

# Algebraische Zahlentheorie I

Prof. Dr. Alexander Schmidt

Wintersemester 2021/22

## Inhaltsverzeichnis

## Otens: Begriffe aus der Algebra:

- Ring, hier immer kommutativ mit 1
- $R$ -Modul,  $R \times M \rightarrow M$
- Ideal:  $\mathfrak{a} \subset R$ ,  $R$ -Untermodul
- $x \in R \rightsquigarrow (x) = Rx = \{rx \mid r \in R\}$  das von  $x$  erzeugte Hauptideal
- $R$  heißt nullteilerfrei: wenn  $xy = 0 \Rightarrow x = 0$  oder  $y = 0$
- Einheitengruppe:  $R^\times = \{r \in R \mid \exists s \in R : rs = 1\}$
- $R$  nullteilerfrei:  $(x) = (y) \iff x = ey$ ,  $e \in R^\times$
- $\mathfrak{p} \subset R$  heißt Primideal  $\iff R/\mathfrak{p}$  nullteilerfrei
- $\mathfrak{m} \subset R$  Maximalideal  $\iff R/\mathfrak{m}$  Körper
- $f : R \rightarrow R'$  Ringhomomorphismus und  $\mathfrak{p}' \subset R'$  Primideal  $\Rightarrow f^{-1}(\mathfrak{p}') \subset R'$  Primideal (gilt nicht für Maximalideal).
- jeder Ring  $\neq 0$  besitzt ein Maximalideal
- jedes Ideal  $\neq R$  ist in einem Maximalideal enthalten
- jede Nichteinheit ist in einem Maximalideal enthalten
- $a, b \in R$ ,  $a \mid b \stackrel{\text{df}}{=} \text{es existiert ein } c \in R \text{ mit } ac = b \iff (b) \subset (a)$
- $a \hat{=} b$  (assoziiert)  $\stackrel{\text{df}}{=} a \mid b$  und  $b \mid a \iff (a) = (b)$ ,  $R$  nullteilerfrei:  $a \hat{=} b \iff a = be$ ,  $e \in R^\times$ .

**Definition 0.1.** Sei  $R$  nullteilerfrei und  $a, b \in R$ . Ein Element  $d \in R$  heißt **größter gemeinsamer Teiler** von  $a$  und  $b$ , wenn gilt

- (i)  $d \mid a$  und  $d \mid b$
- (ii)  $(e \mid a \text{ und } e \mid b) \Rightarrow e \mid d$ .

Der ggT ist, wenn er existiert, bis auf Assoziiertheit eindeutig.

**Definition 0.2.**  $R$  heißt **Hauptidealring** wenn  $R$  nullteilerfrei ist, und jedes Ideal in  $R$  ist ein Hauptideal.

**Bemerkung 0.3.** Ist  $R$  ein Hauptidealring so existiert der ggT und es gilt

$$(a) + (b) = (\text{ggT}(a, b)).$$

Insbesondere lässt sich  $\text{ggT}(a, b)$  linear aus  $a$  und  $b$  kombinieren. (Erinnerung:  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in \mathfrak{a}, \beta \in \mathfrak{b}\}$

Begründung:  $(a) + (b) = (d)$  für ein  $d \in R$ , weil  $R$  Hauptidealring. Es gilt also  $d \mid a$ ,  $d \mid b$ . Gilt nun  $e \mid a$  und  $e \mid b$ , so folgt  $(a) \subset (e)$  und  $(b) \subset (e)$  also  $(d) = (a) + (b) \subset (e) \Rightarrow e \mid d$   $\square$

**Definition 0.4.** Ein nullteilerfreier Ring  $R$  heißt **euklidisch**, wenn es eine Funktion  $\nu : R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  gibt, so dass zu  $a, b \in R$ ,  $b \neq 0$  stets  $q, r \in R$  mit  $a = qb + r$  und  $r = 0$  oder  $\nu(r) < \nu(b)$  gilt  $\rightsquigarrow$  erhalten („Euklidischen“) Algorithmus zur Bestimmung des ggT.

**Satz 0.5.** (LA 2) Jeder euklidische Ring ist ein Hauptidealring.

**Definition 0.6.**  $R$  nullteilerfrei  $\pi \in R \setminus (\{0\} \cup R^\times)$  heißt

- Primelement, wenn  $(\pi)$  Primideal
- irreduzibel, falls  $\pi = ab \Rightarrow a \in R^\times$  oder  $b \in R^\times$ .

**Bemerkung 0.7.** Primelemente sind irreduzibel

Grund:  $\pi = ab \Rightarrow \pi \mid a$  oder  $\pi \mid b$ . Gelte OE  $\pi \mid a$ . Wegen  $a \mid \pi$  gilt  $a \hat{=} \pi$ , also  $a = \pi u$ ,  $u \in R^\times$ . Nun gilt  $\pi = ab = \pi ub$ , also  $\pi(1 - ub) = 0 \Rightarrow 1 = ub \Rightarrow b \in R^\times$ .

**Definition 0.8.**  $R$  (nullteilerfrei) heißt **faktoriell**, wenn jedes  $a \in R \setminus \{0\}$  eine bis auf Einheiten und Reihenfolge eindeutige Zerlegung in das Produkt irreduzibler Elemente besitzt.

**Satz 0.9.** (i) In einem faktoriellen Ring ist jedes irreduzible Element Primelement. (Algebra 1, 2.20)

(ii) Hauptidealringe sind faktoriell. (LA 2)

(iii)  $R$  faktoriell  $\Rightarrow R[T]$  faktoriell. (Algebra 1, 2.42)

Sei  $R$  ein Ring und  $\mathfrak{a} \subset R$  ein Ideal. Die Elemente des Faktorings  $R/\mathfrak{a}$  heißen Restklassen modulo  $\mathfrak{a}$ . Die Gruppe  $(R/\mathfrak{a})^\times$  heißt Gruppe der *primen Restklassen* modulo  $\mathfrak{a}$ . Für  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$  gilt

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \stackrel{df}{=} \left\{ \sum_{\text{endl.}} a_i b_i \mid a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b} \right\}.$$

$\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  heißen teilerfremd (auch koprim), wenn  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$  gilt.

**Lemma 0.10.** (Algebra 2, 1.15 (ii)) Es gilt

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}.$$

Insbesondere gilt  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$  falls  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  teilerfremd sind.

Seien  $R_1, \dots, R_n$  Ringe. Dann ist  $R = \prod_{i=1}^n R_i$  mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ein Ring. Sei  $R$  ein Ring und  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \subset R$  Ideale. Wir betrachten den Ringhomomorphismus

$$\phi : R \longrightarrow \prod_{i=1}^n R/\mathfrak{a}_i$$

der durch  $r \mapsto (r + \mathfrak{a}_1, \dots, r + \mathfrak{a}_n)$  gegeben ist.

**Satz 0.11.** (Algebra 2, 1.16)

- (i) Sind die  $\mathfrak{a}_i$  paarweise relativ prim, so gilt  $\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$ .
- (ii)  $\phi$  ist surjektiv  $\iff$  die  $\mathfrak{a}_i$  sind paarweise relativ prim.
- (iii)  $\phi$  ist injektiv  $\iff \bigcap \mathfrak{a}_i = (0)$ .

Als Korollar erhält man:

**Chinesischer Restklassensatz:** Seien  $r_1, \dots, r_n \in R$  und  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \subset R$  paarweise teilerfremde Ideale. Dann hat das System von Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \pmod{\mathfrak{a}_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv r_n \pmod{\mathfrak{a}_n} \end{aligned}$$

eine Lösung  $x \in R$  und  $x$  ist eindeutig bestimmt modulo  $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n$ .

*Beweis.* Dies ist eine Umformulierung der Tatsache, dass unter den gegebenen Bedingungen  $R/(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n) \longrightarrow \prod_{i=1}^n R/\mathfrak{a}_i$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

# 1 Elementare Zahlentheorie

## 1.1 Primzahlen

**Notation:**

$$\mathbb{N} = 1, 2, \dots$$

$$\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \dots$$

**Definition 1.1.** Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl  $p > 1$  die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

M.a.W.: Primzahlen sind die positiven irreduziblen Elemente in  $\mathbb{Z}$ .

Division mit Rest ganzer Zahlen ist wohlbekannt, man erhält daher:

**Lemma 1.2.** *Die Funktion*

$$\nu : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad a \longmapsto |a|,$$

ist eine euklidische Normfunktion. Insbesondere ist  $\mathbb{Z}$  ein Hauptidealring und faktoriell.

**Satz 1.3.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

*Beweis.* Angenommen es gäbe nur endlich viele und sei  $P$  ihr Produkt. Dann ist  $P + 1$  durch keine Primzahl teilbar. Widerspruch.  $\square$

*Frage:* Haben wir jetzt gezeigt, dass es in jedem faktoriellen Ring unendlich viele Primelemente gibt?

*Antwort:* Nein,  $P + 1$  könnte eine Einheit sein!

**Lemma 1.4.**  $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ .

Zum Beweis brauchen wir, dass auf  $\mathbb{Z}$  eine Anordnung existiert, d.h. die „ $\leq$ “-Relation mit ihren bekannten Eigenschaften (vgl. Algebra 1, 6.22).

Außerdem brauchen wir: Zu  $a \in \mathbb{Z}$  gibt es keine ganze Zahl  $b$  mit  $a < b < a + 1$ .

*Beweis von Lemma 1.4.* Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $ab = 1$ . Dann gilt  $0 \neq a, 0 \neq b$ . Wäre  $a > 1$ , so gilt  $b > 0$  (sonst  $ab < 0$ ) also  $b \geq 1$  und dann  $ab > 1 \cdot b = b \geq 1 \Rightarrow 1 > 1$  Widerspruch.

Wäre  $a < -1$ , so gilt  $b < 0$  (sonst  $ab < 0$ ) also  $b \leq -1$  und

$$-ab = a(-b) < (-1)(-b) = b \leq -1$$

also  $-1 < -1$  Widerspruch.  $\square$

**Erinnerung:**

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Satz 1.5.**

$$\sum_{p \text{ Primzahl}} \frac{1}{p} = \infty.$$

**Bemerkung 1.6.** Es gibt also „mehr“ Primzahlen als Quadratzahlen.

*Beweis.* Die Folge  $(1 + \frac{1}{n})^n$  konvergiert von unten gegen  $e$ . Insbesondere gilt  $\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^{p-1} < e$ , also  $\log\left(1 + \frac{1}{p-1}\right) < \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)}$ . Wegen  $\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p-1}$  gilt für jedes  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} \log \prod_{p \leq N} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} &= \sum_{p \leq N} \log\left(1 + \frac{1}{p-1}\right) \\ &< \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} + \sum_{p \leq N} \frac{1}{p(p-1)}. \end{aligned}$$

Wir setzen:  $p_+(1) = 0$  und für  $n \geq 2$ :  $p_+(n) = \text{größter Primteiler von } n$ . Mithilfe der geometrischen Reihe  $\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq N} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} &= \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) = \sum_{p_+(n) \leq N} \frac{1}{n} \\ &\geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{dx}{x} = \log(N+1). \end{aligned}$$

Zusammen:

$$\log \log(N+1) < \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} + \sum_{p \leq N} \frac{1}{p(p-1)}.$$

Nun gilt:

$$\sum_{p \leq N} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1,$$

also

$$\log \log(N+1) - 1 < \sum_{p \leq N} \frac{1}{p}.$$

□

**Lemma 1.7.** In  $\mathbb{N}$  gibt es beliebig große primzahlfreie Teilabschnitte.

*Beweis.* Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist unter den  $n$  Zahlen

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \dots, (n+1)! + n + 1$$

keine Primzahl.

□

**Bemerkung 1.8.** Sei  $\pi(n) = \text{Anzahl der Primzahlen } \leq n$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\log(n)}} = 1.$$

## 1.2 Die Eulersche $\varphi$ -Funktion

**Definition 1.9.** (Eulersche  $\varphi$ -Funktion). Für  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

**Lemma 1.10.**  $(n, m) = 1 \implies \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ .

*Beweis.* Nach gilt  $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , also  $(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ .  $\square$

**Lemma 1.11.** Für  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 1$  bezeichne  $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  die Restklasse von  $a$  mod  $n$ . Dann gilt

$$\bar{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \iff \text{ggT}(a, n) = 1.$$

*Beweis.* Sei  $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{Z}$  so dass  $\bar{a}\bar{b} = 1$ . Dann gilt  $ab = 1 + cn$ ,  $c \in \mathbb{Z}$ , also  $\text{ggT}(a, n) \mid 1$ .

Gilt  $\text{ggT}(a, n) = 1$ , so existieren  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha a + \beta n = 1$  (lineare Kombinierbarkeit des ggT in Hauptidealringen). Dann gilt  $\bar{a}\bar{a} = \bar{1}$ , also  $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ .  $\square$

**Korollar 1.12.** Sei  $p$  eine Primzahl. Dann gilt:  $\varphi(p^k) = (p - 1)p^{k-1}$ .

*Beweis.* Unter den  $p^k$  Restklassen  $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{p^k}$  sind genau die  $p^{k-1}$  Restklassen:  $\bar{p}, \bar{2p}, \dots, \bar{p^{k-1}p}$  nicht prim. Also  $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = (p - 1)p^{k-1}$ .  $\square$

**Korollar 1.13.** Für  $n = \prod_{i=1}^r p_i^{e_i}$  gilt  $\varphi(n) = \prod_{i=1}^r (p_i - 1)p_i^{e_i-1}$ .

**Bemerkung 1.14.** Die Erweiterung  $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$  (hier:  $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ ) ist vom Grad  $\varphi(n)$  mit Galoisgruppe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  (siehe Algebra 1, 4.47).

**Satz 1.15.** Für jede natürliche Zahl  $m$  gilt:  $\sum_{d|m} \varphi(d) = m$ .

*Beweis.* Induktion über die Anzahl der verschiedenen Primteiler von  $m$ .

$m = 1$  (0 Primteiler). Die Aussage ist trivial (bzw. formal).

Induktionsschritt:  $m = np^e$ ,  $p$  Primzahl  $n, e \in \mathbb{N}$ ,  $p \nmid n$ . Jeder Teiler von  $m$  hat eine eindeutige Darstellung der Form  $dp^i$  mit  $d \mid n$  und  $0 \leq i \leq e$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{d|m} \varphi(d) &= \sum_{d|n} \varphi(d) + \sum_{d|n} \varphi(dp) + \dots + \sum_{d|n} \varphi(dp^e) \\ &= n + n\varphi(p) + \dots + n\varphi(p^e) \\ &= n(1 + (p - 1)p^0 + \dots + (p - 1)p^{e-1}) \\ &= np^e = m. \end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung 1.16.** Das Minimalpolynom  $\Phi_m(X)$  von  $\zeta_m$  über  $\mathbb{Q}$  heißt das  $m$ -te *Kreisteilungspolynom*. Da jede  $m$ -te Einheitswurzel primitive  $d$ -te Einheitswurzel für genau einen Teiler  $d$  von  $m$  ist, gilt

$$X^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d(X)$$

(siehe Algebra 1, §4.5). Grade auswerten liefert einen alternativen Beweis von Satz 1.15.

**Satz 1.17 (Kleiner Fermatscher Satz).** Für  $(a, m) = 1$  gilt

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

*Beweis.* Es gilt  $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  und somit gilt  $\text{ord}(\bar{a}) \mid \#(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times = \varphi(m)$ . Also folgt  $\bar{a}^{\varphi(m)} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .  $\square$

**Korollar 1.18.**  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $p$  Primzahl  $\Rightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$ .

*Beweis.*  $(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} = a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a^p \equiv a$ . Ansonsten gilt  $p \mid a$  und daher  $a^p \equiv 0 \equiv a \pmod{p}$   $\square$

**Definition 1.19.**  $a \in \mathbb{Z}$  heißt **primitive Wurzel** modulo einer Primzahl  $p$ , wenn die Restklassen  $\bar{a}, \bar{a}^2, \dots, \bar{a}^{p-1} = 1$  alle Restklassen  $\not\equiv 0 \pmod{p}$  durchlaufen.

**Satz 1.20 (Gauß).** Es existieren primitive Wurzeln modulo  $p$ .

*Beweis.*  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ist ein endlicher Körper. Daher ist  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  zyklisch (Algebra 1, 3.103). Wähle  $a \in \mathbb{Z}$  so dass  $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  ein Erzeuger ist.  $\square$

## 2 Das Quadratische Reziprozitätsgesetz

Das Quadratische Reziprozitätsgesetz (QRG) wurde von EULER vermutet und zuerst von GAUSS bewiesen. Es ist einer der wichtigsten Sätze der klassischen Zahlentheorie. Es setzt die Frage, ob eine Primzahl  $p$  quadratischer Rest modulo einer Primzahl  $q$  ist, in Beziehung zu der „reziproken“ Frage, ob  $q$  quadratischer Rest modulo  $p$  ist. Ein solcher Zusammenhang ist erstaunlich und tiefliegend, da eine Aussage über Reste modulo  $q$  mit einer über Reste modulo  $p$  verknüpft wird. Das Quadratische Reziprozitätsgesetz ist von *globaler* Natur, d.h. nicht durch Rechnen mit Restklassen modulo einer festen Zahl zu verstehen. Ein tieferes Verständnis des QRG erhält man erst im Rahmen seiner modernen Verallgemeinerung, der *Klassenkörpertheorie*.

## 2.1 Quadratische Reste modulo $p$

Im Folgenden bezeichne  $p$  stets eine von 2 verschiedene Primzahl.

**Definition 2.1.** Eine ganze Zahl  $a$  (bzw. ihre Restklasse modulo  $p$ ) heißt **quadratischer Rest** modulo  $p$ , wenn  $p \nmid a$  und  $\bar{a} = \bar{b}^2 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  für ein  $b \in \mathbb{Z}$ . Wenn  $p \nmid a$  und  $a$  kein quadratischer Rest ist, dann heißt  $a$  **quadratischer Nichtrest**.

**Definition 2.2.** Für  $a \in \mathbb{Z}$  ist das **Legendre-Symbol**  $\left(\frac{a}{p}\right)$  folgendermaßen definiert:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } a \text{ quadratischer Rest mod } p, \\ 0, & \text{wenn } p \mid a, \\ -1, & \text{wenn } a \text{ quadratischer Nichtrest mod } p. \end{cases}$$

Aus  $a \equiv b \pmod{p}$  folgt offenbar  $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ . Wir benutzen daher auch die Notation  $\left(\frac{\bar{a}}{p}\right)$ , d.h. wir fassen das Legendre-Symbol als Funktion auf den Restklassen modulo  $p$  auf. Wir sagen, eine ganze Zahl  $g$  sei primitive Wurzel modulo  $p$ , wenn ihre Restklasse  $\bar{g} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  eine primitive Wurzel ist.

**Lemma 2.3.** Sei  $g$  eine primitive Wurzel modulo  $p$ . Dann gilt für  $r \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{g^r}{p}\right) = (-1)^r.$$

*Beweis.* Zu zeigen ist:  $g^r$  ist quadratischer Rest  $\iff 2|r$ .

( $\implies$ ): Sei  $\bar{g}^r = \bar{h}^2$ . Dann ist  $\bar{h} = \bar{g}^n$  für ein  $n$ . Also ist  $\bar{g}^r = \bar{g}^{2n}$ . Es gilt somit  $p-1 = \text{ord}(\bar{g}) \mid (r-2n)$  und folglich ist  $r$  gerade.

( $\impliedby$ ): Ist  $r$  gerade, so gilt  $\bar{g}^r = (\bar{g}^{r/2})^2$ .  $\square$

**Korollar 2.4.** In  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  gibt es genau  $\frac{p-1}{2}$  quadratische Reste und  $\frac{p-1}{2}$  quadratische Nichtreste.

*Beweis.* Die Werte  $g^r$ ,  $r = 1, \dots, p-1$ , durchlaufen genau die primen Restklassen modulo  $p$ . Nach Lemma 2.3 sind die quadratischen Reste genau die Werte mit geradem Exponenten und die quadratischen Nichtreste genau die Werte mit ungeradem Exponenten.  $\square$

Nun zeigen wir die Multiplikativität des Legendre-Symbols.

**Satz 2.5.**

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right).$$

*Beweis.* Es gilt die Implikation  $p|ab \implies p|a$  oder  $p|b$ . Daher ist die linke Seite der Gleichung genau dann gleich Null, wenn es die rechte ist. Sei  $g$  eine primitive Wurzel modulo  $p$ . Sind  $a$  und  $b$  nicht durch  $p$  teilbar, so existieren  $r, s$  mit  $\bar{a} = \bar{g}^r$ ,  $\bar{b} = \bar{g}^s$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{p}\right) &= \left(\frac{g^{r+s}}{p}\right) = (-1)^{r+s} \\ &= (-1)^r(-1)^s = \left(\frac{g^r}{p}\right)\left(\frac{g^s}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right). \end{aligned}$$

□

**Korollar 2.6.** Das Produkt zweier quadratischer Nichtreste ist ein quadratischer Rest.

*Beweis.* Sind  $a$  und  $b$  quadratische Nichtreste, so gilt  $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = (-1)(-1) = 1$ . Daher ist  $ab$  quadratischer Rest. □

Mit Hilfe des Legendre-Symbols können wir das Lösungsverhalten quadratischer Gleichungen modulo  $p$  angeben.

**Satz 2.7.** Die quadratische Gleichung  $X^2 + aX + b = 0$  hat modulo  $p$

- genau zwei verschiedene Lösungen, wenn  $\left(\frac{a^2-4b}{p}\right) = +1$ ,
- genau eine Lösung, wenn  $\left(\frac{a^2-4b}{p}\right) = 0$ ,
- keine Lösung, wenn  $\left(\frac{a^2-4b}{p}\right) = -1$ .

*Beweis.* Da  $p$  als ungerade vorausgesetzt ist, können wir Restklassen modulo  $p$  durch 2 teilen. Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$\left(X + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b \equiv 0 \pmod{p}$$

bzw. zu

$$(2X + a)^2 \equiv a^2 - 4b \pmod{p}.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Wegen  $p > 2$  sind die Restklassen modulo  $p$  der Zahlen  $-1, 0$  und  $1$  paarweise verschieden. Daher ist das Legendre-Symbol bereits durch seine Restklasse modulo  $p$  eindeutig bestimmt. Diese berechnet sich wie folgt.

**Satz 2.8** (Euler). Für  $a \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\overline{\left(\frac{a}{p}\right)} = \bar{a}^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{in } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

*Beweis.* Ist  $a$  durch  $p$  teilbar, so sind beide Seiten gleich Null. Also können wir  $p \nmid a$  annehmen. Wegen  $(\bar{a}^{\frac{p-1}{2}})^2 = \bar{a}^{p-1} = \bar{1}$  nimmt  $\bar{a}^{\frac{p-1}{2}}$  nur die Werte  $+\bar{1}, -\bar{1}$  an, und wir müssen zeigen:  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \iff \bar{a}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$ .

( $\implies$ ): Ist  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ , so ist  $\bar{a} = \bar{b}^2$  für ein  $b$ . Also ist  $\bar{a}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{b}^{p-1} = \bar{1}$ .

( $\impliedby$ ): Sei  $g$  eine primitive Wurzel und  $\bar{a} = \bar{g}^r$ . Dann gilt  $\bar{g}^{r\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$ , also  $(p-1) \mid r\frac{p-1}{2}$ , weshalb  $r$  gerade ist. Dann ist  $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^r = 1$ .  $\square$

## 2.2 Das Quadratische Reziprozitätsgesetz

**Theorem 2.9** (Quadratisches Reziprozitätsgesetz). *Es seien  $p, q > 2$  Primzahlen. Dann gilt*

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right).$$

*Mit anderen Worten: Ist eine der beiden Primzahlen  $p$  und  $q$  kongruent 1 modulo 4, so gilt  $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ . Im verbleibenden Fall gilt  $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$ .*

Bevor wir das QRG beweisen, formulieren wir noch seine zwei sogenannten Ergänzungssätze. Mit Hilfe des QRG und seiner Ergänzungssätze kann man dann die Legendre-Symbole  $\left(\frac{a}{p}\right)$  bequem ausrechnen.

**Theorem 2.10** (1. Ergänzungssatz zum QRG).

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

*Mit anderen Worten:  $-1$  ist genau dann quadratischer Rest modulo einer Primzahl  $p$ , wenn  $p$  kongruent 1 modulo 4 ist.*

**Theorem 2.11** (2. Ergänzungssatz zum QRG).

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

*Mit anderen Worten:  $2$  ist genau dann quadratischer Rest modulo einer Primzahl  $p$ , wenn  $p$  kongruent  $\pm 1$  modulo 8 ist.*

Zum Beweis des QRG benötigen wir das sogenannte Gauß-Lemma. Sei

$$H = \left\{ \bar{1}, \bar{2}, \dots, \frac{\bar{p}-1}{2} \right\}.$$

Dann hat jedes Element aus  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  die Gestalt  $\pm \bar{h}$  mit  $\bar{h} \in H$ . Sei nun  $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  ein fixiertes Element. Dann erhalten wir Gleichungen der folgenden Form

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{1} &= \varepsilon_1 \cdot \bar{h}_1, & \bar{h}_1 \in H, \varepsilon_1 \in \{+1, -1\} \\ \bar{a} \cdot \bar{2} &= \varepsilon_2 \cdot \bar{h}_2, & \bar{h}_2 \in H, \varepsilon_2 \in \{+1, -1\} \\ &\vdots & \vdots \\ \bar{a} \cdot \frac{\bar{p}-1}{2} &= \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} \cdot \bar{h}_{\frac{p-1}{2}}, & \bar{h}_{\frac{p-1}{2}} \in H, \varepsilon_{\frac{p-1}{2}} \in \{+1, -1\}. \end{aligned}$$

**Lemma 2.12** (Gauß-Lemma).  $\left(\frac{a}{p}\right) = \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_i$ .

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass die  $\bar{h}_i$  paarweise verschieden sind. Wäre nämlich  $\bar{h}_i = \bar{h}_j$ , so schließt man  $\bar{a}^2 \bar{i}^2 = \bar{a}^2 \bar{j}^2$ , also  $\bar{i}^2 = \bar{j}^2$ , also  $\bar{i} = \pm \bar{j}$ . Wegen  $\bar{i}, \bar{j} \in H$  folgt  $i = j$ . Also taucht jedes Element aus  $H$  genau einmal als  $\bar{h}_i$  auf, und wir erhalten

$$\bar{a}^{\frac{p-1}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \bar{i} = \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_i \cdot \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \bar{h}_i = \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_i \cdot \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \bar{i}.$$

Teilen wir beide Seiten durch  $\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \bar{i}$  und wenden Satz 2.8 an, erhalten wir

$$\overline{\left(\frac{a}{p}\right)} = \bar{a}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{\left(\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \varepsilon_i\right)} \quad \text{in } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

was wegen  $p \geq 3$  die Behauptung zeigt.  $\square$

*Beweis des QRG und seiner Ergänzungssätze.* 1. Schritt: Satz 2.8 für  $a = -1$  impliziert die Behauptung des 1. Ergänzungssatzes.

2. Schritt: Wir schreiben für  $1 \leq i \leq \frac{p-1}{2}$

$$a \cdot i = \varepsilon_i \cdot h_i + e_i \cdot p$$

mit  $1 \leq h_i \leq \frac{p-1}{2}$ ,  $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$  und  $e_i \in \mathbb{Z}$ . Ist  $\varepsilon_i = +1$ , so gilt  $2ai = 2h_i + 2e_i p$  und daher

$$\frac{2ai}{p} = \frac{2h_i}{p} + 2e_i.$$

Folglich gilt

$$\left[ \frac{2ai}{p} \right] = 2e_i,$$

und  $\left[ \frac{2ai}{p} \right]$  ist in diesem Fall eine gerade ganze Zahl. Ist  $\varepsilon_i = -1$ , so gilt  $2ai = p - 2h_i + (2e_i - 1)p$ , und daher

$$\frac{2ai}{p} = \frac{p - 2h_i}{p} + 2e_i - 1.$$

Folglich gilt

$$\left[ \frac{2ai}{p} \right] = 2e_i - 1,$$

und  $\left[\frac{2ai}{p}\right]$  ist in diesem Fall eine ungerade ganze Zahl. Zusammen erhalten wir die Gleichung

$$\varepsilon_i = (-1)^{\left[\frac{2ai}{p}\right]}.$$

3. Schritt: Nach dem Gauß-Lemma (2.12) und Schritt 2 gilt

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{p_1} \left[\frac{2ai}{p}\right]},$$

wobei  $p_1 = \frac{p-1}{2}$  ist.

4. Schritt: Sei  $a$  ungerade. Dann gilt

$$\left(\frac{2a}{p}\right) = \left(\frac{2a+2p}{p}\right) = \left(\frac{4\frac{a+p}{2}}{p}\right) = \left(\frac{4}{p}\right) \left(\frac{\frac{a+p}{2}}{p}\right).$$

Beachtet man nun  $\left(\frac{4}{p}\right) = 1$ , so folgt unter Verwendung der wohlbekannten Formel für die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen aus Schritt 3 die Formel

$$\begin{aligned} \left(\frac{2a}{p}\right) &= (-1)^{\sum_{i=1}^{p_1} \left[\frac{(a+p)i}{p}\right]} \\ &= (-1)^{\sum_{i=1}^{p_1} i + \sum_{i=1}^{p_1} \left[\frac{ai}{p}\right]} \\ &= (-1)^{\frac{p^2-1}{8} + \sum_{i=1}^{p_1} \left[\frac{ai}{p}\right]}. \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung  $a = 1$ , so erhält man die Aussage des 2. Ergänzungssatzes.

5. Schritt: Aus der Multiplikativität des Legendre-Symbols, dem 2. Ergänzungssatz und der letzten Gleichung in Schritt 4 erhält man für ungerades  $a$  die Gleichung

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{i=1}^{p_1} \left[\frac{ai}{p}\right]}.$$

6. Schritt: Von nun an sei  $a = q$  eine von  $p$  verschiedene Primzahl größer als 2 und  $q_1 = \frac{q-1}{2}$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} S_1 &= \# \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq p_1, 1 \leq j \leq q_1, q_i > p_j\} \\ S_2 &= \# \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq p_1, 1 \leq j \leq q_1, q_i < p_j\}. \end{aligned}$$

Weil stets  $q_i \neq p_j$  ist, gilt

$$S_1 + S_2 = p_1 q_1.$$

Für ein fest gewähltes  $i$  ist  $q_i > p_j$  äquivalent zu  $j \leq \left[\frac{q_i}{p}\right]$ . Also gilt

$$S_1 = \sum_{i=1}^{p_1} \left[\frac{q_i}{p}\right].$$

Analog erhält man

$$S_2 = \sum_{j=1}^{q_1} \left[ \frac{pj}{q} \right].$$

Zusammen mit Schritt 5 zeigt dies

$$\left( \frac{p}{q} \right) \left( \frac{q}{p} \right) = (-1)^{(\sum_{i=1}^{p_1} \left[ \frac{qi}{p} \right] + \sum_{j=1}^{q_1} \left[ \frac{pj}{q} \right])} = (-1)^{(S_1 + S_2)} = (-1)^{p_1 q_1},$$

und der Beweis des QRG ist erbracht.  $\square$

Mit Hilfe dieser Sätze ist das Legendre-Symbol  $\left( \frac{a}{p} \right)$  schnell ausgerechnet. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \left( \frac{17}{19} \right) &= \left( \frac{19}{17} \right) = \left( \frac{2}{17} \right) = +1 \\ \left( \frac{21}{23} \right) &= \left( \frac{3}{23} \right) \left( \frac{7}{23} \right) = (-1) \left( \frac{23}{3} \right) (-1) \left( \frac{23}{7} \right) = \\ &\left( \frac{2}{3} \right) \left( \frac{2}{7} \right) = (-1)(+1) = -1. \end{aligned}$$

### 2.3 Primzahlen mit vorgegebener Restklasse

**Satz 2.13.** (i) *Es gibt unendlich viele Primzahlen kongruent  $-1$  modulo 3.*

(ii) *Es gibt unendlich viele Primzahlen kongruent  $-1$  modulo 4.*

*Beweis.* (i) Angenommen es gäbe nur endlich viele. Sei  $P$  ihr Produkt. Dann ist die Zahl  $3P - 1$  durch keine Primzahl kongruent  $-1$  modulo 3 und auch nicht durch 3 teilbar. Daher ist sie Produkt von Primzahlen kongruent 1 modulo 3; sie selbst ist aber kongruent  $-1$  modulo 3. Widerspruch. (ii) Angenommen es gäbe nur endlich viele. Sei  $P$  ihr Produkt. Dann ist die Zahl  $4P - 1$  durch keine Primzahl kongruent  $-1$  modulo 4 und auch nicht durch 2 teilbar. Daher ist die Produkt von Primzahlen kongruent 1 modulo 4; sie selbst ist aber kongruent  $-1$  modulo 4. Widerspruch.  $\square$

Der Beweis von 2.13 war elementar. Um entsprechende Aussagen auch für die  $+1$ -Restklassen zu bekommen, wenden wir das Quadratische Reziprozitätsgesetz an. Wir beginnen mit einem Lemma.

**Lemma 2.14.** *Für beliebiges  $a \in \mathbb{Z}$  hat die Zahl  $n = 4a^2 + 1$  nur Primteiler kongruent 1 modulo 4.*

*Beweis.* Zunächst ist  $n$  stets positiv und ungerade. Ist  $p$  ein Primteiler von  $n$ , so ist  $-1$  quadratischer Rest modulo  $p$ . Nach dem ersten Ergänzungssatz zum QRG folgt  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .  $\square$

**Satz 2.15.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen kongruent 1 modulo 4.*

*Beweis.* Angenommen es gäbe nur endlich viele. Sei  $P$  ihr Produkt. Dann ist die Zahl  $4P^2 + 1$  durch keine Primzahl kongruent 1 modulo 4 teilbar. Nach dem obigen Lemma hat sie aber nur solche Primteiler. Widerspruch.  $\square$

Dieses Vorgehen kann verallgemeinert werden.

**Satz 2.16.** *Zu jeder ganzen Zahl  $a \neq 0$  existieren unendlich viele Primzahlen  $p$ , so dass  $a$  quadratischer Rest modulo  $p$  ist.*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass es nur endlich viele (ungerade) Primzahlen  $p_1, \dots, p_n$  mit  $\left(\frac{a}{p_i}\right) = 1$  gäbe. Wir wählen eine ganze Zahl  $A$  prim zu  $a$ . Ist  $a$  ungerade, so wählen wir  $A$  gerade und umgekehrt. Ferner sei  $A$  so groß gewählt, dass die ganze Zahl

$$N = (p_1 \cdots p_n A)^2 - a$$

größer als 1 ist. Entsprechend unseren Wahlen ist  $N$  ungerade, durch keines der  $p_i$  teilbar und es gilt  $(N, a) = 1$ . Sei  $q$  ein Primteiler von  $N$ . Dann ist  $a$  quadratischer Rest modulo  $q$ . Widerspruch.  $\square$

**Satz 2.17.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen kongruent 1 modulo 3.*

*Beweis.* Nach dem letzten Satz gibt es unendlich viele Primzahlen  $p$  mit  $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$ . Daher folgt alles aus dem nächsten Lemma.  $\square$

**Lemma 2.18.** *Eine ungerade Primzahl  $p$  ist genau dann  $\equiv 1 \pmod{3}$ , wenn*

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = 1.$$

*Beweis.* Zunächst ist  $\left(\frac{-3}{3}\right) = 0$ , so dass wir  $p > 3$  annehmen können. Dann gilt

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right).$$

Nun ist aber  $\left(\frac{p}{3}\right) = +1 \iff p \equiv 1 \pmod{3}$ .  $\square$

**Satz 2.19.** Sei  $a \in \mathbb{Z}$  kein Quadrat. Dann existieren unendlich viele Primzahlen  $p$  mit  $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ .

*Beweis.* Sei zunächst  $a = -1$ . Nach dem 1. Ergänzungssatz zum QRG ist  $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$  äquivalent zu  $p \equiv -1 \pmod{4}$ . Nach Satz 2.13 gibt es unendlich viele solche Primzahlen. Im Fall  $a = 2$  müssen wir nach dem 2. Ergänzungssatz zum QRG zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen kongruent  $\pm 3 \pmod{8}$  gibt. Angenommen es gäbe nur endlich viele. Seien  $p_1 = 3, p_2, \dots, p_n$  diese Primzahlen und sei

$$N = 8p_2 \cdots p_n + 3.$$

Dann ist  $N > 1$  ungerade und durch keines der  $p_i$  teilbar, d.h.  $N$  hat nur Primteiler kongruent  $\pm 1 \pmod{8}$ . Das widerspricht  $N \equiv 3 \pmod{8}$ . Daher gibt es unendlich viele Primzahlen  $p$  mit  $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ .

Im Fall  $a = -2$  schließen wir so: Seien  $p_1 = 5, p_2, \dots, p_n$  alle ungeraden Primzahlen mit  $\left(\frac{-2}{p}\right) = -1$  (das sind die kongruent  $-1, -3 \pmod{8}$ ). Sei

$$N = 8p_2 \cdots p_n + 5.$$

Dann ist  $N > 1$  ungerade und durch keines der  $p_i$  teilbar. Daher hat  $N$  nur Primteiler kongruent  $1, 3 \pmod{8}$ . Das widerspricht  $N \equiv -3 \pmod{8}$ . Daher gibt es unendlich viele Primzahlen  $p$  mit  $\left(\frac{-2}{p}\right) = -1$ .

Da sich das Legendre-Symbol nicht ändert, wenn wir  $a$  um ein Quadrat abändern, können wir nun annehmen, dass  $a = (-1)^e 2^e q_1 \cdots q_n$  mit paarweise verschiedenen ungeraden Primzahlen  $q_i$  und  $n \geq 1, e, \epsilon \in \{0, 1\}$  gilt. Wir nehmen nun an, dass  $p_1, \dots, p_m$  alle Primzahlen mit  $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$  sind. Dann gilt insbesondere  $p_i \neq q_j$  für beliebige  $i, j$ . Sei  $\alpha$  ein quadratischer Nichtrest modulo  $q_n$ . Mit Hilfe des Chinesischen Restklassensatzes finden wir ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\begin{aligned} N &\equiv 1 \pmod{8}, \\ N &\equiv 1 \pmod{p_1, \dots, p_m}, \\ N &\equiv 1 \pmod{q_1, \dots, q_{n-1}}, \\ N &\equiv \alpha \pmod{q_n}. \end{aligned}$$

Sei

$$N = \ell_1 \cdots \ell_r$$

die Primfaktorzerlegung von  $N$ . Da  $N$  weder durch 2 noch durch eines der  $p_i$  oder  $q_i$  teilbar ist, sind die  $\ell_i$  sämtlich ungerade und von den  $p_i$  und  $q_i$  verschieden. Daher gilt

$$\prod_i \left(\frac{a}{\ell_i}\right) = \prod_i \left(\frac{-1}{\ell_i}\right)^\epsilon \cdot \prod_i \left(\frac{2}{\ell_i}\right)^e \cdot \prod_{i,j} \left(\frac{q_j}{\ell_i}\right).$$

Wegen  $N \equiv 1 \pmod{4}$  ist eine gerade Anzahl der  $\ell_i$  kongruent  $-1 \pmod{4}$ , weshalb der erste Faktor gleich 1 ist. Wegen  $N \equiv 1 \pmod{8}$  ist eine gerade Anzahl

der  $\ell_i$  kongruent  $\pm 3$  modulo 8. Also ist der zweite Faktor gleich 1. Für festes  $q_j$  gilt

$$\prod_i \left( \frac{q_j}{\ell_i} \right) = \prod_i \left( \frac{\ell_i}{q_j} \right).$$

Entsprechend unserer Wahl von  $N$  erhalten wir die Gleichung

$$\prod_i \left( \frac{a}{\ell_i} \right) = \prod_{i,j} \left( \frac{\ell_i}{q_j} \right) = \prod_j \left( \frac{N}{q_j} \right) = -1.$$

Daher muss  $\left( \frac{a}{\ell_i} \right) = -1$  für mindestens ein  $i$  gelten. Widerspruch.  $\square$

## 2.4 Quadratsummen

Wir wollen mit Hilfe des Quadratischen Reziprozitätsgesetzes Darstellungen von Primzahlen als Quadratsummen herleiten. Der folgende Satz ist ein Klassiker.

