Aufgabe 1

(a) Wir stellen zunächst die Polynome auf und erhalten

$$N_0(x) = 1 \qquad N_1(x) = x - \frac{1}{4} \qquad N_2(x) = (x - \frac{1}{4})(x - 1)$$

Für y gilt daher

$$y_0 \stackrel{!}{=} f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} \qquad y_1 \stackrel{!}{=} f(1) = 1 \qquad y_2 \stackrel{!}{=} f(4) = 2$$

Schließlich erhalten wir für L

$$\begin{aligned}
l_{0,0} &= N_0(x_0) = 1 & l_{0,1} &= N_1(x_0) = 0 & l_{0,2} &= N_2(x_0) = 0\\
l_{1,0} &= N_0(x_1) = 1 & l_{1,1} &= N_1(x_1) = \frac{3}{4} & l_{1,2} &= N_2(x_1) = 0\\
l_{2,0} &= N_0(x_2) = 1 & l_{2,1} &= N_1(x_2) = \frac{15}{4} & l_{2,2} &= N_2(x_2) = \frac{45}{4}
\end{aligned}$$

Wir müssen also das folgende Gleichungssystem lösen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 1 & \frac{15}{4} & \frac{45}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tun wir dies,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{15}{4} & \frac{45}{4} & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{15}{4} & \frac{45}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{45}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

so erhalten wir

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{45} \end{pmatrix}.$$

Als Interpolationspolynom erhalten wir demnach

$$p_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(x - \frac{1}{4}) - \frac{4}{45}(x - \frac{1}{4})(x - 1).$$

(b) Mit der neuen Stützstelle gilt $N_3(x) = (x - \frac{1}{4})(x - 4)(x - 9)$ und $y_3 \stackrel{!}{=} f(t_3) = 3$, sowie

$$l_{3,0} = 1, \quad l_{3,1} = N_1(x_3) = \frac{35}{4}, \quad l_{3,2} = N_2(x_3) = 70, \quad l_{3,3}(x_3) = N_3(x_3) = 350.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
l_{3,0}a_0 + l_{3,1}a_1 + l_{3,2}a_2 + l_{3,3}a_3 &= y_3\\
3 &= \frac{1}{2} + \frac{35}{6} - \frac{56}{9} + 350a_3\\
a_3 &= \frac{54 - 9 - 105 + 112}{18}\frac{1}{350}\\
a_3 &= \frac{13}{1575}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Interpolationspolynom

$$p_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(x - \frac{1}{4}) - \frac{4}{45}(x - \frac{1}{4})(x - 1) + \frac{13}{1575}(x - \frac{1}{4})(x - 1)(x - 4).$$

(c) siehe Abbildung **??**.

