Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 10

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 6. Juli 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Hohlraumstrahlung*

Unter Hohlraumstrahlung versteht man die elektromagnetische Strahlung innerhalb eines abgeschlossenen Hohlraums im thermischen Gleichgewicht mit seinen Wänden. Ihr Druck ist durch

$$P = \frac{\varepsilon}{3}$$

gegeben, wobei $\varepsilon \equiv E/V$ die Energiedichte ist, die nur von der Temperatur T abhängt, also $\varepsilon = \varepsilon(T)$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe des 1. Hauptsatzes und mit der Annahme, dass die Entropie S als Funktion der Temperatur T und des Volumens V aufgefasst werden kann, dass

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \tag{I}$$

gilt. Leiten Sie daraus und unter der Annahme zweifacher stetiger Differenzierbarkeit der Funktion $E(T, V)$ die folgende Maxwell-Relation her,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V . \tag{II}$$

Berechnen Sie mit Hilfe von (I) und (II)

b) die Energiedichte $\varepsilon(T)$,

c) die Entropie $S(T, V)$

der Hohlraumstrahlung.

2. *Thermodynamik eines Gummibandes*

Ein eindimensionales Gummiband habe im ungespannten Zustand die Länge L_0. Die Spannung des Gummibandes bei einer Länge $L > L_0$ sei experimentell als

$$\sigma = bT\left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2}\right)$$

mit konstantem $b > 0$ bestimmt worden. Die Wärmekapazität des Gummibandes bei konstanter Länge, $C_L \equiv T\,(\partial S/\partial T)_L$, sei unabhängig von der Temperatur, also $C_L(T, L) = C_L(L)$. Die innere Energie E des Gummibandes ist durch

$$\mathrm{d}E = T\,\mathrm{d}S + \sigma\,\mathrm{d}L$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Änderung der inneren Energie ΔE des Gummibandes als Funktion von T und L relativ zu dem Punkt (T_0, L_0) durch

$$\Delta E = C_{L,0}\,(T - T_0)$$

mit $C_L(L) = C_{L,0} = \text{const.}$ gegeben ist, also unabhängig von der Länge des Gummibandes ist. Finden und nutzen Sie hierfür Relationen, die analog zu (I) und (II) sind.

b) Zeigen Sie, dass die Änderung der Entropie ΔS des Gummibandes als Funktion von T und L relativ zu dem Punkt (T_0, L_0) durch

$$\Delta S = C_{L,0} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + b\left(\frac{3L_0}{2} - \frac{L^2}{2L_0} - \frac{L_0^2}{L}\right)$$

gegeben ist.

3. Radius-Masse-Relation von Weißen Zwergen

Weiße Zwerge sind die Endprodukte der Sternentwicklung von massearmen Sternen und entstehen, wenn der nukleare Kernbrennstoff in den Kernen solcher Sterne verbraucht ist. Sie werden allein durch den Fermi-Druck der Elektronen gegen den gravitativen Kollaps stabilisiert, solange ihre Massen kleiner sind als ungefähr 1,44 Sonnenmassen. Bei noch größeren Massen entstehen entweder Neutronensterne oder Schwarze Löcher.

Bestimmen Sie, ausgehend vom Fermi-Druck von nicht-relativistischen Elektronen

$$P_\mathrm{F} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_\mathrm{e}} n_\mathrm{e}^{5/3},$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum ist, m_e die Elektronenmasse und n_e die Anzahldichte der Elektronen, und der Bedingung für hydrostatisches Gleichgewicht

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)\,\rho(r)}{r^2},$$

wobei G die Gravitationskonstante ist, $M(r)$ die Masse innerhalb des Radius r und ρ die Massendichte, wie der Radius eines Weißen Zwerges mit seiner Masse skaliert. Nehmen Sie dafür an, dass ein Weißer Zwerg effektiv nur aus Teilchen derselben Art zusammengesetzt ist. *

4. Verständnisfragen

a) Erklären Sie die funktionale Form der Maxwell-Verteilung.

b) Begründen Sie, warum man in der Thermodynamik angeben muss, welche Größen bei partiellen Ableitungen thermodynamischer Funktionen konstant gehalten werden müssen.

c) Erklären Sie die Begriffe Wärmekapazität und der spezifischen Wärme und begründen Sie, warum Wärmekapazitäten davon abhängen, unter welchen Bedingungen sie gemessen oder berechnet werden.

---

* *Hinweis:* Beim Aufstellen von Skalierungsrelationen (z.B. $a \sim b$, gelesen „a skaliert wie b") interessiert man sich nur für die Proportionalität verschiedener Größen zueinander, ohne die Proportionalitätskonstanten festzulegen, und ersetzt dabei eine Ableitung $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ schlicht durch den zugehörigen Quotienten y/x. Skalierungsrelationen gelten somit immer dann exakt, wenn die abhängige Variable y proportional zu einer Potenz der unabhängigen Variablen x ist, also $y \propto x^n$, denn dann ist $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x \propto nx^{n-1} = nx^n/x \propto y/x$.