**Satz 2.20** (Lagrange). *Eine ungerade Primzahl ist genau dann als Summe zweier Quadrate darstellbar, wenn sie kongruent 1 modulo 4 ist.*

Da die Summe zweier Quadrate stets  $\equiv 0, 1, 2 \pmod{4}$  ist, ist die gegebene Bedingung notwendig. Auch die Primzahlbedingung ist notwendig, wie das Beispiel der Zahl 21 zeigt.

*Beweis von Satz 2.20.* Die Bedingung ist offenbar notwendig. Es verbleibt zu zeigen, dass die Bedingung hinreichend ist, also sei  $p \equiv 1 \pmod{4}$  eine Primzahl.

Wir betrachten den Ring der Gaußschen Zahlen  $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  und seine Normfunktion  $N(a + bi) = a^2 + b^2$ . Diese ist eine euklidische Normfunktion, insbesondere ist  $\mathbb{Z}[i]$  ein Hauptidealring. Eine Nichteinheit  $z = a + bi$  hat stets eine Norm  $N(z) > 1$  (ansonsten wäre wegen  $N(z) = z\bar{z}$  die komplexe Konjugierte  $\bar{z}$  von  $z$  ein Inverses von  $z$ ).

Nun ist  $p$  kein Primelement in  $\mathbb{Z}[i]$ . Um dies einzusehen, wähle  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Dann gilt in  $\mathbb{Z}[i]$ , dass  $p \mid (x^2 + 1) = (x + i)(x - i)$ , aber die Faktoren sind beide nicht durch  $p$  teilbar.

Weil  $p$  kein Primelement ist, ist es auch nicht irreduzibel, man findet also  $z, z' \in \mathbb{Z}[i] \setminus \mathbb{Z}[i]^\times$  mit  $zz' = p$ . Hieraus folgt  $N(z)N(z') = N(p) = p^2$ , also  $N(z) = N(z') = p$ . Mit  $z = a + bi$  erhalten wir  $p = N(z) = a^2 + b^2$ .  $\square$

Wir nennen eine ganze Zahl *Quadratzahl*, wenn sie das Quadrat einer ganzen Zahl ist, d.h. wir zählen die Zahl 0 mit zu den Quadratzahlen.

**Theorem 2.21** (Lagrange). *Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadratzahlen.*

Zentral für den Beweis ist die folgende Bemerkung, die besagt, dass das Produkt zweier Summen von vier Quadraten wieder eine Summe von vier Quadraten ist.

**Lemma 2.22** (Euler-Identität). *Für  $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{Z}$  gilt die Identität*

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = \\ (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 \\ + (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 \\ + (x_1y_3 - x_2y_4 - x_3y_1 + x_4y_2)^2 \\ + (x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_4y_1)^2. \end{aligned}$$

Zum Beweis ist nichts zu sagen, man multipliziert einfach aus. Ihren Ursprung hat diese Gleichung in den Quaternionen. Eine **Quaternion** (oder auch **hyperkomplexe Zahl**) ist ein Ausdruck der Form  $z = x_1 + x_2i + x_3j + x_4k$ , wobei  $x_1, x_2, x_3, x_4$  reelle Zahlen und  $i, j, k$  Symbole sind, die den Rechenregeln  $-1 = i^2 = j^2 = k^2$  und  $ij = -ji = k$ ,  $jk = -kj = i$  und  $ki = -ik = j$  genügen. Die Norm einer Quaternion ist durch  $N(z) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$  definiert und die obige Identität entspricht genau dem Multiplikationsgesetz  $N(z)N(z') = N(zz')$  für die Quaternionennorm.

*Beweis von Theorem 2.21.* Wegen der Euler-Identität genügt es zu zeigen, dass jede Primzahl Summe von vier Quadratzahlen ist. Sei  $p$  eine Primzahl, die wir ohne Einschränkung als ungerade annehmen können. Es gibt  $(p+1)/2$  Quadrate modulo  $p$ , also auch genauso viele Restklassen der Form  $-1 - x^2$ . Da es insgesamt nur  $p$  verschiedene Restklassen gibt, muss unter diesen wenigstens ein Quadrat sein, d.h. die Gleichung  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  hat eine Lösung modulo  $p$ . Wählen wir Repräsentanten  $x, y$  mit  $-p/2 < x, y < p/2$ , so folgt

$$0 < x^2 + y^2 + 1 < 3 \left(\frac{p}{2}\right)^2 < p^2.$$

Also gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n < p$ , so dass  $np$  Summe von drei, also insbesondere auch von vier Quadraten ist. Sei  $m$  die kleinste natürliche Zahl, so dass  $mp$  Summe von vier Quadraten ist. Offenbar gilt  $m < p$ . Wir zeigen  $m = 1$ . Angenommen  $m$  wäre echt größer als 1 und

$$mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \tag{*}$$

Sei nun  $x_i \equiv y_i \pmod{m}$  mit  $-m/2 < y_i \leq m/2$  für  $i = 1, 2, 3, 4$ . Dann gilt  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \equiv 0 \pmod{m}$ , also existiert ein  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $r \geq 0$ , mit

$$rm = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2. \tag{**}$$

Wegen  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \leq m^2/4 + m^2/4 + m^2/4 + m^2/4 = m^2$ , gilt  $r \leq m$ . Multiplizieren wir die Gleichungen  $(*)$  und  $(**)$ , so erhalten wir eine Darstellung von  $rpm^2$  als Summe von vier Quadraten

$$rpm^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2, \quad (***)$$

wobei  $A, B, C$  und  $D$  gerade die Terme auf der rechten Seite der Euler-Identität sind. Wegen  $x_i \equiv y_i \pmod{m}$  sind  $B, C$  und  $D$  durch  $m$  teilbar. Außerdem gilt

$$A = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = mp \equiv 0 \pmod{m}.$$

Folglich ist auch  $rp = (A/m)^2 + (B/m)^2 + (C/m)^2 + (D/m)^2$  Summe von vier Quadraten. Wir zeigen nun, dass  $r$  weder gleich 0 noch gleich  $m$  sein kann:

Aus  $r = 0$  folgt  $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ . Daher sind  $x_1, x_2, x_3, x_4$  durch  $m$  teilbar und  $(*)$  impliziert  $m^2|mp$ , also  $m|p$ .

Aus  $r = m$  folgt  $y_i = m/2$  für  $i = 1, 2, 3, 4$ , insbesondere ist  $m$  gerade. Es gilt  $x_i = m/2 + c_i m$  mit  $c_i \in \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Wir erhalten  $x_i^2 = m^2/4 + c_i m^2 + c_i^2 m^2 \equiv m^2/4 \pmod{m^2}$ . Durch Aufsummieren folgt  $mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv m^2 \pmod{m^2}$ , woraus wieder  $m|p$  folgt.

In beiden Fällen haben wir  $m|p$  erhalten, was, da  $p$  eine Primzahl ist, im Widerspruch zu  $1 < m < p$  steht. Daher gilt  $1 \leq r \leq m-1$ . Dies steht wiederum im Widerspruch zur Minimalität von  $m$ . Die Annahme  $m > 1$  ist damit zum Widerspruch geführt. Es folgt  $m = 1$ , und der Beweis ist beendet.  $\square$

**Bemerkung:** Wir haben gezeigt, dass jede natürliche Zahl Summe von vier Quadraten ist. Der Beweis benutzte zum einen die entsprechende Aussage über Primzahlen und zum anderen die von den Quaternionen herkommende Euler-Identität. Die Normgleichung  $N(z)N(z') = N(zz')$  für komplexe Zahlen  $z = x_1 + ix_2$ ,  $z' = y_1 + iy_2$  impliziert die Identität

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (x_1y_2 + x_2y_1)^2 + (x_1y_1 - x_2y_2)^2,$$

und zeigt uns, dass auch das Produkt von Summen zweier Quadrate wieder Summe zweier Quadrate ist. Nach Satz 2.20 ist daher jedes Produkt von Primzahlen inkongruent 3 modulo 4 Summe zweier Quadrate. Um alle natürlichen Zahlen zu bestimmen, die Summe zweier Quadrate sind, brauchen wir allerdings mehr Einsicht in den Ring  $\mathbb{Z}[i]$ .

Ein Element in  $\mathbb{Z}[i]$  ist genau dann Einheit, wenn es Norm 1 hat - dies sind die vier Elemente  $\{\pm 1, \pm i\}$ . Ein Element mit Primzahlnorm ist automatisch prim (wegen der Multiplikativität der Norm). Allerdings haben nicht alle Primelemente in  $\mathbb{Z}[i]$  eine Primzahl als Norm. Zum Beispiel ist  $3 \in \mathbb{Z}[i]$  irreduzibel, also ein Primelement, und es gilt  $N(3) = 9$ .

**Satz 2.23.** Sei  $\pi \in \mathbb{Z}[i]$  ein Primelement. Dann tritt genau einer der beiden folgenden Fälle auf:

(a)  $N(\pi) = p^2$  für eine Primzahl  $p$  und  $\pi \hat{=} p$ .

(b)  $N(\pi) = \pi\bar{\pi} = p$  ist eine Primzahl.

Umgekehrt ist jede Primzahl  $p$  entweder Primelement in  $\mathbb{Z}[i]$  oder von der Form  $p = \pi\bar{\pi}$  mit einem Primelement  $\pi$  der Norm  $p$ .

*Beweis.* Sei  $p = \pi_1 \cdots \pi_n$  eine Primelementzerlegung der Primzahl  $p$  in  $\mathbb{Z}[i]$ . Dann gilt

$$p^2 = N(p) = N(\pi_1) \cdots N(\pi_n).$$

Es gilt  $N(\pi_j) > 1$  für  $j = 1, \dots, n$ ; folglich ist  $n \leq 2$ . Im Fall  $n = 1$  ist  $p$  Primelement. Im Fall  $n = 2$  gilt  $p = N(\pi_1) = \pi_1\bar{\pi}_1$ . Sei nun  $\pi \in \mathbb{Z}[i]$  ein Primelement. Dann teilt  $\pi$  die natürliche Zahl  $N(\pi) > 1$  und deshalb auch eine Primzahl  $p$ . Ist  $p$  Primelement in  $\mathbb{Z}[i]$ , so folgt  $\pi \hat{=} p$  und  $N(\pi) = N(p) = p^2$ . Gilt  $p = \pi_1\bar{\pi}_1$  mit einem Primelement  $\pi_1$  der Norm  $p$ , so ist, wegen der Eindeutigkeit der Primzerlegung,  $\pi$  assoziiert zu  $\pi_1$  oder zu  $\bar{\pi}_1$ . In jedem Fall gilt  $\pi\bar{\pi} = N(\pi) = N(\pi_1) = p$ .  $\square$

Es verbleibt zu klären, wann welcher Fall eintritt.

**Satz 2.24.** Eine Primzahl  $p$  ist genau dann ein Primelement in  $\mathbb{Z}[i]$ , wenn  $p$  kongruent 3 modulo 4 ist.

*Beweis.* Zunächst ist  $2 = (1+i)(1-i)$  kein Primelement in  $\mathbb{Z}[i]$ . Sei  $p \neq 2$  und kein Primelement. Nach Satz 2.23 gilt  $p = \pi\bar{\pi}$  für ein Primelement  $\pi$ . Setzt man  $\pi = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , so folgt  $p = a^2 + b^2$ , also  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Dies zeigt eine Richtung. Dass Primzahlen  $p \equiv 1 \pmod{4}$  keine Primelemente in  $\mathbb{Z}[i]$  sind, haben wir bereits im Beweis von 2.20 eingesehen.  $\square$

Ist  $p$  von der Form  $\pi\bar{\pi}$  und gilt  $\pi \hat{=} \bar{\pi}$ , so erhalten wir mit  $\pi = a + bi$

$$a + bi = u(a - bi), \quad u \in \{\pm 1, \pm i\}.$$

Aus  $u = \pm 1$  würde folgen, dass  $p$  ein Quadrat ist, also scheidet diese Möglichkeit aus. Für  $u = \pm i$  erhalten wir  $a = \pm b$ . Aus  $p = N(\pi) = 2a^2$  folgt dann  $p = 2$ . In der Tat gilt  $2 = (1+i)(1-i)$  und  $(1-i) = (-i)(1+i)$ .

Zusammenfassend erhalten wir das

**Satz 2.25** (Zerlegungsgesetz in  $\mathbb{Z}[i]$ ). Eine Primzahl  $p$  ist in  $\mathbb{Z}[i]$

$$\text{Produkt zweier assoziierter Primelemente} \iff p = 2,$$

$$\text{Produkt zweier nicht assoziierter Primelemente} \iff p \equiv 1 \pmod{4},$$

$$\text{Primelement} \iff p \equiv 3 \pmod{4}.$$

**Satz 2.26.** Eine natürliche Zahl ist genau dann Summe zweier Quadratzahlen, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung jede Primzahl kongruent 3 modulo 4 in gerader Vielfachheit vorkommt.

*Beweis.* Eine natürliche Zahl ist genau dann Summe zweier Quadrate, wenn sie als Norm einer Gaußschen Zahl  $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$  vorkommt. Sei nun  $n = N(\alpha)$  und

$$\alpha = \pi_1 \cdots \pi_r$$

eine Primzerlegung von  $\alpha$  in  $\mathbb{Z}[i]$ . Dann gilt

$$n = N(\alpha) = N(\pi_1) \cdots N(\pi_r).$$

Nach Satz 2.23 und dem Zerlegungsgesetz ist für ein Primelement  $\pi \in \mathbb{Z}[i]$  die Norm  $N(\pi)$  entweder gleich 2, eine Primzahl kongruent 1 modulo 4 oder das Quadrat einer Primzahl kongruent 3 modulo 4. Dies zeigt, dass die gegebene Bedingung notwendig ist.

Sei nun

$$n = (p_1 \cdots p_r) \cdot (n')^2$$

mit Primzahlen  $p_i \not\equiv 3 \pmod{4}$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Nach dem Zerlegungsgesetz finden wir Primelemente  $\pi_i \in \mathbb{Z}[i]$  mit  $N(\pi_i) = p_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ . Wir erhalten  $n = N(\alpha)$  mit  $\alpha = \pi_1 \cdots \pi_r \cdot n'$ .  $\square$   $\square$

Die Frage, welche natürlichen Zahlen sich als Summe dreier Quadrate darstellen lassen, lässt sich nicht durch Normgleichungen behandeln.

### 3 Ringe ganzer Zahlen

#### 3.1 Quadratische Zahlringe

Wir betrachten nun allgemeinere Zahlbereiche. Sei  $d \in \mathbb{Z}$  quadratfrei (d.h. durch keine Quadratzahl  $> 1$  teilbar) und von 0 und 1 verschieden. Mit  $\sqrt{d}$  bezeichnen wir eine (willkürlich, aber fest gewählte) komplexe Lösung der Gleichung  $X^2 = d$  (die andere ist dann  $-\sqrt{d}$ ). Die Menge der komplexen Zahlen

$$a + b\sqrt{d}, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

ist ein Ring und wird mit  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  bezeichnet. Da  $d$  als quadratfrei angenommen ist, ist  $\sqrt{d}$  keine rationale Zahl. Ist  $a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d}$ , so gilt  $(b' - b)\sqrt{d} = (a - a')$  und daher  $a = a'$  und  $b = b'$ , d.h. die Darstellung ist eindeutig. Wir betrachten nun die folgende Normfunktion auf  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ :

$$N(a + b\sqrt{d}) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2.$$

Ist  $d$  negativ, so ist  $N(z)$ , wie im Falle der Gaußschen Zahlen, gerade das Quadrat des Absolutbetrages von  $z$  als komplexe Zahl. Für positives  $d$  ist das nicht richtig, die Norm kann sogar negativ sein. So hat  $\sqrt{2} - 1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  die Norm  $(-1)^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$ . Unabhängig vom Vorzeichen von  $d$  verifiziert man leicht die Regel  $N(zz') = N(z)N(z')$ . Ist  $N(z) = 0$ , so folgt aus der Quadratfreiheit von  $d$ , dass  $z = 0$  ist.

**Satz 3.1.** Die Funktion

$$\nu : \mathbb{Z}[\sqrt{d}] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}, z \longmapsto |N(z)|,$$

ist eine euklidische Normfunktion, falls

$$|x^2 - dy^2| < 1$$

für alle rationalen Zahlen  $x, y \in \mathbb{Q}$  mit  $|x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}$  gilt.

*Beweis.* Wir bemerken zunächst, dass für komplexe Zahlen  $x, y \in \mathbb{C}$  der Form  $x = a + b\sqrt{d}$ ,  $y = a' + b'\sqrt{d}$  mit  $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$  auch die komplexen Zahlen  $x + y$ ,  $xy$  und  $x/y$  von dieser Gestalt sind. Für den Quotienten (wir nehmen natürlich  $y \neq 0$  an) sieht man das durch

$$\frac{x}{y} = \frac{a + b\sqrt{d}}{a' + b'\sqrt{d}} = \frac{(a + b\sqrt{d})(a' - b'\sqrt{d})}{a'^2 - db'^2} = \frac{aa' - bb'd}{a'^2 - db'^2} + \frac{a'b - ab'}{a'^2 - db'^2}\sqrt{d}.$$

Seien  $a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ,  $b \neq 0$ . Wie wir gerade gesehen haben, hat die komplexe Zahl  $a/b$  die Gestalt

$$\frac{a}{b} = u + v\sqrt{d}$$

mit  $u, v \in \mathbb{Q}$ . Nun wählen wir ganze Zahlen  $x, y \in \mathbb{Z}$  mit  $|u - x| \leq 1/2, |v - y| \leq 1/2$ . Mit  $q = x + y\sqrt{d}$  erhalten wir nach Voraussetzung

$$\left| N\left(\frac{a}{b} - q\right) \right| = |(u - x)^2 - d(v - y)^2| < 1.$$

Setzen wir  $r = a - bq \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ , so gilt

$$\nu(r) = |N(r)| = \left| N(b)N\left(\frac{a}{b} - q\right) \right| < |N(b)| = \nu(b).$$

Also erfüllen  $q$  und  $r$  das Gewünschte. □

**Korollar 3.2.** Für  $d = -2, -1, 2, 3$  ist der Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  euklidisch und daher auch faktoriell.

*Beweis.* Es gilt in den verschiedenen Fällen:

$$\begin{array}{ll} d = -2: & |x^2 + 2y^2| \leq \frac{3}{4} < 1; \\ d = +2: & |x^2 - 2y^2| \leq \frac{1}{2} < 1; \end{array} \quad \begin{array}{ll} d = -1: & |x^2 + y^2| \leq \frac{1}{2} < 1; \\ d = +3: & |x^2 - 3y^2| \leq \frac{3}{4} < 1. \end{array} \quad \square$$

Leider ist der Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  oft nicht faktoriell (und damit insbesondere nicht euklidisch). So haben wir beispielsweise im Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  die Zerlegung

$$(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 6 = 2 \cdot 3.$$

Die Elemente  $1 + \sqrt{-5}$ ,  $1 - \sqrt{-5}$ , 2, 3 sind sämtlich irreduzibel, also ist  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  nicht faktoriell. Ein weiteres, ganz praktisches Problem ist das folgende. Die dritte Einheitswurzel

$$\zeta_3 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

liegt nicht im Ring  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ . Wir würden aber gerne mit  $\zeta_3$  arbeiten, um zum Beispiel zur Lösung der Fermat-Gleichung  $X^3 + Y^3 = Z^3$  die Identität

$$X^3 + Y^3 = (X + Y)(X + \zeta_3 Y)(X - \zeta_3 Y)$$

heranziehen zu können. Wir werden uns diesem Problem im nächsten Abschnitt widmen.

## 3.2 Ganzheit

Sei  $\phi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus. Dann nennt man  $B$  eine  $A$ -Algebra.  $B$  wird zum  $A$ -Modul durch  $a \cdot b \stackrel{df}{=} \phi(a) \cdot b$ .

Insbesondere ist für  $f \in A[X]$  und  $b \in B$  das Element  $f(b) \in B$  definiert

**Definition 3.3.**  $\phi$  heißt endlich (und  $B$  endliche  $A$ -Algebra) wenn  $B$  als  $A$ -Modul endlich erzeugt ist.

**Satz 3.4.** Sei  $\phi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus und  $b \in B$ . Dann sind äquivalent

- (i) es existiert ein normiertes Polynom  $f \in A[X]$  mit  $f(b) = 0$ .
- (ii) der Unterring  $A[b] \subset B$  ist als  $A$ -Modul endlich erzeugt.
- (iii) es existiert ein endlich erzeugter  $A$ -Untermodul  $M \subset B$  mit  $1 \in M$  und  $b \cdot M \subset M$ .

*Beweis.* Siehe Algebra 1, 3.3 oder beliebiges Algebra-Buch. □

**Definition 3.5.**  $b \in B$  heißt **ganz** über  $A$ , wenn es die äquivalenten Bedingungen von 3.4 erfüllt.  $\phi$  heißt **ganz** (bzw.  $B$  heißt ganz über  $A$ ), wenn jedes Element  $b \in B$  ganz über  $A$  ist.

**Bemerkung 3.6.** Endliche Ringhomomorphismen sind ganz (setze  $M = B$  in (iii)).

**Satz 3.7.** Seien  $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$  Ringhomomorphismen.

- (i) sind  $\psi$  und  $\phi$  endlich, so auch  $\psi \circ \phi$ .
- (ii) sind  $\psi$  und  $\phi$  ganz, so auch  $\psi \circ \phi$ .

*Beweis.* Siehe Algebra 1, 3.49 und 3.52 oder beliebiges Algebra-Buch.  $\square$

**Satz 3.8.** Sei  $\phi : A \rightarrow B$  ein Ringhomomorphismus und  $B = A[b_1, \dots, b_n]$ , also  $B$  ist e.e.  $A$ -Algebra. Sind  $b_1, \dots, b_n$  ganz über  $A$ , so ist  $B$  eine endliche  $A$ -Algebra.

*Beweis.* Siehe Algebra 1, 3.50 oder beliebiges Algebra-Buch.  $\square$

**Korollar 3.9.** Sind  $b_1, b_2 \in B$  ganz über  $A$ , so auch  $b_1 + b_2$  und  $b_1 b_2$ .

Sei nun  $A$  nullteilerfrei und  $K = Q(A)$  der Quotientenkörper. Sei  $L|K$  eine algebraische Körpererweiterung

**Definition 3.10.**

$$A_L = \{x \in L \mid x \text{ ganz über } A\}$$

heißt der **Ganzabschluss** von  $A$  in  $L$ .  $A$  heißt ganzabgeschlossen, wenn  $A = A_K$ .

**Bemerkung 3.11.** Nach 3.9 ist  $A_L$  ein Ring.  $L$  ist der Quotientenkörper von  $A_L$  und  $A_L$  ist ganzabgeschlossen.

**Beispiel 3.12 (eines nicht ganzabgeschlossenen Ringes).** Sei  $f = X^2 - Y^3 \in \mathbb{C}[X, Y]$  und  $A = \mathbb{C}[X, Y]/(f)$ .  $A$  ist nullteilerfrei weil  $f$  irreduzibel ist.

Sei  $x$  das Bild von  $X$  in  $A$ ; wegen  $f \nmid X$  gilt  $x \neq 0$ . Analog sei  $y$  das Bild von  $Y$  in  $A$ ; wegen  $f \nmid Y$  gilt  $y \neq 0$ . Es gilt  $x^2 = y^3$  in  $A$ . Daher gilt

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - y = \frac{x^2}{y^2} - y = \frac{x^2 y}{y^3} - y = y - y = 0.$$

Also ist  $\frac{x}{y} \in Q(A)$  ganz über  $A$ . Aber  $\frac{x}{y} \notin A$ . Ansonsten wäre nämlich  $x = y \cdot \frac{x}{y} \in Ay$  und somit  $X \in (Y, X^2 - Y^3)$ . Aber  $(Y, X^2 - Y^3) = (Y, X^2) \not\ni X$ . Also ist  $A$  nicht ganzabgeschlossen.

**Satz 3.13.** Jeder faktorielle Ring ist ganzabgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $\alpha \in K$  mit  $\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$ , wobei  $c_0, \dots, c_{n-1} \in A$ . Z.z.:  $\alpha \in A$ . Sei  $\alpha = \frac{a}{b}$ ,  $a, b \in A$ ,  $\text{ggT}(a, b) = 1$ . Dann gilt

$$a^n + c_{n-1}ba^{n-1} + \cdots + c_0b^n = 0.$$

Ist nun  $p \in A$  ein Primelement mit  $p \mid b$ , so folgt  $p \mid a^n$ , also  $p \mid a$  WID. Also existiert so ein  $p$  nicht und es gilt  $b \in A^\times$ . Folglich gilt  $\alpha \in A$ .  $\square$

**Bemerkung 3.14.** Wir sehen somit, dass  $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$  ein nullteilerfreier, nicht faktorieller Ring ist.

**Satz 3.15.** Sei  $A$  ganzabgeschlossen und  $L|K$  endlich. Sei  $x \in L$  und

$$f = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \cdots + a_0$$

das Minimalpolynom von  $x$  über  $K$ . Dann gilt

$$x \in A_L \iff a_{r-1}, \dots, a_0 \in A.$$

*Beweis.*  $\Leftarrow$  per definitionem

$\Rightarrow L|K$  normal. Sei  $x \in A_L$  und  $g \in A[X]$  normiert mit  $g(x) = 0$ . Dann gilt  $f|g$  in  $K[X]$ , also  $g(y) = 0$  für jede Nullstelle  $y$  von  $f$ , d.h. diese liegen alle in  $A_L$ . Die Koeffizienten von  $f$  sind die elementarsymmetrischen Polynome in den Nullstellen  $\Rightarrow a_{r-1}, \dots, a_0 \in A_L \cap K = A$ .  $\square$

**Erinnerung:** Sei  $L|K$  endlich,  $x \in L$ . Dann ist

$$\varphi_x : L \rightarrow L, y \mapsto xy$$

ein Endomorphismus des endlichdimensionalen  $K$ -Vektorraums  $L$ .

**Definition 3.16.**

$$\begin{aligned} \text{Sp}_{L|K}(x) &= \text{Sp}(\varphi_x) \in K \\ N_{L|K}(x) &= \det(\varphi_x) \in K. \end{aligned}$$

**Satz 3.17.** Sind  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  die endlich vielen  $K$ -Einbettungen  $L \rightarrow \bar{K}$  in einen festen algebraischen Abschluss von  $K$ , so gilt

$$\begin{aligned} \text{Sp}_{L|K}(x) &= [L : K]_i \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_i x \\ N_{L|K}(x) &= \left( \prod_{i=1}^n \sigma_i x \right)^{[L:K]_i}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Siehe Algebra 1, 4.62.  $\square$

**Korollar 3.18.** *A ganzabgeschlossen,  $K = Q(A)$ ,  $L|K$  endlich,  $x \in A_L \implies \text{Sp}_{L|K}(x), N_{L|K}(x) \in A$ .*

*Beweis.*  $N_{L|K}(x) = N_{K(x)/K}(x)^{[L:K(x)]} = \pm a_0^{[L:K(x)]}$  wobei  $X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \dots + a_0$  das Minimalpolynom von  $x$  über  $K$  ist. Des Weiteren gilt

$$\begin{aligned} \text{Sp}_{L|K}(x) &= [L : K(x)] \cdot \text{Sp}_{K(x)/K}(x) \\ &\quad \| \\ &\quad -a_{r-1}. \end{aligned}$$

Schließlich gilt  $a_0, a_{r-1} \in A$ .  $\square$

**Erinnerung:** (Algebra 1, 4.64)  $L|K$  endlich, separabel. Dann ist die **Spurform**

$$\begin{aligned} \text{Sp} : L \times L &\longrightarrow K, \\ (x, y) &\longmapsto \text{Sp}_{L|K}(xy), \end{aligned}$$

eine nicht-ausgeartete Bilinearform.

**Definition 3.19.** Für eine  $K$ -Basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ,  $n = [L : K]$ , von  $L$  ist die **Diskriminante** definiert durch

$$d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(\text{Sp}(\alpha_i \alpha_j)).$$

Mit  $\text{Hom}_K(L, \bar{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  gilt

$$\text{Sp}(\alpha_i \alpha_j) = \sum_k \sigma_k(\alpha_i) \sigma_k(\alpha_j)$$

Daher gilt die Gleichheit von Matrizen

$$(\text{Sp}(\alpha_i \alpha_j))_{ij} = (\sigma_k \alpha_i)_{k,i}^t \cdot (\sigma_k \alpha_j)_{k,j},$$

und wir erhalten

**Lemma 3.20.**

$$d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\det(\sigma_i \alpha_j)_{ij})^2.$$

Im Spezialfall  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$  erhält man

$$d(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}) = \prod_{i < j} (\sigma_j(\alpha) - \sigma_i(\alpha))^2.$$

*Beweis.* Die erste Aussage haben wir schon. Die zweite folgt aus

$$\det \begin{pmatrix} 1, \sigma_1(\alpha), \sigma_1(\alpha)^2, \dots, \sigma_1(\alpha)^{n-1} \\ \ddots \\ 1, \sigma_n(\alpha), \sigma_n(\alpha)^2, \dots, \sigma_n(\alpha)^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (\sigma_i(\alpha) - \sigma_j(\alpha))$$

(Vandermondsche Matrix).  $\square$

Sei  $L|K$  endlich separabel,  $A$  ganzabgeschlossen mit  $K = Q(A)$  und sei  $B = A_L$ . Jedes  $x \in L$  erfüllt eine Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Durch Multiplikation erhalten wir  $ax \in A_L$  für  $a \in A$  geeignet. Insbesondere existieren in  $B$  enthaltene  $K$ -Basen von  $L$ .

**Satz 3.21.** *A ganzabgeschlossen,  $K = Q(A)$ ,  $L|K$  endlich separabel,  $B = A_L$ . Sei  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  eine in  $B$  gelegene  $K$ -Basis von  $L$ . Dann gilt*

$$d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot B \subset A\alpha_1 + \cdots + A\alpha_n.$$

Insbesondere ist  $B$  ein Untermodul eines e.e.  $A$ -Moduls.

*Beweis.* Sei  $\alpha \in B$  beliebig.  $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$ ,  $a_1, \dots, a_n \in K$ .

Dann gilt  $\text{Sp}_{L|K}(\alpha_i\alpha) = \sum_{j=1}^n \text{Sp}_{L|K}(\alpha_i\alpha_j)a_j$ .

Also sind die  $a_i$  Lösungen eines linearen Gleichungssystems der Form

$$M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

mit  $b_i \in A$ ,  $M = (m_{ij}) \in M_{n,n}(A)$ .

Cramersche Regel:  $\det(M)a_i \in A$  (multipliziere mit Adjunkter von  $M$ ). Es gilt  $\det M = d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) =: d$ . Also gilt  $d\alpha = da_1\alpha_1 + \cdots + da_n\alpha_n \in B$ . Schließlich erhalten wir die Inklusion

$$B \subset A\frac{\alpha_1}{d} + \cdots + A\frac{\alpha_n}{d},$$

was das „Insbesondere“ zeigt.  $\square$

**Korollar 3.22.** *Ist  $A$  ein Hauptidealring, so ist  $B$  ein freier  $A$ -Modul vom Rang  $n = [L : K]$ .*

*Beweis.* Sei  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  eine in  $B$  enthaltene  $K$ -Basis von  $L$  und  $d = d(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Dann gilt nach 3.21

$$B \subset A\frac{\alpha_1}{d} + \cdots + A\frac{\alpha_n}{d}.$$

Die Elemente  $\frac{\alpha_i}{d}$  sind  $K$ -linear unabhängig, also auch  $A$ -linear unabhängig. Daher ist  $B$  Untermodul eines freien  $A$ -Moduls vom Rang  $n$  und somit frei vom Rang  $\leq n$ . Jede  $A$ -Basis von  $B$  ist auch  $K$ -Basis von  $L \Rightarrow \text{Rang}_A B = n$ .  $\square$

**Definition 3.23.** Eine  $A$ -Basis von  $B$  (wenn sie existiert) heißt **Ganzheitsbasis** von  $B$  über  $A$ .

### 3.3 Dedekindringe

**Satz 3.24** (Algebra 2, 19.1). *Für einen  $A$ -Modul  $M$  sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

- (i) *Jede aufsteigende Kette  $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$  von Untermoduln in  $M$  wird stationär.*
- (ii) *jeder Untermodul von  $M$  ist endlich erzeugt.*

**Definition 3.25.** Ein Modul  $M$  der den Bedingungen von 3.24 genügt heißt **noetherscher  $A$ -Modul**.  $A$  heißt **noetherscher Ring**, wenn  $A$  noethersch als  $A$ -Modul ist (d.h. jedes Ideal ist endlich erzeugt).

**Beispiel 3.26.** Jeder Hauptidealring ist noethersch.

**Satz 3.27** (Algebra 2, 19.10). *Sei  $A$  ein noetherscher Ring. Dann ist ein  $A$ -Modul  $M$  genau dann noethersch, wenn er endlich erzeugt ist.*

**Satz 3.28** (Hilbertscher Basissatz, Algebra 2, 19.15). *Ist  $A$  noethersch und  $B$  eine endlich erzeugte  $A$ -Algebra, so ist auch  $B$  ein noetherscher Ring.*

**Satz 3.29.** *Sei  $A$  ein nullteilerfreier ganzabgeschlossener noetherscher Ring,  $K = Q(A)$  und  $L|K$  endlich separabel. Dann ist  $B = A_L$  eine endliche  $A$ -Algebra und insbesondere selbst wieder noethersch.*

*Beweis.* Nach 3.21 ist  $B$  Untermodul eines e.e.  $A$ -Moduls, also selbst e.e.  $A$ -Modul.  $\square$

**Definition 3.30** (Algebra 2, 26.10). Die **Dimension**  $\dim A$  eines Ringes ist das Supremum über alle  $n \in \mathbb{N}_0$  mit der Eigenschaft: es existiert eine Kette (der Länge  $n$ )

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subset A$$

von Primidealen in  $A$ .

**Bemerkungen 3.31.** •  $A$  Körper  $\Rightarrow \dim A = 0$

- $A$  nullteilerfrei und  $\dim A = 0 \Rightarrow A$  Körper
- $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2 \Rightarrow \dim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$
- $A$  Hauptidealring  $\Rightarrow \dim A \leq 1$ .

Grund: z.z.: jedes Primideal  $\neq 0$  ist maximal: Gilt  $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ , so gilt  $\mathfrak{p}_i = (\pi_i)$  für Primelemente  $\pi_1, \pi_2 \in A$ . Es folgt  $\pi_2 \mid \pi_1$ . Da die  $\pi_i$  prim, insbesondere irreduzibel sind, folgt  $\pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ . Widerspruch.

- es gibt noethersche Ringe der Dimension  $\infty$ .

**Definition 3.32.** Ein nullteilerfreier, ganzabgeschlossener noetherscher Ring der Dimension  $\leq 1$  heißt **Dedekindring**.

**Beispiel 3.33.** Jeder Hauptidealring ist ein Dedekindring.

**Satz 3.34.** Sei  $A$  ein Dedekindring,  $K = Q(A)$ ,  $L|K$  endlich separabel, und  $B = A_L$ . Dann ist  $B$  ein Dedekindring und es gilt  $\dim B = \dim A$ .

**Bemerkung 3.35.** Die Separabilitätsforderung ist entbehrlich, dann wird aber der Beweis schwerer.

*Beweis von 3.34.*  $B$  ist ganzabgeschlossen und noethersch nach 3.29. Bleibt z.z.:  $\dim B = \dim A$ .

1. Fall:  $\dim A = 0$ . Dann ist  $A$  ein Körper.  $B$  ist endliche nullteilerfreie  $A$ -Algebra. Für  $b \in B$ ,  $b \neq 0$ , ist  $\cdot b : B \rightarrow B$  ein injektiver Endomorphismus des e.d.  $A$ -Vektorraums  $B$ , also ein Isomorphismus. Folglich ist jedes  $b \neq 0$  invertierbar und somit  $B$  ein Körper.

2. Fall:  $\dim A = 1$ . Z.z.:

- a) es gibt in  $B$  ein Primideal  $\neq 0$ .
- b) jedes Primideal  $\neq 0$  in  $B$  ist maximal.

Zu a) Sei  $a \in A \setminus (\{0\} \cup A^\times)$ . Dann gilt  $a \in B \setminus (\{0\} \cup B^\times)$ .

Grund: Offenbar gilt  $a \neq 0$  trivial. Angenommen es existiert  $b \in B$  mit  $ba = 1$ . Dann gilt  $b \in B \cap K = A$  im Widerspruch zu  $a \notin A^\times$ . Folglich gilt  $(0) \subsetneq aB \subsetneq B$  und  $aB$  ist in einem Maximalideal  $\neq (0)$  enthalten.

Zu b) Sei  $\mathfrak{P} \subset B$  ein Primideal  $\neq 0$ . Dann ist das Primideal  $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$  ungleich 0: Grund: Sei  $b \in \mathfrak{P}$ ,  $b \neq 0$ . Dann existiert eine Gleichung

$$b^r + a_{r-1}b^{r-1} + \cdots + a_0 = 0, \quad a_i \in A, \quad a_0 \neq 0$$

$$\Rightarrow a_0 \in \mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}.$$

Nun ist  $B$ , also auch  $B/\mathfrak{P}$  eine endliche  $A$ -Algebra. Daher ist  $B/\mathfrak{P}$  ist endliche Algebra über dem Körper  $A/\mathfrak{p}$ . Außerdem ist  $B/\mathfrak{p}$  nullteilerfrei  $\Rightarrow B/\mathfrak{P}$  ist Körper (siehe oben).  $\square$

**Definition 3.36.** Ein **Zahlkörper** ist ein endlicher Erweiterungskörper  $K|\mathbb{Q}$ . Der Ganzabschluss  $\mathcal{O}_K$  von  $\mathbb{Z}$  in  $K$  heißt **Ring der ganzen Zahlen** von  $K$ .

