Algebra II
Sommersemester 2021

Prof. Dr. Alexander Schmidt

Inhaltsverzeichnis

Teil 1 – Kommutative Algebra

1 Ringe und Ideale

Sei A ein kommutativer Ring (wie immer mit 1) und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Die Projektion $\phi : A \to A/\mathfrak{a}$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus. Wir erinnern an den folgenden Satz:

Satz 1.1 (Algebra I, Satz 2.5)**.** *Die Zuordnung $\mathfrak{b} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{b})$ induziert eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Ideale in $A/\mathfrak{a}$ und der Menge der Ideale in A, die $\mathfrak{a}$ umfassen.*

Beweisskizze. Man prüft nacheinander folgendes nach:
• $\phi^{-1}(\mathfrak{b})$ ist ein Ideal in A.
• $\phi^{-1}(\mathfrak{b}) \supset \phi^{-1}(0) = \mathfrak{a}$.
• $\phi^{-1}(\mathfrak{b}_1) = \phi^{-1}(\mathfrak{b}_2) \Rightarrow \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$ (da ϕ surjektiv).
• Ist $\mathfrak{c} \subset A$ ein Ideal mit $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{a}$, so gilt $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{c})) = \mathfrak{c}$. □

Erinnerung 1.2. • $x \equiv y \bmod \mathfrak{a}$ bedeutet $x - y \in \mathfrak{a}$.
• $x \in A$ heißt **Nullteiler**, wenn ein $y \in A$, $y \neq 0$, mit $xy = 0$ existiert.
• A heißt **nullteilerfrei**, wenn A nicht der Nullring und $0 \in A$ der einzige Nullteiler ist.
• $x \in A$ heißt **Einheit**, wenn ein $y \in A$ mit $xy = 1$ existiert. Die Menge $A^\times$ der Einheiten von A ist eine Gruppe unter Multiplikation.

Beispiel 1.3. $\mathbb{Z}[\,i\,]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$.

Die Vielfachen ax eines Elements $x \in A$ bilden ein **Hauptideal**. Bezeichnung (x) oder auch Ax. Das **Nullideal** (0) wird auch einfach mit 0 bezeichnet. Es gilt $(1) = A$ und $(x) = A \Leftrightarrow x \in A^\times$.

Erinnerung 1.4. • $\mathfrak{p} \subset A$ heißt **Primideal**, wenn $\mathfrak{p} \neq (1)$ und es gilt $xy \in \mathfrak{p} \Rightarrow (x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p})$.
• $\mathfrak{p} \subset A$ ist Primideal $\Longleftrightarrow A/\mathfrak{p}$ ist nullteilerfrei.
• $\mathfrak{m} \subset A$ heißt **Maximalideal** wenn $\mathfrak{m} \neq (1)$ und es kein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{a} \subsetneqq (1)$ gibt.
• $\mathfrak{m} \subset A$ ist Maximalideal $\Longleftrightarrow A/\mathfrak{m}$ ist Körper.
• Jedes Maximalideal ist ein Primideal.
• $f : A \to B$ Ringhomomorphismus, $\mathfrak{q} \subset B$ Primideal $\Rightarrow f^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ ist ein Primideal.

Satz 1.5. *Jeder Ring $A \neq 0$ besitzt ein Maximalideal.*

Beweis. Sei Σ die Menge der Ideale $\neq (1)$ in A. Wegen $A \neq 0$ gilt $(0) \subsetneqq (1)$ und damit $\Sigma \neq \varnothing$. Wir ordnen Σ durch die Inklusion, d.h. $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.
Sei nun $(\mathfrak{a}_\alpha)$ eine Kette in Σ. Für α, β haben wir $\mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}_\beta$ oder $\mathfrak{a}_\beta \subset \mathfrak{a}_\alpha$. Setze $\mathfrak{a} = \bigcup\limits_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal: $a \in A$, $x \in \mathfrak{a} \Rightarrow ax \in \mathfrak{a}$ weil $x \in \mathfrak{a}_\alpha$ für ein α und deshalb $ax \in \mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}$. Es sei nun $x \in \mathfrak{a}_\alpha$, $y \in \mathfrak{a}_\beta$. Gilt $\mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}_\beta$ so folgt $x + y \in \mathfrak{a}_\beta \subset \mathfrak{a}$, ansonsten gilt $\mathfrak{a}_\beta \subset \mathfrak{a}_\alpha$ und $x + y \in \mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}$.

Es gilt $\mathfrak{a} \in \Sigma$ wegen $1 \notin \mathfrak{a} = \bigcup \mathfrak{a}_\alpha$ und $\mathfrak{a}$ ist obere Schranke für die Kette $(\mathfrak{a}_\alpha)$.
Zorn's Lemma $\Rightarrow \Sigma$ besitzt (mindestens) ein maximales Element. □

Korollar 1.6. *Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ist in einem Maximalideal enthalten.*

Beweis. Nach Satz 1.5 besitzt $0 \neq A/\mathfrak{a}$ mindestens ein Maximalideal. Nach Satz 1.1 erhalten wir ein Maximalideal in A welches $\mathfrak{a}$ umfasst. □

Korollar 1.7. *Jede Nicheinheit ist in einem Maximalideal enthalten.*

Beweis. Ist x Nichteinheit, so gilt $Ax \subsetneqq A$. Nach Korollar 1.6 ist Ax und somit auch x in einem Maximalideal enthalten. □

Definition 1.8. A heißt **lokal**, wenn es genau ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$ gibt. Der Körper $k = A/\mathfrak{m}$ heißt der **Restklassenkörper** von A.

Satz 1.9. *Es sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximalideal.*

(i) $(A \smallsetminus \mathfrak{m}) \subset A^\times \Rightarrow A$ *ist lokal.*
(ii) $1 + \mathfrak{m} \subset A^\times \Rightarrow A$ *ist lokal.*

Beweis. (i) Sei $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein Ideal. Dann gilt $\mathfrak{a} \cap A^\times = \varnothing$, also $\mathfrak{a} \cap (A \smallsetminus \mathfrak{m}) = \varnothing$, d.h. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. Daher ist $\mathfrak{m}$ das einzige Maximalideal. (ii) Für $x \in A$ ist $Ax + \mathfrak{m}$ ein Ideal. Aus $x \notin \mathfrak{m}$ folgt $Ax + \mathfrak{m} \supsetneqq \mathfrak{m}$, also $Ax + \mathfrak{m} = (1)$. Daher existieren $a \in A$, $y \in \mathfrak{m}$ mit $ax + y = 1$, also $ax = 1 - y \in 1 + \mathfrak{m} \subset A^\times$. Aus $ax \in A^\times$ folgt $x \in A^\times$. Wir erhalten $(A \smallsetminus \mathfrak{m}) \subset A^\times$, also A lokal nach (i). □

Definition 1.10. Sei A ein kommutativer Ring. $x \in A$ heißt **nilpotent**, wenn $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Nilpotente Elemente sind Nullteiler, die Umkehrung ist i.A. falsch.

Satz 1.11. *Die Menge $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$ aller nilpotenten Elemente in A ist ein Ideal. Der Faktorring $A/\mathfrak{N}$ hat keine nilpotenten Elemente $\neq 0$.*

Beweis. $x \in \mathfrak{N}$, $a \in A \Rightarrow ax \in \mathfrak{N}$ (klar). Seien $x, y \in \mathfrak{N}$, $x^n = 0 = y^m$. Dann gilt $(x+y)^{n+m-1} = 0$ (binomische Formel) also $x + y \in \mathfrak{N}$. Daher ist $\mathfrak{N}$ ein Ideal. Sei nun $x \in A$ und $\bar{x} \in A/\mathfrak{N}$ nilpotent. Dann gilt $\bar{x}^n = 0$ in $A/\mathfrak{N}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $x^n \in \mathfrak{N}$, und somit $x^{nm} = 0$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}$. □

Definition 1.12. Das Ideal $\mathfrak{N}$ aller nilpotenten Elemente heißt das **Nilradikal**.

Satz 1.13. *Das Nilradikal von A ist der Durchschnitt aller Primideale.*

Beweis. Sei $\mathfrak{N}'$ der Durchschnitt aller Primideale. Sei $x \in \mathfrak{N}$, also $x^n = 0$ für ein n. Dann gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p} : x^n \in \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$. Dies zeigt $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$. Angenommen es gäbe ein $x \in \mathfrak{N}' \smallsetminus \mathfrak{N}$. Sei Σ die Menge aller Ideale $\mathfrak{a} \subset A$ mit

$$x^n \notin \mathfrak{a} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $0 \in \Sigma$ ist Σ nichtleer. Wir ordnen Σ durch Inklusion. Nach Zorns Lemma existiert ein maximales Element $\mathfrak{p} \in \Sigma$.

Behauptung: $\mathfrak{p}$ ist Primideal.

Beweis der Behauptung. Seien $s, t \notin \mathfrak{p}$. Dann gilt $\mathfrak{p} \subsetneqq As + \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \subsetneqq At + \mathfrak{p}$, also $As + \mathfrak{p}$, $At + \mathfrak{p} \notin \Sigma$. Nach Definition von Σ existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in As + \mathfrak{p}$, $x^m \in At + \mathfrak{p}$. Dies impliziert $x^{n+m} \in Ast + \mathfrak{p}$, also $Ast + \mathfrak{p} \notin \Sigma$. Aus $st \in \mathfrak{p}$ würde $\mathfrak{p} = Ast + \mathfrak{p} \in \Sigma$ folgen, also $st \notin \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist Primideal. Dies zeigt die Behauptung.

Wegen $\mathfrak{p} \in \Sigma$ gilt $x \notin \mathfrak{p}$. Also $x \notin \mathfrak{N}'$. Widerspruch. □

Operationen auf Idealen

Sei $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ eine nicht notwendig endliche Familie von Idealen. Dann sind

$$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i := \{\sum_{i \in I} \alpha_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a}_i \text{ und } \alpha_i = 0 \text{ f.f.a. } i\}$$

Ideale in A. Ist $I = \{1, \ldots, n\}$ endlich, haben wir das Produkt

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \{\sum_{\text{endl.}} x_1 x_2 \cdots x_n \quad | \quad x_i \in \mathfrak{a}_i\}$$

Bemerkung 1.14. Durchschnitt, Summe und Produkt sind assoziativ und kommutativ. Desweiteren gilt $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

Notation: $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a} \cdots \mathfrak{a}$ (n Faktoren).

Lemma 1.15. (i) $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ *falls* $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{c}$.

(ii) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Beweis. (i) OE sei $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. Für ein Element $b + c \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, $c \in \mathfrak{c}$ gilt $b \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und daher $c \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$. Gilt umgekehrt $b \in \mathfrak{b}$, $c \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$, so gilt $b + c \in \mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.
(ii) folgt durch Einsetzen der Definitionen. □

Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ heißen **relativ prim**, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$. Für relativ prime Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ nach Lemma 1.15(ii).

Nun seien $A_1, \ldots, A_n$ Ringe. Ihr Produkt $A = \prod_{i=1}^n A_i$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ist ein Ring mit Einselement $(1, \ldots, 1)$. Die Projektionen $A \to A_i$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ sind Ringhomomorphismen.

Warnung: Die Inklusionen $A_i \hookrightarrow A$, $x_i \mapsto (0, \ldots, x_i, \ldots 0)$ sind keine Ringhomomorphismen!

Nun sei A ein Ring und $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale in A. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{a}_i, \\ x &\longmapsto (x + \mathfrak{a}_1, \ldots, x + \mathfrak{a}_n). \end{aligned}$$

Lemma 1.16 (Verallgemeinerter Chinesischer Restsatz)**.** (i) *Sind für $i \neq j$ die Ideale $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_j$ relativ prim, so gilt*

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i.$$

(ii) *ϕ surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_j$ sind relativ prim für alle $i \neq j$.*

(iii) *ϕ injektiv $\Longleftrightarrow$ $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = 0$.*

Beweis. (i) $n = 2$ schon bekannt nach Lemma 1.15(ii). $n \geq 3$ per Induktion. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ paarweise relativ prime Ideale und $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i$. Wegen $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_n = (1)$ für $i = 1, \ldots, n-1$, finden wir Elemente $x_i \in \mathfrak{a}_i$, $y_i \in \mathfrak{a}_n$ mit $x_i + y_i = 1$. Es gilt $\prod_{i=1}^{n-1} x_i = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - y_i) \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}_n$. Daher gilt $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_n = (1)$ und

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_n = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i.$$

(ii): $\Rightarrow$. Wir zeigen $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = (1)$ falls $i \neq j$. Ohne Einschränkung sei $i = 1$, $j = 2$. Es existiert ein $x \in A$ mit $\phi(x) = (1, 0, \ldots, 0)$, also $x \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}_1$, $x \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}_2$, so dass

$$1 = (1 - x) + x \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$$

(ii): $\Leftarrow$. Es genügt zu zeigen, dass für alle i das Element $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 an i-ter Stelle) in $\mathrm{im}(\phi)$ liegt. Ohne Einschränkung sei $i = 1$. Wegen $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_i = (1)$ für $i \geq 2$ haben wir Elemente $u_i \in \mathfrak{a}_1$, $v_i \in \mathfrak{a}_i$ mit $u_i + v_i = 1$. Setze $x = \prod_{i=2}^{n} v_i$.

Dann gilt $x \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}_i$ für $i \geq 2$ und $x = \prod_{i=2}^{n}(1-u_i) \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}_1$. Daher gilt $\phi(x) = (1, 0, \ldots, 0)$.
(iii) Dies ist klar wegen $\ker(\phi) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$. □

Die Vereinigung $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ zweier Ideale ist i.A. kein Ideal.

Satz 1.17 (Primvermeidung). (i) *Es seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ Primideale und $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Dann gilt bereits $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ für ein i.*

(ii) *Es seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale und $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$. Dann gilt $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_i$ für ein i. Aus $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ für ein i.*

Bemerkung 1.18. Eine Umformulierung von (i) ist: Ist $\mathfrak{a}$ in keinem der Primideale $\mathfrak{p}_i$ enthalten, so existiert ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $a \notin \mathfrak{p}_i$ für alle i. Daher kommt der Name „Primvermeidung".

Beweis von Satz 1.17. Wir zeigen (i) per Induktion nach n in der Form

$$\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n \Longrightarrow \mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$$

Die Aussage ist trivial für $n = 1$. Sei $n > 1$ und die Aussage richtig für $n-1$. Dann existiert für jedes $i = 1, \ldots, n$ ein $x_i \in \mathfrak{a}$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ für alle $j \neq i$. Gilt $x_i \notin \mathfrak{p}_i$ für ein i, so sind wir fertig. Im anderen Fall gilt $x_i \in \mathfrak{p}_i$ für alle i. Für

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_1, \ldots, x_{i-1}x_{i+1}x_{i+2} \ldots x_n$$

gilt dann $y \in \mathfrak{a}$ und $y \notin \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \ldots, n$, also $\mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.
(ii) Wir nehmen an, dass $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}_i$ für alle i. Dann existieren Elemente $x_i \in \mathfrak{a}_i$, $x_i \notin \mathfrak{p}$ und wir erhalten

$$x_1 \cdots x_n \in \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$$

aber $x_1 \cdots x_n \notin \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ prim. Also folgt $\mathfrak{p} \not\supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$.

Gilt schließlich $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$, so haben wir gerade gesehen: $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_{i_0}$ für ein i_0. Aus $\mathfrak{a}_{i_0} \subset \mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i_0}$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_{i_0}$. □

Definition 1.19. Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ setzt man

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\}.$$

Dies ist ein Ideal in A. Das Ideal

$$\mathrm{Ann}(\mathfrak{b}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0 : \mathfrak{b} = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} = 0\}$$

heißt der **Annullator** von $\mathfrak{b}$. Für $x \in A$ schreiben wir $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}((x))$. Für die Menge D der Nullteiler von A gilt nach Definition:

$$D = \bigcup_{x \neq 0} \mathrm{Ann}(x).$$

Beispiel 1.20. Sei $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (m)$, $\mathfrak{b} = (n)$. Dann ist $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ das durch $\frac{m}{\mathrm{ggT}(m,n)}$ erzeugte Hauptideal.

Lemma 1.21. *Es gilt*

(i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$.
(ii) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.
(iii) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = \mathfrak{a} : (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b}$.
(iv) $(\bigcap_i \mathfrak{a}_i) : \mathfrak{b} = \bigcap_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$.
(v) $\mathfrak{a} : (\sum \mathfrak{b}_i) = \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 1.22. Das **Radikal** $r(\mathfrak{a})$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ ist definiert durch

$$r(\mathfrak{a}) := \{x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Ist $\phi : A \to A/\mathfrak{a}$ die natürliche Projektion, so gilt

$$r(\mathfrak{a}) = \phi^{-1}(\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})).$$

Daher ist $r(\mathfrak{a})$ ein Ideal.

Lemma 1.23. *Es gilt*

(i) $r(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{a}$.
(ii) $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$.
(iii) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$.
(iv) $r(\mathfrak{a}) = (1) \iff \mathfrak{a} = (1)$.
(v) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$.
(vi) *Für ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *gilt* $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 1.24. *Das* ***Radikal*** $r(\mathfrak{a})$ *ist der Durchschnitt aller* $\mathfrak{a}$ *umfassenden Primideale.*

Beweis. Sei $\phi : A \to A/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion. Dann gilt

$$r(\mathfrak{a}) = \phi^{-1}(\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})) = \phi^{-1}(\bigcap_{\mathfrak{p}\subset A/\mathfrak{a}} \mathfrak{p}) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\subset A\\ \mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}}} \mathfrak{p}. \qquad \square$$

Satz 1.25. *Für die Menge* D *der Nullteiler von* A *gilt*

$$D = \bigcup_{x\neq 0} r(\mathrm{Ann}(x)).$$

Beweis. Für eine Teilmenge(!) $E \subset A$ definieren wir $r(E)$ wie für Ideale. Dann ist $r(E)$ wieder eine Teilmenge und man sieht leicht $r(\bigcup_i E_i) = \bigcup_i r(E_i)$. Für ein Element $x \in r(D)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass x^n Nullteiler ist. Dann ist aber auch schon x Nullteiler. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} D = r(D) &= r(\bigcup_{x\neq 0}(\mathrm{Ann}(x)) \\ &= \bigcup_{x\neq 0} r(\mathrm{Ann}(x)). \end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 1.26. Sei $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (m)$ und $p_1, \ldots, p_n$ seien die (verschiedenen) Primteiler von m. Dann gilt $r(\mathfrak{a}) = (p_1 \cdots p_n)$.

Satz 1.27. $r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}) = (1) \Longrightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$.

Beweis. $r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})) = r((1)) = (1)$, also $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = (1)$. $\square$

Erweiterung und Kontraktion

Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

Definition 1.28. (i) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ nennt man

$$\mathfrak{a}^e := Bf(\mathfrak{a}) = \{\sum_{\text{endl.}} b_i f(a_i) \mid b_i \in B,\ a_i \in \mathfrak{a}\}$$

die **Erweiterung** von $\mathfrak{a}$ auf B.
(ii) Für ein Ideal $\mathfrak{b} \subset B$ heißt

$$\mathfrak{b}^c := f^{-1}(\mathfrak{b})$$

die **Kontraktion** von $\mathfrak{b}$ auf A.

Bemerkungen 1.29. • Wir können f in der Form

$$A \overset{p}{\twoheadrightarrow} f(A) \overset{i}{\hookrightarrow} B$$

faktorisieren. Die Situation für p ist einfach nach Satz 1.1, i ist kompliziert.
• Ist $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal, so auch $\mathfrak{q}^c \subset A$.
• Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so muss $\mathfrak{p}^e \subset B$ nicht unbedingt ein Primideal sein.

Beispiel 1.30. Wir betrachten $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\,i\,]$.
Frage: Welche Primideale aus $\mathbb{Z}$ „bleiben“ Primideale in $\mathbb{Z}[\,i\,]$? Da $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}[\,i\,]$ euklidisch, also faktoriell sind (siehe Algebra I), stellt sich die Frage: Welche Primzahlen bleiben als Elemente in $\mathbb{Z}[\,i\,]$ irreduzibel? Wir brauchen die folgende zahlentheoretische Aussage.

Satz von Lagrange: *Eine Primzahl p ist genau dann als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, wenn $p \not\equiv 3 \bmod 4$.*

Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Aus $p = (x+iy)\cdot(x'+iy')$ folgt $p^2 = N(x+iy)\cdot N(x'+iy')$. Sind beides keine Einheiten, so folgt

$$p = N(x+iy) = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2.$$

Also: $p \equiv 3 \bmod 4 \Rightarrow p$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[\,i\,]$.

Für $p = 2$ gilt $2 = (1+i)(1-i) = -i(1+i)^2$. In Idealen: $(2)^e = (1+i)^2$.
Sei nun $p \equiv 1 \bmod 4$ und $x, y \in \mathbb{N}$ mit $p = x^2 + y^2$. Dann gilt

$$p = (x+iy)(x-iy).$$

In Idealen $(p)^e = (x+iy)\cdot(x-iy)$. Wegen $N(x+iy) = p$ ist $x+iy$ irreduzibel. Jetzt kann man noch nachrechnen, dass $(x+iy) \not\sim (x-iy)$ und erhält:

Zerlegungsgesetz in $\mathbb{Z}[\,\boldsymbol{i}\,]$

$$(p)^e = \begin{cases} \text{Primideal, wenn} & p \equiv 3 \bmod 4, \\ \text{Produkt zweier verschiedener PI, wenn} & p \equiv 1 \bmod 4, \\ \text{Quadrat eines Primideals, wenn} & p = 2. \end{cases}$$

Im Allgemeinen haben wir die folgenden Aussagen. Es sei $f: A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{b} \subset B$ Ideale.

Satz 1.31. (i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}$, $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}^{ce}$.

(ii) $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$, $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$

(iii) *Sei C die Menge der Ideale in A die Kontraktionen von Idealen aus B sind und E die Menge der Ideale in B die Erweiterungen von Idealen in A sind. Dann gilt*

$$\begin{aligned} C &= \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}, \\ E &= \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}. \end{aligned}$$

Wir haben Bijektionen

$$C \underset{\mathfrak{b}^c \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{b}}{\overset{\mathfrak{a}\mapsto\mathfrak{a}^e}{\rightleftarrows}} E\,.$$

Beweis. (i) folgt durch Einsetzen der Definitionen.
(ii): Nach (i) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathfrak{b}^c \subset (\mathfrak{b}^c)^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} \quad \text{und} \\ &\mathfrak{b}^c \supset (\mathfrak{b}^{ce})^c = \mathfrak{b}^{cec}. \end{aligned}$$

Die andere Aussage zeigt man analog.
(iii): Für $\mathfrak{a} \in C$ gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c$ für ein $\mathfrak{b}$. Also $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{a}$.
Analog: $\mathfrak{b} \in E$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^e$ für $\mathfrak{a} \subset A$ und $\mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{a}^{ece} = \mathfrak{a}^e = \mathfrak{b}$.
Die Bijektion folgt. □

Lemma 1.32. *Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset A$, $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subset B$. Dann gilt*

$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supset \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$,
$(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subset \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$,
$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c \supset \mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c$,
$(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subset (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$, $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subset (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$,
$r(\mathfrak{a})^e \subset r(\mathfrak{a}^e), r(\mathfrak{b})^c = r(\mathfrak{b}^c)$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

2 Moduln

Sei R ein Ring, unitär aber hier noch nicht notwendig kommutativ und seien M und N R-(Links-)Moduln. Die Menge der R-Modulhomomorphismen von M nach N wird mit $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ bezeichnet und wird zur abelschen Gruppe durch

$$(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m).$$

Ist $R = A$ kommutativ, so wird $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ zum A-Modul durch

$$(a\varphi)(m) = a(\varphi(m)).$$

Lemma 2.1. *Die natürliche Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_R(R, M) \to M,\ \varphi \mapsto \varphi(1),$$

ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen. Ist $R = A$ kommutativ, so ist sie ein Isomorphismus von A-Moduln.

Beweis. Injektivität. $\varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi(r) = r\varphi(1) = 0$ für alle $r \in R$.
Surjektivität: Sei $m \in M$ beliebig. Definiere $\varphi : R \to M$ durch $\varphi(r) = rm$. Dann bildet sich φ auf m ab. □

Operationen auf Untermoduln.

Sei M ein R-Modul und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln. Dann ist $\bigcap_{i\in I} M_i$ ein Untermodul, sowie

$$\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_i m_i \mid m_i \in M_i,\ m_i = 0 \text{ für fast alle } i\}.$$

Dies ist der kleinste Untermodul in M, der alle M_i enthält.

Ist $\mathfrak{a} \subset R$ ein (Links)Ideal und M ein R-(Links)Modul, so definiert man den Untermodul $\mathfrak{a}M \subset M$ durch

$$\mathfrak{a}M = \{\sum_{\text{endl.}} a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{a},\ m_i \in M\}.$$

Sind N, P Untermoduln in M, so setzt man

$$(N : P) = \{r \in R \mid rP \subset N\}.$$

$(N : P)$ ist ein (Links)Ideal in R. Gilt $P \subset N$, so ist $(N : P) = R$.

Spezialfall:

Definition 2.2.

$$\mathrm{Ann}(M) = (0 : M) = \{r \in R \mid rm = 0 \quad \forall\, m \in M\}$$

heißt der **Annullator** von M. Es heißt M **treuer** R-Modul, wenn $\mathrm{Ann}(M) = 0$ gilt.

Bemerkung 2.3. Sei $R = A$ kommutativ. Ist M ein A-Modul und $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}(M)$ ein Ideal, so können wir M als $A/\mathfrak{a}$-Modul auffassen: setze $(a+\mathfrak{a})m = am$. Wegen $\mathfrak{a}M = 0$ ist die Definition repräsentantenunabhängig. Als $A/\mathrm{Ann}(M)$-Modul ist M treu.

Lemma 2.4. *Es seien $N, P \subset M$ Untermoduln. Dann gilt*

(i) $\mathrm{Ann}(N + P) = \mathrm{Ann}(N) \cap \mathrm{Ann}(P)$.
(ii) $(N : P) = \mathrm{Ann}((N + P)/N)$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Ist M ein freier A-Modul vom Rang n, so gibt es nach Wahl einer Basis einen Isomorphismus $M \cong A^n$ und einen Isomorphismus

$$\mathrm{End}_A(M) \cong \mathrm{Mat}_{n,n}(A).$$

Für eine $n \times n$-Matrix M über A haben wir die **Adjunkte** M^{ad}

$$M^{ad} = (y_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n,n}(A)$$

mit $y_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{j,i})$, wobei $M_{j,i}$ aus M durch Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte entsteht.

Satz 2.5. *(Cramersche Regel) Es gilt*

$$M^{ad} \cdot M = M \cdot M^{ad} = \mathrm{diag}(\det(M), \ldots, \det(M)).$$

Beweis. Siehe LA I, 4.36. □

Satz 2.6. *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $\phi \in \mathrm{End}_A(M)$ mit $\phi(M) \subset \mathfrak{a}M$. Dann genügt ϕ einer Gleichung*

$$\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$.

Beweis. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Erzeuger von M. Für jedes

$$x \in \mathfrak{a}M = \{\sum_{\text{endl.}} \alpha_i y_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a},\ y_i \in M\}$$

finden wir (stelle y_i als Linearkombination von $x_1, \ldots, x_n$ dar) eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ a_i \in \mathfrak{a}.$$

Somit gilt für $i = 1, \ldots, n$:

$$\phi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad \text{mit gewissen } a_{ij} \in \mathfrak{a}.$$

Es folgt $\sum\limits_{j=1}^{n} (\delta_{ij}\phi - a_{ij})(x_j) = 0$, wobei $\delta_{ij} =$ Kronecker-δ.
Wir betrachten nun den von ϕ über A in $\mathrm{End}_A(M)$ erzeugten Teilring

$$A[\phi] = \{\sum_{\text{endl.}} a_i \phi^i\} \subset \mathrm{End}_A(M),$$

(Konvention: $\phi^0 = \mathrm{id}_M$). Es ist $A[\phi]$ ist kommutativer Ring mit 1 und

$$X := (\delta_{ij}\phi - a_{ij})_{ij}$$

ist eine $n\times n$-Matrix mit Werten in $A[\phi]$. Nach Satz 2.5 erhalten wir

$$X^{ad} \cdot X = \mathrm{diag}(\det(X)).$$

Durch die Regel $(\sum a_i\phi^i)(x) = \sum a_i\phi^i(x)$ wird M in natürlicher Weise zu einem $A[\phi]$-Modul. Es gilt

$$X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \quad \text{und daher nach Cramer } \mathrm{diag}(\det(X)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Weil nun aber die x_i den A-Modul M erzeugen, folgt $\det(X)\cdot x = 0$ für alle $x \in M$, d.h. $\det(X) = 0 \in A[\phi] \subset \mathrm{End}_A(M)$. Nach der Leibniz-Formel entwickelt, gilt nun

$$\det(X) = \det\left((\delta_{ij}\phi - a_{ij})_{ij}\right) = \phi^n + \alpha_{n-1}\phi^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

mit gewissen $\alpha_i \in \mathfrak{a}$. □

Korollar 2.7. *Sei M ein endlich erzeugter A-Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $a \in A$, $a \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$, mit $aM = 0$.*

Beweis. Wir benutzen Satz 2.6 mit $\phi = \mathrm{id}_M$ und erhalten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ mit

$$x + a_{n-1}x + \cdots + a_0x = 0 \quad \text{für alle } x \in M.$$

Setze $a = 1 + a_{n-1} + \cdots + a_0$. □

Satz 2.8. *(Nakayamas Lemma) Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann folgt aus $\mathfrak{m}M = M$, dass $M = 0$.*

Beweis. Nach Korollar 2.7 existiert ein $a \in A$, $a \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$, mit $aM = 0$. Wegen $a - 1 \in \mathfrak{m}$ folgt $a \in A^\times$. Es folgt $M = 1 \cdot M = a^{-1}aM = a^{-1}0 = 0$. □

Korollar 2.9. *Es sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul und N ein Untermodul von M. Dann folgt aus $M = \mathfrak{m}M + N$, dass $M = N$.*

Beweis. Es gilt $\mathfrak{m}(M/N) = (\mathfrak{m}M + N)/N$. Nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{m}(M/N) = M/N$, also $M/N = 0$ nach Satz 2.8. □

Korollar 2.10. *Es sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, $k = A/\mathfrak{m}$ und M ein endlich erzeugter A-Modul. Für Elemente $x_1, \ldots, x_n \in M$ sind äquivalent:*

(i) *$x_1, \ldots, x_n$ erzeugen M als A-Modul.*

(ii) *Die Bilder $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ von $x_1, \ldots, x_n$ in $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen den k-Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$.*

Beweis. Sei N der durch $x_1, \ldots, x_n$ in M erzeugte Untermodul. Die Komposition $N \hookrightarrow M \to M/\mathfrak{m}M$ hat das Bild $(N + \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M$. Daher gilt

$$\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \text{ erzeugen } M/\mathfrak{m}M \iff N + \mathfrak{m}M = M \overset{2.9}{\iff} N = M. \qquad \square$$

3 Tensorprodukte

Es sei A ein kommutativer Ring.

Definition 3.1. Seien M, N, P A-Moduln. Eine Abbildung $f\colon M \times N \to P$ heißt (A-)**bilinear**, wenn

(1) für jedes $m \in M$ ist die Abbildung $N \to P$, $n \mapsto f(m,n)$ A-linear.
(2) für jedes $n \in N$ ist die Abbildung $M \to P$, $m \mapsto f(m,n)$ A-linear.

Satz 3.2. *Seien A-Moduln M, N gegeben. Es gibt ein Paar (T, g) bestehend aus einem A-Modul T und einer bilinearen Abbildung $g\colon M \times N \to T$ mit folgender Universaleigenschaft:*

Zu jedem A-Modul P und jeder bilinearen Abbildung $f\colon M \times N \to P$ existiert ein eindeutig bestimmter A-Modulhomomorphismus $h : T \to P$, so daß $f = h \circ g$ gilt.

(T, g) ist eindeutig bis auf kanonische Isomorphie.

Beweis. Eindeutigkeit: Diese folgt in der üblichen Weise durch Ausnutzung der Universaleigenschaft.

Existenz: Sei $C = A^{(M\times N)} = \bigoplus_{M\times N} A$. Elemente von C sind formale endliche A-Linearkombinationen von Elementen aus $M \times N$. (Man identifiziere ein Element $i \in M \times N$ mit dem Element in C, dessen i-te Komponente gleich 1 und alle anderen Komponenten gleich 0 sind). Wir betrachten den Untermodul D von C der durch alle Elemente der Form

$$\begin{array}{rcl} (x + x', y) & - & (x, y) - (x', y) \\ (x, y + y') & - & (x, y) - (x, y') \\ a(x, y) & - & (ax, y) \\ a(x, y) & - & (x, ay) \end{array}$$

erzeugt wird und setzen $T = C/D$. Wir bezeichnen das Bild von $1\cdot(x, y) \in C$ in T mit $x \otimes y$. Dann ist T durch Elemente der Form $x \otimes y$ erzeugt, und diese erfüllen:

$$\begin{array}{rcl} (x + x') \otimes y & = & x \otimes y + x' \otimes y, \\ x \otimes (y + y') & = & x \otimes y + x \otimes y', \\ (ax) \otimes y & = & x \otimes (ay) = a(x \otimes y). \end{array}$$

M.a.W.: Die Abbildung $g\colon M \times N \to T$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$ ist bilinear.

Ist nun $f : M \times N \to P$ eine bilineare Abbildung, so erhalten wir wegen der universellen Eigenschaft der direkten Summe einen natürlichen Homomorphismus

$$\bar{f} : A^{(M\times N)} = C \to P$$

mit $\sum\limits_{\text{endl.}} a_i(x_i, y_i) \to \sum\limits_{\text{endl.}} a_i f(x_i, y_i)$. $\bar{f}$ verschwindet auf den Erzeugern von D und daher auf ganz D. Daher induziert $\bar{f}$ einen wohldefinierten Homomorphismus

$h : C/D = T \to P$ mit

$$h(x \otimes y) = \bar{f}((x, y)) = f(x, y).$$

Der Homomorphismus h ist durch die Eigenschaft eindeutig auf einfachen Tensoren und damit insgesamt eindeutig bestimmt. □

Bemerkungen 3.3. 1) T heißt das **Tensorprodukt** von M und N. Schreibweise: $T = M \otimes_A N$ oder auch $T = M \otimes N$.
Gewöhnungsbedürftig: Die Elemente von $M \otimes N$ sind endliche Summen $\sum\limits_{\text{endl.}} x_i \otimes y_i$, die man nicht immer vereinfachen kann.
2) Für $x \in M$ gilt $x \otimes 0 = 0$ in $M \otimes N$ wegen $x \otimes 0 = x \otimes (0 + 0) = x \otimes 0 + x \otimes 0$. Also $x \otimes 0 = 0$.
3) Wir werden die Konstruktion des Tensorprodukts nicht mehr brauchen, nur die universelle Eigenschaft und, dass das Tensorprodukt von den einfachen Tensoren $x \otimes y$ erzeugt, wird, sowie die Rechenregeln.
4) Ist $(x_1, \ldots, x_m)$ ein Erzeugendensystem von M und $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Erzeugendensystem von N, so ist

$$(x_i \otimes y_j)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

ein Erzeugendensystem von $M \otimes N$. Insbesondere ist das Tensorprodukt endlich erzeugter A-Moduln wieder endlich erzeugt.

Bemerkung 3.4. Ist R ein nicht-kommutativer Ring, so kann man das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ zwischen einem R-Rechtsmodul M und einem R-Linksmodul N definieren. Dieses ist (nur noch) eine abelsche Gruppe.

Multitensorprodukt: Sind $M_1, \ldots, M_n$ und P A-Moduln, so nennen wir eine Abbildung

$$f : M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow P$$

multilinear, wenn f in jedem Argument linear ist. Ganz analog zeigt man die Existenz des Multi-Tensorprodukts $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$, das universell bezüglich multilinearer Abbildungen ist. Es wird durch Multitensoren $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, $x_i \in M_i$, $i = 1, \ldots, n$, erzeugt.

Lemma 3.5. *Seien M, N, P A-Moduln. Dann gibt es eindeutig bestimmte A-Modulisomorphismen*

(i) $M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$,
(ii) $(M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P)$,
(iii) $(M \oplus N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes P \oplus N \otimes P$,
(iv) $A \otimes M \xrightarrow{\sim} M$,

so dass entsprechend gilt

(a) $x \otimes y \longmapsto y \otimes x$,
(b) $(x \otimes y) \otimes z \longmapsto x \otimes (y \otimes z)$,
(c) $(x, y) \otimes z \longmapsto (x \otimes z, y \otimes z)$,
(d) $a \otimes x \longmapsto ax$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt dadurch, dass die Abbildungen auf den einfachen Tensoren vorgegeben sind, und diese das Tensorprodukt erzeugen.
(i) Betrachte die Komposition $\overline{\phi} : M \times N \xrightarrow{\text{Vert}} N \times M \xrightarrow{\text{kan}} N \otimes M$, also die Abbildung $\overline{\phi}\colon M \times N \to N \otimes M$, $(x, y) \mapsto y \otimes x$. Es ist $\overline{\phi}$ bilinear. Z.B.

$$\overline{\phi}(x_1 + x_2, y) = y \otimes (x_1 + x_2) = y \otimes x_1 + y \otimes x_2 = \overline{\phi}(x_1, y) + \overline{\phi}(x_2, y).$$

Dies zeigt die Existenz einer eindeutig bestimmten Abbildung $\phi\colon M \otimes N \to N \otimes M$ mit $\phi(m \otimes n) = n \otimes m$. Umgekehrt erhalten wir $\psi\colon N \otimes M \to M \otimes N$ mit $\psi(n \otimes m) = m \otimes n$. Schließlich gilt $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{M \otimes N}$, $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{N \otimes M}$ (weil diese Gleichheiten auf einfachen Tensoren stimmen.)
(ii) Betrachte die Abbildung

$$\overline{\phi}\colon M \times N \times P \longrightarrow (M \otimes N) \otimes P,\ (x, y, z) \longmapsto (x \otimes y) \otimes z.$$

Diese Abbildung ist trilinear und induziert so eine Abbildung

$$\phi\colon M \otimes N \otimes P \to (M \otimes N) \otimes P$$

mit $x \otimes y \otimes z \mapsto (x \otimes y) \otimes z$. Nun fixieren wir ein Element $z \in P$. Die Abbildung

$$\overline{f}_z\colon M \times N \longrightarrow M \otimes N \otimes P, \quad (x, y) \longmapsto x \otimes y \otimes z$$

ist bilinear und induziert eine Abbildung

$$f_z\colon M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes P$$

mit $f_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z$.
Nun betrachten wir $\overline{f}\colon (M \otimes N) \times P \to M \otimes N \otimes P$ mit $\overline{f}(t, z) = f_z(t)$ ein Homomorphismus. Desweiteren gilt für festes $t = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in M \otimes N$ dass:

$$\begin{aligned}
&\overline{f}(t, z_1 + z_2) = \\
&f_{z_1+z_2}(\textstyle\sum x_i \otimes y_i) = \sum x_i \otimes y_i \otimes (z_1 + z_2) \\
&= \textstyle\sum x_i \otimes y_i \otimes z_1 + \sum x_i \otimes y_i \otimes z_2 \\
&= f_{z_1}(\textstyle\sum x_i \otimes y_i) + f_{z_2}(\sum x_i \otimes y_i) \\
&= \overline{f}(t, z_1) + \overline{f}(t, z_2).
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $\overline{f}(t, az) = a\overline{f}(t, z)$. Daher ist $\overline{f}$ bilinear und induziert einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f : (M \otimes N) \otimes P \to M \otimes N \otimes P$ mit

$(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes y \otimes z$. Wir erhalten $f \circ \phi = \mathrm{id}_{M \otimes N \otimes P}$ und $\phi \circ f = \mathrm{id}_{(M \otimes N) \otimes P}$, d.h. ϕ ist ein Isomorphismus $M \otimes N \otimes P \xrightarrow{\sim} (M \otimes N) \otimes P$. Analog konstruiert man einen Isomorphismus

$$\psi : M \otimes N \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P)$$

mit $\psi(x \otimes y \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$ und die Komposition

$$\psi \circ \phi^{-1} : (M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P)$$

ist ein Isomorphismus der $(x \otimes y) \otimes z$ auf $x \otimes (y \otimes z)$ abbildet.