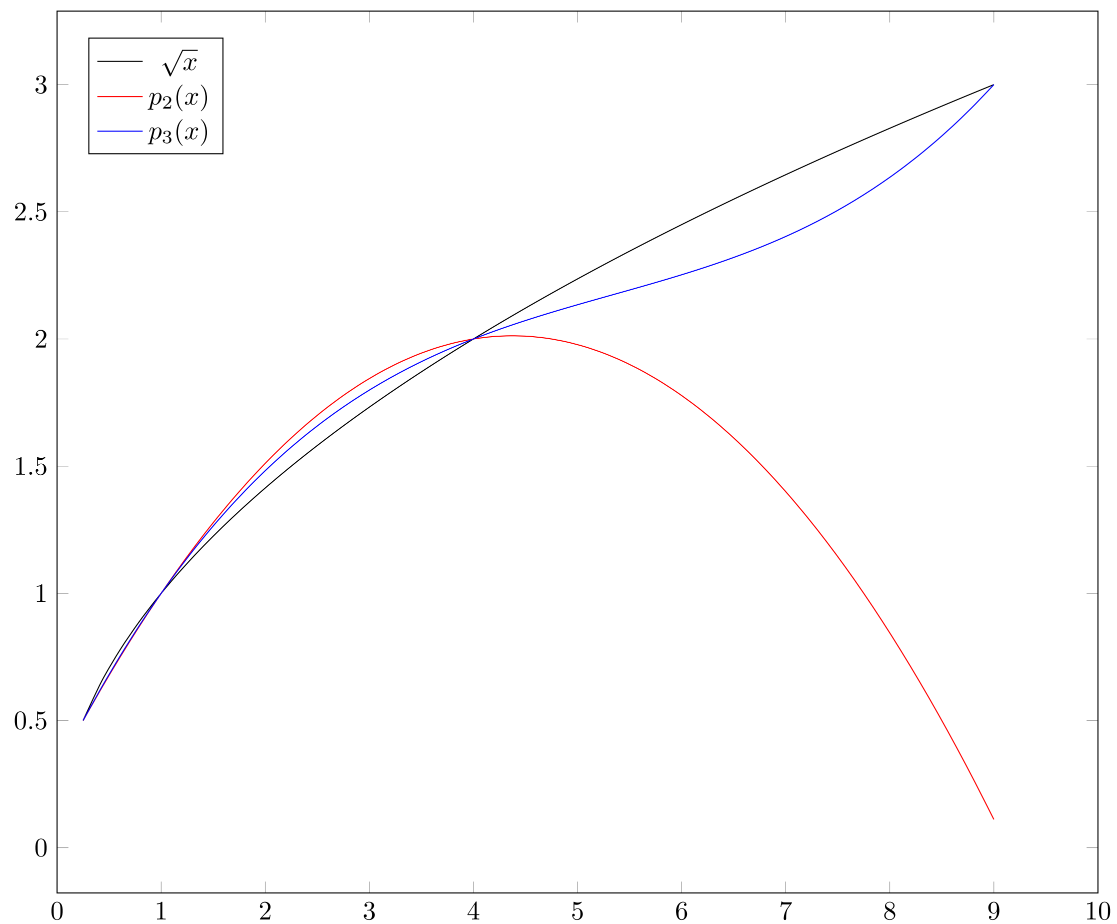


Abbildung 1: Graphen von $f = \sqrt{x}$ und den Interpolationspolynomen vom Grad 2 bzw. 3 $p_2(x)$ bzw. $p_3(x)$

Aufgabe 2

(a) Das Interpolationspolynom vom Grad 0 ist konstant und daher gleich dem einzigen Wert, der vorgegeben ist, also $p_{i,0}(x) = y_i$. Das Interpolationspolynom vom Grad k zu k vorgegebenen Wertepaaren ist eindeutig bestimmt. Daher genügt es, zu überprüfen, dass das angegebene Polynom die Vorschrift, die durch die Wertepaare gegeben ist, erfüllt. An der Stelle x_i erhalten wir

$$p_{i,k}(x_i) = \frac{(x_i - x_i)p_{i+1,k-1}(x) - (x_i - x_{i+k})p_{i,k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} = p_{i,k-1}(x_i) = y_i,$$

da x_i Teil der Wertepaarmenge ist, durch die $p_{i,k-1}$ definiert ist. Alle Stellen $x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}$ liegen sowohl in der Wertepaarmenge von $p_{i,k-1}$ als auch von $p_{i+1,k-1}$. Daher gilt für alle diese Stellen x_j mit $i+1 \leq j \leq i+k-1$

$$p_{i,k}(x_j) = \frac{(x_j - x_i)p_{i+1,k-1}(x_j) - (x_j - x_{i+k})p_{i,k-1}(x_j)}{x_{i+k} - x_i} = \frac{(x_j - x_i)y_j - (x_j - x_{i+k})y_j}{x_{i+k} - x_i} = y_j.$$

Schließlich betrachten wir noch x_{i+k}. Es gilt

$$p_{i,k}(x_{i+k}) = \frac{(x_{i+k} - x_i)p_{i+1,k-1}(x_{i+k}) - (x_{i+k} - x_{i+k})p_{i,k-1}(x_{i+k})}{x_{i+k} - x_i} = p_{i+1,k-1}(x_{i+k}) = y_{i+k},$$

da x_{i+k} in der Wertepaarmenge von $x_{i+1,k-1}$ enthalten ist.

(b) Zeit geben wir hier immer in Minuten an.

$$p_{A,0} = 1048$$

$$p_{A,1} = 1048 + \frac{1048 - 1080}{\frac{61,7-57,7}{61,7-55,7} - 1} = 1144$$

$$p_{A,2} = 1144 + \frac{1144 - 1157.5}{\frac{61.7-59.3}{61.7-55.7} - 1} = 1166.5$$

$$p_{A,3} = 1166.5 + \frac{1166.5 - \frac{1261265}{1078}}{\frac{61.7-62.6}{61.7-55.7} - 1} = 1166.5 + \frac{37780}{12397} \approx 1169.55$$

$$p_{B,0} = 1080$$

$$p_{B,1} = 1080 + \frac{1080 - 1111}{\frac{61,7-59,3}{61,7-57,7} - 1} = 1157.5$$

$$p_{B,2} = 1157.5 + \frac{1157.5 - \frac{12901}{11}}{\frac{61.7-62.6}{61.7-57.7} - 1} = \frac{1261265}{1078}$$

$$p_{C,0} = 1111$$

$$p_{C,1} = 1111 + \frac{1111 - 1196}{\frac{61,7-62,6}{61,7-59,3} - 1} = \frac{12901}{11}$$

$$p_{D,0} = 1196$$

Die Tageslänge am Ort E beträgt also 19 Stunden und 29.55 Minuten.

