Aufgabe 1

(a) Für $n > m$ gilt:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x+a)^m = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^m a^{m-k} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}x^m + ... + \frac{d^n}{\mathrm{d}x^n}a^m = 0$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\frac{1}{2^m m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Für ein natürliches $0 \leq k \leq n$ ist das gleich

$$= \frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}(-1)^k\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}((x^2-1)^n)\cdot\frac{\mathrm{d}^{m+k}}{\mathrm{d}x^{m+k}}((x^2-1)^m)\,\mathrm{d}x$$

Wir wählen nun $k = n$. Dann erhalten wir

$$= \frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}(-1)^n\int_{-1}^{1}((x^2-1)^n)\cdot\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}((x^2-1)^m)\,\mathrm{d}x$$

Aus $m + n > m$ folgt, dass $\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}}((x^2-1)^m)$ verschwinden muss

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2^n n!}\frac{1}{2^m m!}(-1)^n\int_{-1}^{1}((x^2-1)^n)\cdot 0\,\mathrm{d}x \\ &= 0\end{aligned}$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Es gilt mittels endlicher Induktion nach k:

Beweis.
Induktionsanfang: k=0:

$$\frac{(n!)^2}{(n)!(n)!}\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\,\mathrm{d}x$$

Induktionsvoraussetzung: Gelte für ein festes aber beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-k}(1+x)^{n+k}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\,\mathrm{d}x$$

Induktionsschluss: $k \mapsto k+1$: Wir beginnen mit der Induktionsvoraussetzung.

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}}_{:=\alpha}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-k}(1+x)^{n+k}\,\mathrm{d}x$$

partielle Integration führt auf

$$= \alpha \cdot (1-x)^{n-k} \cdot \frac{1}{n+k+1} \cdot (1+x)^{n+k+1} \Big|_{-1}^{1}$$
$$- \alpha \int_{-1}^{1} -(n-k) \cdot (1-x)^{n-k-1} \cdot \frac{1}{n+k+1} \cdot (1+x)^{n+k+1} \, \mathrm{d}x$$

Sowohl an der Stelle -1 als auch an der Stelle 1 verschwindet der erste Term

$$= (n!)^2 \cdot \frac{n-k}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{(n+k)! \cdot (n+k+1)} \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-k-1}(1+x)^{n+k+1}$$
$$= \frac{(n!)^2}{(n-k-1)!(n+k+1)!} \int_{-1}^{1} (1-x)^{n-k-1}(1+x)^{n+k+1} \, \mathrm{d}x$$

□

(c) Es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(2^n n!)^2 \cdot \int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \, \mathrm{d}x$$

Benutzt man nun die in der a) gegebene Formel, so erhält man für $k = n$

$$= (-1)^n \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \cdot \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}((x^2-1)^n) \, \mathrm{d}x$$

Die höchste vorkommende Potenz in $(x^2-1)^n$ ist x^{2n}. Diese hat den Vorfaktor 1. Bildet man nun die $2n$-te Ableitung, so bleibt nur ein Faktor $(2n)!$ übrig.

$$= (-1)^n \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \cdot (2n)! \, \mathrm{d}x$$
$$= (-1)^n \cdot (2n!) \cdot \int_{-1}^{1} (x-1)^n \cdot (x+1)^n \, \mathrm{d}x$$
$$= (-1)^{2n} \cdot (2n!) \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^n(1+x)^n \, \mathrm{d}x$$

Hier können wir nun unser Resultat aus Aufgabe (b) anwenden und wählen direkt $k = n$

$$= (2n!) \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n} \, \mathrm{d}x$$
$$= (n!)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot (1+x)^{2n+1} \Big|_{-1}^{1}$$
$$(2^n n!)^2 \cdot \int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n+1}}{2n+1}$$

Teilen durch $(2^n n!)^2$ ergibt

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}$$

Aufgabe 2

Es gilt

$$\pi \cdot a_k = \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$$

partielle Integration

$$= \frac{1}{k}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin(kx)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{k}\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{k}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\sin(kx)\Big|_\pi^{2\pi} + \int_\pi^{2\pi}\frac{1}{k}\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

Es gilt $\sin(k\pi) = 0$ für ganzzahlige k

$$\begin{aligned}
&= 0 + \frac{1}{k^2}\cos(kx)\Big|_0^\pi + 0 - \frac{1}{k^2}\cos(kx)\Big|_\pi^{2\pi} \\
&= \frac{1}{k^2}\left(\cos(k\pi) - \cos(0) - \cos(2k\pi) + \cos(k\pi)\right)
\end{aligned}$$

$\cos(2k\pi) = 1$ für ganzzahlige k

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{k^2}\cos(k\pi) - \frac{2}{k^2} \\
&= \frac{2}{k^2}(\cos(k\pi) - 1)
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\pi \cdot b_k = \int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{2\pi}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x$$

partielle Integration

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{k}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\cos(kx)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{k}\cos(kx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{k}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(kx)\Big|_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi}\frac{1}{k}\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{k}\frac{\pi}{2}\cos(k\pi) - \frac{1}{k}\frac{\pi}{2}\cos(0) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big|_0^\pi + \frac{1}{k}\frac{\pi}{2}\cos(2k\pi) + \frac{1}{k}\frac{\pi}{2}\cos(k\pi) - \frac{1}{k^2}\sin(x)\Big|_\pi^{2\pi}
\end{aligned}$$