(iii) Die Kompositionen

$$(M \oplus N) \times P \xrightarrow{((x,y),z) \mapsto (x,z)} M \times P \xrightarrow{kan} M \otimes P$$

$$(M \oplus N) \times P \xrightarrow{((x,y),z) \mapsto (y,z)} N \times P \xrightarrow{kan} N \otimes P$$

setzen sich zu einer Abbildung

$$\overline{\phi}(M \oplus N) \times P \to (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$$

mit $((x,y),z) \to x \otimes z + y \otimes z$ zusammen. Diese Abbildung ist linear in $M \oplus N$ und in P: Z.B. $\overline{\phi}((x_1,y_1)+(x_2,y_2),z) = (x_1+x_2) \otimes z + (y_1+y_2) \otimes z$
$= x_1 \otimes z + x_2 \otimes z + y_1 \otimes z + y_2 \otimes z = (x_1 \otimes z + y_1 \otimes z) + (x_2 \otimes z + y_2 \otimes z)$
$= \overline{\phi}((x_1,y_1),z) + \overline{\phi}((x_2,y_2),z)$
und wir erhalten einen Homomorphismus

$$\phi\colon (M \oplus N) \otimes P \longrightarrow (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$$

mit $\phi((x,y) \otimes z) = x \otimes z + y \otimes z$.
Umgekehrt betrachten wir $\overline{\psi}_1 : M \times P \to (M \oplus N) \otimes P$ mit $\overline{\psi}_1(x,z) = (x,0) \otimes z$ und erhalten $\psi_1\colon M \otimes P \to (M \oplus N) \otimes P$. Analog $\psi_2\colon N \otimes P \to (M \oplus N) \otimes P$. Diese setzen sich zusammen zu einem Homomorphismus $\psi : (M \otimes P) \oplus (N \otimes P) \to (M \oplus N) \otimes P$ und wieder ist $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$, $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$.
(iv) $\overline{\phi} : A \times M \to M$, $\phi(a,x) = ax$ induziert $\phi\colon A \otimes M \to M$ wie gewünscht. Betrachten wir umgekehrt die zusammengesetzte Abbildung $\psi : M \to A \times M \mapsto A \otimes M$, $x \mapsto (1,x) \mapsto 1 \otimes x$, so gilt $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ und auch $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ wegen $a \otimes x \mapsto ax \mapsto 1 \otimes ax = a \otimes x$. □

Korollar 3.6. *Es gilt*

$$A^m \otimes A^n \cong A^{mn}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} A^m \otimes A^n &= (\underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{m\text{-mal}}) \otimes (\underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{n\text{-mal}}) \\ &= \underbrace{(A \otimes A) \oplus \cdots \oplus (A \otimes A)}_{mn\text{-mal}} \\ &= A^{mn}. \end{aligned}$$

□

Das Tensorprodukt vertauscht nicht nur mit endlichen, sondern auch mit beliebigen direkten Summen

Lemma 3.7. *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von A-Moduln und N ein weiterer A-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\big(\bigoplus_{i\in I} M_i\big) \otimes N \cong \bigoplus_{i\in I} M_i \otimes N.$$

Beweis. Den Beweis lassen wir als Übungsaufgabe. □

Korollar 3.8. *Ist M ein A-Modul und I eine Indexmenge, so gilt*

$$(A^{(I)}) \otimes M \cong M^{(I)}.$$

Beweis. Nach 3.5(iv) gilt $A \otimes M \cong M$. Nach 3.7 folgt

$$(A^{(I)}) \otimes M = \big(\bigoplus_{i\in I} A\big) \otimes M \cong \bigoplus_{i\in I} A \otimes M \cong \bigoplus_{i\in I} M = M^{(I)}.$$ □

Satz 3.9. *Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und M ein A-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\phi : A/\mathfrak{a} \otimes M \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{a}M$$

mit $(r + \mathfrak{a}) \otimes m \longmapsto rm + \mathfrak{a}M$.

Beweis. Wir zeigen zunächst:
Behauptung: jedes Element in $A/\mathfrak{a} \otimes M$ ist von der Form $(1 + \mathfrak{a}) \otimes m$ für ein $m \in M$.
Beweis der Behauptung: Es gilt

$$\sum (a_i + \mathfrak{a}) \otimes m_i = \sum a_i\big((1 + \mathfrak{a}) \otimes m_i)\big) = (1 + \mathfrak{a}) \otimes (\sum a_i m_i).$$

Nun betrachten wir die Abbildung $\bar{\phi} : A/\mathfrak{a}\times M \to M/\mathfrak{a}M$, $(a+\mathfrak{a}, m) \mapsto am+\mathfrak{a}M$. Diese ist bilinear und induziert die gesuchte Abbildung $\phi : A/\mathfrak{a}\otimes M \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{a}M$. Es bleibt zu zeigen, dass ϕ ein Isomorphismus ist.
Wegen $m+\mathfrak{a}M = \phi\big((1+\mathfrak{a})\otimes m\big)$ ist ϕ surjektiv. Bleibt zu zeigen, dass ϕ injektiv ist. Sei $x \in \ker(\phi)$. Z.z: $x = 0 \in A/\mathfrak{a} \otimes M$. Nach der obigen Behauptung können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x = (1 + \mathfrak{a}) \otimes m$ für ein $m \in M$ gilt. Es folgt $0 = \phi(x) = 1m + \mathfrak{a}M$. Hieraus folgt $m \in \mathfrak{a}M$, also $m = \sum a_i m_i$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$, $m_i \in M$. Es folgt

$$x = (1 + \mathfrak{a}) \otimes m = (1 + \mathfrak{a}) \otimes (\sum_i a_i m_i) =$$

$$= \sum_i (1 + \mathfrak{a}) \otimes a_i m_i = \sum_i (a_i + \mathfrak{a}) \otimes m_i = \sum_i (0 + \mathfrak{a}) \otimes m_i = \sum_i 0 = 0.$$

□

Korollar 3.10. *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ *Ideale, so gilt*

$$A/\mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b} \cong A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}).$$

Beweis. Man setzt $M = A/\mathfrak{b}$ in 3.9 und erhält

$$A/\mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b} \cong (A/\mathfrak{b})/\mathfrak{a}(A/\mathfrak{b}).$$

Nun gilt

$$\mathfrak{a}(A/\mathfrak{b}) = \{\sum_{\text{endl.}} a_i(r_i + \mathfrak{b}) \mid a_i \in \mathfrak{a},\ r_i \in A\} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}.$$

Es folgt

$$(A/\mathfrak{b})/\mathfrak{a}(A/\mathfrak{b}) = (A/\mathfrak{b})/((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}) = A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}).$$ □

Funktorielles Verhalten

Seien $f\colon M_1 \to M_2$, $g\colon N_1 \to N_2$ A-Modulhomomorphismen. Dann gibt es eine wohldefinierte A-lineare Abbildung

$$f \otimes g\colon M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$$

mit $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$.

Grund: Die bilineare Abbildung $M_2 \times N_2 \to M_2 \otimes N_2$, $(x,y) \to x \otimes y$, induziert über f und g eine bilineare Abbildung $M_1 \times N_1 \to M_2 \otimes N_2$ mit $(x,y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$. Nach Universaleigenschaft existiert daher die Abbildung $M_1 \otimes N_1 \to M_2 \otimes N_2$ wie beschrieben.

Lemma 3.11. *Sind f und g surjektiv, so auch $f \otimes g$.*

Beweis. Sei $z = x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_n \otimes y_n \in M_2 \otimes N_2$ beliebig. Setze

$$\bar{z} = \bar{x}_1 \otimes \bar{y}_1 + \cdots + \bar{x}_n \otimes \bar{y}_n \in M_1 \otimes N_1$$

mit Urbildern $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ von $x_1, \ldots, x_n$ unter f und $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ von $y_1, \ldots, y_n$ unter g. Dann gilt $(f \otimes g)(\bar{z}) = z$. □

Warnung: Sind f und g injektiv, so braucht das $f \otimes g$ nicht zu sein.

Beispiel 3.12. Betrachte die injektiven Homomorphismen von $\mathbb{Z}$-Moduln:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 2x, \quad g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Dann ist

$$f \otimes g : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

die Nullabbildung wegen

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$$

für beliebige $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Nun sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus (man sagt, B ist eine A-Algebra). B wird zum A-Modul durch $ab := f(a)b$. Allgemeiner können wir jeden B-Modul N durch $an := f(a)n$ als A-Modul auffassen.

Definition/Lemma 3.13. *Für einen A-Modul M betrachten wir*

$$M_B = M \otimes_A B.$$

Für $b \in B$ ist die b-Multiplikationsabbildung $b(m \otimes b') := m \otimes bb'$ wohldefiniert und definiert eine B-Modulstruktur auf M_B. Man nennt M_B den ***Basiswechsel von M nach B.***

Beweis. Für festes $b \in B$ ist die Abbildung $M \times B \to M \otimes_A B$, $(m, b') \mapsto m \otimes bb'$ A-bilinear und induziert somit die b-Multiplikationsabbildung $\cdot b : M \otimes_A B \to M \otimes_A B$, $b(m \otimes b') := m \otimes bb'$. Dass diese Regel eine B-Modulstruktur auf M_B induziert folgt direkt aus den Rechenregeln für Tensoren. □

Satz 3.14. *Es sei B eine A-Algebra, M ein A-Modul und N ein B-Modul. Dann gibt es natürliche Isomorphismen von B-Moduln*

(i) $\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$,

(ii) $(M \otimes_A B) \otimes_B N \cong M \otimes_A N$.

Hier ist die B-Modulstruktur auf $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ durch $(bf)(m) = bf(m)$ gegeben und die B-Modulstruktur auf $M \otimes_A N$ durch $b(m \otimes n) = m \otimes bn$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass für $b \in B$ die beschriebene b-Wirkung auf $M \otimes_A N$ wohldefiniert ist, weil $M \times N \to M \otimes_A N$, $(m, n) \mapsto m \otimes bn$ A-bilinear ist.
(i) Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N),\ \Phi(f)(m) := f(m \otimes 1_B).$$

In der anderen Richtung ist für $g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ die Abbildung $M \times B \to N$, $(m, b) \mapsto bg(m)$ A-bilinear und induziert damit einen Homomorphismus $M \otimes_A B \to N$, $m \otimes b \mapsto bg(m)$. Daher ist

$$\Psi : \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N),\ \Psi(g)(m \otimes b) = bg(m)$$

wohldefiniert. Man rechnet leicht nach, dass Φ und Ψ zueinander invers sind.

(ii) Für festes $n \in N$ ist $M \times B \to M \otimes_A N$, $(m, b) \mapsto m \otimes bn$, A-bilinear und induziert $\phi_n : M \otimes_A B \to M \otimes_A N$. Die Zuordnung $(M \otimes_A B) \times N \to M \otimes_A N$, $(m \otimes b, n) \mapsto \phi_n(m \otimes b) = m \otimes bn$ ist B-bilinear und induziert

$$\Phi : (M \otimes_A B) \otimes_B N \longrightarrow M \otimes_A N,\ \Phi((m \otimes b) \otimes n) = m \otimes bn.$$

In der anderen Richtung ist die Abbildung $M \times N \to (M \otimes_A B) \otimes_B N$, $(m, n) \mapsto (m \otimes 1) \otimes n$ A-bilinear und induziert

$$\Psi : M \otimes_A N \longrightarrow (M \otimes_A B) \otimes_B N,\ \Psi(m \otimes n) = (m \otimes 1) \otimes n.$$

Man rechnet leicht nach, dass Φ und Ψ zueinander invers sind. □

4 Exaktheit

Sei R ein nicht notwendig kommutativer Ring.

Definition 4.1. Eine (endliche, einseitig oder beidseitig unendliche) Folge

$$\ldots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} M_n \xrightarrow{\alpha_n} M_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \ldots$$

von R-Moduln heißt **exakt an der Stelle n**, wenn $\mathrm{im}(\alpha_{n-1}) = \ker(\alpha_n)$ gilt. Die Folge heißt **exakt**, wenn sie an jeder Stelle exakt ist. Eine exakte Folge der Form $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ heißt **kurze exakte Folge**.

Bemerkung 4.2. Die Folge $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0$ ist genau dann exakt wenn i injektiv ist, j surjektiv ist und $\ker(j) = \mathrm{im}(i)$ gilt. Insbesondere ist für jeden surjektiven Homomorphismus $\varphi : M \to N$ die Folge $0 \to \ker(\varphi) \to M \to N \to 0$ exakt und für jeden injektiven Homomorphismus $\psi : M \to N$ die Folge $0 \to M \xrightarrow{\psi} N \to N/\psi(M) \to 0$. Für beliebige Moduln M, N ist die Folge $0 \to M \xrightarrow{i_1} M \oplus N \xrightarrow{p_2} N \to 0$ exakt.

Lemma 4.3 (Exaktheit von Produkt und Summe)**.** *Sei I eine Indexmenge und seien*

$$M_i' \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} M_i'', \quad i \in I,$$

exakte Folgen von R-Moduln. Dann sind auch die Folgen

$$\bigoplus_{i\in I} M_i' \xrightarrow{\oplus\alpha_i} \bigoplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{\oplus\beta_i} \bigoplus_{i\in I} M_i'', \qquad \text{und}$$

$$\prod_{i\in I} M_i' \xrightarrow{\prod\alpha_i} \prod_{i\in I} M_i \xrightarrow{\prod\beta_i} \prod_{i\in I} M_i''$$

exakt. Umgekehrt folgt aus der Exaktheit der direkten Summe (analog: aus der Exaktheit des Produkts), dass alle Folgen $M_i' \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} M_i''$ exakt sind.

Beweis. Exaktheit kann komponentenweise geprüft werden, daher ist die Aussage für das Produkt offensichtlich. Im Fall der direkten Summe bekommt man Urbilder a priori nur im Produkt. Nimmt man für die 0 (die ja in fast allen Komponenten steht) auch die 0 als Urbild in der jeweiligen Komponente, so liegt das Urbild auch wieder in der direkten Summe. □

Korollar 4.4. *Sei I eine Indexmenge und*

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$$

eine exakte Folge von R-Moduln. Dann sind auch die Folgen

$$M'^{(I)} \longrightarrow M^{(I)} \longrightarrow M''^{(I)} \quad \text{und } M'^{I} \longrightarrow M^{I} \longrightarrow M''^{I}$$

exakt.

Beweis. Es gilt nach Definition $M^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} M$ und $M^I = \prod_{i\in I} M$. Die Aussage folgt daher aus Lemma 4.3. □

R-Modulhomomorphismen $u : M' \to M$ und $v : N \to N'$ induzieren Homomorphismen abelscher Gruppen (im kommutativen Fall von Moduln)

$$u^* : \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M',N), \quad f \longmapsto f\circ u, \qquad \text{und}$$

$$v_* : \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N'), \quad f \longmapsto v\circ f.$$

Satz 4.5. (i) *Sei*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

eine Folge von R-Moduln. Die Folge (1) *ist genau dann exakt, wenn für jeden R-Modul N die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'',N) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}(M',N) \tag{2}$$

exakt ist.

(ii) *Sei*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \tag{3}$$

eine Folge von R-Moduln. Die Folge (3) *ist genau dann exakt, wenn für jeden R-Modul M die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N') \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Hom}_R(M,N'') \tag{4}$$

exakt ist.

Beweis. Wir zeigen (i) und lassen (ii) als Übungsaufgabe. Sei (1) exakt. Wir betrachten (2) für beliebiges N. Es gilt

- $u^*\circ v^* = (v\circ u)^* = 0^* = 0$, also $\mathrm{im}(v^*) \subset \ker u^*$.
- Wegen v surjektiv folgt v^* injektiv.

Sei nun $\varphi \in \ker(u^*) \subset \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Dann gilt $\varphi\circ u = 0$, also faktorisiert φ über $M/\mathrm{im}(u) = M/\ker(v) \cong M''$ und wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "v"'] & & N \\ & M'' \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Es folgt $\varphi = v^*(\varphi') \in \mathrm{im}(v^*)$. Wir erhalten $\ker(u^*) = \mathrm{im}(v^*)$.

Sei umgekehrt (2) exakt für alle N. Wir betrachten $M \xrightarrow{v} M''$, setzen $N = \mathrm{coker}(v) = M''/\mathrm{im}(v)$ und betrachten die kanonische Projektion $M'' \xrightarrow{\pi} N$. Es ist $v^*(\pi) = \pi\circ v : M \xrightarrow{v} M'' \xrightarrow{\pi} M''/\mathrm{im}(v) = N$ die Nullabbildung. Wegen

v^* injektiv folgt $\pi = 0$, was wegen π surjektiv $N = 0$ impliziert. Daher ist v surjektiv.
Setze nun $N = M''$ und betrachte $\mathrm{id}_{M''} \in \mathrm{Hom}(M'', N)$. Dann gilt

$$0 = 0^*(\mathrm{id}_{M''}) = u^* \circ v^*(\mathrm{id}_{M''}) = (v \circ u)^*(\mathrm{id}_{M''}),$$

also ist $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \xrightarrow{\mathrm{id}_{M''}} M''$ die Nullabbildung, also $\ker(v) \supset \mathrm{im}(u)$.
Setze nun $N = M/\mathrm{im}(u)$ und betrachte die Projektion $\pi : M \to N$. Es gilt $u^*(\pi) = 0$, also $\pi \in \ker(u^*) = \mathrm{im}(v^*)$. Daher existiert $\varphi \in \mathrm{Hom}(M'', N)$ mit $\pi = v^*(\varphi) = \varphi \circ v$, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M'' \arrow[dl, "\varphi"] \\ & M/\mathrm{im}(u) & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Es folgt $\ker(v) \subset \ker(\pi) = \mathrm{im}(u)$. □

Lemma 4.6. *(5er-Lemma) Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen. Ist φ_1 surjektiv, φ_2, φ_4 Isomorphismen und φ_5 injektiv, so ist φ_3 ein Isomorphismus.

Beweis. Diagrammjagd. □

Lemma 4.7. *(Schlangenlemma) Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} (0 & \longrightarrow) & M' & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\alpha} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\beta'} & N & \xrightarrow{\beta} & N'' & (\longrightarrow & 0) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen. Dann gibt es eine natürliche exakte Folge

$$(0 \to) \ker(\varphi') \to \ker(\varphi) \to \ker(\varphi'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}(\varphi') \to \mathrm{coker}(\varphi) \to \mathrm{coker}(\varphi'') (\to 0).$$

Die Klammerinhalte sind so zu interpretieren, dass sie in Voraussetzung und Aussage entweder betrachtet oder ignoriert werden können.

Beweis. Wie ist δ definiert? Wir fassen M' und N' über die Injektionen α' und β' als Untermoduln von M und N auf. Sei $m'' \in \ker(\varphi'') \subset M''$. Wähle $m \in M$ mit $\alpha(m) = m''$. Setze $n = \varphi(m)$. Dann gilt $\beta(n) = \varphi''(\alpha(m)) = \varphi''(m'') = 0$ $\Rightarrow n \in N'$. Setze $\delta(m'') := n + \mathrm{im}(\varphi') \in \mathrm{coker}(\varphi')$.
Wohldefiniertheit: Sei $\tilde{m} \in M$ ein weiteres Element mit $\alpha(\tilde{m}) = m''$. Dann gilt $m - \tilde{m} \in M'$, also $n = \tilde{n} + \varphi'(m - \tilde{m}) \Rightarrow n + \mathrm{im}(\varphi') = \tilde{n} + \mathrm{im}(\varphi')$.
Exaktheit: Übungsaufgabe in Diagrammjagd. □

5 Flachheit

Satz 5.1. *Sei $R = A$ ein kommutativer Ring, und M, N, P A-Moduln. Dann gilt*

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)) \cong \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$$

Beweis. Wir betrachten die Homomorphismen

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathrm{Bil}_A(M, N; P)$$

mit $f(\varphi)(x, y) = \varphi(x)(y)$ und $g(\gamma)(x)(y) = \gamma(x, y)$. Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$. Daher folgt die Aussage aus der Universaleigenschaft von $\otimes$. □

Sind $f : M \to N$ und $f' : M' \to N'$ A-Modulhomomorphismen, so definiert $M \times M' \to N \otimes_A N', (m, m') \mapsto f(m) \otimes f'(m')$ eine A-bilineare Abbildung und somit einen Homomorphismus $f \otimes f' : M \otimes_A M' \to N \otimes_A N'$.

Satz 5.2 (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts)**.** *Sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine exakte Folge von A-Moduln. Dann ist für jeden A-Modul N die Folge*

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Nach Satz 4.5 genügt es zu zeigen: Für jeden A-Modul P ist die Folge $0 \to \mathrm{Hom}_A(M'' \otimes_A N, P) \to \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \to \mathrm{Hom}(M' \otimes_A N, P)$ exakt. Nach Satz 5.1 identifiziert sich diese Folge mit

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M'', P)) \to \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M, P))$$

$$\to \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M', P)),$$

welche nach Satz 4.5 (erst (i), dann (ii) angewendet) exakt ist. □

Korollar 5.3. *Für einen A-Modul N sind äquivalent:*

(i) *Für jede exakte Folge $M' \to M \to M''$ von A-Moduln ist $M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N$ exakt.*

(ii) *Für jede kurze exakte Folge $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ von A-Moduln ist $0 \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$ exakt.*

(iii) *Für jede Inklusion $M' \hookrightarrow M$ ist $M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$ injektiv.*

Beweis. Die Äquivalenz (ii)$\Leftrightarrow$(iii) folgt aus Satz 5.2 und (i)$\Rightarrow$(ii) ist trivial. Nun gelte (ii) und es sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ exakt. Setzt man $P' = \mathrm{im}(f) \subset M$ und $P'' = \mathrm{im}(g) \subset M''$, so erhält man drei kurze exakte Folgen $0 \to \ker(f) \to M' \to P' \to 0$, $0 \to P' \to M \to P'' \to 0$ und $0 \to P'' \to M'' \to \mathrm{coker}(g) \to 0$. Diese drei Folgen bleiben exakt nach Tensorieren mit N, d.h. die Folgen $0 \to \ker(f) \otimes_A N \to M' \otimes_A N \to P' \otimes_A N \to 0$, $0 \to P' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to P'' \otimes_A N \to 0$ und $0 \to P'' \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to \mathrm{coker}(g) \otimes_A N \to 0$ sind exakt. Hieraus folgt die Exaktheit von $M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N$. □

Definition 5.4. Ein A-Modul N, für den die äquivalenten Eigenschaften von Korollar 5.3 gelten, heißt **flacher** A-Modul.

Lemma 5.5. *$\bigoplus\limits_{i \in I} N_i$ flach $\Leftrightarrow$ N_i flach für alle i.*

Beweis. Dies folgt direkt aus $M \otimes_A \bigoplus\limits_{i \in I} N_i \cong \bigoplus\limits_{i \in I} (M \otimes_A N_i)$ und aus Lemma 4.3. □

Lemma 5.6. *A ist flacher A-Modul.*

Beweis. Dies folgt aus $M \otimes_A A \cong M$. □

Wir sagen N sei direkter Summand in einem freien Modul, wenn ein Modul N' existiert, so dass $N \oplus N'$ frei ist.

Korollar 5.7. *Ist N direkter Summand in einem freien Modul, so ist N flach.*

Beweis. Nach Lemma 5.5 genügt es zu zeigen: freie Moduln sind flach. Wieder nach Lemma 5.5 genügt es zu zeigen: A ist flach. Dies ist Lemma 5.6. □

Beispiel 5.8. Sei $A = A_1 \times A_2$ und $\mathfrak{a}_1 = A_1 \times 0$, $\mathfrak{a}_2 = 0 \times A_2$. Dann gilt $A \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$ als A-Moduln. Daher sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ flache A-Moduln.

Bemerkung 5.9. Tensorieren mit einem Modul M erhält Kokerne. Ist M flach, so werden auch Kerne und Bilder erhalten.

Kokerne: $\phi : X \to X'$ gibt exakte Folge $X \to X' \to \mathrm{coker}(\phi) \to 0$. Tensorieren mit M liefert nach Satz 5.2 die exakte Folge $X \otimes_A M \to X' \otimes_A M \to \mathrm{coker}(\phi) \otimes_A M \to 0$ und somit $\mathrm{coker}(\phi) \otimes_A M = \mathrm{coker}(\phi \otimes_A M)$.

Bilder: Faktorisieren wir $\phi : X \to X'$ in $X \twoheadrightarrow \mathrm{im}(\phi) \hookrightarrow X'$ und tensorieren mit dem flachen A-Modul M, so erhalten wir $X \otimes_A M \twoheadrightarrow \mathrm{im}(\phi) \otimes_A M \hookrightarrow X' \otimes_A M$ und damit $\mathrm{im}(\phi \otimes_A M) = \mathrm{im}(\phi) \otimes_A M$.

Kerne: Aus der exakten Folge $0 \to \ker(\phi) \to X \to X'$ erhalten wir die exakte Folge $0 \to \ker(\phi) \otimes_A M \to X \otimes_A M \to X' \otimes_A M$, also gilt $\ker(\phi \otimes_A M) = \ker(\phi) \otimes_A M$.

Definition 5.10. Ein A-Modul M heißt **treuflach**, wenn gilt:

$$N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \text{ exakt} \iff N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M \text{ exakt.}$$

Beispiel 5.11. Jeder freie Modul $\neq 0$ ist treuflach (A ist offenbar treuflach, also auch $A^{(I)}$ nach Lemma 4.3).

Eine A-Algebra B heißt (treu)flache Algebra, wenn B (treu)flacher A-Modul ist.

Satz 5.12. *Sei B eine flache A-Algebra. Dann sind äquivalent:*

(i) *B ist treuflach.*
(ii) $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a} \quad \forall\, \mathfrak{a} \subset A$.
(iii) *jedes Primideal von A ist zurückgezogen.*
(iv) *jedes Maximalideal von A ist zurückgezogen.*
(v) *es gilt $\mathfrak{m}^e \neq (1)$ für jedes Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$.*

Insbesondere sind treuflache Homomorphismen injektiv.

Beweis. Wegen $(0)^{ec} = (0)^c = \ker(f)$ ist f ist genau dann injektiv wenn $(0)^{ec} = (0)$ gilt. Dies zeigt wegen (ii) das "Insbesondere". Für einen A-Modul M schreiben wir $M_B = M \otimes_A B$ und fügen die folgenden Bedingungen hinzu.

(vi) $M \neq 0 \Longrightarrow M_B \neq 0$.
(vii) die natürliche Abbildung $M \longrightarrow M_B$, $m \mapsto m \otimes 1$, ist für jeden A-Modul M injektiv.

(i) $\Longrightarrow$ (vi). Ist $M_B = 0$, so ist die Folge $0 \to M_B \to 0$ exakt und aus der Treuflachheit von B folgt die Exaktheit von $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, also $M = 0$.
(vi) $\Longrightarrow$ (i). Sei $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ so dass $N'_B \xrightarrow{f_B} N_B \xrightarrow{g_B} N''_B$ exakt ist.
Wenden wir Bemerkung 5.9 auf $\phi = g \circ f$ an, erhalten wir $\operatorname{im}(g \circ f)_B = \operatorname{im}(g_B \circ f_B) = 0$, also gilt $\operatorname{im}(g \circ f) = 0$ und daher $g \circ f = 0$. Es folgt $\operatorname{im}(f) \subset \ker(g)$ und wir können den Faktormodul $\ker(g)/\operatorname{im}(f)$ bilden. Erneute Anwendung von Bemerkung 5.9 liefert: $\big(\ker(g)/\operatorname{im}(f)\big)_B = \ker(g_B)/\operatorname{im}(f_B) = 0$. Wir schließen $\ker(g)/\operatorname{im}(f) = 0$. Daher ist die Folge $N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$ exakt und somit B treuflach.
(vi) $\to$ (vii). Wir zeigen zunächst:

Behauptung: Sei M ein B-Modul den man durch den Homomorphismus $f : A \to B$ als A-Modul auffasst. Dann ist der Homomorphismus $\tau : M \to M_B$, $m \mapsto m \otimes 1$, injektiv.
Beweis der Behauptung: Die A-bilineare Abbildung

$$M \times B \longrightarrow M, \quad (m, b) \longmapsto bm,$$

induziert einen Homomorphismus $g : M_B \to M$, $m \otimes b \mapsto bm$. Es gilt $g \circ \tau = \mathrm{id}_M$. Daher ist τ injektiv.

Sei nun M ein beliebiger A-Modul und $M' = \ker(\tau)$. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M_B$$

induziert die exakte Folge $0 \to M'_B \to M_B \hookrightarrow (M_B)_B$, also gilt $M'_B = 0$, und daher $M' = 0$.
(vii) $\Rightarrow$ (ii) Es gilt stets $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}$. Setze $M = A/\mathfrak{a}$. Dann ist die Abbildung $A/\mathfrak{a} \to A/\mathfrak{a} \otimes_A B \overset{3.9}{=} B/\mathfrak{a}B = B/\mathfrak{a}^e$ injektiv. Aus $f(a) \in \mathfrak{a}^e$ folgt $a \in \mathfrak{a}$, m.A.W.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) und (vii) $\Longrightarrow$ (vi) sind trivial.
(iv) $\Longrightarrow$ (v). Wäre $\mathfrak{m}^e = (1)$, folgte $\mathfrak{m}^{ec} = (1) \neq \mathfrak{m}$, und $\mathfrak{m}$ wäre kein zurückgezogenes Ideal (vgl. Satz 1.31).
(v) $\Longrightarrow$ (vi). Sei $0 \neq x \in M$ und $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(x)$. Sei $M' = Ax \subset M$. Der Homomorphismus $A \to M$, $a \mapsto ax$ induziert nach dem Homomorphiesatz einen Isomorphismus $A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} M'$. Nun gilt

$$M'_B \cong A/\mathfrak{a} \otimes_A B = B/\mathfrak{a}B = B/\mathfrak{a}^e$$

Wegen $x \neq 0$ gilt $1 \notin \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} \subsetneqq A$. Daher existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ und wir erhalten $\mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{m}^e \subsetneqq B$. Also gilt $M'_B \neq 0$. Da B flach ist, ist die natürliche Abbildung $M'_B \to M_B$ injektiv, also $M_B \neq 0$. □

Definition 5.13. Ein Homomorphismus $f : A \longrightarrow B$ lokaler Ringe heißt **lokal**, wenn $f(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$ gilt.

Korollar 5.14. *Ein flacher lokaler Homomorphismus lokaler Ringe ist treuflach und insbesondere injektiv.*

Beweis. Bedingung (v) von Satz 5.12 ist erfüllt. □

6 Limites

Definition 6.1. Eine Menge I mit einer Relation $\leq$ heißt **halbgeordnet**, wenn $\leq$ reflexiv und transitiv ist und es gilt: $(i \leq j$ und $j \leq i) \Rightarrow i = j$. Die halbgeordnete Menge I heißt **gerichtet**, wenn zu $a, b \in I$ stets ein $c \in I$ mit $a \leq c$ und $b \leq c$ existiert.

Definition 6.2. Sei I eine gerichtete halbgeordnete Menge. Ein über I indiziertes **direktes System** von R-Moduln besteht aus den folgenden Daten

- eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von R-Moduln
- zu jedem Paar $i \leq j$ ein R-Modulhomomorphismus („Übergangsabbildung") $\varphi_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$, so dass gilt: $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{M_i}$ und $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ falls $i \leq j \leq k$.

Beispiele 6.3. 1) Sei $I = \mathbb{N}$ mit $\leq$ und

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$$

eine Folge ineinander enthaltener Untermoduln eines R-Moduls M. Die Inklusionen $\varphi_{ij} : M_i \hookrightarrow M_j$ definieren ein direktes System.

2) Sei $I = \mathbb{N}$ mit der multiplikativen Halbordnung, d.h. $i \leq j$ falls $i \mid j$. Setze $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}$ und

$$\varphi_{ij} : \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}, \quad a + i\mathbb{Z} \longmapsto \frac{j}{i}a + j\mathbb{Z}.$$

3) Sei M ein R-Modul und (M_i) die Familie seiner e.e. Untermoduln (indiziert durch sich selbst und mit $\subset$ als $\leq$). Dies ist ein direktes System mit den Inklusionen als Übergangsabbildungen.

Sei nun $(M_i)_{i\in I}$ ein direktes System.

Definition 6.4.

$$\varinjlim_{i\in I} M_i = \left(\coprod_{i\in I} M_i \right) / \sim$$

mit $m_i \in M_i \sim m_j \in M_j \iff \exists\, k \in I,\ i \leq k,\ j \leq k$ mit $\varphi_{ik}(m_i) = \varphi_{jk}(m_j)$,

heißt der **direkte** (oder auch **induktive**) **Limes** des Systems M_i.

Wir überlegen uns nacheinander

- $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation:
  - reflexiv, symmetrisch: trivial.
  - transitiv, weil I gerichtet.
    Sei $m_i \sim m_j$ und $m_j \sim m_k$. Dann existieren ℓ, $i \leq \ell$, $j \leq \ell$: $\varphi_{i\ell}(m_i) = \varphi_{j\ell}(m_j)$ und $m \in I$, $j \leq m$, $k \leq m$: $\varphi_{jm}(m_j) = \varphi_{km}(m_k)$. Wähle $n \in I$ mit $\ell, m \leq n$. Dann gilt $\varphi_{in}(m_i) = \varphi_{\ell n}(\varphi_{i\ell}(m_i)) = \varphi_{\ell n}(\varphi_{j\ell}(m_j)) = \varphi_{jn}(m_j) = \varphi_{mn}(\varphi_{jm}(m_j)) = \varphi_{mn}(\varphi_{km}(m_k)) = \varphi_{kn}(m_k)$, also $m_i \sim m_k$.
- es existieren natürliche Abbildungen $\varphi_i : M_i \to M := \varinjlim_{i\in I} M_i$ für alle $i \in I$ und es gilt für $i \leq j$, dass $\varphi_j \circ \varphi_{ij} = \varphi_i$ (bette M_i in die disjunkte Vereinigung ein und komponiere mit der kanonischen Projektion auf die Faktormenge).
- jedes $m \in M$ liegt in $\mathrm{im}(\varphi_i)$ für ein $i \in I$.
- zu $m, n \in \varinjlim_{i\in I} M$ existiert ein $i \in I$ mit $m, n \in \mathrm{im}(\varphi_i)$ (weil I gerichtet ist)

- $\varinjlim_{i\in I} M_i$ wird zum R-Modul durch:
  - Sei $r \in R$, $m \in \varinjlim_{i\in I} M_i$. Wähle $i \in I$ und $m_i \in M_i$ mit $m = \varphi_i(m_i)$.
  - Setze $rm := \varphi_i(rm_i)$. Dies ist wohldefiniert.
  - Seien $m, n \in \varinjlim_{i\in I} M_i$. Wähle $i \in I$ und $m_i \in M_i$, $n_i \in M_i$ mit $m = \varphi_i(m_i)$, $n = \varphi_i(n_i)$. Setze $m + n = \varphi_i(m_i + n_i)$. Dies ist wohldefiniert.

Lemma 6.5. *Hat I ein maximales Element $i_0 \in I$, so ist*

$$\phi_{i_0} : M_{i_0} \to M = \varinjlim_{i\in I} M_i$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $m \in M$ beliebig. Dann existiert $i \in I$, $m_i \in M_i$ mit $\varphi_i(m_i) = m$. Wegen $i \leq i_0$ folgt

$$m = \varphi_{i_0}\varphi_{ii_0}(m_i) \in \operatorname{im}\varphi_{i_0}.$$

Daher ist φ_{i_0} surjektiv.

Für $x \in \ker(\varphi_{i_0})$ gilt $\varphi_{i_0}(x) = \varphi_{i_0}(0)$. Nach Definition von $\sim$ folgt die Existenz eines $k \in I$ mit $i_0 \leq k$ und $\varphi_{i_0k}(x) = \varphi_{i_0k}(0) = 0$. Weil i_0 maximal ist, folgt $k = i_0$ und wegen $\varphi_{i_0i_0} = \mathrm{id}_{M_{i_0}}$ folgt $x = 0$. Daher ist φ_{i_0} injektiv. □

Satz 6.6. *Das Paar*

$$\big(M = \varinjlim_{i\in I} M_i,\ (\varphi_i : M_i \longrightarrow M)_{i\in I}\big)$$

erfüllt die folgende Universaleigenschaft:

Sei N ein R-Modul und $\psi_i : M_i \longrightarrow N$, $i \in I$, R-Modulhomomorphismen mit $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}\quad \forall\, i \leq j$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter R-Modulhomomorphismus $\psi : M \longrightarrow N$ mit $\psi_i = \psi \circ \varphi_i, \quad \forall\, i$.

Beweis. Wir wählen zu $m \in M$ ein $i \in I$ und $m_i \in M_i$ mit $\varphi_i(m_i) = m$ und setzen $\psi(m) = \psi_i(m_i)$. Das ist offensichtlich die einzig mögliche Definition von ψ. Wir müssen noch nachweisen, dass ψ wohldefiniert ist. Seien also j und $m_j \in M_j$ mit $\varphi_j(m_j) = m$. Z.z.: $\psi_i(m_i) = \psi_j(m_j)$. Nach Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ finden wir $k \in I$ mit $i \leq k$, $j \leq k$ und $\varphi_{ik}(m_i) = \varphi_{jk}(m_j)$. Es folgt

$$\psi_i(m_i) = \psi_k(\varphi_{ik}(m_i)) = \psi_k(\varphi_{jk}(m_j)) = \psi_j(m_j).$$ □

Beispiele 6.7. In Beispiel 6.3, 1.) $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$: $\displaystyle\varinjlim_{i\in\mathbb{N}} M_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subset M$.

In Beispiel 6.3 2): $I = \mathbb{N}$ multiplikativ halbgeordnet, $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\varinjlim_{i\in\mathbb{N}} M_i \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Beweis: Betrachte die natürlichen Isomorphismen

$$\mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} (\frac{1}{i}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ a + i\mathbb{Z} \longmapsto \frac{a}{i} + \mathbb{Z}.$$

Bezüglich dieser Inklusionen von $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ wird das System M_i isomorph auf das System $\left(\frac{1}{i}\mathbb{Z}\right)/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von Untergruppen von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ abgebildet. Daher ist der direkte Limes nichts weiter als die Vereinigung dieser Untergruppen $=$ (ganz) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. □

Beispiel 6.3,3): M ein R-Modul und das System seiner endlich erzeugten Untermoduln: der Limes ist M selbst, da jedes Element in einem endlich erzeugten Untermodul enthalten ist.

Es sei $I = \mathbb{N}$ und wir betrachten das konstante System mit Nullabbildungen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots \quad .$$

Es gilt

$$\varinjlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z} = 0$$

wegen $\varphi_{ij}(x) = 0$ für $i < j$.

Satz 6.8. *Es gilt*

(i) $\left(\varinjlim_{i\in I} M_i\right) \oplus N \cong \varinjlim_{i\in I}(M_i \oplus N)$.

(ii) *Ist $R = A$ kommutativ, so gilt* $\left(\varinjlim_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \cong \varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$.

Beweis. Hier hat man grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Zum einen kann man die expliziten Definitionen auf beiden Seiten vergleichen. Zum anderen kann man nachweisen, dass die jeweils linken und rechten Seiten dieselbe Universaleigenschaft erfüllen. Das lassen wir als Übungsaufgabe. □

Es seien (M_i), (N_i) zwei über der gleichen gerichteten halbgeordneten Indexmenge I definierte direkte Systeme von R-Moduln.

Definition 6.9. Ein **Homomorphismus** $(f_i)_{i\in I}$ von (M_i) nach (N_i) ist eine Familie von R-Modulhomomorphismen $f_i : M_i \longrightarrow N_i$, $i \in I$, so dass $\varphi_{ij}^N \circ f_i = f_j \circ \varphi_{ij}^M$ für alle $i \le j$ gilt.

Lemma 6.10. *$(f_i)_{i\in I}$ induziert einen natürlichen R-Modulhomomorphismus*

$$f : \varinjlim_{i\in I} M_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} N_i.$$

Beweis. Sei $N = \varinjlim_{i\in I} N_i$. Die Kompositionen $M_i \to N_i \to N$ bilden ein kompatibles System und induzieren nach Universaleigenschaft des direkten Limes einen natürlichen Homomorphismus $\varinjlim_{i\in I} M_i \to N$. $\square$

Definition 6.11. Eine Folge

$$(M_i) \xrightarrow{(f_i)} (N_i) \xrightarrow{(g_i)} (K_i)$$

von direkten Systemen heißt **exakt**, wenn für jedes $i \in I$ die Folge von R-Moduln

$$M_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{g_i} K_i$$

exakt ist.

Satz 6.12. *Ist $(M_i) \xrightarrow{(f_i)} (N_i) \xrightarrow{(g_i)} (K_i)$ eine exakte Folge direkter Systeme, so ist die Folge*

$$\varinjlim_{i\in I} M_i \xrightarrow{f} \varinjlim_{i\in I} N_i \xrightarrow{g} \varinjlim_{i\in I} K_i$$

exakt.

Beweis. Wegen $g_i \circ f_i = 0$ für alle i folgt $g \circ f = 0$, also $\mathrm{im}(f) \subset \ker(g)$. Wir zeigen Gleichheit. Sei $n \in N = \varinjlim_{i\in I} N_i$ mit $g(n) = 0$. Wähle $i, n_i \in N_i$ mit $n = \varphi_i^N(n_i)$. Dann gilt $\varphi_i^K(g_i(n_i)) = 0 \Longrightarrow \exists j \geq i : \varphi_{ij}^K(g_i(n_i)) = 0 \Longrightarrow \varphi_{ij}^N(n_i) \in \ker(g_j) = \mathrm{im}(f_j) \Longrightarrow \exists m_j \in M_j$ mit $f_j(m_j) = n_j := \varphi_{ij}^N(n_i) \Longrightarrow n = f(m)$ mit $m = \varphi_j^M(m_j) \in M$. $\square$

Korollar 6.13. *Der direkte Limes eines Systems flacher A-Moduln ist ein flacher A-Modul.*

Beweis. Ist $M = \varinjlim M_i$ mit flachen Moduln M_i und $N' \to N \to N''$ eine exakte Folge, so ist nach Satz 6.8 (ii) die Folge $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N''$ der direkte Limes der exakten Folgen $M_i \otimes_A N' \to M_i \otimes_A N \to M_i \otimes_A N''$ und daher nach Satz 6.12 exakt. $\square$

Korollar 6.14. *Ist jeder e.e. Untermodul von M flach, so auch M selbst.*

Beweis. M ist die Vereinigung, also der direkte Limes seiner e.e. Untermoduln. $\square$

Definition 6.15. Eine Teilmenge $J \subset I$ heißt **kofinal**, wenn zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ mit $i \leq j$ existiert.

