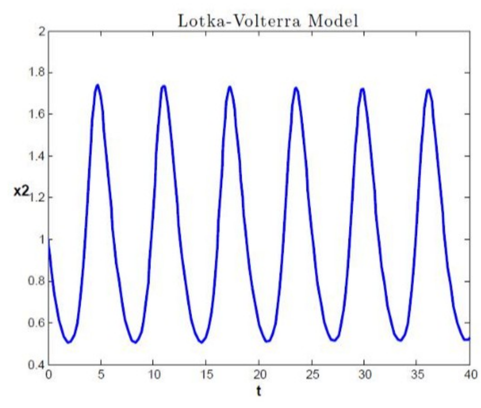
Das klassische *Räuber-Beute-Modell* (Lotka-Volterra).
Sei $x(t)$ die Anzahl der Beutetiere und $y(t)$ die Anzahl der Räuber.

$$\begin{cases} \dot{x} = & Ax - Byx = (A - By)x \\ \dot{y} = & Cyx - Dy = (Cx - D)y \end{cases}$$

Kann eine Population beliebig wachsen oder aussterben? Gibt es ein stabiles Gleichgewicht oder periodisches Verhalten?
Mann kann auch ein Modell mit diskreter Zeit betrachten (jährliche Beobachtung der Population) und erhält die Iteration

$$\begin{cases} x_{n+1} = & x_n + (A - By_n)x_n \\ y_{n+1} = & y_n + (Cx_n - D)y_n. \end{cases}$$



Viele numerische Verfahren beruhen auf Iterationen einer Abbildung, z.B. das Newton Verfahren, zum Auffinden von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit Hilfe von der Iteration

$$x_n = x_{n-1} - (Df)^{-1}(x_n)f(x_n).$$

In Abhängigkeit vom Anfangswert $x_0$ kann $x_n$ gegen verschiedene Fixpunkte konvergieren.

Eine weitere Anwendung ist die *symbolische Dynamik*. Sei

$$M = \{0, 1, ..., N\}^{\mathbb{N}} = \{s \,|s = (s_1, s_2, ...), s_i \in \{0, 1, ..., N\}\}$$

die Menge aller Folgen mit $s_i \in \{0, 1, ..., N\}$. Sei $f : M \to M, f(s)_i = s_{i+1}$ definiert die sogenannte *Shift Dynamik*. Eine Verallgemeinerung sind sogenannte *celluläre Automaten*. Hier hängt $(f(s)_i)_i$ nur von den endlich vielen $s_j, j = i - d, ..., i + d$ ab. Eine 2-dimensionale Variante ist das *Game of Life*.

# 1 Mathematische Grundlagen

**Definition 1.1** (Metrik)**.** *Eine **Metrik** ist eine Abbildung $d : M \times M \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in M$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in M$

Eine Metrik definiert eine *Topologie* auf $M$. Eine Topologie definiert, welche Mengen als offen gelten und welche nicht. Steht eine Metrik zur Verfügung, kann man diese benutzen um eine induzierte Topologie zu definieren. So heißt eine Menge $O \subset M$ offen, genau dann, wenn $\forall\, x \in M\, \exists, \delta > 0 : B_\delta(x) \subset O$. Hierbei ist

$$B_\delta(x) = \{y \in M \,|d(x, y) < \delta\},$$

also eine Kugel mit Radius $\delta$ um $x$ ist. Mit dieser Topologie heißt $(M, d)$ metrischer Raum. Die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, üblicherweise geschrieben als $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, bedeutet also, dass

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N\, \forall\, n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

**Definition 1.2** (Stetigkeit)**.** *Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ zwei metrische Räume und sei $f : M_1 \to M_2$ eine Funktion. $f$ nennt man stetig in einem Punkt $x \in M_1$, falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 : d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

*Dazu äquivalent ist: Für alle offenen Mengen $O \subset M_2$ ist $f^{-1}(O) = \{x \in M_1 \,|f(x) \in M_2\} \subset M_1$ offen.*

**Definition 1.3** (Norm). *Sei $X$ ein Vektorraum. Eine Abbildung $||\cdot|| : X \to [0, \infty)$ heißt **Norm** falls:*

1. $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

***Bemerkung:*** *Jede Norm induziert eine Metrik, indem man*

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

*setzt. Damit wird $(X, \|\cdot\|)$ zu einem normierten Vektorraum. Zwei Normen $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ auf einem Vektorraum $X$ heißen äquivalent, falls es Konstanten $0 < c < C$ gibt, sodass*

$$c\,|x|_1 \leq |x|_2 \leq C\,|x|_1 \;\; \forall x \in X.$$

*Äquivalente Normen liefern dieselbe Topologie.*

**Definition 1.4** (Cauchy Folge). *Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **Cauchy Folge**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N$ existiert, so dass für alle $m, n > N$ folgendes gilt:*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

*Ein Raum $(X, d)$ in dem alle Cauchy Folgen gegen ein Element in $X$ konvergieren, heißt **vollständig**.*

**Definition 1.5** (Banachraum). *Ein **Banachraum** ist ein vollständiger, normierter Raum.*

**Definition 1.6** (Ableitung). *Seien $X, Y$ normierte Vektorräume. Eine Abbildung $F : X \to Y$ heißt differenzierbar in $x \in X$, falls ein stetiger, linearer Operator $K$ existiert, so dass:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{||h||_X} ||F(x + h) - F(X) - Kh||_Y = 0$$

**Satz 1.7** (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei $(X, ||\cdot||)$ ein Banachraum, $A \subset X$ abgeschlossen und $F : A \to X$ eine Kontraktion, d.h. es existiert ein $0 < \theta < 1$, sodass $||F(x) - F(y)|| \leq \theta ||x - y||$. Dann hat $F$ einen eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in A$.*

*Weiter gilt:*

$$||x - F^m(x_0)|| \leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} ||x_0 - F(x_0)|| \quad \forall x_0 \in A$$

**Beweis:** Wähle $x_0 \in A$ und definiere $x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq \sum_{i=m+1}^{n} \left|F^i(x_0) - F^{i-1}(x_0)\right| \leq \sum_{i=m+1}^{n} \theta^{i-1} \left|F(x_0) - x_0\right| \\ &= \frac{\theta^m - \theta^n}{1-\theta} \left|F(x_0) - x_0\right|. \end{aligned}$$

Daher ist $x_n$ eine Cauchyfolge und konvergent gegen ein $\bar{x}$, da $X$ ein Banachraum ist. Da $A$ abgeschlossen ist gilt $\bar{x} \in A$. Weil $F$ stetig ist folgt auch $x_{n+1} = F(x_n) \to F(\bar{x}) = \bar{x}$. Weiter folgt im Limes, dass

$$|\bar{x} - F^m(x_0)| \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} \left|x_0 - F(x_0)\right|.$$

Seien $x, y$ also zwei Fixpunkte von $F$, dann gilt

$$|x-y| = |F(x) - F(y)| \leq \theta \, |x-y|$$

woraus $x = y$ folgt. □

**Lemma 1.8.** *Seien $X, Y$ Banachräume und sei $U \subset X$ offen und konvex. Falls eine Abbildung $F : U \to Y$ differenzierbar ist, und $\sup_{x \in U} ||DF(x)|| \leq M$ gilt, so folgt:*

$$||F(a) - F(b)|| \leq M||a-b||$$

*Insbesondere ist $F$ dann eine Kontraktion, wenn $M < 1$.*

***Beweis:*** *Sei $g(t) := F(ta+(1-t)b)$, wo $a, b \in U$ und $t \in [0.1]$. Es gilt $g' := DF(ta-(1-t)b)(a-b)$. Ansatz: $F(a) - F(b)$ soll abgeschätz werden. Dafür partitionieren wir das Intervall $[0,1]$, auf dem $t$ definiert ist:*

*Für $n \geq N(\varepsilon)$ und $0 \leq k \leq n$ gilt:*

$$\begin{aligned} \left\| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right\| \leq & \left\| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) - g'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \right\| + \left\| g'\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \right\| \\ \leq & (\varepsilon + M)\frac{(a-b)}{n} \end{aligned}$$

*Summation über $k$ liefert:*

$$||F(a) - F(b)|| \leq (\varepsilon + M)|a-b|$$

*Für $\varepsilon \to 0$ folgt die Aussage.* □

**Satz 1.9** (Satz der impliziten Funktion)**.** *Seien $X, Y, Z$ Banach Räume, und sei $f : X \times Y \to Z$ stetig differenzierbar. Falls in einem Punkt $(x_0, y_0) \in X \times Y$ $D_y f(x_0, y_0) \in L(X, Y)$ ein linearer Isomorphismus ist, so folgt:*

*Es existieren zwei offene Umgebungen $U \subset X$ und $V \subset Y$ um $(x_0, y_0)$, auf denen eine eindeutige, stetig differenzierbare Funktion $g : U \to Y$ existiert, so dass:*

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$$

*Insbesondere kann man lokal nach $y$ auflösen.*

**Satz 1.10** (Satz der inversen Funktion)**.** *Seien $X, Y$ Banach Räume und $f : X \to Y$ stetig differenzierbar. Falls $DF(x_0) : X \to Y$ ein linearer Isomorphismus ist, so gilt:*

*Es existieren die offenen Umgebungen $U \subset X, V \subset Y$ mit $x_0 \in U, f(x_0) \in V$, so dass $f\big|_U : U \to V$ invertierbar ist. Insbesondere ist $f^{-1}$ stetig differenzierbar. Es gilt:*

- $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1} \quad \forall x \in U$
- $\left\|(I - f)^{-1}(y_1) - (I - f)^{-1}(y_2)\right\| \leq \frac{1}{1-\theta}|y_2 - y_1|$

# 2 Existenz und Eindeutigkeit

**Definition 2.1** (Autonomes System)**.** *In einem* ***autonomen System*** *hängt die Differenzialgleichung nicht explizit von der unabhängigen Variable ab.* ***Beispiel:***

$$\begin{aligned} \textit{autonom} &\iff y' = f(y(t)) \\ \textit{nicht autonom} &\iff y' = f(t, y(t)) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun Anfangswertprobleme für nicht autonome Systeme, i.e:

$$\begin{aligned} y'(t) =& f(t, y(t)) \qquad \text{mit } t \in [t_0, \infty) \\ y(t_0) =& x \end{aligned}$$

Wir nehmen $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, da $f$ im Urbild auch $t$ noch respektieren muss. Gesucht ist eine lokale Lösung des Anfangswertproblems $y : (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ für $\varepsilon > 0$.

Dieses Problem ist äquivalent zur Integralgleichung

$$y(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds.$$

**Bemerkung:** Integrierbar ist eine schwächere Forderung als Differenzierbar. Somit ist die Integralgleichung allgemeiner als die DGL.

**Satz 2.2** (Picard-Lindelöf / Cauchy-Lipschitz)**.** *Sei $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$, $U$ offen mit $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $(t_0, x) \in U$. Falls $f(t, y)$ lokal Lipschitz stetig bezüglich $y$, gleichmäßig in $t$ ist, so existiert eine eindeutige, lokal stetig differenzierbare Lösung der DGL.*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) = f(t, y),\ y(t_0) = x.$$

***Beweis:*** *Als Ansatz wollen wir den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Hierfür benötigen wir einen Operator, der sowohl eine passende abgeschlossene Menge auf eine abgeschlossene Menge abbildet, als auch eine Kontraktion ist.*

*Wir betrachten den Operator*

$$K(y)(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$

***Abgeschlossen auf abgeschlossen:*** *Sei $(X, ||\cdot||_\infty)$ mit $X = C(U, \mathbb{R}^n)$ ein Banachraum. Wähle $\tilde{\varepsilon} > 0$ und $\delta > 0$ so dass : $V = [t_0 - \tilde{\varepsilon}, t_0 + \tilde{\varepsilon}] \times \overline{B_\delta(x)} \subset U$. Sei $M := \sup_{(t,y) \in V} ||f(t, y)||$ und $L(V)$ die Lipschitz Konstante von $f$ auf $V$. Definiere $0 < \varepsilon < \min\left\{\tilde{\varepsilon}, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{L(V)}\right\}$ und $\tilde{X} := \{y \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid ||y - x||_\infty \leq \delta\}$. Sei $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, dann gilt für $t \in I, y \in \tilde{X}$:*

$$||K(y)(t) - x|| \leq \left\| \int_{t_0}^{t} ||f(s, y(s))ds|| \right\| \leq |t - t_0| \max_{(t,y) \in V} |f| \leq \varepsilon M \leq \delta$$

*Daraus folgt, dass $K(\tilde{X}) \subset \tilde{X}$.*

***Kontraktion:*** *Es gilt:*

$$\begin{aligned} ||k(y_1)(t) - K(y_2)(t)|| \leq & \left\| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\| \, ds \right\| \\ \leq & |t - t_0| L(V) ||y_1 - y_2|| \\ \leq & \varepsilon L(V) ||y_1 - y_2|| \end{aligned}$$

*Wir können nun $\varepsilon L(V)$ kleiner 1 zwingen, da wir unser $\varepsilon$ beliebig klein wählen können. Somit ist $K$ eine Kontraktion und hat einen eindeutigen Fixpunkt.* □

***Bemerkung:*** *Für die konstante Funktion $x$ konvergiert $K^n(x)$ gegen die Lösung der DGL.*

**Beispiele:**

1. Man betrachte

$$\begin{aligned} y'(t) &= Ay(t), \\ y(0) &= x \end{aligned}$$

   $A$ sei eine reelle $n \times n$-Matrix. Es gilt für $|t| < \varepsilon(x)$

$$\begin{aligned} K(x)(t) &= x + \int\limits_0^t Ax \ dt = (I + tA)x \\ K^m(x)(t) &= \sum_{i=0}^{m} \frac{(tA)^i}{i!} x \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^i}{i!} x \end{aligned}$$

   Tatsächlich konvergiert die Reihe für alle $t \in \mathbb{R}$, da die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert und $\|A\| < \infty$ gilt. Die Reihe kann gliedweise nach $t$ differenziert werden, daher stellt sie die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ dar.

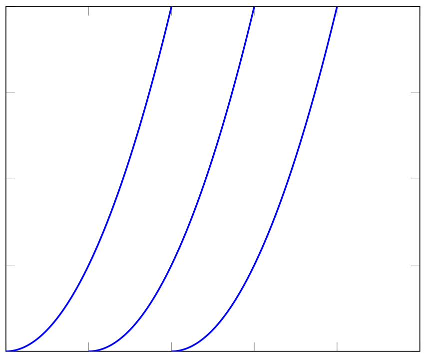
2. Falls $f$ nur stetig ist, gibt es auch eine lokale Lösung, die aber im Allgemeinen nicht eindeutig sein muss. Hier sei als ein mögliches Beispiel

$$\begin{aligned} y'(t) =& \sqrt{x(t)} \\ y(0) =& 0 \end{aligned}$$

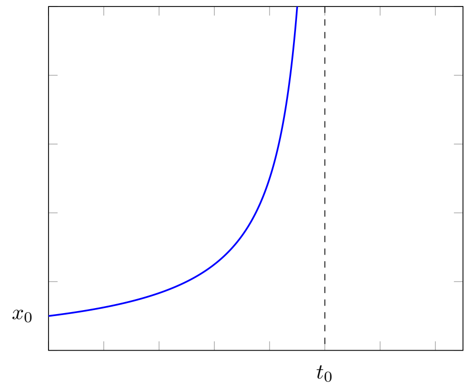
$$\text{Mit Lösung } y(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq t^* \\ \dfrac{1}{4}\left(t - t^*\right)^2 & t \geq t^* \end{cases}$$

3. Betrachte $y'(t) = (y(t))^2, \quad y(0) = x.$

   aus $\left\|x_2^2 - x_1^2\right\| = \|(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)\|$ kann lokal mit $2\,\|x_1 + x_2\|$ abgeschätzt werden. Die Lösung $y(t) = \frac{x}{1-tx}$ existiert für $x > 0$ nur auf $(-\infty, \frac{1}{x})$ und für $x < 0$ nur auf $(\frac{1}{x}, \infty)$, d.h. die Lösung ist nicht global existent.



