Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II - Hilfestellungen zur Klausurvorbereitung

Sommersemester 2020 15. Juli 2020

Informationen:

- Alle folgenden Informationen sind nach bestem Wissen verfasst, sind aber nur als Hilfestellung zur Klausurvorbereitung zu sehen. D. h. es lassen sich aus diesem Informationsblatt keinerlei Ansprüche ableiten!
- **In unserer Klausur sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen!**
- **Aufbau der Klausur**: Insgesamt wird es fünf Aufgaben mit jeweils 12 Punkten geben. Die erste Aufgabe werden 12 Kurzfragen sein. Die übrigen Aufgaben sind ähnlich strukturiert wie unsere Übungsaufgaben und decken die großen Themenbereiche der Vorlesung ab. Jede Aufgabe hat mehrere Teilaufgaben. Sich bestanden habt Ihr, wenn Ihr mindestens 24 Punkte erreicht habt.
- Die **Stichwortsammlung** und die **Auflistung der Übungsaufgaben** soll Euch bei der Aufbereitung der Inhalte helfen. D. h. aber insbesondere, dass es nicht ausreicht, nur dies Definitionen der Begriffe und diese Aufgaben zu lernen, und dass diese nicht zwingend vollständig sind. Für die Klausur sind auch die Zusammenhänge und das Verstehen (und nicht das Auswendiglernen) der Inhalte wichtig sind. Ein selbstständiges Auseinandersetzen mit den Vorlesungsinhalten und Trainieren dieser ist daher unvermeidlich!
- Die **Verständnisaufgaben**, die wir teils in der Zentralübung eingesetzt haben, und weitere findet Ihr im Buch ”Verständnisaufgaben zur Analysis 1 und 2: für Lerngruppen, Selbststudium und Peer Instruction”von Thomas Bauer (2019). Innerhalb des Universität-Netzwerks kann das Buch kostenlos bei Springer Link gelesen werden (und zwar hier: `https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-662-59703-3`)
- Es empfiehlt sich, viele **Übungsaufgaben** zu **bearbeiten**. Natürlich könnt Ihr dazu unsere Übungsaufgaben nutzen, die den Vorteil haben, dass sie eine ähnliche Struktur und ein ähnliches Level haben wie unsere Klausuraufgaben. Ihr könnt Euch aber auch gut an Übungsaufgaben in entsprechenden Lehrbüchern orientieren. Ohnehin ist ein Blick in andere Lehrbücher häufig hilfreich.
- **Altklausuren** zu **bearbeiten**, ist ebenfalls eine gute Vorbereitung. Von uns gibt es keine Altklausuren. Die Fachschaft hat eine Sammlung an Altklausuren. Rechnet am besten (min.) eine Altklausur so als wäre es eine echte Klausur.
- Falls Ihr keine Altklausuren zur Hand habt, könnt Ihr Euch **selber Klausuren ”konzipieren”**, indem Ihr Euch aus Lehrbüchern Beispiele, Sätze mit Beweisen etc. sucht, aus diesen Aufgaben formuliert und dann untereinander diese ”Klausuren”tauscht, sodass Ihr bei den erhaltenen ”Klausuren”die Lösungen nicht kennt, aber Euer Partner Musterlösungen dazu hat.

Viel Erfolg bei der Vorbereitung!

1 Welche Inhalte sind prinzipiell klausurrelevant?

Für die Klausur sind prinzipiell die folgenden Inhalte relevant:

- Alle Inhalte der Vorlesungen bis inklusive der 13. Vorlesungswoche (13.-17.07)
- Die Inhalte aller Übungsblätter
- Die Beispiele aus den Zentralübungen
- Das bedeutet insbesondere, dass sowohl Sätze/Lemmas etc. als auch Definitionen, Beispiele und Beweise etc. relevant sind

Nicht relevant für die Klausur sind:

- Alle Inhalte der Vorlesung ab der 14. Vorlesungswoche
- Bonusaufgaben der Übungsblätter
- Weiterführende Inhalte der Zentralübung. Ausnahme ist dabei der Inhalt der Zentralübung vom 02. Juli, der ebenfalls klausurrelevant ist. Ein Blick in die Notizen der Zentralübungen lohnt sich hoffentlich dennoch, um die Vorlesungsinhalte besser zu verstehen.