Eine kofinale Teilmenge einer gerichteten halbgeordneten Menge ist wieder gerichtet und durch Einschränkung definiert jedes über I indizierte direkte System $(M_i)_{i\in I}$ ein direktes System $(M_j)_{j\in J}$.

Lemma 6.16. *Sei $J \subset I$ kofinal. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Phi : \varinjlim_{j \in J} M_j \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i \in I} M_i.$$

Beweis. Die natürliche Inklusion

$$\coprod_{j \in J} M_j \hookrightarrow \coprod_{i \in I} M_i$$

induziert nach Austeilen der Äquivalenzrelationen den behaupteten Homomorphismus Φ.

Für $m_j \in M_j$ gelte $\varphi_{ji}(m_j) = 0$ für ein $i \in I$. Da J kofinal in I ist, existiert ein $j' \in J$ mit $i \leq j'$ und somit $\varphi_{jj'}(m_j) = \varphi_{ij'}\varphi_{ji}(m_j) = 0$. Dies zeigt die Injektivität von Φ.

Für $m_i \in M_i$, $i \in I$ existiert ein $j \in J$ mit $i \leq j$. Wegen $\varphi_i(m_i) = \varphi_j\varphi_{ij}(m_j)$, ist Φ surjektiv. □

Lemma 6.17. *Sei I eine abzählbare gerichtete halbgerichte Menge. Dann hat I ein maximales Element oder es existiert eine kofinale Teilmenge $J \subset I$ mit $J \cong \mathbb{N}$ als halbgeordnete Mengen.*

Beweis. Sei $I = \{i_1, i_2, \dots\}$. Wähle $j_1 = i_1$, dann j_2 mit $j_2 \geq j_1$ und $j_2 \geq i_2$, dann $j_3 \geq j_2$, $j_3 \geq i_3$, $\dots$; und setze $J = \{j_1, j_2, \dots\}$. Dann ist J kofinal, und wenn I kein maximales Element besitzt, gilt $J \cong \mathbb{N}$ als halbgeordnete Menge. □

Moral: Für abzählbare Limites kann man sich auf den Fall $I = \mathbb{N}$ zurückziehen.

Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete h.g. Menge.

Definition 6.18. Ein über I indiziertes **projektives System** von R-Moduln besteht aus
- einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von R-Moduln
- zu $i \leq j$ ein R-Modulhomomorphismus $\varphi_{ij} : M_j \longrightarrow M_i$ so dass $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{M_i}$ und $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$ falls $i \leq j \leq k$.

Beispiele 6.19. 1) Sei $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \dots$ eine absteigende Folge von Untermoduln eines R-Moduls M. Die Inklusionen $M_j \subset M_i$, $i \leq j$ definieren ein durch $\mathbb{N}$ indiziertes projektives System.
2) $I = \mathbb{N}$, p Primzahl.

$$M_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\,, \quad \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z},\ i \leq j,$$

die kanonische Projektion.
3) $I = \mathbb{N}$ mit multiplikativer Anordnung $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, und für $i \mid j$ betrachten wir die kanonische Projektion $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$.

Definition 6.20.

$$\varprojlim_{i\in I} M_i = \left\{ (m_i) \in \prod_{i\in I} M_i \mid \varphi_{ij}(m_j) = m_i \quad \forall\, i \le j \right\}$$

heißt der **projektive Limes** des projektiven Systems $(M_i)_{i\in I}$.

Bemerkungen 6.21. • $\varprojlim_{i\in I} M_i$ ist ein R-Untermodul von $\prod\limits_{i\in I} M_i$.
• die Projektionen definieren natürliche Homomorphismen

$$\varphi_j : \varprojlim_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$$

für alle $j \in I$.

Satz 6.22. *Das Paar*

$$(M = \varprojlim_{i\in I} M_i,\ (\varphi_i)_{i\in I})$$

erfüllt die folgende Universaleigenschaft:

Sei N ein R-Modul und $\psi_i : N \longrightarrow M_i$, $i \in I$, Homomorphismen, so dass für $i \le j$ gilt: $\psi_i = \varphi_{ij} \circ \psi_j$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter R-Modulhomomorphismus $\psi : N \longrightarrow M$ mit $\psi_i = \varphi_i \circ \psi$ für alle $i \in I$.

Beweis. Die ψ_i definieren einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $N \to \prod\limits_{i\in I} M_i$, dessen Bild in $\varprojlim_{i\in I} M_i$ liegt. □

Beispiele 6.23. • 6.19, 1) $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ Untermoduln $\Longrightarrow$

$$\varprojlim_{i\in \mathbb{N}} M_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i.$$

• 6.19, 2) der projektive Limes heißt $\mathbb{Z}_p$.
• 6.19, 3) der projektive Limes heißt $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Die Definitionen der Begriffe „Homomorphismus projektiver Systeme“ und „exakte Folge projektiver Systeme“ sind offensichtlich. Ein Homomorphismus $(f_i)_{i\in I} : (M_i) \to (N_i)$ projektiver Systeme induziert einen Homomorphismus

$$f : \varprojlim_{i\in I} M_i \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} N_i$$

im projektiven Limes.

Satz 6.24. *Sei*

$$0 \longrightarrow (M_i') \xrightarrow{(f_i)} (M_i) \xrightarrow{(g_i)} (M_i'')$$

eine exakte Folge projektiver Systeme. Dann ist die Folge

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} M_i' \xrightarrow{f} \varprojlim_{i\in I} M_i \xrightarrow{g} \varprojlim_{i\in I} M_i''$$

exakt.

Beweis. f ist injektiv wegen des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim M_i' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & \prod_i M_i' \arrow[d, hook] \\
\varprojlim M_i \arrow[r, hook] & \prod_i M_i
\end{tikzcd}$$

und $g \circ f = 0$ ist klar. Wir fassen die M_i' und $\varprojlim M_i'$ über f_i und f als Untermoduln von M_i und $\varprojlim M_i$ auf. Sei $m = (m_i) \in \ker(g)$. Dann gilt $m_i \in \ker(g_i) = M_i'$ für alle i. Deshalb gilt $m \in \varprojlim M_i'$. □

Bemerkung 6.25. Die Exaktheit nach rechts wird nicht notwendig erhalten.

Beispiel 6.26. Wir betrachten die exakten Folgen projektiver Systeme (über $\mathbb{N}$ indiziert)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n+1}"] \arrow[d, "\cdot p"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^{n}\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Das System links ist über die Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
M_{n+1} = \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n+1}", "\sim"'] \arrow[d, "\cdot p"] & p^{n+1}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \arrow[d, hook] \\
M_n = \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n}", "\sim"'] & p^{n}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

isomorph zum projektiven System

$$p\mathbb{Z} \supset p^2\mathbb{Z} \supset \dots$$

ineinander enthaltener Untergruppen von $\mathbb{Z}$. Daher ist der projektive Limes isomorph zu

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n\mathbb{Z} = 0.$$

Wir erhalten im projektiven Limes die Folge

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$$

und sehen so, dass $\mathbb{Z}$ injektiv in $\mathbb{Z}_p$ liegt. Aber es existieren Elemente in $\mathbb{Z}_p$, die nicht in $\mathbb{Z}$ liegen (siehe Übungsaufgaben). Daher werden Surjektionen beim Übergang zum projektiven Limes nicht notwendig erhalten.

Lemma 6.27. *Sei $J \subset I$ eine kofinale Teilmenge. Dann ist für jedes projektive System $(M_i)_{i\in I}$ die natürliche Abbildung*

$$\varprojlim_{i\in I} M_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{j\in J} M_j$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Für ein

$$(m_i)_{i\in I} \in \varprojlim_{i\in I} M_i = \{\prod_{i\in I} M_i \mid \varphi_{ii'}(m_{i'}) = m_i \quad \forall\, i \le i'\}$$

ergeben sich die m_i für $i \in I \smallsetminus J$ eindeutig aus den m_j für $j \in J$, da nämlich J kofinal in I ist. □

Bemerkung 6.28. Man kann direkte und projektive Limites auch von Systemen von Mengen, Gruppen und Ringen bilden. Die Konstruktionen und universellen Eigenschaften bleiben die gleichen und kommutieren mit dem Vergessen von Struktur.

7 Lokalisierung

Sei A ein kommutativer Ring mit 1.

Definition 7.1. Eine Teilmenge $S \subset A$ heißt **multiplikativ abgeschlossen**, wenn $1 \in S$ und es gilt $s, s' \in S \Rightarrow ss' \in S$.

Problem. Die Relation $\sim$ auf $A \times S$ mit $(a, s) \sim (a', s') \Longleftrightarrow as' - a's = 0$ ist im Allgemeinen **keine** Äquivalenzrelation (nur wenn A nullteilerfrei).

Definition 7.2. Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Die Lokalisierung $S^{-1}A$ ist definiert durch

$$S^{-1}A = A \times S/\sim$$

mit

$$(a,s) \sim (a',s') \overset{df}{=} \exists s'' \in S \text{ mit } s''(as' - a's) = 0.$$

$S^{-1}A$ ist ein kommutativer Ring mit 1 durch

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'},$$

wobei $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ die Äquivalenzklasse von (a,s) bezüglich $\sim$ bezeichnet.

Wir zeigen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Dass die algebraischen Operationen auf $S^{-1}A$ wohldefiniert sind, lassen wir als Übungsaufgabe.

- $\sim$ reflexiv und symmetrisch: klar.
- Transitivität: es gelte $(a,s) \sim (a',s')$ und $(a',s') \sim (a'',s'')$. Also existieren $t_1, t_2 \in S$ mit $t_1(as' - a's) = 0 = t_2(a's'' - a''s')$.
  Hieraus folgt
  $0 = t_1t_2s''(as' - a's) + t_1t_2s(a's'' - a''s') = t_1t_2s'(as'' - a''s)$, also $(a,s) \sim (a'',s'')$.

Beispiele 7.3.

- Sei $x \in A$ ein Element. Dann ist $S = \{1, x, x^2 \dots\}$ multiplikativ abgeschlossen. Man setzt $A_x = S^{-1}A$.
- Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist (dies ist sogar gdw.) $S = A \smallsetminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen. Man setzt $A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$ (die Lokalisierung von A bei $\mathfrak{p}$).
- Sei A nullteilerfrei, also (0) ist Primideal:

  $$Q(A) := A_{(0)} = (A \smallsetminus \{0\})^{-1}A$$

  ist per definitionem der Quotientenkörper von A.

Lemma 7.4. *Es gilt*

$$S^{-1}A = 0 \Longleftrightarrow 0 \in S.$$

Beweis. $\Leftarrow$ Sei $0 \in S$. Wegen $0 \cdot (as' - a's) = 0$ für alle $a, a' \in A$, $s, s' \in S$, besteht $S^{-1}A$ aus genau einem Element.
$\Rightarrow$ Gilt $S^{-1}A = 0$, so folgt insbesondere $(1,1) \sim (0,1)$. Also existiert $s \in S$ mit $0 = s(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = s$. $\square$

Korollar 7.5. $A_x = 0 \Longleftrightarrow x$ *nilpotent.*

Die Abbildung $\varphi : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ ist ein Ringhomomorphismus. Wegen $\frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} = \frac{1}{1}$ bildet sich jedes $s \in S$ nach $(S^{-1}A)^\times$ ab.

Lemma 7.6. *(Universalaleigenschaft der Lokalisierung)*
Zu jedem Ringhomomorphismus $f : A \to B$ mit $f(s) \in B^\times$ für alle $s \in S$ existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $g : S^{-1}A \to B$ mit $f = g \circ \varphi$.

Beweis. Existenz: Setze $g(\frac{a}{s}) = f(s)^{-1} \cdot f(a)$
Wohldefiniertheit: Übungsaufgabe.
Eindeutigkeit: Für g ist die obige Gleichung zwingend

$$\begin{aligned} g(\tfrac{a}{s}) = g(\tfrac{1}{s} \cdot a) &= g(\tfrac{1}{s})g(a) \\ &= g(s)^{-1}g(a) \\ &= f(s)^{-1}f(a) \end{aligned}$$

□

Ist A nullteilerfrei und sind $S \subset T$ multiplikativ abgeschlossene Teilmengen mit $0 \notin T$, so ist der natürliche Homomorphismus

$$\phi_{S,T} : S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}A$$

injektiv. Grund $\phi_{S,T}(\frac{a}{s}) = 0 \Rightarrow \exists t \in T$:

$$ta = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow \frac{a}{s} = 0.$$

Für $T = A \smallsetminus \{0\}$ erhalten wir

$$S^{-1}A \subset Q(A) \quad \text{für} \quad S \subset A \smallsetminus \{0\}.$$

Als Teilring eines Körpers ist $S^{-1}A$ wieder nullteilerfrei.

Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ setzen wir

$$S^{-1}\mathfrak{a} = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in \mathfrak{a}, s \in S \right\}.$$

Dies ist ein Ideal in $S^{-1}A$. Es gilt bzgl. $\phi : A \to S^{-1}A$, dass $\mathfrak{a}^e = S^{-1}\mathfrak{a}$.
Grund: jedes Element in $\mathfrak{a}^e$ ist von der Form $\sum_{\text{endl.}} \frac{a_i}{s_i}$, $a_i \in \mathfrak{a}$, $s_i \in S$. Suche Hauptnenner.

Satz 7.7. *Für den kanonischen Homomorphismus $\phi : A \to S^{-1}A$ gilt:*

(i) *Jedes Ideal in $S^{-1}A$ ist von der Form $\mathfrak{a}^e = S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.*

(ii) *Für $\mathfrak{a} \subset A$ gilt*

$$\mathfrak{a}^{ec} = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s).$$

Insbesondere gilt $\mathfrak{a}^e = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap S \neq \varnothing$.

(iii) *$\mathfrak{a} \subset A$ ist Kontraktion eines Ideals in $S^{-1}A \Leftrightarrow$ für kein $s \in S$ ist $s + \mathfrak{a}$ Nullteiler in $A/\mathfrak{a}$.*

(iv) *Die Zuordnung* $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$ *gibt eine Bijektion zwischen den Primidealen in* $S^{-1}A$ *und den Primidealen* $\mathfrak{p} \subset A$ *mit* $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$.

(v) S^{-1} *kommutiert mit endlichen Summen, endlichen Produkten und endlichen Durchschnitten von Idealen, sowie mit Radikalbildung.*

Beweis. (i) Sei $\mathfrak{b} \subset S^{-1}A$ ein Ideal und sei $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$. Dann gilt $\frac{x}{1} = \frac{s}{1} \cdot \frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$, also $x \in \mathfrak{b}^c$ also $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}^{ce}$. Dies zeigt $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}^{ce}$. Die Inklusion $\mathfrak{b}^{ce} \subset \mathfrak{b}$ gilt nach Satz 1.31, also gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{ce}$. Insbesondere ist jedes Ideal in $S^{-1}A$ erweitert.
(ii) Für $x \in \bigcup_{s \in S}(\mathfrak{a} : s)$ gilt $sx \in \mathfrak{a}$ für ein $s \in S$, also $\frac{x}{1} = \frac{sx}{s} \in \mathfrak{a}^e$, und somit $x \in \mathfrak{a}^{ec}$. Sei nun $x \in \mathfrak{a}^{ec} = (S^{-1}\mathfrak{a})^c$. Dann gilt $\frac{x}{1} = \frac{a}{s}$ für gewisse $a \in \mathfrak{a}$, $s \in S$ $\Rightarrow (xs - a)t = 0$ für ein $t \in S \Rightarrow xst = at \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \bigcup_{s \in S}(\mathfrak{a} : s)$.
(iii) $\mathfrak{a} \in C \overset{1.31}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathfrak{a}^{ec} \subset \mathfrak{a} \overset{\text{(ii)}}{\Leftrightarrow} (sx \in \mathfrak{a}$ für ein $s \in S \Rightarrow x \in \mathfrak{a}) \Leftrightarrow$ kein $s \in S$ ist Nullteiler in $A/\mathfrak{a}$.
(iv) Sei $\mathfrak{q} \subset S^{-1}A$ ein Primideal. Dann ist $\mathfrak{q}^c \subset A$ ein Primideal mit $\mathfrak{q}^c \cap S = \varnothing$ (ansonsten existierte $s \in S$ mit $\frac{s}{1} \in \mathfrak{q}$, also $\frac{1}{1} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} \in \mathfrak{q}$ Widerspruch.). Nach (i) ist $\mathfrak{q}$ selbst eine Erweiterung. Nach Satz 1.31 folgt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{ce}$. Daher ist die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Primideale in} \\ S^{-1}A \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}^c} \left\{ \begin{array}{c} \text{Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit} \\ \mathfrak{p} \cap S = \varnothing \end{array} \right\}$$

injektiv. Bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ und $\bar{S}$ das Bild von S in $A/\mathfrak{p}$. Die natürliche Abbildung $S^{-1}A \to \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p})$, $\frac{a}{s} \mapsto \frac{\bar{a}}{\bar{s}}$ induziert den Isomorphismus

$$S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p}).$$

Wegen $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ folgt $0 \notin \bar{S}$, also $\overline{S} \subset A/\mathfrak{p} \smallsetminus \{0\}$ und weil $A/\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist, ist $\bar{S}^{-1}A/\mathfrak{p} \subset Q(A/\mathfrak{p})$ auch nullteilerfrei. Daher ist $\mathfrak{p}^e = S^{-1}\mathfrak{p}$ ein Primideal in $S^{-1}A$.

Schließlich gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$ wegen

$$x \in \mathfrak{p}^{ec} \overset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow} \exists s \in S \text{ mit } sx \in \mathfrak{p} \overset{\mathfrak{p} \cap S = \varnothing}{\Longleftrightarrow} x \in \mathfrak{p}.$$

Dies zeigt die Surjektivität.
(v) Unter Beachtung von $S^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^e$ folgt dies aus Lemma 1.21 und Lemma 1.23. □

Korollar 7.8. *Ist* $\mathfrak{N}$ *das Nilradikal von* A, *so ist* $S^{-1}\mathfrak{N}$ *das Nilradikal von* $S^{-1}A$.

Beweis. $\mathfrak{N} = r((0))$. □

Korollar 7.9. *Ist* $\mathfrak{p} \subset A$ *ein Primideal, so ist* $A_\mathfrak{p}$ *ein lokaler Ring mit Maximalideal* $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. *Die Primideale in* $A_\mathfrak{p}$ *stehen in* $1:1$ *Korrespondenz zu den Primidealen in* A, *die in* $\mathfrak{p}$ *enthalten sind.*

Beweis. Setze $S = A \smallsetminus \mathfrak{p}$ in Satz 7.7 (iv). $\square$

Satz 7.10. *Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ für ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ genau dann, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$.*

Beweis. Dieselbe Aussage für (nicht notwendig Prim-) Ideale ist Satz 1.31. Es verbleibt daher zu zeigen, dass ein Primideal, das Kontraktion eines Ideals ist, auch Kontraktion eines Primideals ist. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein kontrahiertes Primideal. Nach Satz 1.31 gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$. Sei S das Bild von $A \smallsetminus \mathfrak{p}$ in B. Beachte: S ist multiplikativ abgeschlossen. Wegen $\varnothing = \mathfrak{p} \cap (A \smallsetminus \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{ec} \cap (A \smallsetminus \mathfrak{p})$ folgt $\mathfrak{p}^e \cap S = \varnothing$. Daher ist $S^{-1}(\mathfrak{p}^e) \subset S^{-1}B$ ein Ideal $\neq (1)$. Nach Korollar 1.6 existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$ mit $S^{-1}(\mathfrak{p}^e) \subset \mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{q}$ das Urbild von $\mathfrak{m}$ in B. Dann ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal mit $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^e$, $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$. Wir erhalten $\mathfrak{q}^c \supset \mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}^c \cap (A \smallsetminus \mathfrak{p}) = \varnothing$, also $\mathfrak{q}^c \subset \mathfrak{p}$. Wir erhalten $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$. $\square$

Korollar 7.11. *Sei $f : A \to B$ ein flacher Ringhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*
(i) *f ist treuflach.*
(ii) *jedes Primideal in A ist Urbild eines Primideals in B.*
(iii) *jedes Maximalideal in A ist Urbild eines Maximalideals in B.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Satz 5.12 gilt $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}\ \forall \mathfrak{p}$. Nach Satz 7.10 existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$
(i) $\Rightarrow$ (iii). Nach Satz 5.12 gilt $\mathfrak{m}^e \neq (1)$. Sei $\mathfrak{n} \subset B$ ein Maximalideal mit $\mathfrak{m}^e \subset \mathfrak{n}$. Dann gilt $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}^c \subsetneqq (1)$, also $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^c$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (i). Nach Satz 1.31 (iii) gilt $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ für jedes Primideal (bzw. $\mathfrak{m}^{ec} = \mathfrak{m}$ für jedes Maximalideal). Nach Satz 5.12 folgt die Treuflachheit. $\square$

Lokalisierung von Moduln

Sei A ein kommutativer Ring und $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

Definition 7.12. Für einen A-Modul M sei $S^{-1}M = M \times S/\sim$ mit

$$(m, s) \sim (m', s') \iff \exists\, t \in S : t(s'm - sm') = 0.$$

Die Äquivalenzklasse von (m, s) wird mit $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ bezeichnet.

$S^{-1}M$ wird zum $S^{-1}A$-Modul durch:
- $\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm+sm'}{ss'}$
- $\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{s'} = \frac{am}{ss'}$.

Ein Homomorphismus $f : M' \to M$ induziert einen Homomorphismus $S^{-1}f : S^{-1}M' \to S^{-1}M$ durch $S^{-1}f(\frac{m'}{s}) := \frac{f(m')}{s}$.

Satz 7.13. *Die Operation S^{-1} ist exakt, d.h. für jede exakte Folge $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ von A-Moduln ist die Folge von $S^{-1}A$-Moduln $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ exakt.*

Beweis. Wegen $g \circ f = 0$ folgt $S^{-1}g \circ S^{-1}f = 0$, also $\mathrm{im}(S^{-1}f) \subset \ker(S^{-1}g)$. Sei $\frac{m}{s} \in \ker(S^{-1}f)$. Dann gilt $\frac{g(m)}{s} = 0$ in $S^{-1}M''$, daher existiert ein $t \in S$ mit $tg(m) = 0$ in M. Also $tm \in \ker(g) = \mathrm{im}(f)$. Wähle $m' \in M'$ mit $f(m') = tm$. Dann gilt $S^{-1}f\left(\frac{m'}{ts}\right) = \frac{m}{s} \Longrightarrow \ker(S^{-1}g) = \mathrm{im}(S^{-1}f)$. □

Korollar 7.14. *Sei M ein A-Modul und $N, P \subset M$ Untermoduln. Dann gilt*

(i) $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P$.
(ii) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$.
(iii) $S^{-1}M/S^{-1}N \cong S^{-1}(M/N)$.

Beweis. Wegen der Exaktheit der Lokalisierung sind $S^{-1}N$, $S^{-1}P$, ... Untermoduln von $S^{-1}M$.
(i) Es ist $S^{-1}(N+P)$ die Menge aller Elemente der Form $\frac{n+p}{s} \in S^{-1}M$ mit $n \in N$, $p \in P$, $s \in S$. Dies ist offensichtlich ein Untermodul von $S^{-1}N + S^{-1}P$, welches die Menge aller Elemente der Form $\frac{n}{s} + \frac{p}{t}$ mit $n \in N$, $p \in P$, $s, t \in S$ ist. Nun gilt

$$\frac{n}{s} + \frac{p}{t} = \frac{tn + sp}{st} \in S^{-1}(N + P),$$

was Gleichheit zeigt.
(ii) Hier ist die Inklusion $S^{-1}(N \cap P) \subset S^{-1}N \cap S^{-1}P$ offensichtlich. Sei nun $x \in S^{-1}N \cap S^{-1}P$, d.h. es gibt Darstellungen $x = \frac{n}{s} = \frac{p}{t}$, $n \in N$, $p \in P$, $s, t \in S$. Nach Definition existiert $r \in S$ mit $rtn = rsp \in N \cap P$. Es gilt daher $x = \frac{rtn}{rts} \in S^{-1}(N \cap P)$.
Für (iii) wendet man die Exaktheit der Lokalisierung Satz 7.13 auf die exakte Folge $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ an. □

Satz 7.15. *Es existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}A \otimes_A M & \xrightarrow{\sim} & S^{-1}M \\ \frac{a}{s} \otimes m & \longmapsto & \frac{am}{s} \end{array}$$

Beweis. Die Abbildung $S^{-1}A \times M \longrightarrow S^{-1}M$, $\left(\frac{a}{s}, m\right) \longmapsto \frac{am}{s}$ ist A-bilinear und induziert den Homomorphismus im Satz. Nennen wir ihn f. Wegen $\frac{m}{s} = f(\frac{1}{s} \otimes m)$ ist f surjektiv. Sei nun

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \in S^{-1}A \otimes_A M$$

ein beliebiges Element und setze $s = \prod_{i=1}^{n} s_i$ und $t_i = \prod_{j \neq i} s_j$.

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m = \frac{1}{s} \otimes \sum_{i=1}^{n} a_i t_i m_i.$$

Daher ist jedes Element in $S^{-1}A \otimes_A M$ von der Form $\frac{1}{s} \otimes m$.

Sei nun $\frac{1}{s} \otimes m \in \ker(f)$. Dann gilt $\frac{m}{s} = 0$ in $S^{-1}M \Longrightarrow tm = 0$ für ein $t \in S \Longrightarrow \frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0$. Dies zeigt die Injektivität. □

Korollar 7.16. *$S^{-1}A$ ist eine flache A-Algebra.*

Beweis. Nach Satz 7.15 ist Tensorieren mit $S^{-1}A$ dasselbe, wie nach S zu Lokalisieren. Nach Satz 7.13 ist Lokalisierung exakt. □

Lemma 7.17. *Für A-Moduln M, N existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N & \xrightarrow{\sim} & S^{-1}(M \otimes_A N) \\ \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} & \longmapsto & \frac{m \otimes n}{st} \end{array}$$

Beweis. Nach Satz 7.15 haben wir

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \cong (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_{S^{-1}A} \otimes (S^{-1}A \otimes_A N).$$

Nach Satz 3.14(ii) ist dies isomorph zu $S^{-1}A \otimes_A M \otimes_A N$, was wiederum nach Satz 7.15 isomorph zu $S^{-1}(M \otimes_A N)$ ist. Die Gesamtabbildung ist die angegebene. □

Definition 7.18. Eine Eigenschaft E von A oder eines A-Moduls M heißt **lokale Eigenschaft** wenn gilt

A (oder M) erfüllt $E \Leftrightarrow A_{\mathfrak{p}}$ (oder $M_{\mathfrak{p}}$) erfüllt E für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$.

Satz 7.19. *Sei M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) $M = 0$.
(ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p}$.
(iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *für alle Maximalideale* $\mathfrak{m}$.

Hierbei ist $M_{\mathfrak{p}} = S^{-1}M$ mit $S = A \smallsetminus \mathfrak{p}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $0 \neq x \in M$. Wir zeigen: es existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ mit $\frac{x}{1} \neq 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$. Wir betrachten den Annullator $\mathrm{Ann}(x) := \{a \in A \mid ax = 0\}$. Dies ist ein Ideal $\neq A$, daher existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ mit $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathfrak{m}$. Wäre nun $\frac{x}{1} = 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$, so existierte ein $s \in A \smallsetminus \mathfrak{m}$ mit $sx = 0$. Aber $s \notin \mathrm{Ann}(x)$. Widerspruch. □

Satz 7.20. *Sei $M' \to M \to M''$ eine Folge von A-Moduln. Dann sind äquivalent:*

(i) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *exakt.*

(ii) $M'_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \xrightarrow{g_\mathfrak{p}} M''_\mathfrak{p}$ *exakt* $\forall\, \mathfrak{p}$

(iii) $M'_\mathfrak{m} \xrightarrow{f_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \xrightarrow{g_\mathfrak{m}} M''_\mathfrak{m}$ *exakt* $\forall\, \mathfrak{m}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt aus der Exaktheit der Lokalisierung und (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Da Lokalisierung exakt ist, kommutiert sie mit Kernen, Kokernen und Bildern. Wir erhalten $0 = \operatorname{im}(g_\mathfrak{m} \circ f_\mathfrak{m}) = \operatorname{im}(g \circ f)_\mathfrak{m}\ \forall\, \mathfrak{m}$. Nach Satz 7.19 gilt also $g \circ f = 0$. Wir erhalten $\operatorname{im}(f) \subset \ker(g)$ und wollen Gleichheit zeigen. Sei $N = \ker(g)/\operatorname{im}(f)$. Wegen der Exaktheit der Lokalisierung gilt $N_\mathfrak{m} = \ker(g_\mathfrak{m})/\operatorname{im}(f_\mathfrak{m}) = 0\ \forall\, \mathfrak{m}$, also $N = 0$. □

Korollar 7.21. (i) $f : M \to N$ *ist injektiv* $\Leftrightarrow f_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ *ist injektiv* $\forall\, \mathfrak{m}$.

(ii) $f : M \to N$ *ist surjektiv* $\Longleftrightarrow f_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ *ist surjektiv* $\forall\, \mathfrak{m}$.

Beweis. Man wende Satz 7.20 auf die Folge $0 \to M \to N$ bzw. auf die Folge $M \to N \to 0$ an. □

Korollar 7.22. *Es sind äquivalent:*

(i) M *ist flacher A-Modul.*
(ii) $M_\mathfrak{p}$ *ist flacher $A_\mathfrak{p}$-Modul* $\forall\, \mathfrak{p}$.
(iii) $M_\mathfrak{m}$ *ist flacher $A_\mathfrak{m}$-Modul* $\forall\, \mathfrak{m}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Für jeden $A_\mathfrak{p}$-Modul N gilt nach Satz 7.15: $N \otimes_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = N \otimes_{A_\mathfrak{p}} \otimes A_\mathfrak{p} \otimes_A M \overset{3.14}{=} N \otimes_A M$. Daher ist $M_\mathfrak{p}$ flacher $A_\mathfrak{p}$-Modul wenn M flacher A-Modul ist.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $N' \to N \to N''$ exakt. Wegen $(N \otimes_A M)_\mathfrak{m} = N_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}$ ist für jedes $\mathfrak{m}$ die Folge

$$(N' \otimes_A M)_\mathfrak{m} \longrightarrow (N \otimes_A M)_\mathfrak{m} \longrightarrow (N'' \otimes_A M)_\mathfrak{m}$$

exakt, also nach Satz 7.20 auch $N' \otimes_A M \longrightarrow N' \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M$. □

Später werden wir zeigen, dass endlich erzeugte flache Moduln über einem lokalen Ring frei sind. Korollar 7.22 ist für endlich erzeugte Moduln also zu lesen als: „flach = lokal frei“.

Sei A nullteilerfrei und M ein A-Modul.

Definition 7.23. $TM = \{x \in M \mid ax = 0 \text{ für ein } a \neq 0\}$

heißt der **Torsionsuntermodul** von M. M heißt **torsionsfrei**, wenn $TM = 0$.

Lemma 7.24. *Sei A nullteilerfrei. Dann ist jeder flache A-Modul torsionsfrei.*

Beweis. Sei M ein flacher A-Modul. Für $0 \neq a \in A$ tensorieren wir die exakte Folge $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot a} A$ mit M und erhalten die exakte Folge

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot a} M.$$

Die Exaktheit bedeutet, dass $ax = 0$ nur für $x = 0$ auftritt. Da $a \neq 0$ beliebig war, ist M torsionsfrei. □

Mit A sind auch die Lokalisierungen $A_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei und wir können somit auch über Torsionsfreiheit über den $A_\mathfrak{p}$ sprechen.

Satz 7.25. *Es sind äquivalent:*

(i) *M ist torsionsfrei.*
(ii) *$M_\mathfrak{p}$ ist torsionsfrei $\forall\, \mathfrak{p}$.*
(iii) *$M_\mathfrak{m}$ ist torsionsfrei $\forall\, \mathfrak{m}$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Es sei $S = A \smallsetminus \mathfrak{p}$ und $\frac{x}{s} \in M_\mathfrak{p}$ ein Torsionselement, d.h. es existiert $a \neq 0$, $t \in S$ mit $\frac{a}{t}\frac{x}{s} = 0$. Daher existiert ein $r \in S$ mit $rax = 0$. Folglich gilt $x \in TM = 0$, d.h. $x = 0$ und $M_\mathfrak{p}$ ist torsionsfrei.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $M_\mathfrak{m}$ torsionsfrei $\forall\, \mathfrak{m}$ und $0 \neq x \in TM$. Dann existiert ein $a \neq 0$ mit $ax = 0$. Wähle ein Maximalideal $\mathfrak{m} \supset \mathrm{Ann}(x)$. Es gilt $\frac{a}{1} \neq 0$ in $A_\mathfrak{m}$ und $\frac{a}{1} \cdot \frac{x}{1} = 0$ in $M_\mathfrak{m}$, also $\frac{x}{1} = 0$ in $M_\mathfrak{m}$, also existiert $s \in A \smallsetminus \mathfrak{m}$ mit $sx = 0$. Aber $s \notin \mathrm{Ann}(x)$. Widerspruch. □

Teil 2: Homologische Algebra

8 Injektive und projektive Moduln

Es sei R ein Ring. Im folgenden verstehen wir unter einem nicht weiter spezifizierten R-Modul implizit stets einen R-Links-Modul. Alle Ergebnisse dieses Abschnitts gelten auch für R-Rechts-Moduln.

Definition 8.1. (i) Ein R-Modul I heißt **injektiver** R-Modul, wenn für jede Injektion $i : M' \subset M$ die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}_R(M, I) \to \mathrm{Hom}_R(M', I)$ surjektiv ist. M.a.W.: Jeder R-Modulhomomorphismus $M' \to I$ besitzt eine Fortsetzung auf M.
(ii) Ein R-Modul P heißt **projektiver** R-Modul, wenn für jede Surjektion $N \twoheadrightarrow N''$ die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}_R(P, N) \to \mathrm{Hom}_R(P, N'')$ surjektiv ist. M.a.W.: Jeder R-Modulhomomorphismus $\varphi : P \to N''$ besitzt eine Hebung nach N.

Wegen der Linksexaktheit des Hom-Funktors (siehe Satz 4.5) kann man dies auch so sagen:

I ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Hom}_R(-, I)$ exakte Folgen von R-Moduln in exakte Folgen abelscher Gruppen überführt.

P ist genau dann projektiv, wenn $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ exakte Folgen von R-Moduln in exakte Folgen abelscher Gruppen überführt.

Lemma 8.2. *Für eine kurze exakte Folge*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) *es existiert ein Untermodul $N \subset M$ mit $j|_N : N \xrightarrow{\sim} M''$.*

(ii) *es existiert ein Homomorphismus $p : M \to M'$ mit $p \circ i = \mathrm{id}_{M'}$.*

(iii) *es existiert ein Homomorphismus $s : M'' \to M$ mit $j \circ s = \mathrm{id}_{M''}$.*

(iv) *Es gibt einen Isomorphismus zwischen exakten Folgen*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi", "\wr"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i'"] & M' \oplus M'' \arrow[r, "p''"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Man sagt dann, dass die Folge $(*)$ **zerfällt**. *In diesem Fall gilt insbesondere $M \cong M' \oplus M''$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (iii): Definiere s als die Komposition $M'' \xrightarrow{(j|_N)^{-1}} N \overset{kan}{\hookrightarrow} M$.
(iv) $\Rightarrow$ (i): Setze $N = \varphi^{-1}(0 \oplus M'')$.
(iv) $\Rightarrow$ (ii): Definiere p als Komposition $M \xrightarrow{\varphi} M' \oplus M'' \overset{p'}{\twoheadrightarrow} M'$.
(ii) $\Rightarrow$ (iv): Definiere $\varphi = (i' \circ p) + i'' \circ j$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Definiere $\psi = i \circ p' + s \circ p'' : M' \oplus M'' \to M$. Nach dem 5er-Lemma ist ψ ein Isomorphismus und man definiert $\varphi = \psi^{-1}$. □

Lemma 8.3. (i) *Ein R-Modul I ist genau dann injektiv, wenn jede kurze exakte Folge*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

mit R-Moduln M, N zerfällt.
(ii) *Ein R-Modul P ist genau dann projektiv, wenn jede kurze exakte Folge*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

mit R-Moduln M, N zerfällt.

Beweis. (i) Sei I injektiv und $0 \to I \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} N \to 0$ exakt. Per definitionem existiert ein $p : M \to I$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, dashed, "p"] & \\ I \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\mathrm{id}_I"'] & I \end{tikzcd}$$

kommutiert, also $p \circ i = \mathrm{id}_I$, und die Folge zerfällt.
Sei umgekehrt I mit der beschriebenen Eigenschaft gegeben, $M' \subset M$ R-Moduln und $\varphi : M' \to I$ ein R-Homomorphismus. Wir setzen

$$J := I \times M / \{(-\varphi(m'), m') \mid m' \in M'\}.$$

Die natürliche Abbildung $\psi : I \to J$, $x \mapsto \overline{(x, 0)}$ ist injektiv, denn wir haben: $\overline{(x, 0)} = 0$ in $J \Longrightarrow x = -\varphi(m')$, $0 = m' \Longrightarrow x = -\varphi(0) = 0$.
Nach Annahme zerfällt die exakte Folge $0 \to I \xrightarrow{\psi} J \to \operatorname{coker}(\psi) \to 0$, also existiert ein $p : J \to I$ mit $p \circ \psi = \mathrm{id}_I$. Sei nun $\tau : M \to J$ die natürliche Abbildung $m \mapsto \overline{(0, m)}$. In J gilt

$$\overline{(\varphi(m'), 0)} = \overline{(0, m')}$$

Daher gilt für jedes $m' \in M'$:

$$p \circ \tau(m') = p(\overline{(0, m')}) = p((\overline{\varphi(m'), 0}) = p(\psi(\varphi(m')) = \varphi(m').$$

Daher setzt $p \circ \tau$ die Abbildung φ fort und I ist injektiver R-Modul.

Bild:
$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[d, "\tau"] \\ I \arrow[r, hook, "\psi"'] & J \arrow[l, bend right, "p"'] \end{tikzcd}$$

(ii) Analog (Pfeile umdrehen) Übungsaufgabe. □

Lemma 8.4. (i) $\prod_{i\in I} M_i$ *ist genau dann injektiv, wenn* M_i *injektiv für alle* $i \in I$.

(ii) $\bigoplus_{i\in I} P_i$ *ist genau dann projektiv, wenn* P_i *projektiv für alle* $i \in I$.

Beweis. Wir beachten nacheinander, dass:

- $\mathrm{Hom}_R(-, \prod_{i\in I} M_i) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(-, M_i)$,
- $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} P_i, -) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(P_i, -)$
- ein Produkt von Folgen ist genau dann exakt, wenn alle einzelnen Folgen exakt sind (Lemma 4.3).

Daher folgt Lemma 8.4 aus den Definitionen. □

Satz 8.5. *Ein Modul ist genau dann projektiv, wenn er direkter Summand in einem freien Modul ist.*

Beweis. Wegen $\mathrm{Hom}_R(R, M) = M$ ist R projektiver R-Modul. Wegen Lemma 8.4 sind somit freie Moduln projektiv. Nochmalige Anwendung von Lemma 8.4 ergibt, dass direkte Summanden in freien R-Moduln projektiv sind. Ist nun P projektiv, so wähle freien R-Modul F und Surjektion $F \twoheadrightarrow P \overset{8.3}{\Longrightarrow} P$ ist direkter Summand in F. □

Korollar 8.6. *Jeder R-Modul ist Faktormodul eines projektiven R-Moduls.*

Beweis. Jeder Modul ist Faktormodul eines freien Moduls. □

Satz 8.7. *Sei A ein kommutativer lokaler Ring. Dann ist jeder endlich erzeugte projektive A-Modul frei.*

Beweis. Sei P endlich erzeugt, projektiv und $x_1, \ldots, x_n \in P$ so gewählt, dass $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in P/\mathfrak{m}P$ eine $A/\mathfrak{m}$-Vektorraumbasis bilden. Wir betrachten den Homomorphismus $\pi : A^n \to P$, der die Basiselemente von A^n auf $x_1, \ldots, x_n$ schickt. Nach dem Nakayama-Lemma ist π surjektiv. Sei $Q = \ker(\pi)$. Da P projektiv ist, gilt

$$A^n \cong P \oplus Q.$$

Insbesondere ist Q endlich erzeugt (weil Faktormodul von A^n) und wir erhalten $\mathfrak{a}Q = \mathfrak{a}A^n \cap Q$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.

Für $x \in Q$ gilt $\pi(x) = 0$. Da nach Konstruktion $\pi : (A/\mathfrak{m})^n \xrightarrow{\sim} P/\mathfrak{m}P$ ein Isomorphismus ist, folgt $x \in \mathfrak{m}A^n \cap Q = \mathfrak{m}Q$. Folglich gilt $Q = \mathfrak{m}Q$, und daher $Q = 0$ nach dem Nakayama-Lemma. Wir erhalten $P \cong A^n$. □

Satz 8.8. *Sei A ein Hauptidealring. Dann ist jeder projektive A-Modul frei.*

Beweis. Über einem Hauptidealring ist jeder Untermodul eines freien Moduls frei. Jeder projektive Modul ist direkter Summand in, also insbesondere Untermodul eines freien Moduls. □

Wie sehen injektive Moduln aus?

Definition 8.9. Sei A kommutativ und nullteilerfrei. Ein A-Modul M heißt **teilbar**, wenn für jedes $a \in A$, $a \neq 0$, die Abbildung $a : M \to M$, $m \mapsto am$, surjektiv ist. M heißt **eindeutig teilbar**, wenn diese Abbildungen sogar Isomorphismen sind.