2. Mögliche Lösungen der Anfanswertaufgabe, da die Steigung bei einem beliebigen Punkt $t^*$ anfangen kann, der durch die AWA nicht eindeutig impliziert wird.




3. Diese Lösung besitzt in $t_0$ einen Blowup. Sie kann ab $t_0$ nicht mehr fortgesetzt werden.

**Bemerkung:**

1. Ein nicht autonomes System
$$x' = f(t, x)$$
in $\mathbb{R}^n$ kann immer in ein autonomen System in $\mathbb{R}^{n+1}$ überführt werden, indem eine zusätzliche Variable $x_{n+1}(t) := t$ mit $x'_{n+1} = 1$ eingeführt wird.

2. Ein System $m$-ter Ordnung für $y(t) \in \mathbb{R}^n$
$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y'(t), \ldots, y^{(m-1)}(t))$$
$$y(t_0) = x_0,\ y'(t_0) = x_1, \ldots, y^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1}$$
lässt sich als System 1-ter Ordnung schreiben, indem man $z_i(t) = y^{(i)},\ i = 0, \ldots, m-1$ setzt. So erhält man
$$\begin{aligned} z_i'(t) &= z_{i+1}(t),\ i = 0, \ldots, m-1 \\ z_{m-1}'(t) &= f(t, z_0(t), \ldots, z_{m-1}(t)) \\ z_i(t_0) &= x_i,\ i = 0, 1, \ldots, m-1 \end{aligned}$$

## 2.1 Konstruktion von Lösungen

### 2.1.1 e-Funktion als Ansatz

Wir betrachten als erstes ein einfaches Beispiel, bei dem wir die Lösung direkt "raten" können

$$y'(t) = ry(t),\ y(0) = x$$

Der Ansatz ist $y(t) = ce^{rt}$. Dank des Startwerts $y(0) = x$ können wir die Konstante $c$ bestimmen, da gelten muss $y(0) = ce^0 = c = x$. Also erhalten wir als Lösung $y(t) = xc^{rt}$.

### 2.1.2 Geometrische Interpretation:

Eine skalare Gleichung

$$y'(t) = f(t, y)$$

bestimmt ein Richtungsfeld, das heißt in jedem Punkt $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ wird durch $y' = f(t, y)$ eine Steigung gegeben. Gesucht sind differenzierbare Funktionen $y(t)$ deren Graph $G(y) = \{(t, y(t))\,|t \in \mathbb{R}\}$ in jedem Punkt die vorgegebene Steigung hat. In einfachen Fällen kann man aus ihrem Richtungsfeld die möglichen Lösungen ersehen.

### 2.1.3 Methode der Trennung der Variablen

Wir betrachten die separable DGL

$$y'(t) = a(t)g(y(t))$$

Sei $y$ eine Lösung dazu. Für den Fall $g \neq 0$ gilt dann

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{y'(s)}{g(y(s))}\,ds = \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

Mithilfe der Substitution $z := y(s)$ ergibt sich aus dem Transformationssatz

$$\int\limits_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(z)}\,dz = \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

Löst man diese Gleichung nun nach $y(t)$ auf, so erhält man eine explizite Darstellung der Lösung.

**Beispiel:** Wir wollen auf die DGL

$$y'(t) = y^2,\ y(0) = y_0$$

den oben beschriebenen Lösungsweg anwenden. Nachdem wir integriert und substituiert haben erhalten wir

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{z^2}\, dz = \int_{t_0}^{t} dt$$

Löst man nun die Integrale, so erhalten wir

$$t - t_0 = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{z^2}\, dz = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)}$$

Auflösen nach $y(t)$ ergibt die Lösungsdarstellung

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0(t - t_0)}$$

### 2.1.4 Methode der Variation der Konstanten

Wir betrachten die DGL

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad t \in I = [t_0, t_0 + \tau] \subset \mathbb{R}$$

mit $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. Die zugehörige *homogene* DGL hat eine Lösung der Form

$$y(t) = C \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right), \quad c \in \mathbb{R}$$

Sei nun $x(t)$ eine Lösung mit $c = 1$. Zur Bestimmung einer Lösung der inhomogenen DGL wird $c$ als Funktion von $t$ angesetzt, also

$$y(t) := c(t)x(t).$$

Ableiten ergibt dann

$$\begin{aligned} y'(t) =& c'(t)x(t) + c(t)x'(t) = \underbrace{c'(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)}_{=b(t)} + \underbrace{c(t)a(t)x(t)}_{=a(t)y(t)} \\ =& a(t)y(t) + b(t) \end{aligned}$$

Daher nennt man diese Methode die Variation der Konstanten. Wegen $c'(t)x(t) = b(t)$ bekommen wir

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right) b(\tau)\,d\tau + r$$

mit einer freien Konstante $r \in \mathbb{R}$. Somit ergibt sich für die Lösung

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right) b(\tau)\,d\tau + r\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right).$$

Nun muss die Konstante so gewählt werden, dass die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ erfüllt ist, was bedeutet, dass $r = y_0$ gewählt werden muss und man erhält als Lösung

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\left[y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds\right) b(\tau)\,d\tau\right].$$

**Beispiel:**

$$y'(t) = ay(t) + b(t),\ y(0) = y_0,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$y(t) = y_0 e^{at} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)} b(\tau)\,d\tau.$$

### 2.1.5 Fortsetzbarkeit von Lösungen

**Lemma 2.3.** *Sei $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-stetig und seien $y_1, y_2$ Lösungen der DGL*

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

*Dann gilt:*

*i)* $y_1(t) = y_2(t)\ \forall t \in \bar{I} := I_1 \cap I_2$

*ii)*

$$y(t) := \begin{cases} y_1(t), & \text{für } t \in I_1 \\ y_2(t), & \text{für } t \in I_2 \end{cases}$$

*definiert eine eindeutige Lösung auf $I := I_1 \cup I_2$.*

***Beweis:*** *Wir lösen die DGL zuerst auf* $\bar{T} := I_1 \cap I_2$ *und setzen nach* $I := I_1 \cup I_2$ *fort. Sei* $I = (T_-, T_+)$, $\bar{T} = (t_-, t_+)$ *das maximale Intervall auf dem* $y_1$ *und* $y_2$ *übereinstimmen, und* $t_0 \in \bar{T}$. *Angenommen es gilt* $t_+ < T_+$

$\implies$ *aus Stetigkeit folgt* $y_1(t_+) = y_2(t_+)$

*Nun stellen wir eine DGL mit* $\tilde{y}(t_0) = y_1(t_+)$ *auf. Diese ist lokal eindeutig lösbar.*

$\implies$ $\tilde{y}$ *muss mit* $y_1$ *und* $y_2$ *in einer Umgebung von* $t_+$ *übereinstimmen.*
$\implies$ $\lightning$, *da* $t_+$ *nicht maximal war. Analog für* $t_-$

$\square$

**Korollar 2.4.** *Sei* $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ *lokal Lipschitz-stetig, dann existiert eine eindeutige Lösung auf einem maximalen Intervall* $(T_-(t_0, x), T_+(t_0, x))$, *die sogenannte maximale Lösung.*

***Beweis:*** *Nach obigem Lemma ist die Vereinigung aller Intervalle auf denen eine Lösung existiert das maximale Existenzintervall einer eindeutigen Lösung.* $\square$

**Lemma 2.5.** *Sei* $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ *lokal Lipschitz-stetig und sei* $y(t)$ *die Lösung der DGL auf* $(t_-, t_+)$, *so gilt:*

*Es existiert eine Fortsetzung auf ein Intervall* $(t_-, t_+ + \varepsilon)$ *für ein* $\varepsilon > 0$ *genau dann, wenn es eine Folge* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (t_-, t_+)$ *gibt, so dass*

$$(t_k, y(t_k)) \to (t_+, y) \quad \text{für } k \to \infty. \tag{1}$$

***Beweis:*** *"$\Leftarrow$" Sei (1) erfüllt. Wir behaupten:*

$$\lim_{t\to t_+} y(t) = y \tag{2}$$

*Es existiert ein* $\delta > 0$ *so dass*

$$V := [t_+ - \delta, t_+] \times \overline{B_\delta(y)} \subset U.$$

*und* $M := \sup_{(t,x)\in V} |f(t,x)| < \infty$. *Wir können* $t_{n+1} > t_n$ *annehmen. Für* $\tau_m \to t_+$ *existiert* $n(m) \to \infty$ *sodass* $\tau_m \in [t_{n(m)}, t_{n(m)+1})$ *gilt. Außerdem ist*

$$\left|y(\tau_m) - y(t_{n(m)})\right| \leq \int_{t_{n(m)}}^{\tau_m} |f(s, y(s))|\, ds \leq M \left|\tau_m - t_{n(m)}\right|$$

*und somit*

$$|y(\tau_m) - y| \leq M \left|\tau_m - t_{n(m)}\right| + \left|y(t_{n(m)}) - y\right| \to 0$$

*für $m \to \infty$. Dies zeigt die Behauptung. Da $(t_+, y) \in U$ ist gibt es eine lokale Lösung $z(t)$ auf $(t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon)$ mit Anfangswert $(t_+) = y$. Definiere*

$$w(t) = \begin{cases} y(t), & t \in (t_-, t_+) \\ z(t), & t \in [t_+, t_+ + \varepsilon) \end{cases}$$

*Nach der Behauptung ist $w(t)$ stetig und die rechtsseitige und linksseitige Ableitung in $t = t_+$ stimmen wegen der DGL überein. Damit ist $w(t)$ die gesuchte Fortsetzung.*

*" $\Rightarrow$ " Ist klar.* □

**Korollar 2.6** (Globale Existenz)**.** *Sei $y(t)$ eine Lösung auf $[t_0, t_+)$ mit $t_+ < \infty$. Sei $K$ ein Kompaktum derart, dass $[t_0, t_+] \times K \subset U$ mit $y(t) \in K$ $\forall t \in [t_0, t_+)$, dann gilt:*

*Es gibt eine Fortsetzung auf $[t_0, t_+ + \varepsilon]$. Falls es für alle $t_+ > t_0$ ein solche kompakte Menge $K(t_+)$ gibt, dann existiert die Lösung auf $[t_+, \infty)$.*

***Beweis:*** *Wähle $t_n \to t_+$ für $n \to \infty$. Betrachte die dazugehörige Bildfolge $y(t_n)$. Wegen der Kompaktheit von $K$ gibt es eine Teilfolge sodass $y(t_{n_i})$ gegen ein $y \in K$ konvergiert. Nach vorigem Lemma folgt die Aussage.* □

**Bemerkung:** In Anwendungen muss man also sogenannte *a priori Abschätzungen* für eine Lösung zeigen um globale Existenz zu erhalten. Dazu ist das folgende Lemma oft sehr nützlich:

**Lemma 2.7** (Gronwall)**.** *Seien $\psi, a, b \in C([t_1, t_2], \mathbb{R})$ mit $b(t) \geq 0$. Es gelte*

$$\psi(t) \leq a(t) + \int_{t_1}^{t} b(s)\psi(s)\, ds, \quad t \in [t_1, t_2]$$

*Dann folgt:*

$$\psi(t) \leq a(t) + \int_{t_1}^{t} a(s)b(s)e^{\int_s^t b(\tau)\, d\tau}\, ds, \quad t \in [t_1, t_2]$$

*Falls zusätzlich $a(t)$ nicht fallend ist, dann gilt*

$$\psi(t) \leq a(t)e^{\int_{t_1}^{t} b(s)\, ds}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

***Beweis:*** *Definiere $\phi(t) := \int_{t_1}^{t} b(s)\psi(s)\, ds$, dann gilt:*

$$\psi'(t) = b(t)\psi(t) \leq a(t)b(t) + b(t)\phi(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\phi(t)e^{-\int_{t_1}^{t} b(s)\, ds}\right) = (\phi'(t) - b(t)\phi(t))e^{-\int_{t_1}^{t} b(s)\, ds} \leq a(t)b(t)e^{-\int_{t_1}^{t} b(s)\, ds}$$

*Integration beider Seiten über $(t_1, t)$ liefert*

$$\phi(t)e^{-\int_{t_1}^{t} b(s)\,ds} \leq \int_{t_1}^{t} a(s)b(s)e^{-\int_{t_1}^{s} b(\tau)\,d\tau}\,ds$$

*und damit nach Multiplikation mit dem Exponentialausdruck*

$$\psi(t) \leq a(t) + \phi(t) \leq a(t) + \int_{t_1}^{t} a(s)b(s)e^{\int_{s}^{t} b(\tau)\,d\tau}\,ds$$

*Falls $a(t)$ nicht fallend ist, so folgt*

$$\psi(t) \leq a(t) + a(t)\int_{t_1}^{t} b(s)e^{\int_{s}^{t} b(\tau)\,d\tau}\,ds = -\,a(t)\int_{t_1}^{t} \frac{d}{ds}e^{\int_{s}^{t} b(\tau)\,d\tau}\,ds = a(t)e^{\int_{t_1}^{t} b(s)\,ds}$$

□

Da viele Probleme linear abgeschätzt werden können, ist es relevant, sich den linearen Fall anzuschauen:

**Satz 2.8** (Globale Existenz bei linearem Wachstum)**.** *Für $-\infty \leq T_1 < t_0 < T_2 \leq \infty$ sei $f \in C((T_1, T_2), \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-stetig. Es existieren die Funktionen $\alpha, \beta \in C((T_1, T_2), \mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta \geq 0$, so dass:*

$$|f(t, y)| \leq \alpha(t) + \beta(t)\,|y|\,, \quad T_1 < t < T_2$$

*dann existiert für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von*

$$\begin{aligned} y'(t) =& f(t, y(t)),\\ y(t_0) =& x \end{aligned}$$

*auf $(T_1, T_2)$. Insbesondere existiert die Lösung des linearen Systems*

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

*global, falls $A(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ und $b \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ gilt.*

**Beweis:** Nehme an für ein $x \in \mathbb{R}^n$ wäre $T_+(x) < T_2$, dann gibt es eine Konstante $C = C(T_+(x))$ sodass für $t_0 \leq t \leq T_+(x)$ $|\alpha(t)| \leq C$ und $|\beta(t)| \leq C$ gilt. Mithilfe von Integration folgt

$$|y(t)| \leq |x| + C\int_{t_0}^{t} 1 + |y(s)|\,ds, \quad t_0 \leq t < T_+(x).$$

Setze im Lemma von Grönwall $y(t) = 1 + |y(t)|\,, a(t) = 1 + |x|\,, b(t) = C$ und erhalte

$$|y(t)| \leq e^{C(t-t_0)}(1 + |x|) - 1.$$

Daraus folgt, dass $y(t)$ auf $0 < t < T_1(x)$ beschränkt ist, und somit fortgesetzt werden kann. Daher gilt $T_+(x) = T_2$. Analog folgt $T_-(x) = T_1(x)$. □

## 2.2 Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Wir betrachten nun Störungen der Anfangsdaten, oder der Parameter.Ein Anfangswertproblem ist *wohl gestellt*, falls die Lösung auf jedem kompakten Zeitintervall stetig von den Anfangswerten abhängt.

