Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 5
Abgabe: *Freitag, 21.05.2021, 09:15 Uhr*

Notation. Sei A ein kommutativer Ring mit Eins.

Aufgabe 1 (Torsionsmoduln). **(6 Punkte)**
Wir nehmen A als nullteilerfrei an. Zeigen Sie:

(a) Für jeden A-Modul M ist der Faktormodul M/TM torsionsfrei.

(b) Für jeden Homomomorphismus $f\colon M \to N$ von A-Moduln gilt $f(TM) \subseteq TN$.

(c) Für jede exakte Folge $0 \to M' \to M \to M''$ von A-Moduln ist die induzierte Folge

$$0 \to TM' \to TM \to TM''$$

exakt.

(d) Für jeden A-Modul M ist die Folge $0 \to TM \to M \xrightarrow{q} M \otimes_A Q(A)$ exakt, aber die Abbildung $q\colon M \to M \otimes_A Q(A), m \mapsto m \otimes 1$, ist im Allgemeinen nicht surjektiv.

Aufgabe 2 (Totaler Quotientenring). **(6 Punkte)**
Sei S_0 die Menge aller Nichtnullteiler von A. Zeigen Sie:

(a) Die Menge S_0 ist die größte multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A, für die der kanonische Homomorphismus $A \to S_0^{-1}A$ injektiv ist. Wir nennen den Ring $S_0^{-1}A$ den *totalen Quotientenring* von A.

(b) Jedes Element in $S_0^{-1}A$ ist entweder eine Einheit oder ein Nullteiler.

(c) Jeder Ring, in dem jede Nichteinheit ein Nullteiler ist, stimmt mit seinem totalen Quotientenring überein.

(d) Finden Sie ein Beispiel für A und eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge $S \subset A$ derart, dass $0 \notin S$ und der kanonische Homomorphismus $A \to S^{-1}A$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 3 (Reduzierte Ringe). **(6 Punkte)**
Ein Ring heißt *reduziert*, wenn er keine nilpotenten Elemente außer 0 enthält. Zeigen Sie:

(a) Reduziertheit ist eine lokale Eigenschaft, d.h. A ist genau dann reduziert, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ der lokale Ring $A_\mathfrak{p}$ reduziert ist.

(b) Ist A stets nullteilerfrei, falls für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ der Ring $A_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist?

Aufgabe 4 (Quasikompaktheit von $\operatorname{Spec}(A)$[1]). **(6 Punkte)**
Ein topologischer Raum heißt *quasikompakt*, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat. Sei $\operatorname{Spec}(A)$ das Spektrum von A mit der Zariski-Topologie. Zeigen Sie:

(a) Für jedes Element $f \in A$ ist die basisoffene Menge $D(f)$ (Blatt 4, Aufgabe 4) quasikompakt. Insbesondere ist $\operatorname{Spec}(A)$ quasikompakt. *Hinweis:* Reduzieren Sie auf den Fall von Überdeckungen $D(f) = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ und betrachten Sie dann abgeschlossene Komplemente. Zeigen Sie, dass eine endliche Teilmenge J von I und Elemente $(g_i \in A)_{i\in J}$ existieren, so dass $f^n = \sum_{i\in J} g_i f_i$ für ein $n \geq 1$.

(b) Eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(A)$ ist genau dann quasikompakt, wenn sie als endliche Vereinigung von offenen Teilmengen der Gestalt $D(f)$ dargestellt werden kann.

---

[1] Diese Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.