Bemerkung 8.10. Jeder Faktormodul eines teilbaren Moduls ist teilbar

$$\begin{array}{ccc} M & \twoheadrightarrow & M'' \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ M & \twoheadrightarrow & M''. \end{array}$$

Beispiel 8.11. $A = \mathbb{Z}$: $\mathbb{Q}$ ist eindeutig teilbarer $\mathbb{Z}$-Modul. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist teilbar.

Satz 8.12. *Sei A ein Hauptidealring. Dann sind die injektiven A-Moduln genau die teilbaren A-Moduln.*

Beweis. Sei I injektiv. Die Injektion, $a \neq 0$, $A \overset{\cdot a}{\hookrightarrow} A$ impliziert die Surjektion $I = \mathrm{Hom}(A, I) \overset{\cdot a}{\twoheadrightarrow} I = \mathrm{Hom}(A, I)$. Daher ist I teilbar. (Hier haben wir nur ausgenutzt, dass A nullteilerfrei ist).
Sei nun I teilbar, $M \subset N$ und $\varphi : M \to I$ gegeben. Wir betrachten die Menge Σ aller Paare (M', φ') mit $M \subset M' \subset N$, $\varphi' : M' \to I$ mit $\varphi'_{|M} = \varphi$. Wir geben Σ die Halbordnung $(M', \varphi') \leq (M'', \varphi'')$ falls $M' \subset M''$ und $\phi''|_{M'} = \varphi'$. Nach Zorn's Lemma hat Σ ein maximales Element. Sei (M', φ') maximal. Angenommen $M' \neq N$. Wähle $x \in N \smallsetminus M'$ beliebig und setze $M'' = \langle M', x \rangle$. Wir betrachten die exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow M''/M' \longrightarrow 0.$$

M''/M' ist von $\bar{x} = x + M'$ erzeugt, also zyklisch. Wir betrachten den surjektiven Homomorphismus $\varepsilon : A \twoheadrightarrow M''/M'$, $a \mapsto a\bar{x}$. Ist ε ein Isomorphismus, so ist $M''/M' \cong A$ frei, insbesondere projektiv und es gilt $M'' \cong M' \oplus A$. Dann können wir φ' auf M'' fortsetzen (zum Beispiel indem wir die zweite Komponente auf Null abbilden). Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von (M', φ').

Also ist ε nicht injektiv und es gilt $M''/M' \cong A/(a)$ mit einem Element $0 \neq a \in A$. Insbesondere gilt $ax \in M'$. Da I teilbar ist, existiert ein $y \in I$ mit $ay = \varphi'(ax)$. Wir definieren nun $\varphi'' : M'' \longrightarrow I$ durch

$$\varphi''(z + bx) := \varphi'(z) + by, \quad z \in M',\ b \in A.$$

Dies ist wohldefiniert: gilt $z_1 + b_1x = z_2 + b_2x$, so folgt

$$(b_1 - b_2)x = z_2 - z_1 \in M'$$

und daher $b_1 - b_2 \in (a)$, also $b_1 - b_2 = ac$, $c \in A$. Hieraus folgt $acx = z_2 - z_1 \in M'$ und

$$\begin{aligned}(\varphi'(z_1) + b_1y) - (\varphi'(z_2) + b_2y) &= \varphi'(z_1 - z_2) + cay = \varphi'(z_1 - z_2) + c\varphi'(ax)\\ &= \varphi'(z_1 - z_2) + \varphi'(acx) = \varphi'(z_1 - z_2 + acx) = \varphi'(0) = 0.\end{aligned}$$

Wegen $\varphi''|_{M'} = \varphi'$, erhalten wir einen Widerspruch zur Maximalität von (M', φ'). Es folgt $M' = N$. Daher ist I ist injektiv. □

Korollar 8.13. *$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine injektive abelsche Gruppe.*

$R^* \overset{df}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ wird zum R-(Links-)Modul durch $r\varphi(s) = \varphi(sr)$.

Definition 8.14. Ein R-Modul M heißt **kofrei**, wenn er isomorph zu einem (evtl. unendlichen) Produkt von R^* ist.

Lemma 8.15. *Für jeden R-Modul M existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_R(M, R^*) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Beweis. Die Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_R(M, R^*) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})\\ \varphi & \longmapsto & (m \mapsto \varphi(m)(1))\end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccl}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M, R^*)\\ \psi & \longmapsto & [m \mapsto (\varphi_m : R \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]\\ & & \varphi_m(r) = \psi(rm)\end{array}$$

sind zueinander invers. □

Satz 8.16. *Kofreie R-Moduln sind injektiv.*

Beweis. Nach Lemma 8.4 genügt es z.z., dass R^* injektiv ist. Dies ist äquivalent zur Exaktheit von $\mathrm{Hom}_R(-, R^*)$. Diese folgt aus Lemma 8.15 und weil $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist. □

Lemma 8.17. *Sei M ein R-Modul und $0 \neq m \in M$. Dann existiert ein R-Modulhomomorphismus $\varphi : M \longrightarrow R^*$ mit $\varphi(m) \neq 0$.*

Beweis. Nach Lemma 8.15 (und seinem Beweis) genügt es z.z., dass zu jeder abelschen Gruppe M und zu jedem $0 \neq m \in M$ ein $\mathbb{Z}$-Homomorphismus $\psi : M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\psi(m) \neq 0$ existiert.
Sei $N = \langle m \rangle \subset M$. Dann gilt $N \cong \mathbb{Z}$ oder $N \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$.
In jedem Fall existiert ein Homomorphismus $\psi : N \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\psi(m) \neq 0$. Da $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist, dehnt sich ψ auf ganz M aus. □

Korollar 8.18. *Jeder R-Modul ist Untermodul eines kofreien, also insbesondere eines injektiven R-Moduls.*

Beweis. Wähle gemäß Lemma 8.17 zu jedem $0 \neq m \in M$ ein $\varphi_m : M \longrightarrow R^*$ mit $\varphi_m(m) \neq 0$. Wir erhalten die Injektion

$$M \hookrightarrow \prod_{\substack{m \in M \\ m \neq 0}} R^* ,$$

die in der m-Komponente gerade durch φ_m gegeben wird. □

Satz 8.19. *Ein R-Modul ist genau dann injektiv, wenn er direkter Faktor in einem kofreien Modul ist.*

Beweis. Wähle eine Injektion $I \hookrightarrow M$ mit M kofrei. Da I injektiv ist, ist I direkter Faktor (= direkter Summand) in M. Umgekehrt sind nach Lemma 8.4 direkte Faktoren in kofreien Moduln injektiv. □

9 Kategorien

Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ ist gegeben durch drei Daten und drei Axiome.
Die Daten:

(1) eine Klasse $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ von Objekten

(2) Zu beliebigen $A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ von „Morphismen von A nach B"

(3) Zu jedem Tripel $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ ein Verknüpfungsgesetz

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C).$$

Bemerkung 9.1. Ein Element $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreibt man in der Form $f : A \to B$. A heißt **Quelle** und B heißt **Ziel** von f. Für $f : A \to B$, $g : B \to C$ schreibt man die Verknüpfung als $g \circ f : A \to C$ oder einfach als gf.

Die Axiome:

(A1) Die Mengen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ und $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B')$ sind disjunkt falls $A \neq A'$ oder $B \neq B'$.

Bemerkung 9.2. (A1) bedeutet: jeder Morphismus hat eine eindeutige Quelle und ein eindeutiges Ziel.

(A2) Sind $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ Morphismen, so gilt

$$h(gf) = (hg)f \qquad \text{(Assoziativität)}.$$

(A3) Zu jedem Objekt A gibt es einen Morphismus $1_A : A \to A$ (die „Identität"), so dass für beliebige $f : A \to B$, $g : C \to A$ gilt

$$f 1_A = f,\ 1_A g = g.$$

Bemerkung 9.3. 1_A ist eindeutig bestimmt (Argument wie bei Gruppen: $1_A = 1_A 1'_A = 1'_A$). Man benutzt häufig auch die Bezeichnung id_A anstelle von 1_A.

Beispiele 9.4. • (Mengen): Die Kategorie der Mengen mit Mengenabbildungen
• R-Mod: die Kategorie der R-Links-Moduln mit R-Modulhomomorphismen, (R Ring)
• analog Mod-R: Rechtsmoduln
• Top: die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen.

Definition 9.5. Die **entgegengesetzte Kategorie** $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ ist die Kategorie mit den gleichen Objekten wie $\mathcal{C}$ und

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A,B) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(B,A).$$

Bemerkung 9.6. Der Übergang von $\mathcal{C}$ zu $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ bedeutet nichts weiter, als alle Pfeile umzudrehen. Es gilt $(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = \mathcal{C}$.

Definition 9.7. Ein (kovarianter) **Funktor** F von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie $\mathcal{D}$ ist eine Regel, die jedem Objekt A von $\mathcal{C}$ ein Objekt $FA \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ und jedem Morphismus $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ einen Morphismus $F(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(FA,FB)$ zuordnet, so dass gilt: $F(fg) = F(f)F(g)$ und $F(1_A) = 1_{FA}$.

Beispiele 9.8. 1) Vergiss-Funktoren z.B.

$$F : R\text{-Mod} \to (\text{Mengen}),\ FM = M,$$

(wir vergessen Struktur).
2) Jedes $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ induziert einen Funktor

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) : \mathcal{C} \longrightarrow (\text{Mengen}),$$

der durch $B \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ und

$$(f : B \to B') \mapsto (f_* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B'), g \mapsto fg)$$

gegeben ist.

Definition 9.9. Ein **kontravarianter Funktor** von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist ein Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{D}$.

Beispiel 9.10. Jedes $B \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ induziert den kontravarianten Funktor

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-,B) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}),$$

der durch $A \longmapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ und

$$f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',A) \mapsto (f^* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',B), g \mapsto gf)$$

gegeben ist.

Definition 9.11. Das **Produkt** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ zweier Kategorien hat als Objekte Paare (C, D), $C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, $D \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ und

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((C_1, D_1), (C_2, D_2)) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2).$$

Sprechweise: Ein „**Bifunktor** von $\mathcal{C}$ kreuz $\mathcal{D}$ nach $\mathcal{E}$“ ist ein (gewöhnlicher) Funktor

$$F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Beispiele 9.12.
- $$\begin{array}{rcl} \bigoplus : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} & \longrightarrow & R\text{-Mod} \\ (M, N) & \longmapsto & M \oplus N \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} \bigotimes_A : A\text{-Mod} \times A\text{-Mod} & \longrightarrow & A\text{-Mod} \\ (M, N) & \longmapsto & M \otimes_A N \end{array}$$
- $$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mor} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & (\text{Mengen}) \\ (M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N) \end{array}$$

Definition 9.13. • $f : A \to B$ heißt **Monomorphismus**, wenn für jedes C und beliebige $g_1, g_2 : C \to A$ gilt $fg_1 = fg_2 \Longrightarrow g_1 = g_2$.
• $g : A \to B$ heißt **Epimorphismus** wenn für jedes C und beliebige $f_1, f_2 : B \to C$ gilt: $f_1 g = f_2 g \Longrightarrow f_1 = f_2$.
• $f : A \to B$ heißt **Isomorphismus**, wenn ein $g : B \to A$ existiert mit

$$fg = 1_B,\ gf = 1_A.$$

Bemerkung 9.14. • f Monomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ Epimorphismus in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.
• f Isomorphisms in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ Isomorphismus in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.
• Sei $f : A \to B$ ein Isomorphismus und $g : B \to A$ wie in der Definition von Isomorphie. Dann ist g eindeutig bestimmt: Haben g_1 und g_2 diese Eigenschaft, so gilt

$$g_1 = g_1(\mathrm{id}_B) = g_1(fg_2) = (g_1 f)g_2 = \mathrm{id}_A g_2 = g_2.$$

Man bezeichnet das eindeutig bestimmte g mit f^{-1} (der inverse Morphismus).

Lemma 9.15. *f Isomorphismus $\Rightarrow f$ Mono- und Epimorphismus.*

Beweis. Sei $g : B \to A$ invers zu $f : A \to B$, C beliebig und $\alpha_1, \alpha_2 : C \to A$ mit $f\alpha_1 = f\alpha_2$. Dann folgt

$$\alpha_1 = \mathrm{id}_A \alpha_1 = (gf)\alpha_1 = g(f\alpha_1) = g(f\alpha_2) = (gf)\alpha_2 = \mathrm{id}_A \alpha_2 = \alpha_2.$$

Also ist f ein Monomorphismus. Epimorphismus zeigt man analog oder argumentiert so: f Isomorphismus in $\mathcal{C} \Rightarrow f$ Isomorphismus in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \Rightarrow f$ Monomorphismus in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \Rightarrow f$ Epimorphismus in $\mathcal{C}$. □

Bemerkung 9.16. Die Umkehrung gilt i.A. nicht. Man betrachte z.B. die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen und den Morphismus

$$f : (\mathbb{R}, \text{diskrete} \text{Topologie}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \text{Standardtopologie}),$$

der auf der Menge $\mathbb{R}$ einfach die Identität ist. Dann ist f Mono- und Epimorphismus, aber kein Isomorphismus (es gibt kein stetiges Inverses).

Definition 9.17. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $t : F \to G$ ist eine Regel die jedem $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $t_A : FA \to GA$ zuordnet, so dass für jeden Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{t_A} & GA \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ FB & \xrightarrow{t_B} & GB \end{array}$$

kommutiert.

Beispiele 9.18. • Wir betrachten für ein $p \in \mathbb{N}$ die Funktoren

$$\begin{array}{rl} \mathrm{id} : \mathcal{A}b \longrightarrow \mathcal{A}b \quad , & A \longmapsto A, \\ \otimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : \mathcal{A}b \longrightarrow \mathcal{A}b, & A \longmapsto A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = A/pA, \end{array}$$

Die kanonischen Projektionen $A \longrightarrow A/pA$ geben eine natürliche Transformation zwischen diesen Funktoren.

• Sei K-Vec die Kategorie der K-Vektorräume, wobei K ein Körper ist. Sei $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ der duale Vektorraum. Die Einsetzabbildung $V \to V^{**}$, $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$, induziert eine natürliche Transformation der Funktoren id und $(\quad)^{**}$ von K-Vec nach K-Vec.

• Jeder Morphismus $\psi : A \to A'$ in $\mathcal{C}$ induziert eine natürliche Transformation

$$\psi^* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A', -) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

von Funktoren $\mathcal{C} \to$ (Mengen) durch

$$\begin{array}{rcl} (\psi^*)_B : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ \psi \end{array}$$

• Jeder Morphismus $\psi : B \to B'$ in $\mathcal{C}$ induziert eine natürliche Transformation

$$\psi_* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, B')$$

von Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ (Mengen) durch

$$\begin{array}{rcl} (\psi_*)_A : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B') \\ \varphi & \longmapsto & \psi \circ \varphi \end{array}$$

Definition 9.19. Eine natürliche Transformation t heißt **natürliche Äquivalenz**, wenn $t_A : FA \to GA$ für jedes $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$ ist.

Bemerkung 9.20. Ist $t : F \to G$ eine natürliche Äquivalenz, so gibt es $t^{-1} : G \to F$ vermittels $(t^{-1})_A = (t_A)^{-1} : GA \to FA$. Man schreibt $F \cong G$.

Beispiel 9.21. Sei K-Vec^f die Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume. Die natürliche Transformation $t_V : V \to V^{**}$ ist eine natürliche Äquivalenz.

Definition 9.22. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt **Kategorienäquivalenz**, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und natürliche Äquivalenzen $FG \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, $GF \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ gibt.

Beispiele 9.23. • Der Funktor

$$\begin{array}{rcl} (K\text{-}\mathrm{Vec}^f)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & K\text{-}\mathrm{Vec}^f \\ V & \longmapsto & V^* \end{array}$$

ist eine Kategorienäquivalenz. Der Umkehrfunktor ist auch wieder $V \mapsto V^*$. D.h. die Kategorie K-Vec^f ist selbstdual.

• Sei $\mathcal{A}b^f$ die Kategorie der endlichen abelschen Gruppen. Wir betrachten den Funktor

$$\begin{array}{rcl} * : (\mathcal{A}b^f)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathcal{A}b^f \\ A & \longmapsto & \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array}$$

Analog wie bei Vektorräumen haben wir die Einsetzabbildung

$$A \longrightarrow A^{**}\ ,\ a \longmapsto (\varphi \longmapsto \varphi(a)),$$

die injektiv ist, also ein Isomorphismus (weil endliche Gruppen). D.h. auch die Kategorie $\mathcal{A}b^f$ ist selbstdual.

• Weil K bzw. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektive Objekte sind, sind die obigen Selbstdualitäten sogar exakt, d.h. sie überführen exakte Folgen in exakte Folgen. (Wir bezeichnen eine Folge $M' \to M \to M''$ in der entgegengesetzten Kategorie als exakt, wenn die Folge $M' \leftarrow M \leftarrow M''$ exakt in der Ausgangskategorie ist.) Es gibt keine exakte Selbstdualität der Kategorie $\mathcal{A}b$, da der direkte Limes exakt ist, der projektive im allgemeinen aber nicht.

Satz 9.24. *Sei* $\mathcal{C}$ *eine Kategorie,* $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ *ein Objekt und* $F : \mathcal{C} \to$ (Mengen) *ein Funktor. Dann ist die Zuordnung*

$$\begin{array}{rcl} \{\text{nat. Transf. } t : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \to F\} & \longrightarrow & F(A) \\ t & \longmapsto & t_A(\mathrm{id}_A) \end{array}$$

bijektiv.

Beweis. Sei $t : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \to F$ eine natürliche Transformation. Dann haben wir für jedes $B \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ und jedes $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{rcc} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A) & \xrightarrow{t_A} & F(A) \\ {\scriptstyle \phi_* = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-)(\phi)} \downarrow & & {\scriptstyle F(\phi)} \downarrow \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) & \xrightarrow{t_B} & F(B) \end{array}$$

Wegen $\phi = \phi_*(\mathrm{id}_A)$ folgt

$$t_B(\phi) = F(\phi)(t_A(\mathrm{id}_A)).$$

Daher ist t bereits durch das Element $t_A(\mathrm{id}_A)$ festgelegt. Andererseits kann man bei gegebenem $a \in F(A)$ diese Gleichung zur Definition einer natürlichen Transformation $t^a : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \to F$ heranziehen, die definiert ist durch

$$(t^a)_B(\phi) := F(\phi)(a)$$

Es gilt $(t^a)_A(\mathrm{id}_A) = a$. □

Korollar 9.25 (Yoneda-Lemma)**.** *Die Zuordnung*

$$(\psi : A' \to A) \longmapsto (\psi^* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',-))$$

ist eine Bijektion zwischen der Menge der Morphismen $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',A)$ *und der Menge der natürlichen Transformationen von Funktoren* $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',-)$. *Es ist* ψ *genau dann ein Isomorphismus, wenn* ψ^* *eine natürliche Äquivalenz ist.*

Beweis. Wir setzen $F = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',-)$ in Satz 9.24 und erhalten eine Bijektion zwischen den natürlichen Transformationen von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-)$ nach $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',-)$ und der Menge $F(A) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',A)$, die durch $t \mapsto t_A(\mathrm{id}_A)$ gegeben ist. Die inverse Bijektion ist dadurch gegeben, dass $\psi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',A)$ sich auf die natürliche Transformation t^ψ abbildet, die auf $B \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ durch $t^\psi_B : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',B)$, $\phi \mapsto F(\phi)(\psi)$ definiert ist. Nun ist $F(\phi) = \phi_* : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',B)$, also gilt $F(\phi)(\psi) = \phi_*(\psi) = \phi\psi = \psi^*(\phi)$. Das zeigt die behauptete Bijektion.

Ist $\psi : A' \to A$ ein Isomorphismus, so existiert ein $\phi : A \to A'$ mit $\phi\psi = \mathrm{id}_{A'}$ und $\psi\phi = \mathrm{id}_A$. Also gilt $\phi^*\psi^* = (\psi\phi)^* = (\mathrm{id}_A)^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,-)}$ und $\psi^*\phi^* = (\phi\psi)^* = (\mathrm{id}_{A'})^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',-)}$. Daher ist ϕ^* invers zu ψ^* und ψ^* eine natürliche Äquivalenz. Umgekehrt sei ψ^* eine natürliche Äquivalenz. Dann existiert ein Inverses $t = (\psi^*)^{-1}$. Nach dem ersten Teil gilt $t = \phi^*$ für ein eindeutig bestimmtes $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,A')$. Wir behaupten nun, dass ϕ invers zu ψ ist. Hierzu beachten wir, dass $(\phi\psi)^* = \psi^*\phi^* = \psi^* t = \mathrm{id}_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A',-)} = \mathrm{id}^*_{A'}$ gilt, woraus, weil die Zuordnung $f \mapsto f^*$ bijektiv ist, $\phi\psi = \mathrm{id}_{A'}$ folgt. Genauso zeigt man $\psi\phi = \mathrm{id}_A$. Das beendet den Beweis. □

Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten der Kategorie $\mathcal{C}$.

Definition 9.26. Ein **Produkt** (A, p_i) der Familie $(A_i)_i$ ist ein Objekt A zusammen mit Morphismen $p_i : A \to A_i$, $i \in I$, so dass die folgende Universaleigenschaft gilt: Zu jedem Objekt B und jeder Familie $(f_i : B \to A_i)_{i \in I}$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $f : B \to A$ mit $f_i = p_i f$ für alle i.

Bemerkung 9.27. Zwei Produkte der Familie (A_i) sind kanonisch isomorph (Standardargument mit Hilfe der Universaleigenschaft). Man spricht daher oft von *dem* Produkt und schreibt $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$.

Beispiele 9.28. Wir betrachten für eine Primzahl p die Familie abelscher Gruppen $(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z})_{i \in \mathbb{N}}$.

• in der Kategorie der zyklischen abelschen Gruppen haben keine zwei Elemente der Familie ein Produkt.
• in der Kategorie der endlichen abelschen Gruppen hat die Familie kein Produkt.
• in der Kategorie der abelschen Torsionsgruppen hat die Familie ein Produkt (welches?), das nicht mit dem gewöhnlichen kartesischen Produkt übereinstimmt.
• in der Kategorie der abelschen Gruppen und der Gruppen ist das Produkt gerade das kartesische Produkt.

Dreht man alle Pfeile um erhält man das Koprodukt. Am schnellsten:

Definition 9.29. Das **Koprodukt** $\coprod$ ist das Produkt in $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$.

Beispiele 9.30. • In (Mengen) ist das Koprodukt die disjunkte Vereinigung.
• In abelschen Gruppen ist das Koprodukt die direkte Summe.
• In Gruppen existiert ein Koprodukt, das sogenannte *freie Produkt* (wie definiert man das?)

10 Abelsche Kategorien

Definition 10.1. Ein Objekt E einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **Endobjekt**, wenn für jedes Objekt M die Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(M, E)$ aus genau einem Element besteht. A heißt **Anfangsobjekt**, wenn für jedes M die Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, M)$ aus genau einem Element besteht. Ein Objekt $0 \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ heißt **Nullobjekt**, wenn es sowohl Anfangs- als auch Endobjekt ist.

Bemerkung 10.2. Anfangs- bzw. Endobjekte sind (wenn sie existieren) bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt. Hat $\mathcal{C}$ ein Nullobjekt 0, so enthält für beliebige $A, B \in \mathcal{C}$ die Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ein spezielles Element, nämlich die Komposition $A \to 0 \to B$. Dieses nennt man den **Nullmorphismus**.

Beispiele 10.3. • In (Mengen) ist $\varnothing$ ein Anfangs- und die 1-elementige Menge ein Endobjekt.
• In R-Mod ist der Nullmodul 0 ein Nullobjekt.

Definition 10.4. Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **additiv**, wenn gilt:
- $\mathcal{A}$ hat ein Nullobjekt,
- in $\mathcal{A}$ existieren endliche Produkte, und
- für alle $A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ trägt $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ die Struktur einer abelschen Gruppe mit dem Nullmorphismus als Nullelement, und so dass für A, B, C die Verknüpfung
$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C)$$
bilinear ist.

Bemerkung 10.5. In additiven Kategorien nennt man die Morphismen oft Homomorphismen und schreibt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$ anstelle von $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}$. Die Komposition mit dem Nullhomomorphismus ist stets Null. Z.B: $0 \circ f = (0+0) \circ f = 0 \circ f + 0 \circ f \Rightarrow 0 = 0 \circ f$.

Satz 10.6. *Sei $\mathcal{A}$ eine additive Kategorie und $A_1, A_2 \in A$. Sei $i_1 : A_1 \to A_1 \times A_2$ gegeben durch 1_{A_1} und $A_1 \xrightarrow{0} A_2$ und $i_2 : A_2 \longrightarrow A_1 \times A_2$ durch $A_2 \xrightarrow{0} A_1$ und 1_{A_2}. Dann ist $(A_1 \times A_2, i_1, i_2)$ das Koprodukt von A_1 und A_2.*

Beweis. Wir beginnen mit einer
Behauptung:
$$i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_{A_1 \times A_2} : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_1 \times A_2.$$
Beweis der Behauptung: Es gilt
$$\begin{aligned} p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) &= p_1 i_1 p_1 + p_1 i_2 p_2 \\ &= 1_{A_1} p_1 + (A_2 \xrightarrow{0} A_1) p_2 \\ &= p_1 + (A_1 \times A_2 \xrightarrow{0} A_1) \\ &= p_1 \\ &= p_1(1_{A_1 \times A_2}) \end{aligned}$$
und analog: $p_2(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_2 = p_2(1_{A_1 \times A_2})$. Daher folgt die Behauptung aus der Universaleigenschaft des Produkts.

Wir zeigen nun die Universaleigenschaft des Koprodukts für $(A_1 \times A_2, i_1, i_2)$. Es seien Homomorphismen $f_1 : A_1 \to B$ und $f_2 : A_2 \to B$ gegeben. Wir definieren $f : A_1 \times A_2 \to B$ durch $f = f_1 p_1 + f_2 p_2$. Dann gilt
$$\begin{aligned} f i_1 &= f_1 p_1 i_1 + f_2 p_2 i_1 \\ &= f_1, \end{aligned}$$
und $f i_2 = f_2$ zeigt man analog. Dies zeigt die Existenz.
Zur Eindeutigkeit: Sei $f' : A_1 \times A_2 \to B$ mit $f' i_1 = f_1$ und $f' i_2 = f_2$ gegeben. Nach der Behauptung folgt $f' = f'(i_1 p_1 + i_2 p_2) = f_1 p_1 + f_2 p_2 = f$. □

In additiven Kategorien bezeichnet man das endliche Koprodukt = Produkt mit $\bigoplus$. Man benutzt $\bigoplus$ auch für beliebige Koprodukte (falls sie existieren)

Lemma 10.7. *Es seien $f, g : A \to B$ Homomorphismen in einer additiven Kategorie $\mathcal{A}$. Dann gilt*

$$f + g = \{f, g\}\langle 1_A, 1_A\rangle,$$

wobei $\{f, g\} : A \oplus A \to A$ durch die Universaleigenschaft des Koprodukts und $\langle 1_A, 1_A\rangle : A \to A \oplus A$ durch die Universaleigenschaft des Produkts gegeben ist.

Insbesondere ist die Addition auf den Hom*-Mengen einer additiven Kategorie bereits eindeutig durch die Kategorie selbst bestimmt.*

Beweis. Es gilt nach dem Beweis von Satz 10.6: $\{f, g\} = fp_1 + gp_2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \{f, g\}\langle 1_A, 1_A\rangle &= (fp_1 + gp_2)\langle 1_A, 1_A\rangle \\ &= fp_1\langle 1_A, 1_A\rangle + gp_2\langle 1_A, 1_A\rangle \\ &= f + g. \end{aligned}$$

□

Definition 10.8. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien heißt **additiv**, wenn für $A, A' \in \mathcal{A}$ die natürliche Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, FA')$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist.

Lemma 10.9. *Ist F additiv, so gilt $F(A_1 \oplus A_2) \cong FA_1 \oplus FA_2$.*

Beweis. Wir betrachten die natürliche Abbildung

$$\langle F(p_1), F(p_2)\rangle : F(A_1 \oplus A_2) \to FA_1 \oplus FA_2.$$

In der Gegenrichtung betrachten wir

$$F(i_1)p_1 + F(i_2)p_2 : FA_1 \oplus FA_2 \to F(A_1 \oplus A_2).$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Morphismen zueinander invers sind wenn F additiv ist. □

In Zukunft werden wir von Funktoren zwischen additiven Kategorien stillschweigend annehmen, dass sie additiv sind.

Definition 10.10. Sei $f : A \to A'$ ein Homomorphismus in einer additiven Kategorie. Ein Homomorphismus $i : B \to A$ heißt **Kern** von f, wenn $fi = 0$ und zu jedem $g : C \to A$ mit $fg = 0$ ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $h : C \to B$ mit $g = ih$ existiert:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & A' \\ C \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

Bemerkung 10.11. Zwei Kerne sind natürlich isomorph.

Lemma 10.12. *Ein Kern ist (wenn er existiert) ein Monomorphismus.*

Beweis. Sind $h_1, h_2 : C \to B$ Homomorphismen mit $ih_1 = ih_2 =: g$, so gilt $fg = 0$ und daher ist $h_1 = h_2$ nach Universaleigenschaft. $\square$

Definition 10.13. Kokern (drehe alle Pfeile um).

Lemma 10.14. *Kokerne sind Epimorphismen.* $\square$

Definition 10.15. Eine additive Kategorie $\mathcal{A}$ heißt **abelsche Kategorie**, wenn gilt:

- Jeder Homomorphismus hat Kern und Kokern,
- jeder Monomorphismus ist der Kern seines Kokerns und jeder Epimorphismus ist der Kokern seines Kerns,
- jeder Morphismus f kann in der Form $f = i\varepsilon$ mit i Monomorphismus und ε Epimorphismus geschrieben werden.

Satz 10.16. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie und f ein Homomorphismus in $\mathcal{A}$ der sowohl Monomorphismus als auch Epimorphismus ist. Dann ist f ein Isomorphismus.*

Beweis. Es sei $f : A \to B$ sowohl ein Epimorphismus als auch ein Monomorphismus. Dann ist $0 \to A$ der Kern von f und genauso auch der Kern von $A \overset{\mathrm{id}_A}{\to} A$. Daher sind, weil Epimorphismen, sowohl f als auch id_A Kokern von $0 \to A$, und damit isomorph:

$$\begin{tikzcd}
& & B \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & \\
& & A \arrow[uu, dashed, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Somit ist f gleich der Komposition des Isomorphismus id_A mit einem weiteren Isomorphismus und damit ein Isomorphismus. $\square$

Beispiele 10.17. • Die Kategorie $\mathcal{A}b$ der abelschen Gruppen ist abelsch.
• R-Mod, Mod-R sind abelsche Kategorien,
• Die Kategorie der freien R-Moduln ist additiv, aber i.A. nicht abelsch (es sei denn, R ist ein Körper).
• Prägarben und Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum sind abelsche Kategorien.
• Sei G eine Gruppe. Die Kategorie der G-Moduln ist eine abelsche Kategorie.

Definition 10.18. Ein **Unterobjekt** B in A ist ein Monomorphismus $i : B \to A$. Man schreibt oft (lax) $\operatorname{coker}(i) = A/B$.
Das **Bild** eines Homomorphismus $f : A \to B$ ist $\operatorname{im}(f) = \ker(\operatorname{coker}(f))$ (also ein Unterobjekt in B).
Das **Kobild** $\operatorname{coim}(f) = \operatorname{coker}(\ker(f))$ ist gerade $A/\ker(f)$.
Eine Folge $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ in $\mathcal{A}$ heißt **exakt**, wenn $\operatorname{im}(f) \cong \ker(g)$.

Den Beweis des nächsten Satzes lassen wir weg.

Satz 10.19. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Dann gilt:*

(i) *Der natürliche Homomorphismus* $\operatorname{coim}(f) \to \operatorname{im}(f)$ *ist ein Isomorphismus, d.h. es gilt der Homomorphiesatz.*

(ii) *Es gilt das 5er-Lemma.*

(iii) *Es gilt das Schlangenlemma.*

(iv) *Eine Folge $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ ist genau dann exakt, wenn für jedes $N \in \mathcal{A}$ die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M'', N) \xrightarrow{v^*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \xrightarrow{u^*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N)$$

exakt ist.

(v) *Eine Folge $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ in $\mathcal{A}$ ist genau dann exakt, wenn für jedes $M \in \mathcal{A}$ die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N') \xrightarrow{u_*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \xrightarrow{v_*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N'')$$

exakt ist.

Definition 10.20. Ein Funktor zwischen abelschen Kategorien heißt **exakt**, wenn er exakte Folgen in exakte Folgen überführt.

Definition 10.21. $I \in \mathcal{A}$ heißt **injektiv**, falls sich jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"'] & I \end{tikzcd}$$

in dem i ein Monomorphismus ist und f ein beliebiger Morphismus, kommutativ durch ein g ergänzen lässt.

$P \in \mathcal{A}$ heißt **projektiv**, wenn P als Objekt von $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ injektiv ist. M.a.W., wenn sich jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, two heads, "p"'] & \\ A & P \arrow[l, "f"] \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

mit p ein Epimorphismus und f beliebig, durch ein g kommutativ ergänzen lässt.

Bemerkung 10.22. Ist $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine exakte Folge in $\mathcal{A}$ und A' injektiv oder A'' projektiv, so zerfällt die Folge.

Lemma 10.23. (i) *I ist genau dann injektiv, wenn der Funktor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

exakt ist.

(ii) *P ist genau dann projektiv, wenn der Funktor* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ *exakt ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 10.19 und den Definitionen. □

Bemerkung 10.24. Ist eine Kategorie $\mathcal{A}$ additiv bzw. abelsch, so gilt dies auch für die entgegengesetzte Kategorie $\mathcal{A}^{op}$. Denn der einzige Teil der Definitionen, der nicht invariant unter Umkehrung der Pfeile ist, ist die Existenz endlicher Produkte. Da nach Satz 10.6 endliche Produkte aber zugleich Koprodukte sind, bleibt auch diese Eigenschaft unter Pfeilumkehr erhalten.

11 Adjungierte Funktoren

Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren.

Definition 11.1. F ist **linksadjungiert** zu G (und G **rechtsadjungiert** zu F, Schreibweise: $F \dashv G$), wenn eine natürliche Äquivalenz

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G-) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F-, -)$$

von Bifunktoren: $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to$ (Mengen) existiert.

Sind $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ additive Kategorien und F, G additive Funktoren, so wird stillschweigend angenommen, dass eine Äquivalenz von Bifunktoren $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}b$ vorliegt.

Beispiele 11.2. 1) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{D} = A$-Mod. Sei N ein A-Modul. Wir betrachten die Funktoren

$$A\text{-Mod} \to A\text{-Mod}, \quad M \mapsto M \otimes_A N,$$

und

$$A\text{-Mod} \to A\text{-Mod}, \quad P \mapsto \mathrm{Hom}_A(N, P).$$

Dann gilt (vergleiche Satz 5.1) in natürlicher Weise

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)).$$

Wir erhalten die Funktorenadjunktion

$$- \otimes_A N \dashv \mathrm{Hom}_A(N, -).$$

2) Sei $\mathcal{C} = K$-Vec, $\mathcal{D} =$ (Mengen), $F : K$-Vec $\to$ (Mengen) der Vergiss-Funktor und G : (Mengen) $\to K$-Vec, $M \to K^{(M)} =$ Vektorraum mit Basis M.
Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_{K-\mathrm{Vec}}(GM, V) = \mathrm{Mor}_{(\mathrm{Mengen})}(M, FV)$$

also $G \dashv F$.

Satz 11.3. *Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ additive Funktoren und sei $F \dashv G$ (im additiven Sinne). Dann gilt:*

(i) *F ist rechtsexakt, d.h., ist $A' \to A \to A'' \to 0$ exakt in $\mathcal{A}$, so ist $FA' \to FA \to FA'' \to 0$ exakt in $\mathcal{B}$.*

(ii) *G ist linksexakt, d.h., ist $0 \to B' \to B \to B''$ exakt in $\mathcal{B}$, so ist $0 \to GB' \to GB \to GB''$ exakt in $\mathcal{A}$.*

(iii) *Ist F exakt, so überführt G Injektive in Injektive.*

(iv) *Ist G exakt, so überführt F Projektive in Projektive.*

Beweis. F induziert einen Funktor $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ und analog $G^{\mathrm{op}} : \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$. Es gilt $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}$. Daher genügt es, (i) und (iii) zu zeigen.

(i) Für $A' \to A \to A'' \to 0$ exakt und $B \in \mathcal{B}$ beliebig ist

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', GB) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', GB)$$

exakt, also auch

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA'', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA', B).$$

Hieraus folgt die Exaktheit von

$$FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0.$$

(iii) Sei $I \in \mathcal{B}$ injektiv. Zu zeigen: Der Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GI)$$

ist exakt. Nun gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GI) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F-, I)$$

und weil F exakt und I injektiv ist, ist der Funktor auf der rechten Seite exakt.

□

12 Komplexe

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Definition 12.1. Ein **Komplex** $A^\bullet$ in $\mathcal{A}$ ist eine Folge von Objekten und Homomorphismen

$$\cdots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \ldots,$$

so dass $d_i \circ d_{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt. Man nennt die Homomorphismen d_i auch die **Differentiale** des Komplexes und schreibt die Bedingung lax in der Form $d^2 = 0$.

Definition 12.2. Ein **Homomorphismus** $f : A^\bullet \to B^\bullet$ zwischen zwei Komplexen ist eine Familie $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $f_i : A^i \to B^i$, so dass für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt: $d_i^B \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i^A$, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}^A} & A^i & \xrightarrow{d_i^A} & A^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & f_{i-1} \downarrow & & f_i \downarrow & & f_{i+1} \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & B^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}^B} & B^i & \xrightarrow{d_i^B} & B^{i+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

kommutiert.

Bemerkung 12.3. Komplexe in $\mathcal{A}$ zusammen mit Homomorphismen von Komplexen bilden wieder eine abelsche Kategorie. Kerne, Kokerne und endliche Produkte bilden sich an jeder Stelle separat.

Definition 12.4. $Z^i = \ker(d_i) \subset A^i$ heißen die ***i*-Kozykel** von $A^\bullet$.

$B^i = \mathrm{im}(d_{i-1}) \subset A^i$ heißen die ***i*-Koränder**.

$H^i(A^\bullet) = Z^i/B^i$ heißt die ***i*-te Kohomologiegruppe** von $A^\bullet$.

Bemerkung 12.5. Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \to B^\bullet$ induziert Homomorphismen $Z^i(f) : Z^i A^\bullet \to Z^i B^\bullet$, $B^i(f) : B^i A^\bullet \to B^i B^\bullet$ und $H^i(f) : H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet)$ für alle i.

Satz 12.6 (Verallgemeinertes Schlangenlemma)**.** *Sei*

$$0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$$

eine kurze exakte Folge von Komplexen (d.h. für jedes i ist $0 \to A^i \to B^i \to C^i \to 0$ exakt). Dann existiert eine natürliche lange exakte Folge

$$\cdots \longrightarrow H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet) \longrightarrow H^i(C^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots \quad .$$

Beweis. Wir haben für jedes $i \in \mathbb{Z}$ das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A^i & \longrightarrow & B^i & \longrightarrow & C^i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^{i+1} & \longrightarrow & B^{i+1} & \longrightarrow & C^{i+1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Das Schlangenlemma (Anfangs- bzw. Endteil) liefert uns daher für beliebiges i exakte Folgen $0 \to Z^i(A^\bullet) \to Z^i(B^\bullet) \to Z^i(C^\bullet)$ und $A^i/B^i(A^\bullet) \to B^i/B^i(B^\bullet) \to C^i/B^i(C^\bullet) \to 0$. Diese passen für i und $i+1$ gemeinsam in das das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} & & A^i/B^i(A^\bullet) & \longrightarrow & B^i/B^i(B^\bullet) & \longrightarrow & C^i/B^i(C^\bullet) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z^{i+1}(A^\bullet) & \longrightarrow & Z^{i+1}(B^\bullet) & \longrightarrow & Z^{i+1}(C^\bullet), & & \end{array}$$

in dem die vertikalen Abbildungen durch die Differentiale d der jeweiligen Komplexe induziert sind. Das Schlangenlemma liefert eine exakte Folge

$$H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet) \to H^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(A^\bullet) \to H^{i+1}(B^\bullet) \to H^{i+1}(C^\bullet).$$

Diese exakten Folgen für alle i setzen sich zu der behaupteten langen exakten Folge zusammen. □

Definition 12.7. Eine **injektive Auflösung** von $A \in \mathcal{A}$ ist ein Komplex

$$0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \longrightarrow \cdots$$

bestehend aus injektiven Objekten in $\mathcal{A}$, mit $H^i(I^\bullet) = 0$ für $i \geq 1$ zusammen mit einem Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} \ker(d_0) = H^0(I^\bullet)$.
Eine **projektive Auflösung** ist eine injektive Auflösung in $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, d.h. ein Komplex

$$\longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$$

bestehend aus projektiven Objekten in $\mathcal{A}$, mit $H^i(P^\bullet) = 0$, $i \leq -1$, zusammen mit einem Isomorphismus $H^0(P^\bullet) \xrightarrow{\sim} A$.

Bemerkung 12.8. Man benutzt gerne die untere Nummerierung $P_i = P^{-i}$ und schreibt dann $H_i(-) = H^{-i}(-)$.