**Satz 2.9.** *Seien $f_1, f_2 \in C(U, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz stetig, und $U \in \mathbb{R}^{n+1}$ offen mit $(t_0, x_1), (t_0, x_2) \in U$. Seien $y_i$ Lösungen von*

$$\begin{aligned} y_i'(t) =& f_i(t, y_i) \\ y_i(t_0) =& x_i \end{aligned}$$

*auf dem maximalen Zeitintervall $I_i$.*

*Sei $t \in [t_1, t_2] = \bar{I} \subset I_1 \cap I_2$ und $(t, y_i(t)) \in V$, $V$ kompakt mit $\bar{V} \subset U$, so folgt:*

$$\|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \|x_1 - x_2\| \, e^{L\|t-t_o\|} + \frac{M}{L}\left(e^{L\|t-t_0\|} - 1\right)$$

*wo $L(U)$ die Lipschitzkonstante von $f_1$ auf $\bar{V}$ ist, und $M := \sup_{(t,y)\in\bar{V}} \|f_1(t, y) - f_2(t, y)\|$. Damit hängt die Lösung lokal Lipschitz-stetig von den Anfangswerten und der rechten Seite ab.*

***Beweis:*** *Benutze die Integraldarstellung für $t \geq t_0$*

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| \leq& |x_1 - x_2| + \int_{t_0}^{t} |f_1(s, y_1(s)) - f_2(s, y_2(s))| \, ds \\ \leq& |x_1 - x_2| + \int_{t_0}^{t} |f_1(s, y_1(s)) - f_1(s, y_2(s))| \, ds \qquad \textit{(Dreiecksungleichung)} \\ &+ \int_{t_0}^{t} |f_1(s, y_2(s)) - f_2(s, y_2(s))| \, ds \\ \leq& |x_1 - x_2| + \int_{t_0}^{t} L\,|y_1(s) - y_2(s)| + M \, ds \qquad \textit{(Lipschitzstetigkeit)} \end{aligned}$$

*Setze in Grönwalls Lemma $\psi(t) = L\,|y_1(t) - y_2(t)| + M$, so gilt*

$$\psi(t) \leq |x_1 - x_2| + M + L \int_{t_0}^{t} \psi(s) \, ds$$

*und somit ergibt sich*

$$\psi(t) \leq (L\,|x_1 - x_2| + M)\, e^{L|t-t_0|}$$

*Durch Äquivalenzumformung erhält man*

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \frac{\psi(t)}{L} - \frac{M}{L} = \left(|x_1 - x_2| + \frac{M}{L}\right) e^{L|t-t_0|} - \frac{M}{L}$$

*Somit gilt die Aussage für $t \geq t_0$. Der Fall $t < t_0$ folgt analog.* □

Wir benötigen später auch die differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten. Sei $\Phi(t,x)$[1] eine lokale Lösung der Anfangswertaufgabe. Nun gilt:

$$\partial_t \Phi(t,x) = f(t, \Phi(t,x)) \text{ mit } f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$$

Wir nehmen zunächst an, dass $\Phi(t,x)$ differenzierbar bezüglich $x$ ist. So folgt, dass auch $f(t,\Psi(t,x))$ und $\partial_t \Psi(t,x)$ differenzierbar bezüglich $x$ sind.
Sei $A(t,x) := D_x \Psi(t,x)$, dann gilt

$$\partial_t A(t,x) = D_y f(t, \Phi(t,x)) A(t,x)$$

Es gilt $\Psi(t_0,x) = x \implies A(t_0,x) = I$

Man bezeichnet das $n \times n$ System $A$ als **erste Variation** der DGL. Beachte, dass die rechte Seite linear ist, also insbesondere Lipschitz-stetig ist. Damit hat das System der ersten Variation eine eindeutige lokale Lösung $A(t,x)$ die nach Satz 2.8 so lange existiert wie $\Phi(t,x)$. $A(t,x)$ erfüllt die zugehörige Integralgleichung

$$A(t,x) = I + \int_{t_0}^{t} D_y f(s, \Phi(s,x)) A(s,x)\, ds$$

Es bleibt zu zeigen, dass $A(t,x)$ tatsächlich die Ableitung von $\Phi(t,x)$ nach $x$ ist.

**Satz 2.10.** *Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, dann existiert für alle $(t_0, x) \in U$ eine offene Menge $I \times B \subset U$, so dass $\Phi \in C^1(I \times B, \mathbb{R}^n)$.*

***Beweis:*** *Sei $t \geq t_0$ und sei $(t, x_0) \in U$ im Definitionsbereich von $\phi$. Nach Satz 2.9 ist $\Phi(t,x)$ Lipschitz-stetig bzgl. $x$. Aus der DGL folgt dann $\partial_t \Phi(t,x) \in C(I \times B, \mathbb{R}^n)$.*

***zz:*** $D_x \Phi(t, x_0) = A(t,x)$

[1] $\Psi$ ist eine Anfangswertaufgabe mit $y_0 = x$. Wir fassen also die Differenzialgleichung und die Anfangsdaten in eine Funktion zusammen

*Dafür definieren wir* $\Psi(t,x) := \Psi(t,x) - \Phi(t,x_0) - A(t,x_0)(x-x_0)$*. Aus der Integraldarstellung von* $A$ *folgt:*

$$\begin{aligned}\Psi(t,x) &= \int\limits_{t_0}^{t} f(s,\Phi(s,x)) - f(s,\Phi(s,x_0)) - D_y f(s,\Phi(s,x_0))A(s,x_0)(x-x_0)\,ds \\ &= \int\limits_{t_0}^{t} D_y f(s,\Phi(s,x_0))\left(\Phi(s,x) - \Phi(s,x_0) + A(s,x_0)(x-x_0)\right) + R(s,x,x_0)\,ds\end{aligned}$$

*mit* $R(s,x,x_0) = o(|\Phi(s,x) - \Phi(s,x_0)|) = o(|x-x_0|)$*, da* $\Phi$ *Lipschitz-stetig ist.*
*Sei* $\tilde{R} := \max|R(s,x,x_0)|$ *und* $M := \max_{(s,x)\in I\times B}\|Df(s,x)\|$*, so folgt:*

$$|\Psi(t,x)| \leq \tilde{R}(x,x_0) + M\int_{t_0}^{t} |\psi(s,x)|\,ds$$

*Mit Grönwall folgt:*

$$|\Psi(t,x)| \leq \tilde{R}(x,x_0)e^{M(t-t_0)} = o(|x-x_0|)$$

*Damit gilt* $D_x\Phi(t,x) = A(t,x)$*. Aus der DGL folgt die Stetigkeit von* $A$*. Insgesamt folgt also* $\Phi \in C^1(I\times B,\mathbb{R}^n)$*.* $\square$

**Satz 2.11.** *Seien* $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$*,* $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ *offen, und sei* $f \in C^1(U\times\Lambda,\mathbb{R}^n)$*. Für alle* $(t_0,x,\lambda) \in U\times\Lambda$ *gibt es eine offene Menge* $I\times B\times\Lambda_0 \subset U\times\Lambda$*, die* $(t_0,x_0,\lambda_0)$ *enthält, so dass* $\Phi \in C^1(I\times B\times\Lambda_0)$*.*

***Beweis:***
*Wir betrachten*

$$y'(t) = f(t,y,\lambda), \quad \lambda'(t) = 0$$

*Wir wenden Lemma 2.3 an und erhalten somit*

$$A(t,x,\lambda) := D\lambda\Psi(t,x,\lambda)$$

*Daraus folgt:*

$$\partial_t A = d_\lambda f(t,\Psi(t,x,\lambda),\lambda)A(t,x,\lambda) + D\lambda f(t,\Psi,\lambda)$$

$\square$

***Bemerkung:*** *Durch Induktion gelten die Sätze 2.10 und 2.11 für* $f \in C^k$ *und* $\Psi \in C^k$*,* $\quad k \geq 1$ *anstatt nur für* $C^1$*.*

## 2.3 Der Existenzsatz von Peano

Wir wollen zeigen, dass wenn $f(x,y)$ in einem Gebiet $U$ stetig ist, so geht durch jeden Punkt $(\xi,\eta) \in U$ mindestens eine Lösung der (2.3). Jede Lösung lässt sich nach rechts und links bis zum Rande von $D$ fortsetzen.

**Definition 2.12** (Gleichgradige Stetigkeit)**.** *Eine Menge $M = \{f, g, \ldots\}$ von Funktionen, welche alle im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig sind heißt gleichgradig stetig in einem Punkt $x$, wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, f \in M\ \forall x' \in [a,b]\ :\ |x - x'| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{3}$$

Das Wesentliche an dieser Definition ist also, dass man für alle Funktionen aus $M$ mit ein und demselben $\delta$ auskommt.

**Beispiel:** $M$ sei die Menge aller Funktionen, welche in $U$ einer Lipschitz-Bedingung mit einheitlicher Lipschitzkonstante genügen, d.h.

$$\exists\, L > 0\ \forall\, f \in M\ \forall\, x, y \in U:\ |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\,.$$

Die Menge ist gleichgradig stetig, denn hier kann man offenbar $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$ wählen.
Ein weiteres Beispiel ist die folgende Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, \frac{1}{n} \\ 1, & x \in (\frac{1}{n}, \infty) \end{cases}$$

**Lemma 2.13.** *Ist die Folge $f_n(x)$ in einem Punkt $U \subset [a,b]$ gleichgradig stetig und konvergiert sie für alle $x \in A$, wobei $A \subset U$ eine in $U$ dichte Punktmenge ist, so konvergiert sie für alle $x \in U$ gleichmäßig. Ihr Limes $f(x)$ ist also wieder eine stetige Funktion in $U$.*

**Bemerkung:** Dabei nennt man die Punktmenge $A$ dicht in $U$, wenn jedes Teilintervall von $U$ mindestens einen Punkt von $A$ enthält.

**Beweis:** Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so bestimmt, dass (3) für alle Funktionen $f_n$, $n \geq 1$ gilt. Nun wird das Intervall $U$ in $p$ abgeschlossene Intervalle $U_1, \ldots, U_p$ zerlegt, wobei die Länge jedes $U_i$ kleiner als $\delta$ sein soll. Zu jedem $U_i$ existiert ein $x_i \in U_i \cap A$. Ferner gibt es nach Voraussetzung ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sodass

$$|f_m(x_i) - f_n(x_i)| < \varepsilon \text{ für } m, n \geq 0 \text{ und } i = 1, \ldots, p.$$

Nun sei $x$ ein beliebiger Punkt aus $U$, es sei etwa $x \in U_q$, $q \in 1, \ldots, p$. Wegen $|x - x_q| < \delta$ und (3) folgt

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(x_q)| + |f_m(x_q) - f_n(x_q)| + |f_n(x_q) - f_n(x)| < 3\varepsilon.$$

für $m, n \geq 0$. Also konvergiert $f_n$ gleichmäßig in $U$. □

**Satz 2.14** (Arzela-Ascoli)**.** *Jede in $U = [a,b]$ gleichgradig stetige Folge von Funktionen $f_n(x)$ mit $|f_n(x)| \leq C$ für $x \in U$, $n \geq 1$ enthält eine in $U$ gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

**Beweis:** Es Sei $A = x_1, x_2, \ldots$ eine abzählbare, in $U$ dichte Punktmenge. Die Zahlenfolge $a_n = f_n(x_1)$ ist beschränkt, sie besitzt also eine konvergente Teilfolge $f_{1n}$, welche f+r $x = x_1$ konvergiert. Während die Zahlenfolge $(f_n(x_1))$ also konvergent ist, wird die Folge $(f_{1n}(x_2))$ im Allgemeinen nicht konvergent sein. Jedoch ist sie beschränkt und besitzt damit eine konvergente Teilfolge. Das heißt die Funktionenfolge $(f_{1n})$ hat eine Teilfolge, wir benennen sie $(f_{2n})$, die an der Stelle $x = x_2$ konvergiert. In dieser Weise fahren wir fort. Die Folge $(f_{2n})$ ist beschränkt und eine passend gewählte Teilfolge wird an der Stelle $x = x_3$ konvergieren. Diese Teilfolge benennen wir mit $(f_3 n)$. Durch Wiederholung dieses Prozesses erhält man eine Reihe von Folgen

$$\begin{array}{ll} f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, \ldots & \text{konvergiert für } x = x_1 \\ f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, \ldots & \text{konvergiert für } x = x_2 \\ f_{31}, f_{32}, f_{33}, f_{34}, \ldots & \text{konvergiert für } x = x_3 \\ & \vdots \end{array}$$

Die $k$-te Zeile stellt die Teilfolge der $(k-1)$ten Zeile dar. Sie konvergiert für $x = x_1, \ldots, x_k$. Daraus ergibt sich, dass die Teilfolge

$$f_{11}, f_{22}, f_{33}, f_{44}, \ldots$$

für alle $x = x_k$, d.h. $x \in A$ konvergent ist. Dies ist der zentrale Gedanke des Beweises! Sie ist nämlich, jedenfalls von ihrem $k$ten Glied an, eine Teilfolge der $k$-ten Zeile. Die gleichmäßige Konvergenz dieser Diagonalfolge ergibt sich nun aus dem Lemma. □

**Satz 2.15** (Peano)**.** *Die Funktion $f(t, y)$ sei stetig auf dem $(n+1)$-dimensionalen Zylinder*

$$D := \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \, || t - t_0| \leq \alpha, \|y - x\| \leq \beta\}.$$

*Dann existiert eine Lösung $u(t)$ des Anfangswertproblems (AWP)*

$$y'(t) = f(t, y),\ y(0) = x$$

*auf dem Intervall $I := [t_0 - T, t_0 + T]$, wobei $T = \min \alpha, \frac{\beta}{M}$ und $M := \max_{(t,x) \in D} \|f(t, x)\|$.*

**Beweis:** Zum Beweis konstruieren wir mit Hilfe einer Differenzenmethode eine Folge von stückweise linearen Funktionen, welche eine Teilfolge besitzt, die (gleichmäßig) gegen eine Lösung des AWPs konvergiert. genügt es Halbintervall $I = [t_0, t_0 + T]$ zu betrachten. Zu Schrittweitenparameter $h > 0$ wird eine äquidistante des Intervalls $I$ gewählt

$$t_0 < \ldots < t_n < \ldots < t_N = t_0 + T,\ h = t_n - t_{n-1}.$$

Ausgehend von $u_0^h := u_0$ erzeugt dann das sogenannte textitEuler'sche Polygonzugverfahren Werte für $u_n^h$ durch die Vorschrift

$$u_n^h = u_{n-1}^h + hf(t_{n-1}, u_{n-1}^h),\ n \geq 1.$$

Diese diskreten Funktionswerte werden linear interpoliert zu einer Funktion

$$u_n^h(t) := u_{n-1}^h + (t - t_{n-1}) f(t_{n-1}, u_{n-1}^h).$$

Schritt 1 Wir zeigen zunächst, dass diese Konstruktion ist, d.h. $Graph(u^h) \subset D$. Sei $(t, u^h(t)) \in$ für $t_0 \leq t \leq t_{k-1}$. Offenbar ist

$$(u^h(t))' = f(t_{k-1}, u^h_{k-1}),\ t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Nach Konstruktion gilt dann für $t \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\begin{aligned} u^h(t) - u_0 &= u^h(t) - u^h_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} u^h_i - u^h_{i-1} \\ &= (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^h_{k-1}) + h \sum_{i=1}^{k-1} f(t_{i-1}, u^h_{i-1}) \end{aligned}$$

Und folglich

$$\left\| u^h(t) - u_0 \right\| \leq (t - t_{k-1})M + (t_{k-1} - t_0)M = (t - t_0)M.$$

Also ist $(t, u^h(t)) \in D$ für $0 \leq t \leq t_k$. Durch folgt $Graph(u^h) \subset D$.

