Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I

5. Übungsblatt

Abgabe bis zum 21.11.19, 9:15 Uhr

Aufgabe 1 (3 · 2 Punkte)**.** Es sei K ein Körper, M eine Menge und $m_0 \in M$ ein fest gewähltes Element. In $V = \mathrm{Abb}(M, K)$ betrachten wir die Teilmengen $U = \{f \in V \mid f(m_0) = 0\}$ und $W = \{f \in V \mid \forall x, y \in M\colon f(x) = f(y)\}$. Zeigen Sie:

(a) U und W sind Untervektorräume von V.

(b) $U \cap W = \{0\}$.

(c) $V = U + W$.

Aufgabe 2 (1 + 1 + 2 + 2 Punkte)**.** Es sei K ein Körper, $U = \mathrm{Abb}(\{0, 1, \ldots, n\}, K)$ und $V = \mathrm{Abb}(\{0, 1, \ldots, n+1\}, K)$. Wir betrachten folgende Abbildungen:

$$\begin{aligned} \psi\colon V &\longrightarrow K^{n+2} \\ f &\longmapsto (f(0), f(1), \ldots, f(n+1)), \text{ und} \\ \partial\colon V &\longrightarrow U \\ f &\longmapsto (i \mapsto (i+1) \cdot f(i+1)) \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass ψ und ∂ linear sind.

(b) Zeigen Sie, dass ψ ein Isomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie: ∂ ist genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{char}\, K \notin \{2, \ldots, n+1\}$.

(d) Bestimmen Sie $\psi(\ker \partial) \subset K^{n+2}$.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)**.** Es sei K ein Körper und U, V zwei K-Vektorräume. Zeigen Sie:

(a) Ist $f\colon U \to V$ linear, so auch die duale Abbildung $f^*\colon V^* \to U^*$.

(b) Die Auswertungsabbildung $\mathrm{ev}\colon U \to (U^*)^*$, welche definiert ist durch

$$u \longmapsto (f \mapsto f(u)),$$

ist linear.

Aufgabe 4 (3 + 3 Punkte)**.** Es sei K ein Körper und U, V zwei K-Vektorräume. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $*\colon \mathrm{Hom}_K(U, V) \to \mathrm{Hom}_K(V^*, U^*)$, welche eine lineare Abbildung auf ihre duale Abbildung abbildet, ist linear.

(b) Ist $f\colon U \to V$ surjektiv, so ist $f^*\colon V^* \to U^*$ injektiv.