Modulformen 1 – Übungsgruppe 19. Januar 2022

Wintersemester 2021/22

A: Besprechung 9.Übungszettel

Aufgabe 1

(a) Diese Aufgabe wurde falsch gestellt.

(b) Es genügt lediglich ein gerades $k \geq 4$ zu untersuchen. Mit $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ (Proposition 3.9) muss $a_n(f) = C_1 \cdot a_n(E_k) + a_n(h)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, wobei $h \in S_k$ und $C_1 \in \mathbb{C}$ ist. Nach Aufgabe 3 von Übungsblatt 3 gilt $|a_n(h)| \leq C_2 n^{k/2} \leq C_2 n^{k-1}$ mit $C_2 > 0$ und somit

$$|a_n(E_k)| = \frac{2k}{|B_k|} \sum_{0<d|n} d^{k-1} \leq C_3 n^{k-1} \Rightarrow |a_n(f)| \leq (|C_1|C_3 + C_2)\, n^{k-1} =: C n^{k-1} \ .$$

(c) Für die Hinrichtung gilt mit $f \in S_k$ und $y \geq y_0 > 0$ nach (b)

$$|f(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)||q^n| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{-2\pi y} \ .$$

Somit ergibt sich mit $\beta := 2\pi$

$$C \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{-2\pi y} = C\zeta(1-k) e^{-2\pi y} = C\left(-\tfrac{B_k}{k}\right) e^{-2\pi y} =: \alpha \cdot e^{-\beta y} \ .$$

Ist bei der Rückrichtung $f \in M_k$ mit $|f(z)| \leq \alpha \cdot e^{-\beta y}$ gegeben, so gilt

$$\alpha \cdot e^{-\beta y} \geq \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n \right| \geq \left| |a_0(f)| - \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n \right| \right| \geq 0 \ .$$

Im Limes $y \to \infty$ ergibt sich mit der Stetigkeit des Betrages $|a_0(f)| = 0$, also die Behauptung.

(d) Bekanntermaßen gilt $E_6(i) = 0$ (Beweis von Satz 3.12) und insbesondere $E_4(i) \neq 0$. Daraus folgt mit der Definition der j-Funktion (Proposition 3.20) die gewünschte Identität.

(e) Der Struktursatz für meromorphe Modulformen (Satz 3.22) liefert für geeignete Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ mit $Q \not\equiv 0$: $g = \frac{P(j)}{Q(j)} \cdot \frac{E_4^l}{E_6^{l/2}}$. Mit $\varphi = Q(j) \cdot (j-1728)^{l/2} \in \mathbb{C}[j]$ gilt

$$g \cdot \varphi = P(j) \cdot E_4^l \cdot \left(\tfrac{j-1728}{E_6}\right)^{l/2} \ .$$

Insbesondere ist $g \cdot \varphi$ meromorph ohne Pole in $\mathbb{H}$, also holomorph.

(f) Diese Aufgabe wurde falsch gestellt.

(g) Der Fall $n \leq 0$ ist für die τ-Funktion klar. Wir betrachten zwei Fälle für $m := \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$:
1.Fall: $\mathrm{ggT}(2, m) = 1$. Nach Beispiel 4.28 gilt $\tau(n) = \tau(2)\tau(m)$ mit $\tau(2) = -24$.
2.Fall: $\mathrm{ggT}(2, m) \neq 1$. Dann ist $m = 2^k \cdot l$ für $k \in \mathbb{N}$ und ungerades $l \in \mathbb{N}$. Somit gilt

$$\tau(2^{k+1}) = -24\tau(2^k) - 2^{11}\tau(2^{k-1}) = -8\left(3\tau(2^k) + 256\tau(2^{k-1})\right) =: -8\alpha \ .$$

Da $\tau(n)$ ganzzahlig ist (vgl. Aufgabe 2 aus Übungsblatt 5), ergibt sich die Behauptung aus

$$\tau(n) = \tau\left(2^{k+1} \cdot \tau(l)\right) = -8\alpha\tau(l) \ .$$

(h) Analog zu Aufgabe 3 aus Übungsblatt 5 gilt (i) nach dem Struktursatz für holomorphe Modulformen (Satz 3.12), da M_{10} eindimensional ist. Die Identität für $\sigma_9(n)$ aus (ii) folgt mittels Koeffizientenvergleich von

$$E_{10} = 1 - \frac{20}{B_{10}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_9(n) q^n = 1 - 264q - 135.432q^2 - \mathcal{O}(q^3) \text{ und}$$

$$E_4 E_6 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 240\sigma_3(n) - 504\sigma_5(n) - 120.960 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(n)\sigma_5(n-m) q^n .$$

Aufgabe 2

(a) Es genügt wegen Satz 4.26 zu zeigen, dass $E_6\Delta$ eine Hecke-Eigenform ist. Aus Satz 4.23 folgt, dass $(E_6\Delta)|_{18}T_n \in S_{18}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Mit $\dim_{\mathbb{C}} S_{18} = 1$ und $E_6\Delta \in S_{18}$ ergibt sich die Behauptung aus $(E_6\Delta)|_{18}T_n = \lambda_n(E_6\Delta)$ für die Hecke-Eigenwerte $\lambda_n \in \mathbb{C}$.