**Korollar 3.37.** Für jeden Zahlkörper  $K$  ist  $\mathcal{O}_K$  ein Dedekindring.

*Beweis.*  $\mathbb{Z}$  ist Hauptidealring also Dedekindring. Das Ergebnis folgt aus 3.34.  $\square$

**Beispiel 3.38.** Gilt  $[K : \mathbb{Q}] = 2$ , so heißt  $K$  **quadratischer Zahlkörper**. Es gilt  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ,  $d \in \mathbb{Q}^\times \setminus \mathbb{Q}^{\times 2}$ . Stillschweigend nehmen wir  $d$  stets als ganzzahlig und quadratfrei an.

Jedes Element von  $K$  hat eine eindeutige Darstellung  $x = a + b\sqrt{d}$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Es gilt

$$N_{K|\mathbb{Q}}(x) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2,$$

$$\mathrm{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(x) = (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}) = 2a.$$

Da  $x$  Nullstelle des Polynoms  $X^2 - \mathrm{Sp}(x)X + N(x)$  ist gilt

$$x \in \mathcal{O}_K \iff N(x), \mathrm{Sp}(x) \in \mathbb{Z}.$$

**Satz 3.39.** Sei  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  ein quadratischer Zahlkörper.

Ist  $d \not\equiv 1 \pmod{4}$  so gilt  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$ .

Für  $d \equiv 1 \pmod{4}$  gilt

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \left( \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right) = \left\{ \frac{a + b\sqrt{d}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{2} \right\}$$

*Beweis.* Sei  $x = a + b\sqrt{d}$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}$ . Nach den obigen Bemerkungen gilt

$$x \in \mathcal{O}_K \iff 2a, a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$$

Für  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $d$  beliebig folgt  $x \in \mathcal{O}_K$ .

Sei  $d \equiv 1 \pmod{4}$  und  $a = \frac{1}{2}A$ ,  $b = \frac{1}{2}B$ ,  $A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $A \equiv B \pmod{2}$ . Dann ist  $a^2 - db^2 = \frac{1}{4}(A^2 - dB^2) \in \mathbb{Z}$  und  $2a = A \in \mathbb{Z}$ . Die angegebenen Elemente sind daher ganz.

Umgekehrt: Wegen  $2a \in \mathbb{Z}$  ist  $4db^2 = (2a)^2 - 4(a^2 - db^2) \in \mathbb{Z}$ . Da  $d$  quadratfrei ist, folgt  $2b \in \mathbb{Z}$ . Also existieren  $A, B \in \mathbb{Z}$ ,  $2a = A$ ,  $2b = B$ . Aus  $a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$  folgt  $4 \mid (A^2 - dB^2)$ . Für  $d \not\equiv 1 \pmod{4}$  ist dies nur für gerades  $A, B$  möglich, also  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Ist  $d \equiv 1 \pmod{4}$  folgt  $A \equiv B \pmod{2}$ .  $\square$

**Bemerkung 3.40.** Für  $d = -5$  erhalten wir  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ . Dieser Ring ist nicht faktoriell, insbesondere kein Hauptidealring, aber ein Dedekindring.

Sei nun  $K$  wieder ein beliebiger Zahlkörper. Da  $\mathbb{Z}$  ein Hauptidealring ist, existiert eine Ganzheitsbasis von  $\mathcal{O}_K$  (über  $\mathbb{Z}$ ) der Länge  $n = [K : \mathbb{Q}]$ . Sei

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_n.$$

**Definition/Lemma 3.41.** Die Diskriminante  $d(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  hängt nicht von der Wahl der Basis ab. Sie heißt die **Discriminante des Zahlkörpers  $K$** . Bezeichnung  $d_K = d(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

*Beweis.* Es gilt

$$d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(\sigma_i \alpha_j)^2,$$

wobei  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}})$ . Sei  $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$  eine andere Ganzheitsbasis und  $M$  die Übergangsmatrix. Es gilt  $M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z})$ , also gilt  $\det(M) \in \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$  und

$$\begin{aligned} d(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) &= \det(M)^2 \cdot d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

$\square$

**Beispiel 3.42.** Ist  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  ein quadratischer Zahlkörper so gilt

$$d_K = \begin{cases} 4d, & d \not\equiv 1 \pmod{4}, \\ d, & d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

(Man benutze die angegebene Ganzheitsbasis).

### 3.4 Primzerlegung in Dedekindringen

Sei  $A$  ein Dedekindring.  $A$  ist nicht notwendig ein Hauptidealring. Aber wir werden im Laufe dieses Abschnitts das folgende Theorem zeigen:

**Theorem 3.43.** *Jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subset A$ ,  $\mathfrak{a} \neq 0$  hat eine bis auf Reihenfolge eindeutige Zerlegung*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$$

in das Produkt von Primidealen  $\neq 0$ .

**Konvention:** Wenn nicht explizit anders gesagt, meinen wir von jetzt an mit Primideal stets Primideal  $\neq 0$ .

**Lemma 3.44.** *Jedes Ideal  $\mathfrak{a} \neq 0$  umfaßt ein Produkt von Primidealen.*

*Beweis.* Angenommen  $\mathfrak{a} \neq 0$  sei ein Ideal für das die Aussage falsch ist. Offenbar gilt  $\mathfrak{a} \neq A$  und  $\mathfrak{a}$  ist kein Primideal. Daher existieren  $b_1, b_2 \in A$ ,  $b_1, b_2 \notin \mathfrak{a}$ , aber  $b_1 b_2 \in \mathfrak{a}$ . Setze

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a} + (b_1) \supsetneq \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{a} + (b_2) \supsetneq \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 &= (\mathfrak{a} + (b_1))(\mathfrak{a} + (b_2)) \\ &= \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}(b_1) + \mathfrak{a}(b_2) + (b_1 b_2) \\ &\subset \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Enthalten  $\mathfrak{a}_1$  und  $\mathfrak{a}_2$  ein Produkt von Primidealen, so auch  $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2$ , also auch  $\mathfrak{a}$ . Daher ist die Aussage des Lemmas für mindestens eines der Ideale  $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$  auch falsch. Wir erhalten induktiv eine nicht stationär werdende aufsteigende Folge von Idealen. Widerspruch zu  $A$  noethersch.  $\square$

**Lemma 3.45.** *Sei  $\mathfrak{p}$  ein Primideal und  $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$  Ideale mit*

$$\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{p}.$$

*Dann gilt  $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$  für ein  $i$ .*

*Beweis.* Anderenfalls können wir für jedes  $i = 1, \dots, n$  ein  $a_i \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{p}$  wählen und es würde  $a_1 \cdots a_n \in \mathfrak{p}$  gelten. Aber  $\mathfrak{p}$  ist prim. Widerspruch.  $\square$

**Lemma 3.46.** Für einen  $A$ -Untermodul  $M$  von  $K = Q(A)$  sind äquivalent

- (i)  $M$  ist endlich erzeugter  $A$ -Modul.
- (ii) es existiert ein  $\alpha \in A$ ,  $\alpha \neq 0$ , mit  $\alpha M \subset A$ .

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii). Ist  $M = Am_1 + \cdots + Am_n$  und  $\alpha \in A$  so gewählt, dass  $\alpha m_i \in A$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so gilt  $\alpha M \subset A$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Gilt  $\alpha M \subset A$  so ist  $\alpha M$  als Ideal in  $A$  e.e. Sei  $\alpha M = Aa_1 + \cdots + Aa_n$ . Dann gilt  $M = A_{\alpha}^{a_1} + \cdots + A_{\alpha}^{a_n}$ .  $\square$

**Definition 3.47.** Ein  $A$ -Untermodul  $M \subset K$ , der die äquivalenten Bedingungen von 3.46 erfüllt heißt **gebrochenes Ideal** in  $K$ .

**Bemerkung 3.48.** Jedes Ideal  $\mathfrak{a} \subset A$  ist ein gebrochenes Ideal. Zur besseren Unterscheidung werden wir diese oft als „ganze Ideale“ bezeichnen.

**Definition 3.49.** Für  $x \in K$  heißt

$$xA = \{xa \mid a \in A\}$$

das zu  $x$  assoziierte **gebrochene Hauptideal**.

*Operationen auf gebrochenen Idealen:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 &= \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in \mathfrak{a}_1, a_2 \in \mathfrak{a}_2\} \\ \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 &= \text{was sonst} \\ \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 &= \left\{ \sum_{\text{endl.}} a_i b_i \mid a_i \in \mathfrak{a}_1, b_i \in \mathfrak{a}_2 \right\} \end{aligned}$$

d.h. genauso wie für gewöhnliche Ideale. Für Hauptideale gilt

$$(xA)(yA) = (xy)A.$$

Insbesondere gilt für  $x \neq 0$ :

$$(xA)(x^{-1}A) = A = (1).$$

d.h. von 0 verschiedene gebrochene Hauptideale haben ein Inverses bzgl. Multiplikation.

**Definition 3.50.** Für ein gebrochenes Ideal  $\mathfrak{a} \subset K$ ,  $\mathfrak{a} \neq 0$ , sei  $\mathfrak{a}^* = \{a \in K \mid a\mathfrak{a} \subset A\}$ .

**Lemma 3.51.**  $\mathfrak{a}^*$  ist ein gebrochenes Ideal.

*Beweis.* Zunächst ist  $\mathfrak{a}^* \subset K$  ein  $A$ -Untermodul. Sei  $x \in \mathfrak{a}$ ,  $x \neq 0$ , beliebig gewählt. Dann gilt  $x\mathfrak{a}^* \subset A$ .  $\square$

**Lemma 3.52.** (i)  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \implies \mathfrak{b}^* \subset \mathfrak{a}^*$ .

(ii)  $\mathfrak{a} \subset A \iff \mathfrak{a}^* \supset A$

(iii) Für ein Primideal  $\mathfrak{p}$  gilt  $\mathfrak{p}^* \supseteq A$ .

*Beweis.* (i) ist folgt durch Auswertung der Definitionen.

(ii)  $\mathfrak{a} \subset A \Rightarrow 1 \in \mathfrak{a}^* \Rightarrow A \subset \mathfrak{a}^*$ . Gilt  $\mathfrak{a}^* \supset A$  folgt  $1 \in \mathfrak{a}^*$ , also  $\mathfrak{a} = 1\mathfrak{a} \subset A$ .

(iii) Sei  $a \in \mathfrak{p}$ ,  $a \neq 0$ . Nach 3.44 existieren Primideale  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  mit  $\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset (a) \subset \mathfrak{p}$ . OE sei  $n$  minimal gewählt. Nach 3.45 gilt  $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$  für ein  $i$ , etwa  $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$ . Wegen  $\dim A \leq 1$  folgt  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ . Wegen  $\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n \not\subset (a)$  (Im Fall  $n = 1$  ist das leere Produkt gleich  $A$ ) existiert ein  $b \in \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n$  mit  $b \notin aA$  also  $a^{-1}b \notin A$ . Aber  $b\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n \cdot \mathfrak{p}_1 \subset (a)$ , also  $a^{-1}b \in \mathfrak{p}^*$ .  $\square$

**Lemma 3.53.** Sei  $\mathfrak{a} \subset A$  und  $\mathfrak{a}^* = A$ . Dann gilt  $\mathfrak{a} = A$ .

*Beweis.* Wäre  $\mathfrak{a} \neq A$ , so existierte ein Primideal  $\mathfrak{p} \subset A$  mit  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ . Wir erhalten  $\mathfrak{a}^* \supset \mathfrak{p}^* \supsetneq A$ . Widerspruch  $\square$

**Lemma 3.54.** Für  $\mathfrak{a} \subset A$  gilt  $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^* = A$ .

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}^* \subset A$ . Z.z.:  $\mathfrak{b} = A$ . Es gilt

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^*) = \mathfrak{b}\mathfrak{b}^* \subset A.$$

Daher gilt  $\mathfrak{a}^*\mathfrak{b}^* \subset \mathfrak{a}^*$ . Sei nun  $\beta \in \mathfrak{b}^*$  beliebig. Wegen  $1 \in \mathfrak{a}^*$  und  $\beta \cdot \mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{a}^*$  ist nach 3.4 (iii) (mit  $M = \mathfrak{a}^*$ )  $\beta$  ganz über  $A$ , also in  $A$ . Daher gilt  $\mathfrak{b}^* \subset A$ . Wegen  $\mathfrak{b} \subset A$  folgt  $\mathfrak{b}^* \supset A$ , also  $\mathfrak{b}^* = A$ . Nach 3.53 folgt  $\mathfrak{b} = A$ .  $\square$

**Theorem 3.55.** Die Menge der von 0 verschiedenen gebrochenen Ideale eines Dedekindrings bildet bzgl. Multiplikation eine abelsche Gruppe. Das Inverse zu  $\mathfrak{a}$  ist durch

$$\mathfrak{a}^{-1} = \{a \in K \mid a\mathfrak{a} \subset A\} \quad [= a^*]$$

gegeben.

Bezeichnung dieser Gruppe:  $J(A)$ .

*Beweis.* Die gebrochenen Ideale bilden ein abelsches Monoid. Z.z. ist die Existenz Inverser. Sei  $\mathfrak{a} \neq 0$  beliebig. Für  $0 \neq x \in K$  gilt  $\mathfrak{a}^* = (xA)(x\mathfrak{a})^*$ .

Wählen wir  $x$  so, dass  $x\mathfrak{a} \subset A$  gilt, so folgt nach 3.54

$$\mathfrak{a}^*\mathfrak{a} = (xA)(x\mathfrak{a})^*\mathfrak{a} = (x\mathfrak{a})^*(x\mathfrak{a}) = A. \quad \square$$

**Definition 3.56.** Seien  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$  Ideale. Wir sagen  $\mathfrak{a}$  teilt  $\mathfrak{b}$  ( $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$ ), wenn ein ganzes Ideal  $\mathfrak{c} \subset A$  mit  $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$  existiert.

**Satz 3.57.** Es gilt

$$\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \iff \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}.$$

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : Aus  $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$  und  $\mathfrak{c} \subset A$  folgt  $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}A = \mathfrak{a}$ .

$\Leftarrow$   $\mathfrak{a} = (0)$  teilt nur sich selbst, also sei  $\mathfrak{a} \neq 0$ . Sei  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ . Dann ist

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = A$$

ein ganzes Ideal und es gilt  $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$ .  $\square$

**Korollar 3.58.** Für ein ganzes Ideal  $0 \neq \mathfrak{a} \subsetneq A$  gilt  $\mathfrak{a}^{n+1} \subsetneq \mathfrak{a}^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . D.h. wir erhalten eine strikt fallende Folge von Idealen

$$A \supsetneq \mathfrak{a} \supsetneq \mathfrak{a}^2 \supsetneq \mathfrak{a}^3 \supsetneq \dots$$

*Beweis.* Es gilt  $\mathfrak{a}^{n+1} = \mathfrak{a}^n\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^nA = \mathfrak{a}^n$ . Aus  $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{n+1}$  würde durch Multiplikation mit  $\mathfrak{a}^{-n}$  die Gleichheit  $A = \mathfrak{a}$  folgen.  $\square$

*Beweis von Theorem 3.43.* Sei  $\mathfrak{a} \subset A$ ,  $\mathfrak{a} \neq 0$ , ein ganzes Ideal. Der Fall  $\mathfrak{a} = A$  ist formal ( $A$  = leeres Produkt von Primidealen). Sei  $\mathfrak{a} \subsetneq A$ . Da jedes echte Ideal in einem Primideal liegt und wegen 3.44 finden wir Primideale  $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$  mit

$$\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}.$$

Nach 3.45 ist (OE)  $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$  und daher  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ . Dann gilt

$$\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n \subseteq \mathfrak{p}_1^{-1}\mathfrak{a} \subset A.$$

Gilt  $\mathfrak{p}_1^{-1}\mathfrak{a} = A$ , so folgt  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1$ . Ansonsten ist  $\mathfrak{p}_1^{-1}A$  in einem Primideal enthalten und wir erhalten induktiv nach  $r \leq n$  Schritten

$$\mathfrak{p}_r^{-1}\mathfrak{p}_{r-1}^{-1} \cdots \mathfrak{p}_1^{-1}\mathfrak{a} = A,$$

also  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ . Es verbleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Sei

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_m.$$

Es gilt  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1$  und nach 3.45 gilt (OE)  $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{p}_1$ , also  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1$ . Multiplikation mit  $\mathfrak{p}_1^{-1}$  gibt

$$\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_m.$$

Dieser Prozess bricht ab und wir erhalten  $n = m$  und nach Umnummerierung  $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i$ .  $\square$

**Korollar 3.59.** Jedes gebrochene Ideal  $\mathfrak{a} \neq 0$  hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \in P} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}}, \quad v_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}, \quad v_{\mathfrak{p}} = 0 \text{ f.f.a. } \mathfrak{p}.$$

Mit anderen Worten:  $J(A)$  ist die freie abelsche Gruppe über der Menge der Primideale von  $A$ .

*Beweis.* Schreibe  $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}^{-1}$  mit  $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subset A$  und wende 3.43 an.  $\square$

**Beispiel 3.60.** Wir betrachten die Zerlegung

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$$

in  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})}$ .

Sei

$$\mathfrak{p} = (2, 1 + \sqrt{-5}) = 2\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] + (1 + \sqrt{-5})\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$$

und

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}_1 &= (3, 1 + \sqrt{-5}), \\ \mathfrak{q}_2 &= (3, 1 - \sqrt{-5}).\end{aligned}$$

Dann gilt mit  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}^2 &= (4, 2(1 + \sqrt{-5}), (1 + \sqrt{-5})^2) \\ &= (4, 2 + 2\sqrt{-5}, -4 + 2\sqrt{-5}) \\ &\subset (2).\end{aligned}$$

Wegen  $2 = (2 + 2\sqrt{-5}) - 4 - (-4 + 2\sqrt{-5}) \in \mathfrak{p}^2$ , folgt  $\mathfrak{p}^2 = (2)$ .

Analog

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 &= (9, 3(1 + \sqrt{-5}), 3(1 - \sqrt{-5}), 6) \\ &\subset (3)\end{aligned}$$

und  $3 = 9 - 6 \in \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ , also  $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2 = (3)$ .

Außerdem berechnet man leicht:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\mathfrak{p} &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/\mathfrak{q}_i &\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad \text{für } i = 1, 2,\end{aligned}$$

also sind  $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$  Primideale.

Wegen  $2 \notin \mathfrak{q}_1$  (sonst  $1 = 3 - 2 \in \mathfrak{q}_1$ ) gilt  $1 - \sqrt{-5} = 2 - (1 + \sqrt{-5}) \notin \mathfrak{q}_1$  also  $\mathfrak{q}_2 \neq \mathfrak{q}_1$ . Folglich ist

$$(6) = \mathfrak{p}^2\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$$

die eindeutige Primidealzerlegung von (6). Schon berechnet:  $(2) = \mathfrak{p}^2$ ,  $(3) = \mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ . Zudem gilt

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{-5}) &= \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1, \\ (1 - \sqrt{-5}) &= \mathfrak{p}\mathfrak{q}_2.\end{aligned}$$

Z.B.

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q}_1 = (6, 2(1 + \sqrt{-5}), 3(1 + \sqrt{-5}), (1 + \sqrt{-5})^2),$$

also  $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_1 \subset (1 + \sqrt{-5})$ . Andererseits gilt

$$(1 + \sqrt{-5}) = 3(1 + \sqrt{-5}) - 2(1 + \sqrt{-5}) \in \mathfrak{p}\mathfrak{q}_1.$$

Für ganze Ideale  $0 \neq \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$  kann man nun mit Hilfe von 3.43 in natürlicher Weise den ggT definieren. Ist  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{e_n}$ ,  $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1^{f_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{f_n}$  (Exponent = 0 erlaubt), so setzt man

$$\text{ggT}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{p}_1^{\min(e_1, f_1)} \cdots \mathfrak{p}_n^{\min(e_n, f_n)}.$$

**Satz 3.61.** Für  $0 \neq \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$  gilt  $\text{ggT}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ .

*Beweis.* Nach 3.57 ist der ggT das kleinste Ideal, das sowohl  $\mathfrak{a}$  also auch  $\mathfrak{b}$  umfasst, also  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ .  $\square$

**Satz 3.62.** Für ein ganzes Ideal  $\mathfrak{a} \subsetneq A$  gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n = (0).$$

*Beweis.*  $\mathfrak{b} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n$  ist ein Ideal, das durch beliebige Potenzen von  $\mathfrak{a}$  teilbar ist. Für  $\mathfrak{b} \neq (0)$  würde dies der eindeutigen Primzerlegung widersprechen.  $\square$

**Bemerkung 3.63.** Die Eigenschaft aus 3.62 heißt: „ $A$  ist  $\mathfrak{a}$ -adisch separiert“. Sie gilt allgemeiner für nullteilerfreie noethersche Ringe (siehe Algebra 2, 24.17).

Um nun doch effektiv mit Elementen von  $A$  rechnen zu können muss man die folgenden Effekte untersuchen:

- 1) Wie weit weichen Ideale davon ab Hauptideal zu sein?
- 2) Wie weit bestimmt ein Hauptideal seinen Erzeuger?

Zu 2) Wegen  $(x) = (y) \iff x = uy$ ,  $u \in A^\times$  müssen wir die Einheitengruppe von  $A$  bestimmen.

Zu 1)

**Definition 3.64.** Sei  $P(A) \subset J(A)$  die Untergruppe der gebrochenen Hauptideale  $\neq 0$ . Die Faktorgruppe

$$Cl(A) := J(A)/P(A)$$

heißt die **Idealklassengruppe** von  $A$ .

Wir werden  $A^\times$  und  $Cl(A)$  im Fall  $A = \mathcal{O}_K$ ,  $K$  Zahlkörper genauer untersuchen.

### 3.5 Ideallnorm

Im ganzen Abschnitt sei  $K|\mathbb{Q}$  eine endliche Erweiterung. Dann ist  $\mathcal{O}_K$  ein Dedekindring. Als abelsche Gruppe gilt (nach 3.22)  $\mathcal{O}_K \cong \mathbb{Z}^n$ ,  $n = [K : \mathbb{Q}]$ . Ist  $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ ,  $\mathfrak{a} \neq (0)$  ein Ideal und  $0 \neq \alpha \in \mathfrak{a}$ , so gilt

$$\alpha \mathcal{O}_K \subset \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$$

und deshalb auch  $\mathfrak{a} \cong \mathbb{Z}^n$ . Folglich ist  $\text{Rg}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}) = n - n = 0$  und deshalb ist  $\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$  als endlich erzeugte abelsche Gruppe vom Rang Null endlich.

**Definition 3.65.** Die **Norm** eines Ideals  $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  ist definiert durch

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 0, & \mathfrak{a} = 0, \\ \#\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}, & \mathfrak{a} \neq 0. \end{cases}$$

**Satz 3.66.** Für  $a \in \mathcal{O}_K$  gilt

$$\mathfrak{N}(a\mathcal{O}_K) = |N_{K|\mathbb{Q}}(a)|.$$

*Beweis.* Es gilt  $\mathfrak{N}(a\mathcal{O}_K) = \#\text{coker } (\varphi_a)$ ,

$$\varphi_a : \mathcal{O}_K \hookrightarrow \mathcal{O}_K, \quad x \mapsto ax.$$

Wir stellen  $\varphi_a$  bzgl. einer  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathcal{O}_K$  als Matrix dar. Basiswechsel in Quelle und Ziel mit Matrizen aus  $Gl_n(\mathbb{Z})$  lassen  $\text{coker } \varphi_a$  invariant und ändern  $\det \varphi_a$  höchstens um ein Vorzeichen. Nach dem Elementarteilersatz für den Hauptidealring  $\mathbb{Z}$  hat  $\varphi_a$  nach geeignetem Basiswechsel die Matrixform

$$\begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & e_n & \end{pmatrix}, \quad e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n.$$

Es gilt  $N_{K|\mathbb{Q}}(a) = \det \varphi_a = \pm e_1 \cdots e_n$  und

$$\text{coker } \varphi_a = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/e_n\mathbb{Z},$$

also  $\#\text{coker } \varphi_a = |e_1 \cdots e_n| = |N_{K|\mathbb{Q}}(a)|$ . □

**Lemma 3.67.** Für  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_K$  teilerfremd gilt  $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})\mathfrak{N}(\mathfrak{b})$ .

*Beweis.* Nach dem Chinesischen Restsatz gilt

$$\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cong \mathcal{O}_K/\mathfrak{a} \times \mathcal{O}_K/\mathfrak{b}. \quad \square$$

Jetzt eliminieren wir die Voraussetzung der Teilerfremdheit.

**Lemma 3.68.** Sei  $A$  ein Dedekindring und  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$  Ideale  $\neq 0$ . Dann existiert ein zu  $\mathfrak{a}$  teilerfremdes Ideal  $\mathfrak{c} \subset A$ ,  $\mathfrak{c} \neq 0$ , so dass  $\mathfrak{bc}$  ein Hauptideal ist.

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{a_1} \dots \mathfrak{p}_n^{a_n}$ ,  $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_1^{b_1} \dots \mathfrak{p}_n^{b_n}$  (Exponent 0 zugelassen). Nach 3.62 existiert für jedes  $i$  ein  $\alpha_i \in \mathfrak{p}_i^{b_i} \setminus \mathfrak{p}_i^{b_i+1}$ . Nach dem Chinesischen Restsatz finden wir  $\alpha \in A$  mit  $\alpha \equiv \alpha_i \pmod{\mathfrak{p}_i^{b_i+1}}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Die Primidealzerlegung von  $(\alpha)$  sieht so aus:

$$(\alpha) = \mathfrak{p}_1^{b_1} \dots \mathfrak{p}_n^{b_n} \cdot (\text{Produkt von Primidealen die nicht in } \mathfrak{a} \text{ und } \mathfrak{b} \text{ vorkommen})$$

Wir benennen das letzte Produkt mit  $\mathfrak{c}$ , also  $(\alpha) = \mathfrak{p}_1^{b_1} \dots \mathfrak{p}_n^{b_n} \cdot \mathfrak{c}$ .

Dann gilt  $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = A$  und  $\mathfrak{bc} = (\alpha)$ . □

**Lemma 3.69.** Seien  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$  Ideale  $\neq 0$ . Dann gibt es einen Isomorphismus von  $A$ -Moduln  $A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{b}/\mathfrak{ab}$ .

*Beweis.* Wir wählen  $\mathfrak{c}$  wie in 3.68:  $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = A$ ,  $\mathfrak{bc} = (\alpha)$ ,  $\alpha \in A$ . Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : A \longrightarrow \mathfrak{b}/\mathfrak{ab}, \quad x \longmapsto \alpha x \pmod{\mathfrak{ab}}.$$

Wegen  $\alpha \in \mathfrak{bc} \subset \mathfrak{b}$  ist die Abbildung definiert. Nun gilt

$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= \{x \in A \mid \alpha x \in \mathfrak{ab}\} \\ &= \mathfrak{ab} \cdot (\alpha)^{-1} \cap A \\ &= \mathfrak{ac}^{-1} \cap A \\ &= \mathfrak{c}^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) \\ (\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = (1)): &= \mathfrak{c}^{-1}(\mathfrak{ac}) = \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Bleibt die Surjektivität von  $\varphi$  zu zeigen: Es gilt  $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = A \Rightarrow \mathfrak{ab} + \mathfrak{bc} = \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{ab} + (\alpha) = \mathfrak{b}$ . □

**Satz 3.70.** Für Ideale  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathcal{O}_K$  gilt  $\mathfrak{N}(\mathfrak{ab}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})\mathfrak{N}(\mathfrak{b})$ .

*Beweis.* Ist  $\mathfrak{a} = 0$  oder  $\mathfrak{b} = 0$ , so ist die Aussage trivial. Sei  $\mathfrak{a} \neq 0 \neq \mathfrak{b}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(\mathfrak{ab}) &= \#\mathcal{O}_K/\mathfrak{ab} = (\#\mathcal{O}_K/\mathfrak{b})\#(\mathfrak{b}/\mathfrak{ab}) \\ 3.69: &= \mathfrak{N}(\mathfrak{b}) \cdot \#(\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}) \\ &= \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{b}). \end{aligned}$$

□

**Satz 3.71.** Sei  $K|\mathbb{Q}$  galoissch. Dann gilt

$$\prod_{\sigma \in \text{Gal}(K|\mathbb{Q})} \sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \cdot \mathcal{O}_K.$$

**Erläuterung:** Für  $\sigma \in \text{Gal}(K|\mathbb{Q})$  und  $\alpha \in \mathcal{O}_K$  gilt  $\sigma(\alpha) \in \mathcal{O}_K$ . Daher ist mit  $\mathfrak{a}$  auch  $\sigma(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{O}_K$  ein Ideal:  $\alpha \in \mathcal{O}_K, a \in \sigma(\mathfrak{a}) \Rightarrow \alpha a = \sigma(\sigma^{-1}(\alpha)a) \in \sigma(\mathfrak{a})$ .

Wir beweisen den Satz später.

Jetzt verallgemeinern wir den Begriff der Diskriminante. Wie oben sehen wir: Jedes gebrochene Ideal  $0 \neq \mathfrak{a} \subset K$  ist als abelsche Gruppe  $\cong \mathbb{Z}^n$  und für  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$  gilt:  $(\mathfrak{a}' : \mathfrak{a}) < \infty$

**Definition 3.72.** Sei  $0 \neq \mathfrak{a} \subset K$  ein gebrochenes Ideal und

$$\mathfrak{a} = \mathbb{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_n.$$

Wir setzen

$$d(\mathfrak{a}) = d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(\text{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(\alpha_i \alpha_j)).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ab. Nach 3.20 gilt  $d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(\sigma_i \alpha_j)^2$  wobei  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}})$ .

**Satz 3.73.** Sind  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}' \subset K$  gebrochene Ideale, so gilt

$$d(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}' : \mathfrak{a})^2 d(\mathfrak{a}').$$

Insbesondere gilt für ein ganzes Ideal  $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$

$$d(\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2 \cdot d_K.$$

*Beweis.* Sei  $M \in Gl_n(\mathbb{Q})$  die Basiswechselmatrix von einer Basis von  $\mathfrak{a}'$  zu einer von  $\mathfrak{a}$ . Wegen  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'$  gilt  $M \in M_{n,n}(\mathbb{Z})$ . Wir erhalten  $d(\mathfrak{a}) = \det(M)^2 \cdot d(\mathfrak{a}')$ . Durch Ändern der Basen bekommen wir  $M$  auf Diagonalform (Elementarteilersatz) und sehen

$$|\det(M)| = (\mathfrak{a}' : \mathfrak{a}).$$

Dies zeigt die erste Behauptung. Die zweite folgt, da per definitionem  $d_K = d(\mathcal{O}_K)$ ,  $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = (\mathcal{O}_K : \mathfrak{a})$ .  $\square$

## 4 Endlichkeitssätze für Zahlkörper

### 4.1 Gitter

**Definition 4.1.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ein **Gitter** in  $V$  ist eine Untergruppe der Form

$$\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + \cdots + \mathbb{Z}v_m$$

mit linear unabhängigen Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  in  $V$ . Das  $m$ -Tupel  $(v_1, \dots, v_m)$  heißt **Basis** von  $\Gamma$  und die Menge

$$\Phi = \Phi(v_1, \dots, v_m) = \{x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m \mid x_i \in \mathbb{R} \quad 0 \leq x_i \leq 1\}$$

heißt **Grundmasche**. Das Gitter heißt **vollständig**, wenn  $m = n$ .

**Bemerkungen 4.2.** 1) Begriffe wie beschränkt in  $V$ , abgeschlossen in  $V$  usw. hängen nicht von der Identifikation  $V \cong \mathbb{R}^n$  ab!

2)  $\Gamma$  ist genau dann vollständig, wenn die Translate  $\Phi + \gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ , ganz  $V$  überdecken.

3) nicht jede e.e. Untergruppe von  $V$  ist ein Gitter, z.B.  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2} \subset \mathbb{R}$  ist kein Gitter.

4) Ein Gitter ist eine *diskrete Teilmenge*, d.h. zu  $\gamma \in \Gamma$  existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $\gamma$  in  $V$  mit  $U \cap \Gamma = \{\gamma\}$ .

Grund: Ergänze  $v_1, \dots, v_m$  durch Vektoren  $v_{m+1}, \dots, v_n$  zu einer Basis von  $V$ . Für  $\gamma = a_1v_1 + \dots + a_mv_m \in \Gamma$  setze

$$U = \{x_1v_1 + \dots + x_nv_n \mid |a_i - x_i| < 1, \quad i = 1, \dots, m\}.$$

**Satz 4.3.** Eine Untergruppe  $\Gamma \subset V$  ist genau dann ein Gitter, wenn sie diskret ist.

*Beweis.* Gitter sind diskret. Sei  $\Gamma \subset V$  eine diskrete Untergruppe.

Behauptung:  $\Gamma$  hat keine Häufungspunkte in  $V$ .

Grund: Da

$$V \times V \longrightarrow V, (v, w) \longmapsto v - w,$$

stetig ist, gibt es zu jeder offenen Umgebung  $U$  der 0 eine offene Umgebung  $U'$  der 0 mit  $v, w \in U' \Rightarrow v - w \in U$ . Wäre nun  $x \in V$  ein Häufungspunkt von  $\Gamma$ , so ist nach der Definition der Durchschnitt  $(x + U') \cap \Gamma$  unendlich. Insbesondere existieren  $\gamma_1, \gamma_2 \in (x + U') \cap \Gamma$ ,  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , also  $0 \neq \gamma_1 - \gamma_2 \in U' - U' \subset U$ . Wählen wir nun  $U$  so klein, dass  $U \cap \Gamma = \{0\}$  ist, erhalten wir ein Widerspruch.

Sei nun  $V_0$  der von  $\Gamma$  in  $V$  erzeugte  $\mathbb{R}$ -Untervektorraum und  $m = \dim_{\mathbb{R}} V_0$ . Sei  $u_1, \dots, u_m$  eine in  $\Gamma$  gelegene Basis von  $V_0$ . Setze

$$\Gamma_0 = \mathbb{Z}u_1 + \dots + \mathbb{Z}u_m \subset \Gamma.$$

Dann ist  $\Gamma_0$  ein vollständiges Gitter in  $V_0$ .

Behauptung:  $(\Gamma : \Gamma_0) < \infty$ .

Beweis der Behauptung: Sei  $\Phi_0 \subset V_0$  die Grundmasche zur Basis  $u_1, \dots, u_m$  von  $\Gamma_0$ . Da  $\Gamma_0$  vollständiges Gitter in  $V_0$  ist, gilt

$$V_0 = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma + \Phi_0.$$

Möge  $\gamma_i \in \Gamma$  über ein Repräsentantensystem von  $\Gamma/\Gamma_0$  laufen. Dann schreiben wir  $\gamma_i = \mu_i + \gamma_{0i}$  mit  $\mu_i \in \Phi_0$ ,  $\gamma_{0i} \in \Gamma_0$ . Die  $\mu_i = \gamma_i - \gamma_{0i} \in \Gamma$  liegen in der beschränkten Menge  $\Phi_0$  und haben keine Häufungspunkt in  $V \Rightarrow$  es sind nur endlich viele.

Sei nun  $q = (\Gamma : \Gamma_0)$ . Dann gilt  $q\Gamma \subset \Gamma_0$ , also  $\Gamma \subset \frac{1}{q}\Gamma_0$ . Daher ist  $\Gamma$  als Untergruppe einer freien abelschen Gruppe von endlichem Rang selbst frei, d.h. es existiert eine  $\mathbb{Z}$ -Basis  $v_1, \dots, v_r$  von  $\Gamma$ ,  $r \leq m$ . Nun erzeugt  $\Gamma$  den Vektorraum  $V_0$ , also erzeugen  $v_1, \dots, v_r$  ganz  $V_0 \Rightarrow r = m$  und  $v_1, \dots, v_m$  sind linear unabhängig.  $\square$

**Lemma 4.4.** *Ein Gitter  $\Gamma \subset V$  ist genau dann vollständig wenn eine beschränkte Teilmenge  $M \subset V$  existiert, so dass*

$$V = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma + M.$$

*Beweis.* Ist  $\Gamma$  vollständig, so wähle für  $M$  eine Grundmasche. Umgekehrt sei  $M$  wie oben. Sei  $V_0$  der durch  $\Gamma$  aufgespannte Unterraum. Gilt  $V_0 = V$ , sind wir fertig. Ansonsten wählen wir eine beliebige Metrik auf  $V$ , d.h. wir machen  $V$  zu einem euklidischen Vektorraum. Da  $M$  beschränkt ist liegt jeder Punkt  $x \in V$  mit  $d(x, V_0)$  hinreichend groß nicht in  $V_0 + M \supset \Gamma + M$ . Widerspruch.  $\square$

**Definition 4.5.** Eine Teilmenge  $X \subset V$  heißt **zentralsymmetrisch**, wenn gilt:

$$x \in X \Rightarrow -x \in X,$$

und **konvex**, falls

$$x, y \in X \Rightarrow \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset X.$$

**Theorem 4.6** (Minkowskischer Gitterpunktsatz). *Sei  $\Gamma$  ein vollständiges Gitter in einem euklidischen Vektorraum  $V$  und sei  $X$  eine (meßbare) zentralsymmetrische, konvexe Teilmenge in  $V$ . Gilt*

$$\text{vol}(X) > 2^n \text{vol}(\Gamma),$$

so enthält  $X$  mindestens einen von 0 verschiedenen Gitterpunkt  $\gamma \in \Gamma$ .

*Beweis.* Es g.z.z., dass  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ ,  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , mit  $(\frac{1}{2}X + \gamma_1) \cap (\frac{1}{2}X + \gamma_2) \neq \emptyset$  existieren (nutze konvex + zentralsymmetrisch). Wären diese Teilmengen alle disjunkt, so gilt nach Schneiden mit der Grundmasche  $\Phi$ :

$$\text{vol}(\Phi) \geq \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{vol}(\Phi \cap (\frac{1}{2}X + \gamma)).$$

Nun induziert Translation mit  $-\gamma$ :

$$\text{vol}(\Phi \cap (\frac{1}{2}X + \gamma)) = \text{vol}((\Phi - \gamma) \cap \frac{1}{2}X),$$

und weil die  $(\Phi - \gamma) \cap \frac{1}{2}X$  die Menge  $\frac{1}{2}X$  disjunkt zerlegen, folgt

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Phi) &\geq \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{vol}((\Phi - \gamma) \cap \frac{1}{2}X) \\ &= \text{vol}(\frac{1}{2}X) = \frac{1}{2^n} \text{vol}(X), \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

## 4.2 Minkowski-Theorie

(altmodisch: „Geometrie der Zahlen“)

Sei  $K|\mathbb{Q}$  ein Zahlkörper,  $n = [K : \mathbb{Q}]$ . Dann gilt  $\#\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C}) = n$ .

Ziel: Wir machen den  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $K_{\mathbb{R}} := K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  zu einem euklidischen Vektorraum.

Zunächst erinnern wir an die lineare Unabhängigkeit von *Charakteren*: Sei  $G$  eine Gruppe und  $K$  ein Körper. Dann bezeichnet man einen Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow K^{\times}$  als  $K$ -wertigen Charakter der Gruppe  $G$ .

Die Menge der Abbildungen  $\text{Abb}(G, K)$  wird zum  $K$ -Vektorraum durch wertweise Addition und Skalarmultiplikation, d.h.

$$(a_1\phi_1 + a_2\phi_2)(g) := a_1\phi_1(g) + a_2\phi_2(g)$$

$\phi_1, \phi_2 \in \text{Abb}(G, K)$ ,  $a_1, a_2 \in K$ ,  $g \in G$ . Über die (Mengen)abbildung  $K^\times \hookrightarrow K$  können  $K$ -wertige Charaktere von  $G$  als Elemente des Vektorraums  $\text{Abb}(G, K)$  aufgefasst werden.