Tipps zum Einschränken der Inhalte:
Auch wenn prinzipiell alle Inhalte der oben genannten Bereiche relevant sind, kann man sich aus praktischer Sicht überlegen, welche Inhalte eher unwahrscheinlich in der Klausur auftauchen. Die folgenden Tipps sind erneut nicht verbindlich, helfen aber hoffentlich einzuschätzen, was wirklich wichtig ist.

- Wir werden nicht 1:1 beweise aus den Vorlesungen abfragen. Ähnliche, teils auch sehr ähnliche, Beweise sowohl aus den Vorlesungen als auch aus den Übungsaufgaben sind aber denkbar. Das Verstehen der Beweise ist aber absolut empfehlenswert.
- Besonders lange oder besonders technische Beweise oder Konstruktionen bieten sich nicht für Klausuren an, da diese viel Zeit benötigen würden aber wenig Verständnis abprüfen. Ein Grundverständnis sollte aber wieder idealerweise vorhanden sein, z. B. für Kurzfragen. Außerdem solltet Ihr bei den wichtigen Sätzen zumindest die Grundidee haben (bspw. Picard-Lindelöf: Beweis durch Banachschen Fixpunktsatz; Peano: Beweis durch eulersche Polygonzüge).
- Beweise oder Sätze, für die in der Vorlesung auf das Skript verwiesen wurde, scheinen auch nicht von entscheidender Bedeutung zu sein (sonst wären sie besprochen worden).
- Spezielle Details sind nicht entscheidend. Wir werden nicht die 8. Nachkommastelle von π abfragen.

2 Welche Erkenntnisse dürfen in der Klausur verwendet werden?

Wir planen, dass alle Aufgaben in der Klausur auch mit Mitteln gelöst werden können, die wir im Rahmen der Analysis 1 und 2 kennengelernt haben. Dennoch möchten wir an dieser Stelle nochmal kurz umreißen, welche Erkenntnisse verwendet werden dürfen. Auch hier wieder der Hinweis, dass folgende Informationen nach bestem Wissen zusammengestellt sind, wir uns aber vorbehalten, während der Korrektur und im Einzelfall zu entscheiden, ob bestimmte Lösungswege zulässig sind oder nicht!
Verwendet werden dürfen:

- Alle Inhalte, die im Rahmen der Vorlesungen, der Zentralübungen und der Übungsblätter der Analysis 1 und 2 thematisiert wurden.
- "Offensichtliche" Erkenntnisse. Was genau "offensichtlich" ist, ist natürlich Ansichtssache. Im Zweifel sollten entsprechende Erkenntnisse kurz begründet werden, bspw. "Es ist $e^x \geq x$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$, was wir anhand der Potenzreihe von e^x sehen". Dass aber $2x \geq x$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ ist, akzeptieren wir ohne weitere Begründung.
- Andere Ergebnisse, die innerhalb der Klausur bewiesen werden sollen, selbst wenn die entsprechende Aufgabe nicht gelöst werden konnte, oder als Informationen bereitgestellt werden.
- Erkenntnisse aus der Linearen Algebra 1 und 2 mit einem entsprechenden Hinweis, bspw. "Das Polynom $x^3 - 4x^2 + x + 8$ hat drei (komplexe) Nullstellen aufgrund des, in der Linearen Algebra 1 diskutierten, Fundamentalsatz der Algebra." Wir denken aber, dass Erkenntnisse aus der Linearen Algebra in unserer Klausur nur unwahrscheinlich wirklich hilfreich sind.

Nicht verwendet werden dürfen:

- Erkenntnisse aus Vorlesungen aus höheren Semestern oder aus anderen Fachbereichen. Bspw. ist es nicht legitim, mit Inhalten der Numerik oder der Physik zu arbeiten. Das gilt insbesondere für den Bereich der Differentialgleichungen. Auch hier gehen wir aber davon aus, dass in unserer Klausur unsere Vorlesungsinhalte den elegantesten Lösungsweg bieten.
- Ergebnisse, die auf der zu beweisenden Aussage aufbauen. Bspw. ist es nicht legitim, den Satz von Rolle mit dem Mittelwertsatz zu beweisen.

