Aufgabe 1

Da $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$ gilt $\emptyset, X \in A$. Seien nun $A, A' \in \mathcal{A}_\mu$. Dann existieren $B, B' \in \mathcal{A}$ und μ-Nullmengen $C, C' \in \mathcal{A}$, sodass $A \triangle B \subset C$ und $A' \triangle B' \subset C'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(A \cup A') \triangle (B \cup B') &= [(A \cup A') \setminus (B \cup B')] \cup [(B \cup B') \setminus (A \cup A')] \\
&= [A \setminus (B \cup B')] \cup [A' \setminus (B \cup B')] \cup [B \setminus (A \cup A')] \cup [B' \setminus (A \cup A')] \\
&\subset (A \setminus B) \cup (A' \setminus B') \cup (B \setminus A) \cup (B' \setminus A') \\
&= (A \triangle B) \cup (A' \triangle B') \\
&\subset C \cup C'
\end{aligned}$$

Wegen $\mu(C \cup C') = \mu(C) + \mu(C') = 0$ gilt daher $A \cup A' \in \mathcal{A}_\mu$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
(A \cap A') \triangle (B \cap B') &= [(A \cap A') \setminus (B \cap B')] \cup [(B \cap B') \setminus (A \cap A')] \\
&= [[A \setminus (B \cup B')] \cap [A' \setminus (B \cup B')]] \cup [[B \setminus (A \cup A')] \cap [B' \setminus (A \cup A')]] \\
&\subset [(A \setminus B) \cap (A' \setminus B')] \cup [(B \setminus A) \cap (B' \setminus A')] \\
&\subset (C \cap C') \cup (C \cap C') \\
&= C \cap C' \subset C \cup C'
\end{aligned}$$

Wegen $\mu(C \cup C') = \mu(C) + \mu(C') = 0$ gilt daher $A \cap A' \in \mathcal{A}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
A^c \triangle B^c &= (A^c \setminus B^c) \cup (B^c \setminus A^c) \\
&= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) \\
&= (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\
&= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\
&= A \triangle B \\
&\subset C
\end{aligned}$$

Wegen $\mu(C) = 0$ gilt daher $A^c \in \mathcal{A}_\mu$. Damit handelt es sich bei $\mathcal{A}_\mu$ um eine Algebra. Seien nun $A_i \in \mathcal{A}_\mu$ und entsprechende $B_i, C_i \in \mathcal{A}$ mit $\mu(C_i) = 0$ und $A_i \triangle B_i \subset C_i$ gegeben. Wegen

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^\infty A_i \triangle \bigcup_{i=1}^\infty B_i &= \left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i \setminus \bigcup_{i=1}^\infty B_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^\infty B_i \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \\
&= \left[\bigcup_{i=1}^\infty \left(A_i \setminus \bigcup_{i=1}^\infty B_i\right)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^\infty \left(B_i \setminus \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right)\right] \\
&\subset \left[\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \setminus B_i)\right] \cup \left[\bigcup_{i=1}^\infty (B_i \setminus A_i)\right] \\
&= \left[\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \setminus B_i) \cup (B_i \setminus A_i)\right] \\
&= \left[\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \triangle B_i)\right] \\
&\subset \left(\bigcup_{i=1}^\infty C_i\right)
\end{aligned}$$

und der σ-Additivität von μ,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty C_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(C_i) = \sum_{n=0}^\infty 0 = 0,$$

gilt

$$\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}_\mu.$$

Daher ist $\mathcal{A}_\mu$ eine σ-Algebra. Nun zeigen wir, dass μ ein Maß ist. Seien zwei Zerlegungen $A \triangle B \subset C$ und $A \triangle B' \subset C'$ gegeben. Zunächst gilt $B \setminus A \subset A \triangle B \subset C$ und daher $B \subset A \cup C$ und analog auch $B' \subset A \cup C'$. Daraus folgern wir

$$B \setminus B' \subset (A \cup C) \setminus B' = (A \setminus B') \cup (C \setminus B') \subset A \triangle B' \cup C \subset C' \cup C$$

und analog

$$B' \setminus B \subset (A \cup C') \setminus B = (A \setminus B) \cup (C' \setminus B) \subset A \triangle B \cup C' \subset C \cup C'.$$

Diese beiden Identitäten bedeuten einfach, dass $\mu(B \setminus B') = \mu(B' \setminus B) = \mu(C \cup C') = 0$ ist. Damit erhalten wir

$$\mu(B) = \mu(B \cap B') + \mu(B \setminus B') = \mu(B \cap B') = \mu(B' \cap B) + \mu(B' \setminus B) = \mu(B').$$

Insbesondere gilt also $\overline{\mu}(A) = \mu(B) = \mu(B')$ und damit ist $\overline{\mu}$ wohldefiniert. Wir müssen also nur noch die σ-Additivität von $\overline{\mu}$ zeigen. Seien also $A_k \in \mathcal{A}_\mu, k \in \mathbb{N}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ gegeben. Es existieren folglich $B_k, C_k \in \mathcal{A}$ mit $A_k \triangle B_k \subset C_k$ und $\mu(C_k) = 0$. Es gilt also $\overline{\mu}(A_k) = \mu(B_k)$ und wegen

$$\bigcup_{i=1}^\infty A_i \triangle \bigcup_{i=1}^\infty B_i \subset \left(\bigcup_{i=1}^\infty C_i\right), \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty C_i\right) = 0$$

gilt

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_i).$$

Damit ist $\overline{\mu}$ auch σ-additiv, also ein Maß.