**Satz 4.7.** Verschiedene Charaktere  $\chi_1, \dots, \chi_n$  einer Gruppe  $G$  mit Werten in einen Körper  $K$  sind linear unabhängig als Elemente im  $K$ -Vektorraum  $\text{Abb}(G, K)$ .

*Beweis.* Siehe Algebra 1, 4.53 oder Bosch: „Algebra“ §4.6. Satz 2.  $\square$

Sei nun  $L|K$  und  $M|K$  Körpererweiterungen. Die Menge  $\text{Hom}_K(L, M)$  (Körperhomorphismen) ist eine Teilmenge des  $K$ -Vektorraums  $\text{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M)$  ( $K$ -Vektorraumhomomorphismen). Die  $K$ -Vektorraumstruktur setzt sich zu einer  $M$ -Vektorraumstruktur fort durch

$$(\alpha\phi)(x) = \alpha\phi(x), \quad \alpha \in M, \quad x \in L, \quad \phi \in \text{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M).$$

Auf diese Weise wird  $\text{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M)$  ein  $M$ -Untervektorraum von  $\text{Abb}(L, M)$ . Die Menge  $\text{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M)$  der  $K$ -Vektorraumhomomorphismen von  $L$  nach  $M$  ist in natürlicher Weise ein  $K$ -Vektorraum. Die  $K$ -Vektorraumstruktur setzt sich zu einer  $M$ -Vektorraumstruktur fort durch

$$(\alpha\phi)(a) = \alpha\phi(a), \quad \alpha \in M, \quad a \in L, \quad \phi \in \text{Hom}_K(L, M).$$

Auf diese Weise wird  $\text{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M)$  ein  $M$ -Untervektorraum von  $\text{Abb}(L, M)$ .

**Satz 4.8** (Algebra 2, 4.54). Es ist  $\text{Hom}_K(L, M)$  eine linear unabhängige Menge von Vektoren im  $M$ -Vektorraum  $\text{Hom}_{K\text{-VR}}(L, M) \subset \text{Abb}(L, M)$ .

Sei nun  $K$  wieder ein Zahlkörper, die Rolle von  $M$  wird durch den Körper  $\mathbb{C}$  übernommen. Wir betrachten die  $\mathbb{Q}$ -Bilinearform

$$K \times \mathbb{C} \rightarrow \prod_{\tau \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})} \mathbb{C}, \quad (x, \alpha) \mapsto ((\tau x) \cdot \alpha)_\tau.$$

Diese induziert

$$\phi : K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \longrightarrow \prod_{\tau} \mathbb{C}, \quad x \otimes \alpha \mapsto (\tau x \cdot \alpha)_\tau$$

Es ist  $\phi$  bezüglich der natürlichen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum-Strukturen von Quelle und Ziel ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraumhomomorphismus.

**Lemma 4.9.** *Es ist*

$$\phi : K_{\mathbb{C}} := K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n$$

*ein Isomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen.*

*Beweis.* Es gilt

$$\dim\left(\prod_{\tau} \mathbb{C}\right) = n \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{C}}(K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{Q}} K = n.$$

Daher genügt es zu zeigen, dass  $\phi$  injektiv ist. Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $K$ . Nach Satz 4.8 sind die  $n$  Vektoren  $(\tau x_1, \dots, \tau x_n)_{\tau \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})}$  linear unabhängig im  $\mathbb{C}^n$  (sonst gäbe es eine lineare Abhängigkeit der  $\tau$  in  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-VR}}(K, \mathbb{C})$ ). Also hat die Matrix

$$(\tau x_i)_{\substack{\tau \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C}) \\ i=1, \dots, n}} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$$

eine Determinante  $\neq 0$ , weshalb auch die Vektoren  $(\tau x_i)_{\tau}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , linear unabhängig im  $\mathbb{C}^n$  sind. Nun ist  $(x_1 \otimes 1, \dots, x_n \otimes 1)$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $K_{\mathbb{C}}$  und da die Vektoren

$$\phi(x_i \otimes 1) = (\tau x_i)_{\tau}, \quad i = 1, \dots, n,$$

linear unabhängig sind, ist  $\phi$  injektiv.  $\square$

Nun betrachten wir die komplexe Konjugation

$$F : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \bar{z}, \quad \text{Gal}(\mathbb{C}|\mathbb{R}) = \langle F \rangle.$$

$F$  induziert durch Wirkung auf der zweiten Komponente einen Automorphismus von  $K_{\mathbb{C}} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$

$$F : K_{\mathbb{C}} \longrightarrow K_{\mathbb{C}}.$$

**Lemma 4.10.** *Bezüglich des natürlichen Isomorphismus  $\phi : K_{\mathbb{C}} \cong \prod_{\tau} \mathbb{C}$  aus Lemma 4.9, ist  $F \in \text{Aut}(\prod_{\tau} \mathbb{C})$  gegeben durch*

$$F(z)_{\tau} = \bar{z}_{\bar{\tau}},$$

*wobei  $\bar{\tau} = F \circ \tau \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$ .*

*Beweis.* Klar nach Definition des natürlichen Isomorphismus  $\phi$ .  $\square$

**Lemma 4.11.** *Die natürliche Inklusion  $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$  definiert eine natürliche Inklusion*

$$K_{\mathbb{R}} := K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \hookrightarrow K_{\mathbb{C}} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

*deren Bild  $K_{\mathbb{C}}^+ \subset K_{\mathbb{C}}$  genau aus den  $F$ -invarianten Elementen besteht.*

*Beweis.* Wir betrachten den (üblichen) Isomorphismus

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)).$$

Dies ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{R}$ - und insbesondere von  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen. Daher gilt ( $\otimes$  vertauscht mit  $\oplus$ )

$$\begin{aligned} K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} &\cong K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \oplus K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \\ x \otimes z &\mapsto (x \otimes \operatorname{Re}(z), x \otimes \operatorname{Im}(z)). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite operiert  $F$  so:

- trivial auf der 1. Komponente.
- Multiplikation mit  $-1$  auf der 2. Komponente.

$\Rightarrow$  die erste Komponente  $= \operatorname{im}(K_{\mathbb{R}} \rightarrow K_{\mathbb{C}})$  besteht genau aus den  $F$ -invarianten Elementen.  $\square$

Wir erhalten hieraus das

**Korollar 4.12.** Bezuglich der natürlichen Identifikation  $\phi$  aus Lemma 4.9 und der Inklusion aus Lemma 4.11 gilt

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{R}} &\cong [\prod_{\tau} \mathbb{C}]^+ \\ &= \{z \in \prod_{\tau} \mathbb{C} \mid z_{\bar{\tau}} = \bar{z}_{\tau} \quad \forall \tau\}. \end{aligned}$$

Auf  $K_{\mathbb{C}} \cong \prod_{\tau} \mathbb{C}$  haben wir das Standard-Hermitesche Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\tau} x_{\tau} \bar{y}_{\tau}.$$

**Lemma 4.13.** Dieses Skalarprodukt ist  $F$ -äquivariant, d.h. es gilt

$$\langle Fx, Fy \rangle = F\langle x, y \rangle.$$

*Beweis.* Klar nach Einsetzen aller Definitionen.  $\square$

Nach Einschränkung auf  $[\prod_{\tau} \mathbb{C}]^+ = K_{\mathbb{R}}$  erhalten wir daher eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf  $K_{\mathbb{R}}$ , d.h.  $K_{\mathbb{R}}$  wird zum euklidischen Vektorraum.

**Definition 4.14.** Der so definierte euklidische Vektorraum  $K_{\mathbb{R}} = [\prod_{\tau} \mathbb{C}]^+$  heißt **Minkowski-Raum** und sein Skalarprodukt die **kanonische Metrik**. Das assoziierte Maß heißt das **kanonische Maß** auf  $K_{\mathbb{R}}$ .

Auf  $K_{\mathbb{C}}$  haben wir die natürliche („Spur“) Abbildung

$$\text{Sp} : \prod_{\tau} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{\tau} z_{\tau}.$$

Sei  $j : K \rightarrow K_{\mathbb{C}}$ ,  $x \mapsto x \otimes 1 = (\tau x)_{\tau}$  die natürliche Inklusion. Nach Satz 3.17 gilt

$$\text{Sp} \circ j(x) = \text{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(x).$$

Man rechnet leicht nach:  $F \circ \text{Sp} = \text{Sp} \circ F$ . Daher erhalten wir die Abbildung

$$\text{Sp} : K_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$$

und für die natürliche Inklusion  $j : K \rightarrow K_{\mathbb{R}}$  gilt  $\text{Sp} \circ j(x) = \text{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(x)$  für  $x \in K$ .

Wir suchen nun eine Identifikation

$$K_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n, \quad n = [K : \mathbb{Q}].$$

(jede  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $K$  gibt uns eine solche, aber die wollen wir nicht). Wir unterteilen die Menge  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$  in zwei Teilmengen. Die erste besteht aus

$$\rho_1, \dots, \rho_{r_1} : K \longrightarrow \mathbb{R}$$

(alle die in  $\mathbb{R}$  landen). Die anderen tauchen im Paaren auf:

$$\sigma_1, \bar{\sigma}_1, \dots, \sigma_{r_2}, \bar{\sigma}_{r_2} : K \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Wir haben also  $r_1 + 2r_2 = n = [K : \mathbb{Q}]$ . Der Buchstabe  $\rho$  bezeichne jetzt immer reelle Einbettungen. Aus jedem Paar konjugiert komplexer Einbettungen wählen wir uns willkürlich eine und bezeichnen diese stets mit  $\sigma$ . Wir erhalten (trivialerweise)

$$K_{\mathbb{R}} = \{(z)_{\tau} \in \prod_{\tau} \mathbb{C} \mid z_{\rho} \in \mathbb{R}, \quad z_{\bar{\sigma}} = \bar{z}_{\sigma}\}.$$

**Satz 4.15.** *Die Abbildung*

$$f : K_{\mathbb{R}} \longrightarrow \prod_{\tau} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n,$$

die durch

$$(z)_{\tau} \in [\prod_{\tau} \mathbb{C}]^+ \longmapsto (x)_{\tau} \in \prod_{\tau} \mathbb{R}$$

mit  $x_{\rho} = z_{\rho}$ ,  $x_{\sigma} = \text{Re}(z_{\sigma})$ ,  $x_{\bar{\sigma}} = \text{Im}(z_{\sigma})$  gegeben ist, ist ein Isomorphismus. Es transformiert  $f$  die kanonische Metrik auf  $K_{\mathbb{R}}$  in das Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\tau} \varepsilon_{\tau} x_{\tau} y_{\tau},$$

wobei

$$\varepsilon_{\tau} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \tau \text{ reell} \\ 2 & \text{wenn } \tau \text{ komplex.} \end{cases}$$

*Beweis.* Offenbar ist  $f$  injektiv und daher ein Isomorphismus. Ist nun  $(z)_\tau = (x)_\tau + i(y)_\tau \in [\prod_\tau \mathbb{C}]^+$ , und  $(z')_\tau = (x')_\tau + i(y')_\tau$ , so gilt  $z_\rho z'_\rho = x_\rho x'_\rho$  und wegen

$$y_\sigma = \operatorname{Im}(z_\sigma), \quad y_{\bar{\sigma}} = \operatorname{Im}(z_{\bar{\sigma}}) = -\operatorname{Im}(z_\sigma) = -y_\sigma, \quad x_{\bar{\sigma}} = x_\sigma$$

erhält man

$$\begin{aligned} z_\sigma z'_\sigma + z_{\bar{\sigma}} z'_{\bar{\sigma}} &= (x_\sigma + iy_\sigma)(x'_\sigma - iy_\sigma) + (x_\sigma - iy_\sigma)(x'_\sigma + iy'_\sigma) \\ &= 2(x_\sigma x'_\sigma + y_\sigma y'_\sigma). \end{aligned}$$

□

Wir identifizieren nun  $K_{\mathbb{R}}$  über  $f$  mit dem  $\mathbb{R}^n$ . Das kanonische Maß einer Teilmenge  $X \subset K_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$  hängt mit dem Standard-Lebesgue-Maß durch die Regel

$$\operatorname{vol}_{\text{kan}}(X) = 2^{r_2} \operatorname{vol}_{\text{Lebesgue}}(f(X))$$

zusammen.

**Satz 4.16.** *Sei  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  ein Ideal. Das Bild  $\Gamma = j(\mathfrak{a})$  unter der natürlichen Abbildung  $j : K \rightarrow K_{\mathbb{R}}$  ist ein vollständiges Gitter in  $K_{\mathbb{R}}$ . Die Grundmasche hat den Inhalt*

$$\operatorname{vol}(\Gamma) = \sqrt{|d_K|} \mathfrak{N}(\mathfrak{a}).$$

*Beweis.* Sei  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathfrak{a}$  so dass  $\Gamma = \mathbb{Z}j\alpha_1 + \dots + \mathbb{Z}j\alpha_n$ . Wir numerieren die Einbettungen  $\tau : K \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\tau_1, \dots, \tau_n$ , und bilden die Matrix  $A = (\tau_k \alpha_\ell)$ . Dann gilt nach Satz 3.73

$$\det(A)^2 = d(\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2 \cdot d_K.$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} (\langle j\alpha_k, j\alpha_\ell \rangle)_{k,\ell} &= \left( \sum_{i=1}^n \tau_i \alpha_k \bar{\tau}_i \alpha_\ell \right)_{k,\ell} \\ &= A \cdot \bar{A}^t. \end{aligned}$$

So erhält man

$$\operatorname{vol}(\Gamma) = |\det(\langle j\alpha_k, j\alpha_\ell \rangle)_{k,\ell}|^{1/2} = |\det A| = \sqrt{|d_K|} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{a}).$$

Insbesondere gilt  $\det A \neq 0$ , weshalb  $j\alpha_1, \dots, j\alpha_n$  linear unabhängig, also  $\Gamma$  ein vollständiges Gitter ist. □

**Theorem 4.17.** *Sei  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  ein Ideal und seien  $c_\tau > 0$ ,  $\tau \in \operatorname{Hom}(K, \mathbb{C})$ , reelle Zahlen mit  $c_\tau = c_{\bar{\tau}}$  und*

$$\prod_\tau c_\tau > \left( \frac{2}{\pi} \right)^{r_2} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \sqrt{|d_K|}.$$

*Dann gibt es ein  $a \in \mathfrak{a}$ ,  $a \neq 0$ , mit*

$$|\tau a| < c_\tau \text{ für alle } \tau \in \operatorname{Hom}(K, \mathbb{C}).$$

*Beweis.* Die Menge  $X := \{(z_\tau) \in K_{\mathbb{R}} \mid |z_\tau| < c_\tau\}$  ist zentra尔斯ymmetrisch und konvex. Mit Hilfe der Abbildung  $f : K_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \prod_{\tau} \mathbb{R}$  aus Satz 4.15 ergibt sich

$$\text{vol}_{\text{kan}}(X) = 2^{r_2} \text{vol}_{\text{Lebesgue}}(f(X)).$$

Nun ist

$$f(X) = \{(x_\tau) \in \prod_{\tau} \mathbb{R} \mid |x_\rho| < c_\rho, x_\sigma^2 + x_{\bar{\sigma}}^2 < c_\sigma^2\}$$

(= Produkt von  $r_1$  Intervallen und  $r_2$  Kreisschreiben). Also gilt

$$\text{vol}_{\text{kan}}(X) = 2^{r_2} \prod_{\rho} (2c_\rho) \cdot \prod_{\sigma} (\pi c_\sigma^2) = 2^{r_1+r_2} \pi^{r_2} \prod_{\tau} c_\tau.$$

Der Grundmascheninhalt von  $\Gamma = j\mathfrak{a}$  ist  $\sqrt{|d_K|} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{a})$ . Also gilt

$$\begin{aligned} \text{vol}_{\text{kan}}(X) &= 2^{r_1+r_2} \pi^{r_2} \prod_{\tau} c_\tau > 2^{r_1+2r_2} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \sqrt{|d_K|} \\ &= 2^n \text{vol}(\Gamma). \end{aligned}$$

Nach dem Minkowskischen Gitterpunktsatz enthält  $X$  ein  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma \neq 0$ . Nun ist per definitionem  $\gamma = ja$  für ein  $a \in \mathfrak{a}$ , und dieses  $a$  ist das Gesuchte.  $\square$

### 4.3 Die Endlichkeit der Klassenzahl

Sei  $K|\mathbb{Q}$  ein Zahlkörper. Wir setzen  $J_K = J(\mathcal{O}_K)$ ,  $P_K = P(\mathcal{O}_K)$ ,  $Cl_K = J_K/P_K$ . Wir nennen  $Cl_K$  die **Idealklassengruppe von  $K$** . Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Theorems.

**Theorem 4.18.**  $Cl_K$  ist endlich.

**Definition 4.19.**  $h_K = \#Cl_K$  heißt die **Klassenzahl** von  $K$ .

**Lemma 4.20.** In jedem Ideal  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  gibt es ein  $0 \neq a \in \mathfrak{a}$  mit

$$|N_{K|\mathbb{Q}}(a)| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|d_K|} \mathfrak{N}(\mathfrak{a}).$$

*Beweis.* Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $c_\tau > 0$ ,  $\tau \in \text{Hom}(K, \mathbb{C})$ , mit  $c_\tau = c_{\bar{\tau}}$  und

$$\prod_{\tau} c_\tau = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|d_K|} \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) + \varepsilon$$

und finden nach Theorem 4.17 ein  $0 \neq a \in \mathfrak{a}$  mit  $|\tau a| < c_\tau$  für alle  $\tau$ , also

$$|N_{K|\mathbb{Q}}(a)| = \prod_{\tau} |\tau a| < \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|d_K|} \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) + \varepsilon.$$

Nun gilt  $N_{K|\mathbb{Q}}(a) \in \mathbb{Z}$ . Ist  $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|d_K|} \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \notin \mathbb{Z}$ , so erhält man (wähle  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein) die Ungleichung (sogar mit  $<$ ). Gilt  $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|d_K|} \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}$ , so wählt man  $\varepsilon < 1$ , um die Ungleichung zu erhalten.  $\square$

*Beweis von Theorem 4.18.* Sei  $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$  ein Primideal. Wegen

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = \#(\mathcal{O}/\mathfrak{p}) \cdot 1 = 0 \in \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$$

gilt  $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \in \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ . Daher gilt  $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} \neq 0$ , also  $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$  für eine Primzahl  $p$  und  $\mathfrak{p} \mid p\mathcal{O}_K$ . Außerdem ist  $\mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$  ein endlicher Körper der Charakteristik  $p$ , weshalb  $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = p^f$  für ein  $f \in \mathbb{N}$  gilt. Da nun  $p\mathcal{O}_K$  nur endlich viele Primteiler hat, gilt für jedes  $N \in \mathbb{N}$ , dass  $\#\{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \mid N(\mathfrak{p}) \leq N\} < \infty$ .

Für beliebiges  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  gilt

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{v_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{v_n}, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p}_1)^{v_1} \cdots \mathfrak{N}(\mathfrak{p}_n)^{v_n}$$

$\Rightarrow$  für jedes  $N \in \mathbb{N}$  ist

$$\#\{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K \mid \mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \leq N\} < \infty.$$

Daher folgt das Theorem aus dem folgenden Lemma.  $\square$

**Lemma 4.21.** *Jede Idealklasse enthält ein ganzes Ideal  $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  mit*

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|d_K|}.$$

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{a}_1 \subset K$  ein beliebiger Repräsentant einer Idealklasse und  $0 \neq \gamma \in \mathcal{O}_K$  mit  $\mathfrak{b} = \gamma\mathfrak{a}_1^{-1} \subset \mathcal{O}_K$ . Nach Lemma 4.20 gibt es ein  $\alpha \in \mathfrak{b}$ ,  $\alpha \neq 0$ , mit

$$|N_{K|\mathbb{Q}}(\alpha)| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \mathfrak{N}(\mathfrak{b}) \sqrt{|d_K|}.$$

Das ganze Ideal  $\mathfrak{a} := \alpha\gamma^{-1}\mathfrak{a}_1 = \alpha\mathfrak{b}^{-1}$  liegt in der gleichen Idealklasse wie  $\mathfrak{a}_1$  und es gilt

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = |N_{K|\mathbb{Q}}(\alpha)|N(\mathfrak{b})^{-1} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|d_K|}. \quad \square$$

**Bemerkung 4.22.** Mit etwas mehr Aufwand kann die Schranke verbessert werden zu

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \leq \frac{n!}{n^n} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|d_K|}.$$

**Beispiele 4.23.** 1.)  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ . Wir haben  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$ ,  $d_K = -3$ . Jede Idealklasse enthält ein ganzes Ideal der Norm  $\leq \left(\frac{2}{\pi}\right) \sqrt{3} = 1, 10 \dots$

Davon gibt es nur eines, nämlich  $\mathcal{O}_K$  selbst  $\Rightarrow h_K = 1$ ,  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$  ist Hauptidealring.

Bemerkung:  $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$  ist kein Hauptidealring!

2)  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ .  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = 1$ ,  $d_K = -20$ . Wir wissen schon, dass  $\mathcal{O}_K$  kein Hauptidealring ist, also  $h_K \geq 2$ . Jede Idealklasse enthält ein ganzes Ideal der Norm  $\leq \left(\frac{2}{\pi}\right) \sqrt{20} = 2, 84 \dots$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = 1 \iff \mathfrak{a} = \mathcal{O}_K$$

$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = 2 \implies \mathfrak{a} \mid (2)$ . Wegen  $(2) = \mathfrak{p}^2$  mit  $\mathfrak{p} = (2, 1 + \sqrt{-5})$  und  $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = 2$  folgt  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \Rightarrow h_K \leq 2$ , also  $h_K = 2$ .

3) Wir betrachten für eine Primzahl  $p > 2$  die Fermatgleichung  $X^p + Y^p = Z^p$ . Über  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_p)} = \mathbb{Z}[\zeta_p]$  (Beweis später) können wir umformen

$$X^p = Z^p - Y^p = (Z - Y)(Z - \zeta_p Y) \dots (Z - \zeta_p^{p-1} Y).$$

Ist nun  $(x, y, z)$  eine nichttriviale (also  $xyz \neq 0$ ) ganzzahlige Lösung, so erhalten wir eine Zerlegung von  $x^p$ , die man, wenn  $\mathbb{Z}[\zeta_p]$  ein Hauptidealring ist (d.h.  $h_{\mathbb{Q}(\zeta_p)} = 1$ ) zum Widerspruch führen kann. Nun gilt

$$h_{\mathbb{Q}(\zeta_p)} = 1 \iff p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}.$$

Kummer hat gezeigt, dass man die Bedingung  $h_{\mathbb{Q}(\zeta_p)} = 1$  zu  $p \nmid h_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}$  abschwächen kann. Eine solche Primzahl heißt *reguläre Primzahl*. Die anderen Primzahlen heißen *irregulär*. Die irregulären Primzahlen  $< 100$  sind 37, 59 und 67.

Wie prüft man nun nach, ob  $p$  regulär ist?

**Definition.** Die rationale Zahl  $B_n$  in der Potenzreihenentwicklung

$$\frac{X}{e^X - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cdot \frac{X^n}{n!}$$

heißen **Bernoulli-Zahlen**.

Es gilt  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_3 = 0$  und allgemeiner  $B_{2n+1} = 0$  für  $n \geq 1$ . Die nächsten geraden Werte sind:  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_6 = \frac{1}{42}$ ,  $B_8 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_{10} = \frac{5}{66}$ ,  $B_{12} = -\frac{691}{2730}$ . Nun gilt der

**Satz (von Staudt-Clausen).** Für gerades positives  $n$  gilt

$$B_n + \sum_{(p-1) \mid n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist der Nenner von  $B_n$  (in gekürzter Schreibweise) genau durch die Primzahlen  $p$  mit  $(p-1) \mid n$  teilbar.

Wir sehen:

- 2 und 3 teilen den Nenner stets.
- $n$  gerade  $n < p - 1 \Rightarrow$  der Nenner von  $B_n$  ist prim zu  $p$ .

**Kummers Theorem.**  $p$  ist genau dann irregulär, wenn der Zähler einer der Bernoulli-Zahlen

$$B_2, B_4, \dots, B_{p-3}$$

durch  $p$  teilbar ist.

**Beispiel.**  $691 \mid B_{12} \Rightarrow 691$  ist irregulär.

- es gibt unendlich viele irreguläre Primzahlen.
- dies ist für reguläre Primzahlen nicht bekannt.
- Computerberechnungen legen „nahe“, dass etwa  $e^{-\frac{1}{2}} \cong 61\%$  aller Primzahlen regulär sind.

#### 4.4 Multiplikative Minkowski-Theorie

Wir betrachten

$$j : K^\times \hookrightarrow K_{\mathbb{C}}^\times = \prod_{\tau} \mathbb{C}^\times.$$

Wir haben die Abbildung

$$N : K_{\mathbb{C}}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad N((x_\tau)) = \prod_{\tau} x_\tau \in \mathbb{C}^\times.$$

Für  $a \in K^\times$  gilt  $N_{K|\mathbb{Q}}(a) = N(j(a))$ . Wir betrachten den „Logarithmus“

$$L : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{R}, \quad z \longmapsto \log |z|.$$

Er induziert einen surjektiven Homomorphismus  $L : K_{\mathbb{C}}^\times \rightarrow \prod_{\tau} \mathbb{R}$  und wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} K^\times & \xrightarrow{j} & K_{\mathbb{C}}^\times & \xrightarrow{L} & \prod_{\tau} \mathbb{R} \\ \downarrow N_{K|\mathbb{Q}} & & \downarrow N & & \downarrow \text{Sp} \\ \mathbb{Q}^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}. \end{array}$$

Auf allen Objekten wirkt die komplexe Konjugation  $F$ :

- auf  $K^\times$ ,  $\mathbb{Q}^\times$  und  $\mathbb{R}$  trivial,
- auf  $\mathbb{C}^\times$  wie üblich,
- auf  $K_{\mathbb{C}}^\times$  durch  $F(z)_\tau = \bar{z}_{\bar{\tau}}$ ; siehe Lemma 4.10,
- auf  $\prod_{\tau} \mathbb{R}$  durch  $(F(x))_\tau = x_{\bar{\tau}}$ .

Alle Abbildungen im Diagramm vertauschen mit  $F$ .

Übergang zu den Fixpunkten unter  $F$  ergibt das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} K^\times & \xrightarrow{j} & K_{\mathbb{R}}^\times & \xrightarrow{L} & [\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+ \\ \downarrow N_{K|\mathbb{Q}} & & \downarrow N & & \downarrow \text{Sp} \\ \mathbb{Q}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}. \end{array}$$

Der Vektorraum  $[\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+$  ist explizit wie folgt gegeben. Wir teilen die  $\tau : K \rightarrow \mathbb{C}$  wieder in die reellen  $\rho_1, \dots, \rho_{r_1}$  und die Paare  $\sigma_1, \bar{\sigma}_1, \dots, \sigma_{r_2}, \bar{\sigma}_{r_2}$  komplex-konjugierter Einbettungen ein und erhalten

$$[\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+ = \prod_{\rho} \mathbb{R} \times \prod_{\sigma} [\mathbb{R} \times \mathbb{R}]^+,$$

wobei der Faktor  $[\mathbb{R} \times \mathbb{R}]^+$  aus den Elementen der Form  $(x, x)$  besteht. Wir benutzen den Isomorphismus  $[\mathbb{R} \times \mathbb{R}]^+ \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ ,  $(x, x) \mapsto 2x$  und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+ & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R}^{r_1+r_2} \\ \downarrow \text{Sp} & & \downarrow \text{Sp} \quad (= \Sigma \text{ der Koo}) \\ \mathbb{R} & = & \mathbb{R}. \end{array}$$

Nach dieser Identifizierung erhalten wir den Homomorphismus  $L$  in der Form

$$L : K_{\mathbb{R}}^\times \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1+r_2},$$

$$(x_{\tau}) \longmapsto (\log |x_{\rho_1}|, \dots, \log |x_{\rho_{r_1}}|, \log |x_{\sigma_1}|^2, \dots, \log |x_{\sigma_{r_2}}|^2).$$

## 4.5 Der Dirichletsche Einheitensatz

Sei  $K|\mathbb{Q}$  ein Zahlkörper und  $E_K := \mathcal{O}_K^\times$  seine Einheitengruppe.

**Lemma 4.24.** *Sei  $x \in \mathcal{O}_K$ . Dann gilt*

$$x \in E_K \iff N_{K|\mathbb{Q}}(x) = \pm 1$$

*Beweis.* Es gilt

$$x \in E_K \iff (x) = \mathcal{O}_K \iff \mathfrak{N}((x)) = 1 \iff |N_{K|\mathbb{Q}}(x)| = 1. \quad \square$$

Wir erinnern uns an das kommutative Diagramm aus Abschnitt 4.4

$$\begin{array}{ccccc} K^\times & \xrightarrow{j} & K_{\mathbb{R}}^\times & \xrightarrow{L} & [\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+ \\ N_{K|\mathbb{Q}} \downarrow & & \downarrow N & & \downarrow \text{Sp} \\ \mathbb{Q}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times & \xrightarrow{\log|.|} & \mathbb{R} \end{array}$$

und definieren

$$S = \{y \in K_{\mathbb{R}}^{\times} \mid N(y) = \pm 1\}$$

(die „Norm 1-Fläche“) und

$$H = \{x \in [\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+ \mid \text{Sp}(x) = 0\}$$

(die „Spur-0-Hyperebene“).  $H$  ist ein  $r_1 + r_2 - 1$ -dimensionaler reeller Vektorraum.

Wir erhalten Homomorphismen

$$E_K \xrightarrow{j} S \xrightarrow{L} H$$

und setzen  $\lambda = L \circ j : E_K \rightarrow H$  und  $\Gamma := \lambda(E_K) \subset H$ .

**Satz 4.25.** *Die Folge*

$$1 \longrightarrow \mu(K) \longrightarrow E_K \xrightarrow{\lambda} \Gamma \longrightarrow 0,$$

wobei  $\mu(K)$  die Untergruppe der Einheitswurzeln in  $K^{\times}$  bezeichnet, ist exakt. Es ist  $\mu(K)$  eine endliche, zyklische Gruppe.

*Beweis.* Z.z.:  $\mu(K) = \ker(\lambda)$ . Sei  $\zeta \in \mu(K) \subset E_K$ . Dann gilt  $\zeta^m = 1$  für ein  $m \in \mathbb{N}$  und daher für jedes  $\tau \in \text{Hom}(K, \mathbb{C})$ :

$$m \log |\tau\zeta| = \log |\tau\zeta^m| = \log 1 = 0$$

also

$$\log |\tau\zeta| = 0 \implies \mu(K) \subset \ker(\lambda).$$

Sei umgekehrt  $\varepsilon \in \ker(\lambda)$ . Dann gilt  $|\tau\varepsilon| = 1 \ \forall \tau$ , d.h.  $j\varepsilon$  liegt in einem beschränkten Gebiet in  $K_{\mathbb{R}}$ . Andererseits gilt  $j\varepsilon \in j\mathcal{O}_K = \text{Gitter in } K_{\mathbb{R}}$ . Daher ist  $\ker(\lambda)$  eine endliche Untergruppe in  $K^{\times}$ , und damit jedes Element in  $\ker(\lambda)$  eine Einheitswurzel. Schließlich wurde in der Algebra 1-Vorlesung (3.105) bewiesen, dass jede endliche Untergruppe in  $K^{\times}$  zyklisch ist.  $\square$

**Bemerkung 4.26.** Es gibt sehr wohl Elemente  $x \in K^{\times}$  mit  $|\tau x| = 1$  für alle  $\tau$ , die keine Einheitswurzeln sind.

**Lemma 4.27.** *Bis auf Assoziierte gibt es nur endlich viele Elemente  $\alpha \in \mathcal{O}_K$  mit gegebener Norm  $N_{K|\mathbb{Q}}(\alpha) = a$ .*

*Beweis.* Es ist  $\alpha$  bis auf Assoziierte durch das Hauptideal  $(\alpha)$  bestimmt. Nun haben wir im Beweis von Theorem 4.18 schon gesehen, dass es nur endlich viele ganze Ideale mit beschränkter Norm gibt.  $\square$

**Satz 4.28.**  *$\Gamma$  ist ein vollständiges Gitter im  $(r_1 + r_2 - 1)$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $H$ , ist also insbesondere isomorph zu  $\mathbb{Z}^{r_1+r_2+1}$ .*

*Beweis.* Sei  $c > 0$  beliebig und

$$D_c = \{(x_\tau) \in [\prod_\tau \mathbb{R}]^+ ; |x_\tau| \leq c\}.$$

Dann gilt

$$L^{-1}(D_c) = \{(z_\tau) \in K_{\mathbb{R}}^\times = \prod_\tau \mathbb{C}^\times ; e^{-c} \leq |z_\tau| \leq e^c\},$$

und deshalb

$$L^{-1}(D_c) \cap jE_K \subset L^{-1}(D_c) \cap j\mathcal{O}_K.$$

Letzteres ist endlich, da  $j\mathcal{O}_K$  Gitter in  $K_{\mathbb{R}}$  und  $D_c \subset K_{\mathbb{R}}$  beschränkt ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} D_c \cap \Gamma &= D_c \cap L(jE_K) \\ &= L(L^{-1}(D_c) \cap jE_K) \\ &= \text{endlich.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass  $\Gamma$  diskret in  $[\prod_\tau \mathbb{R}]^+$  ist. Nach Satz 4.3 ist  $\Gamma$  somit ein Gitter.

Offenbar gilt  $\Gamma \subset H = \text{Spur-0-Hyperfläche}.$

Noch z.z.:  $\Gamma$  ist vollständiges Gitter in  $H$ . Nach Lemma 4.4 genügt es eine beschränkte Teilmenge  $M \subset H$  mit

$$H = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma + M$$

zu finden. Wir konstruieren eine beschränkte Teilmenge

$$T \subset S = \{y \in K_{\mathbb{R}}^\times \mid N(y) = \pm 1\}$$

so dass

$$S = \bigcup_{\varepsilon \in E_K} T \cdot j(\varepsilon)$$

gilt. Für  $x = (x_\tau) \in T$  sind die Beträge  $|x_\tau|$  nach oben beschränkt, und wegen  $\prod_\tau |x_\tau| = 1$  auch nach unten, d.h.  $M := L(T) \subset [\prod_\tau \mathbb{R}]^+$  ist beschränkt. Da  $L: S \rightarrow H$  surjektiv ist, folgt dann

$$H = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma + M.$$

Bleibt  $T$  zu konstruieren. Wir wählen wie in Theorem 4.17 reelle Zahlen  $c_\tau > 0$ ,  $\tau \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \mathbb{C})$ , mit  $c_\tau = c_{\bar{\tau}}$  und

$$C = \prod_\tau c_\tau > \left(\frac{2}{\pi}\right)^{r_2} \sqrt{|d_K|}.$$

Wir betrachten die Menge

$$X = \{(z_\tau) \in K_{\mathbb{R}} \mid |z_\tau| < c_\tau \ \forall \tau\}.$$

Für  $y = (y_\tau) \in S$  beliebig gilt

$$Xy = \{(z_\tau) \in K_{\mathbb{R}} \mid |z_\tau| < c'_\tau \ \forall \tau\}$$

mit  $c'_\tau = c_\tau \cdot |y_\tau|$ . Es gilt  $c'_{\bar{\tau}} = c'_\tau$  und

$$\begin{aligned} \prod_\tau c'_\tau &= \prod_\tau c_\tau \cdot \prod_\tau |y_\tau| \\ &= C \cdot |N(y)| = C. \end{aligned}$$

Nach Theorem 4.17 gibt es zu jedem  $y \in S$  ein  $0 \neq a \in \mathcal{O}_K$  mit  $j(a) = (\tau a) \in Xy$ . Wir wählen nun gemäß Lemma 4.27  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathcal{O}_K$ ,  $\alpha_i \neq 0$ , so dass jedes  $a \in \mathcal{O}_K$ ,  $a \neq 0$ , mit  $|N_{K|\mathbb{Q}}(a)| \leq C$  zu einem der  $\alpha_i$  assoziiert ist. Wir betrachten die Menge

$$T := S \cap \bigcup_{i=1}^N X(j\alpha_i)^{-1}$$

1.  $T$  ist beschränkt: Klar, da  $X$  beschränkt.

2.  $S = \bigcup_{\varepsilon \in E_K} Tj\varepsilon$ .

Sei  $y \in S$  beliebig. Wir finden (s.o.) ein  $0 \neq a \in \mathcal{O}_K$  mit  $ja = (\tau a) \in Xy^{-1}$ , d.h.  $ja = xy^{-1}$  für ein  $x \in X$ . Wegen

$$\begin{aligned} |N_{K|\mathbb{Q}}(a)| &= |N(xy^{-1})| = |N(x)| \\ &< \prod_\tau c_\tau = C \end{aligned}$$

ist  $a$  zu einem der  $\alpha_i$  assoziiert,  $\alpha_i = \varepsilon a$ ,  $\varepsilon \in E_K$ . Es folgt

$$y = xja^{-1} = xj(\varepsilon\alpha_i^{-1}).$$

Wegen  $y, j\varepsilon \in S$  ist

$$xj(\alpha_i^{-1}) \in S \cap Xj(\alpha_i^{-1}) \subset T,$$

also  $y \in Tj(\varepsilon)$ . □

**Theorem 4.29** (Dirichletscher Einheitensatz). *Es gilt*

$$E_K \cong \mu(K) \oplus \mathbb{Z}^{r_1+r_2-1}$$

und  $\mu(K)$  ist endlich zyklisch.

*Beweis.* Wir betrachten wir die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mu(K) \longrightarrow E_K \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0,$$

die wegen der Freiheit von  $\Gamma$  zerfällt.  $\square$

Nach der Identifikation  $[\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+ \cong \mathbb{R}^{r_1+r_2}$  wird  $H = \ker(\text{Sp} : [\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+ \rightarrow \mathbb{R})$  zu einem euklidischen Vektorraum.

**Ziel:** Berechnung des Grundmascheninhalts von  $\lambda(E_K) \subset H$ .

Sei  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}$ ,  $r = r_1 + r_2$ , ein *System von Grundeinheiten* von  $K$ , d.h.

$$E_K = \langle \mu(K), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1} \rangle.$$

Dann spannen  $\lambda_1(\varepsilon_1), \dots, \lambda(r-1)$  eine Grundmasche von  $\lambda(E_K)$  auf. Der Vektor

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{r}}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^r$$

ist orthogonal zu  $H$  und hat Länge 1. Daher gilt

$$\text{vol}_{\mathbb{R}^{r-1}}(\lambda(\varepsilon_1)\mathbb{Z} + \dots + \lambda(r-1)\mathbb{Z}) = \text{vol}_{\mathbb{R}^r}(\lambda_0\mathbb{Z} + \lambda(\varepsilon_1)\mathbb{Z} + \dots + \lambda(r-1)\mathbb{Z})$$

$$= \pm \det \begin{pmatrix} \lambda_{0,1} & \lambda_1(\varepsilon_1) & \lambda_1(\varepsilon_{r-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{0,r} & \lambda_r(\varepsilon_1) & \lambda_r(\varepsilon_{r-1}) \end{pmatrix}$$

Addiert man alle anderen Zeilen zu einer fest gewählten, so entsteht dort überall 0, außer an der ersten Stelle, wo  $\frac{1}{\sqrt{r}} \cdot r = \sqrt{r}$  entsteht. Wir erhalten

**Theorem 4.30.** *Der Grundmascheninhalt des Einheitengitters  $\lambda(E_K)$  in  $H$  ist*

$$\text{vol}(\lambda(E_K)) = \sqrt{r_1 + r_2} \cdot R,$$

wobei  $R$  der Determinantenbetrag eines beliebigen Minors vom Rang  $r-1$  der Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(\varepsilon_1) & \dots & \lambda_1(\varepsilon_{r-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_r(\varepsilon_1) & & \lambda_r(\varepsilon_{r-1}) \end{pmatrix}$$

ist.  $R$  heißt der **Regulator** von  $K$ .