Außerdem ist natürlich die Aufgabenstellung (sinnvoll) zu befolgen! Nicht legitim wäre es z. B. mit dem Folgenkriterium zu arbeiten, wenn die Aufgabe heißt, dass Stetigkeit mit dem $\epsilon - \delta-$Kriterium gezeigt werden soll.

3 Relevante Übungsaufgaben

Prinzipiell sind alle Übungsaufgaben relevant (s. o.), aber einige sind von ihrem Aufbau und ihren Inhalten her besonders typisch für Klausuraufgaben und lohnen sich daher besonders. Diese sind in Tabelle 1 aufgelistet.

Blattnummer	Besonders relevante Aufgaben
1	1, 3, 4
2	2, 3
3	1, 2
4	1, 2
5	1, 3, 4
6	1, 2(a), 3, 4
7	1, 2, 3, 4
8	2, 3
9	1, 2, 3, 4
10	1, 2, 3, 4
11	1, 2, 4

Tabelle 1. Besonders relevante Übungsaufgaben

4 Auflistung der Themen

Wie Ihr seht haben wir dieses Mal keinen Fragenkatalog verfasst, sondern nur eine Stichwortsammlung. Letztlich könnt Ihr Euch selber daraus einen Fragenkatalog basteln, wenn Ihr schaut, wie letztes Semester die Fragen verfasst waren. Letztlich müsst Ihr (für die Kurzfragen) Sätze und Lemmas etc. wiedergeben können, wenn z. B. als Stichwort "Mittelwertsatz" auftaucht und die Definitionen und Formeln wiedergeben können, wenn z. B. "Metrik" oder "Cauchy-Schwarz-Ungleichung" auftaucht. Für die übrigen Aufgaben solltet Ihr die Sätze und auch ihre Korollare natürlich auch anwenden können (und ggf., s. o. die Beweisstruktur kennen) und stets die Eigenschaften von und die Zusammenhänge zwischen Begriffen kennen, also bspw. wissen, welche Eigenschaften stetige Funktionen haben und wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit zusammenhängen.

4.1 Folgen und Reihen von Funktionen

- Funktionenfolgen und punktweise und gleichmäßige Konvergenz
- Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen
- Maximumsnorm
- Normeigenschaften
- Funktionenraum $\mathcal{C}([a, b])$

- Konvergenz von Reihen von Funktionen
- Integration von Potenzreihen
- Funktionenraum $R([a, b])$
- Sesquilinearform
- Skalarprodukte: Definitionen, Beispiele, Eigenschaften
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung
- Konvergenz im quadratischen Mittel
- L^2-Norm
- Periodische Funktionen
- Fourier-Reihe/-Koeffizienten: Definition/Formeln, berechnen können
- Bessel-Ungleichung, Parsevalsche Identität und Vollständigkeitsrelation
- Wann und wie konvergiert die Fourier-Reihe gegen die approximierte Funktion?

4.2 Der n-dimensionale Zahlenraum

- (Induzierte) Metrik, metrischer Raum
- Norm(eigenschaften), normierter Raum
- Folgen von Vektoren
- Satz von Cauchy und Bolzano-Weierstraß
- Äquivalenz von Normen
- Topologische Grundbegriffe: Kugel, Umgebung, offene Menge, abgeschlossene Menge, Randpunkt, Rand, Abschluss, Inneres, Komplement, kompakte Menge
- Eigenschaften offener, abgeschlossener und kompakter Mengen
- Beziehungen zwischen den topologischen Grundbegriffen
- Satz von Heine-Borel
- Skalarprodukte
- Schwarz-, Young-, Hölder, und Minkowski-Ungleichungen
- Hilbert-Raum
- Orthogonalität
- Gram-Schmidt-Verfahren
- Lineare Abbildung
- Folgen und Konvergenz von Matrizen
- Matrixnormen: Definitionen, Beispiele, natürliche Matrixnormen, Bezug zu Vektornormen, Verträglichkeit, Submultiplikativität