Schritt 2 Wir zeigen als nächstes, dass die ${u^h}_{h>0}$ gleichgradig stetig ist. Seien $t, t' \in I, t' \leq t$ beliebig mit $t \in [t_{k-1}, t_k], ' \in [t_{j-1}, t_j]$ für gewisse $t_j \leq t_k$. Im Fall$t, t' \in [t_{k-1}, t_k]$ ist

$$\begin{aligned} u^h(t) - u^h(t') &= u^h_{k-1} + (t - k - 1) f(t_{k-1}, u^h(t_{k-1})) \\ &\quad - u^h_{k-1} - (t' - k - 1) f(t_{k-1}, u^h(t_{k-1})) \\ &= (t - t') f(t_{k-1}, u^h(t_{k-1})) \end{aligned}$$

und somit

$$\left\| u^h(t) - u^h(t') \right\| \leq M \left| t - t' \right|.$$

Im Fall $t_j < t_k$ ist

$$\begin{aligned} u^h(t) - u^h(t') &= u^h(t) - u^h_{k-1} + \sum_{i=j}^{k-1} (u^h_i - u^h_{i-1}) + u^h_{j-1} -^h (t') \\ &= (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^h_{k-1}) + h \sum_{i=j}^{k-1} f(t_{i-1}, u^h_{i-1}) \\ &\quad + (t_{j-1} - t') f(t_{j-1}, u^h_{j-1}) \\ &= (t - t_{k-1}) f(t_{k-1}, u^h_{k-1}) + h \sum_{i=j+1}^{k-1} f(t_{i-1}, u^h_{i-1}) \\ &\quad + (h + t_{j-1} - t') f(t_{j-1}, u^h_{j-1}) \end{aligned}$$

und folglich

$$\left\|u^h(t) - u^h(t')\right\| \leq M\left((t - t_{k-1}) + (t_{k-1} - t_j) + (t_j - t')\right) \leq M\left|t - t'\right|.$$

Also ist ${u^h}_{h>0}$ gleichgradig stetig. Ferner sind die Funktionen $u^h$ wegen der gemeinsamen Anfangsstelle $u^h(t_0) = u_0$ auch gleichmäßig beschränkt

$$\left\|u^h(t)\right\| \leq \left\|u^h(t) - u_0\right\| + \|u_0\| \leq MT + \|u_0\|\,,\ t \in (t_0, t_0 + T].$$

Schritt 3 Konvergenz von $u^h$: Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert dann eine Nullfolge $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und eine stetige Funktion $u$ auf $I$ sodass

$$\max_{t\in I}\left\|u^{h_i}(t) - u(t)\right\| \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Offenbar ist damit auch $Graph(u) \subset D$.

Schritt 4 Es bleibt zu zeigen, dass die Limesfunktion $u$ der Integralgleichung genügt. Für $t \in [t_{k-1}, t_k] \subset I$ setzen wir $u^i(t) := u^{h_i}(t)$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}
u^i(t) &= u^i_{k-1} + (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u^i_{k-1}) \\
&= u^i_{k-2} + (t_{k-1} - t_{k-2})f(t_{k-2}, u^i_{k-2}) + (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u^i_{k-1}) \\
&\vdots \\
&= u_0 + \sum_{j=1}^{k}(t_j - t_{j-1})(t_{j-1}, u^i_{j-1}) + (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u^i_{k-1}) \\
&= u_0 + \sum_{j=1}^{k}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}(t_{j-1}, u^i_{j-1})\,\mathrm{d}s + \int\limits_{t_{k-1}}^{t} f(t_{k-1}, u^i_{k-1})\,\mathrm{d}s \\
&= u_0 + \sum_{j=1}^{k}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}(t_{j-1}, u^i_{j-1}) - f(s, u^i(s))\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int\limits_{t_k}^{t} f(t_{k-1}, u^i_{k-1}) - (s, u^i(s))\,\mathrm{d}s + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, u^i(s))\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

Auf der kompakten Menge $D$ ist die Menge der Funktionen $f(t,x)$ auch gleichmäßig stetig. Ferner sind die Funktionen der Folge $(u^i)_{i\in\mathbb{N}}$ gleichgradig stetig. Zu beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta_\varepsilon$, sodass für $|t - t'| < \delta_\varepsilon$ gilt

$$\left\|u^i(t) - u^i(t')\right\| \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$$

und weiter für $|t - t'| < \delta_\varepsilon, \|x - x'\| < \varepsilon'$

$$\|f(t,x) - f(t',x')\| < \varepsilon,$$

für hinreichend großes $i \geq i_\varepsilon$, d.h. hinreichend kleines $h_i$ folgt damit

$$\max_{s \in [t_{k-1}, t_k]} \left\| f(t_{k-1}, u^i(t_{k-1}) - f(s, u^i(s)) \right\| \leq \varepsilon.$$

Dies ergibt

$$\left| u^i(t) - u_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u^i(s)) \, \mathrm{d}s \right| \leq \varepsilon \left| t - t_0 \right|.$$

Die gleichmäßige Konvergenz $u^i \to u$ auf $I$ impliziert auch die gleichmäßige Konvergenz

$$f(\cdot, u^i(\cdot)) \overset{i \to \infty}{\longrightarrow} f(\cdot, u(\cdot)).$$

Für hinreichend großes $i \geq i_\varepsilon$ erhält man nun

$$\left| u(t) - u_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) \, \mathrm{d}s \right| \leq \varepsilon \left| t - t_0 \right|.$$

Wegen der beliebigen Wahl von $\varepsilon$ folgt, dass die Limesfunktion $u$ die Integralgleichung löst.

□

## 2.4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten das lineare System

$$y(t) = Ay(t), \; y(0) = x \in \mathbb{R}^n, \tag{lin. DGL}$$

wobei $a$ eine reelle $(n \times n)$-Matrix ist. Kombinieren wir das Beispiel nach Satz 2.2 mit der Aussage von Satz 2.8, so sehen wir, dass (lin. DGL) eine eindeutige, globale Lösung besitzt, die durch

$$y(t) = e^{tA} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k x.$$

gegeben ist.
*Bemerkung:* Wenn $y$ eine Lösung dann ist die lineare Transformation $Uy$ ebenfalls eine von dem transformierten Problem.

**Lemma 2.16.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $U$ invertierbar. Eine Kurve $y : I \to \mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Lösung von $y' = Ay$, wenn $\tilde{y} = U^{-1} y : I \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung von $\tilde{y}' = U^{-1} A U \tilde{y}$ ist.*

Zunächst zeigen wir einige Eigenschaften der Exponentialfunktion für Matrizen.

**Satz 2.17.** *Seien $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften* *i)* $e^0 = I$ *und* $e^{\lambda I} = e^{\lambda} I$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$.

*ii)* *Falls* $A, B$ *kommutieren, d.h.* $AB = BA$, *dann gilt* $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$. *Im Allgemeinen gilt jedoch* $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

*iii)* $e^A$ *ist invertierbar und es gilt* $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

*iv)* *Sind* $A, B$ *zueinander ähnlich, d.h. es existiert* $U \in M(n, \mathbb{K})$ *invertierbar mit* $A = U^{-1}BU$, *dann gilt* $e^A = U^{-1}e^B U$.

*v)* *Ist* $A = \operatorname{diag}(\mu_1, ..., \mu_n) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$, *dann gilt* $e^A = \operatorname{diag}(e^{\mu_1}, ..., e^{\mu_n})$.

*vi)* $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$.

**Beweis:** i) Dies folgt sofort aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

ii) Nach Konstruktion von $y(t) = e^{At}$ wissen wir, dass $\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$. Sei $c(t) = e^{tA+B} - e^{tA}e^B$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(t) &= Ae^{tA+B} - Ae^{tA}e^{tB} \\ &= A(e^{tA+B} - e^{tA}e^{tB}) \\ &= Ac(t) \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit und $c(0) = 0$ folgt $c(1) = 0$.

vi) Für $s, t \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{sA} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA)^k}{k!}\right) && \text{(Cauchy Produkt)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{(tA)^l}{l!} \frac{(sA)^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \underbrace{\frac{k!}{l!(k-l)!}}_{\binom{k}{l}} t^l s^{k-l} A^k && \text{(Satz von der Binomischen Reihe)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t+s)^k A^k}{k!} \\ &= e^{(t+s)A} \end{aligned}$$

Die Aussagen iii)-v) werden als Übungsaufgabe gestellt. $\square$

Zur expliziten Berechnung von $e^{tA}$ benötigen wir noch ein paar Begriffe aus der linearen Algebra.

**Definition 2.18.** *Für eine komplexe Matrix $A$ sei*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, (A - \lambda I) \text{ ist nicht invertierbar}\}$$

*das Spektrum und*

$$r(A) = \max\{|\lambda| \,|\, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

*Für $\lambda \in \sigma(A)$ ist die algebraische Vielfachheit $a(\lambda)$ die Ordnung der Nullstellen $\lambda$ des charakteristischen Polynoms. Die geometrische Vielfachheit $g(\lambda) = \dim(Kern(A - \lambda I))$.*

$$\tilde{E}(\lambda) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, (A - \lambda)^{a(\lambda I)} z = 0 \right\}$$

*heißt verallgemeinerter Eigenraum von $\lambda \in \sigma(A)$. Für eine reelle Matrix ist*

$$E(\lambda) = \mathrm{Re}(\tilde{E}(\lambda)) \oplus \mathrm{Im}(\tilde{E}(\lambda))$$

*der verallgemeinerte Eigenraum.*

Sei $A$ eine komplexe Matrix, dann gibt es eine invertierbare Matrix $U$, sodass $U^{-1}AU$ eine Jordan'sche Normalform besitzt:

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix}.$$

Jeder Jordanblock $J_j$ ist eine $(k_j \times k_j)$-Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda \in \sigma(A)$ und es gilt

$$e^{tA} = U \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_l} \end{pmatrix} U^{-1}.$$

Damit genügt es, einen Jordanblock $J = \lambda I + N \in \mathbb{C}^{k \times k}$ zu betrachten. Hierbei ist $N$ eine nilpotente Matrix, d.h $N^k = 0$. Es folgt

$$e^{tJ} = e^{t\lambda I} e^{tN} = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} (tN)^j = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Sei nun $A$ reell. Betrachte die komplexe Normalform und sei $\lambda \in \sigma(A)$. Falls $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, dann sind auch die zugehörigen Jordanblöcke reell. Für $\lambda \notin \mathbb{R}$ betrachte einen Jordanblock $J = \lambda I + N$ der komplexen Dimension $k$. Es gibt also linear unabhängige Vektoren $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}^n$ mit $(A -$

$\lambda I)z_{j+1} = z_j, j = 1, ..., k-1$ und $(A - \lambda I)z_1 = 0$. Für $\lambda = \mu + i\nu$ und $z_j = x_j + iy_j$ mit $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ und $x_j, y_j \in \mathbb{R}^n$ gilt dann nach Aufspaltung in Real-und Imaginärteil für $j = 1, ..., k-1$

$$\begin{aligned} Ax_{j+1} &= \mu x_{j+1} - \nu y_{j+1} + x_j, \\ Ay_{j+1} &= \nu x_{j+1} + \mu y_{j+1} + y_j, \\ Ax_1 &= \mu x_1 - \nu y_1, \\ Ay_1 &= \nu x_1 + \mu y_1. \end{aligned}$$

Das heißt, dass der zugehörige Jordanblock die Form

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} R & I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_2 \\ & & & R \end{pmatrix}$$

mit

$$R = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$e^{t\tilde{J}} = e^{t\mu} \begin{pmatrix} R_{t\nu} & & \\ & \ddots & \\ & & R_{t\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & tI_2 & \frac{t^2}{2} I_2 & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} I_2 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & & I_2 & tI_2 \\ & & & & I_2 \end{pmatrix},$$

mit

$$R_{t\nu} = \begin{pmatrix} \cos(t\nu) & -\sin(t\nu) \\ \sin(t\nu) & \cos(t\nu) \end{pmatrix}.$$

**Satz 2.19.** *Für eine komplexe Matrix $A$ gilt*

*i)* $r(A) \leq \|A\|$ *für jede induzierte Matrixnorm.*

*ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Matrixnorm $\|\cdot\|_\varepsilon$, sodass $\|A\|_\varepsilon \leq r(A) + \varepsilon$.*

*iii)* $\det(e^A) = e^{Spur(A)}$. *Insbesondere ist* $\det(e^A) \neq 0$.

**Beweis:** i) Sei $\lambda$ ein Eigenwert von $A$ mit zugehörigem Eigenvektor $x$, so gilt

$$\|\lambda\| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \text{(verträgliche Norm)}$$

und da $x \neq 0$ folgt $\|\lambda\| \leq \|A\|$.

ii) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ und sei $J = \text{diag}(J_1, ...J_l)$ die Jordan Normalform von $A$. Der Jordanblock $J_k = \lambda I + N$ habe die Dimension $d_k$. Sei $\delta \in \mathbb{R}^l$ ein Skalierungsvektor und definiere $Q_\delta = \operatorname{diag}(Q_{\delta_1}, ..Q_{\delta_l})$ mit $Q_{\delta_i} = \operatorname{diag}(1, \delta_i, ..., \delta_i^{d_i})$. Sei $J_\delta = Q_\delta^{-1} J Q_\delta$. Wir definiere eine neue Vektornorm durch $\|z\|_\delta := \left\|(UQ_\delta)^{-1} z\right\|$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|A\|_\delta &= \sup_{z\neq 0} \frac{\left\|(UQ_\delta)^{-1} Az\right\|}{\|(UQ_\delta)^{-1} z\|} \\
&= \sup_{z\neq 0} \frac{\left\|(UQ_\delta)^{-1} AUQ_\delta z\right\|}{\|z\|} \quad \text{(Mittels } z \mapsto UQ_\delta z) \\
&= \sup_{z\neq 0} \frac{\|J_\delta z\|}{\|z\|} \leq r(A) + k|\delta|
\end{aligned}$$

$k$ hängt hier nur von der Dimension von $A$ ab. Da $\delta$ beliebig war, wählen wir $|\delta| = \frac{\varepsilon}{k}$, womit die Aussage folgt.

iii) Folgt sofort aus der Jordan Normalform.