**Bemerkungen 4.31.** • Mit mehr Mühe erhält man eine *effektive* Version des Dirichletschen Einheitsatzes.

• Die Berechnung der Einheitengruppe bleibt kompliziert und wird i.A. nur mit Computerunterstützung und für „kleine“ Zahlkörper möglich sein.

Am Beispiel quadratischer Zahlkörper:

1. imaginär quadratische Zahlkörper:  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ,  $d < 0$ .

Dirichletscher Einheitensatz:  $E_K = \mu(K)$ .

Nun gilt  $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$  und  $\varphi(n) \leq 2 \iff n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

$$\zeta_4 \in K \implies K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$$

$$\zeta_3 \in K \implies K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}).$$

Beachte:  $-\zeta_3$  ist primitive 6-te Einheitswurzel. Daher gilt

$$E_K = \begin{cases} \mu_4 & K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}) \\ \mu_6 & K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) \\ \mu_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. reell-quadratische Zahlkörper:

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}), \quad d > 1.$$

Dirichletscher Einheitensatz:

$$E_K = \mu_2 \oplus \mathbb{Z}.$$

gesucht: eine Grundeinheit  $\varepsilon$ , d.h. eine solche Einheit mit

$$E_K = \pm \varepsilon^a, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Wir wählen eine Einbettung  $K \hookrightarrow \mathbb{R}$  fest. Da mit  $\varepsilon$  auch  $-\varepsilon$ ,  $\varepsilon^{-1}$ ,  $-\varepsilon^{-1}$  Grund единицen sind, sei ohne Einschränkung  $\varepsilon > 1$ . Die Einheiten  $> 1$  sind dann genau die Potenzen  $\varepsilon^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wir erhalten

**Lemma 4.32.** (i) Für festes  $M > 1$  gibt es nur endlich viele Einheiten  $e \in E_K$  mit  $1 < e < M$ .

(ii) Für  $M \gg 0$  ist diese Menge nicht leer.

(iii) Die Grundeinheit  $\varepsilon$  ist die kleinste dieser Einheiten.

Dies bringt uns einen Algorithmus zur Bestimmung von  $\varepsilon$ . Sei  $\sigma : K \rightarrow K$ ,  $\sqrt{d} \mapsto -\sqrt{d}$ , d.h.  $\text{Gal}(K|\mathbb{Q}) = \langle \sigma \rangle$ . Für  $e \in E_K$ ,  $1 < e < M$  gilt  $N(e) \in \mathbb{Z}^\times = \pm 1$ . Wegen  $e > 1$  folgt  $-1 < \sigma(e) < +1$ .

Wir erhalten  $0 < \text{Sp}(e) = e + \sigma(e) < M + 1$ . Nun ist  $e$  Nullstelle des Polynoms

$$X^2 - \text{Sp}(e)X + N(e)$$

und es gibt nur endlich viele Möglichkeiten für dieses Polynom, also für  $e$ .

**Beispiel 4.33.**  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ : Setze  $M = 3$ . Polynome:  $X^2 - aX \pm 1$  mit  $0 < a < 4$ .

Nullstellen:  $+\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 \pm 4}$ .

$a = 1$ : Nullstelle liegt nicht in  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$a = 2: \text{Nullstelle} = \begin{cases} 1 \pm 0 \\ 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{8} = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

$a = 3$ : Nullstelle nicht in  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .

Wegen  $(1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) = -1$  ist  $(1 + \sqrt{2})$  die Grundeinheit.

**Beispiel 4.34.** Die Koeffizienten der Grundeinheit  $\varepsilon$  können schnell groß werden. So gilt z.B. für  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{94})$ :  $\varepsilon = 2143295 + 221064\sqrt{94}$ .

## 5 Erweiterung von Dedekindringen

Sei  $A$  ein Dedekindring,  $K = \mathbb{Q}(A)$ .  $L|K$  endlich separabel und  $B = A_L$ . Dann ist  $B$  eine endliche  $A$ -Algebra (Satz 3.29).

### 5.1 Erweiterung von Idealen

**Definition 5.1.** Sei  $\mathfrak{a} \subset K$  ein gebrochenes Ideal. Dann bezeichnet  $\mathfrak{a}B \subset L$  den durch  $\mathfrak{a}$  erzeugten  $B$ -Untermodul von  $L$ .

**Bemerkungen 5.2.** •  $\mathfrak{a}$  ist e.e.  $A$ -Modul  $\Rightarrow \mathfrak{a}B$  ist e.e.  $B$ -Modul, d.h.  $\mathfrak{a}B$  ist ein gebrochenes Ideal in  $L$ .

- $\mathfrak{a} \subset A \Rightarrow \mathfrak{a}B \subset B$ .
- $\mathfrak{a}B = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{a} = 0$ .
- $\mathfrak{a}$  Hauptideal  $\Rightarrow \mathfrak{a}B$  Hauptideal.

**Lemma 5.3.** Ist  $\mathfrak{p} \subset A$  ein Primideal, so gilt  $\mathfrak{p}B \neq B$ .

*Beweis.* Sei  $\pi \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$  (es gilt  $\mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{p}$  und  $\mathfrak{p}^2 \neq \mathfrak{p}$  wegen der eindeutigen Primzerlegung). Dann gilt  $\pi A = \mathfrak{a}\mathfrak{p}$  mit  $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a}$ , d.h.  $\mathfrak{a} + \mathfrak{p} = A$ . Wähle  $a \in \mathfrak{a}$ ,  $b \in \mathfrak{p}$  mit  $a + b = 1$ . Wegen  $1 \notin \mathfrak{p}$  folgt  $a \notin \mathfrak{p}$  und  $a\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}\mathfrak{p} = \pi A$ . Wäre nun  $\mathfrak{p}B = B$  so folgte  $aB = a\mathfrak{p}B \subset \pi B$ , also  $a = \pi \cdot x$  mit  $x \in B \cap K = A$ , also  $a \in \pi A \subset \mathfrak{p}$  Widerspruch.  $\square$

**Lemma 5.4.** Für  $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset K$  gilt

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})B = (\mathfrak{a}B) \cdot (\mathfrak{b}B).$$

*Beweis.* Einsetzen der Definitionen.  $\square$

**Lemma 5.5.** Sind  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$  teilerfremd, so auch  $\mathfrak{a}B$  und  $\mathfrak{b}B$ .

*Beweis.*  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A \Rightarrow a + b = 1$  für  $a \in \mathfrak{a}$  und  $b \in \mathfrak{b}$ . Nun gilt  $a \in \mathfrak{a}B$ ,  $b \in \mathfrak{b}B \Rightarrow (\mathfrak{a}B + \mathfrak{b}B) = B$ .  $\square$

**Satz 5.6.**  $\mathfrak{a}B = \mathfrak{b}B \Leftrightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ .

*Beweis.*  $\Leftarrow$  trivial.

$\Rightarrow$  wegen Lemma 5.4 können wir beide Seiten mit  $\mathfrak{b}^{-1}$  multiplizieren. Daher sei ohne Einschränkung  $\mathfrak{b} = (1)$ .

Annahme:  $\mathfrak{a}B = B$ .

Sei  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_n^{e_n}$ ,  $e_i \in \mathbb{Z}$ , die Primzerlegung des gebrochenen Ideals  $\mathfrak{a}$ . Dann gilt  $B = \mathfrak{a}B = (\mathfrak{p}_1 B)^{e_1} \dots (\mathfrak{p}_n B)^{e_n}$ . Nach Umnummerierung gelte  $e_1, \dots, e_m > 0$ ,  $e_{m+1}, \dots, e_n < 0$ . Dann folgt

$$(\mathfrak{p}_1 B)^{e_1} \dots (\mathfrak{p}_m B)^{e_m} = (\mathfrak{p}_{m+1} B)^{-e_{m+1}} \dots (\mathfrak{p}_n B)^{-e_n}.$$

Nach Lemma 5.5 sind aber beide Seiten teilerfremd. Hieraus folgt  $n = 0$ , also  $\mathfrak{a} = (1)$ .  $\square$

**Korollar 5.7.** Die Zuordnung  $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}B$  induziert einen injektiven Homomorphismus

$$J(A) \hookrightarrow J(B).$$

Da  $P(A)$  nach  $P(B)$  abgebildet wird, erhalten wir einen Homomorphismus.

$$Cl(A) \longrightarrow Cl(B).$$

Dieser ist i.A. nicht injektiv.

## 5.2 Trägheitsgrad und Verzweigungsindex

Sei  $A \subset B$  wie vorher,  $\mathfrak{p} \subset A$  ein Primideal. Der Kürze halber schreiben wir  $\mathfrak{p}$  statt  $\mathfrak{p}B$ . Sei

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_g^{e_g}$$

die eindeutige Primzerlegung von  $\mathfrak{p}$  in  $B$ . Die auftauchenden Primideale  $\mathfrak{P}_i$  sind genau die Primideale  $\mathfrak{P} \subset B$  mit  $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ , also genau die mit  $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ . Man sagt,  $\mathfrak{P}$  liege über  $\mathfrak{p}$ . Die Vielfachheit, mit der  $\mathfrak{P}$  in der Primzerlegung von  $\mathfrak{p}$  auftaucht, heißt der **Verzweigungsindex von  $\mathfrak{P}$** .  $B/\mathfrak{P}$  ist eine endliche Erweiterung des Körpers  $A/\mathfrak{p}$ .  $f = [B/\mathfrak{P} : A/\mathfrak{p}]$  heißt der **Trägheitsgrad** von  $\mathfrak{P}$ .

Für ein Ideal  $\mathfrak{a} \subset A$  und einen  $A$ -Modul  $N$  sei

$$\mathfrak{a}N = \left\{ \sum_{\text{endl.}} \alpha_i n_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a}, n_i \in N \right\} \subset N.$$

**Lemma 5.8.** Sei  $N$  ein e.e.  $A$ -Modul und  $\mathfrak{a} \subset A$  ein Ideal. Gilt  $\mathfrak{a}N = N$ , so gibt es ein  $a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$  mit  $aN = 0$ .

*Beweis.* Siehe Algebra II, Kor. 2.7.  $\square$

**Satz 5.9.** Sei  $A$  ein Dedekindring mit Quotientenkörper  $K$  und  $L|K$  endlich separabel. Sei  $B = A_L$ ,  $\mathfrak{p} \subset A$  ein Primideal und

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}$$

die eindeutige Primzerlegung von  $\mathfrak{p}$  in  $B$ . Dann gilt  $\sum_{i=1}^g e_i f_i = n := [L : K]$ .

*Beweis.* Es gilt (Chinesischer Restsatz)

$$B/\mathfrak{p}B \cong \prod_{i=1}^g B/\mathfrak{P}_i^{e_i}.$$

Wir zeigen: (i)  $\dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{p}B = n$ .

(ii)  $\dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{P}_i^{e_i} = e_i f_i$ .

Zu (i). Seien  $\omega_1, \dots, \omega_m \in B$  Repräsentanten einer  $A/\mathfrak{p}$ -Basis von  $B/\mathfrak{p}B$  ( $B$  ist endliche  $A$ -Algebra, also  $B/\mathfrak{p}B$  ein e.d.  $A/\mathfrak{p}$ -Vektorraum).

Wir zeigen:  $\omega_1, \dots, \omega_m$  ist eine  $K$ -Basis von  $L$ .

a) lineare Unabhängigkeit. Angenommen  $\omega_1, \dots, \omega_m$  wären linear abhängig. Dann existieren  $a_1, \dots, a_m \in A$  nicht alle 0 mit  $a_1\omega_1 + \dots + a_m\omega_m = 0$ . Setze  $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_m) \subset A$  und wähle  $a \in \mathfrak{a}^{-1} \setminus \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{p}$ .

Dann gilt  $a\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$ . Die Elemente  $aa_1, \dots, aa_m$  liegen in  $A$ , nicht alle in  $\mathfrak{p}$ . Die Kongruenz

$$aa_1\omega_1 + \dots + aa_m\omega_m \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

gibt uns eine lineare Abhängigkeit von  $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m$  Widerspruch.

b)  $\omega_1, \dots, \omega_m$  erzeugen  $L$  über  $K$ .

Wir betrachten den  $A$ -Modul  $M := A\omega_1 + \dots + A\omega_m \subset L$  und setzen  $N = B/M$ . Da  $\omega_1, \dots, \omega_m$  den  $A/\mathfrak{p}$ -Modul  $B/\mathfrak{p}B$  erzeugen, gilt  $B = M + \mathfrak{p}B$ . Es folgt  $\mathfrak{p}N = N$ .

Nach Lemma 5.8 existiert ein  $a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$  (insbesondere  $a \neq 0$ ) mit  $aN = 0$ . Also  $aB \subset M$  und  $\omega_1, \dots, \omega_m$  erzeugen  $L$  über  $K$ .

(ii) Wir betrachten die absteigende Kette von  $A/\mathfrak{p}$ -Vektorräumen

$$B/\mathfrak{P}_i^{e_i} \supset \mathfrak{P}_i/\mathfrak{P}_i^{e_i} \supset \cdots \supset \mathfrak{P}_i^{e_i-1}/\mathfrak{P}_i^{e_i} \supset \mathfrak{P}_i^{e_i}/\mathfrak{P}_i^{e_i} = 0$$

und erhalten die Dimensionsformel

$$\dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{P}_i^{e_i} = \sum_{j=1}^{e_i} \dim_{A/\mathfrak{p}} \mathfrak{P}_i^{j-1}/\mathfrak{P}_i^j.$$

Es genügt daher zu zeigen:

$$\dim_{A/\mathfrak{p}} \mathfrak{P}_i^{j-1}/\mathfrak{P}_i^j = \dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{P}_i = f_i, \text{ für } j = 1, \dots, e_i.$$

Wähle  $\alpha \in \mathfrak{P}_i^{j-1} \setminus \mathfrak{P}_i^j$  und betrachte  $\varphi : B \rightarrow \mathfrak{P}_i^{j-1}/\mathfrak{P}_i^j$ ,  $b \mapsto b\alpha$ .

Es ist  $\varphi$  surjektiv, weil

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_i^j + (\alpha) &= \text{ggT}(\mathfrak{P}_i^j, (\alpha)) \\ &= \text{ggT}(\mathfrak{P}_i^j, \mathfrak{P}_i^{j-1} \cdot (\text{Rest, prim zu } \mathfrak{P}_i)) \\ &= \mathfrak{P}_i^{j-1}. \end{aligned}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned} \ker(\varphi) &= \{b \in B \mid b\alpha \in \mathfrak{P}_i^j\} \\ &= \{b \in B \mid \mathfrak{P}_i \mid (b)\} \\ &= \mathfrak{P}_i. \end{aligned}$$

$$\implies B/\mathfrak{P}_i \xrightarrow{\sim} \mathfrak{P}_i^{j-1}/\mathfrak{P}_i^j \implies \text{Dimensionsformel.} \quad \square$$

Für späteren Gebrauch:

Sei  $M|L$  eine endliche separable Erweiterung und  $C = A_M$ .

**Lemma 5.10.** *Sei  $\mathfrak{P} \subset C$  ein Primideal. Dann gilt*

$$e_{\mathfrak{P}}(M|L) \cdot e_{\mathfrak{P} \cap B}(L|K) = e_{\mathfrak{P}}(M|K)$$

$$f_{\mathfrak{P}}(M|L) \cdot f_{\mathfrak{P} \cap B}(L|K) = f_{\mathfrak{P}}(M|K).$$

*Beweis.*  $\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}(M|L)}$  ist die genaue  $\mathfrak{P}$ -Potenz in  $(\mathfrak{P} \cap B) \cdot C$ .  $(\mathfrak{P} \cap B)^{e_{\mathfrak{P} \cap B}(L|K)}$  ist die genaue  $\mathfrak{P} \cap B$ -Potenz in  $(\mathfrak{P} \cap A) \cdot B$ . Daher ist  $(\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}(M|L)})^{e_{\mathfrak{P} \cap B}(L|K)}$  die genaue  $\mathfrak{P}$ -Potenz in  $(\mathfrak{P} \cap A) \cdot C$ . Dies zeigt die Aussage über  $e$ 's. Die zweite Aussage folgt aus

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{P}}(M|K) &= [C/\mathfrak{P} : A/(\mathfrak{P} \cap A)] \\ &= [C/\mathfrak{P} : B/(B \cap \mathfrak{P})] \cdot [B/(B \cap \mathfrak{P}) : A/A \cap \mathfrak{P}]. \end{aligned}$$

$\square$

Wie erhält man die Zerlegung? Dies ist im allgemeinen schwierig. Nach dem Satz über das primitive Element existiert ein  $\theta \in L$  mit  $L = K(\theta) = K[\theta]$ . Nach Multiplikation mit einem geeigneten Element aus  $A$  können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $\theta$  ganz ist, d.h. wir haben für das Minimalpolynom  $p = p_\theta \in A[X]$ . Es gilt  $A[\theta] \subset B$ .

**Definition 5.11.** Das Ideal

$$\mathcal{F} = \{b \in B \mid bB \subset A[\theta]\}$$

heißt der **Führer** von  $A[\theta]$  in  $B$ .  $\mathcal{F}$  ist das größte Ideal von  $B$ , das in  $A[\theta]$  liegt.

**Lemma 5.12.**  $\mathcal{F} \neq 0$ .

*Beweis.* Jedes  $b \in B$  hat die Form

$$b = a_0 + a_1\theta + \cdots + a_{n-1}\theta^{n-1} \quad \text{mit } a_i \in K.$$

Also  $ab \in A[\theta]$  für ein geeignetes  $0 \neq a \in A$ . Ist nun  $b_1, \dots, b_m$  ein Erzeugendensystem von  $B$  als  $A$ -Modul und  $a_i b_i \in A[\theta]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , so gilt  $a_1 \cdots a_m b_i \in A[\theta]$  für  $i = 1, \dots, m$  also  $a_1 \cdots a_m \in \mathcal{F}$ .  $\square$

**Satz 5.13.** Sei  $\mathfrak{p} \subset A$  prim zum Führer  $\mathcal{F}$  von  $A[\theta]$  in  $B$ ,  $p \in A[X]$  das Minimalpolynom von  $\theta$  über  $K$ ,  $\bar{p} \in A/\mathfrak{p}[X]$  das Bild von  $p$  und

$$\bar{p} = \bar{p}_1^{e_1} \cdots \bar{p}_g^{e_g} \in A/\mathfrak{p}[X]$$

die eindeutige Zerlegung von  $\bar{p}$  in Potenzen irreduzibler normierter Polynome. Seien  $p_1, \dots, p_g \in A[X]$  normierte Vertreter von  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_g$ . Dann sind die Ideale

$$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}B + p_i(\theta)B, \quad i = 1, \dots, g,$$

die Primideale über  $\mathfrak{p}$  in  $B$ . Der Trägheitsgrad  $f_i$  von  $\mathfrak{P}_i$  ist der Grad von  $\bar{p}_i$  und es gilt

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}.$$

*Vorbemerkung zum Beweis:* Ist  $\mathfrak{b} \subset B$  ein ganzes Ideal, so sind die Primteiler von  $\mathfrak{b} \cap A$  genau die Primideale  $\mathfrak{p} \subset A$  mit  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$  für ein Primideal  $\mathfrak{P} \subset B$  mit  $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{b}$ .

*Beweis der Vorbemerkung:* Sei  $\mathfrak{b} = \prod \mathfrak{P}_i^{e_i} = \bigcap \mathfrak{P}_i^{e_i}$ . Dann gilt

$$\mathfrak{b} \cap A \subset (\bigcap \mathfrak{P}_i) \cap A = \bigcap (\mathfrak{P}_i \cap A),$$

also ist  $\mathfrak{b} \cap A$  durch jedes der  $\mathfrak{P}_i \cap A$  teilbar. Andererseits gilt

$$\mathfrak{b} \cap A = (\bigcap \mathfrak{P}_i^{e_i}) \cap A = \bigcap (\mathfrak{P}_i^{e_i} \cap A) \supset \prod (\mathfrak{P}_i^{e_i} \cap A) \supset \prod (\mathfrak{P}_i \cap A)^{e_i},$$

weshalb es keine weiteren Primteiler gibt.

*Beweis von Satz 5.13.* Wir betrachten den natürlichen Homomorphismus

$$\psi : A[X] \longrightarrow A[\theta], \quad f \longmapsto f(\theta).$$

Dieser ist offenbar surjektiv.

*Behauptung:*  $\ker(\psi) = pA[X]$

*Beweis der Behauptung:*  $\ker(\psi)$  besteht aus allen Polynomen  $f \in A[X]$  mit  $f(\theta) = 0$ , enthält also insbesondere  $pA[X]$ . Wir betrachten den induzierten surjektiven Homomorphismus  $\bar{\psi} : A[X]/pA[X] \rightarrow A[\theta]$ . Dieser ist auch injektiv: Es ist  $A[X]/pA[X]$  ein freier  $A$ -Modul vom Rang  $n = \deg p$ . Eine Basis ist gegeben durch die Restklassen von  $1, X, \dots, X^{n-1}$ . Wäre  $\bar{\psi}$  nicht injektiv, so wären die Bilder  $1, \theta, \dots, \theta^{n-1}$  dieser Basis linear abhängig über  $A$ , also auch über  $K$ , was nicht der Fall ist. Wir erhalten daher  $\ker(\psi) = pA[X]$  und

$$A[\theta] \cong A[X]/pA[X].$$

Wir setzen  $B' = A[\theta] \subset B$  und betrachten den natürlichen Homomorphismus.

$$\varphi : B'/\mathfrak{p}B' \longrightarrow B/\mathfrak{p}B.$$

*Behauptung:*  $\varphi$  ist ein Isomorphismus.

*Surjektivität:* wegen  $\mathcal{F} + \mathfrak{p}B = B$  und  $\mathcal{F} \subset B'$ .

*Injectivität:* Da  $\mathfrak{p}B$  und  $\mathcal{F}$  teilerfremd sind, hat  $\mathcal{F}$  in  $B$  keinen Primteiler, der über  $\mathfrak{p}$  liegt. Nach der Vorbemerkung sind somit auch  $\mathfrak{p}$  und  $\mathcal{F} \cap A$  teilerfremd, also  $\mathfrak{p} + (\mathcal{F} \cap A) = A$ . Wir wählen  $a \in \mathfrak{p}$ ,  $f \in \mathcal{F} \cap A$  mit  $a + f = 1$ . Sei nun  $\bar{x} \in \ker(\varphi)$  und  $x \in B'$  ein Urbild. Dann gilt  $x = ax + fx$ . Nun gilt  $ax \in \mathfrak{p}B'$ . Außerdem liegt nach Annahme  $x \in \mathfrak{p}B$ , also  $x = \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i$ ,  $\alpha_i \in \mathfrak{p}$ ,  $\beta_i \in B$ . Wegen  $f \in \mathcal{F}$  gilt  $f\beta_i \in B'$  für alle  $i$ , also  $fx = \sum_{i=1}^r \alpha_i(f\beta_i) \in \mathfrak{p}B'$ . Zusammen erhalten wir  $x = ax + fx \in \mathfrak{p}B'$ , also  $\bar{x} = 0$ . Dies zeigt die Behauptung.

Setze  $k = A/\mathfrak{p}$ . Dann gilt

$$B'/\mathfrak{p}B' = A[X]/p / \mathfrak{p}(A[X]/p) = A/\mathfrak{p}[X]/\bar{p} = k[X]/\bar{p}$$

$$\cong \prod_{i=1}^g k[X]/\bar{p}_i^{e_i},$$

wobei  $\bar{p} = \bar{p}_1^{e_1} \dots \bar{p}_g^{e_g}$  die eindeutige Zerlegung in Potenzen normierter Primpolynome von  $\bar{p}$  in  $k[X]$  ist.

Seien  $p_1, \dots, p_g \in A[X]$  normierte Vertreter von  $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_g$ . Betrachte den induzierten Homomorphismus

$$(*) : \begin{array}{ccc} B' & \longrightarrow & B'/\mathfrak{p}B' \\ \parallel & & \parallel \\ A[\theta] & & \wr \\ \parallel & & \parallel \\ A[X]/p & \longrightarrow & \prod_{i=1}^g k[X]/\bar{p}_i^{e_i}. \end{array}$$

Die Primideale im Produktring

$$\prod_{i=1}^g k[X]/\bar{p}_i^{e_i}$$

sind gerade die Hauptideale erzeugt von  $(1, \dots, 1, \bar{p}_i, 1, \dots, 1)$  bzw., da  $(\bar{p}_i, \bar{p}_j) = 1$  für  $i \neq j$ , die Hauptideale  $(\bar{p}_i, \dots, \bar{p}_i)$ ,  $i = 1, \dots, g$ . Deren Urbilder  $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_g$  unter der Surjektion  $(*)$  sind genau die Primideale in  $B'$ , die  $\mathfrak{p}B'$  umfassen. Es gilt

$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}B' + p_i(\theta)B',$$

weil  $p_i(\theta)$  auf  $(\bar{p}_i, \dots, \bar{p}_i)$  abgebildet wird.

Der Isomorphismus  $\varphi : B'/\mathfrak{p}B' \xrightarrow{\sim} B/\mathfrak{p}B$  liefert: Die Primideale in  $B$  über  $\mathfrak{p}$  sind genau die Primideale

$$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}B + p_i(\theta)B, \quad i = 1, \dots, g.$$

Es gilt:  $B/\mathfrak{P}_i \cong B'/\mathfrak{q}_i \cong k[X]/\bar{p}_i$ , also  $f_i = \dim_{A/\mathfrak{p}} B/\mathfrak{P}_i = \deg \bar{p}_i$ .

Nun geht  $\prod_{i=1}^g \mathfrak{q}_i^{e_i}$  unter der Surjektion  $(*)$  auf  $\prod_{i=1}^g \bar{p}_i^{e_i}$ , welches das Nullideal in  $k[X]/\bar{p}$  ist. Daher gilt  $\prod_{i=1}^g \mathfrak{q}_i^{e_i} \subset \mathfrak{p}B'$  und deshalb  $\prod_{i=1}^g \mathfrak{P}_i^{e_i} \subset \mathfrak{p}B$ .

Sei nun  $\mathfrak{p}B = \prod_{i=1}^g \mathfrak{P}_i^{E_i}$ . Dann folgt  $E_i \leq e_i$  für alle  $i$ . Mit  $n = [L : K]$  und wegen  $n = \deg p = \deg \bar{p}$  folgt

$$n = \dim_k k[X]/\bar{p} = \sum_{i=1}^g \dim_k k[X]/\bar{p}_i^{e_i} = \sum_{i=1}^g e_i f_i.$$

Andererseits erhalten wir nach Satz 5.9

$$n = \sum_{i=1}^g E_i f_i,$$

und wegen  $E_i \leq e_i$  folgt  $E_i = e_i$  für alle  $i$ . □

- Definition 5.14.** (i)  $\mathfrak{P} \subset B$  heißt **unverzweigt**, wenn  $\mathfrak{P}$  in der Zerlegung von  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$  mit Potenz 1 auftaucht und  $(B/\mathfrak{P})|(A/\mathfrak{p})$  eine separable Körpererweiterung ist (sonst heißt  $\mathfrak{P}$  **verzweigt**).
- (ii)  $\mathfrak{p} \subset A$  heißt **unverzweigt**, wenn jedes  $\mathfrak{P} \subset B$ ,  $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ , unverzweigt ist (sonst heißt  $\mathfrak{p}$  verzweigt).
- (iii)  $\mathfrak{p}$  heißt **voll zerlegt**, wenn  $g = n = [L : K]$  gilt ( $\iff$  alle  $e_i = f_i = 1$ ). Insbesondere ist  $\mathfrak{p}$  dann unverzweigt.
- (iv) ein unverzweigtes Primideal  $\mathfrak{p}$  heißt **träg**, wenn  $g = 1$  gilt, d.h.  $\mathfrak{p}B$  ist Primideal.

**Bemerkung 5.15.** Ist  $A = \mathcal{O}_K$ ,  $K$  Zahlkörper, so sind alle Restklassenkörper endlich, also vollkommen, und es gibt keine inseparablen Restklassenkörpererweiterungen.

### Nachschlag Algebra: Polynomdiskriminanten.

Wir betrachten den Polynomring  $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$ . Das Polynom

$$\prod_{i < j} (T_i - T_j)^2$$

ist symmetrisch, also (nach Algebra 1, 4.32) ein Polynom  $\Delta$  in den elementarsymmetrischen Polynomen  $s_1, \dots, s_n$ . Man nennt  $\Delta = \Delta(s_1, \dots, s_n)$  die **Diskriminante** des Polynoms

$$\prod_{i=1}^n (X - T_i) = \sum_{j=0}^n (-1)^j s_j X^{n-j},$$

wobei wir  $X$  als Variable über dem Ring  $\mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$  auffassen.

Sei nun  $R$  ein beliebiger Ring und  $f = X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_n \in R[X]$  ein normiertes Polynom.

**Definition 5.16.** Das Bild  $\Delta_f = \Delta(-c_1, c_2, \dots, (-1)^n c_n)$  von  $\Delta$  unter dem Ringhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}[s_1, \dots, s_n] \longrightarrow R, \quad s_j \longmapsto (-1)^j c_j,$$

heißt die **Diskriminante von  $f$** .

**Lemma 5.17.** Gilt  $f = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$  über einem Erweiterungsring  $R' \supset R$ , so gilt  $\Delta_f = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$ .

*Beweis.* Man betrachte den Ringhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow R', \quad T_i \longmapsto \alpha_i.$$

Dieser transportiert das Polynom  $F = \prod_{i=1}^n (X - T_i)$  nach  $f$ . Also gilt  $\varphi(s_j) = (-1)^j c_j$  und somit  $\varphi(\Delta_F) = \Delta_f$ . Wir erhalten

$$\Delta_f = \varphi \left( \prod_{i < j} (T_i - T_j)^2 \right) = \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \quad \square$$

**Korollar 5.18.** Ist  $R = k$  ein Körper, so ist  $f$  genau dann separabel, wenn  $\Delta_f \neq 0$ .

*Beweis.*  $\Delta_f \neq 0 \iff f$  hat keine Mehrfachnullstellen in  $\bar{k} \iff f$  ist separabel.  $\square$

**Bemerkung 5.19.** Direkt aus der Definition erhalten wir: Ist  $f \in R[X]$  und  $\alpha : R \rightarrow R'$  ein Ringhomomorphismus, so gilt

$$\Delta_{f^\alpha} = \alpha(\Delta_f).$$

Explizit ist  $\Delta_f$  unhandlich: z.B.

- $f = X^2 + aX + b \Rightarrow \Delta_f = a^2 - 4b$ .
- $f = X^3 + aX^2 + bX + c \Rightarrow \Delta_f = a^2b^2 + 18abc - 4a^3c - 4b^3 - 27c^2$ .
- $f = X^4 + aX^2 + bX + c \Rightarrow \Delta_f = 144ab^2c - 128a^2c^2 - 4a^3b^2 + 16a^4c - 27b^4 + 256c^3$ .

Wir kehren nun zu unserer Situation  $L|K$ ,  $B|A$  zurück. Sei  $\theta \in B$  ein primitives Element von  $L|K$ ,  $p \in A[X]$  das Minimalpolynom von  $\theta$ . Sei  $\text{Hom}_K(L, \bar{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ ,  $n = [L : K]$ . Für die Basis  $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$  von  $L|K$  gilt

$$\Delta_\theta = d(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = \prod_{i < j} (\sigma_i \theta - \sigma_j \theta)^2 = \Delta_p.$$

**Satz 5.20.** Ist  $\mathfrak{p} \subset A$  prim zum Führer  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\theta$  und prim zu  $\Delta_\theta$ , so ist  $\mathfrak{p}$  unverzweigt.

*Beweis.* Sei  $k = A/\mathfrak{p}$  und  $\bar{p} \in k[X]$  das Bild von  $p$ . Dann gilt  $\Delta_{\bar{p}} = \overline{\Delta_p} = \overline{\Delta_\theta} \neq 0$ , weil  $\Delta_\theta \notin \mathfrak{p}$ .

Nach Korollar 5.18 ist  $\bar{p}$  separabel, d.h.  $\bar{p} = \bar{p}_1 \cdots \bar{p}_g$  mit paarweise verschiedenen separablen Primpolynomen. Nach Satz 5.13 gilt  $\mathfrak{p}B = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g$  mit paarweise verschiedenen  $\mathfrak{P}_i$ . Es gilt  $B/\mathfrak{P}_i \cong k[X]/\bar{p}_i$ , daher sind die Restkörpererweiterungen separabel.  $\square$

**Korollar 5.21.** Es gibt höchstens endlich viele verzweigte Primideale.

*Beweis.* Jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  prim zu  $\mathcal{F}_\theta \cdot \Delta_\theta$  ist unverzweigt und  $\mathcal{F}_\theta \cdot \Delta_\theta$  hat nur endlich viele Primteiler.  $\square$

**Satz 5.22.** Sei  $\mathfrak{p} \subset A$  prim zum Führer  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\theta$ . Gilt  $\mathfrak{p} \mid \Delta_p$  so ist  $\mathfrak{p}$  verzweigt.

*Beweis.* Bezeichnungen wie vorher: es gilt  $\overline{\Delta_\theta} = 0$ . Also hat  $\bar{p}$  in  $\bar{k}$  eine Mehrfachnullstelle. D.h.  $\bar{p}$  hat einen mehrfachen Primfaktor, oder einen inseparablen Primfaktor  $\Rightarrow$  eines der  $e_i$  ist  $> 1$  oder eine Restkörpererweiterung ist nicht separabel  $\Rightarrow \mathfrak{p}$  ist verzweigt.  $\square$

**Fazit:** Für  $(\mathfrak{p}, \mathcal{F}_\theta) = 1$  können wir entscheiden, ob  $\mathfrak{p}$  verzweigt. Nun kann man  $\theta$  variieren. Leider kann es passieren, dass  $\mathfrak{p}$  für keine Wahl von  $\theta$  teilerfremd zu  $\mathcal{F}_\theta$  ist. Dann können wir (im Moment) nichts aussagen.

Einfacher ist der Fall quadratischer Zahlkörper, weil man hier stets  $\theta$  mit  $\mathcal{F}_\theta = (1)$  wählen kann.

**Satz 5.23.** Sei  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  ein quadratischer Zahlkörper und  $d_K$  die Diskriminante von  $K$ . Dann gilt:

(i) Eine ungerade Primzahl  $p$  ist in  $\mathcal{O}_K$

$$\begin{aligned} \text{träger} &\iff \left( \frac{d_K}{p} \right) = -1 \\ \text{zerlegt} &\iff \left( \frac{d_K}{p} \right) = +1 \\ \text{verzweigt} &\iff \left( \frac{d_K}{p} \right) = 0. \end{aligned}$$

(ii) Die Primzahl 2 ist in  $\mathcal{O}_K$

$$\begin{aligned} \text{träger, wenn } d_K &\equiv 5 \pmod{8} \\ \text{zerlegt, wenn } d_K &\equiv 1 \pmod{8} \\ \text{verzweigt, wenn } d_K &\equiv 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Setze  $\theta = \sqrt{d}$  wenn  $d \not\equiv 1 \pmod{4}$  und  $\theta = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$  wenn  $d \equiv 1 \pmod{4}$ . Dann gilt  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\theta]$ , d.h.  $\mathcal{F}_\theta = 1$  und die Diskriminante des Minimalpolynoms  $f$  von  $\theta$  ist gleich  $\Delta_\theta = \Delta_K (= 4d \text{ oder } d)$ . Nach Satz 2.7:  $f$  hat modulo  $p$

- genau zwei verschiedene Lösungen, wenn  $\left( \frac{d_K}{p} \right) = +1$ ,
- genau eine Lösung, wenn  $\left( \frac{d_K}{p} \right) = 0$ ,
- keine Lösung, wenn  $\left( \frac{d_K}{p} \right) = -1$ .

Dies zeigt (i). Es sei nun  $p = 2$ .

Ist  $d \not\equiv 1 \pmod{4}$ , so gilt  $d_K = 4d$  und nach Satz 5.22 ist 2 verzweigt.

Ist  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , so ist  $d_K = d$ , also 2 unverzweigt nach Satz 5.20. Für das Minimalpolynom  $f$  von  $\theta$  gilt  $f = X^2 - X - \frac{d-1}{4}$ .

Fallunterscheidung:

- $d \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow \bar{f} = X^2 - X = X(X-1)$ , also 2 zerlegt.
- $d \equiv 5 \pmod{8} \Rightarrow \bar{f} = X^2 - X - 1$  irreduzibel (weil keine Nullstelle in  $\mathbb{F}_2$ )  $\Rightarrow$  2 ist träge.  $\square$

**Korollar 5.24.** Sei  $K$  ein quadratischer Zahlkörper. Dann sind in  $K$  unendlich viele Primzahlen zerlegt und unendlich viele Primzahlen träge.

*Beweis.* Satz 5.23 + Satz 2.16 und Satz 2.19.  $\square$

### 5.3 Hilbertsche Verzweigungstheorie

Wir behalten die Notation und nehmen an, dass  $L|K$  galoissch ist. Sei

$$G = \text{Gal}(L|K).$$

Dann wirkt  $G$  auf  $J(B)$ : Für ein gebrochenes Ideal  $\mathfrak{b} \subset L$  ist

$$\sigma\mathfrak{b} := \{\sigma b \mid b \in \mathfrak{b}\}$$

wieder ein gebrochenes Ideal. Man nennt die Ideale  $\sigma\mathfrak{b}$ ,  $\sigma \in G$ , die zu  $\mathfrak{b}$  *konjugierten* Ideale.

**Lemma 5.25.** Wir haben eine Inklusion  $J(A) \subset J(B)^G$ . Diese ist im allgemeinen strikt.

*Beweis.* Nach Korollar 5.7 induziert die Erweiterung von Idealen eine Inklusion  $J(A) \subset J(B)$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $G$  trivial auf  $J(A)$  wirkt. Für  $\sigma \in G$  und  $\mathfrak{a} \subset K$  gilt  $\sigma(\mathfrak{a}B) = \sigma(\mathfrak{a})\sigma(B) = \mathfrak{a}B$ , also gilt  $\mathfrak{a}B \in J(L)^G$ .