Aufgabe 2

(a) Betrachte $A_k = \left[0, \frac{1}{k}\right] \forall k \in \mathbb{N}$. Dann gilt stets $\nu(A_k) = 1$. Angenommen, es gäbe nämlich ein k mit $\nu(A_k) = 0$, dann folgte aus der Translationsinvarianz des Maßes $\nu(A_k) = \nu(A_k + \frac{1}{k}) = \cdots = \nu(A_k + \frac{k-1}{k})$. Insgesamt erhielte man

$$\nu([0,1]) = \nu\left(\sum_{j=0}^{k-1} A_k + \frac{j}{k}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \nu(A_k + \frac{j}{k}) = \sum_{j=0}^{k-1} \nu(A_k) = 0.$$

Das stünde aber im Widerspruch zu $\nu([0,1]) = 1$. Allerdings ist $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \{0\}$. Damit erhielte man $\lim\limits_{k\to\infty} \nu(A_k) = \lim\limits_{k\to\infty} 1 = 1$, aber $\nu\left(\lim\limits_{k\to\infty} A_k\right) = \nu(\{0\}) = 0$. Das steht aber im Widerspruch zu 2.8(iii) im Skript.

(b) (i) $\emptyset$ ist abzählbar, $X^c = \emptyset$ ist abzählbar $\implies \emptyset, X \in \mathcal{A}$.

(ii) Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Sind A und B beide abzählbar, so ist $A \cup B$ und $A \cap B$ wieder abzählbar und damit in $\mathcal{A}$ enthalten. Sei nun genau eine der beiden Mengen abzählbar, O.B.d.A. A abzählbar und B überabzählbar also B^c abzählbar. Dann ist $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Mit B^c ist natürlich auch $A^c \cap B^c$ abzählbar $\implies A \cup B \in \mathcal{A}$. $A \cap B \subset A$ ist natürlich auch abzählbar $\implies A \cap B \in \mathcal{A}$. Sind nun A und B überabzählbar, so ist $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ offensichtlich abzählbar $\implies A \cup B \in \mathcal{A}$. Außerdem ist $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ wieder abzählbar $\implies A \cap B \in \mathcal{A}$.

(iii) Seien $A_i \in \mathcal{A} \forall i \in \mathbb{N}$. Sind alle A_i abzählbar, so ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ wieder abzählbar. Ist mindestens eines der A_i, beispielsweise A_j überabzählbar, so gilt

$$\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i^c \subset A_j^c$$

Da A_j^c abzählbar ist, folgt $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$. Insbesondere ist also $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

Nun zeigen wir, dass μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert. Seien also $A_i \in \mathcal{A}$ gegeben mit $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$.

$$a = \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Sind alle A_i abzählbar, so ist $a = 0$. Sei nun A_j überabzählbar. Angenommen, A_k mit $k \neq j$ wäre auch überabzählbar. Wegen $A_j \in \mathcal{A}$ ist A_j^c abzählbar. Wegen $A_j \cap A_k = \emptyset$ ist aber $A_k \subset A_j c$. Widerspruch. Ist also eine der Mengen überabzählbar, ist $a = 1$.

(c) $[0, 0.5]$ liegt in $\mathcal{P}(x)$, aber nicht in $\mathcal{A}$, weil sowohl $[0, 0.5]$ als auch $[0.5, 1]$ überabzählbar sind. Da sich also die beiden Algebren unterscheiden, gibt es keinen Widerspruch.

Aufgabe 3

(a) (i) $\emptyset, X \in \mathcal{D}$ (Dynkin-System)

(ii) $A, B \in \mathcal{D}$

$\implies A \cap B \in \mathcal{D}$ (π-System)

$\implies B^c \in \mathcal{D} \implies A \cap B^c = A \setminus B \in \mathcal{D}$.

$\implies B \setminus A \in \mathcal{D} \implies A \cup B \setminus A = B$, da $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

(iii) $A_i \in \mathcal{D}\ \forall i \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j \implies$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i} A_j \right) \in \mathcal{D}.$$

(b) (i) $\emptyset \cap D = \emptyset \in D_0,\ X \cap D = D \in D_0 \implies \emptyset, X \in \mathcal{H}$.