Definition 12.9. $\mathcal{A}$ hat **genügend viele Injektive**, wenn zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ein Monomorphismus $i : A \to I$ in ein injektives Objekt I existiert. $\mathcal{A}$ hat **genügend viele Projektive**, wenn $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ genügend viele Injektive hat.

Beispiele 12.10. • R-Mod hat genügend viele Injektive (Korollar 8.18) und genügend viele Projektive (Korollar 8.6).
• Die Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen hat genügend viele Projektive aber nicht genügend Injektive.
• die Kategorie der Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum hat genügend viele Injektive aber nicht genügend viele Projektive.

Satz 12.11. *$\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive. Dann hat jedes Objekt von $\mathcal{A}$ eine injektive Auflösung. Für eine exakte Folge $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ existieren kompatible injektive Auflösungen, d.h. ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & I'^2 & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & I''^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & I'^1 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & I''^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & I'^0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I''^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{g} & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

so dass alle I'^n, I^n, I''^n injektiv sind.

Beweis. Induktive Konstruktion einer injektiven Auflösung $I^\bullet$ von A:
1. Schritt: Wähle $A \hookrightarrow I^0$.
2. Schritt: Wähle
$$I^0/A \hookrightarrow I^1.$$
n-ter Schritt: Wähle $I^{n-2}/\operatorname{im}(I^{n-3}) \hookrightarrow I^{n-1}$.

Nun sei $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ eine kurze exakte Folge. Wir wählen Monomorphismen in Injektive: $i' : A' \hookrightarrow I'^0$ und $i'' : A'' \hookrightarrow I''^0$. Wegen der Injektivität von I'^0 finden wir einen Homomorphismus $\varphi : A \to I'^0$, der i' fortsetzt. Dann setzen wir $I^0 = I'^0 \oplus I''^0$ und definieren $i : A \to I^0$ durch ϕ in der ersten und $i'' \circ g$ in der zweiten Komponente. Da i'' Monomorphismus ist, gilt $\ker(i) \subset \ker g = A'$ und da i' Monomorphismus ist, folgt $\ker(i) = 0$. Wir erhalten somit ein kommutatives

Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I'^0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I''^0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f"] \arrow[u, hook, "i'"] & A \arrow[r, "g"] \arrow[u, hook, "i"] & A'' \arrow[r] \arrow[u, hook, "i''"] & 0
\end{tikzcd}$$

in dem die Pfeile in der oberen Zeile gerade die natürliche Inklusion und Projektion sind. Das Schlangenlemma liefert uns die kurze exakte Folge

$$0 \to \operatorname{coker}(i') \to \operatorname{coker}(i) \to \operatorname{coker}(i'') \to 0$$

und wir können die Konstruktion induktiv fortsetzen. $\square$

Satz 12.12. *$\mathcal{A}$ habe genügend viele Projektive. Dann hat jedes Objekt von $\mathcal{A}$ eine projektive Auflösung. Für eine exakte Folge $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ existieren kompatible projektive Auflösungen, d.h. ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_2' & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_2'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_1' & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_1'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & P_0' & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & P_0'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{g} & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

so dass alle P_n', P_n, P_n'' projektiv sind.

Beweis. Man wende Satz 12.11 in $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ an. $\square$

Definition 12.13. Seien $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ zwei Komplexhomomorphismen f und g heißen **homotop**, wenn Homomorphismen $D^i : A^{i+1} \to B^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ existieren, so dass $f - g = dD + Dd$ gilt. Schreibweise: $f \sim g$.

$$\begin{array}{ccccccc}
A^0 & \xrightarrow{d} & A^1 & \xrightarrow{d} & A^2 & \xrightarrow{d} & A^3 \\
f \downdownarrows g & \swarrow D & f \downdownarrows g & \swarrow D & f \downdownarrows g & \swarrow D & f \downdownarrows g \\
B^0 & \xrightarrow{d} & B^1 & \xrightarrow{d} & B^2 & \xrightarrow{d} & B^3
\end{array}$$

Bemerkung 12.14. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

Lemma 12.15. *Aus $f \sim g$ folgt*

$$H^i(f) = H^i(g) : H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet)$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Auf $Z^i(A^\bullet)$ gilt:

$$f - g = dD : Z^i(A^\bullet) \longrightarrow B^i(B^\bullet) \subset Z^i(B^\bullet).$$

Daher gilt $H^i(f-g) = 0$, und folglich $H^i(f) = H^i(g)$. □

Bemerkung 12.16. Es gelte $f \sim g : A^\bullet \to B^\bullet$ und es sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein (additiver) Funktor in eine weitere abelsche Kategorie. Dann gilt auch $Ff \sim Fg : FA^\bullet \to FB^\bullet$.
Grund: Ist $f \sim g$ durch die Familie von Homomorphismen $D^i : A^{i+1} \to B^i$ realisiert, so gibt uns die Familie $F(D^i)$ eine Homotopie zwischen $F(f)$ und $G(f)$.

Definition 12.17. Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \to B^\bullet$ heißt **Homotopieäquivalenz**, wenn $g : B^\bullet \to A^\bullet$ existiert mit $g \circ f \sim \mathrm{id}_A$ und $f \circ g \sim \mathrm{id}_B$.

Bemerkung 12.18. Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist $H^i(f) : H^i(A) \to H^i(B)$ ein Isomorphismus für alle i. Solche Homomorphismen nennt man **Quasiisomorphismen**. Nicht jeder Quasiisomorphismus ist eine Homotopieäquivalenz:
Man betrachte den Nullmorphismus

$$0 : 0^\bullet \longrightarrow A^\bullet = [0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0].$$

Beide Komplexe sind exakt, ihre Kohomologie ist daher Null und der Nullmorphismus somit ein Quasiisomorphismus. Der Nullmorphismus ist aber keine Homotopieäquivalenz, weil er es dann nach Bemerkung 12.16 auch nach Anwendung eines beliebigen Funktors wäre. Wendet man aber den Funktor $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an, so erhält man

$$0 : 0^\bullet \longrightarrow A^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = [0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0]$$

was kein Quasiisomorphismus (und damit insbesondere auch keine Homotopieäquivalenz) ist, da $A^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nichttriviale Kohomologie hat.

Satz 12.19. *Gegeben seien zwei Komplexe*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

und ein Homomorphismus $\varphi : A \to B$. Wir nehmen an:
- *Die obere Zeile ist exakt.*
- *Alle I^i, $i \geq 0$, sind injektiv.*

Dann existiert ein Komplexhomomorphismus f von der oberen zur unteren Zeile mit $f_{-1} = \varphi$. Beliebige zwei solche f sind homotop.

Beweis. Existenz: Nach Definition von Injektivität setzt sich $A \to B \to I^0$ zu einem Homomorphismus $f_0 : E^0 \to I^0$ fort. Dies macht das erste Quadrat

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E^0 \\ & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle f_0}\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & I^0 \end{array}$$

kommutativ. Nun müssen wir f_1 definieren. Wir schreiben das zweite Quadrat in der Form

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & E^0/A & \longrightarrow & E^1 \\ & & {\scriptstyle f_0}\downarrow & & \\ & & I^0/\operatorname{im}(B) & \longrightarrow & I^1 \end{array}$$

Weil nun I^1 injektiv ist, finden wir $f_1 : E^1 \to I^1$. Dies setzt man induktiv fort und erhält $f = (f_i)$.

Der Beweis der Eindeutigkeit bis auf Homotopie ist sehr technisch und wir lassen ihn aus. □

Korollar 12.20 ($A = B$, $\varphi = \mathrm{id}_A$)**.** *Zwei injektive Auflösungen desselben Objekts sind homotopieäquivalent, die Homotopieäquivalenz ist wohlbestimmt bis auf Homotopie.*

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}_A", "\wr"'] & I^0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] & I^2 \arrow[r] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & J^2 \arrow[r] & \cdots , \end{tikzcd}$$

in dem in der oberen und der unteren Zeile jeweils eine injektive Auflösung von A steht. Nach Satz 12.19 existieren Komplexhomomorphismen $f : I^\bullet \to J^\bullet$ und $g : J^\bullet \to I^\bullet$, eindeutig bis auf Homotopie, die das folgende Diagramm kommutativ machen.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\mathrm{id}_A"] & I^0 \arrow[r] \arrow[d, shift left, "f_0"] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, shift left, "f_1"] & I^2 \arrow[r] \arrow[d, shift left, "f_2"] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\mathrm{id}_A"] & J^0 \arrow[r] \arrow[u, shift left, "g_0"] & J^1 \arrow[r] \arrow[u, shift left, "g_1"] & J^2 \arrow[r] \arrow[u, shift left, "g_2"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Nun kann man sich dasselbe Diagramm anschauen, aber zweimal mit $I^\bullet$ und $gf : I^\bullet \to I^\bullet$. Da $\mathrm{id}_{I^\bullet}$ auch id_A fortsetzt, sagt uns die Eindeutigkeitsaussage von Satz 12.19, dass $gf \sim \mathrm{id}_{I^\bullet}$. Analog erhält man $fg \sim \mathrm{id}_{J^\bullet}$. Daher sind f und g zueinander inverse Homotopieäquivalenzen. □

Korollar 12.21. *Sei $I^\bullet$ ein exakter, injektiver Komplex mit $I^i = 0$ für $i \ll 0$. Dann ist die Inklusion $0^\bullet \to I^\bullet$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $I^i = 0$ für $i < 0$ (verschieben). Dann sind $0^\bullet$ und $I^\bullet$ beides injektive Auflösungen von 0. □

Bemerkung 12.22. Die Bedingung $I^i = 0$ für $i \ll 0$ ist notwendig (aber Gegenbeispiele schwer zu konstruieren).

13 Abgeleitete Funktoren

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven und sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor in eine abelsche Kategorie $\mathcal{B}$.

Wir wählen für $A \in \mathcal{A}$ eine injektive Auflösung $A \to I^\bullet$ und setzen

$$R^iF(A) = H^i(FI^\bullet).$$

Nach Korollar 12.20 gibt eine andere injektive Auflösung in kanonischer Weise isomorphe Gruppen $R^iF(A)$. Ist nun $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus und $A \to I^\bullet$ und $B \to J^\bullet$ injektive Auflösungen, so existiert nach Satz 12.19 ein bis auf Homotopie eindeutiges $f : I^\bullet \to J^\bullet$ mit $H^0(f) = \varphi$. So wird für alle $i \in \mathbb{Z}$ die Zuordnung $A \mapsto R^iF(A)$ zu einem Funktor $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Definition 13.1. $R^iF(-) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt der ***i*-te rechtsabgeleitete Funktor** des linksexakten Funktors F.

Lemma 13.2. *Es gilt $R^iF = 0$ für $i < 0$ und $R^0F = F$. Ist F exakt, so gilt $R^iF = 0$ für $i > 0$.*

Beweis. $R^iF = 0$ für $i < 0$ folgt direkt aus der Definition, wegen $R^iFA = H^i(FI^\bullet)$ und weil $I^\bullet$ im negativen Bereich Null ist. Wir betrachten den exakten Komplex

$$0 \to A \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots .$$

Da F linksexakt ist, folgt die Exaktheit von $0 \to FA \to FI^0 \to FI^1$, was $FA = \ker(FI^0 \to FI^1) = H^0(FI^\bullet)$ und somit $R^0F = F$ zeigt. Analog ist, wenn F exakt ist, der ganze Komplex

$$0 \to FA \to FI^0 \to FI^1 \to FI^2 \to \cdots$$

exakt, also $R^iF = 0$ für $i > 0$ in diesem Fall. □

Satz 13.3. *Für jede exakte Folge $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ existieren natürliche Abbildungen*

$$\delta^i : R^iF(A'') \longrightarrow R^{i+1}F(A')$$

für jedes $i \geq 0$, so dass die (lange) Folge

$$\cdots \to R^iFA' \to R^iFA \to R^iFA'' \to$$

$$R^{i+1}FA' \to R^{i+1}FA \to R^{i+1}FA'' \to \cdots$$

exakt ist. Ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein Homomorphismus exakter Folgen, so kommutiert für alle $i \geq 0$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^iF(A'') & \xrightarrow{\delta} & R^{i+1}F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^i(FB'') & \xrightarrow{\delta} & R^{i+1}F(B'). \end{array}$$

Beweis. Wir wählen nach Satz 12.11 kompatible Auflösungen

$$0 \longrightarrow I'^{\bullet} \longrightarrow I^{\bullet} \longrightarrow I''^{\bullet} \longrightarrow 0$$

von A', A und A''. Da I' aus Injektiven besteht, zerfällt für jedes i die exakte Folge

$$0 \longrightarrow I'^i \longrightarrow I^i \longrightarrow I''^i \longrightarrow 0.$$

(was aber mitnichten bedeutet, dass die Folge von Komplexen $0 \to I'^{\bullet} \to I^{\bullet} \to I''^{\bullet} \to 0$ zerfällt!) Daher ist auch die Folge

$$0 \longrightarrow FI'^i \longrightarrow FI^i \longrightarrow FI''^i \longrightarrow 0$$

exakt. Das verallgemeinerte Schlangenlemma für die exakte Folge von Komplexen

$$0 \longrightarrow FI'^{\bullet} \longrightarrow FI^{\bullet} \longrightarrow FI''^{\bullet} \longrightarrow 0$$

gibt das Ergebnis. Die Kompatibilität unter Homomorphismen zwischen kurzen exakten Folgen ist sehr technisch und wir lassen sie weg. □

Linksabgeleitete Funktoren: Man drehe alle Pfeile um:

$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei rechtsexakter Funktor und $\mathcal{A}$ habe genügend viele Projektive. Wir wählen für jedes Objekt A eine projektive Auflösung

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

und setzen $L_iF(A) := H_i(FP_{\bullet})$.

– alles analog –

14 Azyklische Objekte

Wie vorher sei $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor.

Definition 14.1. $A \in \mathcal{A}$ heißt ***F*-azyklisch**, wenn $R^iFA = 0$ für alle $i \geq 1$ gilt.

Lemma 14.2. *Injektive sind F-azyklisch.*

Beweis. $A \to [0 \to A \to 0 \to \cdots]$ ist eine injektive Auflösung von A und somit

$$R^iF(A) = H^i([0 \to F(A) \to 0 \to \cdots]) = 0 \text{ für } i \geq 1. \qquad \square$$

Satz 14.3. *Sei $A \to I^\bullet$ eine Auflösung durch F-azyklische, d.h.*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

ist exakt und I^i ist F-azyklisch für alle $i \geq 0$. Dann gibt es kanonische Isomorphismen

$$R^iFA \cong H^i(FI^\bullet).$$

Beweis. Diesen Satz beweist man mit Hilfe von *Spektralfolgen*. Man kann diese vermeiden, aber dann wird der Beweis sehr technisch (siehe z.B. Lang's Algebra-Buch). Wir lassen den Beweis weg. $\square$

15 Universelle δ-Funktoren

Sei wie vorher $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Definition 15.1. Ein **(exakter) $\boldsymbol{\delta}$-Funktor** $H = (H^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine Familie von Funktoren $H^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zusammen mit Homomorphismen $\delta : H^n(C) \to H^{n+1}(A)$ für jede kurze exakte Folge $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$, so dass gilt

(i) δ ist funktoriell, d.h. ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen in $\mathcal{A}$ so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(C') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C) \end{array}$$

in $\mathcal{B}$.

(ii) Für jede kurze exakte Folge $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$ ist die lange Folge

$$\cdots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

exakt in $\mathcal{B}$.

Ein **Homomorphismus** $f : H \to H'$ zwischen δ-Funktoren ist eine Familie natürlicher Transformationen $f^n : H^n \to H'^n$, $n \in \mathbb{Z}$, von Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, so dass für jede exakte Folge $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$ und jedes $n \in \mathbb{Z}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow{\scriptstyle f^n} & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} \\ H'^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H'^{n+1}(A) \end{array}$$

kommutiert.

Beispiel 15.2. $\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei linksexakt. Dann ist $H^n := R^n F$ ein δ-Funktor.

Konvention: Ist ein δ-Funktor H^n nur für gewisse Indizes n gegeben, so setzen wir $H^n = 0$ für alle anderen Indizes.

Definition 15.3. Ein δ-Funktor $H = (H^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt **universell**, wenn für jeden δ-Funktor $H' = (H'^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sich jede natürliche Transformation $f^0 : H^0 \to H'^0$ eindeutig zu einem Homomorphismus $f : H \to H'$ von δ-Funktoren ausdehnt.

Bemerkung 15.4. Das bedeutet, dass sich jeder linkexakte Funktor H^0 höchstens auf eine Weise (d.h. wenn existent, dann bis auf Isomorphie eindeutig) zu einem universellen δ-Funktor ausdehnen lässt.

Definition 15.5. Ein Funktor F heißt **auslöschbar**, wenn zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ein Monomorphismus $A \overset{u}{\hookrightarrow} A'$ existiert mit $F(u) = 0$.

Satz 15.6. *Ein δ-Funktor $H = (H^n)_{n\geq 0}$ ist universell, wenn für jedes $n \geq 1$ der Funktor H^n auslöschbar ist.*

Beweis. Sei $H' = (H'^n)_{n\geq 0}$ ein beliebiger δ-Funktor von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ und sei $f^0 : H^0 \to H'^0$ eine natürliche Transformation. Wir gehen per Induktion vor und nehmen an, dass wir bereits die Existenz eindeutig bestimmter natürlicher Transformationen $f^i : H^i \longrightarrow H'^i$, $i = 0, \ldots, n$, welche mit δ kommutieren, gezeigt haben. Sei $A \in \mathcal{A}$ und sei $0 \to A \xrightarrow{u} I \to J \to 0$ eine exakte Folge so dass $H^{n+1}(u) = 0$. Dann erhalten wir einen eindeutig bestimmten Morphismus $f^{n+1} : H^{n+1}(A) \to H'^{n+1}(A)$ aus dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(I) & \longrightarrow & H^n(J) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) & \xrightarrow{0} & H^{n+1}(I) \\ \downarrow{\scriptstyle f^n} & & \downarrow{\scriptstyle f^n} & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} & & \\ H'^n(I) & \longrightarrow & H'^n(J) & \xrightarrow{\delta} & H'^{n+1}(A). & & \end{array}$$

Es verbleibt zu zeigen, dass f^{n+1} funktoriell ist und mit δ kommutiert. Das lassen wir weg. □

Korollar 15.7. *$\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei linksexakt. Dann ist $(R^nF)_{n\geq 0}$ ein universeller δ-Funktor.*

Beweis. Injektive sind F-azyklisch, also $R^nF(I) = 0$ für $n \geq 1$. Für $A \in \mathcal{A}$ existiert ein injektives Objekt I mit $A \overset{u}{\hookrightarrow} I$, also ist $R^nF(u) : R^nFA \to R^nFI = 0$ (zwangsläufig) die Nullabbildung. Daher ist R^nF auslöschbar für alle $n \geq 1$ und das Ergebnis folgt aus Satz 15.6. $\square$

Schlussbemerkung: Dies ist die klassische Theorie ($\widehat{=}$ partielle Ableitung in der Analysis). Es lohnt sich die allgemeinere Theorie („Abgeleitete Kategorien“) zu lernen. Für fortgeschrittene Anwendungen wird zunehmend die Sprache der „∞-Kategorien“ verwendet.

16 Tor und Ext

Sei A ein kommutativer Ring und N ein A-Modul. Wir betrachten den rechtsexakten Funktor

$$- \otimes_A N : A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}.$$

In A-Mod existieren genügend viele Projektive, also existiert $L_n(- \otimes_A N) : A\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$.

Berechnung: Wähle projektive Auflösung $P_\bullet \to M$. Dann gilt $L_n(-\otimes_A N)(M) = H_n(P_\bullet \otimes_A N)$.

Behauptung: Flache A-Moduln sind $(- \otimes_A N)$-azyklisch.
Grund: Wähle eine flache Auflösung $Q_\bullet \to N$ und betrachte den Funktor $(F_n)_{n\geq 0}$ der gegeben ist durch

$$F_n(M) := H_n(M \otimes_A Q_\bullet).$$

Dann gilt:

• $F_0(M) = M \otimes_A N$ (weil $M \otimes_A -$ rechtsexakt ist).
• $(F_n)_{n\geq 0}$ ist ein δ-Funktor: Ist $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt, so auch

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A Q_\bullet \longrightarrow M \otimes_A Q_\bullet \longrightarrow M'' \otimes_A Q_\bullet \longrightarrow 0$$

weil alle Q_i flach sind. Das verallgemeinerte Schlangenlemma 12.6 liefert uns die lange exakte Folge.
• Ist M flach, so gilt $F_nM = 0$ für alle $n \geq 1$ (weil dann $M \otimes_A (\to Q_2 \to Q_1 \to Q_0 \to N \to 0)$ exakt ist.
• Für $n \geq 1$ ist F_n auslöschbar (jeder Modul ist Faktormodul eines freien, also eines flachen)

Wir erhalten nach Satz 15.6:

$$F_n(-) = L_n(- \otimes_A N)$$

Insbesondere sind flache Moduln $(- \otimes_A N)$-azyklisch.

Nach Satz 14.3 können wir $L_n(- \otimes_A N)(M)$ durch eine flache Auflösung von M und nach dem Obigen auch durch eine flache Auflösung von N berechnen. Wir erhalten

$$L_n(- \otimes_A N)(M) \cong L_n(M \otimes_A -)(N)$$

Man nennt diesen Funktor

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N).$$

Als Anwendung zeigen wir

Satz 16.1. *Sei A ein Ring und*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine exakte Folge von A-Moduln mit M'' flach. Dann ist für jeden A-Modul N die Folge

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Dies folgt aus $\mathrm{Tor}_1^A(M'', N) = 0$ und der langen exakten Folge für die abgeleiteten Funktoren. □

Satz 16.2. *Sei A ein lokaler Ring mit Maximalideal $\mathfrak{m}$ und $k = A/\mathfrak{m}$. Sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sind äquivalent*

(i) *M ist frei.*
(ii) *M ist projektiv.*
(iii) *M ist flach.*
(iv) $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, M) = 0$ *für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.*

Hat A die Eigenschaft, dass Untermoduln endlich erzeugter Moduln endlich erzeugt sind, so sind (i)–(iv) *äquivalent zu*

(v) $\mathrm{Tor}_1^A(k, M) = 0$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sind klar.
((iv) bzw. (v)) $\Rightarrow$ (i) Seien $x_1, \ldots, x_n \in M$ Elemente, so dass $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in M/\mathfrak{m}M$ eine k-Vektorraumbasis bilden. Nach dem Nakayama-Lemma wird M durch seine Elemente $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt. Sei $F = A^n$ und $\phi : A^n \to M$ gegeben durch $\varphi(e_i) = x_i$. Sei $E = \ker(\varphi)$. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

liefert nach Tensorieren mit $k = A/\mathfrak{m}$ die exakte Folge

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(k, M) \longrightarrow k \otimes_A E \longrightarrow k \otimes_A F \xrightarrow{1 \otimes \varphi} k \otimes_A M \longrightarrow 0.$$

Nun ist $1\otimes\varphi$ eine surjektive Abbildung zwischen n-dimensionalen k-Vektorräumen ($k \otimes_A M \cong A/\mathfrak{m} \otimes_A M = M/\mathfrak{m}M$), also ein Isomorphismus. Daher gilt

$$E/\mathfrak{m}E = k \otimes_A E = 0,$$

also $E = \mathfrak{m}E$. Wüssten wir, dass E endlich erzeugt ist, so folgte $E = 0$ nach dem Nakayama-Lemma. Da E Untermodul des endlich erzeugten Moduls F ist, zeigt dies (v) $\Rightarrow$ (i).

Im allgemeinen Fall sei $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in E$ beliebig und $\mathfrak{a}_x = (a_1, \ldots, a_n)$ (ein endlich erzeugtes Ideal in A). Tensoriert man $0 \to E \to F \to M \to 0$ mit $A/\mathfrak{a}_x$ und nutzt $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}_x, M) = 0$, erhält man die Inklusion $E/\mathfrak{a}_x E \hookrightarrow F/\mathfrak{a}_x F$, also $\mathfrak{a}_x E = \mathfrak{a}_x F \cap E$.

Insbesondere gilt $x \in \mathfrak{a}_x E = \mathfrak{a}_x \mathfrak{m} E \subset \mathfrak{a}_x \mathfrak{m} F$. Es folgt für $i = 1, \ldots, n$, dass $a_i \in \mathfrak{a}_x \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{a}_x \subset \mathfrak{a}_x \mathfrak{m}$. Hiermit folgt $\mathfrak{a}_x = \mathfrak{m}\mathfrak{a}_x$, also $\mathfrak{a}_x = 0$ nach Nakayama. Dies zeigt $x = 0$, also $E = 0$. Daher ist $M \cong F$ frei. □

Korollar 16.3. *Sei A ein Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann sind äquivalent*

(i) *M ist flacher A-Modul.*
(ii) *$M_\mathfrak{p}$ ist freier $A_\mathfrak{p}$-Modul für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$.*
(iii) *$M_\mathfrak{m}$ ist freier $A_\mathfrak{m}$-Modul für jedes Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$.*

Beweis. Flachheit ist eine lokale Eigenschaft und Satz 16.2. □

Satz 16.4. *Ist A ein Hauptidealring, so gilt*

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = 0, \quad n \geq 2$$

für beliebige A-Moduln M und N.

Beweis. Da über einem Hauptidealring Untermoduln von freien Moduln frei sind, hat M (analog N) eine freie Auflösung der Form $0 \to F_1 \to F_0 \to 0$. □

Satz 16.5. *Sei M eine abelsche Gruppe. Dann gilt*

$$TM \cong \mathrm{Tor}_1^\mathbb{Z}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Beweis. Wir betrachten die exakte Folge $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$. Diese induziert ($\mathbb{Q}$ ist flach) eine exakte Folge

$$0 = \mathrm{Tor}_1^\mathbb{Z}(M, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Tor}_1^\mathbb{Z}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z} \to$$

$$M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} \to M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

und $TM = \ker(M \to M \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q})$. □

Analog: Für $\mathrm{Hom}(-,-)$.
Es gilt:

$$R^n\mathrm{Hom}_R(-,N)(M) = R^n\mathrm{Hom}_R(M,-)(N)$$

und man bezeichnet diese Gruppe mit

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N).$$

Kann berechnet werden durch projektive Auflösung von M (= injektive Auflösung in $(R\text{-Mod}^{\mathrm{op}})$ oder injektive Auflösung von N.

Satz 16.6. *Ist A ein Hauptidealring, so gilt*

$$\mathrm{Ext}^n_A(M,N) = 0, \quad n \geq 2,$$

für beliebige A-Moduln M und N.

Beweis. Da über einem Hauptidealring Untermoduln von freien Moduln frei sind, hat M eine freie Auflösung der Form $0 \to F_1 \to F_0 \to 0$. Alternativ: über einem Hauptidealring sind Faktormoduln injektiver (=teilbarer) Moduln teilbar. Daher hat N eine injektive Auflösung der Form $0 \to I^0 \to I^1 \to 0$. □

Satz 16.7. *Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und M, N A-Moduln. Dann gilt*

(i) *Für alle n gilt:*

$$S^{-1}\mathrm{Tor}^A_n(M,N) \cong \mathrm{Tor}^{S^{-1}A}_n(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

(ii) *Hat M eine Auflösung $F_\bullet \to M$ durch endlich erzeugte freie A-Moduln, so gilt für alle n:*

$$S^{-1}\mathrm{Ext}^n_A(M,N) \cong \mathrm{Ext}^n_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

Beweis. Es sei $F = A^{(X)}$ der freie A-Modul über einer nicht notwendig endlichen Menge X. Dann gilt für jedes N:

$$S^{-1}(F \otimes_A N) = S^{-1}N^{(X)} = (S^{-1}N)^{(X)} = (S^{-1}F \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N).$$

Nun wenden wir dies auf eine freie Auflösung von M an. Da deren Lokalisierung eine freie Auflösung von $S^{-1}M$ als $S^{-1}A$-Modul ist, erhalten wir (i).

Ist X endlich, so gilt

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_A(F,N) = S^{-1}N^X = (S^{-1}N)^X = \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}F, S^{-1}N)$$

Nun wenden wir dies auf eine freie Auflösung von M an und erhalten (ii) im selben Stil wie (i). □

Bemerkung 16.8. Satz 16.7 (ii) wendet sich z.B. auf endlich erzeugte Moduln über *noetherschen* Ringen an.

17 Ext und Erweiterungen

Es seien M, N zwei R-Moduln. Wir definieren die Menge $E(M,N)$ als die Menge aller exakten Folgen

$$0 \to N \to E \to M \to 0^{\cdot}$$

bis auf die Äquivalenzrelation: es gibt einen Homomorphismus $\phi : E \to E'$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N & \to & E & \to & M & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \wr & & {\scriptstyle \phi}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \wr & & \\ 0 & \to & N & \to & E' & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

kommutiert (dann ist ϕ automatisch ein Isomorphismus, also ist die Relation symmetrisch). Die Menge $E(M,N)$ hat ein ausgezeichnetes Element, nämlich die zerfallende Erweiterung $0 \to N \to N \oplus M \to M \to 0$.

Wir wählen einen projektiven Modul P und eine Surjektion $\epsilon : P \twoheadrightarrow M$. Sei $K = \ker(\epsilon)$, d.h. wir erhalten eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

und somit eine exakte Folge

$$\mathrm{Hom}_R(P,N) \to \mathrm{Hom}_R(K,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(P,N) = 0.$$

Somit gilt $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \cong \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_R(P,N) \to \mathrm{Hom}_R(K,N))$. Nun sei $x \in E(M,N)$ die Isomorphieklasse der Erweiterung

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Da P projektiv ist, können wir $\epsilon : P \to M$ zu $\phi : P \to E$ heben. Wir betrachten das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N & \to & E & \to & M & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle \phi_{|K}}\uparrow & & {\scriptstyle \phi}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\uparrow & & \\ 0 & \to & K & \to & P & \xrightarrow{\epsilon} & M & \to & 0 \end{array}$$

und definieren eine Abbildung $\Psi : E(M,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ durch

$$\Psi(x) = \text{das Bild von } \phi_{|K} \text{ in}$$

$$\mathrm{Ext}^1_R(M,N) = \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_R(P,N) \to \mathrm{Hom}_R(K,N)).$$

Satz 17.1. *Die Abbildung Ψ ist wohldefiniert, hängt nicht von der Auswahl der Surjektion $\epsilon : P \twoheadrightarrow M$ ab und definiert eine Bijektion*

$$E(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_R(M,N),$$

welche die zerfallende Erweiterung in $E(M,N)$ auf das Nullelement in $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ abbildet.

Beweis. Ist ϕ' ein weiterer Homomorphismus $P \to E$, der $\epsilon : P \to M$ hebt, so faktorisiert $\phi - \phi'$ über die Inklusion $N \hookrightarrow E$. Daher unterscheiden sich $\phi|_K$ und $\phi'|_K$ um die Einschränkung eines Homomorphismus $P \to N$ auf K und haben daher gleiches Bild in $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) \cong \mathrm{coker}(\mathrm{Hom}_R(P,N) \to \mathrm{Hom}_R(K,N))$. Daher ist Ψ wohldefiniert. Zerfällt die Erweiterung, so erhalten wir

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[l, bend right, "s"'] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[u, "\phi|_K"] & P \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[u, "\phi"] & M \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

Es ist dann $s \circ \phi$ eine Fortsetzung von $\phi|_K$ auf P und daher bildet sich die zerfallende Erweiterung unter Ψ auf Null ab.

Wir konstruieren nun ein Inverses zu Ψ. Sei $y \in \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$, $0 \to K \to P \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ wie oben und $\psi : K \to N$ ein Vertreter von y. Wir setzen

$$E = (N \times P)/\{(-\psi(k), k), k \in K\}.$$

(Mit anderen Worten, wir identifizieren in $N \times E$ die Elemente $(0,k)$ und $(\psi(k), 0)$, $k \in K$.) Wir erhalten die exakte Folge

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{n \mapsto \overline{(n,0)}} E \xrightarrow{\overline{(n,p)} \mapsto \epsilon(p)} M \longrightarrow 0,$$

in der die zweite Abbildung wegen $K = \ker(\epsilon)$ wohldefiniert ist. Wir nennen die Äquivalenzklasse dieser exakten Folge $\Phi(y)$ und müssen zeigen, dass die Konstruktion unabhängig von der Auswahl von ψ ist. Sei $\psi' : K \to N$ ein weiterer Vertreter von y. Dann gilt $\psi' - \psi = \phi|_K$ für einen Homomorphismus $\phi : P \to N$. Wir betrachten den Modul $E' = (N \times P)/\{(-\psi'(k), k), k \in K\}$ und müssen zeigen, dass die exakten Folgen $0 \to N \to E' \to M \to 0$ und $0 \to N \to E \to M \to 0$ äquivalent sind. Dazu betrachten wir den Homomorphismus

$$N \times P \longrightarrow N \times P,\ (n,p) \longmapsto (n - \phi(p), p).$$

Er hat die inverse Abbildung $(n,p) \mapsto (n + \phi(p), p)$ und ist daher ein Isomorphismus. Wegen $\psi'(k) - \phi(k) = \psi(k)$ für alle $k \in K$, überführt dieser Isomorphismus den Untermodul $\{(-\psi'(k), k), k \in K\}$ in den Untermodul $\{(-\psi(k), k), k \in K\}$ und induziert so einen Isomorphismus $E' \xrightarrow{\sim} E$, der sich zu einem Isomorphismus der entsprechenden exakten Folgen fortsetzt. Diese sind somit äquivalent und daher $\Phi(y)$ wohldefiniert.

Die Komposition $\phi : P \overset{(0,\mathrm{id})}{\hookrightarrow} N \times P \twoheadrightarrow E$ ist eine Fortsetzung von $\psi : K \to N$ zu einen Homomorphismus $\phi : P \to E$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & E \arrow[r, "(n,p) \mapsto \epsilon(p)"] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[u, "\psi=\phi_{|K}"] & P \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[u, "\phi"] & M \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{id}_M"'] & 0. \end{tikzcd}$$

An diesem Diagramm und der Konstruktion der Abbildung Ψ sieht man, dass $\Psi(\Phi(y)) = y$ gilt. Sind wir umgekehrt von der exakten Folge $0 \to N \to E \to M \to 0$ gestartet, so faktorisiert der Homomorphismus $N \times P \to E$, $(n,p) \mapsto n + \phi(p)$ über den Faktormodul modulo $\{(-\psi(k), k), k \in K\}$. Wir erhalten so einen Homomorphismus exakter Folgen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N & \to & E & \to & M & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle \mathrm{id}_N} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \mathrm{id}_M} & & \\ 0 & \to & N & \to & N \times P/\{(-\psi(k), k), k \in K\} & \to & M & \to & 0. \end{array}$$

Die beiden Folgen sind somit äquivalent, was übersetzt in unsere Konstruktionen $\Phi(\Psi(x)) = x$ für alle $x \in E(M,N)$ bedeutet. Daher sind Ψ und Φ zueinander invers.

Die Unabhängigkeit der Konstruktion von der Auswahl der Surjektion $\epsilon : P \twoheadrightarrow M$ lassen wir weg. □

Bemerkung 17.2. Man kann die Bijektion $E(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ auch mit Hilfe einer Einbettung $N \hookrightarrow I$ in einen injektives Objekt konstruieren.

18 Abgeleitete projektive Limites

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Unsere Indexmenge ist stets $I \cong \mathbb{N}$ und wir schreiben projektive Systeme in der Form

$$(M_n, d_n) = \ \cdots \to M_3 \xrightarrow{d_2} M_2 \xrightarrow{d_1} M_1.$$

Ein Homomorphismus zwischen Systemen ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & M_3' & \longrightarrow & M_2' & \longrightarrow & M_1' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die Kategorie der projektiven Systeme bezeichnen wir mit $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Produkte, Kerne, Kokerne, etc. bilden sich stufenweise. Daher ist $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ eine abelsche Kategorie.

Satz 18.1. *Hat $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive, so auch $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Ein Objekt (I_n, d_n) von $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ist genau dann injektiv, wenn für alle n das Objekt I_n injektiv in $\mathcal{A}$ und $d_n : I_{n+1} \to I_n$ ein zerfallender Epimorphismus ist.*

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir die exakten Funktoren

$$V_m : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A},\ (A_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto A_m$$

und

$$U_m : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ A \mapsto (\cdots \to 0 \to A \xrightarrow{\mathrm{id}} A \xrightarrow{\mathrm{id}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{id}} A) \quad (A \text{ an Position 1 bis } m).$$

Ein Homomorphismus von $U_m(A)$ in ein System (B_n, d_n) ist eindeutig durch einen Homomorphismus $A \to B_m$ gegeben, daher haben wir Adjunktionen $U_m \dashv V_m$ für alle m. Zudem ist U_m exakt. Nach Satz 11.3 überführt V_m Injektive in Injektive. Für ein injektives $(I_n, d_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ist daher $I_n \in \mathcal{A}$ injektiv für alle n.

Wir bezeichnen die (abelsche) Produktkategorie („$\mathcal{A}$ hoch abzählbar“) mit $\mathcal{A}^{|\mathbb{N}|}$ und betrachten die exakten Funktoren

$$V : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A}^{|\mathbb{N}|},\ (A_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (A_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

$$P : \mathcal{A}^{|\mathbb{N}|} \to \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\prod_{i=1}^{n} A_n, p_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

wobei $p_n : \prod_{i=1}^{n+1} A_i \to \prod_{i=1}^{n} A_n$ die kanonische Projektion ist.

Wir haben die Adjunktion $V \dashv P$, die gegeben ist, indem wir einem Element $(\phi_n) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{|\mathbb{N}|}}(V(A_n, d_n), (B_n))$ das Element in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}((A_n, d_n), P(B_n))$ zuordnen, das durch

$$\begin{tikzcd}
A_{n+1} \arrow[r, "(\phi_1\circ d^n, \phi_2\circ d^{n-1}, \ldots, \phi_{n+1})"] \arrow[d, "d_n"] & \prod_{i=1}^{n+1} B_i \arrow[d, "p_n"] \\
A_n \arrow[r, "(\phi_1\circ d^{n-1}, \ldots, \phi_n)"] & \prod_{i=1}^{n} B_i
\end{tikzcd}$$

gegeben ist (hier bedeutet d^n die n-fache Hintereinanderausführung der Übergangsabbildung d). Weil V exakt ist, überführt P Injektive in Injektive. Ein $(I_n) \in \mathcal{A}^{|\mathbb{N}|}$ ist genau dann injektiv, wenn alle I_n injektiv in $\mathcal{A}$ sind. Da $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive hat, finden wir für $(A_n, d_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ein Injektives $(I_n) \in \mathcal{A}^{|\mathbb{N}|}$ und einen Monomorphismus $V(A_n, d_n) \hookrightarrow (I_n)$. Weil P exakt ist, induziert dies einen Monomorphismus

$$(A_n, d_n) \overset{\iota}{\hookrightarrow} PV(A_n, d_n) \hookrightarrow P(I_n),$$

wobei ι die kanonische Abbildung ist, die per Adjunktion durch $\mathrm{id}_{V(A_n, d_n)}$ gegeben ist. Daher hat $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ genügend viele Injektive.

Sei nun (I_n, d_n) injektiv. Dann hat die Inklusion $\iota : (I_n, d_n) \hookrightarrow PV(I_n, d_n)$ einen Schnitt s und wir erhalten Schnitte zu den d_n durch die Abbildungen $s_{n+1} \circ i_n \circ \iota_n$:

$$\begin{tikzcd}
I_{n+1} \arrow[r, hook, "\iota_{n+1}"] \arrow[d, "d_n"'] & \prod_{i=1}^{n+1} I_i \arrow[l, bend left, "s_{n+1}"] \arrow[d, "p_n"'] \\
I_n \arrow[r, hook, "\iota_n"] & \prod_{i=1}^{n} I_i \arrow[l, bend left, "s_n"] \arrow[u, bend right, "i_n"']
\end{tikzcd}$$

Schließlich sei (I_n, d_n) mit injektiven I_n und zerfallenden Surjektionen d_n gegeben. Dann gilt $I_{n+1} \cong \ker(d_n) \oplus I_n$, so dass $\ker(d_n)$ injektiv ist für alle n. Induktiv konstruiert man einen Isomorphismus

$$(I_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}} \cong P(\ker(d_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}).$$

Nach dem oben gezeigten ist (I_n, d_n) injektiv. $\square$

Ist $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie in der abzählbare projektive Limites existieren, so ist der Funktor $\varprojlim : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A}$ rechtsadjungiert zum Funktor „konstantes System“

$$\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ A \mapsto (\cdots \overset{\mathrm{id}}{\to} A \overset{\mathrm{id}}{\to} A)$$

(die Adjunktion ist nur eine Umformulierung der Universaleigenschaft von $\varprojlim$). Insbesondere ist $\varprojlim$ linksexakt, was wir im Fall $\mathcal{A} = R$-Mod bereits in Satz 6.24 gesehen hatten. Hat $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive, so existieren also die Rechtsableitungen

$$\varprojlim{}^n := R^n \varprojlim : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A},\ n \geq 0.$$

Korollar 18.2. *Ist $J \subset I \cong \mathbb{N}$ kofinal, so haben wir Isomorphismen*

$$\varprojlim_{i\in I}{}^n A_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{j\in J}{}^n A_j$$

für alle $n \geq 0$.