Beispiel, wo die Inklusion kein Isomorphismus ist: Betrachte  $K = \mathbb{Q}$ ,  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  und das Hauptideal  $(1+i)\mathbb{Z}[i]$ . Wegen  $\sigma(1+i) = 1-i = -i(1+i)$ , gilt  $\sigma((1+i)\mathbb{Z}[i]) = (1+i)\mathbb{Z}[i]$ . Also ist  $(1+i)$  invariant unter  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(i)|\mathbb{Q})$ . Wegen  $(2) = (1+i)^2$  gilt  $(1+i)\mathbb{Z}[i] \notin J(\mathbb{Z})$ .  $\square$

Sei nun  $\mathfrak{P} \subset B$  ein Primideal. Dann gilt

$$\sigma(\mathfrak{P}) \cap A = \mathfrak{P} \cap A \quad \text{für jedes } \sigma \in G.$$

Also operiert für jedes  $\mathfrak{p} \subset A$  die Gruppe  $G$  auf der Menge der Primideale über  $\mathfrak{p}$ .

**Satz 5.26.**  $G$  wirkt transitiv auf der Menge der Primideale über  $\mathfrak{p}$ , d.h. alle diese sind konjugiert.

*Beweis.* Seien  $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$  Primideale über  $\mathfrak{p}$  und nehme an, dass  $\mathfrak{P}' \neq \sigma\mathfrak{P}$  für alle  $\sigma \in G$ . Nach dem Chinesischen Restsatz existiert ein  $x \in B$  mit  $x \in \mathfrak{P}'$  und  $x \equiv 1 \pmod{\sigma\mathfrak{P}}$  für alle  $\sigma \in G$ . Nun gilt  $N_{L|K}(x) = \prod_{\sigma} \sigma x \in \mathfrak{P}' \cap A = \mathfrak{p}$ . Andererseits gilt  $\sigma x \notin \mathfrak{P}$  für alle  $\sigma \in G$ . Also  $\prod_{\sigma} \sigma x \notin \mathfrak{P}$  im Widerspruch zu  $\prod_{\sigma} \sigma x \in \mathfrak{p}$ .  $\square$

**Definition 5.27.** Sei  $\mathfrak{P} \subset B$  ein Primideal. Die Untergruppe

$$Z_{\mathfrak{P}} = \{\sigma \in G \mid \sigma\mathfrak{P} = \mathfrak{P}\}$$

heißt die **Zerlegungsgruppe** von  $\mathfrak{P}$ . Der Zwischenkörper  $L^{Z_{\mathfrak{P}}} \subset L$  heißt der **Zerlegungskörper** von  $\mathfrak{P}$ .

**Bemerkung 5.28.** Weil  $G$  transitiv auf der Menge der Primideale über einem Primideal  $\mathfrak{p}$  operiert, gilt

$$\begin{aligned} Z_{\mathfrak{P}} = \{1\} &\iff \mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A \text{ zerfällt vollständig.} \\ Z_{\mathfrak{P}} = G &\iff \mathfrak{P} \text{ ist das einzige Primideal über } \mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A. \end{aligned}$$

**Lemma 5.29.** Für  $\sigma \in G$ , gilt  $Z_{\sigma\mathfrak{P}} = \sigma Z_{\mathfrak{P}} \sigma^{-1}$ , d.h. die Zerlegungsgruppe zu einem konjugierten Primideal ist gerade die konjugierte Gruppe.

*Beweis.*  $\tau(\sigma\mathfrak{P}) = \sigma\mathfrak{P} \iff \sigma^{-1}\tau\sigma\mathfrak{P} = \mathfrak{P} \iff \sigma^{-1}\tau\sigma \in Z_{\mathfrak{P}} \iff \tau \in \sigma Z_{\mathfrak{P}} \sigma^{-1}$ .  $\square$

**Satz 5.30.** Sei  $\mathfrak{P} \subset B$  und  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ . Dann gibt es genau  $g = (G : Z_{\mathfrak{P}})$  viele Primideale in  $B$  über  $\mathfrak{p}$ , die alle den gleichen Trägheitsgrad  $f$  und Verzweigungsindex  $e$  haben. Es gilt  $efg = n$  und

$$\mathfrak{p} = \left( \prod_{\sigma \in G/Z_{\mathfrak{P}}} \sigma\mathfrak{P} \right)^e$$

*Beweis.* Nach Satz 5.26 sind alle Primideale über  $\mathfrak{p}$  von der Form  $\sigma\mathfrak{P}$ ,  $\sigma \in G$ , und es gilt  $\sigma\mathfrak{P} = \tau\mathfrak{P} \iff \tau^{-1}\sigma\mathfrak{P} = \mathfrak{P} \iff \tau^{-1}\sigma \in Z_{\mathfrak{P}} \iff \tau Z_{\mathfrak{P}} = \sigma Z_{\mathfrak{P}}$ . Seien  $e$  und  $f$  der Verzweigungsindex bzw. Trägheitsgrad von  $\mathfrak{P}$ . Es gilt für jedes  $r$ :

$$\mathfrak{P}^r \mid \mathfrak{p} \iff \sigma(\mathfrak{P}^r) \mid \sigma(\mathfrak{p}) \iff \sigma(\mathfrak{P})^r \mid \mathfrak{p}.$$

Daher haben alle  $\sigma(\mathfrak{P})$  den Verzweigungsindex  $e$ . Der Isomorphismus  $\sigma : B \rightarrow B$  induziert einen Isomorphismus  $B/\mathfrak{P} \xrightarrow{\sim} B/\sigma\mathfrak{P}$  von  $A/\mathfrak{p}$ -Vektorräumen  $\Rightarrow$  alle haben den gleichen Trägheitsgrad. Schließlich folgt aus  $n = \sum e_i f_i$  die Gleichung  $efg = n$ .  $\square$

**Satz 5.31.** Sei  $\mathfrak{P}_Z = \mathfrak{P} \cap L^{Z_{\mathfrak{P}}}$  das Primideal in  $L^{Z_{\mathfrak{P}}}$  unter  $\mathfrak{P}$ . Dann gilt:

- (i)  $\mathfrak{P}$  ist das einzige Primideal in  $L$  über  $\mathfrak{P}_Z$ .
- (ii)  $\mathfrak{P}$  hat über  $L^{Z_{\mathfrak{P}}}$  Verzweigungsindex  $e$  und Trägheitsgrad  $f$ .

(iii) Verzweigungsindex und Trägheitsgrad von  $\mathfrak{P}_Z$  über  $K$  sind beide 1.

*Beweis.* (i) Es gilt  $Z_{\mathfrak{P}} = \text{Gal}(L|L^{Z_{\mathfrak{P}}})$ . Daher sind die Primideale in  $L$  über  $\mathfrak{P}_Z$  die Konjugierten  $\sigma\mathfrak{P}$  mit  $\sigma \in Z_{\mathfrak{P}}$ , also alle gleich  $\mathfrak{P}$ .

(ii) Wegen (i) gilt  $e_{\mathfrak{P}}(L/L^{Z_{\mathfrak{P}}}) \cdot f_{\mathfrak{P}}(L/L^{Z_{\mathfrak{P}}}) = [L : L^{Z_{\mathfrak{P}}}] = \#Z_{\mathfrak{P}} = n/g$ , wobei  $g = (G : Z_{\mathfrak{P}})$ . Nun gilt nach Lemma 5.10, dass  $e_{\mathfrak{P}}(L/L^{Z_{\mathfrak{P}}}) \mid e = e_{\mathfrak{P}}(L|K)$ ,  $f_{\mathfrak{P}}(L|L^{Z_{\mathfrak{P}}}) \mid f$  und aus  $efg = n$  folgt (ii).

(iii) folgt aus (ii) und Lemma 5.10.  $\square$

Sei  $\sigma \in Z_{\mathfrak{P}}$ . Wegen  $\sigma \mathfrak{P} = \mathfrak{P}$  induziert  $\sigma : B \rightarrow B$  einen Automorphismus

$$\bar{\sigma} : B/\mathfrak{P} \rightarrow B/\mathfrak{P}.$$

Die Zuordnung  $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$  induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$Z_{\mathfrak{P}} \rightarrow \text{Aut}_{A/\mathfrak{p}}(B/\mathfrak{P}).$$

Von jetzt ab benutzen wir die Bezeichnungen:

$$k(\mathfrak{P}) = B/\mathfrak{P}, \quad k(\mathfrak{p}) = A/\mathfrak{p}, \quad G(k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p})) = \text{Aut}_{k(\mathfrak{p})}(k(\mathfrak{P})).$$

**Satz 5.32.** *Die Erweiterung  $k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p})$  ist normal. Der eben definierte Homomorphismus  $Z_{\mathfrak{P}} \rightarrow G(k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p}))$  ist surjektiv.*

*Beweis.* Nach Satz 5.31 gilt  $[k(\mathfrak{P} \cap L^{Z_{\mathfrak{P}}}) : k(\mathfrak{p})] = 1$ , also können wir ohne Einschränkung  $K$  durch  $L^{Z_{\mathfrak{P}}}$  ersetzen, und  $G = Z_{\mathfrak{P}}$  annehmen. Sei  $\theta \in B$  ein Vertreter eines Elements  $\bar{\theta} \in k(\mathfrak{P})$ . Sei  $f \in A[X]$  das Minimalpolynom von  $\theta$  über  $K$  und  $\bar{g} \in k(\mathfrak{p})[X]$  das Minimalpolynom von  $\bar{\theta}$  über  $k(\mathfrak{p})$ . Nun gilt  $\bar{f}(\theta) = 0$ , also ist  $\bar{\theta}$  eine Nullstelle von  $\bar{f} = f \bmod \mathfrak{p}$ . Hieraus folgt  $\bar{g} \mid \bar{f}$ . Da  $L|K$  normal ist, zerfällt  $f$  über  $B$  in Linearfaktoren, also auch  $\bar{f}$  über  $B/\mathfrak{P} = k(\mathfrak{P})$ , also zerfällt auch  $\bar{g}$  über  $k(\mathfrak{P})$  in Linearfaktoren. Da  $\bar{\theta}$  beliebig war, ist  $k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p})$  normal.

Nun sei  $\bar{\theta}$  ein primitives Element der maximalen separablen Teilerweiterung von  $k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p})$  und

$$\bar{\sigma} \in G(k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p})) = \text{Gal}(k(\mathfrak{p})(\bar{\theta})|k(\mathfrak{p})).$$

Dann ist  $\bar{\sigma}\bar{\theta}$  eine Nullstelle von  $\bar{g}$ , also von  $\bar{f}$ . Nun gilt über  $B$  die Zerlegung

$$f = (X - \beta_1) \cdots (X - \beta_n).$$

Wegen  $\bar{f}(\bar{\sigma}\bar{\theta}) = 0$  gilt  $\bar{\sigma}\bar{\theta} = \bar{\beta}_i$  für ein  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Nun gibt es ein  $\sigma \in \text{Gal}(L|K)$  mit  $\beta_i = \sigma\theta$ , d.h. es gilt  $\bar{\sigma}\bar{\theta} = \bar{\sigma}\bar{\theta}$ . Deshalb geht  $\sigma$  auf  $\bar{\sigma}$  und die Abbildung  $Z_{\mathfrak{P}} \rightarrow G(k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p}))$  ist surjektiv.  $\square$

**Definition 5.33.** Der Kern  $T_{\mathfrak{P}} \subset Z_{\mathfrak{P}}$  des Homomorphismus

$$Z_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \text{Aut}_{k(\mathfrak{p})}k(\mathfrak{P})$$

heißt die **Trägheitsgruppe** von  $\mathfrak{P}$  (über  $K$ ). Der Körper

$$L^{T_{\mathfrak{P}}}$$

heißt der **Trägheitskörper** von  $\mathfrak{P}$ .

Diagramm:

$$G \left\{ \begin{array}{c} L \\ | \leftarrow T_{\mathfrak{P}} \\ L^{T_{\mathfrak{P}}} \\ | \\ L^{Z_{\mathfrak{P}}} \\ | \\ K \end{array} \right. \quad Z_{\mathfrak{P}}$$

Unschwer verifiziert man das Analogon von Lemma 5.29 für die Trägheitsgruppe, d.h. die Gleichung

$$T_{\sigma \mathfrak{P}} = \sigma T_{\mathfrak{P}} \sigma^{-1}.$$

**Satz 5.34.** *Die Erweiterung  $L^{T_{\mathfrak{P}}} | L^{Z_{\mathfrak{P}}}$  ist galoissch, und*

$$\text{Gal}(L^{T_{\mathfrak{P}}} | L^{Z_{\mathfrak{P}}}) \cong G(k(\mathfrak{P}) | k(\mathfrak{p})).$$

Sei  $f_i = [k(\mathfrak{P}) : k(\mathfrak{p})]_i$ ,  $f_s = [k(\mathfrak{P}) : k(\mathfrak{p})]_s$ . Dann gilt

$$\#T_{\mathfrak{P}} = e f_i, \quad (Z_{\mathfrak{P}} : T_{\mathfrak{P}}) = f_s.$$

Seien  $\mathfrak{P}_Z$  und  $\mathfrak{P}_T$  die Primideale unter  $\mathfrak{P}$  in  $L^{Z_{\mathfrak{P}}}$  und  $L^{T_{\mathfrak{P}}}$ . Es gilt

- (i) Der Verzweigungsindex von  $\mathfrak{P}$  über  $\mathfrak{P}_T$  ist  $e$  und der Trägheitsgrad ist  $f_i$ .
- (ii) Der Verzweigungsindex von  $\mathfrak{P}_T$  über  $\mathfrak{P}_Z$  ist 1 und der Trägheitsgrad ist  $f_s$ .  
Es ist  $k(\mathfrak{P}_T) | k(\mathfrak{p})$  die maximale separable Teilerweiterung von  $k(\mathfrak{P}) | k(\mathfrak{p})$ .

*Beweis.*  $T_{\mathfrak{P}} \subset Z_{\mathfrak{P}}$  ist als Kern eines Homomorphismus ein Normalteiler. Alles andere folgt aus dem Vorhergehenden:

$$\begin{array}{ccc} L & & k(\mathfrak{P}) \\ | & & | \\ L^{T_{\mathfrak{P}}} & & k(\mathfrak{P}_T) \\ | & & | \\ L^{Z_{\mathfrak{P}}} & & k(\mathfrak{P}_Z) \\ | & & \parallel \\ K & & k(\mathfrak{p}) \end{array}$$

1. Schritt:  $k(\mathfrak{p}) = K(\mathfrak{P}_Z)$  und  $e_{\mathfrak{P}_Z}(L^{Z_{\mathfrak{P}}} | K) = 1$  nach Satz 5.31(iii).
2. Schritt:  $[k(\mathfrak{P}_T) : k(\mathfrak{P}_Z)] = f_{\mathfrak{P}_T}(L^{T_{\mathfrak{P}}} | L^{Z_{\mathfrak{P}}}) \leq [L^{T_{\mathfrak{P}}} : L^{Z_{\mathfrak{P}}}] = (Z_{\mathfrak{P}} : T_{\mathfrak{P}}) \stackrel{5.32}{=} \#G(k(\mathfrak{P}) | k(\mathfrak{p})) = f_s$ .

3. Schritt: Satz 5.32 auf die Galoiserweiterung  $L|L^{T_{\mathfrak{P}}}$  angewendet gibt einen surjektiven Homomorphismus

$$\varphi : T_{\mathfrak{P}} \twoheadrightarrow G(k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{P}_T)).$$

Nach Definition von  $T_{\mathfrak{P}}$  ist  $\varphi$  die Nullabbildung, also folgt  $G(k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{P}_T)) = 1$ . Daher ist  $k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{P}_T)$  rein inseparabel  $\Rightarrow$

$$[k(\mathfrak{P}) : k(\mathfrak{P}_T)] \leq f_i.$$

Wegen  $f_s f_i = f = [k(\mathfrak{P}) : k(\mathfrak{p})]$  folgt

$$[k(\mathfrak{P}) : k(\mathfrak{P}_T)] = f_i, \quad [k(\mathfrak{P}_T) : k(\mathfrak{p})] = f_s.$$

Desweiteren ist  $k(\mathfrak{P}_T)|k(\mathfrak{p})$  die maximale separable Teilerweiterung von  $k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p})$ .

4. Schritt: Wegen  $[L^{T_{\mathfrak{P}}} : L^{Z_{\mathfrak{P}}}] = [k(\mathfrak{P}_T) : k(\mathfrak{P}_Z)]$  folgt  $e_{\mathfrak{P}_T}(L^{T_{\mathfrak{P}}} | L^{Z_{\mathfrak{P}}}) = 1$ .

5. Schritt: Es gilt

$$\begin{aligned} \#T_{\mathfrak{P}} &= [L : L^{T_{\mathfrak{P}}}] = \frac{[L : L^{Z_{\mathfrak{P}}}]}{[L^{Z_{\mathfrak{P}}} : L^{T_{\mathfrak{P}}}]} = \\ &= \frac{\#Z_{\mathfrak{P}}}{f_s} = \frac{n}{f_s \cdot (G : Z_{\mathfrak{P}})} = \frac{efg}{f_s g} \\ &= ef_i. \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned} e_{\mathfrak{P}}(L|L^{T_{\mathfrak{P}}}) &= \frac{e_{\mathfrak{P}}(L|K)}{e_{\mathfrak{P}_T}(L^{T_{\mathfrak{P}}} | L^{Z_{\mathfrak{P}}}) \cdot e_{\mathfrak{P}_Z}(L^{Z_{\mathfrak{P}}} | K)} \\ &= \frac{e}{1 \cdot 1} = e. \end{aligned}$$

□

**Korollar 5.35.** Es ist  $\mathfrak{p}$  genau dann unverzweigt in  $L|K$ , wenn  $T_{\mathfrak{P}} = 1$  gilt.

*Beweis.*  $T_{\mathfrak{P}} = 1 \Leftrightarrow e_{\mathfrak{P}} = 1 = [k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p})]_i \Leftrightarrow \mathfrak{P}$  ist unverzweigt. Wegen  $T_{\sigma\mathfrak{P}} = \sigma T_{\mathfrak{P}} \sigma^{-1}$  gilt dies auch für alle Konjugierten. □

**Korollar 5.36.** Sei  $L|K$  eine endliche galoissche Erweiterung von Zahlkörpern und  $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_L$  ein in  $L|K$  unverzweigtes Primideal. Dann ist die Zerlegungsgruppe  $Z_{\mathfrak{P}}(L|K)$  zyklisch. Ein kanonischer Erzeuger ist der **Frobeniusautomorphismus**  $\text{Frob}_{\mathfrak{P}}$ , der durch die Eigenschaft

$$\text{Frob}_{\mathfrak{P}}(a) \equiv a^q \pmod{\mathfrak{P}}$$

für alle  $a \in \mathcal{O}_L$  charakterisiert ist, wobei  $q = \#k(\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_K) = \mathfrak{N}(\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_K)$  ist.

*Beweis.* Es gilt  $T_{\mathfrak{P}} = 1$ . Die Erweiterung  $k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p})$ ,  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_K$ , ist eine endliche Erweiterung endlicher Körper, also galoissch, und es gilt

$$\mathrm{Gal}(k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p})) = \langle \mathrm{Frob} \rangle,$$

wobei  $\mathrm{Frob}(x) = x^q$ ,  $q = \#k(\mathfrak{p})$ . Nach Satz 5.32 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\varphi : Z_{\mathfrak{P}}(L|K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(k(\mathfrak{P})|k(\mathfrak{p})).$$

Das Urbild von  $\mathrm{Frob}$  unter  $\varphi$  bezeichnen wir mit  $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}} \in Z_{\mathfrak{P}}(L|K)$ . Nach Konstruktion von  $\varphi$  gilt

$$\overline{\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}}(a)} = \mathrm{Frob}(\bar{a}) = \bar{a}^q$$

für alle  $a \in \mathcal{O}_L$ , also

$$\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}}(a) \equiv a^q \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}}$  durch seine Eigenschaft eindeutig bestimmt ist. Sei  $F \in \mathrm{Gal}(L|K)$  ein Element mit

$$F(a) \equiv a^q \pmod{\mathfrak{P}} \quad \forall a \in \mathcal{O}_L.$$

Dann gilt insbesondere  $F(\mathfrak{P}) \subset \mathfrak{P}$ , also  $F(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$ , also  $F \in Z_{\mathfrak{P}}(L|K)$ . Wegen  $\varphi(F) = \mathrm{Frob}$  folgt  $F = \mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}}$ , weil  $\varphi$  ein Isomorphismus ist.  $\square$

**Bemerkungen 5.37.** 1) Es gilt  $\mathrm{Frob}_{\sigma\mathfrak{P}} = \sigma\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}}\sigma^{-1}$ . Ist  $L|K$  eine abelsche Erweiterung, so hängt  $\mathrm{Frob}_{\mathfrak{P}}$  nur von  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_K$  ab. Man spricht dann vom *Frobeniusautomorphismus von  $\mathfrak{p}$* .

2) Jedes Element in  $\mathrm{Gal}(L|K)$  ist Frobeniusautomorphismus für unendlich viele unverzweigte Primideale  $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_L$  (tiefliegend).

3) Ist  $L|K$  abelsch, so gibt es eine natürliche surjektive Abbildung

$$\bigoplus_{\substack{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \\ \mathfrak{p} \text{ unv. in } L|K}} \mathbb{Z} \xrightarrow{r} \mathrm{Gal}(L|K),$$

$$1_{\mathfrak{p}} \longmapsto \mathrm{Frob}_{\mathfrak{p}}.$$

Kennt man  $\ker(r)$ , so spiegeln sich arithmetische Gesetze als Relationen in der Galoisgruppe  $\mathrm{Gal}(L|K)$  wider:  $\rightsquigarrow$  „Klassenkörpertheorie“.

Im Fall  $K = \mathbb{Q}$ ,  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ,  $p$  ungerade Primzahl,  $\mathrm{Gal}(L|K) = \{\pm 1\}$  gilt für jede ungerade Primzahl  $q \neq p$ , dass  $\mathrm{Frob}_q(L|K) = \left(\frac{p}{q}\right)$  (Legendre-Symbol). So kann man das QRG als Relation in  $\mathrm{Gal}(L|K)$  wiederfinden.

## 5.4 Idealnormen

Sei wie vorher  $A$  ein Dedekindring,  $K = Q(A)$ ,  $L|K$  endlich separabel und  $B = A_L$ . Sei weiterhin  $M|L$  die galoissche Hülle von  $L|K$  und  $C = A_M = B_M$ . Wir haben eine Inklusion  $J(A) \hookrightarrow J(C)$  und jedes  $\tau \in \text{Hom}_K(L, M)$  induziert eine Inklusion  $\tau : J(B) \hookrightarrow J(C)$ ,  $\mathfrak{b} \mapsto \tau(\mathfrak{b})C$ .

**Satz 5.38.** Für jedes  $\mathfrak{a} \in J(B)$  gilt

$$N_{L|K}(\mathfrak{a}) := \prod_{\tau \in \text{Hom}_K(L, M)} \tau\mathfrak{a} \in J(A) \subset J(C)$$

Für ein Primideal  $\mathfrak{P} \subset B$  gilt  $N_{L|K}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{P}}(L|K)}$  mit  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K$ .

**Bemerkung 5.39.** Man sieht leicht:  $N_{L|K}(\mathfrak{a}) \in J(C)^{\text{Gal}(M|K)}$  aber diese Gruppe ist i.A. größer als  $J(A)$ .

*Beweis von Satz 5.38.* Wegen  $N_{L|K}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N_{L|K}(\mathfrak{a})N_{L|K}(\mathfrak{b})$  und  $N_{L|K}(\mathfrak{a}^{-1}) = N_{L|K}(\mathfrak{a})^{-1}$  können wir annehmen:  $\mathfrak{a} = \mathfrak{P} \subset B$  Primideal.

Sei zunächst  $L|K$  galoissch, d.h.  $L = M$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} N_{L|K}(\mathfrak{P}) &= \prod_{\sigma \in \text{Gal}(L|K)} \sigma\mathfrak{P} = \prod_{\sigma \in G(L|K)/Z_{\mathfrak{P}}(L|K)} \sigma\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}} \cdot f_{\mathfrak{P}}} \\ &= \left( \prod_{\sigma \in G(L|K)/Z_{\mathfrak{P}}(L|K)} \sigma\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}}} \right)^{f_{\mathfrak{P}}} = \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{P}}}. \end{aligned}$$

Nun sei  $L|K$  beliebig. Wir haben von vornherein eine Einbettung  $L \subset M$  gegeben. Für  $\sigma \in G(M|K)$  gilt  $\sigma|_L \in \text{Hom}_K(L, M)$  und jedes  $\tau \in \text{Hom}_K(L, M)$  ist von dieser Form (Fortsetzungssatz für Körpereinbettungen). Es gilt

$$\sigma|_L = \sigma'|_L \iff \sigma^{-1}\sigma' \in G(M|L),$$

also

$$\text{Hom}_K(L, M) = \{\sigma|_L \mid \sigma \in G(M|K)/G(M|L)\}.$$

Nun sei

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_{g_{\mathfrak{P}}(M|L)})^{e_{\mathfrak{P}}(M|L)}$$

die Zerlegung von  $\mathfrak{P}$  in  $M$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
N_{L|K}(\mathfrak{P})^{[M:L]} &= \prod_{\sigma \in G(M|K)/G(M|L)} \sigma \mathfrak{P}^{[M:L]} \\
&= \prod_{\sigma \in G(M|K)} \sigma \mathfrak{P} \\
&= \prod_{\substack{\sigma \in G(M|K) \\ g_{\mathfrak{P}}(M|L)}} \sigma (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_{g_{\mathfrak{P}}(M|L)})^{e_{\mathfrak{P}}(M|L)} \\
&= \prod_{i=1}^{g_{\mathfrak{P}}(M|L)} N_{M|K}(\mathfrak{P}_i)^{e_{\mathfrak{P}}(M|L)} \\
(\text{Galoisfall schon gemacht}) &= \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{P}}(M|K) \cdot e_{\mathfrak{P}}(M|L) \cdot g_{\mathfrak{P}}(M|L)} \\
&= \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{P}}(M|L) \cdot f_{\mathfrak{P}}(L|K) e_{\mathfrak{P}}(M|L) g_{\mathfrak{P}}(M|L)} \\
&= (\mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{P}}(L|K)})^{[M:L]}.
\end{aligned}$$

Nun ist  $J(C)$  eine freie abelsche Gruppe, also gilt  $N_{L|K}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{P}}(L|K)}$ .  $\square$

**Korollar 5.40.** Für  $\mathfrak{a} \subset K$  gilt  $N_{L|K}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^{[L:K]}$ .

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \subset A$  ein Primideal. Sei  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}$  in  $L$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
N_{L|K}(\mathfrak{p}) &= \prod_{i=1}^g N_{L|K}(\mathfrak{P}_i)^{e_i} \\
&= \prod_{i=1}^g \mathfrak{p}^{e_i f_i} = \mathfrak{p}^{\sum_{i=1}^g e_i f_i} \\
&= \mathfrak{p}^{[L:K]}.
\end{aligned}$$

$\square$

**Korollar 5.41.** Für  $a \in L^{\times}$  gilt

$$N_{L|K}(aB) = N_{L|K}(a) \cdot A.$$

*Beweis.* Es gilt  $N_{L|K}(a) = \prod_{\sigma \in \text{Hom}_K(L, M)} \sigma a$ .  $\square$

Zusammenfassend erhalten wir (wenn man die Operation in  $Cl$  additiv schreibt):

**Satz 5.42.** Der Normhomomorphismus  $N_{L|K} : J(B) \rightarrow J(A)$  faktorisiert zu einem Normhomomorphismus

$$N_{L|K} : Cl(B) \longrightarrow Cl(A).$$

Die Komposition

$$Cl(A) \xrightarrow{i_{L|K}} Cl(B) \xrightarrow{N_{L|K}} Cl(A)$$

ist Multiplikation mit  $[L : K]$ .

Für eine endliche abelsche Gruppe  $G$  (additiv geschrieben) und eine Primzahl  $p$  bezeichne

$$G(p) = \{g \in G \mid p^n g = 0, \text{ für ein } n \geq 1\}$$

den  $p$ -Torsionsanteil.

**Korollar 5.43.** *Es seien die Gruppen  $Cl(A)$  und  $Cl(B)$  endlich (z.B.  $A = \mathcal{O}_K$ ,  $K$  Zahlkörper). Es sei  $p$  eine Primzahl,  $p \nmid [L : K]$ . Dann ist die induzierte Abbildung*

$$i_{B|A}^{(p)} : Cl(A)(p) \longrightarrow Cl(B)(p)$$

eine zerfallene Injektion, d.h. es gibt  $s : Cl(B)(p) \rightarrow Cl(A)(p)$  mit  $s \circ i_{B|A}^{(p)} = \text{id}$ .

*Beweis.* Es sei  $\#Cl(A)(p) = p^r$  und  $[L : K] = n$ . Wegen  $(n, p) = 1$  gilt  $n \in (\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ , d.h. es existiert  $m \in \mathbb{N}$  mit  $n \cdot m \equiv 1 \pmod{p^r}$ . Wir setzen  $s : Cl(B)(p) \rightarrow Cl(A)(p)$ ,  $y \mapsto mN_{L|K}(y)$ . Für  $x \in Cl(A)(p)$  gilt  $s \circ i_{B|A}(x) = mN_{L|K}(x) = nm x = x$ .  $\square$

**Bemerkung 5.44.** Ist  $L|K$  galoissch, so gilt in dieser Situation sogar

$$Cl(A)(p) = Cl(B)(p)^{\text{Gal}(L|K)}.$$

Um das zu zeigen fehlen uns noch die Mittel.

Schließlich beweisen wir nun den noch offenen Satz 3.71 in etwas größerer Allgemeinheit

**Satz 5.45.** *Sei  $K$  ein Zahlkörper und  $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  ein Ideal. Dann gilt*

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \cdot \mathbb{Z} = N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}).$$

*Beweis.* Zunächst ist die Aussage sinnvoll, weil nach Satz 5.38 der Ausdruck auf der rechten Seite als Ideal in  $\mathbb{Z}$  angesehen werden kann. Nun sei  $L$  ein beliebiger über  $\mathbb{Q}$  galoisscher endlicher Erweiterungskörper von  $K$ .

*Behauptung:* Für  $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  gilt

$$(*) \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_L) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{[L:K]}.$$

Beweis der Behauptung: Nach Satz 3.70 ist die Norm  $\mathfrak{N}$  multiplikativ, also sei ohne Einschränkung  $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$  ein Primideal. Sei  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g)^e$  die Primzerlegung von  $\mathfrak{p}$  in  $L$ . Wir erhalten

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}\mathcal{O}_L) = (\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1) \cdots \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_g))^e$$

und da die  $\mathfrak{P}_i$  alle konjugiert sind, mit  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1$ :

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}\mathcal{O}_L) = \mathfrak{N}(\mathfrak{P})^{eg}.$$

Nun gilt  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = \#k(\mathfrak{P}) = \#(k(\mathfrak{p}))^f = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^f$ , und also

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}\mathcal{O}_L) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{efg} = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{[L:K]}.$$

Dies zeigt die Behauptung.

Ein Ideal  $a \cdot \mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Z}$  ist offenbar durch  $|a| = \mathfrak{N}(a \cdot \mathbb{Z})$  eindeutig bestimmt. Nun gilt aber nach (\*) für  $a \in \mathbb{Z}$

$$\mathfrak{N}(a\mathcal{O}_L) = \mathfrak{N}(a \cdot \mathbb{Z})^{[L:\mathbb{Q}]} = |a|^{[L:\mathbb{Q}]},$$

weshalb  $a \cdot \mathbb{Z}$  schon durch  $\mathfrak{N}(a\mathcal{O}_L)$  eindeutig bestimmt ist. Daher genügt es zu zeigen, dass die Restklassenringe der Ideale in  $\mathcal{O}_L$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \cdot \mathcal{O}_L \text{ und } N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})\mathcal{O}_L$$

die gleiche Kardinalität haben.

Wir berechnen:  $\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) \cdot \mathcal{O}_L) \stackrel{(*)}{=} \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{[L:\mathbb{Q}]}$ . Des Weiteren berechnen wir

$$\mathfrak{N}(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})\mathcal{O}_L) = \mathfrak{N}\left(\prod_{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,L)} \sigma\mathfrak{a}\right) \stackrel{3.70}{=} \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,L)} \mathfrak{N}(\sigma\mathfrak{a}).$$

Nun gilt für jedes der  $[K : \mathbb{Q}]$  vielen  $\sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(K,L)$ :

$$\mathfrak{N}(\sigma\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathcal{O}_L) \stackrel{(*)}{=} \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{[L:K]},$$

und daher

$$\mathfrak{N}(N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})\mathcal{O}_L) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{[L:K] \cdot [K:\mathbb{Q}]} = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^{[L:\mathbb{Q}]}.$$

Dies beendet den Beweis.  $\square$

## 6 Kreisteilungskörper

### 6.1 Der Ring der ganzen Zahlen

Sei  $K$  ein Zahlkörper und  $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$  ein Primideal. Dann gilt  $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = p^f$ , wobei  $p$  die unter  $\mathfrak{p}$  in  $\mathbb{Z}$  liegende Primzahl und  $f$  der Trägheitsgrad von  $\mathfrak{p}$  in  $K|\mathbb{Q}$  ist.

**Definition 6.1.** Man nennt  $f$  den **Grad von  $\mathfrak{p}$** .

Die Primideale vom Grad 1 sind genau die, deren Restklassenkörper ein Primkörper ist.

**Definition 6.2.** Für  $n \in \mathbb{N}$  heißt  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ ,  $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$  der  **$n$ -te Kreisteilungskörper**.

Es gilt  $\mathbb{Q}(\zeta_1) = \mathbb{Q}(\zeta_2) = \mathbb{Q}$ . Wir setzen im Folgenden stets  $n \geq 3$  voraus.

**Erinnerung an Algebra-Vorlesung:**

- $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q})$  ist abelsch.
- Für  $\sigma \in G$  gilt  $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{a_\sigma}$ , für ein eindeutig bestimmtes  $a_\sigma \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ .
- Die Zuordnung

$$\chi_{\text{cycl}} : \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$$

$\sigma \mapsto a_\sigma$  ist ein Gruppen-Isomorphismus.  $\chi_{\text{cycl}}$  heißt der **zyklotomische Charakter modulo  $n$** .

- Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  teilerfremd. Dann existieren  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $an + bm = 1$ . Wir erhalten

$$\zeta_{mn} = \zeta_m^a \zeta_n^b \in \mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n)$$

und daher gilt  $\mathbb{Q}(\zeta_m)\mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{mn})$ . Wir erhalten

$$[\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \frac{[\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}][\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\zeta_m)\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}]} = \frac{\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi(mn)} = 1.$$

Es folgt  $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}$  für  $(m, n) = 1$ .

- (Sei  $n \geq 3$ ). Bezüglich jeder Einbettung von  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  nach  $\mathbb{C}$  induziert die komplexe Konjugation  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$ , einen Automorphismus  $F : \mathbb{Q}(\zeta_n) \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta_n)$ , der durch  $F(\zeta_n) = \zeta_n^{-1}$  bestimmt ist. Dieser ist unabhängig von der Wahl der Einbettung  $\mathbb{Q}(\zeta_n) \hookrightarrow \mathbb{C}$  und es gilt

$$\chi_{\text{cycl}}(F) = -1 \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

- Wir setzen  $\mathbb{Q}(\zeta_n)^+ := \mathbb{Q}(\zeta_n)^{\langle F \rangle}$ . Es gilt  $\mathbb{Q}(\zeta_n)^+ = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$ .
- Wir haben (jetzt immer  $n \geq 3$ )

$$[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n), \quad [\mathbb{Q}(\zeta_n)^+ : \mathbb{Q}] = \frac{1}{2}\varphi(n)$$

$$r_1(\mathbb{Q}(\zeta_n)) = r_2(\mathbb{Q}(\zeta_n)^+) = 0, \quad r_2(\mathbb{Q}(\zeta_n)) = r_1(\mathbb{Q}(\zeta_n)^+) = \frac{1}{2}\varphi(n).$$

Von jetzt an sei  $n \geq 3$  fixiert und wir schreiben  $\zeta$  für  $\zeta_n$ ,  $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ .

**Lemma 6.3.** Für  $g, h \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  ist  $\frac{1 - \zeta^g}{1 - \zeta^h} \in E_K$ .

*Beweis.* Sei  $g = h \cdot r$ ,  $r \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ . Dann gilt

$$\frac{1 - \zeta^g}{1 - \zeta^h} = \frac{1 - \zeta^{h \cdot r}}{1 - \zeta^h} = 1 + \zeta^r + \zeta^{2r} + \cdots + \zeta^{r(h-1)} \in \mathbb{Z}[\zeta] \subset \mathcal{O}_K.$$

Analog  $\frac{1 - \zeta^h}{1 - \zeta^g} \in \mathcal{O}_K \Rightarrow$  fertig. □

**Bemerkung 6.4.** Diese Einheiten heißen **Kreisteilungseinheiten**.

**Lemma 6.5.** Sei  $n = \ell^v$ ,  $v \geq 1$ , eine Primzahlpotenz und  $\lambda = 1 - \zeta$ . Dann ist das Hauptideal  $(\lambda) \subset \mathcal{O}_K$  ein Primideal vom Grad 1 und es gilt  $\ell\mathcal{O}_K = (\lambda)^d$  mit  $d = \varphi(n) = [K : \mathbb{Q}]$ . Die Basis  $1, \zeta, \dots, \zeta^{d-1}$  von  $K|\mathbb{Q}$  hat die Diskriminante

$$d(1, \zeta, \dots, \zeta^{d-1}) = \pm \ell^s, \quad s = \ell^{v-1} \cdot (v\ell - v - 1).$$

*Beweis.* Das Minimalpolynom von  $\zeta$  ist

$$\Phi_{\ell^v} = \frac{X^{\ell^v} - 1}{X^{\ell^{v-1}} - 1} = X^{\ell^{v-1}(\ell-1)} + \dots + X^{\ell^{v-1}} + 1 = \prod_{g \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} (X - \zeta^g).$$

Setzt man  $X = 1$ , ergibt sich

$$\ell = \prod_{g \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} (1 - \zeta^g) \tag{*}$$

Daher gilt

$$\ell = (1 - \zeta)^d \cdot \varepsilon, \quad d = [K : \mathbb{Q}] = \varphi(n),$$

wobei

$$\varepsilon = \prod_{g \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} \frac{1 - \zeta^g}{1 - \zeta} \in E_K \quad (\text{nach Lemma 6.3}).$$

Aus  $efg = [K : \mathbb{Q}]$  für die Primzahl  $\ell \in \mathbb{Z}$  folgt:  $(1 - \zeta)$  ist Primideal vom Grad 1 in  $\mathcal{O}_K$ .