□

**Definition 2.20.** *Die invarianten Teilräume*

$$\begin{aligned}
E^+(A) &= \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda)<0} E(\lambda) \\
E^-(A) &= \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda)>0} E(\lambda) \\
E^0(A) &= \bigoplus_{\operatorname{Re}(\lambda)=0} E(\lambda)
\end{aligned}$$

*heißen stabiler, instabiler bzw. Zentrums-Eigenraum von $A$. Falls $E^0 = 0$ gilt, heißt $A$ eine hyperbolische Matrix.*

**Satz 2.21.** *Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$. Dann gelten die folgenen Aussagen*

*i) Falls $0 > \gamma > \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \,|\, \lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}$ gilt, dann existiert $C_\gamma > 0$ sodass*

$$\left|e^{tA} x\right| \leq C_\gamma e^{t\gamma} |x|, \quad t \geq 0,\, x \in E^+(A)$$

*ii) Falls $0 \leq \gamma < \min\{\operatorname{Re}(\lambda) \,|\, \lambda \in \sigma(A), \operatorname{Re}(\lambda) > 0\}$ gilt, dann existiert $C_\gamma > 0$ sodass*

$$\left|e^{tA} x\right| \leq C_\gamma e^{t\gamma} |x|, \quad t \leq 0,\, x \in E^-(A).$$

*iii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $C_\varepsilon > 0$, sodass*

$$\left|e^{tA}\right| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|t|} |x|, \quad t \in \mathbb{R},\, x \in E^0(A).$$

**Beweis:** Zu *i)*: Es genügt dies für jeden Jordanblock $J = \lambda I + N$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ zu zeigen. Aus der Darstellung von $e^{tJ}$ folgt

$$\left|e^{tJ}x\right| \leq e^{t\mathrm{Re}(\lambda)}\,|x|\,|p(t)|$$

für ein Polynom $p(t)$. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $K_\varepsilon > 0$, sodass $|p(t)| \leq K_\varepsilon e^{\varepsilon t}$ für alle $t \geq 0$. Zusammengenommen bedeutet das, dass

$$\left|e^{tJ}x\right| \leq Ke^{(\mathrm{Re}\lambda+\varepsilon)t}|x| \leq K_\epsilon e^{(\gamma+\varepsilon)t}|x|$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Aussage. *ii)* und *iii)* zeigt man analog. $\square$

**Satz 2.22.** *Die Menge der hyperbolischen Matrizen ist*

*i) offen*

*ii) dicht in* $\mathbb{R}^{n\times n}$

*Man sagt, dass Hyperbolizität eine generische Eigenschaft ist.*

**Beweis:** i) Sei $A$ eine hyperbolische Matrix, d.h. $(A - i\lambda I)$ ist invertierbar für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus dem Satz über die Neumann Reihe folgt, dass für eine beliebige Matrix $B$

$$A - B - i\lambda = (A - i\lambda I)(I - (A - i\lambda I)^{-1}B)$$

genau dann invertierbar ist, wenn $\left\|(A - i\lambda I)^{-1}B\right\| < 1$. Dies gilt falls

$$\|B\| < \left\|(A - i\lambda I)^{-1}\right\|^{-1}. \tag{$*$}$$

Sei nun $\|B\| < \|A\|$. Wir zeigen, dass $(*)$ gilt, falls $|\lambda| \geq 2\,\|A\|$ gilt. Sei also $|\lambda| \geq 2\,\|A\|$ und daher $\left\|\frac{A}{i\lambda}\right\| < \frac{1}{2}$. Aus dem Satz über die Neumann Reihe mit $T = \frac{A}{i\lambda}$ folgt die Konvergenz der Reihe

$$i\lambda(A - i\lambda I)^{-1} = \left(\frac{A}{i\lambda} - I\right)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{i\lambda}\right)^k,$$

sowie die Abschätzung

$$|\lambda|\left\|(A - i\lambda I)^{-1}\right\| = \left\|\left(I - \frac{A}{i\lambda}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}}.$$

Eine Umformung ergibt

$$\left\|(A - i\lambda I)^{-1}\right\|^{-1} \geq |\lambda|\left(1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}\right) = |\lambda| - \|A\| \geq \|A\| > \|B\|,$$

das heißt, $(*)$ gilt tatsächlich für $|\lambda| \geq 2\,\|A\|$. Für $\|B\| < \|A\|$ und $\|B\| < \min_{|\lambda|\leq 2\|A\|}\left\|(A - i\lambda I)^{-1}\right\|^{-1}$ ist also die Matrix $A - B$ hyperbolisch.

ii) Sei $A$ nicht hyperbolisch, dann gilt $\sigma(A + \varepsilon I) = \{\varepsilon\} + \sigma(A)$, d.h. $A + \varepsilon I$ ist hyperbolisch für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Dies zeigt die Dichtheit.

□

Abschließend für dieses Kapitel machen wir noch einige Beispiele für lineare DGLs.

**Beispiel 1**: Falls $n = 1$ ist, dann gilt $y(t) = e^{tA}x$.

Fall 1: Für $A < 0$ ist $\tilde{y} = 0$ stabil, da alle Lösungen gegen 0 konvergieren.
Fall 2: Für $A > 0$ ist $\tilde{y} = 0$ instabil, da eine kleine Störung $\tilde{y}$ von 0 weg divergieren lässt.

**Beispiel 2**: Sei $n = 2$ und sei $A$ in Jordanform.

(a) Sei $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Wir betrachten das System mit $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$

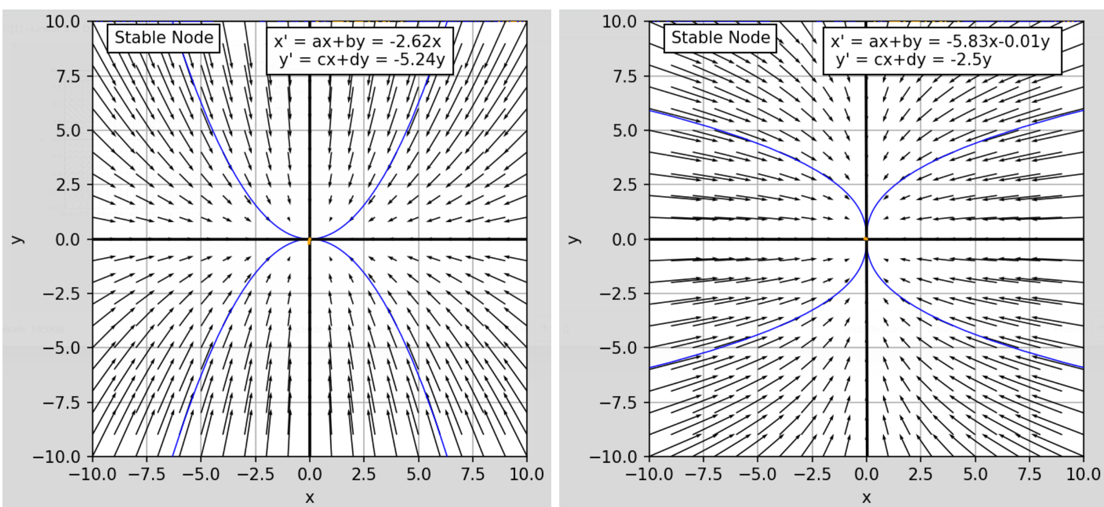
$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

mit der Lösung $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0), \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0)$.

i) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (Senke) ergibt eine stabile Lösung. Sei $y_1(0) \neq 0$ und eliminiere $t$

$$y_2(t) = \left( \frac{y_1(t)}{y_1(0)} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} y_2(0)$$

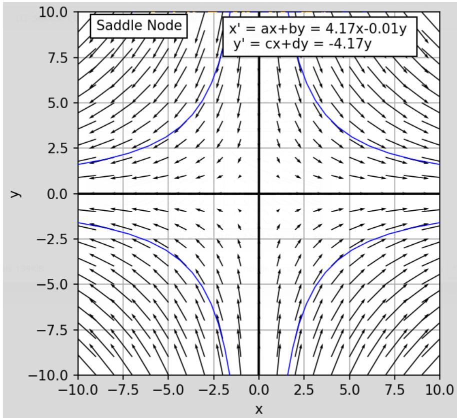
sind Potenzfunktionen.




ii) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (Sattel) ergibt instabile Lösung.

$$y_2(t) = \left( \frac{y_1(t)}{y_1(0)} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} y_2(0)$$

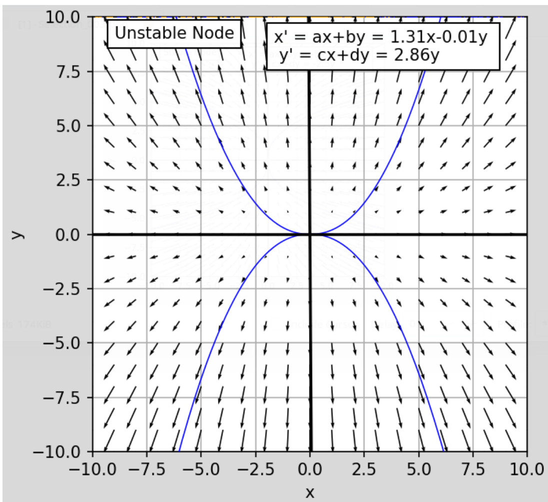
sind Hyperbeln.

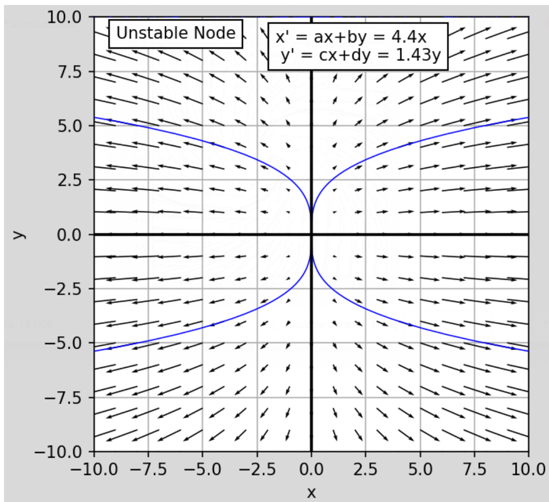



iii) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (Quelle) ergibt eine instabile Lösung.

$$y_2(t) = \left(\frac{y_1(t)}{y_1(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} y_2(0)$$

sind Potenzfunktionen.

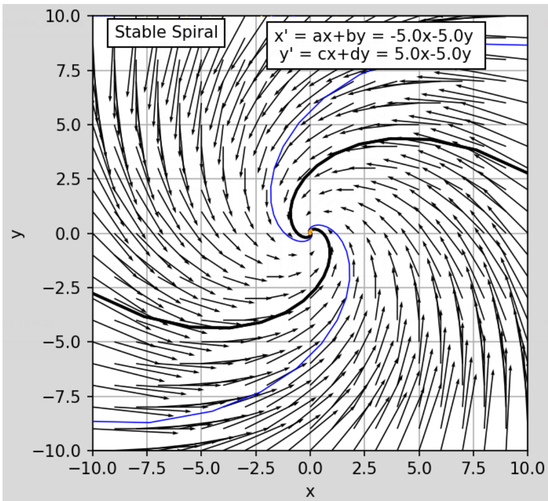


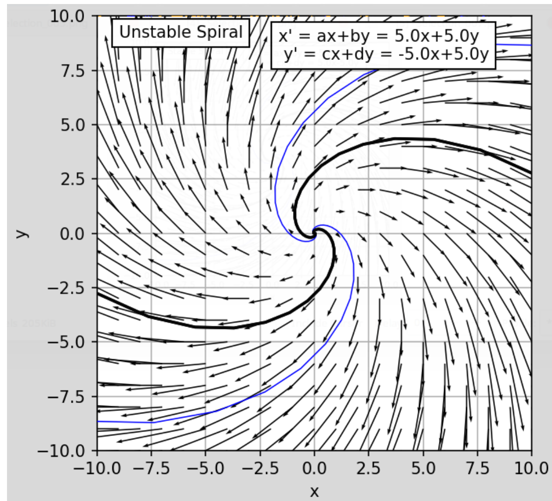



(b) $\sigma(A) = \{\mu \pm i\nu\}\,,\, \nu \neq 0,$

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix},\; e^{tA} = e^{t\mu}\begin{pmatrix} \cos(t\nu) & -\sin(t\nu) \\ \sin(t\nu) & \cos(t\nu) \end{pmatrix}$$

| | |
|---|---|
| i. $\mu < 0$: stabiler Spiralpunkt | $\nu > 0$: positiver Uhrzeigersinn |
| ii. $\mu > 0$: instabiler Spiralpunkt | $\nu < 0$: negativer Uhrzeigersinn |
| iii. $\mu = 0$: Zentrumspunkt | |




(c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $a(\lambda) = 2$, $g(\lambda) = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\; e^{tA} = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i. $\lambda < 0$: Senke, stabil

ii. $\lambda > 0$: Quelle, instabil

$y_1(t) = e^{\lambda t}(y_1(0) + t y_2(0)), y_2(t) = e^{\lambda t} y_2(0),$

$$y_1(t) = y_2(t)\left(\frac{y_1(0)}{y_2(0)} y_2(t) + \frac{1}{\lambda}\mathrm{Im}\left(\frac{y_2(t)}{y_2(0)}\right)\right).$$

# 3 Verhalten dynamischer Systeme

**Definition 3.1.** *Sei $(M,d)$ ein metrischer Raum, genannt Zustandsraum oder Phasenraum.*

1. *Ein kontinuierliches dynamisches System (oder Halbfluss) ist eine stetige Abbildung $\phi : \mathbb{R}^+ \times M \to M$, wobei für alle $x \in M$ und $t, s \geq 0$ die sogenannte Halbgruppeneigenschaft gelte*

$$\begin{aligned} \phi(0,x) &= x \\ \phi(t+s,x) &= \phi(t,\phi(s,x)) \end{aligned}$$

2. *Ist $\phi(t,x)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ definiert, dann heißt $\phi$ invertierbares kontinuierliches System. Eine andere Schreibweise für $t \in \mathbb{R}^+$ bzw. $t \in \mathbb{R}$ ist*

$$\begin{aligned} \phi_t : M \to M, \quad \phi_t(x) &= \phi(t,x) \\ \phi_0 = I, \quad \phi_t \circ \phi_s &= \phi_{t+s} \end{aligned}$$

3. *Ein diskretes dynamisches System ist eine Menge von stetigen Abbildungen*

$$\phi_n : M \to M,\ n \in \mathbb{N}_0,\ \phi_0 = id_M,\ \phi_n \circ \phi_m = \phi_{m+n}$$

4. *Ist $\phi_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ definiert, dann heißt $\phi_n$ invertierbares diskretes dynamisches System. Andere Schreibweise mit $f := \phi_1$:*

$$\phi_n = f^n = f \circ f^{n-1} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\ mal},$$

*d.h. $\phi_n$ ist die $n$-te iterierte von $f$.*

*Bemerkung:* Für invertierbare Systeme folgt aus der Halbgruppeneigenschaft sofort

$$\phi_{-t} = \phi_t^{-1} \text{ bzw. } \phi_{-n} = \phi_n^{-1}.$$

Oft ist $\phi(t,x)$ nur für $t \in I_x = (T_-(x), T_+(x)) \subset \mathbb{R}$ mit $T_-(x) < 0 < T_+(x)$ definiert.