(b) Per Konstruktion gilt $f, \tilde{f} \in S_{24}$ mit $\dim_{\mathbb{C}} S_{24} = 2$, weswegen die $\mathbb{C}$-lineare Unabhängigkeit von f und $\tilde{f}$ zu zeigen genügt. Für $\lambda f + \mu \tilde{f} \equiv 0$ folgt aus der Relation $\lambda q + (\mu - 1032)q^2 + \mathcal{O}(q^3) = 0$ unmittelbar $\lambda = 0 = \lambda$.

(c) Definiere $F \in \{f, \tilde{f}\}$. Zunächst ist

$$a_n\left(F|_{24}T_2\right) = \begin{cases} a_{2n}(F) & , m \text{ ist nicht durch 2 teilbar} \\ a_{2n}(F) + 2^{23}a_{n/2}(F) & , m \text{ ist durch 2 teilbar} \end{cases} ,$$

weswegen

$$\left(f|_{24}T_2\right)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(f|_{24}T_2\right) q^n = -1032q - 13684032q^2 + \mathcal{O}(q^3) = -1032f(z) - 14749056\tilde{f}(z)$$

und $(\tilde{f}|_{24}T_2)(z) = f(z) + 2112\tilde{f}(z)$ gilt. Also ist die Matrix durch $\begin{pmatrix} -1032 & 1 \\ -14749056 & 2112 \end{pmatrix}$ gegeben.

Aufgabe 3

(a) Sei $g := \cos|_{[0,\pi]}$ und $h : \mathrm{Bild}(\cos|_{[0,\pi]}) = [-1, 1] \to \left[-2p^{k-1/2}, 2p^{k-1/2}\right], x \mapsto \left(2p^{k-1/2}\right) x$. Beide Abbildungen sind wohldefiniert und sogar bijektiv (beachte: Deligne-Abschätzung). Hieraus und wegen des Zwischenwertsatzes existiert ein $x_p \in [-1, 1]$ mit

$$a_p(f) = h(x_p) = h\left(g(\theta_p)\right) = 2p^{k-1/2}\cos(\theta_p) .$$

Wegen $|a_p(f)| = 2p^{k-1/2} \Leftrightarrow |\cos(\theta_p)| = 1$ folgt $a_p(f) \neq 2p^{k-1/2}$ für $\theta_p \notin \{0, \pi\}$.

(b) Im Fall $r = 1$ gilt $\begin{pmatrix} a_p(f) \\ a_1(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix}$. Da f eine normierte Hecke-Eigenform ist, folgert man für den Induktionsschritt aus einem Spezialfall von Satz 4.26:

$$\begin{pmatrix} a_{p^{r+1}}(f) \\ a_{p^r}(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p(f)a_{p^r}(f) - p^{k-1}a_{p^{r-1}}(f) \\ a_{p^r}(f) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{p^r}(f) \\ a_{p^{r-1}}(f) \end{pmatrix} \overset{\text{IV}}{=} A^r \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(c) Aus $0 = \det(A - \lambda I_2)$ erhält man die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = \frac{a_p(f) \pm \sqrt{a_p(f)^2 - 4p^{k-1}}}{2} .$$

Es ergibt sich auf Basis der Gleichung $(A-\lambda_\pm)v=0$ der Eigenraum $\operatorname{Eig}(\lambda_\pm)=\left\langle\begin{pmatrix}\lambda_\pm\\1\end{pmatrix}\right\rangle$ (beachte: $a_p(f)=\lambda_++\lambda_-$ und $p^{k-1}=\lambda_+\lambda_-$). Somit lässt sich $M=\left(\begin{smallmatrix}\lambda_+ & \lambda_-\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ mit der Inverse $M^{-1}=\frac{1}{\lambda_+-\lambda_-}\left(\begin{smallmatrix}1 & -\lambda_-\\ -1 & \lambda_+\end{smallmatrix}\right)$ angeben. Daraus folgt $A=M\operatorname{diag}(\lambda_+,\lambda_-)M^{-1}$ und über

$$A^{r-1}=M\operatorname{diag}(\lambda_+^{r-1},\lambda_-^{r-1})M^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_+^r-\lambda_-^r & \lambda_+\lambda_-^r-\lambda_+^r\lambda_-\\ \lambda_+^{r-1}-\lambda_-^{r-1} & \lambda_+\lambda_-^{r-1}-\lambda_+^{r-1}\lambda_-\end{pmatrix}$$

mit der Gleichheit aus (b) das Gewünschte.