Berechnung der Diskriminante: Seien  $\zeta = \zeta_1, \dots, \zeta_d$  die Konjugierten von  $\zeta$  (d.h. die primitiven  $n$ -ten Einheitswurzeln). Dann gilt  $\Phi_n(X) = \prod_{i=1}^d (X - \zeta_i)$  und

$$d(1, \zeta, \dots, \zeta^{d-1}) = \prod_{i < j} (\zeta_i - \zeta_j)^2.$$

Daher:

$$\begin{aligned} \pm d(1, \zeta, \dots, \zeta^{d-1}) &= \pm \prod_{i \neq j} (\zeta_i - \zeta_j) = \pm \prod_{i=1}^d \Phi'_n(\zeta_i) = \\ &= \pm \prod_{\sigma \in G(K|\mathbb{Q})} \sigma(\Phi'_n(\zeta)) = \pm N_{K|\mathbb{Q}}(\Phi'_n(\zeta)). \end{aligned}$$

Nun gilt

$$(X^{\ell^v} - 1) = \Phi_n(X) \cdot (X^{\ell^{v-1}} - 1).$$

Ableiten ergibt

$$\ell^v X^{\ell^v-1} = \Phi'_n(X) \cdot (X^{\ell^{v-1}} - 1) + \Phi_n(X) \cdot \ell^{v-1} X^{\ell^{v-1}-1}$$

Einsetzen von  $\zeta$  ergibt mit  $\xi := \zeta^{\ell^{v-1}}$ :

$$\ell^v \zeta^{-1} = \Phi'_n(\zeta)(\xi - 1).$$

Es ist  $\xi$  eine primitive  $\ell$ -te Einheitswurzel. Eine Anwendung von (\*) oben auf  $\xi$  liefert  $N_{\mathbb{Q}(\xi)|\mathbb{Q}}(\xi - 1) = \pm \ell$ , also

$$N_{K|\mathbb{Q}}(\xi - 1) = N_{\mathbb{Q}(\xi)|\mathbb{Q}}(\xi - 1)^{[K:\mathbb{Q}(\xi)]} = \pm \ell^{\ell^{v-1}}.$$

Nun gilt  $N_{K|\mathbb{Q}}(\zeta) = \pm 1$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} d(1, \dots, \zeta^{d-1}) &= \pm N_{K|\mathbb{Q}}(\Phi'_n(\zeta)) = \pm \frac{N_{K|\mathbb{Q}}(\ell^v \cdot \zeta^{-1})}{N_{K|\mathbb{Q}}(\xi - 1)} \\ &= \pm \frac{\ell^{v \cdot (\ell-1)\ell^{v-1}}}{\ell^{\ell^{v-1}}} = \pm \ell^s, \end{aligned}$$

mit  $s = \ell^{v-1}(v\ell - v - 1)$ . □

**Lemma 6.6.** Sei  $n = \ell^v$ . Dann gilt  $\mathbb{Z}[\zeta] = \mathcal{O}_K$ .

*Beweis.* Erinnerung an Satz 3.21: Sei  $\alpha_1, \dots, \alpha_d$  eine in  $\mathcal{O}_K$  gelegene  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $K$ . Dann gilt  $d(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \cdot \mathcal{O}_K \subset \mathbb{Z}\alpha_1 + \dots + \mathbb{Z}\alpha_d$ .

In unserem Fall folgt

$$\ell^s \mathcal{O}_K \subset \mathbb{Z}[\zeta] \subset \mathcal{O}_K.$$

Mit  $\lambda = 1 - \zeta$  gilt  $\mathcal{O}_K/(\lambda) \cong \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ , also  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \lambda\mathcal{O}_K$  und deshalb insbesondere

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta] + \lambda\mathcal{O}_K.$$

Multiplikation mit  $\lambda$  ergibt

$$\lambda\mathcal{O}_K = \lambda\mathbb{Z}[\zeta] + \lambda^2\mathcal{O}_K,$$

also  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta] + \lambda\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta] + \lambda\mathbb{Z}[\zeta] + \lambda^2\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta] + \lambda^2\mathcal{O}_K$ .

Induktiv: Für jedes  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta] + \lambda^N\mathcal{O}_K.$$

Für  $N \geq sd$  gilt  $\lambda^N\mathcal{O}_K \subset \mathbb{Z}[\zeta]$ , also  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta]$ . □

Im allgemeinen Fall gilt  $n = \ell_1^{v_1} \dots \ell_r^{v_r}$  und

$$\mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{\ell_1^{v_1}}) \cdots \mathbb{Q}(\zeta_{\ell_r^{v_r}}).$$

Frage: Kann man eine Ganzheitsbasis eines Kompositums aus Ganzheitsbasen der einzelnen Faktoren erhalten?

Antwort: Im allgemeinen nein, aber wir haben den folgenden

**Satz 6.7.** Sei  $A$  ein Dedekindring  $K = Q(A)$  und seien  $L|K$  und  $L'|K$  zwei endliche galoissche Erweiterungen der Grade  $n$  und  $n'$  mit  $L \cap L' = K$ .  $A_L$  und  $A_{L'}$  mögen Ganzheitsbasen  $\omega_1, \dots, \omega_n$ , und  $\omega'_1, \dots, \omega'_{n'}$  über  $A$  haben. Sind dann die Diskriminanten  $d, d'$  dieser Ganzheitsbasen teilerfremd (als Hauptideale von  $A$ ), so ist

$$(\omega_i \omega'_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n'}}$$

eine Ganzheitsbasis des Kompositums  $LL'$  über  $K$  mit Diskriminante  $d^{n'} d'^n$ .

*Beweis.* Zunächst ist  $(\omega_i \omega'_j)_{i,j}$  eine  $K$ -Basis von  $LL'$ . Sei  $G(L|K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ ,  $G(L'|K) = \{\sigma'_1, \dots, \sigma'_{n'}\}$ . Aus der Algebra 1-Vorlesung (Satz 4.17 (ii)) wissen wir  $G(LL'|K) \cong G(L|K) \times G(L'|K)$ . Lassen wir die  $\sigma_i$  trivial auf den  $\omega'_j$  operieren und umgekehrt, so gilt

$$G(LL'|K) = \{\sigma_k \sigma'_\ell \mid k = 1, \dots, n, \ell = 1, \dots, n'\}.$$

Sei nun  $\alpha \in A_{LL'}$  beliebig. Dann gilt

$$\alpha = \sum_{i,j} a_{ij} \omega_i \omega'_j \quad , \quad a_{ij} \in K.$$

Z.z.:  $a_{ij} \in A$ .

Setze  $\beta_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \omega_i$ ,  $T = (\sigma'_\ell \omega'_j)$ ,  $a = (\sigma'_1 \alpha, \dots, \sigma'_{n'} \alpha)^t$ ,  $b = (\beta_1, \dots, \beta_{n'})^t$ , so gilt:  $\det(T)^2 = d_{L'|K}(\omega'_1, \dots, \omega'_{n'}) = d'$  und  $a = Tb$ . Multiplikation mit der adjunktiven Matrix  $T^{ad}$  liefert

$$\det(T) \cdot b = T^{ad} \cdot a.$$

Aus  $T^{ad} \in M_{n',n'}(A_{LL'})$ ,  $a \in M_{n',1}(A_{LL'})$  folgt  $\det(T)b \in M_{n',1}(A_{LL'})$  und  $d'b = \det(T)^2 b \in M_{n',1}(A_{LL'})$ . Nun gilt  $d' \in A$ , und  $b$  hat Einträge in  $L$ . Es folgt  $d' \beta_j = \sum_{i=1}^n d' a_{ij} \omega_i \in A_L$ , also  $d'b \in M_{n',1}(A_L)$ . Da  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  eine Ganzheitsbasis für  $A_L$  ist folgt  $d' a_{ij} \in A$  für alle  $i, j$ . Analog schließt man  $d a_{ij} \in A$  für alle  $i, j$ . Da  $d$  und  $d'$  teilerfremd sind, existieren  $s, t \in A$  mit  $sd + td' = 1 \Rightarrow a_{ij} \in A \quad \forall i, j \Rightarrow (\omega_i \omega'_j)$  ist Ganzheitsbasis.

Es verbleibt, die Diskriminante zu berechnen. Es gilt für  $D = d(\omega_i \omega'_j)$ :

$$D = \det(M)^2, \quad M := (\sigma_k \sigma'_\ell \omega_i \omega'_j) = (\sigma_k \omega_i \sigma'_\ell \omega'_j).$$

Wir fassen  $M$  als  $n' \times n'$ -Matrix mit  $n \times n$ -Matrizen als Einträgen auf. Der  $(\ell, j)$ -Eintrag von  $M$  ist die Matrix  $Q \cdot \sigma'_\ell \omega'_j$  mit  $Q = (\sigma_k \omega_i)$ . Also

$$M = \begin{pmatrix} Q & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} E_{n,n} \sigma'_1 \omega'_1 \dots E_{n,n} \sigma'_{n'} \omega'_1 \\ \vdots \\ E_{n,n} \sigma'_1 \omega'_{n'} \dots E_{n,n} \sigma'_{n'} \omega'_{n'} \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{aligned} D = \det(M)^2 &= \det(Q)^{2n'} \cdot \det(\sigma'_\ell \omega'_j)^{2n} \\ &= d^{n'} \cdot d'^n \end{aligned}$$

□

Wir erhalten

**Theorem 6.8.** Sei  $n = \ell_1^{v_1} \dots \ell_r^{v_r}$  und  $d = \varphi(n) = \prod_{i=1}^r (\ell_i - 1) \ell_i^{v_i-1}$ . Dann ist  $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$  eine abelsche Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  vom Grad  $d$ ,  $G(K|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ . Es ist

$$1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{d-1}$$

eine Ganzheitsbasis, d.h.  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_n]$ . Es gilt

$$d_K = (-1)^{d/2} \frac{n^d}{\prod_{i=1}^r \ell_i^{d/(\ell_i-1)}}.$$

*Beweis.* Nach Lemma 6.6 und Satz 6.7 finden wir eine Ganzheitsbasis bestehend aus Potenzen von  $\zeta_n$ . Da sich jede Potenz von  $\zeta_n$  als ganzzahlige Linearkombination von  $1, \zeta_n, \dots, \zeta_n^{d-1}$  schreiben lässt, ist auch dies eine Ganzheitsbasis. Setzen wir  $K_i = \mathbb{Q}(\zeta_{\ell_i^{v_i}})$ ,  $s_i = \ell_i^{v_i-1}(v_i \ell_i - v_i - 1)$ , so ergibt sich für die Diskriminante  $d_K$  per Induktion aus Satz 6.7 und Lemma 6.5:

$$\begin{aligned} d_K &= \prod_{i=1}^r d_{K_i}^{[K:K_i]} \\ &= \pm \prod_{i=1}^r \ell_i^{s_i \cdot \varphi(n)/\varphi(\ell_i^{v_i})} \\ &= \pm \prod_{i=1}^r \ell_i^{d(v_i-1/(\ell_i-1))} \\ &= \pm \frac{n^d}{\prod_{i=1}^r \ell_i^{d/(\ell_i-1)}}. \end{aligned}$$

Das Vorzeichen von  $d_K$  ergibt sich wegen Aufgabe 4 von Blatt 8 als  $(-1)^{r_2(K)} = (-1)^{d/2}$ . □

**Korollar 6.9.** Die Primzahl 2 ist genau dann verzweigt in  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ , wenn  $4 \mid n$ . Eine ungerade Primzahl  $p$  verzweigt genau dann in  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ , wenn  $p \mid n$ .

*Beweis.* Es ist der Führer  $\mathcal{F}_{\zeta_n}$  gleich 1 und  $d_{\mathbb{Q}(\zeta_n)} = \Delta_{\zeta_n}$  wurde im Theorem berechnet. Daher folgt die Aussage aus Satz 5.20 und Satz 5.22. □

## 6.2 Zerlegungsverhalten

**Theorem 6.10.** Sei  $n = \prod_p p^{v_p}$  die Primzerlegung von  $n$  ( $v_p = 0$  f.f.a.  $p$ ). Für jede Primzahl  $p$  sei  $f_p$  die kleinste natürliche Zahl mit

$$p^{f_p} \equiv 1 \pmod{n/p^{v_p}}.$$

Dann hat  $p$  in  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  die Zerlegung

$$p = (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_g)^{\varphi(p^{v_p})},$$

wobei  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_g$ ,  $g = \varphi(n/p^{v_p})/f_p$ , paarweise verschiedene Primideale vom Grad  $f_p$  sind.

*Beweis.* Wegen  $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_n)} = \mathbb{Z}[\zeta_n]$  ist der Führer von  $\mathbb{Z}[\zeta_n]$  gleich 1. Daher zerfällt jedes  $p$  genau so in Primideale, wie das Polynom  $\Phi_n(X)$  modulo  $p$  in irreduzible Faktoren zerfällt (siehe Satz 5.13). Also z.z.:

$$\Phi_n(X) = (p_1(X) \cdots p_g(X))^{\varphi(p^{v_p})} \pmod{p},$$

wobei  $p_i \in \mathbb{F}_p[X]$  paarweise verschiedene irreduzible Polynome vom Grad  $f_p$  sind. Setze  $n = m \cdot p^{v_p}$ . Wenn  $\xi_i$  bzw.  $y_j$  die primitiven  $m$ -ten bzw. die primitiven  $p^{v_p}$ -ten Einheitswurzeln durchläuft, so durchläuft  $\xi_i y_j$  die primitiven  $n$ -ten Einheitswurzeln. Also gilt

$$\Phi_n(X) = \prod_{i,j} (X - \xi_i y_j).$$

Sei nun  $\mathfrak{p}$  ein Primideal über  $p$ . Wegen  $X^{p^v} - 1 \equiv (X - 1)^{p^{v_p}} \pmod{p}$  gilt  $y_j \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$  für jedes  $j$ . Also

$$\begin{aligned} \Phi_n(X) &\equiv \prod_i (X - \xi_i)^{\varphi(p^{v_p})} \\ &\equiv \Phi_m(X)^{\varphi(p^{v_p})} \pmod{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Da beide Seiten in  $\mathbb{Z}[X]$  liegen, gilt die Kongruenz schon modulo  $p$ .

Nun ist  $(m, p) = 1$  und deshalb ist das Polynom  $\Phi_m(X)$  separabel modulo  $p$  (Grund:  $\Phi_m(X) \mid X^m - 1$  und  $X^m - 1$  ist separabel). In  $\overline{\mathbb{F}}_p$  gilt  $\overline{\Phi}_m(X) = \prod_i (X - \xi_i)$  wobei  $\xi_i$  die primitiven  $m$ -ten Einheitswurzeln in  $\overline{\mathbb{F}}_p$  durchläuft. Jeder irreduzible Faktor von  $\overline{\Phi}_m$  ist daher Minimalpolynom einer primitiven  $m$ -ten Einheitswurzel in  $\overline{\mathbb{F}}_p$  über  $\mathbb{F}_p$ .

Erinnerung an Algebra 1-Vorlesung (4.50):

$$[\mathbb{F}_p(\zeta_m) : \mathbb{F}_p] = f,$$

wobei  $f$  die Ordnung der von  $\bar{p}$  in  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  erzeugten Untergruppe ist. Also gilt  $f = f_p \Rightarrow \Phi_m(X)$  zerfällt in  $\mathbb{F}_p[X]$  in irreduzible Faktoren vom Grad  $f_p$ .  $\square$

**Korollar 6.11.** (i) Eine ungerade Primzahl  $p$  ist genau dann in  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  verzweigt wenn  $n \equiv 0 \pmod{p}$ .  $p$  ist genau dann voll zerlegt wenn

$$p \equiv 1 \pmod{n}.$$

(ii) Die Primzahl 2 ist genau dann verzweigt in  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ , wenn  $4 \mid n$ . 2 ist nur in den trivialen Fällen  $n = 1, 2$  voll zerlegt.

**Korollar 6.12 (QRG).** Für ungerade Primzahlen  $p, q$  gilt

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}.$$

*Beweis.* Wir betrachten  $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)|\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ .  $G$  ist zyklisch von gerader Ordnung  $p-1$ . Sei  $H \subset G$  die eindeutig bestimmte Untergruppe vom Index 2 und  $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)^H$  der assoziierte quadratische Zahlkörper. Wegen  $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_p)$  kann in  $K$  höchstens die Primzahl  $p$  verzweigen. Aus Satz 5.23 folgt somit

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{p^*}), \quad \text{mit } p^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.$$

Wir betrachten das Zerlegungsverhalten von  $q$ . Es gilt:  $q$  zerfällt in  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  in eine gerade Anzahl von Primidealen  $\iff Z_q \subset H \iff q$  zerfällt in  $K \iff \left(\frac{p^*}{q}\right) = 1$ .

Andere Rechnung:

$$\begin{aligned} & q \text{ zerfällt in } \mathbb{Q}(\zeta_p) \text{ in gerade Anzahl von Primidealen} \\ \iff & g_q = (p-1)/f_q \text{ ist gerade} \\ \iff & f_q \mid \frac{1}{2}(p-1) \iff q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \\ \iff & q \text{ ist Quadrat modulo } p \\ \iff & \left(\frac{q}{p}\right) = 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:  $\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p^*}{q}\right)$ . Nun gilt

$$\left(\frac{-1}{q}\right) = 1 \iff q \text{ zerfällt in } \mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(\zeta_4) \iff q \equiv 1 \pmod{4},$$

also  $\left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$  (1. Ergänzungssatz). Wir erhalten

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right). \quad \square$$

**Lemma 6.13.** Sei  $n \geq 3$ . Für jedes  $r \in \mathbb{N}$  hat die natürliche Zahl  $\Phi_n(rn)$  nur Primteiler  $\equiv 1 \pmod{n}$ .

*Beweis.* Sei  $p$  eine Primzahl mit  $p \mid \Phi_n(rn)$ . Dann ist  $rn$  eine Nullstelle von  $\Phi_n(X) \bmod p$ . Daher zerfällt  $p$  in der Galoiserweiterung  $\mathbb{Q}(\zeta_n)|\mathbb{Q}$  in Primfaktoren vom Grad 1. Außerdem gilt  $p \nmid n$ . Andernfalls wäre 0 eine Nullstelle von  $\Phi_n(X) \bmod p$ , was wegen  $\Phi_n(X) \mid X^n - 1$  nicht möglich ist. Daher ist  $p$  unverzweigt, also voll zerlegt in  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  und folglich gilt  $p \equiv 1 \bmod n$ .  $\square$

**Satz 6.14.** *Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Dann existieren unendlich viele Primzahlen  $\equiv 1 \bmod n$ .*

*Beweis.* Übungsaufgabe 4, Blatt 9.  $\square$

### 6.3 Einheiten

Sei  $n \geq 3$  fixiert,  $n \not\equiv 2 \bmod 4$ , und setze  $W = \mu_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}$ . Es gilt

$$\#W = \begin{cases} 2n, & n \text{ ungerade,} \\ n, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Sei  $d = \varphi(n) = [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}]$ . Es gilt  $r_1 = 0, r_2 = d/2$ . Nach Dirichlet gilt

$$E_{\mathbb{Q}(\zeta_n)} \cong W \oplus \mathbb{Z}_{\frac{d}{2}-1}.$$

Für  $\mathbb{Q}(\zeta_n)^+ = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$  gilt  $r_1 = \frac{d}{2}, r_2 = 0$ , also

$$E_{\mathbb{Q}(\zeta_n)^+} = \mu_2 \oplus \mathbb{Z}_{\frac{d}{2}-1}$$

Unser Ziel ist:

**Satz 6.15.** *Es gilt*

$$(E_{\mathbb{Q}(\zeta_n)} : W E_{\mathbb{Q}(\zeta_n)^+}) = Q,$$

mit  $Q = 1$  wenn  $n$  eine Primpotenz, und  $Q = 2$  sonst.

**Lemma 6.16.**  *$1 - \zeta_n$  ist genau dann eine Einheit in  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ , wenn  $n$  keine Primpotenz ist.*

*Beweis.* Ist  $n$  eine Primpotenz, so ist  $(1 - \zeta_n)$  Primideal nach Lemma 6.5, und insbesondere  $1 - \zeta_n$  keine Einheit.

Sei  $n$  keine Primpotenz: Wäre  $1 - \zeta_n$  durch ein Primideal  $\mathfrak{p}$  teilbar, so ist jede  $n$ -te Einheitswurzel  $\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}$ . Sei  $q$  ein Primteiler von  $n$  mit  $\mathfrak{p} \nmid q$  ( $n$  hat mindestens zwei Primteiler, also existiert  $q$ ). Dann ist insbesondere jede  $q$ -te Einheitswurzel  $\equiv 1 \bmod \mathfrak{p} \Rightarrow X^q - 1 \equiv (X - 1)^q \bmod \mathfrak{p}$  ist inseparabel als Polynom in  $k(\mathfrak{p})[X]$ . Andererseits sind wegen  $1/q \in k(\mathfrak{p})$  die Polynome  $X^q - 1$  und  $qX^{q-1} = \frac{d}{dX}(X^q - 1)$  teilerfremd in  $k(\mathfrak{p})[X]$ , und somit  $X^q - 1$  als Polynom in  $k(\mathfrak{p})[X]$  separabel. Widerspruch  $\square$

*Beweis von Satz 6.15.* Sei  $K = \mathbb{Q}(\zeta_n)$  und  $F \in \text{Gal}(K|\mathbb{Q})$  die komplexe Konjugation (Urbild der  $-1 \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$  unter dem zyklotomischen Charakter). Da  $\text{Gal}(K|\mathbb{Q})$  abelsch ist, gilt  $\overline{\tau(x)} = (\tau F)(x)$  für jedes  $\tau \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\zeta_n), \mathbb{C})$

Daher gilt für jedes  $\tau$ :

$$\left| \tau \frac{x}{Fx} \right|^2 = \frac{\tau x}{\tau Fx} \overline{\left( \frac{\tau x}{\tau Fx} \right)} = \frac{\tau x}{\tau Fx} \overline{\frac{\tau x}{\tau Fx}} = 1.$$

Folglich gilt  $|\tau \frac{x}{Fx}| = 1$  für alle  $\tau$ , und, wenn  $x \in E_K$ , ist  $\frac{x}{Fx}$  eine Einheitswurzel (nach Satz 4.25). Wir erhalten daher einen wohldefinierten Homomorphismus.

$$\phi : E_K \longrightarrow W, \varepsilon \longmapsto \frac{\varepsilon}{F\varepsilon}.$$

Es gilt  $\ker(\phi) = E_{K^+}$  (wegen  $\varepsilon = F\varepsilon \iff \varepsilon \in E_{K^+}$ ).

Für  $\zeta \in W$  gilt  $F(\zeta) = \zeta^{-1}$  also  $\phi(\zeta) = \zeta^2$ . Da  $W$  zyklisch ist, gilt  $(W : W^2) = 2$ , also  $\text{im}(\phi) = W$  oder  $W^2$ . Nach Hinterschaltung der Projektion  $W \rightarrow W/W^2 = \{\pm 1\}$  erhalten wir daher den Homomorphismus  $\psi : E_K \rightarrow \{\pm 1\}$ .

*Behauptung:*  $\ker(\psi) = E_{K^+}W$ .

Beweis der Behauptung: Sei  $\varepsilon \in \ker(\psi) \Rightarrow \phi(\varepsilon) \in W^2 \Rightarrow$  existiert  $\xi \in W : \phi(\varepsilon\xi^{-1}) = 1 \Rightarrow \varepsilon\xi^{-1} \in E_{K^+}$ . Dies zeigt die Behauptung.

$\psi$  induziert somit eine Inklusion  $E_K/WE_{K^+} \hookrightarrow W/W^2 = \{\pm 1\}$ . Es folgt

$$Q := (E_{\mathbb{Q}(\zeta_n)} : WE_{\mathbb{Q}(\zeta_n)^+}) \in \{1, 2\}.$$

Sei zunächst  $n = p^r$ ,  $p$  ungerade Primzahl. Sei  $\varepsilon \in E_K$ . Wir wollen zeigen:  $\frac{\varepsilon}{F(\varepsilon)} \in W^2$ , also  $E_K = \ker \psi = WE_{K^+}$ .

Die Quadrate in  $W \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$  sind gerade von der Form  $\zeta^a$ , mit  $\zeta = \zeta_{p^r}$ ,  $a \in \mathbb{N}$ , während die Nichtquadrate von der Form  $-\zeta^a$  sind.

Sei  $\varepsilon = -F(\varepsilon)\zeta^a$  und  $\varepsilon = b_0 + b_1\zeta + \dots + b_{d-1}\zeta^{d-1}$ ;  $d = \varphi(p^r) = (p-1)p^{r-1}$ . Dann gilt

$$\varepsilon \equiv b_0 + \dots + b_{d-1} \pmod{1-\zeta}.$$

Es gilt aber

$$\begin{aligned} -F(\varepsilon) \cdot \zeta^a &= -b_0\zeta^a - b_1\zeta^a\zeta^{-1} - \dots \\ &\equiv -b_0 - \dots - b_{d-1} \pmod{1-\zeta} \end{aligned}$$

Also  $2\varepsilon \equiv 0 \pmod{1-\zeta}$ . Aber  $(2, 1-\zeta) = 1$ , da  $(1-\zeta) \mid p$  und  $p$  ungerade. Es folgt  $\varepsilon \equiv 0 \pmod{1-\lambda}$  im Widerspruch zu  $\varepsilon$  Einheit. Dieser Widerspruch zeigt  $\frac{\varepsilon}{F(\varepsilon)} \in W^2$ .

Zweiter Fall  $n = 2^r$ ,  $r \geq 2$ : Angenommen es gibt ein  $\varepsilon \in E_K$  mit  $\frac{\varepsilon}{F(\varepsilon)} \in W \setminus W^2$ , d.h.  $\frac{\varepsilon}{F(\varepsilon)} = \xi =$  primitive  $2^r$ -te Einheitswurzel.

Die Konjugierten von  $\xi$  über  $\mathbb{Q}(\mu_4) = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  sind von der Form  $\xi^b$  mit  $0 < b < 2^r$ ,  $b \equiv 1 \pmod{4}$ . Wir schreiben  $N = N_{K|\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}$  und erhalten

$$N(\xi) = \xi^a$$

mit

$$a = \sum_{\substack{0 < b < 2^r \\ b \equiv 1 \pmod{4}}} b = \sum_{j=0}^{2^{r-2}-1} (1 + 4j) = 2^{r-2} + 2^{r-1}(2^{r-2} - 1) \equiv 2^{r-2} \pmod{2^{r-1}}.$$

Es folgt  $2a \equiv 2^{r-1} \pmod{2^r}$ , weshalb  $N(\xi)^2 = \zeta^{2a} \neq 1$ . Daher gilt  $N(\xi) = \pm i$  und wir erhalten

$$(*) \quad \frac{N(\varepsilon)}{N(\bar{\varepsilon})} = \frac{N(\varepsilon)}{N(F\varepsilon)} = N(\xi) = \pm i.$$

Nun ist aber auch  $N(\varepsilon)$  eine Einheit in  $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ , also  $N(\varepsilon) = \{\pm 1, \pm i\}$  und die Gleichung  $(*)$  ist für keinen dieser Werte richtig. Widerspruch, also  $Q = 1$  für  $n = 2^r$ .

Nun sei  $n$  keine Primpotenz. Nach Lemma 6.16 ist  $1 - \zeta_n$  eine Einheit. Wir beachten die Gleichung

$$\frac{1 - \zeta_n}{1 - \bar{\zeta}_n} = -\zeta_n.$$

Um  $Q = 2$  zu zeigen, genügt es,  $-\zeta_n \notin W^2$  nachzuweisen. Angenommen  $-\zeta_n \in W^2$ . Dann gilt für ein  $r$ , dass  $-\zeta_n = (\pm \zeta_n^r)^2 = \zeta_n^{2r}$ , also  $-1 = \zeta_n^{2r-1}$ . Hieraus folgt  $2 \mid n$ , also  $4 \mid n$  (nach unseren Annahmen an  $n$ ). Aus  $\zeta_n^{2r-1} = -1 = \zeta_n^{n/2}$ , folgt

$$\frac{n}{2} \equiv 2r - 1 \pmod{n} \implies \frac{n}{2} \equiv -1 \pmod{2}.$$

Dies steht im Widerspruch zu  $4 \mid n$ . Wir erhalten  $Q = 2$ .  $\square$

## 6.4 Die Fermatsche Vermutung

Fermat 1637: Die Gleichung

$$X^n + Y^n = Z^n$$

hat für  $n \geq 3$  keine nichttrivialen (d.h.  $xyz \neq 0$ ) Lösungen  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ . Bewiesen 1994 durch Andrew Wiles.

Der Fall  $n = 4$  ist elementar, also kann man ohne Einschränkung annehmen  $n = p$  ungerade Primzahl. Außerdem ohne Einschränkung:  $x, y, z$  paarweise teilerfremd.

Fallunterscheidung

„Der 1. Fall“ Nichtexistenz von Lösungen  $(x, y, z)$  von  $X^p + Y^p = Z^p$  mit  $p \nmid xyz$ .

„Der 2. Fall“: ... mit  $p \mid xyz$ .

Der 1. Fall für ist für  $p = 3$  und 5 trivial (Hindernis modulo  $p^2$ ).

**Theorem 6.17** (Kummer). *Ist  $p$  regulär, d.h.  $p \nmid h_K$ ,  $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ , so existieren keine nichttrivialen ganzzahligen Lösungen von  $X^p + Y^p = Z^p$ .*

Unser Ziel ist der Beweis von Kummers Satz im „1. Fall“. Wir können  $p > 5$  annehmen.

Angenommen es existiert eine Lösung  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$  mit  $p \nmid xyz$ . Wir nehmen an, dass  $x, y, z$  paarweise teilerfremd sind (sonst ggT auskürzen). Wegen  $p$  ungerade gilt auch

$$x^p + (-z)^p = (-y)^p,$$

d.h. wir können, wenn gewünscht,  $y$  durch  $-z$  und  $z$  durch  $-y$  ersetzen.

Angenommen es gilt  $x \equiv y \equiv -z \pmod{p}$ . Dann gilt  $-2z^p \equiv z^p \pmod{p} \Rightarrow p \mid z$  Widerspruch. Daher gilt dies nicht und wir können nach eventueller Transformation  $y \mapsto -z$ ,  $z \mapsto -y$ , annehmen, dass  $x \not\equiv y \pmod{p}$ . Wir erhalten die Gleichung:

$$\prod_{i=0}^{p-1} (x + \zeta_p^i y) = z^p$$

in  $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ . Wir schreiben  $\zeta = \zeta_p$

**Lemma 6.18.** *Die Ideale  $(x + \zeta^i y)$ ,  $i = 0, \dots, p-1$ , sind paarweise teilerfremd in  $\mathbb{Z}[\zeta]$ .*

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{P}$  ein Primideal mit  $\mathfrak{P} \mid (x + \zeta^i y)$  und  $\mathfrak{P} \mid (x + \zeta^j y)$ ,  $i \neq j$ . Dann gilt  $\mathfrak{P} \mid (\zeta^i y - \zeta^j y) = (\text{Einheit})(1 - \zeta)y$ . Also  $\mathfrak{P} = (1 - \zeta)$  oder  $\mathfrak{P} \mid y$ .

Aus  $\mathfrak{P} \mid y$  folgt wegen  $\mathfrak{P} \mid (x + \zeta^i y)$  auch  $\mathfrak{P} \mid x$ . Daher sind  $x$  und  $y$  nicht teilerfremd. Widerspruch.

Also gilt  $\mathfrak{P} = (1 - \zeta)$ . Dann gilt  $\zeta^a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}}$  für alle  $a \in \mathbb{Z}$ . Also

$$x + y \equiv x + \zeta^i y \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$$

Wegen  $x + y \in \mathbb{Z}$  folgt  $x + y \equiv 0 \pmod{p}$ . Aber  $z^p = x^p + y^p \equiv (x + y)^p \equiv 0 \pmod{p}$ . Dies gibt  $p \mid z$ . Widerspruch.  $\square$

**Lemma 6.19.** Sei  $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta]$ . Dann existiert ein  $a \in \mathbb{Z}$  mit

$$\alpha^p \equiv a \pmod{p\mathbb{Z}[\zeta]}.$$

*Beweis.* Sei  $\alpha = b_0 + b_1\zeta + \cdots + b_{p-2}\zeta^{p-2}$ . Dann gilt  $\alpha^p \equiv b_0^p + (b_1\zeta)^p + \cdots + (b_{p-2}\zeta^{p-2})^p = b_0^p + \cdots + b_{p-2}^p \pmod{p}$ .  $\square$

**Lemma 6.20.** Sei  $\alpha = a_0 + a_1\zeta + \cdots + a_{p-1}\zeta^{p-1}$  mit  $a_i \in \mathbb{Z}$  und mindestens ein  $a_i = 0$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt in  $\mathbb{Z}[\zeta]$ :

$$n \mid \alpha \iff n \mid a_i \quad \text{für } i = 0, \dots, p-1.$$

*Beweis.* Wegen  $1 + \zeta + \cdots + \zeta^{p-1} = 0$  ist jede Teilmenge der Kardinalität  $p-1$  von  $\{1, \zeta, \dots, \zeta^{p-1}\}$  eine Ganzheitsbasis.  $\square$

*Beweis von Kummers Satz im 1. Fall.* Ist  $x^p + y^p = \prod_{i=0}^{p-1} (x + \zeta^i y) = z^p$ , so erhalten wir die Gleichheit von Idealen  $\prod_{i=0}^{p-1} (x + \zeta^i y) = (z)^p$ .

Die Faktoren links sind nach Lemma 6.18 paarweise teilerfremd, also ist jeder selbst eine  $p$ -Potenz:

$$(x + \zeta^i y) = \mathfrak{a}_i^p, \quad \mathfrak{a}_i \subset \mathbb{Z}[\zeta].$$

Wegen  $p \nmid h_K = \#Cl(K)$ ,  $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ , folgt aus  $\mathfrak{a}_i^p = 0$  in  $Cl(K)$ , dass  $\mathfrak{a}_i = 0$  in  $Cl(K)$ , also ist  $\mathfrak{a}_i$  für alle  $i$  ein Hauptideal. Setze  $\mathfrak{a}_i = (\alpha_i)$ ,  $i = 0, \dots, p-1$ .

Es folgt  $(x + \zeta^i y) = (\alpha_i)^p$ , also  $x + \zeta^i y = (\text{Einheit}) \alpha_i^p$ . Betrachte  $i = 1$ :

$$x + \zeta y = \varepsilon \cdot \alpha^p, \quad \alpha = \alpha_1.$$

Nach Satz 6.15 gilt  $\varepsilon = \zeta^r \varepsilon_+$  mit  $\varepsilon_+ \in E_{K^+}$ . Nach Lemma 6.19 existiert  $a \in \mathbb{Z}$  mit  $\alpha^p \equiv a \pmod{p}$ . Wir erhalten  $x + \zeta y = \zeta^r \varepsilon_+ \alpha^p \equiv \zeta^r \varepsilon_+ a \pmod{p}$ .

Konjugation liefert

$$x + \zeta^{-1} y = \zeta^{-r} \varepsilon_+ \bar{\alpha}^p \equiv \zeta^{-r} \varepsilon_+ a \pmod{p}.$$

Wir erhalten:  $\zeta^{-r} (x + \zeta y) \equiv \zeta^r (x + \zeta^{-1} y)$ , also

$$(*) \quad x + \zeta y - \zeta^{2r} x - \zeta^{2r-1} y \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wären  $1, \zeta, \zeta^{2r}, \zeta^{2r-1}$  paarweise verschieden, so folgte aus Lemma 6.20, dass  $p \mid x$  und  $p \mid y$  im Widerspruch zu unseren Annahmen. Also sind sie nicht paarweise verschieden. Nun gilt  $\zeta \neq 1$  und  $\zeta^{2r-1} \neq \zeta^{2r}$ . Es verblieben die Fälle:

- a)  $1 = \zeta^{2r}$ . Aus  $(*)$  folgt  $x + \zeta y - x - \zeta^{-1} y \equiv 0 \pmod{p}$ . Nach Lemma 6.20 folgt  $p \mid y$ . Widerspruch.
- b)  $1 = \zeta^{2r-1}$  bzw. äquivalent dazu  $\zeta = \zeta^{2r}$ .  $(*)$  ergibt

$$(x - y) - (x - y)\zeta \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nach Lemma 6.20 folgt  $p \mid (x - y)$  im Widerspruch zu  $x \not\equiv y \pmod{p}$ .

c)  $\zeta = \zeta^{2r-1}$ .  $(*)$  gibt:

$$x - \zeta^2 x \equiv 0 \pmod{p}.$$

und Lemma 6.20 liefert den Widerspruch  $p \mid x$ .  $\square$

## 7 Lokalisierung

### 7.1 Lokalisierung in Dedekindringen

**Satz 7.1.** Sei  $A$  ein Dedekindring und  $S \subset A \setminus \{0\}$  eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Dann ist  $S^{-1}A$  ein Dedekindring.

*Beweis.* Sei  $K = Q(A)$ . Wegen  $S^{-1}A \subset K$  ist  $S^{-1}A$  nullteilerfrei. Sei  $x \in K$  ganz über  $S^{-1}A$ , d.h. es gilt eine Gleichung

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{s_{n-1}}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{s_0} = 0$$

mit  $\frac{a_i}{s_i} \in S^{-1}A$ . Multiplikation mit  $s^n$ ,  $s = s_0 \cdots s_{n-1}$ , zeigt, dass  $sx$  ganz über  $A$  ist, also  $sx \in A$  und  $x \in S^{-1}A$ . Daher ist  $S^{-1}A$  ganzabgeschlossen.

Mit  $A$  ist auch  $S^{-1}A$  noethersch (siehe Algebra II, 19.14).

Nach Algebra II, 7.7 (iv) ist jedes Primideal  $\mathfrak{P} \subset S^{-1}A$  von der Form  $\mathfrak{P} = S^{-1}\mathfrak{p}$  für ein Primideal  $\mathfrak{p} \subset A$ ,  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ . Für verschiedene Primideale  $\mathfrak{p} \neq (0)$ ,  $\mathfrak{q} \neq (0)$  in  $A$  gilt  $\mathfrak{p} + \mathfrak{q} = A$ , also  $S^{-1}\mathfrak{p} + S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}A$ . Für jedes Primideal  $(0) \neq \mathfrak{p} \subset A$ ,  $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ , ist daher  $S^{-1}\mathfrak{p} \subset S^{-1}A$  ein Maximalideal. Wir erhalten  $\dim S^{-1}A \leq 1$ .  $\square$

**Definition 7.2.** Ein **diskreter Bewertungsring** ist ein Hauptidealring  $A$  mit genau einem Maximalideal  $\mathfrak{p} \neq (0)$ .

Das Maximalideal ist von der Form  $\mathfrak{p} = (\pi) = \pi A$  mit einem Primelement  $\pi \in A$  und  $\pi$  ist bis auf Assoziiertheit das einzige Primelement in  $A$ . Jedes  $0 \neq a \in A$  hat daher die Form  $a = \varepsilon \cdot \pi^n$ ,  $\varepsilon \in A^\times$ ,  $n \geq 0$ .

Allgemeiner lässt sich jedes Element  $0 \neq a \in K = Q(A)$  eindeutig in der Form

$$a = \varepsilon \pi^n, \quad \varepsilon \in A^\times, \quad n \in \mathbb{Z},$$

schreiben. Der Exponent  $n$  heißt die **Bewertung** von  $a$  und wird mit  $v(a)$  bezeichnet. Er ist durch die Gleichheit gebrochener Ideale

$$(a) = \mathfrak{p}^{v(a)}$$

bestimmt.

