# Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 2

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart *Abgabe:* Do 14.05.2020 um 9:15 Uhr

---

**8. Aufgabe:** *(2+2+2 Punkte, Operationen auf Idealen)* Seien $R$ ein Ring und $I$, $J$ und $K$ Ideale in $R$. Man zeige:

(a) Es gilt $I(J+K) = IJ + IK$.

(b) Es gilt $(I \cap J)(I + J) \subseteq IJ \subseteq I \cap J$.

(c) Ist $I + J = (1)$, so gilt $I \cap J = IJ$.

**9. Aufgabe:** *(4 Punkte, Der Professor und seine Python)* Ein Professor füttert seine Python alle 4 Tage und badet sie alle 7 Tage. Diese Woche hat er sie am Dienstag gefüttert und am Mittwoch gebadet. Wann, wenn überhaupt, wird er die Python am gleichen Tag füttern und baden?
**Hinweis:** Pythons kommen unter anderem in China vor.

**10. Aufgabe:** *(1+1+2+2+2 Punkte, Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$)* Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Mit der üblichen Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen wird $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ zu einem nullteilerfreien Ring. Sei $\delta\colon \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \to \mathbb{N}_0$ gegeben durch $a + b\sqrt{-3} \mapsto a^2 + 3b^2$.

(a) Man zeige, dass $\delta(1) = 1$ und $\delta(x \cdot y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

(b) Man folgere aus (a), dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]^\times = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] \mid \delta(x) = 1\} = \{\pm 1\}$.

(c) Man finde ein Element in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, welches irreduzibel, aber nicht prim ist.

(d) Man zeige: $\mathrm{GGT}(4, 2 + 2\sqrt{-3}) = \emptyset$.

(e) Man zeige, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ nicht faktoriell ist.

**11. Aufgabe:** *(6 Punkte, Noethersche Ringe)* Sei $R$ ein Ring. Ein Ideal $I \subseteq R$ heißt *endlich erzeugt*, wenn es endlich viele Elemente $a_1, \dots, a_n \in I$ gibt, sodass $I = (a_1, \dots, a_n)$ ist. Dabei bezeichnet $(a_1, \dots, a_n) = \{r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n \mid r_1, \dots, r_n \in R\}$ wie in der Vorlesung das von $a_1, \dots, a_n$ erzeugte Ideal. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $R$ is noethersch.

(ii) Jedes Ideal in $R$ ist endlich erzeugt.

**Hinweis:** Für die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) orientiere man sich am Beweis aus der Vorlesung, dass jeder Hauptidealring noethersch ist.

---

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.