Aufgabe 1

(a) d_1 ist keine Norm, da sie die Dreiecksungleichung nicht erfüllt. Für $x = 0, y = 1, z = 2$ gilt nämlich $(-2)^2 \geq 1^2 + 1^2$.

(b) d_2 ist eine Norm, denn folgende Aussagen gelten:

- Definitheit: $\sqrt{|x-y|} = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \implies x = y$. Offensichtlich gilt $\sqrt{|x-y|} > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}$
- Symmterie: Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$: $\sqrt{|x-y|} = \sqrt{|-(y-x)|} = \sqrt{|y-x|}$
- Dreiecksungleichung: Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}|x-z| \leq |x-y| + |y-z| &\leq |x-y| + 2\sqrt{|x-y| \cdot |y-z|} + |y-z| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{|x-z|} \leq \sqrt{|x-y| + |y-z|} \\ &\leq \sqrt{|x-y| + 2\sqrt{|x-y| \cdot |y-z|} + |y-z|} \\ &= \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}\end{aligned}$$

(c) d_3 ist keine Norm, da sie die Definitheit nicht erfüllt: $x = 1, y = -1 : |1^2 - (-1)^2| = 0$ aber $x \neq y$

(d) d_4 ist keine Norm, da sie die Definitheit nicht erfüllt: $x = 1, y = 0,5 : |1 - 2 \cdot 0,5| = 0$ aber $x \neq y$

(e) d_4 ist eine Norm, denn folgende Aussagen gelten:

- Definitheit: $\frac{|x-y|}{1+|x-y|} = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \implies x = y$. Offensichtlich gilt $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x-y| > 0$ und somit $1 + |x-y| > 0$.
- Symmetrie: Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$: $\frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{|-(y-x)|}{1+|-(y-x)|} = \frac{|y-x|}{1+|y-x|}$
- Dreiecksungleichung: Es gilt für $x, y, z \in \mathbb{R}$: $\frac{|x-z|}{1+|x-z|} = \frac{|x-y+y-z|}{1+|x-y+y-z|} \leq \frac{|x-y|+|y-z|}{1+|x-y|+|y-z} = \frac{|x-y|}{1+|x-y|+|y-z} + \frac{|y-z|}{1+|x-y|+|y-z|} \overset{|x-y|,|y-z|\geq 0}{\leq} \frac{|x-y|}{1+|x-y|} + \frac{|y-z|}{1+|y-z|}$

Aufgabe 2

Es gilt die Definitheit: $\|x\|_d = d(x,0) \geq 0, \|x\|_d = d(x,0) = 0 \overset{M1}{\Longrightarrow} x = 0$. Die Homogenität folgt aus E2, $\|\lambda x\|_d = d(\lambda x, 0) = \lambda d(x,0) = \lambda \|x\|_d$. Die Dreiecksungleichung erhalten wir schließlich mit E1 und der Dreiecksungleichung für die Metrik:

$$\|x+y\|_d = d(x+y, 0) \leq d(0,x) + d(x, x+y) \overset{\text{E1}}{=} \|x\|_d + d(y,0) = \|x\|_d + \|y\|_d$$

Aufgabe 3

(a) Sei $b \geq 0$ beliebig. Wir betrachten die Funktion $f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$ mit den Ableitungen $f'(a) = a^{p-1} - b$ und $f''(a) = (p-1)a^{p-2} \overset{p>1,a>0}{>} 0$. Da die zweite Ableitung stets positiv ist, ist jede Extremstelle der Funktion ein Minimum. Setzen wir also $f'(a) = 0$, so erhalten wir $a^{p-1} = b$.

Alle Stellen, an denen diese Bedingung gilt, sind also lokale Minima. Setzen wir in f einfach $b = a^{p-1}$, so erhalten wir $f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{a^{(p-1)\cdot q}}{q} - a \cdot a^{p-1} \overset{*}{=} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) a^p - a \cdot a^{p-1} = a^p - a^p = 0$, wobei $*$ aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq \iff p = q(p-1)$ folgt. Am Rand, also bei $a = 0$, erhalten wir außerdem $f(0) = \frac{b^q}{q} \geq 0$. Also ist bei beliebigem b die Funktion $f(a)$ stets größer 0. Daraus folgt sofort $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$, was zu zeigen war.

(b)

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} + \frac{1}{p} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n |b_i|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^p}{\sum_{j=1}^n |a_j|^p} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{|b_i|^q}{\sum_{j=1}^n |b_j|^q} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \left(\frac{|a_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \right)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{|b_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \right)^q \\
&\overset{\text{Young}}{\geq} \sum_{i=1}^n \left(\frac{|a_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \right) \cdot \left(\frac{|b_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n |a_i b_i|}{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}}
\end{aligned}
$$

Multiplizieren wir nun den Nenner auf die andere Seite, so erhalten wir die Behauptung

$$
\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n |a_i b_i|
$$

Aufgabe 4

(a) Betrachte $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$$
f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}(x - \frac{1}{n}) & \Big| \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2} \\ 1 + \frac{2}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}(x - \frac{1}{n}) & \Big| \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & |\text{sonst} \end{cases}
$$

Für $n = 1$ ist offensichtlich der erste Fall in der Funktionsdefinition irrelevant, der Beweis geht dann völlig analog, nur ohne diesen Fall. **Z.Z.** f_n ist stetig.

Beweis. Da Polynome stetig sind, ist f_n ganz sicher auf

$$\left[0, \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}, \frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}, 1\right]$$

stetig. Nun untersuchen wir die rechts- und linksseitigen Grenzwerte an den 3 fehlenden Stellen.

$$\lim_{x \nearrow \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x \searrow \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}} f(x),$$

$$\lim_{x \nearrow \frac{1}{n}} f(x) = 1 = \lim_{x \searrow \frac{1}{n}} f(x)$$

und

$$\lim_{x \nearrow \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}} f(x) = 0 = \lim_{x \searrow \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}} f(x).$$

□

Z.Z. $f_n(x) f_m(x) = 0 \qquad \forall x \in [0,1],\ \forall n \neq m$

Beweis. Sei O.B.d.A. $m > n$. Aus der Funktionsdefinition sieht man sofort, dass $f_n(x) \neq 0$ nur für $x \in I_n$ mit

$$I_n := \left[\frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}, \frac{1}{n} + \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2}\right]$$

gelten kann. Es genügt also zu zeigen, dass $I_n \cap I_m = \emptyset$ oder äquivalent dazu, dass $\max I_m < \min I_n$. Wir beweisen zunächst, dass $\max I_{n+1} < \min I_n$, woraus dann induktiv die Behauptung folgt.

$$\begin{aligned}
n(n+1) &< (n+1)(n+2) \\
\frac{1}{(n+1)(n+2)} &< \frac{1}{n(n+1)} \\
\frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} &< \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} \\
\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} &< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
\frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} &< \frac{2}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \\
\frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}{2} &< \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{2} \\
\max I_{n+1} &< \min I_n
\end{aligned}$$

□

(b) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit den Eigenschaften aus (a). Dann gilt für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ wegen $f_n(x) f_m(x) = 0$ auch $f_n(x) = 1 \implies f_m(x) = 0$ und wegen $\|f_n\|_\infty = 1$ existiert stets solch ein x. Daher gilt $\|f_n - f_m\|_\infty = 1 \forall n, m \in \mathbb{N}$. Gäbe es eine konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, so wäre diese auch eine Cauchy-Folge, sodass es n, m mit $\|f_n - f_m\|_\infty < 1$ geben müsste, Widerspruch.