Aufgabe 3

(a) Bezüglich der Lagrange-Basis sind die Koeffizienten sofort durch die Werte an der entsprechenden Stelle gegeben. Daher benötigt man dafür überhaupt keinen Aufwand, außer man möchte die Koeffizienten an eine neue Stelle kopieren, dann hat man den Aufwand $\mathcal{O}(n)$. Zur Auswertung eines Polynoms $L_i^{(n)} = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{\xi - x_j}{x_i - x_j}$ benötigt man $n-1$ Multiplikationen, $n-1$ Divisionen und $2(n-1)$ Subtraktionen, also insgesamt $4(n-1)$ Operationen. Zur Auswertung des Interpolationspolynoms

$$\sum_{i=1}^{n} y_i L_i^{(n)}(\xi)$$

benötigt man $n-1$ Additionen und Multiplikationen und muss n Lagrange-Polynomen auswerten, also insgesamt $2(n-1) + n(4(n-1)) = 4n^2 - 4n + 2n - 1 = 4n^2 - 2n + 1 \in \mathcal{O}(n^2)$ Operationen.

(b) In der Newton-Basis muss man zur Bestimmung der Koeffizienten ein LGS mit einer $n \times n$ unteren Dreiecksmatrix lösen. Für den k-ten Koeffizienten gilt die Gleichung

$$a_k = \left(y_k - \sum_{i=0}^{k-1} a_i N_i(x_k) \right) / N_k(x_k).$$

Wir bestimmen also zunächst den Aufwand der Berechnung von $N_i(x_k)$ für $i \leq k$. Dazu müssen wir i Faktoren multiplizieren, von denen jeder eine Differenz zweier Zahlen ist. Wir erhalten also $2i$ Operationen. Um den oberen Ausdruck zu berechnen, benötigen wir in jedem Summand eine Multiplikation und dann $k-1$ Additionen. Daraufhin subtrahieren wir die Summe von y_k und dividieren noch durch $N_k(x_k)$ Die Anzahl der benötigten Operationen ist also

$$\underbrace{k-1}_{\text{Multiplikationen}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} 2i}_{\text{Auswertungen von } N_i} + \underbrace{k-1}_{\text{Additionen}} + \underbrace{1}_{\text{Subtraktion}} + \underbrace{1}_{\text{Division}}.$$

Zählt man einfach die Operationen zusammen, so erhält man $2k + k(k-1) = k^2 + k$. Will man also alle n Koeffizienten berechnen, so erhält man insgesamt $\sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ Operationen, also $\mathcal{O}(n^3)$. Die Auswertung an einer Stelle besteht darin, die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} a_i N_i(\xi)$$

zu berechnen. Man erhält n Multiplikationen, $n-1$ Additionen und $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n-1)$ Operationen durch Auswertungen von Polynomen, also insgesamt $n^2 + n - 1 \in \mathcal{O}(n^2)$ Operationen.