(ii) Sei $F \in H$, also $D \cap F \in D_0$. Wir müssen zeigen, dass $F^c \cap D \in D_0$ liegt, weil dann F^c in H enthalten ist. Es gilt $D \in D_0 \implies D^c \in D_0$. $(D \cap F) \cap D^c = \emptyset$. Die disjunkte Vereinigung ist in einem Dynkin-System enthalten, also folgt $(D^c \cup (D \cap F))^c = D \cap (D \cap F)^c = D \cap (D^c \cup F^c) = D \cap F^c \in D_0$.

(iii) Sei $A_i \cap D \in D_0\ \forall i \in \mathbb{N}, A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$. Da die A_i also alle disjunkt sind, gilt $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap D) = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap D \in D_0$.

(c) Sei $A \in \mathcal{K}$. Dann gilt $\forall B \in \mathcal{K} : B \cap A \in D_0 \implies B \in \mathcal{H}(A)$, also $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}(K)$. Da $\mathcal{H}(K)$ ein Dynkin-System ist und $\mathcal{K}$ enthält, gilt $D_0 \subset \mathcal{H}(K) \subset D_0$. Die zweite Inklusion gilt per Definition von $\mathcal{H}(K)$. Also ist $D_0 = \mathcal{H}(K)$. Daraus folgt aber sofort, dass $\forall A \in D_0 \colon \forall K \in \mathcal{K} \colon\ A \cap K \in D_0$. Insbesondere gilt also $\forall K \in \mathcal{K} \colon \forall A \in D_0 \colon\ K \cap A \in D_0 \implies K \in \mathcal{H}(A)$. Daraus folgern wir:

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{H}(A) \quad \forall A \in D_0.$$

Da aber D_0 das kleinste Dynkin-System mit $\mathcal{K} \subset D_0$ ist, gilt sofort

$$D_0 \subset \mathcal{H}(A) \subset D_0 \implies D_0 = \mathcal{H}(A) \quad \forall A \in D_0.$$

(d) Seien $A, B \in D_0$. Dann gilt $A \in D_0 = \mathcal{H}(B) \implies A \cap B \in D_0$. Es handelt sich bei D_0 also nicht nur um ein Dynkin-System, sondern auch um ein π-System. Nach Teilaufgabe (a) ist D_0 damit eine σ-Algebra, die $\mathcal{K}$ enthält. Da $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist, das $\mathcal{K}$ enthält, umfasst es auch D_0. Daher gilt $\sigma(\mathcal{K}) \subset D_0 \subset \mathcal{D}$.

Zusatzaufgabe

(a) $\liminf\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ und $\limsup\limits_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Es gilt zunächst

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{x \in X \colon x \in A_k \text{ für alle } k \text{ bis auf } 1 \leq k \leq n\}.$$

Die Vereinigung aller dieser Mengen ist also $\{x \in X \colon x \in A_k$ für alle k bis auf endlich viele$\}$.. Analog gilt

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{x \in X \colon \exists k \geq n \colon x \in A_k\}.$$

Der Schnitt aller dieser Mengen ist also

$$\{x \in X \colon \forall n \colon \exists k \geq n \colon x \in A_k\} = \{x \in X \colon \text{Es gibt unendlich viele } k \text{ mit} x \in A_k\}.$$

(b) Es gilt $(\liminf k \to \infty \chi_{A_k})(x) = 1$ genau dann, wenn für alle bis auf endlich viele k $\chi_{A_k}(x) = 1$ ist. Nach Aufgabe (a) ist das genau χ_{A_*}. Außerdem gilt $(\limsup\limits_{k\to\infty} \chi_{A_k})(x) = 1$ genau dann, wenn es unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $\chi_{A_k}(x) = 1$. Nach Aufgabe (a) ist das genau χ_{A^*}.

(c) $A_* = \emptyset$. Sei nämlich $x \in A_*$. Ist $x < \frac{1}{2}$, so gibt es unendlich viele Intervalle, die 0 nicht enthalten, da $[0, 1)$ nacheinander für alle $m \in \mathbb{N}$ in m disjunkte Intervalle zerteilt wird, aber x in keinem der Zyklen in einem der Intervalle $\lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$ bis m vorkommt. Ist $x \geq \frac{1}{2}$, so kommt x in keinem Zyklus in einem der ersten $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ Intervalle vor. Daher gibt es unabhängig von x stets unendlich viele Intervalle, in denen x nicht liegt. Auf der anderen Seite kommt x für $x < \frac{1}{2}$ in jedem der Zyklen in einem der $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ Intervalle vor. Für $x > \frac{1}{2}$ kommt x in jedem der Zyklen in einem der Intervalle $\lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$ bis m vor. Daher gibt es unabhängig von x stets unendlich viele Intervalle, in denen x liegt. Also ist $A^* = [0, 1)$.