**Definition 3.2.** *Ein lokales kontinuierliches dynamisches System oder ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum $(M,d)$ ist eine stetige Abbildung $\phi : W \to M$, wobei*

$$W := \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times M,$$

*offen ist und folgendes gelte*

$$\begin{aligned} I_{\phi(t,x)} &= I_x - t, \\ \phi(0,x) &= x, \\ \phi(t,\phi(s,x)) &= \phi(t+s,x) \quad \forall\, x \in M, \quad s, t+s \in I_x \end{aligned}$$

*Falls $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $\phi \in C^k(W,M), k \geq 1$, dann heißt $\phi$ $k$-fach differenzierbares dynamisches System. Es genügt, dass $M$ eine differenzierbare Struktur besitzt, z.B. eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.*

**Lemma 3.3.** *Die Abbildung $T_+ : M \to \mathbb{R}, x \mapsto T_+(x)$ ist unterhalbstetig und $x \mapsto T_-(x)$ ist oberhalbstetig.*

**Beweis:** Zu zeigen ist

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \exists\, y \in B_\delta(x) \Rightarrow T_+(y) \geq T_+(x) - \varepsilon.$$

Sei $T_+(x) > t > T_+(x) - \varepsilon$. Da $W$ offen ist, gibt es ein $\delta$ mit $\{t\} \times B_\delta(x) \subset W$, d.h. $T_+(y) > t > T_+(x) - \varepsilon$ für alle $y \in B_\delta(x)$. □

**Definition 3.4.** *Sei $\phi(t,x)$ ein lokales dynamisches System auf $W$. Für ein $x \in M$ heißt die Abbildung $t \mapsto \phi(t,x), t \in I_x$ die Trajektorie durch $x$. Das Bild der Trajektorie heißt Orbit von $x$ (auch bezeichnet als $\gamma(x)$).*

$$\begin{aligned} \gamma_+(x) &= \phi((0,T_+(x)),x) \quad \text{heißt Vorwärtsorbit von } x \\ \gamma_-(x) &= \phi((T_-(x),0),x) \quad \text{heißt Rückwärtsorbit von } x. \end{aligned}$$

**Definition 3.5.** *Sei $\phi$ ein lokaler Fluss.*

1. *Falls $\gamma(x) = \{x\}$, dann heißt $x$ Fixpunkt (oder singulärer, stationärer oder Gleichgewichtspunkt) von $\phi$. Andernfalls heißt $x$ regulärer Punkt.*

2. *$x \in M$ heißt periodischer Punkt, falls $x$ kein Fixpunkt ist und $x \in \gamma_+(x)$.*

   $$P := \inf\{t > 0 \,|\, \phi(t,x) = x\}$$

   *heißt minimale Periode von $x$. Da $\phi$ stetig ist, folgt $\phi(P,x) = x$. $x$ ist genau dann ein periodischer Punkt, wenn $\gamma_-(x) = \gamma_+(x)$ gilt.*

3. *Eine Menge $U \subset M$ heißt positiv (negativ) invariant, falls aus $x \in U$ stets $\gamma_+(x) \subset U$ ($\gamma_-(x) \subset U$) folgt. $U$ heißt invariant, falls für $U$ beides gilt.*

**Definition 3.6.** *Für $x \in M$ heißen die Mengen*

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \{y \in M \,|\, \exists t_n \to \infty, \quad (t_n,x) \in W, \phi(t_n,x) \to y\} \\ \alpha(x) &= \{y \in M \,|\, \exists t_n \to -\infty, \quad (t_n,x) \in W, \phi(t_n,x) \to y\} \end{aligned}$$

*Omega bzw. Alpha Limesmengen von $x$.*
***Bemerkung:***

1. *Falls $T_+(x) < \infty$, so ist $\omega(x) = \emptyset$*

2. *Aus $y \in \gamma(x)$ folgt $\omega(y) = \omega(x)$*

**Satz 3.7.** *Es gilt*

*i)*

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \bigcap_{\rho \geq 0} \overline{\{\phi(t,x) \,|\, t \geq \rho\}} \\ \alpha(x) &= \bigcap_{\rho \leq 0} \overline{\{\phi(t,x) \,|\, t \leq \rho\}} \end{aligned}$$

*ii)* *$\omega(x), \alpha(x)$ sind abgeschlossen in $M$.*

*iii)* *$\omega(x), \alpha(x)$ sind invariant.*

**Beweis:** i) Übung

ii) folgt aus i)

iii) Aus $y \in \omega(x)$ folgt $\phi(t_n, x) \to y$ für eine Folge $t_n \to \infty$. Da $\phi$ stetig ist, folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ und hinreichend großes $n$:

$$\phi(t + t_n, x) = \phi(t, \phi(t_n, x)) \to \phi(t, y),$$

d.h. $\omega(x)$ ist invariant.

$\square$

**Beispiel:** Sei $\dot{x} = x$, $\phi(t, x_0) = e^t x_0$. Für alle $x$ gilt $\alpha(x) = \{0\}$.Für $x \neq 0$ gilt $\omega(x) = \emptyset$ und $\omega(0) = \{0\}$.

Das folgende Lemma gibt ein wichtiges Kriterium für $\omega(x) \neq \emptyset$.

**Lemma 3.8.** *Sei $\phi$ ein lokales, kontinuierliches dynamisches System. Falls $T_+(x) = \infty$ und falls $\overline{\gamma_+(x)}$ kompakt ist, dann gilt*

*i)* $\omega(x) \neq \emptyset$

*ii)* $\omega(x)$ *ist kompakt*

*iii)* $\omega(x)$ *ist zusammenhängend*

*Analoge Aussagen gelten für $\alpha(x)$.*

**Beweis:** Zu *i)* Es gibt eine Folge $t_n \to \infty$ mit $t_n \in I_x$. Da $\overline{\gamma_+(x)}$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $t_{n_i}$ und ein $y \in M$ mit $\phi(t_{n_i}, x) \to y$. Daher folgt $y \in \omega(x)$.

Zu *ii)* Seien $y_n \in \omega(x)$, dann gibt es eine Folge $t_n > n$ mit

$$d(\phi(t_n, x), y_n) \leq \frac{1}{n}$$

und einer Teilfolge $t_{n_i}$, und $y \in M$ mit $\phi(t_{n_i}, x) \to y$. Daraus folgt $y_{n_i} \to y \in \omega(x)$.

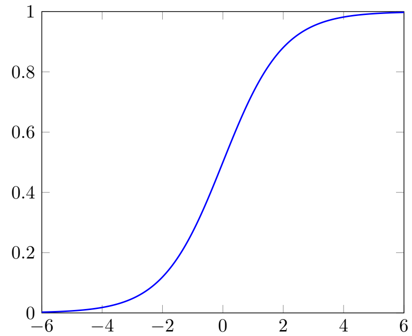
Zu *iii)* Angenomenn $\omega(x)$ wäre nicht zusammenhängend, dann gäbe es nicht leere, disjunkte, offene Menge $O_1, O_2 \subset M$ mit $\omega(x) \subset O_1 \cup O_2$ und $\omega(x) \not\subset O_i, i = 1, 2$. Es gibt $t_n \to \infty, t_{n+1} > t_n$ mit $\phi(t_{2n-1}, x) \in O_1, \phi(t_{2n}, x) \in O_2$. Da $\gamma(x)$ zusammenhängend ist, gibt es $s_n \in (t_{2n-1}, t_{2n})$ mit $\phi(s_n, x) \in M \setminus (O_1 \cup O_2)$. Da $\overline{\gamma_+(x)}$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $s_{n_i}$ und $y \in M$ mit $\phi(s_{n_i}, x) \to y \in \omega(x) \subset O_1 \cup O_2$. Es gilt aber $y \in M \setminus (O_1 \cup O_2)$ da diese Menge abgeschlossen ist.

$\square$

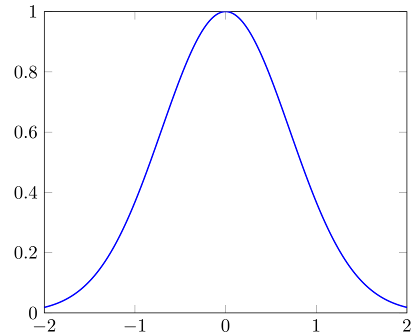
*Bemerkung:*

1. *i)* und *ii)* gelten auch für diskrete dynamische Systeme, *iii)* dagegen nicht.
2. Ein periodischer Orbit, der kein Fixpunkt ist, ist seine eigene $\omega$-Limesmenge und damit nicht zusammenhängend.

**Definition 3.9.** *Ein Orbit $\gamma(x)$ heißt heterokliner Orbitfalls $\alpha(x)$ und $\omega(x)$ zwei verschiedene Fixpunkte von $\phi$ sind. $\gamma(x)$ heißt homokliner Orbit, falls $\alpha(x) = \omega(x)$ genau ein Fixpunkt ist und $\gamma(x) \neq \{x\}$ gilt.*




**Beispiel 1:** Betrachte $x' = x(1-x)$ mit $0 < x(0) = x_0 < 1$. So gilt $\omega(x) = \{1\}$ und $\alpha(x) = \{0\}$. Somit ist $x$ heteroklin, da zwei Fixpunkte miteinander verbindet.




**Beispiel 2:** Diese Funktion verbindet einen Fixpunkt mit sich selbst. Sie ist somit homoklin.

**Definition 3.10.** *Sei $x_0 \in M$ ein Fixpunkt eines kontinuierlichen dynamischen Systems $(\phi, M)$.*

$$W^+(x_0) = \left\{ x \in M \,\middle|\, \lim_{t\to\infty} d(\phi(t,x), x_0) = 0 \right\}$$

*heißt stabile Menge von $x_0$.*
*Für eine offene Umgebung $U \subset M$ von $x_0$ heißt $W^+_{lok}(x_0) = W^+(x_0) \cap U$ lokale stabile Menge von $x_0$.*

$$W^-(x_0) = \left\{ x \in M \,\middle|\, \lim_{t\to-\infty} d(\phi(t,x), x_0) = 0 \right\}$$

*heißt instabile Menge von $x_0$. Für eine offene Umgebung $U \subset M$ von $x_0$ heißt $W^-_{lok}(x_0) = W^-(x_0) \cap U$ lokale instabile Menge von $x_0$.*
*Analog definiert man die Mengen für Fixpunkte diskreter Systeme.*

**Definition 3.11.** *Sei $x_0 \in M$ ein Fixpunkt eines kontinuierlichen dynamischen Systems $(\phi, M)$. $x_0$ heißt lokal stabil, falls es für jede offene Umgebung von $x_0$ eine offene Umgebung $V \subset U$ gibt, sodass $\phi(t, V) \subset U$ für alle $t \geq 0$ (insbesondere existiert $\phi(t,x)$ für alle $t \geq 0$ und $x \in V$).*
*$x_0$ heißt asymptotisch stabil, falls $x_0$ lokal stabil ist und falls es eine offene Umgebung $U$ von $x_0$ gibt, sodass für alle $x \in U$ gilt*

$$\lim_{t\to\infty} d(\phi(t,x), x_0) = 0.$$

*Analog definiert man diese Begriffe für diskrete Systeme.*

*Bemerkung:* Es genügt für $U$ und $V$ Kugeln $B_\varepsilon(x_0)$ und $V_\delta(x_0)$ zu betrachten.

**Satz 3.12.** *Für $x' = Ax$ ist die Lösung $x \equiv 0$ genau dann asymptotisch stabil, wenn $\mathrm{Re}(\sigma(A)) \subset (-\infty, 0)$. Falls $\mathrm{Re}(\sigma(A)) \not\subset (-\infty, 0]$, so ist $x \equiv 0$ nicht asymptotisch stabil.*

**Definition 3.13.** *Zwei kontinuierliche dynamische Systeme $\phi_t^i : M^i \to M^i$, $i = 1, 2$ heißen topologisch konjugiert, falls es einen Homöomorphismus $\psi : M^1 \to M^2$ gibt, sodass*

$$\psi \circ \phi_t^1 = \phi_t^2 \circ \psi$$

*für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.*
*Analoges gelte für diskrete Systeme.*
*Zwei lokal kontinuierliche dynamische Systeme $\psi_t^i$, $i = 1, 2$ heißen lokal um $x_i \in M^i$ topologisch konjugiert, falls es offene Umgebungen $U^i$ von $x_i$ und einen Homöomorphismus $\psi : U^1 \to U^2$ gibt, sodass $\psi(x_1) = x_2$ und*

$$\left(\psi \circ \phi_t^1\right)(x) = \left(\phi_t^2 \circ \psi\right)(x)$$

*für $x \in U^1$ und $\phi_t^1(x) \in U^1$ gilt. Falls $\psi \in C^k$ ist, dann heißen $\phi^1$ und $\phi^2$ (lokal) $C^k$-konjugiert.*

**Beispiele:**

1. Jede offene Kreisscheibe (mit positivem Radius) ist homöomorph zu jedem offenen Quadrat (mit positiver Kantenlänge) in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

2. $(0, 1)$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$ vermöge

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan\left(\pi(x - \frac{1}{2})\right).$$

3. Die Bedingungen der Stetigkeit von $f^{-1}$ ist unerlässlich. Betrachte die Abbildung

$$f : [0, 2\pi) \to \mathcal{S}^1,\ x \mapsto (\cos(x), \sin(x)).$$

   Diese ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus.

*Bemerkung:*

1. Die Definition für diskrete Systeme ist analog.

2. Die Konjugation $\psi$ bildet Orbits von $\phi^1$ bijektiv auf die Orbits von $\phi^2$ ab. Die beiden Systeme sind also bis auf eine $C^k$ Koordinatentransformation gleich.

**Satz 3.14** (Begradigung des Vektorfeldes)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und gelte $f(y_0) \neq 0$ für ein $y_0 \in U$, d.h. $y_0$ ist ein regulärer Punkt. Sei $\phi(t, x)$ der zu $y' = f(y)$ gehörende lokale Fluss und sei $\psi(t, x) = \psi_t(x)$ der Fluss von $z'(t) = (1, 0, \ldots, 0)$. Dann sind $\phi$ und $\psi$ lokal $C^1$-konjugiert.*

**Beweis:** Unser Ziel ist es eine Funktion $h$ zu finden, so dass $\phi(t, h(x)) = h(\psi(t, x))$. Sei oBdA $y_0 = 0$. Nach einer linearen Transformation kann man $f(0) = (1, 0, \ldots, 0)$ annehmen. Weiter gilt $\psi(t, x) = (t + x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Es nun $\delta > 0$, sodass für alle $x \in B_\delta(0)$ mit $\overline{B_\delta(0)} \subset U$ die Abbildung $h$ durch

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \phi(x_1, (0, x_2, ..., x_n))$$

definiert werden kann. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\phi(t, h(x)) &= \phi(t, \phi(x_1, (0, x_2, ..., x_n))) = \phi(t + x_1, (0, x_2, ..., x_n)) \\
&= h(t + x_1, x_2, ...x_n) = h(\phi(x_1, (0, x_2, ..., x_n))) = h(\psi(t, x)).
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $h$ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned}\partial_{x_1} h(x_1, ..., x_n) &= f(\phi(x_1, (0, x_2, ..., x_n))) \\ \partial_{x_1} h(0, ..., 0) &= f(0) = (1, 0, ..., 0).\end{aligned}$$

Für $2 \leq i \leq n$ gilt

$$\begin{aligned}\partial_{x_i} h(x_1, ..., x_n) &= \partial_{x_i} \phi(x_1, (0, x_2, ..., x_n)) \\ \partial_{x_i} h(0, ..., 0) &= (0, ..., 0, \underbrace{1}_{i.-\text{Stelle}}, 0, ..., 0)\end{aligned}$$

da $D_x\phi(0,0) = I$. Es folgt $D_x h(0) = I$ und nach dem Satz über die inverse Funktion ist $h$ ein lokaler Diffeomorphismus. $\square$

*Bemerkung:* Die Aussage des Satzes gilt nur für stetige Systeme, nicht aber für diskrete.

### 3.0.1 Lineare Iteration mit konstanten Koeffizienten

Betrachte die lineare Iteration im $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k, & k \in \mathbb{N},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ x_0 = x \end{cases}.$$

Es gilt offenbar $x_k = A^k x$.
Entscheidend für das Langzeitverhalten ist hier die Größe der Beträge der Eigenwerte. Wir benutzen folgende Zerlegung in invariant stabile, instabile und Zentrums Unterräume

$$\mathbb{R}^n = F^+(A) \bigoplus F^-(A) \bigoplus F^0(A),$$

wobei

$$F^+(A) = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\sigma(A)\\ |\lambda|<1}} \tilde{E}(\lambda), \quad F^-(A) = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\sigma(A)\\ |\lambda|>1}} \tilde{E}(\lambda), \quad F^0(A) = \bigoplus_{\substack{\lambda\in\sigma(A)\\ |\lambda|=1}} \tilde{E}(\lambda).$$

## 3.1 Verhalten nahe stationärer Punkte

### 3.1.1 Der Satz von Grobman und Hartman

**Ziel:** Wir wollen in der Nähe eines Fixpunktes eine lokale Konjugation zu einem System finden. Man erwartet, dass die Terme höherer Ordnung (d.h. höher als linear) das lokale Verhalten nur wenig stören. Wir betrachten dafür zunächst Iterationen. OBdA nehmen wir an, dass $\bar{y} = 0$ der Fixpunkt ist. Die Iteration lässt sich dann lokal schreiben als

$$y_{n+1} = Ay_n + f(y_n),$$

wobei $f(y)$ klein relativ zu $Ay$ sein soll. Außerdem gelte $f(0) = 0$ und $Df(0) = 0$. Unser Ziel ist es, eine Konjugation zu dem linearen System

$$z_{n+1} = Az_n$$

zu finden.