(d) Zunächst lässt sich $\lambda_{1/2}$ aus (c) mit dem Resultat aus (a) in der Form

$$\lambda_\pm=\frac{a_p(f)\pm\sqrt{a_p(f)^2-4p^{k-1}}}{2}=p^{k-1/2}\cos(\theta_p)\pm p^{k-1/2}\sqrt{\cos^2(\theta_p)-1}=p^{k-1/2}\exp(\pm i\theta_p)$$

schreiben. Für $r\in\mathbb{N}$ folgt dann

$$\lambda_+^r-\lambda_-^r=p^{r\frac{k-1}{2}}\left(\exp(ir\theta_p)-\exp(-ir\theta_p)\right)=p^{r\frac{k-1}{2}}\frac{\sin(r\theta_p)}{2i}$$

und somit gemäß (c)

$$a_{p^r}(f)=\frac{\lambda_+^{r+1}-\lambda_-^{r+1}}{\lambda_+-\lambda_-}=p^{r\frac{k-1}{2}}\frac{\sin((r+1)\theta_p)}{\sin(\theta_p)}\ .$$

(e) $(\sin((r+1)\theta_p))_{r\in\mathbb{N}}$ wechselt wegen der 2π-Periodizität des Sinus unendlich oft das Vorzeichen. Gleiches gilt daher für $(a_{p^r}(f))_{r\in\mathbb{N}}$.

B: Wiederholung Polynomdarstellung

Man betrachte den $\mathbb{R}$-Untervektorraum $\mathbb{P}_\mathsf{w}(\mathbb{R})$ der homogenen Polynome vom Grad $\mathsf{w}\in\mathbb{N}$ mit seiner Basis, die durch die Monome $\{X^\mathsf{w},X^{\mathsf{w}-1}Y,\cdots,XY^{\mathsf{w}-1},Y^\mathsf{w}\}$ gegeben ist. Die **Polynomdarstellung** von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist analog zu Lemma 5.1 definiert durch die Zuordnung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}:\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})&\to\mathrm{GL}(\mathbb{P}_\mathsf{w}(\mathbb{R}))\ ,\\ M&\mapsto(\mathbb{P}(M):\mathbb{P}_\mathsf{w}(\mathbb{R})\to\mathbb{P}_\mathsf{w}(\mathbb{R}),P(X,Y)\mapsto P(aX+cY,bX+dY))\ .\end{aligned}$$

Analog erhält man die **Polynomantidarstellung** von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ in der Form

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*:\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})&\to\mathrm{GL}(\mathbb{P}_\mathsf{w}(\mathbb{R}))\ ,\\ M&\mapsto(\mathbb{P}^*(M):\mathbb{P}_\mathsf{w}(\mathbb{R})\to\mathbb{P}_\mathsf{w}(\mathbb{R}),P(X,Y)\mapsto P(aX+bY,cX+dY))\ .\end{aligned}$$

Gemäß Gleichung (5.1) genügt die Matrix $\pi(M)\in\mathrm{GL}_{\mathsf{w}+1}(\mathbb{R})$ der Beziehung

$$\pi(M)\cdot\begin{pmatrix}X^\mathsf{w}\\ \vdots\\ Y^\mathsf{w}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbb{P}^*(M)(X^\mathsf{w})\\ \vdots\\ \mathbb{P}^*(M)(Y^\mathsf{w})\end{pmatrix}\ .$$

Beispiel: Sei $\mathsf{w}=3$ und $M=\left(\begin{smallmatrix}3&1\\0&2\end{smallmatrix}\right)$. Wir diskutieren die unterschiedlichen Polynome und dazu hier exemplarisch $P_1(X,Y)=X^3$. Dann ist

$$\mathbb{P}^*\left(\left(\begin{smallmatrix}3&1\\0&2\end{smallmatrix}\right)\right)(X^3)=P_1(3X+Y,2Y)=(3X+Y)^3=27X^3+27X^2Y+9XY^2+Y^3\ .$$

Werden auch die Polynome $P_2(X,Y)=X^2Y$, $P_3(X,Y)=XY^2$ und $P_4(X,Y)=Y^3$ betrachtet, so erhält man insgesamt die Matrixdarstellung

$$\pi\left(\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}X^3\\X^2Y\\XY^2\\Y^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27&27&9&1\\0&18&12&2\\0&0&12&4\\0&0&0&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X^3\\X^2Y\\XY^2\\Y^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}27X^3+27X^2Y+9XY^2+Y^3\\18X^2Y+12XY^2+2Y^3\\12XY^2+4Y^3\\8Y^3\end{pmatrix}\ .$$