Beweis. Ist $(A_i)_{i\in I} \to (I_i^\bullet)_{i\in I}$ eine injektive Auflösung in $\mathcal{A}^I$, so ist $(A_j)_{j\in J} \to (I_j^\bullet)_{j\in J}$ eine injektive Auflösung in $\mathcal{A}^J$ und wir erhalten nach Lemma 6.27, dass

$$\varprojlim_{i\in I}{}^n A_i = H^n(\varprojlim_{i\in I}(I_i^\bullet)) = H^n(\varprojlim_{j\in J}(I_j^\bullet)) = \varprojlim_{j\in J}{}^n A_j. \qquad \square$$

Wir betrachten für $m \geq 0$ das verschobene System $A[m] = (A_{n+m}, d_{n+m})_{n\in\mathbb{N}}$. Wir haben einen Homomorphismus *kan* : $A[m] \to A$ durch

$$\begin{array}{ccc} A_{n+m+1} & \xrightarrow{d^m} & A_{n+1} \\ \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ A_{n+m} & \xrightarrow{d^m} & A_n \end{array}$$

Satz 18.3. *kan induziert Isomorphismen $\varprojlim{}^i A[m] \xrightarrow{\sim} \varprojlim{}^i A$ für alle $i \geq 0$.*

Beweis. Es genügt, den Fall $m = 1$ zu betrachten. Für $i = 0$ haben wir für jedes $B \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{Hom}(\text{konst.}(B), A[1]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\text{konst.}(B), A)$$

(der Morphismus $B \to A_1$ ergibt sich als Komposition $B \to A_2 \xrightarrow{d} A_1$) und somit

$$\mathrm{Hom}(B, \varprojlim A[1]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(B, \varprojlim A)$$

Yoneda liefert $\varprojlim A[1] \xrightarrow{\sim} \varprojlim A$. Der allgemeine Fall ergibt sich dadurch, dass für eine injektive Auflösung $A \hookrightarrow I^\bullet$, $A[1] \to I[1]^\bullet$ eine injektive Auflösung ist. $\square$

Korollar 18.4. *Angenommen es gibt zu jedem n ein m, so dass $A_{n+m} \xrightarrow{d^m} A_n$ die Nullabbildung ist (man nennt so ein System ein **Mittag-Leffler-Nullsystem**, kurz ML-Null). Dann gilt*

$$\varprojlim_n{}^i A_n = 0$$

für alle $i \geq 0$.

Beweis. Nach Übergang zu einem kofinalen Teilsystem können wir annehmen, dass $d : A_{n+1} \to A_n$ für alle n die Nullabbildung ist. Dann ist $kan : A[1] \to A$ die Nullabbildung und somit die induzierte Abbildung $\varprojlim^i A[1] \to \varprojlim^i A$ sowohl Null als auch ein Isomorphismus. $\square$

Von jetzt an sei R ein Ring und $\mathcal{A} = R$-Mod (oder Mod-R, oder allgemeiner eine abelsche Kategorie in der wir mit Elementen rechnen dürfen). Für $m \geq n$ setzen wir $d_{m,n} = d_n \circ \cdots \circ d_{m-1} \cdot M_m \longrightarrow M_n$.

Definition 18.5. Ein projektives System (M_n, d_n) von R-Moduln hat die **Mittag-Leffler-Eigenschaft (ML)** wenn zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $N \geq n$ mit

$$\mathrm{im}(d_{m,n} : M_m \to M_n) = \mathrm{im}(d_{N,n} : M_N \to M_n) \quad \forall\, m \geq N \quad \text{existiert.}$$

Bemerkung 18.6. Wir haben

$$M_n \supset \mathrm{im}(d_{n+1,n}) \supset \mathrm{im}(d_{n+2,n}) \supset \mathrm{im}(d_{n+3,n}) \supset \ldots$$

und die ML-Eigenschaft besagt, dass diese fallende Folge für jedes $n \in \mathbb{N}$ stationär wird.

Beispiele 18.7. • Jedes System mit surjektiven Übergangsabbildungen erfüllt ML (Stabilisierung bei M_n).
• Jedes ML-Null-System erfüllt ML (Stabilisierung bei $0 \subset M_n$).
• Jedes System von R-Moduln endlicher Länge erfüllt ML.

Theorem 18.8. *Sei $(M_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein projektives System von R-Moduln. Dann gilt*

$$\varprojlim_n{}^i M_n = 0 \quad \text{für } i \geq 2.$$

Hat (M_n, d_n) die ML-Eigenschaft, so gilt

$$\varprojlim_n{}^i M_n = 0 \quad \text{für } i \geq 1.$$

Lemma 18.9. *Sei $0 \longrightarrow (M_n') \longrightarrow (M_n) \longrightarrow (M_n'') \longrightarrow 0$ eine exakte Folge projektiver Systeme von R-Moduln. Sind die Übergangsabbildungen in M' alle surjektiv, so ist die Folge*

$$0 \longrightarrow \varprojlim M_n' \longrightarrow \varprojlim M_n \longrightarrow \varprojlim M_n'' \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis von Lemma 18.9. Es genügt, die Surjektivität rechts zu zeigen. Sei also $(x_m'') \in \varprojlim_n M_m''$ beliebig. Wir konstruieren induktiv ein Urbild $(x_n) \in \varprojlim_n M_n$. Zunächst wählen wir ein Urbild $x_1 \in M_1$ von $x_1'' \in M_1''$. Angenommen, wir haben für $i = 1, \ldots, n$ Urbilder $x_i \in M_i$ von $x_i'' \in M_i''$ mit $d(x_i) = x_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$ konstruiert. Dann konstruieren wir $x_{n+1} \in M_{n+1}$ so:

Wähle zunächst irgendein Urbild $y_{n+1} \in M_{n+1}$ von $x_{n+1}'' \in M_{n+1}''$. Dann liegt $x_n - d(y_{n+1})$ in $M_n' = \ker(M_n \to M_n'')$. Wir wählen ein $z_{n+1} \in M_{n+1}'$ mit $d(z_{n+1}) = x_n - d(y_{n+1})$. Dann ist $x_{n+1} := y_{n+1} + z_{n+1}$ auch ein Urbild von x_{n+1}'' und es gilt $d(x_{n+1}) = d(y_{n+1}) + x_n - d(y_{n+1}) = x_n$. □

Beweis von Theorem 18.8. Wir nehmen zunächst an, dass alle Übergangsabbildungen in M surjektiv sind und wählen eine injektive Auflösung $M \to I^\bullet$. Nach Satz 18.1 sind auch in allen I^i die Übergangsabbildungen surjektiv und gleiches gilt auch für jedes Faktorsystem von I^i. Zerhackt man die lange exakte Folge

$$0 \to M \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

in kurze exakte und wendet Lemma 18.9 an, erhält man die exakte Folge

$$0 \to \varprojlim M \to \varprojlim I^0 \to \varprojlim I^1 \to \cdots$$

und somit $\varprojlim^i M = 0$ für $i \geq 1$. Ist nun M beliebig und $M \hookrightarrow I$ mit injektivem I gewählt, so hat $\widetilde{M} := \operatorname{coker}(M \hookrightarrow I)$ surjektive Übergangsabbildungen und wir erhalten

$$\varprojlim{}^i M = \varprojlim{}^{i-1} \widetilde{M} = 0 \text{ für } i \geq 2.$$

Nun sei M ein ML-System. Wir definieren ein Untersystem $(N_n) \subset (M_n)$ durch

$$N_n = \bigcap_{m \geq n} d_{m,n}(M_m).$$

Zeigen wir zunächst, dass dies wirklich ein Untersystem ist, d.h. dass $d_n(N_{n+1}) \subset N_n$ gilt. Das sieht man an dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
N_{n+1} \arrow[d, dashed] & \cdots \arrow[r, hook] & \mathrm{im}(d_{n+2,n+1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & \mathrm{im}(d_{n+1,n+1}) \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & M_{n+1} \arrow[d] \\
N_n & \cdots \arrow[r, hook] & \mathrm{im}(d_{n+2,n}) \arrow[r, hook] & \mathrm{im}(d_{n+1,n}) \arrow[r, hook] & M_n
\end{tikzcd}$$

Da (M_n) die ML-Eigenschaft hat, hat das System (N_n) überdies surjektive Übergangsabbildungen. Stabilisiert sich die untere Zeile bei $\mathrm{im}(d_{n+m,n})$, d.h. gilt $N_n = \mathrm{im}(d_{n+m,n})$, so ist der induzierte Homomorphismus $M_{n+m}/N_{n+m} \to M_n/N_n$ Null. Das System (M_n/N_n) hat daher die ML-Null-Eigenschaft. Mithilfe von Korollar 18.4 und dem obigen Ergebnis für Systeme mit surjektiven Übergangsabbildungen erhalten wir die exakte Folge

$$\begin{array}{ccccc}
\varprojlim^1(N_n) & \longrightarrow & \varprojlim^1(M_n) & \longrightarrow & \varprojlim^1 M_n/N_n. \\
\| & & & & \| \\
0 & & & & 0
\end{array}$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Bemerkung 18.10. Für die Gültigkeit aller Aussagen in diesem Abschnitt, insbesondere von Lemma 18.9 ist es zwingend notwendig, dass die Indexmenge abzählbar ist.

Teil 3: Kommutative Algebra fortgesetzt

19 Noethersche Moduln und Ringe

Lemma 19.1. *Sei A ein kommutativer Ring und M ein A-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) *Jede aufsteigende Kette*

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots \subset M$$

von Untermoduln wird stationär (d.h. es existiert ein n mit $M_{n+i} = M_n$ $\forall i \geq 0$).

(ii) *Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M hat ein maximales Element bzgl. „$\subset$“.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ist (ii) falsch, so existiert eine nichtleere Menge T von Untermoduln ohne maximales Element und wir können induktiv eine nicht-abbrechende Kette konstruieren.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Die Menge $T = \{M_1, M_2, \dots\}$ hat ein maximales Element, sagen wir M_n. Dann bricht die Kette bei M_n ab. □

Definition 19.2. Ein A-Modul M heißt **noethersch**, wenn die äquivalenten Bedingungen von Lemma 19.1 erfüllt sind.

Beispiel 19.3. $\ell_A(M) < \infty \Rightarrow M$ noethersch.

Lemma 19.4. *Ein A-Modul M ist genau dann noethersch, wenn jeder Untermodul von M endlich erzeugt ist.*

Beweis. $\Rightarrow$ Sei $N \subset M$ ein Untermodul. Dann ist auch N noethersch. Wir betrachten die (nichtleere) Menge T der endlich erzeugten Untermoduln von N. Diese hat ein maximales Element N_0. Angenommen $N_0 \subsetneqq N$. Wähle $x \in N \smallsetminus N_0$. Dann ist

$$N_0 + Ax \subset N$$

auch endlich erzeugt im Widerspruch zur Maximalität von N_0 Also $N_0 = N$ und N ist endlich erzeugt.
$\Leftarrow$ Sei $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ eine Kette. Setze $N = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$. Dann ist N endlich erzeugt also $N = M_n$ für ein n. Daher wird die Kette stationär. □

Korollar 19.5. *Endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring sind noethersch.*

Beweis. Sei M endlich erzeugt und $N \subset M$ ein beliebiger Untermodul. Wir wählen eine Surjektion $\phi : F \twoheadrightarrow M$, wobei F ein freier Modul von endlichem Rang ist und erhalten die Surjektion $\phi^{-1}(N) \twoheadrightarrow N$. Nach dem Elementarteilersatz für Hauptidealringe (siehe LA II) ist $\phi^{-1}(N) \subset F$ frei von endlichem Rang und daher N endlich erzeugt. □

Lemma 19.6. *Sei*
$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$
exakt. Dann gilt
$$M \text{ noethersch} \iff M' \text{ und } M'' \text{ noethersch.}$$

Beweis. $\Rightarrow$ Jede aufsteigende Kette in M' (bzw. M'') gibt im Bild (bzw. Urbild) eine aufsteigende Kette in M, die stationär werden muss.
$\Leftarrow$ Sei $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ eine aufsteigende Kette in M. Dann erhalten wir die aufsteigenden Ketten
$$M_1 \cap M' \subset M_2 \cap M' \subset \cdots \subset M' \quad \text{und}$$
$$M_1 + M'/M' \subset M_2 + M'/M' \subset \cdots \subset M''.$$

Diese werden stationär, woraus wegen der exakten Folgen
$$0 \longrightarrow M_i \cap M' \longrightarrow M_i \longrightarrow (M_i + M')/M' \longrightarrow 0$$
und dem 5er Lemma folgt, dass auch die ursprüngliche Kette stationär wird. □

Korollar 19.7. *Sind M_i, $i = 1, \ldots, n$, noethersch, so auch* $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

Beweis. Dies folgt per Induktion aus der exakten Folge
$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0$$
□

Definition 19.8. Ein Ring A heißt **noetherscher Ring**, wenn A noethersch als A-Modul ist ($\overset{19.4}{=}$ jedes Ideal ist endlich erzeugt).

Beispiel 19.9. Jeder Hauptidealring ist noethersch.

Satz 19.10. *Sei A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist M noethersch.*

Beweis. M ist Faktormodul von A^n. Daher folgt die Aussage aus Korollar 19.7 und Lemma 19.6. □

Satz 19.11. *Ist A noethersch, so auch jede endliche A-Algebra.*

Beweis. Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus und B endlich erzeugter A-Modul. Nach Satz 19.10 ist B noetherscher A-Modul, also erst recht noetherscher B-Modul. □

Korollar 19.12. *Ist A noethersch und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist $A/\mathfrak{a}$ ein noetherscher Ring.*

Beweis. $A/\mathfrak{a}$ ist eine endliche A-Algebra. □

Beispiel 19.13. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines normierten Polynoms $T^n + a_{n-1}T + \cdots + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Dann ist die $\mathbb{Z}$-Algebra $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{C}$ eine endliche $\mathbb{Z}$-Algebra, also noethersch.

Satz 19.14. *Sei A noethersch und $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}A$ noethersch.*

Beweis. Die Ideale in $S^{-1}A$ sind alle von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ (siehe Satz 7.7 (ii)) und daher endlich erzeugt. □

Satz 19.15 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Ist A noethersch, so auch der Polynomring $A[T]$.*

Beweis. Wir müssen zeigen: Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A[T]$ ist endlich erzeugt. Sei $\mathfrak{b} \subset A$ die Teilmenge welche aus den Leitkoeffizienten der Elemente in $\mathfrak{a}$ gebildet wird. (Den Leitkoeffizienten des Nullpolynoms definieren wir als Null.) Es ist $\mathfrak{b}$ ein Ideal in A. Da A noethersch ist, ist $\mathfrak{b}$ endlich erzeugt, etwa $\mathfrak{b} = (a_1, \ldots, a_n)$. Sei $f_i \in \mathfrak{a}$ von der Form $a_iT^{r_i}+$ niedere Terme, $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a} \subset A[T]$ das von $f_1, \ldots, f_n$ erzeugte Ideal und $r = \max_{1 \le i \le n} r_i$. Nun sei

$$f = aT^m + \text{ niedere Terme}$$

ein Element von $\mathfrak{a}$. Dann gilt $a \in \mathfrak{b}$. Sei $a = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i a_i$, $u_i \in A$. Gilt $m \ge r$, so liegt

$$f - \sum_{i=1}^{n} u_i f_i T^{m-r_i}$$

in $\mathfrak{a}$ und hat Grad $< m$. Induktiv erhalten wir ein $g \in \mathfrak{a}$, $\deg(g) < r$, mit

$$f = g + h, \qquad h \in \mathfrak{a}'.$$

Sei $M = A + AT + \cdots + AT^{r-1} \subset A[T]$. Die gerade gemachte Rechnung zeigt, dass

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap M) + \mathfrak{a}'$$

gilt. Nun ist M ein endlich erzeugter A-Modul, also noethersch. Damit ist $\mathfrak{a} \cap M \subset M$ auch endlich erzeugter A-Modul und weil $\mathfrak{a}'$ endlich erzeugter $A[T]$-Modul ist, ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugter $A[T]$-Modul. □

Bemerkung 19.16. Eine kleine Modifikation des Beweises liefert auch die Aussage

$$A \text{ noethersch} \implies A[[T]] \text{ noethersch.}$$

Wir werden dies später als Spezialfall eines allgemeineren Satzes erhalten.

Korollar 19.17. *Jede endlich erzeugte Algebra über einem noetherschen Ring ist ein noetherscher Ring.*

Beweis. Sei A noethersch. Wegen

$$A[T_1, \ldots, T_n] = A[T_1, \ldots, T_{n-1}][T_n]$$

folgt aus Satz 19.15 und per Induktion nach n, dass $A[T_1, \ldots, T_n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ noethersch ist. Jede endlich erzeugte A-Algebra ist Faktorring eines solchen und somit noethersch nach Korollar 19.12. □

Satz 19.18. *In einem noetherschen Ring enthält jedes Ideal $\mathfrak{a}$ eine Potenz seines Radikals $r(\mathfrak{a})$.*

Beweis. $r(\mathfrak{a})$ ist endlich erzeugt. Sei $r(\mathfrak{a}) = (a_1, \ldots, a_n)$ und sei $a_i^{e_i} \in \mathfrak{a}$, $i = 1, \ldots, n$. Setze $m = \sum\limits_{i=1}^{n}(e_i - 1) + 1$. Dann ist $r(\mathfrak{a})^m$ erzeugt von Elementen der Form $\prod_{i=1}^n a_i^{r_i}$ mit $\sum r_i = m$. Also $r_i \geq e_i$ für ein $1 \leq i \leq n$ und deshalb liegen diese Elemente in $\mathfrak{a}$. □

Korollar 19.19. *In einem noetherschen Ring ist das Nilradikal nilpotent.*

Beweis. Wende Satz 19.18 auf $\mathfrak{a} = (0)$ an. □

Satz 19.20. *Jeder endlich erzeugte flache Modul M über einem noetherschen Ring A ist projektiv.*

Beweis. M hat eine Auflösung durch endlich erzeugte freie Moduln. Nach Satz 16.7 und Satz 16.2 folgt für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$, jedes $n \geq 1$ und jeden A-Modul N:

$$\mathrm{Ext}^n_A(M, N)_\mathfrak{p} = \mathrm{Ext}^n_{A_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}) = 0,$$

was nach Satz 7.19 $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0$ impliziert. Also ist $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ exakt, und daher M projektiv. □

Definition 19.21. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ heißt **irreduzibel**, falls gilt:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \implies \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ oder } \mathfrak{a} = \mathfrak{c}.$$

Beispiel 19.22. $\mathfrak{p}$ Primideal $\Rightarrow$ $\mathfrak{p}$ irreduzibel (siehe Satz 1.17 (ii)).

Lemma 19.23. *In einem noetherschen Ring hat jedes Ideal $\mathfrak{a}$ eine Darstellung*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n$$

mit irreduziblen Idealen $\mathfrak{a}_i$.

Beweis. Sei T die Menge der Ideale ohne diese Eigenschaft. Im Fall $T = \varnothing$ ist man fertig. Ansonsten existiert nach Lemma 19.1 ein maximales Element $\mathfrak{a} \in T$. Insbesondere ist $\mathfrak{a}$ selbst nicht irreduzibel, also existieren $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. Also $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \notin T$. Daher gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{b}_i$ irreduzibel, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{c}_m$, $\mathfrak{c}_i$ irreduzibel. $\Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{c}_1 \cdots \cap \mathfrak{c}_m$ Widerspruch. $\square$

Satz 19.24. *A noethersch, $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ irreduzibel $\Rightarrow r(\mathfrak{a})$ Primideal.*

Beweis. Übergang zu $A/\mathfrak{a}$: Ohne Einschränkung $\mathfrak{a} = (0)$, $r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}$ (Ist $\mathfrak{a}$ irreduzibel, so auch das Nullideal in $A/\mathfrak{a}$. Außerdem ist $r(\mathfrak{a})$ das Urbild des Nilradikals von $A/\mathfrak{a}$).

Also z.z.: (0) irreduzibel $\Rightarrow \mathfrak{N}$ Primideal. Seien $x, y \in A$ mit $xy \in \mathfrak{N}$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $(xy)^n = 0$.
1. Fall $y^n = 0 \Rightarrow y \in \mathfrak{N}$ fertig.
2. Fall $y^n \neq 0$. Wir betrachten die aufsteigende Folge

$$\mathrm{Ann}((x^n)) \subset \mathrm{Ann}((x^{2n})) \subset \mathrm{Ann}((x^{3n})) \subset \dots$$

Da A noethersch ist, existiert ein m mit $\mathrm{Ann}(x^{nm}) = \mathrm{Ann}(x^{n(m+1)})$.

Behauptung: $(x^{nm}) \cap (y^n) = (0)$.
Beweis der Behauptung: $a \in (y^n) \Rightarrow ax^n = 0$. $a \in (x^{nm}) \Rightarrow a = bx^{nm}$, $b \in A$. Es folgt $bx^{n(m+1)} = ax^n = 0$, also $b \in \mathrm{Ann}(x^{n(m+1)}) = \mathrm{Ann}(x^{nm})$. Daher gilt $a = bx^{nm} = 0$.

Da (0) irreduzibel ist, folgt aus der gerade bewiesenen Behauptung, dass $(x^{nm}) = 0$ gilt, also folgt $x \in \mathfrak{N}$. $\square$

Korollar 19.25. *In einem noetherschen Ring enthält jedes Primideal ein minimales Primideal. Es gibt nur endlich viele minimale Primideale.*

Beweis. Es gilt $\mathfrak{N} = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n$ mit $\mathfrak{a}_i$ irreduzibel, $i = 1, \dots, n$. Daher gilt $\mathfrak{N} = r(\mathfrak{N}) = r(\mathfrak{a}_1) \cap \cdots \cap r(\mathfrak{a}_n)$ und $\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{a}_i)$ ist Primideal nach Satz 19.24. Wir sortieren die $\mathfrak{p}_i$ so, dass $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$, $1 \leq r \leq n$, minimal in $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ sind.

Ist nun $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so gilt

$$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{N} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r$$

Nach Primvermeidung 1.17 (ii) folgt $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_i$ für ein i, $1 \leq i \leq r$. Daher sind $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ minimal unter allen Primidealen und jedes Primideal enthält eines dieser Primideale Insbesondere sind $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ alle minimalen Primideale. $\square$

20 Jordan-Hölder Reihen (Wiederholung aus der LA II)

Vorbemerkung: Alles in diesem Abschnitt Gesagte gilt auch im Fall dass der Ring A nicht kommutativ ist. Man muss dann nur allen Begriffen, wie Modul, Ideal usw., die Vorsilbe Links- bzw. Rechts- voranstellen.

Definition 20.1. Ein A-Modul $M \neq 0$ heißt **einfach** wenn es außer 0 und M keinen anderen Untermodul von M gibt.

Lemma 20.2. *Ein einfacher Modul M ist isomorph zu $A/\mathfrak{m}$ für ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$. Umgekehrt sind solche Moduln einfach.*

Beweis. Die Untermoduln von $A/\mathfrak{m}$ entsprechen 1–1 den Untermoduln von A die $\mathfrak{m}$ umfassen (vgl. Satz 1.1). Also:

$A/\mathfrak{m}$ einfach $\Longleftrightarrow$ es gibt kein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{a} \subsetneqq A$.

Ist nun M einfach und $0 \neq x \in M$, so gilt $0 \neq Ax \subseteq M$, also $M = Ax$.
Die Surjektion: $A \xrightarrow{\varphi} M$, $a \mapsto ax$ zeigt $M \cong A/\ker(\varphi)$ und wie eben gesehen, mus $\ker(\varphi)$ ein Maximalideal sein. □

Definition 20.3. Eine **Filtrierung der Länge** n eines A-Moduls M ist eine Folge

$$0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$$

von Untermoduln. Die **Länge** $\boldsymbol{\ell(M)}$ von M ist definiert durch

$\ell(M) = \sup\{n \mid \text{es ex. Filtr. der Länge } n \text{ von } M\}.$

Bemerkung 20.4. $\ell(M) < \infty \Rightarrow M$ noethersch, insbesondere endlich erzeugt.

Beispiele 20.5. 1.) $\ell(M) = 0 \Longleftrightarrow M = 0$.
2.) $\ell(M) = 1 \Longleftrightarrow M$ einfach.
3.) $A = k$ Körper $\Rightarrow \ell(M) = \dim_k M$.

Lemma 20.6. *Sei $\ell(M) = n < \infty$ und $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$ eine Filtrierung der Länge n. Dann sind die Faktoren M_{i+1}/M_i, $i = 0, \ldots, n-1$ einfache Moduln.*

Beweis. Wäre M_{i+1}/M_i nicht einfach, so gäbe es einen Untermodul $0 \subsetneqq \overline{N} \subsetneqq M_{i+1}/M_i$. Dieser entspricht einem Untermodul $M_i \subsetneqq N \subsetneqq M_{i+1}$. So finden wir eine Filtrierung der Länge $n+1$. □

Satz 20.7 (Satz von Jordan-Hölder)**.** *Sei $0 = M_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_n = M$ eine Filtrierung, so daß M_{i+1}/M_i einfach ist für $i = 0, \ldots, n-1$. Dann gilt $n = \ell(M)$. Ist $0 = M_0' \subseteq M_1' \subseteq \cdots \subseteq M_n' = M$ eine weitere Filtrierung der Länge n, so sind die Folgen von Faktormoduln*

$$(M_1/M_0, \ldots, M_n/M_{n-1}), (M_1'/M_0', \ldots, M_n'/M_{n-1}')$$

bis auf die Reihenfolge und bis auf Isomorphie die gleichen.

Definition 20.8. Eine Filtrierung wie in Satz 20.7 heißt **Jordan-Hölder-Reihe**. Die Faktoren heißen die **Jordan-Hölder-Faktoren** und sind, bis auf die Reihenfolge, unabhängig von der Auswahl der J-H-Reihe.

Korollar 20.9. *Ist*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge, so gilt

$$\ell(M') + \ell(M'') = \ell(M).$$

Insbesondere gilt

$$\ell(M \oplus N) = \ell(M) + \ell(N).$$

Beweis. Ist $0 = M'_0 \subsetneqq M'_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M'_n = M'$ eine Filtrierung der Länge n, so ist $0 = i(M'_0) \subsetneqq i(M'_1) \subsetneqq \cdots \subsetneqq i(M'_n) = i(M') \subset M$ eine Filtrierung der Länge n oder $n+1$, also $\ell(M') = \infty \Rightarrow \ell(M) = \infty$. Analog ist $0 = M''_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M''_n = M''$ eine Filtrierung der Länge n, so ist

$$0 \subseteq j^{-1}(M''_0) \subsetneqq \cdots \subsetneqq j^{-1}(M''_n) = M$$

eine Filtrierung der Länge n oder $n+1$ von M also $\ell(M'') = \infty \Rightarrow \ell(M) = \infty$.
Sei nun $\ell(M') = n' < \infty$, $\ell(M'') = n'' < \infty$.
Seien $0 = M'_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M'_{n'}$ und $0 = M''_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M''_{n''} = M''$ J-H-Reihen. Dann ist $0 = i(M'_0) \subsetneqq i(M'_1) \subsetneqq \cdots \subsetneqq i(M'_{n'}) = j^{-1}(M''_0) \subsetneqq j^{-1}(M''_1) \subsetneqq \cdots \subsetneqq j^{-1}(M''_{n''}) = M$ eine J-H-Reihe für M. Also gilt $\ell(M) = n' + n''$. Schließlich betrachten wir für A-Moduln M und N die zerfallende exakte Folge

$$0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0,$$

und erhalten die $\ell(M \oplus N) = \ell(M) + \ell(N)$. □

21 Artinsche Ringe

Definition 21.1. Ein A-Modul M heißt **artinsch**, wenn jede absteigende Kette

$$M_1 \supset M_2 \supset \ldots$$

von Untermoduln stationär wird. A heißt **artinscher Ring**, wenn A als A-Modul artinsch ist.

Dies ist äquivalent dazu, dass jede nichtleere Menge von Untermoduln ein minimales Element besitzt (analoges Argument wie im Beweis von Lemma 19.1).

Beispiele 21.2. • $\ell_A(M) < \infty \Rightarrow M$ artinsch.
• Körper sind artinsche Ringe.
• Endliche Ringe sind artinsch.
• $\mathbb{Z}$ ist nicht artinsch.

Lemma 21.3. *Sei $A = k$ ein Körper und V ein k-Vektorraum. Dann sind äquivalent:*

(i) $\dim_k V < \infty$.
(ii) $\ell_k(V) < \infty$.
(iii) *V ist noethersch.*
(iv) *V ist artinsch.*

Beweis. Lineare Algebra. $\square$

Lemma 21.4. *Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exakt. Dann gilt:*

M artinsch $\Longleftrightarrow$ M' und M'' artinsch.

Beweis. Analog zu Lemma 19.6. $\square$

Korollar 21.5. *$M_1, \ldots, M_n$ artinsch $\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ artinsch.*

Beweis. analog wie Korollar 19.7. $\square$

Satz 21.6. *$\ell_A(M) < \infty \Longleftrightarrow M$ artinsch und noethersch.*

Beweis. $\Rightarrow$ klar.
$\Leftarrow$ Sei $M \neq 0$ (sonst alles klar). Nach Lemma 19.1 angewendet auf die Menge aller echten Untermoduln von $M =: M_0$ existiert ein maximaler Untermodul $M_1 \subsetneqq M_0$ (also M_0/M_1 einfacher Modul). Desweiteren existiert ein maximaler Untermodul $M_2 \subsetneqq M_1$ usw. Da M artinsch ist muss gelten $M_n = 0$ für ein n. Daher ist $0 = M_n \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_1 \subsetneqq M_0 = M$ eine Kompositionsreihe und es gilt $\ell_A(M) < \infty$. $\square$

Satz 21.7. *Ist A ein artinscher Ring, so ist jede endliche A-Algebra auch artinscher Ring.*

Beweis. Analog zu Satz 19.11. $\square$

Korollar 21.8. *Ist A artinsch und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist auch $A/\mathfrak{a}$ artinsch.*

Beweis. $A/\mathfrak{a}$ ist eine endliche A-Algebra. $\square$

Satz 21.9. *Ist A artinsch und $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen, so ist auch $S^{-1}A$ artinsch.*

Beweis. Wir betrachten den kanonischen Ringhomomorphismus $A \to S^{-1}A$. Nach Satz 7.7 (i) ist jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}A$ erweitert, es gilt somit $\mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}$ nach Satz 1.31 (iii). Ist nun

$$\mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_2 \supset \ldots \tag{$*$}$$

eine fallende Folge von Idealen in $S^{-1}A$, so ist

$$\mathfrak{b}_1^c \supset \mathfrak{b}_2^c \supset \ldots \tag{$**$}$$

eine fallende Folge von Idealen in A, die stationär wird, weil A artinsch ist. Wegen $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_i^{ce}$ wird dann auch die Folge $(*)$ stationär. Daher ist auch $S^{-1}A$ artinsch. $\square$

Bislang war alles völlig analog zum noetherschen Fall. Dieser erste Eindruck hat aber keinen Bestand:

Satz 21.10. *In einem artinschen Ring ist jedes Primideal maximal.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist $B = A/\mathfrak{p}$ artinsch und nullteilerfrei. Sei $x \in B$, $x \neq 0$. Die Kette $(x) \supset (x^2) \supset \ldots$ wird stationär, also gilt $(x^n) = (x^{n+1})$ für ein n, d.h. $x^n = x^{n+1} \cdot y$ für ein $y \in B$. Kürzen im nullteilerfreien Ring B liefert $1 = xy$, also $x = y^{-1} \in B^\times$. Daher ist $B = A/\mathfrak{p}$ ein Körper und somit $\mathfrak{p}$ Maximalideal. □

Satz 21.11. *In einem artinschen Ring existieren nur endlich viele Maximalideale.*

Beweis. Erinnerung an Primvermeidung Satz 1.17

$$\mathfrak{p} \supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \Longrightarrow \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_i \quad \text{für ein } i.$$

Das bedeutet insbesondere: sind $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ paarweise verschiedene Maximalideale, so gilt $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{n-1} \supsetneqq \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$. Gäbe es nun unendlich viele Maximalideale im artinschen Ring A, so erhielten wir die nicht stationäre Kette $\mathfrak{m}_1 \supsetneqq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supsetneqq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \supsetneqq \ldots$ Widerspruch. □

Satz 21.12. *In einem artinschen Ring ist das Nilradikal nilpotent.*

Beweis. Wir betrachten die Folge $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}^2 \supset \ldots$. Da A artinsch ist, gilt $\mathfrak{N}^k = \mathfrak{N}^{k+1} = \cdots =: \mathfrak{a}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Gilt $\mathfrak{a} = (0)$, sind wir fertig. Sei $\mathfrak{a} \neq (0)$ und Σ die Menge aller Ideale $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq (0)$.
Wegen $\mathfrak{a} \neq (0)$ gilt $(1) \in \Sigma$, also $\Sigma \neq \varnothing$. Da A artinsch ist, hat die Menge Σ ein minimales Element, sagen wir $\mathfrak{c}$. Wegen $\mathfrak{c}\mathfrak{a} \neq (0)$ existiert $x \in \mathfrak{c}$ mit $(x)\mathfrak{a} \neq (0)$ und aus $(x) \subset \mathfrak{c}$ folgt $(x) = \mathfrak{c}$ wegen Minimalität. Nun gilt $((x)\mathfrak{a})\mathfrak{a} = x\mathfrak{a}^2 = x\mathfrak{a} \neq (0)$. Also $(x)\mathfrak{a} \in \Sigma$ und wegen $(x)\mathfrak{a} \subset (x)$ folgt $(x)\mathfrak{a} = (x)$. Daher gilt $x = xy$ für ein $y \in \mathfrak{a}$ und folglich $x = xy = xy^2 = xy^3 = \ldots$. Aber $y \in \mathfrak{a} = \mathfrak{N}^k \subset \mathfrak{N}$, also ist y nilpotent, also $x = 0$. Hieraus folgt $(x)\mathfrak{a} = 0$ im Widerspruch zu $(x) \in \Sigma$. Daher gilt $\mathfrak{a} = 0$. □

Lemma 21.13. *Sei A ein Ring, so dass endlich viele, nicht notwendig verschiedene Maximalideale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ existieren mit*

$$\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = (0).$$

Dann ist A genau dann noethersch, wenn artinsch.

Beweis. Wir betrachten die Kette

$$A \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = (0).$$

Dann gilt:

A noethersch $\overset{19.6}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i+1}$ noetherscher A-Modul $\forall i$.

Nun ist $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i+1}$ ein $A/\mathfrak{m}_{i+1}$-Vektorraum. Also können wir nach Lemma 21.3 die Äquivalenz fortsetzen:

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i+1}$ ist artinscher A-Modul $\forall i$ $\overset{21.4}{\Longleftrightarrow}$ A artinsch. □

Satz 21.14. *A artinsch $\Longleftrightarrow$ A noethersch und jedes Primideal ist maximal.*

Beweis. $\Rightarrow$ Nach Satz 21.10 genügt es zu zeigen, dass A noethersch ist. Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ die endlich vielen Maximalideale von A und sei k so dass $\mathfrak{N}^k = 0$. Dann gilt $\mathfrak{m}_1^k \cdots \mathfrak{m}_n^k = (\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n)^k \subset (\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n)^k = \mathfrak{N}^k = 0$.
Nach Lemma 21.13 folgt A noethersch.
$\Leftarrow$ Nach Korollar 19.25 hat A nur endlich viele minimale Primideale. Diese sind maximal nach Voraussetzung. Daher gilt $\mathfrak{N} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$ und es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{N}^k = (0)$ nach Korollar 19.19. Daher gilt $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^k = 0$. Wie oben, aber rückwärts schließt man A artinsch. □

Satz 21.15. *Jeder artinsche Ring ist endliches Produkt lokaler artinscher Ringe.*

Beweis. Wir beachten zunächst, dass wegen

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{m}_1^k + \mathfrak{m}_2^l) &= r(r(\mathfrak{m}_1^k) + r(\mathfrak{m}_2^l)) = r(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) \\ &= r(1) = (1) \Rightarrow \mathfrak{m}_1^k + \mathfrak{m}_2^l = (1), \end{aligned}$$

Potenzen verschiedener Maximalideale stets koprim sind.

Seien nun $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ die Maximalideale von A. Wie im Beweis von Satz 21.14 sieht man die Existenz eines $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}_1^k \ldots \mathfrak{m}_n^k = (0)$. Nun gilt $\mathfrak{m}_i^k + \mathfrak{m}_j^k = (1)$ für $i \neq j$, und daher (siehe Lemma 1.16) ist der Homomorphismus

$$A \longrightarrow \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{m}_i^k$$

ein Isomorphismus. Die Ringe $A/\mathfrak{m}_i^k$ sind artinsch und lokal, da das einzige Maximalideal genau $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^k \subset A/\mathfrak{m}_i^k$ ist. □

Bemerkung 21.16. Man kann zeigen, dass die Zerlegung in Satz 21.15 eindeutig ist.

22 Der Hilbertsche Nullstellensatz

Satz 22.1. *Seien $A \subset B \subset C$ Ringe. Es gelte:*

- *A ist noethersch.*
- *C ist endlich erzeugte A-Algebra.*
- *C ist endliche B-Algebra.*

Dann ist B endlich erzeugte A-Algebra.

Beweis. Es sei C als A-Algebra durch $x_1, \ldots, x_m$ erzeugt und als B-Modul durch $y_1, \ldots, y_n$. Dann existieren Gleichungen der Form

$$(1) \qquad x_i = \sum_j b_{ij} y_j \qquad (b_{ij} \in B)$$

$$(2) \qquad y_i y_j = \sum_k b_{ijk} y_k \qquad (b_{ijk} \in B).$$

Sei

$$B_0 = A[(b_{ij})_{ij}, (b_{ijk})_{i,j,k}] \subset B.$$

Als endlich erzeugte A-Algebra ist B_0 noethersch. Jedes Element aus C ist ein Polynom in den x_i mit Koeffizienten in A. Unter Benutzung von (1) und (2) sieht man, dass C als B_0-Modul bereits durch $y_1, \ldots, y_n$ erzeugt wird. Als B_0-Untermodul von C ist somit B eine endliche B_0-Algebra, also endlich erzeugte A-Algebra. □

Satz 22.2. *Sei k ein Körper und E eine endlich erzeugte k-Algebra. Ist E ein Körper, so ist E eine endliche algebraische Erweiterung von k.*

Beweis. Sei $E = k[x_1, \ldots, x_n]$. Ist E/k nicht algebraisch, so können wir durch Umnummerierung erreichen, dass $x_1, \ldots, x_r$ algebraisch unabhängig über k und $x_{r+1}, \ldots, x_n$ algebraisch über dem Körper $F = k(x_1, \ldots, x_r)$ sind. Nach Satz 22.1 angewendet auf $k \subset F \subset E$ ist F endlich erzeugte k-Algebra. Falls $r \geq 1$ ist, führen wir dies zum Widerspruch: Angenommen es gilt $F = k[y_1, \ldots, y_s]$. Jedes der y_i hat die Form $y_i = f_i/g_i$ mit $f_i, g_i \in k[x_1, \ldots, x_r]$, $g_i \neq 0$. Daher hat jedes Element in F in gekürzter Schreibweise einen Nenner der Form $g_1^{e_1} \ldots g_s^{e_s}$. Dies ist aber z.B. für das Element $1/(x_1 g_1 \cdots g_s + 1) \in F$ falsch. Daher gilt $r = 0$ und E/k ist endlich algebraisch. □

Korollar 22.3 (Schwacher Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Sei k ein Körper und A eine endlich erzeugte k-Algebra. Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximalideal. Dann ist $A/\mathfrak{m}$ eine endliche algebraische Erweiterung von k. Insbesondere gilt $A/\mathfrak{m} \cong k$, wenn k algebraisch abgeschlossen ist.*

Beweis. Setze $E = A/\mathfrak{m}$ in Satz 22.2. □

Sei von nun an k algebraisch abgeschlossen (z.B. $k = \mathbb{C}$). Wir betrachten den Polynomring $A = k[T_1, \ldots, T_n]$. Jedes $f \in A$ kann als Funktion

$$f : k^n \longrightarrow k, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

aufgefasst werden (und ist, weil k unendlich ist, durch diese Funktion eindeutig bestimmt). Umgekehrt definiert jedes $x \in k^n$ einen Homomorphismus

$$\varphi_x : A \longrightarrow k, \quad f \mapsto f(x).$$

Wir definieren für $x = (x_1, \dots, x_n)$ das Maximalideal $\mathfrak{m}_x \subset A$ durch $\mathfrak{m}_x = \ker \varphi_x$. Es gilt also $f \in \mathfrak{m}_x \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Lemma 22.4. *Es gilt*

$$\mathfrak{m}_x = (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n).$$

Beweis. Die Inklusion $\supset$ ist klar und das rechte Ideal ist selbst schon Maximalideal: substituiere T_i durch $X_i + x_i$ und erhalte

$$k[T_1, \dots, T_n]/(T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n) \cong$$

$$k[X_1, \dots, X_n]/(X_1, \dots, X_n) \cong k. \qquad \square$$

Satz 22.5. *Jedes Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$ ist von der Form $\mathfrak{m}_x$ für ein eindeutig bestimmtes $x \in k^n$, d.h. wir erhalten eine $1:1$ Korrespondenz*

$$\mathit{Specm}(A) \xleftrightarrow{1:1} k^n$$

zwischen der Menge $\mathit{Specm}(A)$ der Maximalideale von A und der Menge der „Punkte“ des k^n.