$\cos(2k\pi) = 1$ und $\sin(k\pi) = 0$ für ganzzahlige k

$$= 0$$

Wir erhalten also für die Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}
F_\infty^f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^\infty\left(\frac{2}{\pi k^2}(\cos(k\pi) - 1)\cos(kx)\right)
\end{aligned}$$

Die geraden Terme fallen weg, da dann $\cos(k\pi) - 1 = 0$ wird

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(2k-1)^2} (-1-1) \cos((2k-1)x) \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos((2k-1)x)$$

Aufgabe 3

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{3\pi}{2} - x\right)^2 \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{3} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{3} \left(\frac{3\pi}{2} - x\right)^3 \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{3} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \right] + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \right] \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{k^2} (\cos(k\pi) - 1) = \frac{(\cos(k\pi)-1)}{\pi k^2}, & k \geq 0 \\ \frac{a_0}{2} = 0, & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \frac{2}{(-k)^2} (\cos(-k\pi) - 1) = \frac{(\cos(k\pi)-1)}{\pi k^2}, & k < 0 \end{cases}$$

Es gilt also

$$\sum_{k=\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \left| \frac{(\cos(k\pi) - 1)}{\pi k^2} \right|^2$$

Daher erhalten wir aus der Parsevalgleichung folgende Identität

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \\
\frac{\pi^2}{12} &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{(\cos(k\pi) - 1)^2}{\pi^2 k^4}
\end{aligned}$$

Da für gerade k $\cos(k\pi) - 1 = 0$ wird, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^4} && \Big| \cdot \frac{\pi^2}{8} \\
\frac{\pi^4}{96} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(kx)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ \mathrm{d}x$$

Substituieren wir nun im ersten Term $u := x + 2\pi$, so erhalten wir

$$= \int_{\pi}^{2\pi} f(u-2\pi)\sin(k(u-2\pi))\ \mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ \mathrm{d}x$$

Aufgrund der 2π-Periodizität der Funktionen erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\ \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} f(u)\sin(ku)\ \mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{2\pi} f(x)\sin(kx)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Analog zeigen wir

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} f(u-2\pi)\cos(k(u-2\pi))\ \mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Aufgrund der 2π-Periodizität der Funktionen gilt auch hier

$$\begin{aligned} &= \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} f(u)\cos(ku)\ \mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{2\pi} f(x)\cos(kx)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Betrachte nun folgende zwei Fälle:

- Sei f gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

  Substituieren wir nun im ersten Term $u := -x$, so erhalten wir

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_{\pi}^{0} f(-u)\sin(-u)\ \mathrm{d}u + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x\right)$$

Vertauschen wir die Integralgrenzen, kommt ein $-$ hinzu

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi f(-u)\sin(-u)\ \mathrm{d}u + \int_0^\pi f(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x\right)$$

Nun wenden wir $f(-x) = f(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$ an

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_0^\pi f(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^\pi f(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x\right) \qquad = 0$$

Mit der Definition aus dem Skript erhält man, da $b_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$

$$F_\infty^{f_g}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

- Sei f ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$. Dann gilt analog

$$\begin{aligned}
a_k =& \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x \\
=& \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^\pi f(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Substituieren wir nun im ersten Term $u \coloneqq -x$, so erhalten wir

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_\pi^0 f(-u)\cos(-u)\ \mathrm{d}u + \int_0^\pi f(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x\right)$$

Vertauschen wir die Integralgrenzen, kommt ein $-$ hinzu

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi f(-u)\cos(-u)\ \mathrm{d}u + \int_0^\pi f(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x\right)$$

Nun wenden wir $f(-x) = -f(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$ an

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\int_0^\pi f(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x + \int_0^\pi f(x)\cos(x)\ \mathrm{d}x\right) \qquad = 0$$

Mit der Definition aus dem Skript erhält man, da $a_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$

$$F_\infty^{f_u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Aufgabe 5

z.z.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m\ \mathrm{d}x = (-1)^k \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k}}{\mathrm{d}x^{m+k}}((x^2-1)^m)\ \mathrm{d}x$$

Beweis. Der Induktionsanfang für $k = 0$ folgt sofort aus $(-1)^0 = 1$. Gelte die Behauptung für ein beliebiges, aber festes $0 \leq k \leq n$. Unsere Induktionsvoraussetzung ist also

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x = (-1)^k \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k}}{\mathrm{d}x^{m+k}}((x^2-1)^m) \,\mathrm{d}x$$

Führt man nun eine partielle Integration durch, so erhält man

$$(-1)^k \left(\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{m+k}}{\mathrm{d}x^{m+k}}(x^2-1)^m \Bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x \right)$$

Der erste Term ist ausgewertet bei $x = \pm 1$ stets gleich 0, womit man schon den Induktionsschluss erhält.

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}((x^2-1)^n) \cdot \frac{\mathrm{d}^{m+k+1}}{\mathrm{d}x^{m+k+1}}((x^2-1)^m) \,\mathrm{d}x \\ = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}(x^2-1)^m \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

□