*Im Allgemeinen ist dies nicht möglich, wie folgendes Gegenbeispiel verdeutlicht.*
**Gegenbeispiel:** Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachte

$$y_{n+1} = \alpha y_n + y_n^2, \; y_n \in \mathbb{R}.$$

Angenommen, es gäbe um 0 eine lokale Konjugation zu $z_{n+1} = \alpha z_n$, d.h.

$$\alpha\psi(x) + \psi(x)^2 = \psi(\alpha x).$$

Für $\alpha = \phantom{-}1$ folgt $\psi \equiv 0$.

Für $\alpha = -1$ folgt $\psi^2 = \psi(x) + \psi(-x)$ und $\psi(x) = \pm\psi(-x)$

Falls $\psi(x) = \psi(-x)$, so folgt $\psi(x) \in \{0, 2\}$.
Falls $-\psi(x) = \psi(-x)$, so folgt $\psi \equiv 0$.

Für $\alpha = 0$ folgt $\psi^2 = \psi(0)$ und $\psi$ ist konstant.

Daher gibt es für $|\alpha| = 1$ und $\alpha = 0$ keine Konjugation.

**Satz 3.15.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Falls*

$$\theta := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\|A^{-1}Df(x)\right\| < 1$$

*gilt, dann ist $A + f$ auf $\mathbb{R}^n$ invertierbar. $(A + f)^{-1}$ hat die Form $A^{-1} + \tilde{f}$ mit $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\|D\tilde{f}(y)A\right\| \leq \frac{\theta}{1-\theta}.$$

**Beweis:** Für ein festes $y \in \mathbb{R}^n$ definiere für $x \in \mathbb{R}^n$

$$k(x) = A^{-1}y - A^{-1}f(x).$$

Man sieht leicht ein, dass

$$|k(x_1) - k(x_2)| \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \left\| A^{-1}Df(z) \right\| \|x_1 - x_2| \leq \theta \, |x_1 - x_2| \, .$$

Daher hat $k$ nach dem Banach'schen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt und $A + f$ ist invertierbar. Wegen $\theta < 1$ ist $I + A^{-1}Df(x)$ invertierbar, denn die Neumannreihe konvergiert

$$\left(I + A^{-1}Df(x)\right)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-A^{-1}Df(x)\right)^j ,$$

d.h. $A + Df = A(I + A^{-1}Df)$ ist invertierbar. Der Satz über die lokale Inverse zeigt insbesondere, dass $(A + f)^{-1}$ $k$-mal stetig differenzierbar ist. Daher folgt

$$\tilde{f} = (A + f)^{-1} - A^{-1} = \left((I + A^{-1}f)^{-1} - I\right) A^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

und

$$D\tilde{f}A = (I + A^{-1}Df)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (-A^{-1}Df)^j.$$

Abschließend ergibt sich

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left\| D\tilde{f}(y)A \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| A^{-1}Df(x) \right\| = \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

□

Zunächst beweisen wir einen globalen Satz, falls die Nichtlinearität global "klein" ist.

**Bemerkung:** Wie in Abschnitt 3.0.1 bereits angeführt, kann man der Raum $\mathbb{R}^n$ in stabile, instabile und Zentrumsunterräume aufteilen.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^n & = & F^+(A) & \bigoplus & F^-(A) & \bigoplus & F^0(A). \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \substack{\text{Kontrahierender} \\ \text{Unterraum}} & & \substack{\text{Expandierender} \\ \text{Unterraum}} & & \substack{\text{Zentrums-} \\ \text{unterraum}} \end{array}$$

Nach Satz 2.19 existiert für alle $\epsilon > 0$, eine Norm, so dass $\|\cdot\| \leq r(A) + \epsilon$ gilt. Falls $F^0(A) = \emptyset$ ist, so existiert eine "Lücke" zwischen den Eigenwerten, in welche wir unser $\epsilon$ hineinzwingen können. Weiterhin können wir in diesem Fall wir mit der Einschränkungsabbildung $A^{\pm} : \mathbb{R}^n \to F^{\pm}(A)$ die Normen $\|\cdot\|_{\pm}$ auf $F^{\pm}(A)$ definieren, so dass $\alpha := \max(\|A_+\|_+ , \|A_-\|_-) < 1$ gilt.

**Bemerkung:** In den folgenden beiden Sätzen 3.16 und 3.17 werden wir in den Voraussetzungen fordern, dass die Matrix $A$ keine Eigenwerte auf dem Einheitskreis besitzt. Später im Beweis von Satz 3.18 wird die Exponentialmatrix $e^A$ die Rolle von $A$ in den Sätzen 3.16 und 3.17 einnehmen. Wegen Satz 2.17 korrespondieren Eigenwerte auf dem Einheitskreis von $e^A$ zu rein imaginären Eigenwerten von $A$. Die Forderung, dass $e^A$ also keine Eigenwerte mit Betrag 1 besitzt ist also äquivalent dazu, dass $A$ eine hyperbolische Matrix ist.

**Satz 3.16** (Grobman-Hartman für globale Abbildungen)**.** *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ohne Eigenwerte auf dem Einheitskreis.*[2] *Die Normen auf $F^{\pm}(A)$ seien wie oben bereits definiert, sodass $\alpha := \max\left\{\|A_+\|_+, \left\|A_-^{-1}\right\|_-\right\} < 1$. Seien $f, g \in BC^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und sei*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|Df(x)\| < \min\left\{1-\alpha, \left\|A^{-1}\right\|^{-1}\right\}, \ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|Dg(x)\| < \min\left\{1-\alpha, \left\|A^{-1}\right\|^{-1}\right\}.$$

*Dann gibt es eine eindeutige, stetige, invertierbare Abbildung $\psi(x) = x + h(x)$ mit $h \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sodass*

$$\psi \circ (A+f) = (A+g) \circ \psi. \tag{$*$}$$

*Falls $f(0) = g(0) = 0$ gilt, so ist $\psi(0) = 0$.*

**Beweis:** Wir fassen die Matrix $A$ als die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$ auf. Dann ist $(*)$ äquivalent zu $(I+h)\circ(A+f) = (A+g)\circ(I+h)$, bzw.

$$Lh := h\circ(A+f) - A\circ h = g\circ(I+h) - f.$$

$L$ ist ein linearer Operator von $BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ in sich. Falls $L$ invertierbar ist, ergibt sich eine äquivalente Fixpunktgleichung für $h$. Sei $L = S - A$ mit dem linearen Operator $Sh := h\circ(A+f)$. Nach Voraussetzung gilt

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\|A^{-1}Df(x)\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|Df(x)\| < 1$$

und $A+f$ ist nach Satz 3.15 invertierbar. Daher ist $S$ invertierbar. Wir wollen nun zeigen, dass $\|S\| = \left\|S^{-1}\right\| = 1$ ist. Es gilt

$$\|S\| = \sup_{\|h\|\le 1} \|h(a+f)\| \le \|h\| \le 1$$

Für $\tilde{h} \equiv 1$ folgt $\tilde{h}(A+f) = 1$ und somit $\left\|\tilde{h}(A+f)\right\| = 1$. Aus beiden Ungleichungen resultiert daher $\|S\| = 1$. Analog gilt für $\|S^-1\|$

$$\left\|S^{-1}\right\| = \sup_{\|\bar{h}\|\le 1} \left\|S^{-1}\bar{h}\right\| = \sup_{\|\bar{h}\|\le 1} \left\|\bar{h}\circ(A+f)^{-1}\right\| \le \left\|\bar{h}\right\| \le 1.$$

Wieder mit der Wahl $\tilde{h} \equiv 1$ oder da $\|S\|\left\|S^{-1}\right\| \ge 1$ folgt somit $\left\|S^{-1}\right\| = 1$.

[2] Also gilt $F^0(A) = \emptyset$

Zerlege nun $BC(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n) = BC(\mathbb{R}^n,F_+) \oplus BC(\mathbb{R}^n,F_-)$ und $A = A_+ \oplus A_-, L = L_+ \oplus L_-, S = S_+ \oplus S_-$. Es gilt $L_+ = S_+(I - S_+^{-1}A_+)$ und $L_- = -A_-(I - A_-^{-1}S_-)$. Wegen $\left\|A_+^{-1}A_+\right\| \leq \alpha < 1$ und $\left\|S_-^{-1}S_-\right\| \leq \alpha < 1$ konvergieren die Neumannreihen

$$\begin{aligned}
(I - S_+^{-1}A_+)^{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(S_+^{-1}A_+\right)^j, \\
(I - A_-^{-1}S_-)^{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(A_-^{-1}S_-\right)^j, \\
\left\|(I - S_+^{-1}A_+)^{-1}\right\|_+ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\|S_+^{-1}A_+\right\|_+^j \leq \frac{1}{1-\alpha}, \\
\left\|(I - A_-^{-1}S_-)^{-1}\right\|_- &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\|A_-^{-1}S_-\right\|_-^j \leq \frac{1}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

Daher sind $L_\pm$ und damit $L$ invertierbar und es gilt

$$\left\|L_+^{-1}\right\|_+ \leq \frac{1}{1-\alpha}, \qquad \left\|L_-^{-1}\right\|_- \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}, \left\|L^{-1}\right\| \leq \max\left\{\left\|L_+^{-1}\right\|_+, \left\|L_-^{-1}\right\|_-\right\} \leq \frac{1}{1-\alpha}.$$

Definiere nun den Operator von $BC(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ in sich durch

$$K(h) = L^{-1}(g \circ (I+h) - f).$$

Es gilt mit $\theta < 1$

$$\|K(h_1) - K(h_2)\| \leq \frac{1}{1-\alpha} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|Dg(x)\| \, \|h_1 - h_2\| \leq \theta \, \|h_1 - h_2\|,$$

das heißt, dass $K$ als strikte Kontraktion einen eindeutigen Fixpunkt $h \in BC(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ hat. $\psi = I+h$ erfüllt dann $(*)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\psi$ invertierbar ist. Vertausche dazu $f$ und $g$ in $(*)$ und erhalte eine eindeutige, stetige Abbildung $\phi$ mit $\phi - I \in BC(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ und $\phi \circ (A+g) = (A+f) \circ \phi$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi \circ (A+g) &= \psi \circ (A+f) \circ \phi = (A+g) \circ \psi \circ \phi, \\
\phi \circ \psi \circ (A+f) &= \phi \circ (A+g) \circ \psi = (A+f) \circ \phi \circ \psi.
\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit im Fall $f = g$ folgt dann $\psi \circ \phi = I$ und $\phi \circ \psi = I$, d.h. $\psi^{-1} = \phi$ existiert.

$$\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi} \circ (a+f) = \tilde{\phi} \circ a \circ \tilde{\psi} = (a+g) \circ \tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$$

und $\psi = \tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$ wegen der Eindeutigkeit von $\psi$. Aus

$$\tilde{\phi}^{-1}(0) = \tilde{\phi}^{-1}((A+g)(0)) = A\tilde{\phi}^{-1}(0)$$

folgt $\tilde{\phi}^{-1}(0) = 0$ und $\tilde{\phi}(0) = 0$, da 1 kein Eigenwert von $A$ ist. Weiter ist

$$\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}((A+f)(0)) = A\tilde{\psi}(0)$$

und somit $\tilde{\psi}(0) = 0$. Insgesamt ist $\psi(0) = 0$. $\square$

**Satz 3.17** (Grobman-Hartman für lokale Abbildungen)**.** *Sei $f(x) = Ax+g(x)$ mit $g \in L^1(B_r(0), \mathbb{R}^n)$, $g(0) = 0$ und $Dg(0) = 0$. Sei $A$ invertierbar ohne Eigenwerte auf dem Einheitskreis, dann ist $f(x)$ lokal topologisch zu $Df(0)x$ konjugiert.*

**Beweis:** Wähle eine sogenannte Abschneidefunktion $\rho \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$ mit Träger in $[0, 2]$

$$\rho(s) = \begin{cases} 1, & s \in [0,1] \\ 0, & s \geq 2 \\ 0 \leq \rho(s) \leq 1, & s \in (1,2) \end{cases}.$$

Sei $C = \sup_{s>0} |\rho'(s)|$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es $0 < \delta < \frac{r}{2}$, sodass

$$\sup_{|x|\leq 2\delta} |Dg(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \ \sup_{|x|<2\delta} |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}\delta$$

gilt. Definiere dann

$$g_\delta(x) = \begin{cases} \rho\left(\frac{|x|}{\delta}\right) g(x), & |x| \leq 2\delta < r \\ 0, & |x| \geq 2\delta \end{cases}$$

und $f_\delta := A + g_\delta$. Dann folgt für $x \in B_{2\delta}(0)$

$$|Dg_\delta(x)| \leq \frac{1}{\delta}\left|\rho'\left(\frac{|x|}{\delta}\right)\right| |g(x)| + \rho\left(\frac{|x|}{\delta}\right)|Dg(x)| \leq \frac{C}{\delta}\frac{\varepsilon\delta}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für $x \in B_\delta(0)$ gilt $g_\delta(x) = g(x)$ und für $|x| > 2\delta$ gilt $g_\delta(x) = 0$. Dies zeigt die Voraussetzungen an $g_\delta$ in Satz 3.16, falls $\varepsilon$ und damit $\delta$ hinreichend klein ist. Damit gibt es einen globalen Homöomorphismus $\psi_\delta \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\psi_\delta(0) = 0$, sodass $A\psi_\delta(x) = \psi_\delta(Ax+g_\delta(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Für $x \in B_\delta(0)$ folgt $A\psi_\delta(x) = \psi_\delta(Ax + g(x))$. □

*Bemerkung:*

1. Es ist ein häufig verwendetes Verfahren, zuerst ein globales Problem unter restriktiven Bedingungen zu lösen und dann zu lokalisieren.