Beweis. Sei $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal. Nach Korollar 22.3 ist die Komposition

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\sim"'] & A \arrow[r] & A/\mathfrak{m} \end{tikzcd}$$

ein Isomorphismus. Sei $x_i \in k$ das Bild der Variable T_i unter dem Isomorphismus

$$k[T_1, \dots, T_n]/\mathfrak{m} \cong k.$$

Dann gilt $T_i - x_i \in \mathfrak{m}$, $i = 1, \dots, n$, also $\mathfrak{m} \supset (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n) = \mathfrak{m}_x$ für $x = (x_1, \dots, x_n)$. Daher ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$. Sei $x \neq y$. Dann gilt $x_i \neq y_i$ für ein i, $i = 1, \dots, n$. Es folgt $T_i - x_i \in \mathfrak{m}_x$, und folglich $T_i - y_i = (T_i - x_i) + (x_i - y_i) \notin \mathfrak{m}_x$ (sonst läge die Einheit $x_i - y_i$ in $\mathfrak{m}_x$). Wegen $T_i - y_i \in \mathfrak{m}_y$ folgt $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$. $\square$

Definition 22.6. Für eine Teilmenge $Y \subset k^n$ sei

$$I(Y) = \{f \in A \mid f(y) = 0 \quad \forall y \in Y\}.$$

$I(Y)$ ist offensichtlich ein Ideal in A.

Definition 22.7. Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ setzt man

$$V(\mathfrak{a}) = \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in \mathfrak{a}\}.$$

Eine Teilmenge der Form $V(\mathfrak{a}) \subset k^n$ heißt **algebraische Teilmenge**.

Bemerkung 22.8. Es gilt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \Rightarrow V(\mathfrak{a}) \supset V(\mathfrak{b})$. Außerdem gilt nach Definition $I(V(\mathfrak{a})) \supset \mathfrak{a}$ und $V(I(Y)) \supset Y$. Zusammen erhalten wir $VIV(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a})$.

Bemerkung 22.9. Da A noethersch ist, ist jedes Ideal endlich erzeugt, also sind algebraische Teilmengen die gemeinsamen Nullstellenmengen *endlich* vieler Polynome in $k[T_1, \ldots, T_n]$.

Definition 22.10. $V(I(Y))$ heißt der **Zariski-Abschluss** von $Y \subset k^n$.

Frage: wie groß ist $I(V(\mathfrak{a}))$?

Für $f \in r(\mathfrak{a})$ gilt $f^n \in \mathfrak{a}$, also $f(x)^n = 0 \ \forall x \in V(\mathfrak{a})$, also $f(x) = 0 \ \forall x \in V(\mathfrak{a})$. Hieraus folgt $I(V(\mathfrak{a})) \supset r(\mathfrak{a})$.

Satz 22.11 (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Es gilt* $I(V(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$. *Wir erhalten eine* 1 : 1 *Korrespondenz*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale } \mathfrak{a} \subset A \\ \textit{mit } r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{V} \\ \xleftarrow[I]{} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \textit{algebraische} \\ \textit{Teilmengen } Y \subset k^n \end{array} \right\}$$

Beweis. Wegen $I(V(\mathfrak{a})) \supset r(\mathfrak{a})$ genügt es, die Inklusion $I(V(\mathfrak{a})) \subset r(\mathfrak{a})$ zu zeigen. Sei $f \in I(V(\mathfrak{a}))$, $f \notin r(\mathfrak{a})$. Wegen $r(\mathfrak{a}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}} \mathfrak{p}$ existiert ein Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ und $f \notin \mathfrak{p}$. Sei $\bar{f}$ das Bild von f in $B = A/\mathfrak{p}$ und $C = B_{\bar{f}} = B[\frac{1}{\bar{f}}]$. Wegen $\bar{f} \neq 0$ gilt $C \neq 0$. Sei $\mathfrak{m} \subset C$ ein Maximalideal. Nach Lemma 22.4 gilt $C/\mathfrak{m} \cong k$ (C ist endlich erzeugte k-Algebra). Wir betrachten den Homomorphismus

$$\varphi : k[T_1, \ldots, T_n] = A \to A/\mathfrak{p} = B \to B_f = C \to C/\mathfrak{m} \cong k.$$

Sei $x_i \in k$ das Bild von T_i und $x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n$. Dann gilt $\varphi = \varphi_x$ und nach Konstruktion $\varphi(f) \neq 0$ also $f(x) \neq 0$. Für alle $g \in \mathfrak{a}$ gilt $\varphi(g) = 0$, also $g(x) = 0$. Also $x \in V(\mathfrak{a})$. Dies widerspricht $f \in I(V(\mathfrak{a}))$. Es folgt $I(V(\mathfrak{a})) \subset r(\mathfrak{a})$.

Für ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$ gilt somit $VI(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. Um die 1:1-Korrespondenz zu begründen, genügt es somit zu zeigen dass jede algebraische Teilmenge von der Form $V(\mathfrak{a})$ für ein $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} = r(\mathfrak{a})$ ist. Da folgt aus $V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$ und $r(\mathfrak{a}) = r(r(\mathfrak{a}))$. □

Bemerkung 22.12. Die 1:1-Korrespondenz *Specm*$(A) \leftrightarrow k^n$ aus Satz 22.5 liefert eine 1:1-Korrespondenz

$$V(\mathfrak{a}) \leftrightarrow \mathit{Specm}(A/\mathfrak{a}) = \mathit{Specm}(A/r(\mathfrak{a}))$$

und führt damit die Untersuchung algebraischer Mengen auf die Untersuchung des Spektrums reduzierter endlich erzeugter k-Algebren zurück.

23 Vervollständigung

Definition 23.1. (Erinnerung). Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(T,\mathcal{U})$ wobei T eine Menge ist und $\mathcal{U} \subset P(T)$ (Potenzmenge) eine Teilmenge, so dass:

(i) $\varnothing, T \in \mathcal{U}$,
(ii) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U} \Longrightarrow U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{U}$,
(iii) $(U_i)_{i\in I} \in \mathcal{U} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{U}$.

Die Elemente von $\mathcal{U}$ heißen **offene Teilmengen** von T. Komplemente offener Teilmengen heißen **abgeschlossene Teilmengen**.

Bemerkung 23.2. Man kann die Topologie auf T auch durch die Angabe der abgeschlossenen Teilmengen definieren.

Beispiele 23.3. 0.) Auf jeder Menge M haben wir die *triviale* Topologie (nur $\varnothing$ und M sind offen) und die *diskrete* Topologie (jede Teilmenge ist offen).
1.) Die zweielementige Menge $\{\eta, s\}$ mit den offenen Teilmengen $\{\eta, s\}$, $\{\eta\}$, $\varnothing$ ist ein topologischer Raum („Sierpiński-Raum“).
2.) Der $\mathbb{R}^n$ mit der gewöhnlichen Topologie (d.h. eine Teilmenge ist offen, wenn sie mit jedem Punkt auch eine Kugel um ihn enthält) ist ein topologischer Raum.
3.) Eine *Metrik* auf einer Menge T ist eine Funktion

$$d : T \times T \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (x, y) \longmapsto d(x, y)$$

mit
(i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall\, x, y, z$

T wird zum topologischen Raum durch: $U \subset T$ offen $\Longleftrightarrow \forall\, x \in U$ existiert $\varepsilon > 0$, so dass $\{y \in T \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset U$.

Definition 23.4. Sei T ein topologischer Raum und $M \subset T$ eine Teilmenge.

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{A\subset T \text{ abg.}\\ M\subset A}} A$$

heißt der **Abschluss** von M. $\overline{M}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von T die M umfasst. $M \subset T$ heißt **dicht** falls $\overline{M} = T$.

Beispiel 23.5. $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ ist dicht.

Definition 23.6. Sei T ein topologischer Raum.

(i) Jede Teilmenge $M \subset T$ wird durch: „$V \subset M$ offen $\overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \exists\ U \subset T$ offen mit $V = U \cap M$“ zum topologischen Raum. Die Topologie heißt die **Unterraumtopologie**.

(ii) Sei $T \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} M$ eine surjektive Mengenabbildung. M wird durch: „$V \subset M$ offen $\overset{\text{df}}{\Longleftrightarrow} \pi^{-1}(V) \subset T$ offen" zu einem topologischen Raum. Die Topologie heißt die **Faktorraumtopologie**.

Definition 23.7. Ein topologischer Raum X hat die Eigenschaft
T_0: $\forall\, x_1 \neq x_2 \in X$ existiert $U \subset X$ offen mit $(x_1 \in U,\ x_2 \notin U)$ oder $(x_1 \notin U,\ x_2 \in U)$.
T_1: $\forall\, x_1 \neq x_2 \in X$ existiert $U \subset X$ offen mit $x_1 \in U$, $x_2 \notin U$.
T_2: $\forall\, x_1 \neq x_2 \in X$ existieren $U_1, U_2 \subset X$ offen, $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Bemerkung 23.8. T_2-Räume heißen auch **Hausdorff-Räume**. Die Eigenschaft T_1 ist äquivalent dazu, dass alle Punkte abgeschlossen sind, d.h. für jedes $t \in T$ ist die einelementige Menge $\{t\}$ abgeschlossen.

Definition 23.9. Eine Abbildung $f : T \to S$ topologischer Räume heißt **stetig**, wenn für jede offene Teilmenge $V \subset S$ die Urbildmenge $f^{-1}(V) \subset T$ offen ist.

Bemerkungen 23.10. f stetig falls f^{-1}(abg. Teilmenge) $=$ abg.Teilmenge.
f heißt **Homöomorphismus**, wenn f bijektiv und f^{-1} stetig ist.

Sei T ein topologischer Raum und $\mathcal{U}$ die Menge der offenen Teilmengen.

Definition 23.11. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ heißt **Basis der Topologie** wenn jede offene Teilmenge Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$ ist.

Beispiel 23.12. $T = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} =$ offene Kugeln mit rationalem Radius um Punkte mit rationalen Koordinaten.

Definition 23.13. Sei T ein topologischer Raum und $x \in T$. Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Teilmengen heißt **Umgebungsbasis** von x wenn
- $x \in U_i \quad \forall\, i$
- Ist $U \subset T$ offen und $x \in U$, so existiert ein i mit $U_i \subset U$.

Bemerkung 23.14. Kennen wir für jedes $x \in T$ eine Umgebungsbasis, so kennen wir die Topologie auf T.

Definition 23.15. Sei $(T_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Auf

$$\prod_{i \in I} T_i$$

ist die **Produkttopologie** gegeben durch die Basis $\mathcal{B}$, bestehend aus den Mengen der Form $\prod_{i \in I} U_i \subset \prod_{i \in I} T_i$ mit

- $U_i \subset T_i$ offen für alle i
- $U_i = T_i$ f.f.a. i.

Übungsaufgabe: $\prod_{i\in I} T_i$ mit der Produkttopologie besitzt die Universaleigenschaft des Produkts in topologischen Räumen.

Sei I eine halbgeordnete gerichtete Indexmenge und $(T_i)_{i\in I}$ ein projektives System topologischer Räume (die Übergangsabbildungen sind als stetig vorausgesetzt).

Definition 23.16. Wir versehen $\varprojlim T_i$ mit der Unterraumtopologie in $\prod T_i$.

Übungsaufgabe: $\varprojlim T_i$ erfüllt die Universaleigenschaft von $\varprojlim$ in topologischen Räumen.

Definition 23.17. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G zusammen mit einer Topologie, so dass die Abbildungen $G \times G \to G$, $(g, h) \longmapsto gh$ und $G \to G$, $g \longmapsto g^{-1}$, stetig sind.

Beispiele 23.18. • $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_p, +)$ (mit der projektiven Limes-Topologie), $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ (mit der Faktortopologie von $\mathbb{R}$) sind topologische Gruppen.
• jede Gruppe wird mit der diskreten Topologie (alle Teilmengen offen) zur topologischen Gruppe.

Lemma 23.19. *Sei G eine topologische Gruppe und $1 \in U \subset G$ eine offene Teilmenge. Dann existiert eine offene Teilmenge $1 \in V \subset G$ mit $V = V^{-1}$ und $V \cdot V \subset U$.*

Beweis. Da die Multiplikation stetig ist und nach Definition der Produkttopologie finden wir eine offene Teilmenge $1 \in W \subset T$ mit $W \cdot W \subset U$. Nun setze $V = W \cap W^{-1}$. □

Sei G eine topologische Gruppe. Dann ist für jedes $g \in G$ die Abbildung

$$G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto gx,$$

ein Homöomorphismus (Umkehrabbildung: Multiplikation mit g^{-1}). Ist (U_i) eine Umgebungsbasis des neutralen Elements $1 \in G$, so ist für jedes $g \in G$ die Familie (gU_i) eine Umgebungsbasis von g. Daher ist die Topologie auf einer topologischen Gruppe ist schon durch eine Umgebungsbasis der 1 eindeutig bestimmt.

Lemma 23.20. *Sei G eine topologische Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe Wir betrachten G/H mit der Faktorraumtopologie. Dann sind äquivalent*

(i) *G/H erfüllt T_0.*
(ii) *G/H erfüllt T_1.*
(iii) *G/H erfüllt T_2.*

Beweis. (iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) trivial.
Bleibt (i) $\Longrightarrow$ (iii). Zu zeigen sind $x_1, x_2 \in G/H$, $x_1 \neq x_2$, so existieren offene Teilmengen $U_i \subset G/H$, $i = 1, 2$, mit $x_i \in U_i$ und $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

Zunächst bemerken wir, dass die kanonische Projektion $\pi : G \to G/H$ offen ist (= Bilder offener Mengen sind offen).

Grund: $V \subset G$ offen $\Rightarrow \pi^{-1}(\pi(V)) = V \cdot H = \bigcup_{h \in H} Vh$ offen $\Rightarrow \pi(V)$ offen in G/H.

Ist V eine offene Umgebung von $1 \in G$, so ist $\pi(Vg) = VgH$ eine offene Umgebung von $gH = \pi(g) \in G/H$. Wegen $\pi(\pi^{-1}(U)) = U$ ist jede Umgebung von $\pi(g)$ von dieser Form.
Seien nun $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 H \neq g_2 H$ gegeben. Da G/H T_0 ist, existiert eine offene 1-Umgebung U in G mit $\pi(g_2) \notin \pi(Ug_1)$ (ansonsten Indizes vertauschen). Wir wählen gemäß Lemma 23.19 eine offene 1-Umgebung V mit $V = V^{-1}$ und $V \cdot V \subset U$ und behaupten, dass $\pi(Vg_1) \cap \pi(Vg_2) = \varnothing$. Ansonsten existierten nämlich $v_1, v_2 \in V, h_1, h_2 \in H$ mit

$$v_1 g_1 h_1 = v_2 g_2 h_2 \Longrightarrow g_2 = v_2^{-1} v_1 g_1 h_1 h_2^{-1} \in U g_1 H$$

im Widerspruch zu $\pi(g_2) \notin \pi(Ug_1)$. □

Lemma 23.21. (i) *Jede offene Untergruppe in G ist auch abgeschlossen.*

(ii) *Ist $U \subset G$ eine Untergruppe und $V \subset G$ eine nichtleere, offene Teilmenge mit $V \subset U$, so ist U offen.*

Beweis. (i) Für jedes $g \in G$ ist gU offen und daher $U = G \smallsetminus \bigcup_{g \notin U} gU$ abgeschlossen.
(ii) Sei $v \in V$ und $u \in U$ beliebig. Dann ist $v^{-1}V$ eine offene 1-Umgebung in U und daher $uv^{-1}V$ eine offene Umgebung von u in U. Daher ist U offen in G. □

Lemma 23.22. *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann gilt*

(i) *G/H ist Hausdorffsch $\Longleftrightarrow$ H abgeschlossen.*

(ii) *G/H diskret $\Longleftrightarrow$ H offen.*

Beweis. (i) G/H hausdorffsch $\overset{23.20}{\Longleftrightarrow}$ G/H T_1 $\Longleftrightarrow$ alle Punkte in G/H sind abgeschlossen $\overset{\text{versch.}}{\Longleftrightarrow}$ $\bar{1} \in G/H$ ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ $H \subset G$ ist abgeschlossen.
(ii) G/H diskret $\Longleftrightarrow$ $\bar{1} \in G/H$ offen $\Longleftrightarrow$ $H \subset G$ offen. □

Lemma 23.23. *Sei H der Durchschnitt aller Umgebungen von $1 \in G$. Dann gilt:*

(i) *H ist ein Normalteiler in G.*

(ii) $H = \overline{\{1\}}$.

(iii) G/H *ist hausdorffsch.*

(iv) G *ist hausdorffsch* $\Longleftrightarrow H = \{1\}$.

Beweis. (i) Seien $g_1, g_2 \in H$ und $U \subset G$ eine beliebige offene Teilmenge mit $1 \in U$. Nach Lemma 23.19, existiert eine offene Teilmenge V mit $1 \in V$, $V \cdot V \subset U$ und $V^{-1} = V$. Wegen g_1, g_2 in V folgt $g_1 g_2 \in U$ und $g_1^{-1} = g_1^{-1} 1 \in V \cdot V \subset U$. Daher ist H unter Multiplikation und Inversion abgeschlossen und somit eine Untergruppe. Mit U ist auch gUg^{-1}, $g \in G$, eine Umgebung der 1, weshalb $H = gH^g-1$ für jedes $g \in G$ gilt. Daher ist H Normalteiler.
(ii) $h \notin H \overset{(i)}{\Leftrightarrow} h^{-1} \notin H \Leftrightarrow h^{-1} \notin U$ für eine 1-Umgebung $U \Leftrightarrow 1 \notin hU$ für eine 1-Umgebung $U \Leftrightarrow h \notin \overline{\{1\}}$.
(iii) Nach (ii) ist H abgeschlossen und damit G/H hausdorffsch nach Lemma 23.22(i).
(iv) $H = \{1\} \Rightarrow G$ Hausdorffsch nach (iii). In einem Hausdorffraum ist jeder Punkt abgeschlossen. Nach (ii) folgt $H = \{1\}$ wenn G Hausdorffsch. □

Definition 23.24. Eine Folge topologischer Gruppen und stetiger Homomorphismen

$$G' \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} G''$$

heißt **exakt** (oft auch „strikt exakt"), wenn $\psi \circ \varphi = 0$ und die natürliche Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{im}(\varphi) & \longrightarrow & \ker(\psi) \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \text{Faktor.top.} & & \text{Unterraumtopologie} \end{array}$$

ein Homöomorphismus ist.

Ist I eine halbgeordnete gerichtete Indexmenge, und $(G_i)_{i \in I}$ ein projektives System topologischer Gruppen, so sind $\varprojlim G_i$ und $\prod G_i$ in natürlicher Weise topologische Gruppen.

Von nun an beschränken wir uns auf abelsche topologische Gruppen.

Bemerkung 23.25. Die Kategorie der abelschen topologischen Gruppen (mit stetigen Gruppenhomomorphismen) ist additiv aber nicht abelsch:

$$(\mathbb{R}, \text{diskr. Top}) \xrightarrow{\text{id}} (\mathbb{R}, \text{Standardtop.})$$

ist Mono- und Epimorphismus, aber kein Isomorphismus (die inverse Abbildung ist nicht stetig).

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots$$

eine fallende Folge von Untergruppen. Wir nehmen die Mengen der Form $g + G_i$, $g \in G$, $i \in \mathbb{N}$, als Basis der Topologie und erhalten eine Gruppentopologie auf G, die dadurch charakterisiert ist, dass die G_i eine Umgebungsbasis der $0 \in G$ sind. Nach Lemma 23.23 gilt: G ist Hausdorffsch $\Leftrightarrow \cap G_i = 0$.

Topologische Definition der Vervollständigung:

Definition 23.26. Es sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G.

(a) (x_i) ist eine **Nullfolge** (NF), wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_i \in G_n$ für alle $i \geq N$ existiert.

(b) (x_i) heißt **Cauchy-Folge** (CF), wenn zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_i - x_j \in G_n$ für alle $i, j \geq N$ existiert.

Offenbar sind Nullfolgen Cauchy. Weil die G_n Untergruppen sind, ist eine Folge bereits dann Cauchy, wenn die schwächere Bedingung „zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_i - x_N \in G_n$ für alle $i \geq N$" gilt.

Die Operation $(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$ macht die Menge der CF zu einer abelschen Gruppe. Die Menge der Nullfolgen ist eine Untergruppe.

Definition 23.27. Die Faktorgruppe

$$\hat{G} = \{\text{CF in } G\}/\{\text{NF in } G\}.$$

heißt die **Vervollständigung von** G.

Die Zuordnung

$$\varphi(x) = \text{ die konstante CF } \; x, x, \dots$$

definiert einen Homomorphismus $\varphi : G \to \hat{G}$. Es gilt

$$\ker(\varphi) = \cap\, G_n \overset{23.23}{=} \overline{\{0\}}.$$

Definition 23.28. G heißt **vollständig**, wenn $\varphi : G \to \hat{G}$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen ist.

Bemerkung 23.29. G vollständig $\Rightarrow \ker(\varphi) = 0 \Rightarrow G$ Hausdorffsch.

Setze

$$\begin{aligned} \hat{G}_n &= \{\hat{x} \in \hat{G} \mid \text{es existiert ein Vertreter } (x_i) \text{ von } \hat{x} \text{ mit } x_i \in G_n \text{ f.f.a. } i\} \\ &= \{\hat{x} \in \hat{G} \mid \text{es existiert ein Vertreter } (x_i) \text{ von } \hat{x} \text{ mit } x_i \in G_n \;\forall\, i\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\hat{G} = \hat{G}_0 \supset \hat{G}_1 \supset \dots$ eine fallende Folge von Untergruppen. So wird $\hat{G}$ zur topologischen Gruppe.

Lemma 23.30. (i) *$\varphi(G_n)$ ist dicht in $\hat{G}_n$, für alle n. Insbesondere ist $\varphi(G)$ dicht in $\hat{G}$.*

(ii) *$\hat{G}$ ist vollständig.*

Beweis. (i): Sei $\hat{x} \in \hat{G}_n$ und (x_i) eine repräsentierende CF mit $x_i \in G_n$ $\forall i$. Dann ist $(\varphi(x_i) - \hat{x})_i$ eine Folge in $\hat{G}$, deren i-tes Glied durch die CF in G: $x_i - x_1, x_i - x_2, \ldots$ repräsentiert wird. Da $(x_i)_i$ eine CF in G ist, existiert zu jedem n ein $N(n)$, so dass $x_i - x_j \in G_n$ für $i, j \geq N(n)$. Daher liegen für $i \geq N(n)$ fast alle Folgenglieder von $x_i - x_1, x_i - x_2, \ldots$ in G_n, woraus $(\varphi(x_i) - \hat{x})_i \in \hat{G}_n$ für $i \geq N(n)$ folgt. Daher ist $(\varphi(x_i) - \hat{x})_i$ eine NF in $\hat{G}$. Hieraus folgt, dass $\hat{x}$ im Abschluss von $\varphi(G_n)$ liegt.

(ii): zu zeigen: $\hat{\varphi} : \hat{G} \to \hat{\hat{G}}$ ist bijektiv.

1) $\hat{\varphi}$ injektiv. Sei $\hat{x} \in \hat{G}_n$ für alle n und sei (x_i) eine CF in G, die $\hat{x}$ repräsentiert. Dann gilt: für alle n ist $x_i \in G_n$ f.f.a. i. Daher ist (x_i) eine NF in G und somit $\hat{x} = 0$.

2) $\hat{\varphi}$ surjektiv. (mit Hilfe des Diagonalfolgenprinzips) Sei $(\hat{x}_n)$ eine CF in $\hat{G}$. Zu zeigen: es existiert eine CF $(y_n) \in G$, so dass $(\varphi(y_n) - \hat{x}_n)$ eine NF in $\hat{G}$ ist. Durch Übergang zu einer Teilfolge von $\hat{x}_n$ erreichen wir: $(\hat{x}_n - \hat{x}_m) \in \hat{G}_n$ für alle $m \geq n$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $(x_{n,i})_i$ eine $\hat{x}_n$ repräsentierende CF in G. Durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen wir: $x_{n,i} - x_{n,j} \in G_n \quad \forall\, i, j$. Für $i \geq n$ und beliebige j, k gilt dann

$$\begin{array}{ccccccc} x_{n,n} - x_{i,j} = & (x_{n,n} - x_{n,k}) & + & (x_{n,k} - x_{i,k}) & + & (x_{i,k} - x_{i,j}) \\ \in G_n & \in G_n & & \in G_n \text{ für } k \gg 0 & & \in G_i \subset G_n \end{array}$$

Wir schreiben die Folge auf:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots \\ \hat{x}_2 &= x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots \\ \hat{x}_3 &= x_{3,1}, x_{3,2}, x_{3,3}, \ldots \end{aligned}$$

und betrachten die Diagonalfolge (y_n) mit

$$y_n = x_{n,n}.$$

Für $m \geq n$ gilt

$$y_n - y_m = x_{n,n} - x_{m,m} \in G_n,$$

also ist (y_n) eine CF in G. Weiterhin gilt für beliebiges i, dass $y_n - x_{ni} \in G_n$, also

$$(\varphi(y_n) - \hat{x}_n) \in \hat{G}_n \implies (\varphi(y_n) - \hat{x}_n) \text{ ist NF in } \hat{G}. \qquad \square$$

Beispiele 23.31. • $G = \mathbb{Z}$, $G_n = p^n\mathbb{Z} \implies \hat{G} \cong \mathbb{Z}_p$, $\hat{G}_n = p^n\mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{Z}_p$ ist vollständig.

• $G = k[T]$, $G_n = T^n k[T] \implies \hat{G} = k[[T]]$, $\hat{G}_n = T^n k[[T]]$.

Lemma 23.32. *Die natürliche Abbildung $\varphi : G \to \hat{G}$ definiert für jedes n einen Isomorphismus*

$$G/G_n \xrightarrow{\sim} \hat{G}/\hat{G}_n.$$

Beweis. Wir betrachten die Komposition

$$\varphi_n : G \xrightarrow{\varphi} \hat{G} \xrightarrow{p_n} \hat{G}/\hat{G}_n.$$

Zu zeigen:
1) $\ker(\varphi_n) = G_n$.
2) φ_n ist surjektiv.

Zu 1) Nach Definition von φ und $\hat{G}_n$ gilt $G_n = \varphi^{-1}(\hat{G}_n) = \ker(\varphi_n)$.
Zu 2) $\varphi(G)$ ist dicht in $\hat{G}$ und $\hat{G}_n$ ist offen $\Rightarrow \hat{G} = \varphi(G) + G_n \Rightarrow \varphi_n$ surjektiv. □

Algebraische Charakterisierung der Vervollständigung:

Wir versehen $\varprojlim G/G_n$ mit der projektiven Limes-Topologie, wobei wir G/G_n für alle n die diskrete Topologie geben.

Satz 23.33. *Es gibt einen natürlichen topologischen Isomorphismus*

$$f : \hat{G} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n G/G_n$$

Beweis. Sei (x_i) ein CF und sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert N mit $x_i - x_j \in G_n$ für $i, j \geq N$, also $x_i + G_n = x_j + G_n$. Wir setzen $(x_i) + G_n = x_i + G_n \in G/G_n$ für $i \gg 0$, d.h. jede CF hat eine wohldefinierte Restklasse modulo G_n. Für eine NF (x_i) gilt $(x_i) + G_n = G_n$ für alle n. Daher definiert die Zuordnung

$$(x_i) \longrightarrow ((x_i) + G_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

einen Homomorphismus

$$f : \hat{G} \longrightarrow \varprojlim_n G/G_n.$$

Bleibt zu zeigen 1) f ist bijektiv.
2) f ist Homöomorphismus.

Zu 1) Sei $(x_i) \in \ker(f)$. Dann liegen für jedes $n \in \mathbb{N}$ fast alle x_i in G_n, d.h. (x_i) ist NF. Sei $(x_n + G_n)_n \in \varprojlim_n G/G_n$, d.h. für $m \geq n$ gilt $x_m \equiv x_n \bmod G_n$, d.h. $x_m - x_n \in G_n \Longrightarrow (x_n)$ ist Cauchyfolge die sich auf $(x_n + G_n)$ abbildet.
Zu 2) die Untergruppen

$$\hat{G}_n = \{\hat{x} \in \hat{G} \mid \exists \text{ repr. CF } (x_i) \text{ mit } x_i \in G_n \ \forall i\}$$

bilden per definitionem eine Umgebungsbasis der 0 in $\hat{G}$.

Die Gruppen

$$U_n = \ker\left(\varprojlim_i G/G_i \longrightarrow G/G_n\right)$$

bilden per definitionem eine Umgebungsbasis der 0 in $\varprojlim G/G_i$. Nun gilt $f(\hat{G}_n) = U_n$. $\square$

Bemerkung 23.34. Dies gibt einen alternativen Beweis von Lemma 23.30 (ii):

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{G} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \hat{\hat{G}} & & \\
\| \wr & & \| \wr & \Longrightarrow \hat{\varphi} & \text{ISO} \\
\varprojlim_n G/G_n & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_n \hat{G}/\hat{G}_n & &
\end{array}$$

Sei

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \xrightarrow{p} G'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

eine exakte Folge abelscher Gruppen und

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \dots$$

eine Folge von Untergruppen. Wir geben

G die Topologie durch $G_1 \supset G_2 \supset \dots$.
G'' die Topologie durch $p(G_1) \supset p(G_2) \supset \dots$
G' die Topologie durch $G' \cap G_1 \supset G' \cap G_2 \supset \dots$.

Dadurch wird $(*)$ zu einer exakten Folge topologischer Gruppen.

Lemma 23.35. *Die induzierte Folge*

$$0 \longrightarrow \hat{G}' \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow \hat{G}'' \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis. Wir haben eine exakte Folge projektiver Systeme

$$0 \longrightarrow G'/G' \cap G_n \longrightarrow G/G_n \longrightarrow G''/p(G_n) \longrightarrow 0.$$

Da alle Übergangsabbildungen surjektiv sind, ist $(G'/G' \cap G_n)_n$ ein ML-System und also nach Theorem 18.8 die Folge der projektiven Limites

$$0 \longrightarrow \hat{G}' \longrightarrow \hat{G} \longrightarrow \hat{G}'' \longrightarrow 0$$

algebraisch exakt. Nach Definition der Topologien auf den projektiven Limites, ist die Folge auch topologisch exakt. $\square$

Sei A ein kommutativer Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Setze $G_n = \mathfrak{a}^n$. Dies definiert die **$\mathfrak{a}$-adische Topologie** auf A. Wegen

$$G_i \cdot G_j = \mathfrak{a}^i \mathfrak{a}^j = \mathfrak{a}^{i+j} = G_{i+j}$$

wird A dadurch zu einem **topologischen Ring** (d.h. auch die Multiplikation ist stetig). Die Untergruppen $\widehat{\mathfrak{a}^n} \subset \hat{A}$ sind offensichtlich Ideale und $A/\mathfrak{a}^n \xrightarrow{\sim} \hat{A}/\widehat{\mathfrak{a}^n}$ ist ein Ringisomorphismus.

Die Vervollständigung $\hat{A}$ von A ist wieder ein topologischer Ring, $\varphi : A \to \hat{A}$ ist stetig und $\ker(\varphi) = \bigcap_i \mathfrak{a}^i$.

Bekannter Fall: $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = p\mathbb{Z}$, $\hat{A} = \mathbb{Z}_p$.

Sei nun M ein A-Modul und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Setze $G = M$ und $G_n = \mathfrak{a}^n M$. Dies definiert die $\mathfrak{a}$-Topologie (auch $\mathfrak{a}$-adische Topologie genannt) auf M. Die Vervollständigung $\hat{M}$ ist ein *topologischer* $\hat{A}$-Modul ($\hat{A}$ = Vervollständigung bzgl. $\mathfrak{a}$), d.h. $\hat{A} \times \hat{M} \to \hat{M}$ ist stetig.

Ist $f : M \to N$ ein A-Modulhomomorphismus, so gilt $f(\mathfrak{a}^n M) = \mathfrak{a}^n f(M) \subset \mathfrak{a}^n N$. Daher ist f stetig bezüglich der $\mathfrak{a}$-Topologien auf M und N und induziert einen $\hat{A}$-Modulhomomorphismus $\hat{f} : \hat{M} \to \hat{N}$.

Definition 23.36. Eine fallende Folge $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \ldots$ von Untermoduln heißt **$\mathfrak{a}$-Filtrierung**, wenn $\mathfrak{a}M_n \subset M_{n+1}$ für alle n gilt. Eine $\mathfrak{a}$-Filtrierung heißt **stabil**, wenn $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$ für hinreichend großes n gilt.

Beispiel 23.37. Die Filtrierung $M_n = \mathfrak{a}^n M$ ist eine stabile $\mathfrak{a}$-Filtrierung.

Lemma 23.38. *Zwei stabile $\mathfrak{a}$-Filtrierungen (M_n) und (M'_n) auf demselben A-Modul M haben* **beschränkte Differenz**, *d.h. es existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $M_{n+n_0} \subset M'_n$ und $M'_{n+n_0} \subset M_n$ für alle n gilt. Insbesondere induziert jede stabile $\mathfrak{a}$-Filtrierung auf M dieselbe Topologie, nämlich die $\mathfrak{a}$-Topologie.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $M'_n = \mathfrak{a}^n M$. Wegen $\mathfrak{a}M_n \subset M_{n+1}$ für alle n gilt $\mathfrak{a}^n M \subset M_n$ für alle n.

Nun gilt aber $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$ für $n \geq n_0$. Es folgt $M_{n+n_0} = \mathfrak{a}^n M_{n_0} \subset \mathfrak{a}^n M$. □

24 Graduierungen

Definition 24.1. Ein **graduierter Ring** ist ein Ring A zusammen mit einer Familie additiver Untergruppen $(A_n)_{n\geq 0}$, so dass

(i) $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$,

(ii) $A_n A_m \subset A_{m+n}$ für alle $n, m \geq 0$.

Insbesondere ist A_0 ein Unterring von A und alle A_n sind A_0-Moduln.

Beispiel 24.2. Sei $A = k[X_1, \dots, X_r]$ und $A_n =$ die Menge aller homogenen Polynome vom (Total-)Grad n.

Definition 24.3. Sei A ein graduierter Ring. Ein **graduierter A-Modul** ist ein A-Modul M zusammen mit einer Familie von Untergruppen $(M_n)_{n\geq 0}$, so dass

(i) $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$,

(ii) $A_n M_m \subset M_{m+n}$ für alle $n, m \geq 0$.

Insbesondere ist M_n für jedes n ein A_0-Modul. Ein Element $x \in M_n$ heißt **homogen** vom Grad n. Jedes Element $x \neq 0$ in M ist in eindeutiger Weise Summe endlich vieler homogener Elemente $\neq 0$ (die **homogenen Komponenten** von x).

Ein Homomorphismus graduierter A-Moduln ist ein A-Modulhomomorphismus $f : M \to N$ mit $f(M_n) \subset N_n$ für alle n. Ist A ein graduierter Ring, so ist $A_+ = \bigoplus_{n>0} A_n$ ein Ideal in A.

Lemma 24.4. *Sei A ein graduierter Ring. Dann sind äquivalent*

(i) *A ist noethersch.*

(ii) *A_0 ist noethersch und A ist eine endlich erzeugte A_0-Algebra.*

Beweis. (i)$\Rightarrow$(ii). $A_0 = A/A_+$ ist noethersch. A_+ ist als Ideal in A endlich erzeugt. Seien $x_1, \dots, x_s$ Erzeuger, die wir ohne Einschränkung als homogen vom Grad $k_1, \dots, k_s$ (alle > 0) annehmen können. Setze

$$A' = A_0[x_1, \dots, x_s] \subset A. \qquad \text{(ein Teilring)}$$

Wir zeigen $A' = A$ indem wir $A_n \subset A'$ für alle n zeigen. Induktion über n. $n = 0$ trivial. Induktionsschritt: Sei $n > 0$ und $y \in A_n$. Wegen $y \in A_+$ existieren Elemente $a_i \in A_{n-k_i}$, $i = 1, \dots, s$, (Konvention: $A_i = 0$ für $i < 0$) mit

$$y = a_1 x_1 + \dots + a_s x_s.$$

(Man stelle zunächst y als A-Linearkombination der x_i dar und streiche dann rechts alle Summanden vom Grad $\neq n$). Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_i \in A'$ für alle i und somit $y \in A'$.
(ii)$\Rightarrow$(i): Hilbertscher Basissatz. □

Sei A ein (nicht graduierter) Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Dann können wir den graduierten Ring

$$A^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n$$

bilden ($\mathfrak{a}^0 = A$). Ist A noethersch, so ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, etwa durch $x_1, \ldots, x_s$. Dann gilt $A^* = A[x_1, \ldots, x_s]$ und somit ist auch A^* noethersch. Sei M ein A-Modul mit einer $\mathfrak{a}$-Filtrierung M_n. Wir bilden den graduierten A^*-Modul

$$M^* = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n.$$

Lemma 24.5. *Sei A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und (M_n) eine $\mathfrak{a}$-Filtrierung von M. Dann sind äquivalent*

(i) *M^* ist ein endlich erzeugter A^*-Modul.*

(ii) *Die $\mathfrak{a}$-Filtrierung (M_n) ist stabil.*

Beweis. Jedes M_n ist endlich erzeugter A-Modul und somit auch

$$Q_n = \bigoplus_{r=0}^{n} M_r.$$

Sei M_n^* der von der Untergruppe Q_n in M^* erzeugte (endlich erzeugte) A^*-Untermodul. Dann gilt

$$M_n^* = M_0 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \mathfrak{a}M_n \oplus \mathfrak{a}^2 M_n \oplus \cdots .$$

Die M_n^* bilden eine aufsteigende Kette von endlich erzeugten A^*-Untermoduln in M^*, deren Vereinigung ganz M^* ist. Da A^* noethersch ist, erhalten wir

M^* ist endlich erzeugter A^*-Modul $\Leftrightarrow$
die Kette wird stationär, also $M^* = M_{n_0}^*$ für ein n_0 $\Leftrightarrow$
$M_{n_0+r} = \mathfrak{a}^r M_{n_0}$ für alle $r \geq 0$ $\Leftrightarrow$
die Filtrierung ist stabil. □

Satz 24.6 (Artin-Rees-Lemma)**.** *Sei A ein noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter A-Modul, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und (M_n) eine stabile $\mathfrak{a}$-Filtrierung von M.*

Dann ist für jeden Untermodul $M' \subset M$ die Filtrierung $(M' \cap M_n)$ $\mathfrak{a}$-stabil.

Beweis. Es gilt $\mathfrak{a}(M' \cap M_n) \subset \mathfrak{a}M' \cap \mathfrak{a}M_n \subset M' \cap M_{n+1}$, weshalb $(M' \cap M_n)$ eine $\mathfrak{a}$-Filtrierung ist. Diese definiert einen graduierten Modul M'^*, welcher ein A^*-Untermodul von M^* und somit endlich erzeugt ist. Nach Lemma 24.5 folgt die Stabilität. □

Wir setzen $M_n = \mathfrak{a}^n M$ und benutzen, dass nach Lemma 23.38 stabile $\mathfrak{a}$-Filtrierungen beschränkte Differenz haben, um die folgenden Korollare zu erhalten:

Korollar 24.7. *Es existiert eine natürliche Zahl k, so dass*

$$(\mathfrak{a}^n M) \cap M' = \mathfrak{a}^{n-k}(\mathfrak{a}^k M \cap M') \text{ für alle } n \geq k.$$

Korollar 24.8. *Die Einschränkung der $\mathfrak{a}$-Topologie von M auf M' ist die $\mathfrak{a}$-Topologie von M'.*

Theorem 24.9. *Sei A ein noetherscher Ring und*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine exakte Folge endlich erzeugter A-Moduln. Dann ist für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ die Folge der $\mathfrak{a}$-adischen Vervollständigungen

$$0 \to \hat{M}' \to \hat{M} \to \hat{M}'' \to 0$$

exakt.

Beweis. Es gilt $\mathfrak{a}^n M'' = \mathfrak{a}^n(M/M') = (\mathfrak{a}^n M + M')/M'$. Daher ist die $\mathfrak{a}$-Topologie auf M'' die Faktortopologie der $\mathfrak{a}$-Topologie auf M. Nach Korollar 24.8 ist die $\mathfrak{a}$-Topologie auf M' gleich der Unterraumtopologie der $\mathfrak{a}$-Topologie von M. Das Ergebnis folgt daher aus Lemma 23.35. □

Der natürliche Homomorphismus $A \to \hat{A}$ macht $\hat{A}$ zu einer A-Algebra. Der A-Modulhomomorphismus $M \to \hat{M}$ induziert einen $\hat{A}$-Modulhomomorphismus

$$\hat{A} \otimes_A M \to \hat{A} \otimes_A \hat{M} \to \hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{M} = \hat{M}.$$

Satz 24.10. *Ist M endlich erzeugt, so ist $\hat{A} \otimes_A M \to \hat{M}$ surjektiv. Ist A noethersch, so ist dies ein Isomorphismus*

Beweis. Vervollständigung kommutiert mit endlichen direkten Summen. Also gilt für $F = A^n$, dass $\hat{F} = \hat{A}^n$. Jetzt sei M endlich erzeugt, so dass wir eine exakte Folge

$$0 \to N \to F \to M \to 0$$

haben. Dies gibt uns ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{A} \otimes_A N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & \hat{A} \otimes_A F \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \hat{A} \otimes_A M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{N} \arrow[r] & \hat{F} \arrow[r, "\delta"] & \hat{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es ist β ein Isomorphismus und δ ist surjektiv nach Lemma 23.35 (angewendet auf $0 \to N \to F \to M \to 0$ mit der $\mathfrak{a}$-Topologie auf F, der Unterraumtopologie auf N und der Faktorraumtopologie auf M, die gleich der $\mathfrak{a}$-Topologie ist). Daher ist α surjektiv.