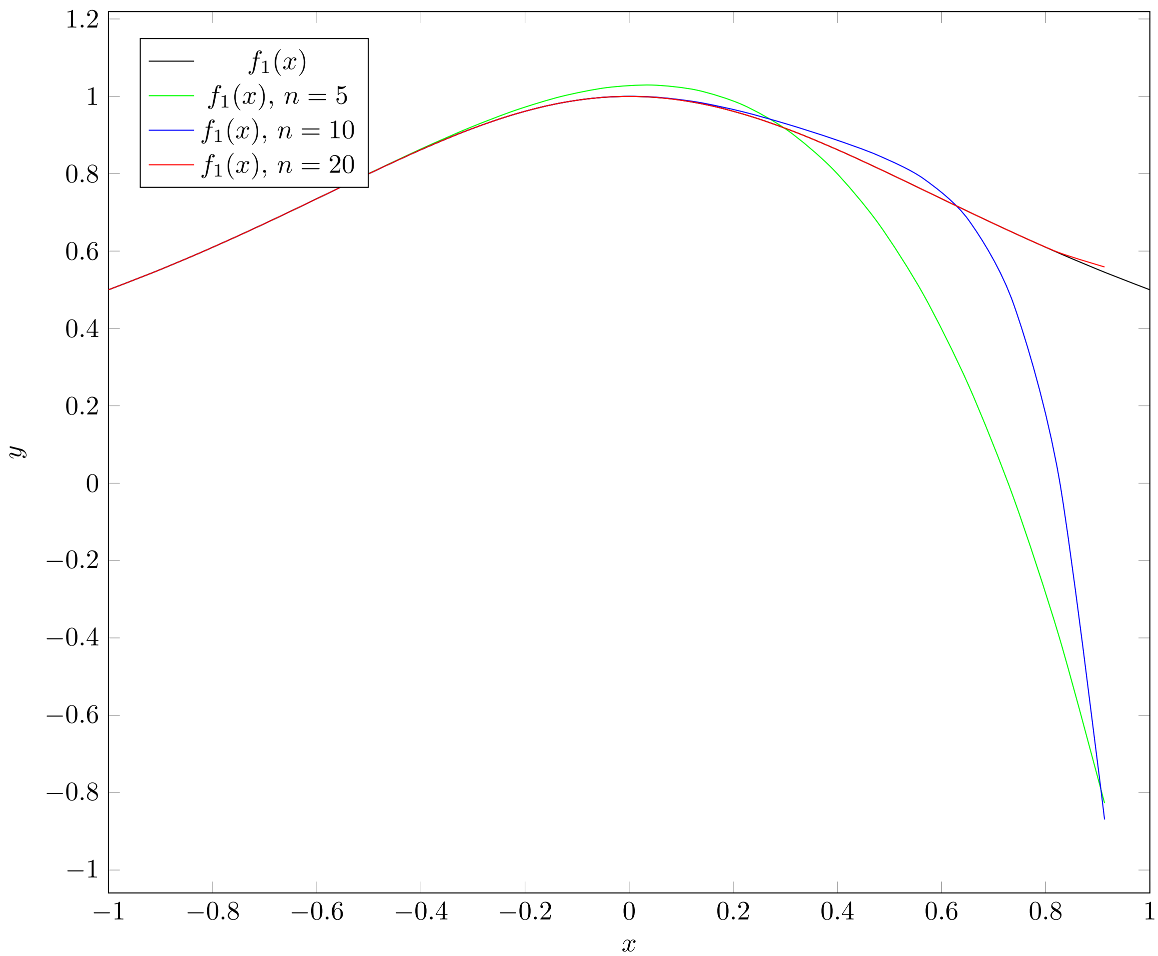
(c) Um die Koeffizienten in der Monom-Basis zu bestimmen, müssen wir zunächst die Vandermonde-Matrix aufstellen. Da man zur Berechnung der n-ten Potenz $\mathcal{O}(\ln n)$ Operationen benötigt, erhalten wir für den Aufwand die Summe $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} \ln(i) \approx n \cdot \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = n \cdot x\ln(x) - x\Big|_1^n = n^2\ln(n) - n^2 + n \in \mathcal{O}(n^2\ln(n))$. Für das Lösen des linearen Gleichungssystems benötigen wir schließlich $\mathcal{O}(n^3)$ Operationen. Damit liegt der Aufwand zur Koeffizientenbestimmung in $\mathcal{O}(n^3)$. Die Auswertung mit dem Horner-Schema benötigt für $n = 1$ genau 1 Addition und 1 Multiplikation. Wird n um 1 erhöht, kommt eine Addition und eine Multiplikation hinzu. Man benötigt also n Additionen und n Multiplikationen insgesamt.

