Aufgabe 16

(a) (i) Seien im folgenden $f, g \neq 0$ (sonst trivial). Wir führen den euklidischen Algorithmus über $L[t]$ durch und setzen dazu $a_0 = f \in K[t]$ und $a_1 = g \in K[t]$. Dann $\exists q_0 \in K[t]$ mit $a_0 = q_0 a_1 + a_2$, da $K[t]$ ein euklidischer Ring ist. Folglich ist auch $a_2 \in K[t]$. Induktiv erhalten wir, dass es stets ein $q_{i-1} \in K[t]$ gibt mit

$$a_{i-1} = q_{i-1} a_i + a_{i+1}.$$

Schließlich erhalten wir nach Vorlesung ein Polynom d, sodass d normiert gleich dem eindeutig bestimmten $\mathrm{GGT}(f, g)_{L[t]}$ ist. Sei nun ∂ der Leitkoeffizient von d. Wegen $d \in K[t]$ ist $\partial \in K$. Also ist $\partial^{-1} \cdot d$ ein normiertes Polynom $\in K[t]$ und damit $\mathrm{GGT}(f, g) = \partial^{-1} d \in K[t]$. Diesen gesamten Algorithmus können wir identisch über $K[t]$ ausführen, da wir die Polynome so gewählt hatten, dass sie alle in $K[t]$ lagen. Offensichlich erhalten wir dann auch dasselbe Ergebnis $GGT_{K[t]}$. Bestimmen wir umgekehrt $GGT(f, g)_{K[t]}$ mit dem euklidischen Algorithmus über $K[t]$, so können wir den Algorithmus identisch über $L[t]$ ausführen, da die q_i und a_i natürlich die Gradbedingung über $L[t]$ genauso erfüllen wie über $K[t]$.

(ii) **Behauptung:** $d_l(M)$ ist über K und L gleich. Nach Bemerkung 4.3 (b) ist $d_l(M) = \mathrm{GGT}(\det(N) | N$ ist $l \times l$ Untermatrix von $P_M)$. Wie in Aufgabe (i) gezeigt, ist der größte gemeinsame Teiler aber über L gleich wie über K. Natürlich ist auch die Determinante einer beliebigen Untermatrix von P_M gleich. Daher folgt sofort unsere Behauptung. Nach dem Invarianteilersatz sind A und B genau dann äquivalent, wenn ihre Determinantenteiler übereinstimmen. Da diese jedoch unabhängig von K oder L sind, muss auch die Äquivalenz der Matrizen unabhängig davon sein, ob man sie als Elemente von $M_{n,n}(K)$ oder $M_{n,n}(L)$ auffasst.

(b) Es gilt $P_{A^t} = (tE_n - A^t) = (tE_n)^t - A^t = (tE_n - A)^t = P_A^t$. Also $A \sim A^t \iff P_A \approx P_{A^t} \iff P_A \approx P_A^t \iff \forall 1 \leq l \leq n : \ \mathrm{Fit}_l(P_A) = \mathrm{Fit}_l(P_A^t)$. Da die Fittingideale ausschließlich von den Determinanten abhängen, sind diese natürlich invariant unter Transposition, woraus sofort die Aussage folgt.

Aufgabe 17

(a) Es gilt

$$P_A = \begin{pmatrix} t-10 & 11 & 11 & 32 \\ 1 & t & 2 & -4 \\ -1 & 1 & t-1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & t+6 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir die Elementarteiler von P_A.

$$\begin{pmatrix} t-10 & 11 & 11 & 32 \\ 1 & t & 2 & -4 \\ -1 & 1 & t-1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & t+6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 2 & -4 \\ t-10 & 11 & 11 & 32 \\ -1 & 1 & t-1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & t+6 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t & 2 & -4 \\ 0 & 11+10t-t^2 & 31-2t & -8+4t \\ 0 & 1+t & t+1 & 0 \\ 0 & 2+2t & 6 & t-2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11+10t-t^2 & 31-2t & -8+4t \\ 0 & 1+t & t+1 & 0 \\ 0 & 2+2t & 6 & t-2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2+t & -2+t \\ 0 & 1+t & 1+t & 0 \\ 0 & 31-2t & 11+10t-t^2 & 4t-8) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2(t-2) & t-2 \\ 0 & 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 31-2t & -20+12t-t^2 & 4t-8 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & t-2 \\ 0 & 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 31-2t & -4+4t-t^2 & 4t-8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & t-2 \\ 0 & 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4+4t-t^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1+t & 0 & -\frac{1}{6}(1+t)(t-2) \\ 0 & 9 & -(t-2)^2 & -\frac{3}{2}(t-2) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6}(1+t)(t-2) \\ 0 & 0 & -(t-2)^2 & -\frac{3}{2}(t-2) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}(t-2) & -(t-2)(t-2) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6}(1+t)(t-2) & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}(t-2) & -(t-2)^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9}(t-2)^2(t+1) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}(t-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9}(t-2)^2(t+1) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{6} \\ \mid \cdot \frac{2}{3} \\ \mid \cdot 9 \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (t-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (t-2)^2(t+1) \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die Invariantenteiler $1, 1, (t-2)$ und $(t-2)^2(t+1)$. Die Determinantenteiler lauten folglich $1, 1, (t-2)$ und $(t-2)^3(t+1)$.

(b) Es gilt

$$P_B = \begin{pmatrix} t+5 & 3 & -5 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 8 & 4 & t-7 \end{pmatrix}$$

und

$$P_C = \begin{pmatrix} t+3 & -8 & -12 \\ -1 & t+2 & 3 \\ 2 & -4 & t-7 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten

$$\det P_B = \det \begin{pmatrix} t+5 & 3 & -5 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 8 & 4 & t-7 \end{pmatrix} = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$$

und

$$P_C = \det \begin{pmatrix} t+3 & -8 & -12 \\ -1 & t+2 & 3 \\ 2 & -4 & t-7 \end{pmatrix} = 2 - t - 2t^2 + t^3.$$

Da sich die beiden Determinanten unterscheiden, ist $d_3(B) \neq d_3(C)$ und daher sind B und C nicht äquivalent.