Ist nun A noethersch, so ist N endlich erzeugt, also auch γ surjektiv. Die obere Zeile ist exakt wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts. Die untere Zeile ist exakt nach Theorem 24.9. Das 5er-Lemma impliziert, dass α ein Isomorphismus ist. □

Korollar 24.11. *Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Dann ist $\hat{A}$ eine flache A-Algebra.*

Beweis. Nach Theorem 24.9 und Satz 24.10 ist $\hat{A} \otimes_A -$ exakt auf endlich erzeugten A-Moduln. Weil A noethersch ist, gilt $\mathrm{Tor}_1^A(\hat{A}, N) = 0$ für jeden endlich erzeugten Modul N (N hat Auflösung durch endlich erzeugte flache). Sei N beliebig. Dann gilt $N = \varinjlim_i N_i$, wobei N_i die endlich erzeugten Untermoduln von N durchläuft. Da $\otimes$ mit direkten Limites kommutiert (Satz 6.8), folgt durch Betrachtung einer festen flachen Auflösung von $\hat{A}$, dass $\mathrm{Tor}_1^A(\hat{A}, N) = \varinjlim_i \mathrm{Tor}_1^A(\hat{A}, N_i) = 0$. Da N beliebig war, ist $\hat{A}$ flach. □

Lemma 24.12. *Sei A noethersch und $\hat{A}$ die $\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung. Wir betrachten den natürlichen Ringhomorphismus $A \to \hat{A}$. Dann gilt*

(i) $\hat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}^e \cong \hat{A} \otimes_A \mathfrak{a}$.

(ii) $\widehat{\mathfrak{a}^n} = \hat{\mathfrak{a}}^n$.

(iii) $\mathfrak{a}^n / \mathfrak{a}^{n+1} \cong \hat{\mathfrak{a}}^n / \hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$.

(iv) $\hat{\mathfrak{a}}$ *ist in jedem Maximalideal von $\hat{A}$ enthalten.*

Beweis. Da A noethersch ist, ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt und nach Satz 24.10 ist $\hat{A} \otimes_A \mathfrak{a} \to \hat{\mathfrak{a}}$ ein Isomorphismus. Das Bild von $\hat{A} \otimes_A \mathfrak{a} \to \hat{A}$ ist aber auch gleich $\mathfrak{a}^e$, was (i) zeigt.

(i) auf $\mathfrak{a}^n$ angewendet (gleiche Topologie) gibt

$$\widehat{\mathfrak{a}^n} \overset{(i)}{=} (\mathfrak{a}^n)^e \overset{1.32}{=} (\mathfrak{a}^e)^n \overset{(i)}{=} \hat{\mathfrak{a}}^n,$$

was (ii) zeigt. Nach Lemma 23.32 folgt $A/\mathfrak{a}^n \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^n$ und das 5er-Lemma impliziert (iii). Nun ist $\hat{A}$ vollständig bzgl. der $\hat{\mathfrak{a}}$-Topologie. Für jedes $x \in \hat{\mathfrak{a}}$ konvergiert

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots$$

in $\hat{A}$, weshalb $1-x$ eine Einheit ist. Wäre nun $\hat{\mathfrak{a}} \not\subset \mathfrak{m}$ für ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset \hat{A}$, so folgte $\hat{\mathfrak{a}} + \mathfrak{m} = (1)$, also existieren $x \in \hat{\mathfrak{a}}$, $y \in \mathfrak{m}$ mit $x + y = 1$. Hieraus folgt $y = 1 - x \in \hat{A}^\times$, Widerspruch. □

Korollar 24.13. *Sei A noethersch und $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximalideal. Dann ist die $\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung $\hat{A}$ von A ein lokaler Ring mit Maximalideal $\hat{\mathfrak{m}}$.*

Beweis. Es ist $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m}$ ein Körper, also ist $\hat{\mathfrak{m}}$ ein Maximalideal. Außerdem ist $\hat{\mathfrak{m}}$ in jedem Maximalideal enthalten. □

Korollar 24.14. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring. Dann ist die $\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung $\hat{A}$ eine treuflache A-Algebra. Insbesondere ist $A \to \hat{A}$ injektiv, also A hausdorffsch in der $\mathfrak{m}$-adischen Topologie.*

Beweis. Es ist $\hat{A}$ flach und lokal mit Maximalideal $\hat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^e$. Daher ist $\hat{A}$ treuflach nach Korollar 5.14. □

Korollar 24.15. *Sei A ein noetherscher Ring und $M' \to M \to M''$ eine Folge von endlich erzeugten A-Moduln. Dann sind äquivalent.*

(i) $M' \to M \to M''$ *ist exakt.*

(ii) $M'_\mathfrak{m} \to M_\mathfrak{m} \to M''_\mathfrak{m}$ *ist exakt für alle Maximalideale* $\mathfrak{m} \subset A$.

(iii) $M'^{\wedge\mathfrak{m}} \to M^{\wedge\mathfrak{m}} \to M''^{\wedge\mathfrak{m}}$ *ist exakt für alle Maximalideale* $\mathfrak{m} \subset A$.

Beweis. Die Äquivalenz (i)⇔(ii) wurde schon in Satz 7.20 bewiesen. Es verbleibt die Äquivalenz (ii)⇔(iii) für ein festes $\mathfrak{m}$ zu zeigen. Für $S = A \smallsetminus \mathfrak{m}$ gilt

$$A/\mathfrak{m}^n = S^{-1}(A/\mathfrak{m}^n) \cong S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{m}^n = A_\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}A_\mathfrak{m})^n$$

für alle n. Ein Übergang zum projektiven Limes über n zeigt, dass $\hat{A}^{\wedge\mathfrak{m}} \to {A_\mathfrak{m}}^{\wedge\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}}$ ein Isomorphismus ist. Für endlich erzeugtes M erhalten wir

$$M^{\wedge\mathfrak{m}} \cong A^{\wedge\mathfrak{m}} \otimes_A M \cong {A_\mathfrak{m}}^{\wedge\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}} \otimes_A M \cong$$

$${A_\mathfrak{m}}^{\wedge\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}} \otimes_{A_\mathfrak{m}} A_\mathfrak{m} \otimes_A M \cong {A_\mathfrak{m}}^{\wedge\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}} \otimes_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \cong (M_\mathfrak{m})^{\wedge\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}},$$

d.h. die Folge in (iii) ist die $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$-adische Vervollständigung der Folge in (ii). Daher folgt die Äquivalenz von (ii) und (iii) aus der Treuflachheit von $A_\mathfrak{m} \to {A_\mathfrak{m}}^{\wedge\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}}$. □

Theorem 24.16 (Krull)**.** *Sei A ein noetherscher Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, M ein endlich erzeugter A-Modul und $\hat{M}$ die $\mathfrak{a}$-Vervollständigung von M. Dann gilt für*

$$E := \bigcap_n \mathfrak{a}^n M = \ker(M \to \hat{M})$$

die Gleichung

$$E = \{x \in M \mid (1+a)x = 0 \text{ für ein } a \in \mathfrak{a}\}.$$

Beweis. E ist der Durchschnitt aller 0-Umgebungen von M, also ist E die einzige Umgebung von $0 \in E$. Nach Korollar 24.8 ist $\mathfrak{a}E$ eine 0-Umgebung in E, also $\mathfrak{a}E = E$ (diese Gleichung ist nicht trivial!). Nach Korollar 2.7 folgt $(1+a)E = 0$ für ein $a \in \mathfrak{a}$. Umgekehrt gelte $(1-a)x = 0$ für ein $a \in \mathfrak{a}$. Dann gilt

$$x = ax = a^2x = \cdots \in \bigcap_n \mathfrak{a}^n M = E.$$

□

Korollar 24.17. *Sei A ein nullteilerfreier noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \neq (1)$ ein Ideal. Dann gilt $\cap\mathfrak{a}^n = 0$.*

Beweis. $1+\mathfrak{a}$ enthält keine Nullteiler. □

Korollar 24.18. *Sei $(A,\mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist die $\mathfrak{m}$-Topologie auf M hausdorffsch. (Insbesondere ist die $\mathfrak{m}$-adische Topologie auf A hausdorffsch, das hatten wir aber schon oben gesehen).*

Beweis. $1+\mathfrak{m}\subset A^\times$. □

25 Der assoziierte graduierte Ring

Sei A ein Ring und $\mathfrak{a}\subset A$ ein Ideal. Wir definieren

$$\mathrm{gr}(A)(=\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A))=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}.$$

Dies ist ein graduierter Ring mit Multiplikation definiert wie folgt: Für $x_n\in\mathfrak{a}^n$ bezeichne $\bar{x}_n$ das Bild von x_n in $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ und für $x_m\in\mathfrak{a}^m$ bezeichne $\bar{x}_m$ das Bild von x_m in $\mathfrak{a}^m/\mathfrak{a}^{m+1}$. Das Produkt $\bar{x}_n\bar{x}_m$ ist dann definiert als das Bild von x_nx_m in $\mathfrak{a}^{n+m}/\mathfrak{a}^{n+m+1}$ (dies ist wohldefiniert).

Ist M ein A-Modul und (M_n) eine $\mathfrak{a}$-Filtrierung, so setzt man $\mathrm{gr}_n(M)=M_n/M_{n+1}$ und

$$\mathrm{gr}(M)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{gr}_n(M).$$

Dies ist in natürlicher Weise ein graduierter $\mathrm{gr}(A)$-Modul.

Satz 25.1. *Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a}\subset A$ ein Ideal. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ *ist noethersch.*

(ii) $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$ *und* $\mathrm{gr}_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$ *sind isomorph als graduierte Ringe.*

(iii) *Ist M ein endlich erzeugter A-Modul und M_n eine $\mathfrak{a}$-stabile Filtrierung auf M, so ist $\mathrm{gr}(M)$ ein endlich erzeugter graduierter $\mathrm{gr}_{\mathfrak{a}}(A)$-Modul.*

Beweis. (i) A ist noethersch, also $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, sagen wir $\mathfrak{a}=(x_1,\ldots,x_r)$. Sei $\bar{x}_i$ das Bild von x_i in $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$. Dann gilt

$$\mathrm{gr}(A)=(A/\mathfrak{a})[\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_r].$$

Daher ist $\mathrm{gr}(A)$ eine endlich erzeugte Algebra über dem noetherschen Ring $A/\mathfrak{a}$ und somit noethersch.
(ii) Es gilt $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}\cong\hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$ für alle n nach Lemma 24.12. In der Summe über alle n erhalten wir (ii).

(iii) Nach Definition existiert n_0 mit $M_{n_0+r} = \mathfrak{a}^r M_{n_0}$, $r \geq 0$. Also ist $\mathrm{gr}(M)$ als $\mathrm{gr}(A)$-Modul erzeugt von

$$\bigoplus_{n \leq n_0} \mathrm{gr}_n(M).$$

Jedes der $\mathrm{gr}_n(M) = M_n/M_{n+1}$ ist ein endlich erzeugter $A/\mathfrak{a}$-Modul. Also ist $\mathrm{gr}(M)$ endlich erzeugter $\mathrm{gr}(A)$-Modul. □

Lemma 25.2. *Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus filtrierter abelscher Gruppen (d.h. $\phi(A_n) \subset B_n$) und seien $\mathrm{gr}(\phi) : \mathrm{gr}(A) \to \mathrm{gr}(B)$ und $\hat{\phi} : \hat{A} \to \hat{B}$ die induzierten Homomorphismen auf den assoziierten Graduierten und Vervollständigungen. Dann gilt*

(i) $\mathrm{gr}(\phi)$ *injektiv* $\Rightarrow \hat{\phi}$ *injektiv.*

(ii) $\mathrm{gr}(\phi)$ *surjektiv* $\Rightarrow \hat{\phi}$ *surjektiv.*

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_n/A_{n+1} & \longrightarrow & A/A_{n+1} & \longrightarrow & A/A_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{gr}_n(\phi)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{n+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_n} & & \\
0 & \longrightarrow & B_n/B_{n+1} & \longrightarrow & B/B_{n+1} & \longrightarrow & B/B_n & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Im Fall (i) liefert das Schlangenlemma induktiv $\ker \phi_n = 0$, woraus die Aussage wegen der Linksexaktheit von $\varprojlim$ durch Übergang zum projektiven Limes folgt.

Im Fall (ii) liefert das Schlangenlemma induktiv $\mathrm{coker}(\phi_n) = 0$ für alle n und die Surjektivität von $\ker(\phi_{n+1}) \to \ker(\phi_n)$. Nimmt man nun den inversen Limes über die Folgen

$$0 \to \ker(\phi_n) \to A/A_n \xrightarrow{\phi} B/B_n \to 0,$$

erhält man das Ergebnis mithilfe von $\varprojlim^1 \ker(\phi_n) = 0$, was gilt, da dieses System ML ist. □

Satz 25.3. *Sei A ein Ring, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, M ein A-Modul und (M_n) eine $\mathfrak{a}$-Filtrierung von M. Angenommen*

(a) *A ist vollständig in der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie*

(b) *M ist hausdorffsch in der Filtrationstopologie*

Ist dann $\mathrm{gr}(M)$ endlich erzeugter (bzw. noetherscher) $\mathrm{gr}(A)$-Modul, so ist M ein endlich erzeugter (bzw. noetherscher) A-Modul.

Beweis. Seien ξ_i, $i = 1, \dots, r$ Erzeuger von $\mathrm{gr}(M)$ als $\mathrm{gr}(A)$-Modul. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die ξ_i homogen sind vom Grad, sagen wir, n_i sind. Wähle Urbilder $x_i \in M_{n_i}$ der ξ_i. Sei F^i der A-Modul A mit der $\mathfrak{a}$-stabilen Filtrierung $F^i_k = \mathfrak{a}^{k+n_i}$. Dann ist

$$\phi : F := \bigoplus_{i=1}^{r} F^i \to M, \quad 1_i \in F^i \mapsto x_i$$

ein Homomorphismus filtrierter Gruppen und $\mathrm{gr}(\phi) : \mathrm{gr}(F) \to \mathrm{gr}(M)$ ein Homomorphismus graduierter $\mathrm{gr}(A)$-Moduln. Nach Konstruktion ist $\mathrm{gr}(\phi)$ surjektiv. Nach Lemma 25.2 ist also auch $\hat{\phi}$ surjektiv. Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\phi} & M \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ \hat{F} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \hat{M} \end{array}$$

Wegen $\hat{A} = A$ und $\widehat{F^i} = \hat{A}$, $i = 1, \dots, r$, ist α ein Isomorphismus. Da M hausdorffsch ist, ist β injektiv. Daher folgt ϕ surjektiv aus $\hat{\phi}$ surjektiv, d.h. M ist durch $x_1, \dots, x_r$ erzeugt (wir erhalten nebenbei auch, dass β ein Isomorphismus ist, benutzen es aber nicht).

Nun sei $\mathrm{gr}(M)$ noethersch. Sei $M' \subset M$ ein Untermodul. Wir müssen zeigen, dass auch M' endlich erzeugt ist. Setze $M'_n = M_n \cap M'$. Dann ist (M'_n) eine $\mathfrak{a}$-Filtrierung von M' und wir erhalten Injektionen $M'_n/M'_{n+1} \hookrightarrow M_n/M_{n+1}$ für alle n. Also ist $\mathrm{gr}(M') \to \mathrm{gr}(M)$ injektiv und somit $\mathrm{gr}(M')$ als Untermodul des noetherschen $\mathrm{gr}(A)$-Moduls $\mathrm{gr}(M)$ endlich erzeugt. Mit M ist auch M' hausdorffsch, und nach dem ersten Teil des Beweises ist M' endlich erzeugt. □

Theorem 25.4. *Ist A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist die $\mathfrak{a}$-adische Vervollständigung $\hat{A}$ von A ein noetherscher Ring.*

Beweis. Nach Satz 25.1 wissen wir $\mathrm{gr}(A) = \mathrm{gr}(\hat{A})$. Nun wenden wir Satz 25.3 auf den $\hat{A}$-Modul $M = \hat{A}$ an, welcher in der $\hat{\mathfrak{a}}$-Topologie vollständig, also insbesondere hausdorffsch ist. □

Korollar 25.5. *Ist A ein noetherscher Ring, so ist auch $B = A[[T_1, \dots, T_n]]$ ein noetherscher Ring.*

Beweis. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist der Ring $A[T_1, \dots, T_n]$ noethersch und B ist seine Vervollständigung in der $(T_1, \dots, T_n)$-Topologie. □

26 Dimensionstheorie

Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximalideal.

Definition 26.1. Ein Ideal $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ heißt **$\mathfrak{m}$-primär**, wenn $r(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$ gilt ($\overset{19.18}{\Leftrightarrow}$ $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{m}^r$ für ein r).

Sei M ein endlich erzeugter A-Modul, $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal in A und (M_n) eine $\mathfrak{q}$-Filtrierung von M. Dann ist M/M_n ein endlich erzeugter Modul über dem Artinring $A/\mathfrak{q}^n$, weshalb

$$\ell_A(M/M_n) = \ell_{A/\mathfrak{q}^n}(M/M_n) < \infty$$

gilt (als endlich erzeugter $A/\mathfrak{q}^n$-Modul ist M sowohl noethersch als auch artinsch und hat daher nach Satz 21.6 endliche Länge).

Theorem 26.2. *Angenommen (M_n) ist $\mathfrak{q}$-stabil und es sei s die Minimalanzahl von Erzeugern von $\mathfrak{q}$. Dann gilt*

(i) *Es gibt ein Polynom $g \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad $\leq s$ mit $\ell_A(M/M_n) = g(n)$ für $n \gg 0$.*

(ii) $\deg g$ *hängt nur von M (und $\mathfrak{m}$) ab.*

(iii) *Der Leitkoeffizient von g hängt nur von M und $\mathfrak{q}$, aber nicht von der $\mathfrak{q}$-Filtrierung (M_n) ab.*

Beweis. Wir lassen den Beweis weg. Siehe z.B. Atiyah-Macdonald: Introduction to Commutative Algebra, Prop. 11.4. □

Definition 26.3. Das nach Theorem 26.2 zur Filtrierung $M_n = \mathfrak{q}^n M$ gehörige Polynom g wird mit $\chi_{\mathfrak{q}}^M$ bezeichnet. Man setzt $d(M)(= d_{\mathfrak{m}}(M)) = \deg \chi_{\mathfrak{q}}^M$.

Korollar 26.4. *Sei $\delta(A)$ = minimale Anzahl von Erzeugern eines $\mathfrak{m}$-primären Ideals in A. Dann gilt für jedes M:*

$$d(M) \leq \delta(A).$$

Satz 26.5. *Sei M endlich erzeugt und $x \in A$, so dass $M \xrightarrow{\cdot x} M$ injektiv ist. Dann gilt für $M' = M/xM$*

$$d(M') \leq d(M) - 1.$$

Beweis. Setze $N = xM \subset M$ und $N_n = \mathfrak{q}^n M \cap N$. Wir erhalten exakte Folgen

$$0 \to N/N_n \to M/\mathfrak{q}^n M \to M'/\mathfrak{q}^n M' \to 0.$$

Da die Länge additiv in exakten Folgen ist, erhalten wir für $g := \chi_{\mathfrak{q}}^M - \chi_{\mathfrak{q}}^{M'}$ die Gleichung

$$g(n) = \ell(N/N_n) \text{ für } n \gg 0.$$

Nach dem Artin-Rees-Lemma ist (N_n) $\mathfrak{q}$-stabil und es gilt $N \cong M$ als A-Moduln. Daher haben g und $\chi_{\mathfrak{q}}^M$ gleichen Grad und Leitkoeffizienten und es folgt

$$\deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M'} < \deg \chi_{\mathfrak{q}}^M.$$ □

Beispiele 26.6. 1.) $A = k$ Körper, $\mathfrak{m} = \mathfrak{q} = (0)$, M endlich-dimensionaler k-Vektorraum der Dimension $s \geq 1$, $M_n = \mathfrak{m}^n M$. Dann gilt $\ell(M/M_n) = s$ für $n \geq 1$, also $\chi_{(0)}^M \equiv s$, $d(M) = 0$.

2.) A Hauptidealring, $p \in A$ ein Primelement, $\mathfrak{m} = (p)$, $\mathfrak{q} = (p^r)$, $r \geq 1$, $M = A$, $M_n = p^{rn} A$.

Es gilt $\ell(A/(p^{nr})) = rn$ also

$$\chi_{(p^r)}^A = rX, \quad d_{(p)}(A) = 1.$$

Lemma 26.7. *Es sei k ein Körper, A eine k-Algebra und $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximalideal, so dass die Komposition $k \to A \to A/\mathfrak{m}$ ein Isomorphismus ist. Dann gilt*

$$\ell_A(A/\mathfrak{m}^n) = \dim_{k\text{-VR}}(A/\mathfrak{m}^n).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \ell_A(A/\mathfrak{m}^n) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \ell_A(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \ell_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \dim_{A/\mathfrak{m}\text{-VR}}(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \dim_{k\text{-VR}}(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) \\ &= \dim_{k\text{-VR}}(A/\mathfrak{m}^n). \end{aligned}$$

□

Satz 26.8. *Sei k ein Körper, $A = k[T_1, \ldots, T_d]$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} = (T_1, \ldots, T_d)$, $M = A$, $M_n = \mathfrak{m}^n A$. Dann gilt*

$$\chi_{\mathfrak{q}}^A = (X + d - 1)(X + d - 2) \cdots (X + 1)X/d!$$

Insbesondere gilt: $d_{(T_1,\ldots,T_d)}(k[T_1, \ldots, T_d]) = d$.

Beweis. Nach Lemma 26.7 gilt

$$\ell_A(A/\mathfrak{m}^n) = \dim_{k\text{-VR}}(A/\mathfrak{m}^n) = (\text{Anz. der Monome in } T_1, \ldots, T_d \text{ vom Grad } < n).$$

Diese Anzahl ist gleich $\binom{n+d-1}{d}$.† □

†Berechnung der Anzahl der Monome vom Grad $< n$ in d Variablen: Man habe eine Reihe mit $n + d - 1$ Löchern und dazu d Pfähle. Einem Monom $T_1^{e_1} \cdots T_d^{e_d}$ mit $\sum e_i \leq n - 1$ ordnet man die Konstellation: e_1 Leerstellen, 1 Pfahl, e_2 Leerstellen, 1 Pfahl ... zu. Die Monome stehen in Bijektion mit den Pfahlkonfigurationen. Es gibt $\binom{n+d-1}{d}$ viele Möglichkeiten, die Pfähle zu setzen.

Korollar 26.9. *Sei* $0 \neq f \in k[T_1, \dots, T_d]$. *Dann ist*

$$\dim_{k\text{-VR}} k[T_1, \dots, T_d]/(f + (T_1, \dots, T_d)^n)$$

für $n \gg 0$ *ein Polynom in* n *vom Grad* $\leq d-1$.

Beweis. Wir übernehmen die Notation von Satz 26.8. Es ist $A/\mathfrak{m}^n$ lokal mit Maximalideal $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^n$. Für $f \notin \mathfrak{m}$ gilt daher $A/(f + \mathfrak{m}^n) = 0$ für alle n und die Aussage des Korollars ist trivial richtig. Sei $f \in \mathfrak{m}$. Wir setzen $\bar{A} = A/(f)$, $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/(f)$. Nach Lemma 26.7 für den lokalen Ring $(\bar{A}, \bar{\mathfrak{m}})$ erhalten wir

$$\dim_{k\text{-VR}} k[T_1, \dots, T_d]/(f + (T_1, \dots, T_d)^n) = \ell_{\bar{A}}(\bar{A}/\bar{\mathfrak{m}}^n) = \ell_A(\bar{A}/\mathfrak{m}^n \bar{A}).$$

Wegen $f \neq 0$ ist $A \xrightarrow{\cdot f} A$ injektiv und nach Satz 26.5 gilt $d(\bar{A}) \leq d(A) - 1$. Nach Satz 26.8 gilt $d(A) - 1 = d - 1$. □

Definition 26.10. Die **Dimension** von A ist definiert durch

$$\dim A = \sup(n \mid \text{es ex. Kette } \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_n \text{ von Primidealen in } A).$$

Beispiele 26.11.

$$\begin{aligned} \dim A = 0 &\Leftrightarrow \text{ jedes Primideal ist Maximalideal} \\ &\Leftrightarrow A \text{ artinsch} \end{aligned}$$

$$A \text{ HIR} \Rightarrow \text{ jedes Primideal } \neq 0 \text{ ist maximal} \Rightarrow \dim A \leq 1.$$

Theorem 26.12 (Hauptsatz der Dimensionstheorie)**.** *Sei* A *ein lokaler noetherscher Ring. Dann gilt*

$$\delta(A) = d(A) = \dim A.$$

Insbesondere ist $\dim A$ *endlich.*

Wir zeigen nacheinander

$$\delta(A) \geq d(A) \geq \dim A \geq \delta(A).$$

Die erste Ungleichung ist Korollar 26.4.

Satz 26.13. *Ist* A *noethersch, lokal, so gilt* $d(A) \geq \dim A$.

Beweis. (per Induktion über $d = d(A)$)

$d = 0 \Rightarrow \ell(A/\mathfrak{m}^n)$ ist konstant für $n \gg 0 \Rightarrow \mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$ für $n \gg 0$. Nach Nakayama folgt $\mathfrak{m}^n = 0,\ n \gg 0 \Rightarrow A$ artinsch $\Rightarrow \dim A = 0$.

Sei nun $d > 0$ und $\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \dots \subsetneqq \mathfrak{p}_r$ eine Kette von Primidealen. Zu zeigen: $r \leq d$.

Sei $x \in \mathfrak{p}_1 \smallsetminus \mathfrak{p}_0$ und x' das Bild von x in $A' = A/\mathfrak{p}_0$. Dann ist $x' \neq 0$ im nullteilerfreien Ring A' und nach Satz 26.5 folgt

$$d(A'/(x')) \leq d(A') - 1.$$

Ist $\mathfrak{m}' \subset A'$ das Maximalideal, so ist für alle n

$$A/\mathfrak{m}^n \to A'/\mathfrak{m}'^n$$

surjektiv und daher $d(A') \leq d(A) = d$. Wir erhalten $d(A'/(x')) \leq d-1$ und die Induktionsvoraussetzung liefert

$$\dim(A'/(x')) \leq d-1.$$

Die Bilder von $\mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_r$ geben eine Kette der Länge $r-1$ in $A'/(x')$, also folgt $r-1 \leq d-1$. □

Korollar 26.14. *A noethersch lokal* $\Rightarrow \dim A < \infty$.

Definition 26.15. A Ring, $\mathfrak{p} \subset A$ Primideal. Dann heißt

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \sup(r \mid \text{ es ex. Kette von PI } \ \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}).$$

die **Höhe** von $\mathfrak{p}$.

Korollar 26.16. *In einem noetherschen Ring hat jedes Primideal endliche Höhe.*

Beweis. $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \overset{7.9}{=} \dim A_{\mathfrak{p}} < \infty$ nach Korollar 26.14. □

Satz 26.17. *A noethersch lokal* $\Rightarrow \dim A \geq \delta(A)$.

Beweis. Wir konstruieren induktiv Elemente

$$x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}, \ d = \dim A,$$

so dass für jedes i gilt:

$$\mathfrak{p} \supset (x_1, \ldots, x_i) \ \Rightarrow \ \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq i.$$

Insbesondere gilt dann

$$\mathfrak{p} \supset (x_1, \ldots, x_d) \ \Rightarrow \ \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = d \ \Rightarrow \ \mathfrak{p} = \mathfrak{m}.$$

Da $\mathfrak{m}$ das einzige $(x_1, \ldots, x_d)$ umfassende Primideal ist, folgt $r(x_1, \ldots, x_d) = \mathfrak{m}$, also ist $(x_1, \ldots, x_d)$ $\mathfrak{m}$-primär, und somit gilt $\delta(A) \leq d$.

Zur Konstruktion: Sei $d \geq i > 0$ und $x_1, \ldots, x_{i-1}$ schon konstruiert. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ die Primideale der Höhe $i-1$, die $(x_1, \ldots, x_{i-1})$ enthalten ($\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s\}$ ist eine Teilmenge der Menge der minimalen Primideale über $(x_1, \ldots, x_{i-1})$ und daher endlich). Es gilt $\mathfrak{p}_j \subsetneqq \mathfrak{m}$ für alle j und daher $\bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j \subsetneqq \mathfrak{m}$ nach Primvermeidung Satz 1.17. Wähle $x_i \in \mathfrak{m} \smallsetminus \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$ beliebig. Sei $\mathfrak{q} \supset (x_1, \ldots, x_i)$ ein Primideal.

Zu zeigen $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \geq i$. Es gilt $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$ für ein $\mathfrak{p} \supset (x_1, \ldots, x_{i-1})$ minimal.

1. Fall $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_j$ für ein j. Dann gilt $\mathfrak{q} \supsetneqq \mathfrak{p}$ und somit $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_j) + 1 = i$.

2. Fall $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_j$ für alle j. Dann gilt $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq i$ und $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. □

Das beendet den Beweis von Theorem 26.12.

Korollar 26.18. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ noethersch lokal. Dann gilt*

$$\dim A \leq \dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2).$$

Beweis. Nach Nakayama kann man $\mathfrak{m}$ durch $\dim_{A/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ viele Elemente erzeugen. □

Korollar 26.19. *Sei k ein Körper, $A = k[X_1, \ldots, X_d]$ und $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots X_d)$. Dann gilt* $\dim A_{\mathfrak{m}} = d$.

Beweis. Es gilt $\ell_A(A/\mathfrak{m}^n) = \ell_{A_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^n)$. Wir erhalten nach Lemma 26.7

$$d_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}}(A_{\mathfrak{m}}) = d_{\mathfrak{m}}(A) = d.$$

Alternativer Beweis: Es gilt $\dim A_{\mathfrak{m}} \leq d = \dim_k \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}^2$. Andererseits haben wir die Kette von Primidealen

$$(0) \subsetneqq (X_1) \subsetneqq (X_1, X_2) \subsetneqq \ldots \subsetneqq (X_1, \ldots, X_d).$$ □

Korollar 26.20. *Sei $k = \overline{k}$ algebraisch abgeschlossen und $A = k[X_1, \ldots, X_d]$. Dann gilt*

$$\dim A_{\mathfrak{m}} = d \text{ für jedes Maximalideal } \mathfrak{m} \subset A.$$

Beweis. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist nach Variablensubstitution für jedes Maximalideal $\mathfrak{m}$ die Lokalisierung $A_{\mathfrak{m}}$ isomorph zu $k[X_1, \ldots, X_d]_{(X_1, \ldots X_d)}$. Dieser Ring hat Dimension d nach Korollar 26.19. □

Für nicht-maximale Primideale $\mathfrak{p}$ gilt offenbar $\dim A_{\mathfrak{p}} < d$. Die Voraussetzung in Korollar 26.20, dass k algebraisch abgeschlossen ist, ist nicht notwendig. Allgemeiner gilt der folgende Satz, dessen Beweis wir auslassen.

Satz 26.21. *Sei k ein Körper und A eine endlich erzeugte nullteilerfreie k-Algebra. Sei $K = Q(A)$ und $d = \deg \mathrm{tr}_k K$. Dann gilt $\dim A_{\mathfrak{m}} = d$ für jedes Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$.* □

Nun wenden wir uns wieder dem allgemeinen Fall zu:

Lemma 26.22. *Sei A noethersch und $x_1, \ldots, x_r \in A$. Dann hat jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ über $(x_1, \ldots, x_r)$ Höhe $\leq r$.*

Beweis. Das Ideal $(x_1, \ldots, x_r)A_\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-primär und von r Elementen erzeugt, also

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim A_\mathfrak{p} \leq r.$$

□

Lemma 26.23. *Sei A noethersch und $\mathfrak{p} \subset A$ ein minimales Primideal. Dann sind alle Elemente von $\mathfrak{p}$ Nullteiler.*

Beweis. Nach Korollar 19.25 gibt nur endlich viele minimale Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ und $\mathfrak{N} = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i$. Sei $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$. Nach Satz 1.17 gilt $\bigcap_{i=2}^{s} \mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}$. Sei $y \in \bigcap_{i=2}^{s} \mathfrak{p}_i$ mit $y \notin \mathfrak{p}$. Dann gilt $y \notin \mathfrak{N}$. Für $x \in \mathfrak{p}$ folgt $xy \in \mathfrak{N} \Rightarrow x^n y^n = 0$ für ein $n \geq 1$. Wäre nun x kein Nullteiler, so folgte aus $x(x^{n-1}y^n) = 0$, dass $x^{n-1}y^n = 0$ gilt und induktiv weiter, $y^n = 0$. Widerspruch. Daher ist x Nullteiler. □

Korollar 26.24. *(Krulls Hauptidealsatz) Sei A ein noetherscher Ring und $x \in A$ kein Nullteiler. Dann hat jedes minimale Primideal über (x) die Höhe* 1.

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \supset (x)$ minimal. Dann gilt $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$ nach Lemma 26.22. $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$ würde wegen Lemma 26.23 implizieren, dass x Nullteiler ist. □

Satz 26.25. *Sei A ein noetherscher lokaler Ring und $x \in \mathfrak{m}$ kein Nullteiler. Dann gilt* $\dim A/(x) = \dim A - 1$.

Beweis. Nach Satz 26.5 gilt

$$d = d(A/(x)) \leq d(A) - 1.$$

Andererseits seien $x_1, \ldots x_d \in \mathfrak{m}$ Elemente, deren Bilder in $A/(x)$ ein $\mathfrak{m}/(x)$-primäres Ideal erzeugen. Dann ist das A-Ideal $(x, x_1, \ldots, x_d)$ $\mathfrak{m}$-primär, also $d + 1 \geq \dim A$. □

Satz 26.26. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ noethersch lokal. Dann gilt* $\dim \hat{A} = \dim A$.

Beweis. Es gilt $A/\mathfrak{m}^n \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}^n \quad \forall n \Rightarrow \chi_\mathfrak{m}^A = \chi_{\hat{\mathfrak{m}}}^{\hat{A}} \Rightarrow d(A) = d(\hat{A})$. □

Korollar 26.27. *k Körper $\Rightarrow$* $\dim k[[T_1, \ldots, T_d]] = d$.

Beweis. Es sei $A = k[T_1, \ldots, T_d]$ und $\mathfrak{m} = (T_1, \ldots, T_d)$. Dann gilt $k[[T_1, \ldots, T_d]] = \hat{A}^{\wedge\mathfrak{m}} \cong {A_\mathfrak{m}}^{\wedge\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}}$ (vergleiche den Beweis von Korollar 24.15). Nach Satz 26.26 folgt $\dim {A_\mathfrak{m}}^{\wedge\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}} = \dim A_\mathfrak{m}$. Letzteres ist gleich d nach Korollar 26.19. □

27 Reguläre Ringe

Theorem 27.1. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring und $k = A/\mathfrak{m}$, $d = \dim A$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \cong k[T_1, \ldots, T_d]$ *als graduierte Ringe.*

(ii) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d$.

(iii) $\mathfrak{m}$ *kann durch d Elemente erzeugt werden.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) klar, (ii) $\Rightarrow$ (iii) Nakayama.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$. Wir bemerken, dass $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ eine k-Algebra ist und betrachten den k-Algebrenhomomorphismus

$$\alpha : k[T_1, \ldots, T_d] \to \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A), \quad T_i \mapsto \bar{x}_i = x_i \bmod \mathfrak{m}^2.$$

Weil $\mathfrak{m}$ durch $x_1, \ldots, x_d$ erzeugt wird, ist α surjektiv. Wir zeigen Injektivität. Sei $f \in \ker(\alpha)$. Dann erhalten wir Surjektionen für alle n

$$k[T_1, \ldots, T_d]/(f + (T_1, \ldots, T_d)^n) \twoheadrightarrow \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}. \tag{$*$}$$

Für $f \neq 0$ führt dies zum Widerspruch durch Betrachtung der k-Vektorraumdimensionen (gleich Längen als k-Moduln) auf beiden Seiten von $(*)$:
Rechts:

$$\dim_{k\text{-VR}} \Big(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1} \Big) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_A(\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}) = \ell_A(A/\mathfrak{m}^n).$$

Dies ist wegen $\dim A = d$ für $n \gg 0$ ein Polynom vom Grad d in n.
Sei nun $f \neq 0$. Nach Korollar 26.9 steht auf der linken Seite von $(*)$ ein k-Vektorraum, dessen Dimension für $n \gg 0$ ein Polynom in n vom Grad $\leq d - 1$ ist. Dies steht im Widerspruch zu den Surjektionen $(*)$ für alle n. Es folgt $f = 0$, also ist α injektiv. $\square$

Definition 27.2. $(A, \mathfrak{m})$ heißt **regulär**, wenn (i)–(iii) von Theorem 27.1 gelten.

Korollar 27.3. *A ist genau dann regulär, wenn $\hat{A}$ regulär ist.*

Beweis. Es gilt $\dim A = \dim \hat{A}$ nach Satz 26.26 und $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A) \cong \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(\hat{A})$ nach Lemma 23.32. Die Aussage folgt nun aus Theorem 27.1(i). $\square$

Satz 27.4. *Jeder reguläre lokale noethersche Ring ist nullteilerfrei.*

Beweis. Es gilt $\bigcap \mathfrak{m}^n = 0$ nach Korollar 24.14 und $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ ist nullteilerfrei, weil isomorph zu einem Polynomring über einem Körper. Seien $x, y \in A$ beide nicht 0. Dann existieren

$$r, s \text{ mit } x \in \mathfrak{m}^r \smallsetminus \mathfrak{m}^{r+1},\ y \in \mathfrak{m}^s \smallsetminus \mathfrak{m}^{s+1}.$$

Seien

$$\overline{x} \in \mathrm{gr}_r(A) = \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1} \text{ und } \overline{y} \in \mathrm{gr}_s(A)$$

die Bilder. Dann gilt

$$\overline{xy} \neq 0 \in \mathrm{gr}_{s+r}(A) \Rightarrow xy \notin \mathfrak{m}^{s+r+1},$$

insbesondere gilt $xy \neq 0$. □

Bemerkung 27.5. Es folgt, dass die Vervollständigung eines regulären, lokalen noetherschen Ringes wieder nullteilerfrei ist.

Korollar 27.6. *Sei k ein Körper und $(A, \mathfrak{m})$ eine lokale noethersche k-Algebra, so dass $k \to A/\mathfrak{m}$ ein Isomorphismus ist. Ist A regulär, so gilt*

$$\hat{A} \cong k[[T_1, \ldots, T_d]] \quad d = \dim A.$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$. Betrachte

$$\alpha : k[T_1, \ldots, T_d] \to A,\ T_i \mapsto x_i, .$$

Nach Theorem 27.1 induziert α einen Isomorphismus auf assoziierten Graduierten, also nach Lemma 25.2 auch auf Vervollständigungen. □

Definition 27.7. Die **homologische Dimension** $hd(A)$ ist die kleinste Zahl n (evtl. ∞), so dass

$$\mathrm{Ext}_A^m(M, N) = 0 \quad m \geq n+1$$

für alle A-Moduln M, N gilt.

Beispiele 27.8. A Körper $\Rightarrow hd(A) = 0$, A Hauptidealring $\Rightarrow hd(A) \leq 1$.

Lemma 27.9. *$hd(A) = n < \infty$ ist äquivalent zu*

- *für jeden A Modul M und jede projektive Auflösung*

  $$P_{n-1} \to P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

  ist $\ker(P_{n-1} \to P_{n-2})$ projektiv.

- *für jeden A-Modul N und jede injektive Auflösung*

  $$0 \to N \to I^0 \to \cdots \to I^{n-1}$$

  ist $\mathrm{coker}(I^{n-2} \to I^{n-1})$ injektiver A-Modul.

Beweis. Sei $hd(A) = n$. Dimensionsverschiebung gibt:

$$\mathrm{Ext}^i_A(\ker(P_{n-1} \to P_{n-2}), N) = \mathrm{Ext}^{n+i}_A(M, N) = 0$$

für alle $i \geq 1$ und alle N. Daher ist $\ker(P_{n-1} \to P_{n-2})$ projektiv. Die Umkehrung ist offensichtlich und injektive Auflösungen werden analog behandelt. $\square$

Ein wichtiges Theorem, dessen Beweis wir auslassen ist

Theorem 27.10 (Serre)**.** *Ein lokaler noetherscher Ring A hat genau dann endlich homologische Dimension, wenn er regulär ist und dann gilt $hd(A) = \dim A$.*

Das wichtigste Korollar aus Serre's Theorem ist:

Korollar 27.11. *Sei A ein regulärer noetherscher lokaler Ring und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ ein Primideal. Dann ist die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ regulär.*

Beweis. Sei M ein $A_\mathfrak{p}$-Modul. Nach Lemma 27.9 existiert eine projektive Auflösung von M als A-Modul: $0 \to P_d \to P_{d-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$ ($d = \dim A$). Die Lokalisierung eines freien Moduls ist offenbar frei und weil projektive Moduln direkte Summanden in freien Moduln sind, ist die Lokalisierung eines projektiven Moduls stets projektiv. Lokalisierung der obigen Auflösung gibt somit die $A_\mathfrak{p}$-projektive Auflösung $0 \to (P_d)_\mathfrak{p} \to \ldots \to (P_0)_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} = M \to 0$. Hieraus folgt $hd(A_\mathfrak{p}) \leq d$ und nach Theorem 27.10 folgt, dass $A_\mathfrak{p}$ regulär ist. $\square$