

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2021/22

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. K. Hübner

Blatt 9
Abgabetermin: Freitag, 14.1.2022, 09:30 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte). Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_8)$ der achte Kreisteilungskörper. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und K enthält $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ als quadratische Unterkörper.
- (b) Für eine ungerade Primzahl p ist die Zerlegungsgruppe Z_p zyklisch; ihr Erzeuger ist der von $\zeta_8 \mapsto \zeta_8^p$ induzierte Körperautomorphismus von K . Bestimmen Sie zu jedem solchen p den Zerfällungskörper K^{Z_p} (in Abhängigkeit von $p \bmod 8$).

Aufgabe 2 (6 Punkte). Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\zeta_n + \zeta_n^{-1}]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$ ist.

Hinweis: Für ein Element a des Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$ untersuchen Sie $\zeta_n^k a \in \mathbb{Z}[\zeta_n]$ für geeignetes $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Beweisen Sie den zweiten Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz (Theorem 2.11) analog zum Beweis von Korollar 6.12 anhand des Zerlegungsverhaltens von 2 in $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

Aufgabe 4 (6 Punkte). Alle Jahre wieder verteilt der Weihnachtsmann Geschenke an die Kinder. Damit sich keiner benachteiligt fühlt, bekommen alle Kinder gleich viele Geschenke und ein Geschenk behält der Weihnachtsmann jedes Jahr fürs Archiv. Allerdings kann der Weihnachtsmann die Kinder nur glücklich machen, wenn sie jedes Jahr mehr Geschenke bekommen als im Vorjahr. Nun kommt aber noch hinzu, dass der Weihnachtsmann und seine Elfen nach so vielen Jahren einige Ticks und Zwänge entwickelt haben. Wenn alle Geschenke fertig sind, würden die Elfen sie gerne möglichst kompakt in mehreren gleich langen Reihen anordnen. Der Weihnachtsmann hätte sie aber gerne in einer langen Reihe, weil er das praktischer findet für das Beladen des Schlittens. Weil seine Elfen unbelehrbar sind, kann sich der Weihnachtsmann nicht anders behelfen als jedes Jahr dafür zu sorgen, dass die Gesamtzahl der Geschenke eine Primzahl ist. Kann diese Strategie noch lange gut gehen, oder wird der Weihnachtsmann eines Jahres in die Bredouille kommen?

Hinweis: Machen Sie sich klar, dass es darauf hinausläuft Satz 6.14 aus der Vorlesung zu beweisen.



Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!