- Grundbegriffe zu Matrizen (Eigenwerte, Vielfachheiten, Definitheit, Orthonormalität, Unitärität)
- Störungssatz

4.3 Stetigkeit

- Bild, Urbild, Umkehrfunktion
- $\varepsilon - \delta$-Kriterium von Stetigkeit
- Äquivalente Charakterisierungen von Stetigkeit
- Bezug zur und Nutzbarkeit der eindimensionalen Stetigkeit
- Eigenschaften stetiger Funktionen
- Abstand zweier Mengen
- Gleichmäßige Stetigkeit
- Bezug zu Funktionenfolgen (siehe auch Folgen und Reihen von Funktionen)
- Offenheit, Abgeschlossenheit bzgl. einer Obermenge
- Zusammenhängende Menge
- Zwischenwertsatz
- Stetigkeit bei vektor- und matrixwertigen Funktionen
- Eigenschaften stetiger vektor- und matrixwertiger Funktionen
- Fixpunkte und Fixpunktiteration
- Lipschitz-Stetigkeit
- Banachscher Fixpunktsatz
- Ansatz zum Lösen linearer Gleichungssysteme mithilfe einer Fixpunktiteration

4.4 Differenzierbarkeit

- (Stetige) Partielle Differenzierbarkeit; Partielle Ableitung
- Partielle Ableitung höherer Ordnung
- Satz von Schwarz (Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen)
- Gradient, Hesse-Matrix, Jacobi-Matrix, Bezug zwischen diesen Begriffen
- (Totale) Differenzierbarkeit
- Implikationen zwischen stetiger partieller, totaler und partieller Differenzierbarkeit (Bsp. kennen!)
- Implikationen zwischen Stetigkeit und partieller und totaler Differenzierbarkeit
- Richtungsableitung (Definition und Bezug zum Gradienten)
- Kettenregel

- Mittelwertsatz
- Lokale Lipschitz-Stetigkeit
- Konvexität
- Höhere-Ableitungen
- Taylor-Polynom/-Reihe; Restglied
- Multiindizes
- Taylor-Polynom 2. Ordnung
- Wann konvergiert die Taylor-Reihe?
- Lokale Extrema
- Notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrema
- Satz über implizite Funktionen
- Implizite Differentiation (auch höherer Ordnung)
- Umkehrabbildungen (Existenz, Ableitung)
- Multiplikatorregel von Lagrange (Lagrange-Multiplikatoren, -Funktion)
- Notwendige Bedingung für lokale Extrema unter Nebenbedingungen

4.5 Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen

- Differentialgleichung, Anfangswertprobleme
- Ordnung von Differentialgleichungen und Umformulierung
- Systeme von Differentialgleichungen
- Integralgleichung
- Satz von Peano
- Gleichgradige Stetigkeit
- Satz von Arzela-Ascoli
- Fortsetzungssatz und globale Existenz
- Regularitätssatz
- Stabilitäts- und Eindeutigkeitssatz
- Satz von Picard-Lindelöf
- Beispiele, wo Existenz und Eindeutigkeitssätze greifen und wo sie nicht greifen
- Lemma von Gronwall
- Exponentielle Stabilität
- Monotone AWPs

- Globaler Stabilitätssatz
- Eindeutigkeit linearer DGL(-Systeme)
- Homogene lineare DGL-Systeme, Fundamentalsystem, Fundamentalmatrix
- Allgemeine und partikuläre Lösung von inhomogenen linearen DGL-Systemen
- Existenz, Eindeutigkeit von Lösungen von linearen und nichtlinearen Randwertproblemen

4.6 Kurven im $\mathbb{R}^n$, Kurvenintegrale

- (Reguläre; stetig differenzierbare; geschlossene) Kurve, Geschwindigkeit
- Rektifizierbarkeit
- Bogen-/Kurvenlänge
- Parametertransformation, Umparametrisierung, orientierungserhaltend/orientierungstreu
- Skalares Bogenelement, skalares Kurvenintegral
- Vektorfeld, vektorielles Kurvenintegral
- Gebiet, Wegzusammenhang
- Potential
- 1. Hauptsatz über Kurvenintegrale