Übung 1 *Normen im $\mathbb{R}^n$*

a) Zeichnen Sie die Einheitssphäre

$$S := \{x \in \mathbb{R}^2 | \ \|x\|_p = 1\}$$

für $p = 1, 2, \infty$.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass alle Normen im $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind. Berechnen Sie scharfe Grenzen zur gegenseitigen Abschätzung der Normen $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ und $\|x\|_\infty$. Wie verhalten sich die Grenzen für $n \longrightarrow \infty$?

(1+2 Punkte)

Übung 2 *Problematische Auswertung*
Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}, \quad |x| \ll 1.$$

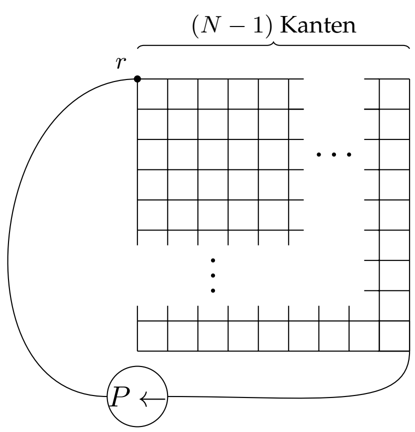
a) Für welche x ist die Auswertung von $f(x)$ schlecht konditioniert?

b) Zeigen Sie, dass der Algorithmus, welcher diesen Ausdruck in der gegebenen Form für $|x| \ll 1$ berechnet, instabil ist. Führen Sie hierzu eine Rundungsfehleranalyse durch. Dabei sei angenommen, dass $\cos(x)$ mit Maschinengenauigkeit berechnet wird.

c) Finden Sie für $|x| \ll 1$ einen stabilen Algorithmus zur Berechnung von $f(x)$. Zeigen Sie in Analogie zu b) die Stabilität Ihres Algroithmus. Hinweis: Die Darstellung von f kann mit Hilfe der Rechenregeln für trigonometrische Funktionen umgeformt werden ($\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$).

(1+2+3 Punkte)

Übung 3 *Strömung in Rohrleitungsnetzwerken*



Das abgebildete Röhrennetzwerk hat $n := N^2$ Knoten V und $m := 2N(N-1)$ Kanten E (die alle nach rechts bzw. unten gerichtet sind) zuzüglich der Verbindungen zur Pumpe P mit konstanter Flussrate q_P. Zur Bestimmung des Drucks in den einzelnen Knoten kann mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze (Knoten- und Maschenregel) ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden. Hierzu wird der Druck des Referenzknoten r auf Null gesetzt. Für alle anderen erhält man aus der Knotenregel

$$\sum_{e \in E_v^+} q_e - \sum_{e \in E_v^-} q_e = 0.$$

Hierbei enthalten E_v^+ bzw. E_v^- die Einfluss- bzw. Ausflusskanten am Knoten v und q_e bezeichnet den Fluss durch die Kante e. Endet die Kante an der Pumpe so ist dieser durch die Flussrate $q_e = q_P$ gegeben. Ansonsten gilt

$$q_e = L_e \Delta p_e.$$

Für gegebenes $e = (v, w) \in E$ ist dabei

$$\Delta p_e = \begin{cases} p_w - p_v & v \neq r \wedge w \neq r \\ -p_v & w = r \\ p_w & v = r. \end{cases}$$

In unserem Beispiel sei $L_e = 1$ für alle Kanten.

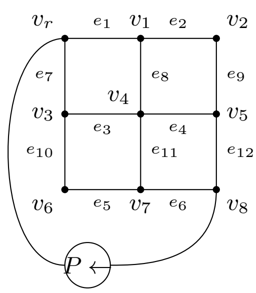
Beantworten Sie die folgenden Fragen für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ (ohne Beweis):

a) Wie groß ist die Matrix des linearen Gleichungssystems?

b) Wie viele Werte ungleich 0 gibt es in jeder Zeile?

c) Hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung?

d) Stellen Sie außerdem das Gleichungssystem für $N = 3$ auf. Nummerieren Sie dafür die Knoten und Kanten nach dem folgenden Schema:



(1+1+1+2 Punkte)

Übung 4 *Positiv definite Matrizen*

Sehr häufig wird im Zusammenhang mit positiv-definiten Matrizen die Symmetrie vorausgesetzt. Doch positiv-definite Matrizen müssen nicht zwangsläufig symmetrisch sein!

a) Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann positiv definit in $\mathbb{R}$ ist, wenn der symmetrische Anteil

$$A_S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$$

positiv definit ist.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ und $A_X = (a_{ij})_{i,j\in X} \in \mathbb{R}^{|X|\times|X|}$ eine sogenannte *Hauptuntermatrix*. Zeigen Sie, dass A_X ist positiv definit, wenn A positiv definit ist.

c) Gegeben ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -(1+\alpha) & 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von α ist A positiv definit?

d) Zeigen Sie: Sei $H \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $A = \bar{H}^T H$. Dann gilt A ist positiv definit in $\mathbb{C}$ genau dann wenn $\mathrm{Rang}(H) = n$.

(4 Punkte)