2. Die lokale Konjugation $\psi_\delta$ hängt von $\rho$ und $\delta$ ab und ist damit nicht eindeutig.

**Satz 3.18** (Grobman-Hartman für globale Flüsse)**.** *Für $g \in BC^1(U, \mathbb{R}^n)$ betrachte die DGL*

$$y'(t) = Ay(t) + g(y(t)),\ y(0) = x$$

*mit dem globalen Fluss $\phi_t(x)$. Sei $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, d.h. $A$ ist hyperbolisch. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass für $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|Dg(x)\| < \delta$ ein Homöomorphismus $\psi = I + h$ mit $h \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ existiert, der für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$\psi \circ e^{tA} = \phi_t \circ \psi$$

*erfüllt.*

**Beweis:** Da $g$ beschränkt ist, "wächst" $Ay + g(y)$ linear und $\phi_t(x)$ ist global definiert. Wir wollen den globalen Satz für Iterationen auf $\phi_1(x)$[3] und $D_x\phi_1(0) = e^A$ anwenden. $e^A$ ist invertierbar ohne

[3]Diskretisierung, und daher 1 als Index statt $t$

Eigenwerte auf dem Einheitskreis. Definiere $G(x)$ durch $\phi_1(x) = e^A x + G(x)$. Zu zeigen ist, dass $DG(x)$ klein ist. Um präziser zu sein, für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|Dg(x)\| < \delta$. $D_x\phi_t(x)$ erfüllt das lineare System

$$\partial_t D_x\phi_t(x) = AD_x\phi_t(x) + Dg(\phi_t(x))D_x\phi_t(x), \qquad D_x\phi_0(x) = I,$$

bzw. die Integralgleichung

$$D_x\phi_t(x) = e^{tA} + \int_0^t e^{(t-s)A} Dg(\phi_s(x))D_x\phi_s(x)\,\mathrm{d}s.$$

Nach Gronwall's Lemma gibt es $C > 0$, sodass $\|D_x\phi_s(x)\| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq s \leq 1$ und $0 < \delta \leq \delta_0$. Weiter folgt aus der Integralgleichung

$$\left\|D_x\phi_1(x) - e^A\right\| = \left|\int_0^1 e^{(1-s)A} Dg(\phi_s(x))D_x\phi_s(x)\,\mathrm{d}s\right| \leq \delta C \int_0^1 \left\|e^{(1-s)A}\right\| \,\mathrm{d}s \leq \varepsilon,$$

falls $\delta$ hinreichend klein gewählt wird.
Nach Satz 3.16 gibt es einen eindeutigen Homöomorphismus der Form $\psi = I+h$ mit $h \in BC^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sodass $\psi \circ e^A = \phi_1 \circ \psi$ gilt. Für ein festes $t \in \mathbb{R}$ sei $\psi_t := \phi_t \circ \psi \circ e^{-tA}$. Es gilt

$$\psi_t \circ e^A = \phi_t \circ \psi \circ e^{(1-t)A} = \phi_{t+1} \circ \psi \circ e^{-tA} = \phi_1 \circ \psi_t.$$

Wir wollen zeigen, dass $\psi_t = \psi$. Dies folgt aus der Eindeutigkeit von $\psi$, falls $\psi_t - I$ beschränkt ist

$$\psi_t - I = \phi_t \circ (I+h) \circ e^{-tA} - I = (\phi_t - e^{tA})e^{-tA} + \phi_t \circ h \circ e^{-tA}.$$

Der erste Term ist beschränkt, da für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left|\phi_t(x) - e^{tA}x\right| = \left|\int_0^t e^{(t-s)A} g(\phi_s(x))\,\mathrm{d}s\right| \leq \sup_{s\in[0,t]} \left\|e^{sA}\right\| \sup_{y\in\mathbb{R}^n} |g(y)| < \infty.$$

Der zweite Term ist beschränkt, da $h$ beschränkt ist. Damit ist $\psi_t - I$ beschränkt und wegen der Eindeutigkeit in Satz 3.16 folgt $\psi_t = \psi$, d.h. $\psi \circ e^{tA} = \phi_t \circ \psi$. $\square$

Durch Linearisierung der Nichtlinearität $g$ bekommen wir den folgenden Satz.

**Satz 3.19** (Grobman-Hartman für lokale Flüsse). *Sei $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ mit $f = A + g$, $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$. Sei $\Phi_t$ der zugehörige lokale Fluss. Falls $A$ hyperbolisch ist, so ist $\Phi_t$ lokal konjugiert zu $e^{At}$. Es gilt also $\Phi_t = \psi^{-1} \circ e^{At} \circ \psi$ für einen lokalen Homöomorphismus von $\psi$.*

**Definition 3.20** (Phasenraum). *Als Phasenraum bezeichnet man den Raum, der durch die Variablen aufgespannt wird.*

## 3.2 Beispiel: Lotka-Volterra Modell

Wir betrachten nun das klassische Beispiel des Lotka-Volterra Modells, welches eine Räuber-Beute Dynamik modelliert. Dafür stellen wir folgende Gleichungen auf

$$\begin{aligned} u' &= au - buv = f(u,v) \qquad \textit{(Beutepopulation)} \\ v' &= cuv - dv = g(u,v) \qquad \textit{(Räuberpopulation)} \end{aligned} \tag{4}$$

mit $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$ und $0 < a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. **Existenz und Eindeutigkeit:** Folgt direkt aus Picard-Lindelöff.

2. **Beschränktheit und Nicht-Negativität:**
   Um die Beschränktheit der Lösungen zu zeigen, nehmen wir zunächst an, dass $v \geq \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. In diesem Fall beweisen wir zuerst eine Abschätzung der Form $\frac{u}{v} \leq k$. Wir betrachten daher $\left(\frac{u}{v}\right)'$ und berechnen

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{(au - buv)v - u(cuv - dv)}{v^2} \\ &= a\frac{u}{v} - bu - cv\left(\frac{u}{v}\right)^2 + d\frac{u}{v} \\ &\leq \frac{u}{v}\left(a + d - cv\left(\frac{u}{v}\right)\right) \\ &\leq \frac{u}{v}\left(a + d - c\varepsilon\left(\frac{u}{v}\right)\right). \end{aligned}$$

   Setzen wir $y := \frac{u}{v}$, so erhalten wir die Abschätzung

$$y' \leq y\left(a + d - c\varepsilon y\right).$$

   Die rechte Seite der Ungleichung ist gerade die Gleichung des logistischen Wachstums (vgl. Übungsblatt 2, Aufgabe 2) mit Tragfähigkeit (engl. *carrying capacity*) $\frac{a+d}{c\varepsilon}$. Überschreitet $y$ diese Konstante, so wird die rechte Seite negativ. Insbesondere kann $y$ also nur größer als $\frac{a+d}{c\varepsilon}$ sein, wenn dies bereits zum Zeitpunkt $t = 0$ der Fall war. Zusammengefasst erhalten wir

$$\left(\frac{u}{v}\right) = y \leq \max\left\{\frac{u_0}{v_0}, \frac{a+d}{c\varepsilon}\right\} =: M_\varepsilon.$$

   $M_\varepsilon$ ist strikt positiv und daher folgt

$$u \leq M_\varepsilon v \qquad \text{bzw.} \qquad v \geq \frac{u}{M_\varepsilon}. \tag{5}$$

   Setzen wir (5) in die Gleichung für $u$ in (4) ein, so erhalten wir

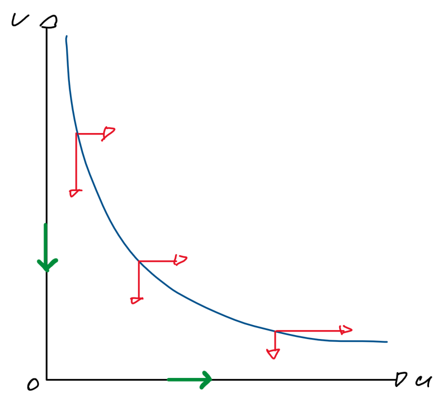
$$u' = (a - bv)u \leq \left(a - \frac{b}{M_\varepsilon}u\right)u.$$

   Die Beschränktheit von $u$ ergibt sich wieder durch einem Vergleich mit dem logistischen Wachstum

$$u \leq \max\left\{u_0, \frac{aM_\varepsilon}{b}\right\} =: C_\varepsilon.$$

   Die Beschränktheit von $v$ muss noch gezeigt werden. Ebenso wie der Fall $v < \varepsilon$ für alle $\varepsilon$...

Für die Nicht-Negativität betrachten wir die Ableitungen nahe des Randes. Im Folgenden sei eine Lösung nahe $(0, 0)$ skizziert




Zu 1: Eine Lösungstrajektorie in blau mit entsprechenden Ableitungen in rot. Da das Vektorfeld am Rand parallel (grün) zur Begrenzung des Gebiets verläuft (oder nach innen zeigt), kann keine Lösung den Rand überschreiten und somit negativ werden.

Wir rechnen daher die Ableitungen bei $u = 0$ und $v = 0$ nach

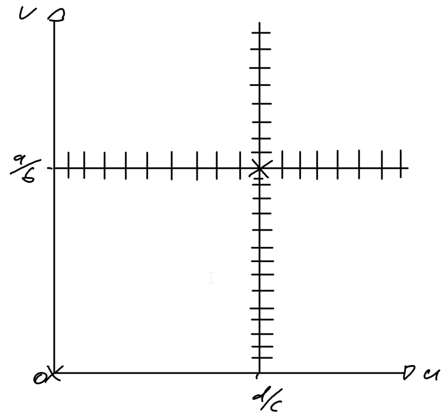
$$f|_{u=0} = 0 \geq 0 \implies u(t) \geq 0 \text{ für } u_0 \geq 0$$
$$g|_{v=0} = 0 \geq 0 \implies v(t) \geq 0 \text{ für } v_0 \geq 0.$$

Da hier das Vektorfeld nicht aus dem Gebiet heraus zeigt, kann keine Lösung, die im positiven Quadranten startet, den Rand des Quadranten überschreiten und somit negativ werden. Für die Bestimmung der grünen Pfeilrichtungen in der Graphik, berechnet man einfach das Vorzeichen von $g|_{u=0} = 0$ bzw $f|_{v=0} = 0$.

**3. Fixpunkte und isokline Linien:**
Wir bestimmen nun die so genannten Isoklinen (Nullklinen) von $u$ und $v$. Isoklinen sind Kurven, auf denen die Ableitung in einer Richtung konstant verschwindet. Es gilt

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \iff \bar{u} = 0 \text{ oder } \bar{v} = \frac{a}{b} \qquad (u - \text{Nullklinen})$$
$$g(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \iff \bar{v} = 0 \text{ oder } \bar{u} = \frac{d}{c} \qquad (v - \text{Nullklinen})$$

Offensichtlich befinden sich an jedem Schnittpunkt einer $u-$ und einer $v-$Isokline ein Fixpunkt des Systems. Wir erhalten somit die beiden Fixpunkte $\mathcal{P}_0 = (0, 0)$ und $\mathcal{P}_1 = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$. Des weiteren bekommen wir die isoklinen Linien $u = \frac{d}{c}$ und $v = \frac{a}{b}$, welche das Vektorfeld orthogonal schneiden.




Zu 3: Die beiden Fixpunkte $\mathcal{P}_0 = (0,0)$ und $\mathcal{P}_1 = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ sind durch die Kreuze gekennzeichnet. Durch den Fixpunkt $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ verlaufen die beiden Isoklinen $u = \frac{d}{c}$ und $v = \frac{a}{b}$. Das Vektorfeld schneidet diese orthogonal.

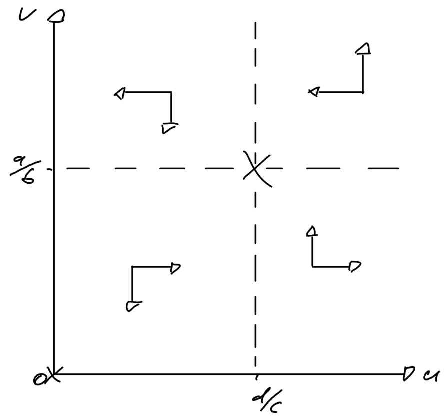
4. **Richtung und Vektorfeld:**
Wir nehmen nun aufgrund der Nicht-Negativität der Lösung $u, v > 0$ an. Wir betrachten die Richtungen der Ableitungen und bemerken, dass

$$f(u,v) = au - buv = u(a - bv) > 0$$

gilt genau dann, wenn $u > 0$ und $v < \frac{a}{b}$. Analog gilt

$$f(u,v) < 0 \iff u > 0 \text{ und } v > \frac{a}{b}$$
$$g(u,v) > 0 \iff v > 0 \text{ und } u > \frac{d}{c}$$
$$g(u,v) < 0 \iff v > 0 \text{ und } u < \frac{d}{c}$$

Somit setzen sich die Richtungen des Vektorfelds wie folgt zusammen




Zu 4: Anhand der Richtungsableitungen deutet sich eine gewisse kreisförmige Bewegung um den Fixpunkt $\mathcal{P}_1$ an. Wir werden später untersuchen, ob ähnliches auch in den Lösungen zu finden ist.

**5. Stabilität der Fixpunkte durch Linearisierung:**
Wir untersuchen nun die Stabilität der Fixpunkte in der Linearisierung. Durch den Satz von Grobman-Hartman können wir dann hoffentlich auf Stabilität/Instabilität im nichtlinearen System schließen. Die Jacobimatrix ist gegeben durch

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} a - bv & -bu \\ cv & cu - d \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen des Fixpunkts $\mathcal{P}_0 = (0,0)$ erhalten wir

$$J|_{(\bar{u},\bar{v})=\mathcal{P}_0} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte $\lambda_1 = a$ und $\lambda_2 = -d$ sind direkt ablesbar. Nach Voraussetzung gilt $0 < a,b,c,d$, und der Satz von Grobman-Hartman für lokale Flüsse (3.19) ist anwendbar. Somit ist $\mathcal{P}_0$ ein (nichtlinearer) Sattelpunkt. Analog setzen wir $\mathcal{P}_1 = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ in die Jacobimatrix ein

$$J|_{(\bar{u},\bar{v})=\mathcal{P}_1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Rechnung ergibt die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ad}$. Somit ist die Linearisierung in $\mathcal{P}_1$ nicht hyperbolisch und Satz (3.19) kann nicht angewendet werden. In diesem Fall können wir also (noch) keine Aussage über die Stabilität des Fixpunkts treffen.

**6. Periodizität:**
Wird noch nachgetragen...

**7. Mittelwert der Lösungen:**
Sei $T$ die Periode einer Kurve. Wir betrachten nun

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} = a - bv.$$

Integration beider Seiten von 0 bis $T$ bzgl. $t$ liefert nun

$$\ln u(T) - \ln u(0) = aT - b \int_0^T v(s)\, ds.$$

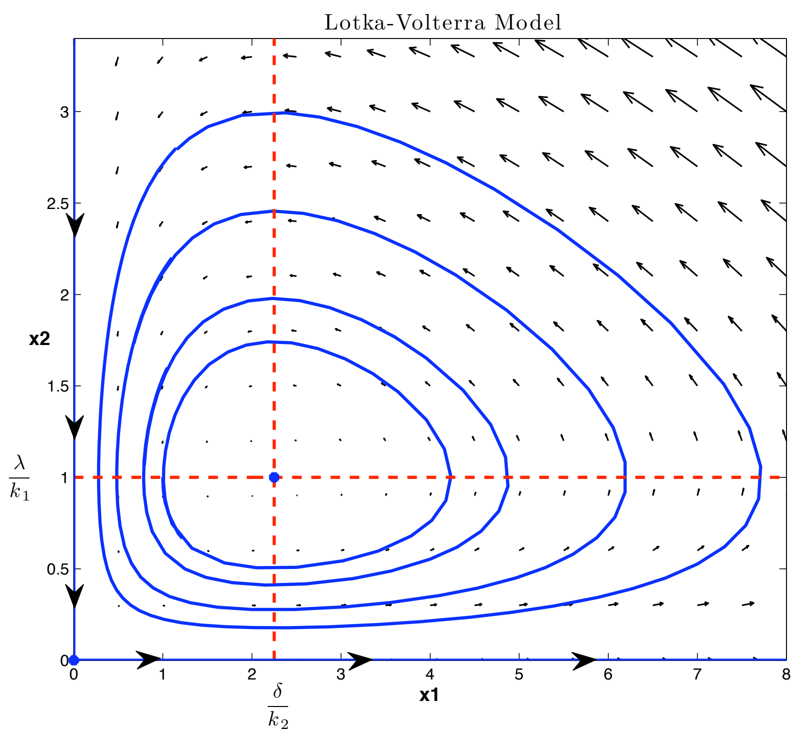
Aus $u(T) = u(0)$ folgt nun

$$\underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T v(s)\, ds}_{\text{Mittelwert von } v} = \frac{a}{b}.$$

Analog ergibt sich

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(s)\, ds = \frac{d}{c}.$$

Wir sehen also, dass der Mittelwert einer Trajektorie genau der nicht triviale Fixpunkt $\mathcal{P}_1$ ist.




Phasenportrait eines Lotka-Volterra Modells