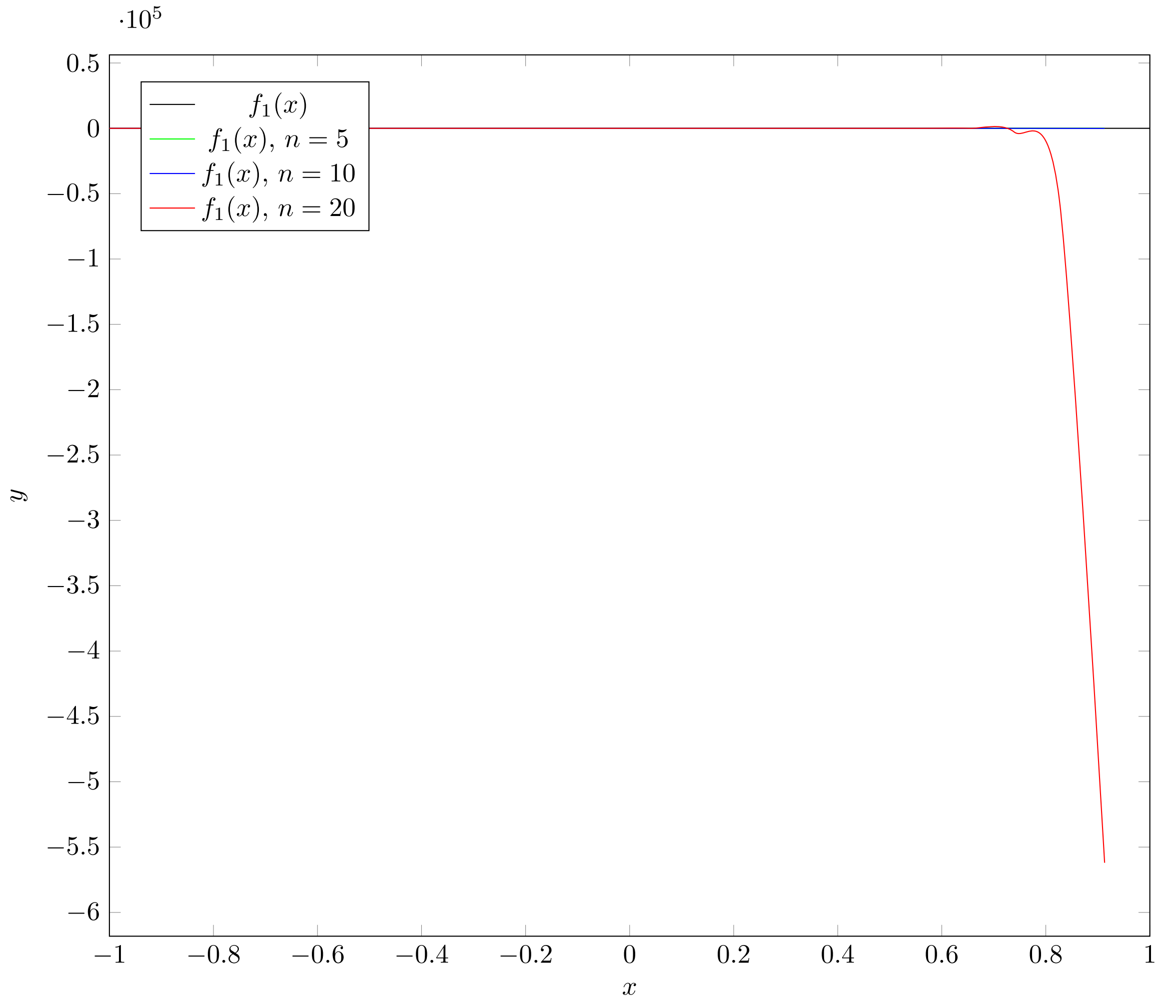
Für das Neville-Aitken-Schema muss man alle $p_{k,j}$ berechnen mit $j < n-k$. Die Berechnung mithilfe aller $p_{k-1,j}$ mit $j < n-k+1$ benötigt 4 Subtraktionen, zwei Multiplikationen und eine Division für jedes $p_{k,j}$, also $7(n-k)$ Operationen für alle $p_{k,j}$. Summieren wir nun über alle k, so ergibt sich für die Berechnung von $p_{0,n}$ als Anzahl der Operationen

$$\sum_{k=1}^{n} 7(n-k) = 7n^2 - 7\frac{n(n-1)}{2} = \frac{7}{2}\left(n^2 - n\right) \in \mathcal{O}(n^2)$$

Aufgabe 4

Je genauer man das Raster wählt, desto größer wird die Abweichung vom tatsächlichen Funktionswert an der Stelle.


$f_1(x)$
$f_1(x)$, $n = 5$
$f_1(x)$, $n = 10$
$f_1(x)$, $n = 20$
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
y
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x


$\cdot 10^5$
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
−3
−3.5
−4
−4.5
−5
−5.5
−6
y
−1
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x
$f_1(x)$
$f_1(x)$, $n = 5$
$f_1(x)$, $n = 10$
$f_1(x)$, $n = 20$