UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 10. November 2021

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE I
ÜBUNGSAUFGABEN 4

DEADLINE: Do. 18. Nov. 2021, 15:00.

Eine n-*dimensionale Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis für die Topologie, sodass jeder Punkt eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Eine *Fläche* ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension 2. Die zusammenhängende Summe $X_1 \# X_2$ zweier zusammenhängender Flächen X_1 und X_2 wird gebildet, indem man aus X_1 eine kleine offene Kreisscheibe herausschneidet, aus X_2 eine kleine offene Kreisscheibe herausschneidet und die entstandenen berandeten Flächen entlang der Randkurven S^1 miteinander verklebt.

Aufgabe dieses Mini-Projekts ist es, eine einfach zusammenhängende Überlagerung des Raums $X = T^2 \# T^2$ (dies ist die sog. orientierte geschlossene Fläche vom Geschlecht 2) zu konstruieren. Die Überlagerungsprojektion ist präzise zu beschreiben. Wir werden in der Vorlesung sehen, dass eine solche Überlagerung im Wesentlichen (bis auf geeignete Äquivalenz von Überlagerungen) eindeutig ist.

Hinweise: Benutzen Sie die Literatur zur hyperbolischen Geometrie. Lernen Sie insbesondere das Poincarésche Scheibenmodell der hyperbolischen Ebene. Die Geraden ("Geodätischen") dieses Modells sind Kreisbögen, die orthogonal zum Rand der Scheibe stehen, wobei der Rand nicht Teil der hyperbolischen Ebene ist. Das Modell ist "konform", d.h. die Winkelmessung im Scheibenmodell stimmt überein mit der euklidischen Winkelmessung. Den Torus erhält man aus einem Quadrat durch geeignetes Verkleben der 4 Kanten. Zeigen Sie, dass man X aus einem Oktagon durch geeignetes Verkleben der 8 Kanten erhält. Betrachten Sie dann ein reguläres (d.h. alle Kanten haben gleiche hyperbolische Länge) geodätisches Oktagon im Scheibenmodell, das konzentrisch gelagert ist. Die Winkelsumme eines kleinen Oktagons ist größer als 2π, da die hyperbolische Geometrie infinitesimal die euklidische Geometrie approximiert und für ein euklidisches Oktagon die Winkelsumme $6\pi > 2\pi$ beträgt. Andererseits ist die Winkelsumme eines sehr großen Oktagons sehr klein, sodass man das hyperbolische Oktagon so lagern kann, dass es Winkelsumme genau 2π hat. Nun spiegeln Sie das Oktagon isometrisch an seinen 8 Kanten im Scheibenmodell. Setzen Sie diesen Vorgang fort, sodass Sie eine Parkettierung der gesamten Scheibe (hyperbolischen Ebene) erhalten. Als Inspiration mögen Ihnen auch die Circle Limit Werke des Künstlers M. C. Escher dienen.