Die Bewertung ist eine Funktion  $v : K^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ , die man durch  $v(0) = \infty$  auf ganz  $K$  fortsetzt. Es gilt (mit den üblichen Rechenregeln für das Symbol  $\infty$ )

$$\begin{aligned} v(ab) &= v(a) + v(b), \\ v(a+b) &\geq \min(v(a), v(b)). \end{aligned}$$

**Lemma 7.3.** *Sei  $A$  ein nullteilerfreier Ring. Dann gilt*

$$A = \bigcap_{\mathfrak{m} \text{ max.}} A_{\mathfrak{m}},$$

wobei der Durchschnitt in  $K = Q(A)$  gebildet wird.

*Beweis.* Die Inklusion  $A \subset \bigcap A_{\mathfrak{m}}$  ist klar.

Sei nun  $\frac{a}{b} \in \bigcap A_{\mathfrak{m}}$ ,  $a, b \in A$ ,  $b \neq 0$ . Wir betrachten das Ideal

$$\mathfrak{a} = \{x \in A \mid xa \in (b)\}.$$

Es gilt  $\mathfrak{a} = A$ . Ansonsten gäbe es ein Maximalideal  $\mathfrak{m}$  mit  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ . Wegen  $\frac{a}{b} \in A_{\mathfrak{m}}$  existieren  $c, d \in A$ ,  $d \notin \mathfrak{m}$ , mit  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Es folgt  $ad = bc \in (b)$  und somit  $d \in \mathfrak{a}$  im Widerspruch zu  $d \notin \mathfrak{m}$ . Daher gilt  $1 \in \mathfrak{a}$ ,  $a = bc$  mit  $c \in A$ , also  $\frac{a}{b} = c \in A$ .  $\square$

**Satz 7.4.** *Ein noetherscher nullteilerfreier Ring  $A$  ist genau dann ein Dedekindring, wenn die Lokalisierungen  $A_{\mathfrak{p}}$  für alle Primideale  $\mathfrak{p} \neq (0)$  diskrete Bewertungsringe sind.*

*Beweis.*  $A$  Dedekind  $\stackrel{7.1}{\implies} A_{\mathfrak{p}}$  Dedekind. Des Weiteren ist  $A_{\mathfrak{p}}$  lokal mit Maximalideal  $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \neq (0)$ . Für jedes Element  $a \in (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^n \setminus (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^{n+1}$  (nicht leer nach Korollar 3.58) gilt  $(a) = (\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})^n$ . Wegen  $\bigcap \mathfrak{p}^n = \{0\}$  (Satz 3.62) sind dies die einzigen von  $(0)$  verschiedenen Ideale. Daher ist  $A_{\mathfrak{p}}$  ein Hauptidealring.

Wir zeigen nun die Rückrichtung. Ohne Einschränkung sei  $A$  kein Körper. Wir nehmen nun an, dass  $A_{\mathfrak{p}}$  für jedes  $\mathfrak{p} \neq 0$  ein diskreter Bewertungsring ist. Da Hauptidealringe ganzabgeschlossen sind gilt dies insbesondere für diskrete Bewertungsringe. Ist nun  $a \in K$  ganz über  $A$ , so ist  $a$  ganz über  $A_{\mathfrak{p}}$  für alle  $\mathfrak{p}$  und  $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \neq 0} A_{\mathfrak{p}} \subset \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} = A$  (siehe Lemma 7.3). Daher ist  $A$  ganzabgeschlossen.

Sei nun  $\mathfrak{p} \neq 0$  ein Primideal in  $A$ . Es gibt es eine inklusionserhaltende 1:1 Korrespondenz

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primid. } \mathfrak{q} \subset A \\ \text{mit } \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Primid. in} \\ A_{\mathfrak{p}} \end{array} \right\}$$

Da  $A_{\mathfrak{p}}$  ein diskreter Bewertungsring ist, kommen links für  $\mathfrak{q}$  nur  $\mathfrak{p}$  und das Nullideal infrage. Wir erhalten  $\dim A \leq 1$ .  $\square$

Ist  $A$  ein Dedekindring und  $\mathfrak{p} \subset A$  ein Primideal,  $\mathfrak{p} \neq (0)$ , so ist  $A_{\mathfrak{p}}$  ein diskreter Bewertungsring. Auf  $K = Q(A) = Q(A_{\mathfrak{p}})$  erhalten wir daher eine Funktion

$$\begin{aligned} v_{\mathfrak{p}} : K &\longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ x &\longmapsto v_{\mathfrak{p}}(x) = v_{A_{\mathfrak{p}}}(x), \end{aligned}$$

die  **$\mathfrak{p}$ -Bewertung** auf  $K$ .

## 7.2 Lokalisierung in Zahlkörpern

Sei  $K$  ein Zahlkörper und  $S$  eine Teilmenge der Menge der Primideale  $\neq 0$  von  $\mathcal{O}_K$ .

**Definition 7.5.**

$$\mathcal{O}_{K,S} = \left\{ \frac{a}{b} \in K \mid a, b \in \mathcal{O}_K, b \notin \mathfrak{p} \ \forall \mathfrak{p} \notin S \right\}$$

heißt der Ring der  **$S$ -ganzen Zahlen in  $K$** .  $E_S(K) := \mathcal{O}_{K,S}^\times$  heißt die **Gruppe der  $S$ -Einheiten von  $K$** .  $Cl_S(K) := Cl(\mathcal{O}_{K,S})$  heißt die  **$S$ -Idealklassengruppe von  $K$** .

**Bemerkung 7.6.**  $S = \emptyset \implies \mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_K$ .

Sei

$$T = \{b \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\} \mid \mathfrak{p} \nmid (b) \text{ für alle } \mathfrak{p} \notin S\}.$$

Dann gilt  $\mathcal{O}_{K,S} = T^{-1}\mathcal{O}_K$ , insbesondere ist  $\mathcal{O}_{K,S}$  ein Dedekindring.

**Satz 7.7.** Es ist  $\mathfrak{p}\mathcal{O}_{K,S} = \mathcal{O}_{K,S}$  für  $\mathfrak{p} \in S$  und für  $\mathfrak{p} \notin S$  ist  $\mathfrak{p}\mathcal{O}_{K,S}$  ein Primideal. Wir haben eine  $1:1$ -Korrespondenz

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primideale } \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \\ \mathfrak{p} \notin S \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Primideale} \\ \text{in } \mathcal{O}_{K,S} \end{array} \right\}.$$

*Beweis.* Wir müssen zeigen:

$$\mathfrak{p} \notin S \iff \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \setminus T,$$

wobei  $T = \{b \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\} \mid \mathfrak{p} \nmid (b) \ \forall \mathfrak{p} \notin S\}$ .

Sei  $b \in T$ . Dann hat die Primideal-Zerlegung von  $(b)$  die Gestalt

$$(b) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \dots \mathfrak{p}_n^{e_n} \quad \text{mit } \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in S.$$

Für  $\mathfrak{p} \notin S$  folgt  $b \notin \mathfrak{p}$ , also  $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \setminus T$ .

Sei umgekehrt  $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \setminus T$ . Wegen der Endlichkeit der Klassenzahl gilt  $\mathfrak{p}^m = (a)$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathcal{O}_K$ . Es gilt  $a \in (a) = \mathfrak{p}^m \subset \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K \setminus T$ , also  $a \notin T$  und wegen  $(a) = \mathfrak{p}^m$  folgt nach Definition  $\mathfrak{p} \notin S$ .  $\square$

**Definition 7.8.** Wir nennen die Gruppe  $J(\mathcal{O}_{K,S})$  die  **$S$ -Idealgruppe von  $K$** . Bezeichnung:  $J_S(K)$ .

Die Zuordnung  $\mathfrak{a} \subset K \mapsto \mathcal{O}_{K,S}\mathfrak{a} \subset K$ , respektiert Produkte gebrochener Ideale und definiert einen Homomorphismus

$$J(K) \longrightarrow J_S(K).$$

**Korollar 7.9.** *Der natürliche Homomorphismus*

$$J(K) \longrightarrow J_S(K)$$

*ist surjektiv. Sein Kern ist die von den Primidealen in  $S$  erzeugte Untergruppe von  $J(K)$ .*

*Beweis.* Es gilt  $J(K) =$  freie abelsche Gruppe über die Primideale  $\neq (0)$  in  $\mathcal{O}_K$   $J_S(K) =$  freie abelsche Gruppe über die Primideale  $\neq (0)$  in  $\mathcal{O}_{K,S}$ .

Nach Satz 7.7 schickt die Abbildung  $J(K) \rightarrow J_S(K)$  jedes Primideal  $\mathfrak{p} \notin S$  auf ein Primideal, jedes  $\mathfrak{p} \in S$  auf das neutrale Element und jedes Primideal in  $\mathcal{O}_{K,S}$  liegt im Bild. Dies zeigt alle Aussagen  $\square$

Der Homomorphismus in Korollar 7.9 überführt Hauptideale in Hauptideale, daher erhalten wir einen induzierten Homomorphismus

$$Cl(K) \longrightarrow Cl_S(K).$$

**Satz 7.10.** *Der natürliche Homomorphismus  $Cl(K) \rightarrow Cl_S(K)$  ist surjektiv. Sein Kern ist die Untergruppe von  $Cl(K)$ , die von den Klassen der Primideale aus  $S$  erzeugt wird. Insbesondere ist  $Cl_S(K)$  eine endliche Gruppe.*

*Beweis.* Die Surjektivität folgt aus Korollar 7.9. Ist  $0 \neq \mathfrak{a} \subset K$  ein gebrochenes  $\mathcal{O}_K$ -Ideal und gilt  $\mathfrak{a}\mathcal{O}_{K,S} = a\mathcal{O}_{K,S}$  für ein  $a \in K^\times$ , so gilt in  $J(K)$  nach Korollar 7.9 dass

$$\mathfrak{a} = a\mathcal{O}_K \cdot \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{e_n}$$

mit  $\mathfrak{p}_i \in S$  und gewissen  $e_i \in \mathbb{Z}$ . Umgekehrt bildet sich jedes Ideal der Form  $a\mathcal{O}_K \cdot \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{e_n}$  auf ein  $\mathcal{O}_{K,S}$ -Hauptideal ab.  $\square$

**Satz 7.11.** *Wir erhalten eine exakte Folge:*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow E(K) &\xrightarrow{f_1} E_S(K) \xrightarrow{f_2} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} K^\times / (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}^\times \\ &\xrightarrow{f_3} Cl(K) \xrightarrow{f_4} Cl_S(K) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

*Es gilt  $K^\times / (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}^\times \cong \mathbb{Z}$  für alle  $\mathfrak{p}$ .*

*Beweis.* Wir definieren zunächst die Abbildungen:

$f_1$  ist die natürliche Inklusion.

$f_2$  ist die Komposition

$$E_S(K) \longrightarrow K^\times \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} K^\times / (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}^\times$$

$f_4$  ist die Abbildung des letzten Satzes.

Die zum diskreten Bewertungsring  $(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}$  gehörige Bewertung

$$v_{\mathfrak{p}} : K^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist surjektiv und hat den Kern  $(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}^{\times}$ , also  $K^{\times}/(\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}^{\times} \cong \mathbb{Z}$ . Bezuglich dieser Identifikation definieren wir  $f_3((a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in S}) :=$  die Klasse von  $\prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}}$  in  $Cl(K)$ .

Nun zeigen wir Exaktheit:

Exaktheit bei  $E_S(K)$ :

Nach Lemma 7.3 und Satz 7.7 gilt  $E_S(K) = \bigcap_{\mathfrak{p} \notin S} (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}^{\times}$ . Daher gilt für  $x \in E_S(K)$

$$x \in E(K) \iff x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in S} (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}^{\times} \iff$$

$$v_{\mathfrak{p}}(x) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{p} \in S \iff x \in \ker(f_2).$$

Exaktheit in der Mitte: Es sei  $(a_{\mathfrak{p}}) \in \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} \mathbb{Z}$  mit  $\prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}} = 0 \in Cl(K)$  gegeben. Dann gilt in  $J(K)$ :

$$\prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}} = a \mathcal{O}_K, \quad a \in K^{\times}.$$

Daraus folgt  $a \in (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}^{\times}$  für alle  $\mathfrak{p} \notin S$ , d.h.  $a \in E_S(K)$  und  $f_2(a) = (a_{\mathfrak{p}})$ . Schließlich folgt die Exaktheit bei  $Cl(K)$  aus Korollar 7.9.  $\square$

Wir fassen die Situation noch einmal in einem exakten kommutativen Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & 0 & & & & \\
 & & & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & & & \bigoplus_{\mathfrak{p} \in S} \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & E(K) & \longrightarrow & K^{\times} & \longrightarrow & J(K) & \longrightarrow & Cl(K) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & E_S(K) & \longrightarrow & K^{\times} & \longrightarrow & J_S(K) & \longrightarrow & Cl_S(K) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & & 0. & & 
 \end{array}$$

**Korollar 7.12.** Sei  $S$  endlich. Dann gilt:

$$E_S(K) \cong \mu(K) \oplus \mathbb{Z}^{\#S+r_1+r_2-1}.$$

*Beweis.* Es gilt  $\mu(K) = \text{Torsion in } E(K) = \text{Torsion in } E_S(K) = \text{Torsion in } K^\times$ . Da  $Cl(K)$  und  $Cl_S(K)$  endlich sind, erhält man aus Satz 7.11

$$\begin{aligned} \text{Rg}_{\mathbb{Z}} E_S(K) &= \text{Rg}_{\mathbb{Z}} E(K) + \text{Rg}_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}} K^\times / (\mathcal{O}_K)_{\mathfrak{p}}^\times \\ &= r_1 + r_2 - 1 + \#S. \end{aligned}$$

□

*Schlussbemerkung für Hörer mit Kenntnissen der algebraischen Geometrie* (kein offizieller Vorlesungsstoff):

**Satz:** Jede Zariski-offene Teilmenge  $U$  von  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$  ist affin. Ist  $U \neq \emptyset$ , so gilt  $U = \text{Spec } \mathcal{O}_{K,S}$  mit  $S = \text{Spec } \mathcal{O}_K \setminus U$ .

*Beweis.* Die leere Menge ist das Spektrum des Nullrings. Sei nun  $\emptyset \neq U \subset \text{Spec } \mathcal{O}_K$  offen. Dann gilt  $U = \text{Spec } \mathcal{O}_K \setminus S$  für eine endliche Menge  $S = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$  von Primidealen  $\neq (0)$  in  $\mathcal{O}_K$ . Da die Idealklassengruppe torsion (sogar endlich) ist, finden wir Exponenten  $e_i$ , so dass

$$\mathfrak{p}_i^{e_i} = (f_i), \quad f_i \in \mathcal{O}_K.$$

Wir setzen  $f = f_1 \cdots f_n$ .

Es gilt  $\mathfrak{p} \supset (f) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in S$  und daher

$$U = \text{Spec } \mathcal{O}_K \setminus V((f)) = D(f).$$

Daher gilt (bekanntes Lemma aus der Algebraischen Geometrie)

$$U = \text{Spec}((\mathcal{O}_K)_f), \quad \text{wobei } (\mathcal{O}_K)_f = (1, f, f^2, \dots)^{-1} \mathcal{O}_K.$$

Insbesondere ist  $U$  affin. Wegen  $f^{-1} \in \mathcal{O}_{K,S}$ , haben wir eine natürliche Inklusion

$$(\mathcal{O}_K)_f \subset \mathcal{O}_{K,S}.$$

Wir zeigen Gleichheit. Sei  $\frac{a}{b} \in \mathcal{O}_{K,S}$  beliebig, also  $a, b \in \mathcal{O}_K$ ,  $\mathfrak{p} \nmid (b) \forall \mathfrak{p} \notin S$ , d.h.  $(b) = \mathfrak{p}_1^{g_1} \cdots \mathfrak{p}_n^{g_n}$ . Dann gilt mit  $e = e_1 \cdots e_n$ :

$$\begin{aligned} (b)^e &= (\mathfrak{p}_1^{e_1})^{g_1 e_2 \cdots e_n} \cdots (\mathfrak{p}_n^{e_n})^{g_n e_1 \cdots e_{n-1}} \\ &= (f_1)^{g_1 e_2 \cdots e_n} \cdots (f_n)^{g_n e_1 \cdots e_{n-1}}. \end{aligned}$$

Daher existiert ein  $\varepsilon \in E_K$  mit  $b^e = \varepsilon f_1^{g_1 e_2 \cdots e_n} \cdots f_n^{g_n e_1 \cdots e_{n-1}}$  und wir erhalten

$$\frac{a}{b} = \frac{ab^{e-1}}{b^e} = \frac{ab^{e-1}}{\varepsilon f_1^{g_1 e_2 \cdots e_n} \cdots f_n^{g_n e_1 \cdots e_{n-1}}} = \frac{ab^{e-1} f_1^? \cdots f_n^? \cdot \varepsilon^{-1}}{f^?} \in (\mathcal{O}_K)_f.$$

□

## 8 Bewertungstheorie

### 8.1 Bewertungen

Sei  $K$  ein Körper.

**Definition 8.1.** Eine **Bewertung** auf  $K$  ist eine Funktion  $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit:

- (a)  $|x| = 0 \iff x = 0$ .
- (b)  $|xy| = |x| \cdot |y|$ .
- (c) Es existiert eine Konstante  $C$ , so dass  $|1+x| \leq C$  für alle  $x \in K$  mit  $|x| \leq 1$ .

**Definition 8.2.** Die Bewertung  $|x| = 1$  für alle  $x \neq 0$  und  $|x| = 0$  heißt die **triviale Bewertung** auf  $K$ .

**Bemerkungen 8.3.** 1) Wegen  $|1| = |1 \cdot 1| = |1|^2$  folgt  $|1| = 1$ .

2) Für eine Einheitswurzel  $\zeta \in K$  mit  $\zeta^n = 1$  gilt  $|\zeta|^n = 1 \Rightarrow |\zeta| = 1$ . Daher existiert auf einem endlichen Körper nur die triviale Bewertung. Im Folgenden werden wir implizit annehmen, dass alle betrachteten Bewertungen nichttrivial sind (insbesondere ist  $K$  unendlich).

3) Ist  $|\cdot|$  eine Bewertung und  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ , so ist auch  $|\cdot|^\alpha$  eine Bewertung (mit der Konstanten  $C^\alpha$  statt  $C$ ).

**Definition 8.4.** Zwei Bewertungen  $|\cdot|_1$  und  $|\cdot|_2$  auf  $K$  heißen **äquivalent**, wenn ein  $\alpha > 0$  mit  $|x|_2 = |x|_1^\alpha$  für alle  $x \in K$  existiert.

**Bemerkung 8.5.** Viele Autoren fordern statt (c) die schärfere Bedingung ( $\Delta$ -Ungleichung)

$$(c)' \quad |x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in K.$$

Aus  $(c)'$  folgt (c) mit  $C = 2$ . Allerdings bleibt nach Ersetzung von (c) durch  $(c)'$  die Bemerkung 8.3 3.) nicht mehr richtig.

**Satz 8.6.** (i) Jede Bewertung ist äquivalent zu einer, für die (c) mit  $C = 2$  gilt.

(ii) Ist  $|\cdot|$  eine Bewertung, für die (c) mit  $C = 2$  gilt, so gilt (c)'.

*Beweis.* (i) Ersetze  $|\cdot|$  durch  $|\cdot|^{\log_C 2}$ .

(ii) Angenommen  $|x + 1| \leq 2$  für alle  $x$  mit  $|x| \leq 1$ . Seien  $x, y \in K$  beliebig und ohne Einschränkung  $|x| \geq |y|$ . Der Fall  $|y| = 0$ , also  $y = 0$  ist trivial.

Wegen  $|\frac{y}{x}| \leq 1$  folgt  $|\frac{y}{x} + 1| \leq 2$ , also  $|x + y| \leq 2|x|$ . Wir erhalten

$$|x + y| \leq 2 \cdot \max(|x|, |y|)$$

für beliebige  $x, y \in K$ . Per Induktion gilt dies für  $x_1, \dots, x_{2^r} \in K$ :

$$\left| \sum_{i=1}^{2^r} x_i \right| \leq 2^r \max |x_i|.$$

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $2^{r-1} < n \leq 2^r$ . Setzt man  $x_{n+1} = \dots = x_{2^r} = 0$ , erhält man für beliebige  $x_1, \dots, x_n \in K$ :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq 2^r \cdot \max |x_i| \leq 2n \cdot \max |x_i|.$$

Insbesondere gilt

$$|n| \leq 2 \cdot n \cdot |1| = 2n.$$

Für  $x, y \in K$  folgt

$$\begin{aligned} |x + y|^n &= \left| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \right| \leq 2(n+1) \max_{0 \leq i \leq n} \left| \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \right| \\ &\leq 4(n+1) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} |x|^i |y|^{n-i} \\ &= 4(n+1)(|x| + |y|)^n. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$|x + y| \leq \sqrt[n]{4(n+1)} \cdot (|x| + |y|)$$

und  $n \rightarrow \infty$  gibt (c)'.

□

## 8.2 Arten von Bewertungen

**Definition 8.7.**  $|\cdot|$  heißt **diskrete** Bewertung, wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass gilt:

$$1 - \delta < |x| < 1 + \delta \Rightarrow |x| = 1.$$

**Definition 8.8.** Sei  $|\cdot|$  eine Bewertung auf  $K$ . Setzt man

$$v(x) = \begin{cases} \infty, & \text{wenn } x = 0, \\ -\log|x|, & \text{wenn } x \neq 0, \end{cases}$$

so erhält man eine Funktion

$$v : K \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Diese heißt die assoziierte **Exponentialbewertung**. Ist  $|\cdot|$  diskret, so ist das Bild des durch die assoziierte Exponentialbewertung  $v$  gegebenen Homomorphismus

$$v : K^\times \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine diskrete Untergruppe von  $\mathbb{R}$ , also nach Satz 4.3 ein Gitter in  $\mathbb{R}$ , d.h.  $v(K^\times) = a\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  mit einer reellen Zahl  $a > 0$ . Indem man  $|\cdot|$  durch  $|\cdot|^{a^{-1}}$  ersetzt, erreicht man  $v(K^\times) = \mathbb{Z}$ .

**Definition 8.9.** Eine Bewertung  $|\cdot|$  heißt **nicht-archimedisch**, wenn Bedingung (c) mit  $C = 1$  erfüllt ist, d.h.

$$|x + y| \leq \max(|x|, |y|) \quad \forall x, y \in K.$$

Ansonsten heißt  $|\cdot|$  **archimedisch**.

Wir werden später zeigen, dass jede diskrete Bewertung nicht-archimedisch ist.

**Bemerkungen 8.10.** 1) Sind  $|\cdot|_1$  und  $|\cdot|_2$  äquivalent, so gilt

$$|\cdot|_1 \text{ nicht-archimedisch} \iff |\cdot|_2 \text{ nicht-archimedisch.}$$

2) Für die Exponentialbewertung einer nicht-archimedischen Bewertung gilt

$$v(x + y) \geq \min(v(x), v(y)).$$

3) Ist  $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  eine Abbildung mit

- $v(x) = \infty \iff x = 0$
- $v(xy) = v(x) + v(y)$
- $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$

so ist  $|x| = e^{-v(x)}$  eine diskrete nicht-archimedische Bewertung auf  $K$ .

4) Ist  $|\cdot|$  nicht-archimedisch, so gilt

$$|x + y| = |x|, \quad \text{falls } |y| < |x|.$$

Grund:  $|x + y| \leq \max(|x|, |y|) = |x|$ . Andererseits:  $|x| = |(x + y) - y| \leq \max(|x|, |y|)$ . Wegen  $|y| < |x|$  folgt  $|x| \leq |x + y|$ .

In Termen der assoziierten Exponentialbewertung bedeutet dies:

$$v(x + y) = v(x), \quad \text{falls } v(y) > v(x).$$

**Definition 8.11.** Sei  $|\cdot|$  eine nicht-archimedische Bewertung auf  $K$ . Dann heißt

$$\mathcal{O} = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$$

der **Bewertungsring** von  $|\cdot|$ .

**Bemerkung 8.12.** Für  $x, y \in K$  mit  $|x|, |y| \leq 1$  gilt  $|x + y| \leq 1$  und  $|xy| \leq 1$ . Daher ist  $\mathcal{O}$  ein Ring.

**Lemma 8.13.**  $\mathcal{O}$  ist lokal mit Maximalideal

$$\mathfrak{p} = \{x \in K \mid |x| < 1\}.$$

$|\cdot|$  ist genau dann diskret, wenn  $\mathfrak{p}$  ein Hauptideal ist. Dann ist  $\mathcal{O}$  ein diskreter Bewertungsring.

*Beweis.* Offenbar ist  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ( $|x| = 1 = |y| \Rightarrow |xy| = 1$ ). Es gilt für  $x \in K^\times$

$$x \in \mathcal{O}^\times \iff x \in \mathcal{O} \quad \text{und} \quad x^{-1} \in \mathcal{O} \iff |x| = 1.$$

Daher gilt  $\mathcal{O} = \mathcal{O}^\times \cup \mathfrak{p} \implies \mathcal{O}$  ist lokal mit Maximalideal  $\mathfrak{p}$ . Nun sei  $|\cdot|$  diskret. Wir ersetzen der Bequemlichkeit halber  $|\cdot|$  durch eine äquivalente Bewertung so dass die assoziierte Exponentialbewertung  $v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  das Bild  $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  hat. Sei  $\pi \in \mathcal{O}$  ein Element mit  $v(\pi) = 1$ . Für ein beliebiges Ideal  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}$  gilt dann  $\mathfrak{a} = \pi^n \mathcal{O}$  mit  $n = \min(v(x) \mid x \in \mathfrak{a}) \implies \mathcal{O}$  ist diskreter Bewertungsring, insbesondere ist  $\mathfrak{p} = (\pi)$  ein Hauptideal.

Ist umgekehrt  $\mathfrak{p} = (\pi)$  ein Hauptideal, so gilt für  $x \in \mathcal{O}$ :

$$|x| < 1 \implies x \in \mathfrak{p} \implies x = \pi y, \quad y \in \mathcal{O} \implies |x| = |\pi| \cdot |y| \leq |\pi|.$$

Außerdem:  $|x| > 1 = |x^{-1}| < 1 \implies |x^{-1}| \leq |\pi| \Rightarrow |x| \geq |\pi|^{-1}$ . Daher ist  $|\cdot|$  diskret.  $\square$

**Bemerkung 8.14.** Ist  $A$  ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper  $K$  und Primideal  $\mathfrak{p}$ , so setzt man für  $x \in K$ ,  $x \neq 0$ , mit  $xA = \mathfrak{p}^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $v(x) = n$ . Man erhält eine diskrete Exponentialbewertung  $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ , indem man  $v(0) = \infty$  setzt. Der Bewertungsring  $\mathcal{O}$  der assoziierten Bewertung  $|x| = e^{-v(x)}$  ist gerade  $A$ . D.h.:

$A$  ist diskreter Bewertungsring  $\iff A$  ist Bewertungsring für eine diskrete nicht-archimedische Bewertung auf  $K = Q(A)$ .

Für  $n \in \mathbb{Z}$  setzen wir  $|n| = |n \cdot 1_K|$ .

**Satz 8.15.** Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $|\cdot|$  ist nicht-archimedisch.
- (ii)  $\{|n|, n \in \mathbb{Z}\}$  ist beschränkt.
- (iii)  $|n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (iii). Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$|n| = |1_K + \dots + 1_K| \leq |1_K| = 1.$$

Weiterhin gilt  $|-1| = 1$ , da  $-1$  Einheitswurzel. Für  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n < 0$ , folgt  $|n| = |-1| \cdot |-n| \leq 1$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) ist trivial.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Wir ersetzen zunächst  $|\cdot|$  durch eine äquivalente Bewertung mit  $\Delta$ -Ungleichung. Sei  $|n| \leq c$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Sei  $x \in K$  mit  $|x| \leq 1$  gegeben. Dann gilt für  $n \in \mathbb{N}$  beliebig

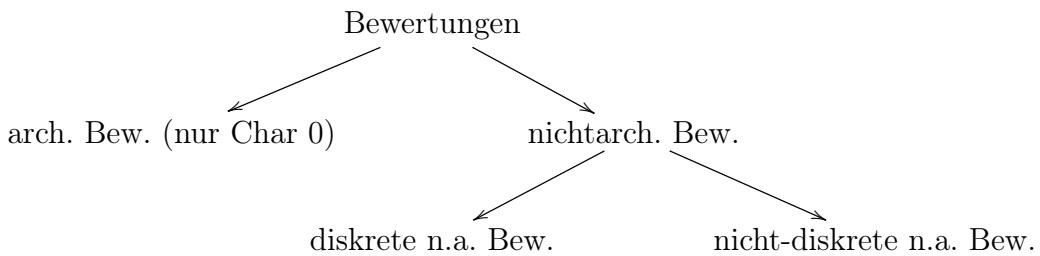
$$\begin{aligned} |1+x|^n &= |(1+x)^n| = \left| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^i \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \left| \binom{n}{i} \right| \cdot |x|^i \\ &\leq c \cdot (n+1). \end{aligned}$$

Es folgt  $|1+x| \leq \sqrt[n]{c(n+1)}$ . Im Limes  $n \rightarrow \infty$  folgt  $|1+x| \leq 1$ .  $\square$

**Korollar 8.16.** Gilt  $\text{char}(K) = p > 0$ , so ist jede Bewertung auf  $K$  nicht-archimedisch.

*Beweis.* Für  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $n \cdot 1_K$  entweder gleich 0 oder eine Einheitswurzel. Es folgt  $|n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

Bild:



**Beispiel 8.17.** •  $|\cdot|_p$  auf  $\mathbb{Q}_p$  ist nicht-archimedisch und diskret.

- $|\cdot|_{\text{standard}}$  auf  $\mathbb{R}$  ist archimedisch und erfüllt  $\Delta$ -Ungleichung.
- $|\cdot|_{\text{standard}}^2$  auf  $\mathbb{C}$  ist archimedisch und erfüllt nicht die  $\Delta$ -Ungleichung.

Wir bezeichnen den Standardbetrag auf  $\mathbb{Q}$  mit  $|\cdot|_\infty$ .

**Satz 8.18.** (Satz von Ostrowski). Jede Bewertung auf  $\mathbb{Q}$  ist äquivalent zu  $|\cdot|_\infty$  oder zu einer Bewertung  $|\cdot|_p$ , mit einer Primzahl  $p$ .

**Bemerkung 8.19.** Diese Bewertungen sind paarweise nicht äquivalent.

*Beweis.* Ohne Einschränkung erfülle  $|\cdot|$  die  $\Delta$ -Ungleichung. Seien  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $n, m > 1$  beliebig. Dann entwickeln wir  $m$  in der Form  $m = a_0 + a_1 n + \dots + a_r n^r$  mit  $a_i \in \{0, \dots, n-1\}$  und  $n^r \leq m$ . Dann gilt  $r \leq \frac{\log m}{\log n}$  und

$$|a_i| \leq |1 + \dots + 1| \leq a_i |1| \leq n.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} |m| &\leq \sum |a_i| |n|^i \leq (\sum |a_i|) \max(1, |n|^r) \\ &\leq \left(1 + \frac{\log m}{\log n}\right) \cdot n \cdot \max\left(1, |n|^{\frac{\log m}{\log n}}\right). \end{aligned}$$

Ersetzen wir  $m$  durch  $m^k$ , erhalten wir

$$|m| = \sqrt[k]{|m^k|} \leq \sqrt[k]{1 + k \frac{\log m}{\log n}} \sqrt[k]{n} \max\left(1, |n|^{\frac{\log m}{\log n}}\right)$$

$k \rightarrow \infty$  ergibt  $|m| \leq \max\left(1, |n|^{\frac{\log m}{\log n}}\right)$ .

1. Fall: Es existiert ein  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 1$ , mit  $|m| > 1$ . Nach der obigen Ungleichung und wegen  $\frac{\log m}{\log n} > 0$  folgt  $|n| > 1$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 1$ . Für beliebige  $n, m > 1$  gilt  $|m|^{\frac{1}{\log m}} \leq |n|^{\frac{1}{\log n}}$  und weil wir die Rollen vertauschen können folgt

$$|m|^{\frac{1}{\log m}} = |n|^{\frac{1}{\log n}} =: C \quad (\text{Konstante})$$

Folglich:  $|n| = C^{\log n}$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n > 1$ , also

$$\begin{aligned} |n| &= e^{(\log C) \cdot \log(n)} \\ &= n^{\log C} \end{aligned}$$

Dies setzt sich auf alle  $x \in \mathbb{Q}^\times$ ,  $x > 0$ , fort und wegen  $|-x| = |x|$  folgt

$$|\cdot| = |\cdot|_\infty^{\log C}.$$

2. Fall:  $|a| \leq 1 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ . Insbesondere ist  $|\cdot|$  nicht-archimedisch. Da  $|\cdot|$  nach unserer Generalannahme nicht die triviale Bewertung ist, existiert eine Primzahl  $p$  mit  $|p| < 1$  (Primzahlzerlegung). Die Menge

$$\mathfrak{a} = \{a \in \mathbb{Z} \mid |a| < 1\}$$

ist dann ein Ideal mit  $p\mathbb{Z} \subset \mathfrak{a} \subsetneq \mathbb{Z}$ ; folglich  $\mathfrak{a} = p\mathbb{Z}$ . Sei nun  $a \in \mathbb{Z}$  und  $a = p^m b$  mit  $p \nmid b$ , also  $b \notin \mathfrak{a}$ , d.h.  $|b| = 1$ . Dann gilt

$$|a| = |p|^m = |p|^{v_p(a)} = |a|_p^s \quad \text{mit} \quad s = -\frac{\log |p|}{\log p}.$$

Dies setzt sich auf beliebiges  $a \in \mathbb{Q}$  fort  $\Rightarrow |\cdot|$  ist äquivalent zu  $|\cdot|_p$ .  $\square$

**Korollar 8.20.** *Jede diskrete Bewertung ist nicht-archimedisch.*

*Beweis.* Wegen Korollar 8.16 sei ohne Einschränkung  $\text{char}(K) = 0$ , also  $\mathbb{Q} \subset K$ . Wäre  $|\cdot|$  archimedisch, so gilt dies nach Satz 8.15 auch für die Einschränkung von  $|\cdot|$  auf  $\mathbb{Q}$ . Diese ist nach Satz 8.18 äquivalent zu  $|\cdot|_\infty$ , aber  $|\cdot|_\infty$  ist nicht diskret. Widerspruch.  $\square$

Sei  $k$  ein Körper und  $K = k(T)$ . Für jedes Primideal  $\mathfrak{p} \subset k[T]$  erhalten wir die Exponentialbewertung  $v_{\mathfrak{p}} : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ . Dazu haben wir die Gradbewertung:

$$v_{\infty} : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \quad \frac{f}{g} \mapsto \deg g - \deg f.$$

Wählt man ein  $c$ ,  $0 < c < 1$ , so ist  $|x|_v = c^{v_v(x)}$ ,  $v = \text{Primideal}$  oder  $v = \infty$  eine Bewertung auf  $K$ , deren Einschränkung auf  $k$  trivial ist. Diese Bewertungen sind paarweise inäquivalent.

**Satz 8.21.** *Jede Bewertung  $|\cdot|$  auf  $K$ , deren Einschränkung auf  $k$  trivial ist, ist äquivalent zu einer der oben beschriebenen.*

**Bemerkung 8.22.** Ist  $k$  endlich, so ist die Einschränkung auf  $k$  automatisch trivial.

*Beweis.* Nach Satz 8.15 ist  $|\cdot|$  nicht-archimedisch.

1. Fall:  $|f| \leq 1$  für alle  $f \in k[T]$ . Wie im Fall  $k = \mathbb{Q}$  schließt man die Existenz eines Primpolynoms  $p \in k[T]$  mit  $|p| < 1$ . Dann gilt mit  $\mathfrak{a} = \{f \in k[T] \mid |f| < 1\}$

$$pk[T] \subseteq \mathfrak{a} \subsetneq k[T]$$

wie vorher folgt  $\mathfrak{a} = pk[T]$  und  $|\cdot| \sim |\cdot|_p$ .

2. Fall:  $|f| > 1$  für ein  $f \in k[T]$ . Sei  $f = a_n T^n + \dots + a_0$ .

Da  $|\cdot|$  n.a. ist, folgt

$$1 < |f| \leq \max_{0 \leq i \leq n} |T|^i \Rightarrow c := |T| > 1.$$

Damit gilt:  $|a_n T^n| > |a_i T^i|$  für  $i = 0, \dots, n-1$ , und damit  $|f| = |a_n T^n| = c^n = c^{\deg f}$ .  $\square$

## 8.3 Topologien zu Bewertungen

Sei  $K$  ein Körper und  $|\cdot|$  eine Bewertung auf  $K$ .

**Definition 8.23.** Die zu  $|\cdot|$  gehörige Topologie auf  $K$  ist dadurch gegeben, dass man die Mengen

$$M_\varepsilon = \{x \in K \mid |x| < \varepsilon\}$$

als Umgebungsbasis der 0 nimmt.

**Bemerkungen 8.24.** 1) Äquivalente Bewertungen definieren die gleiche Topologie.

2) Ist  $|\cdot|$  nicht-archimedisch, so sind die  $M_\varepsilon$  Untergruppen von  $(K, +)$ . Die Topologie ist z.B. durch die fallende Folge von Untergruppen

$$M_1 \supset M_{\frac{1}{2}} \supset M_{\frac{1}{3}} \dots$$

gegeben.

3) Erfüllt  $|\cdot|$  die  $\Delta$ -Ungleichung, so ist die Topologie durch die Metrik  $d(x, y) := |x - y|$  gegeben.

4)  $K$  wird zum topologischen Körper, d.h. alle algebraischen Operatoren sind stetig.

**Satz 8.25.** Für zwei Bewertungen  $|\cdot|_1$  und  $|\cdot|_2$  auf  $K$  sind äquivalent:

- (i)  $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$ ,
- (ii)  $|\cdot|_1$  und  $|\cdot|_2$  induzieren die gleiche Topologie auf  $K$ ,
- (iii)  $\{x \in K \mid |x|_1 \leq 1\} \subset \{x \in K \mid |x|_2 \leq 1\}$ .

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) klar.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Für jede Bewertung  $|\cdot|$  gilt:  $|x| < 1 \iff x^n$  konvergiert gegen 0. Daher:  $|x| > 1 \iff x^{-n}$  konvergent gegen 0.

Für  $|\cdot|_1$  und  $|\cdot|_2$  folgt daher

$$\{x \in K \mid |x|_1 \leq 1\} = \{x \in K \mid |x|_2 \leq 1\}.$$

Insbesondere gilt (iii).

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Sei  $y \in K$  ein fixiertes Element und  $|y|_2 > 1$ , also auch  $|y|_1 > 1$ . Sei  $x \in K$ ,  $x \neq 0$ . Dann gilt  $|x|_1 = |y|_1^\alpha$  für ein  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Sei  $m_i/n_i$ ,  $n_i > 0$ , eine Folge rationaler Zahlen, die von oben gegen  $\alpha$  konvergiert. Dann gilt

$$|x|_1 = |y|_1^\alpha \leq |y|_1^{m_i/n_i},$$

also

$$\left| \frac{x^{n_i}}{y^{m_i}} \right|_1 \leq 1.$$

Dann folgt

$$\left| \frac{x^{n_i}}{y^{m_i}} \right|_2 \leq 1 \Rightarrow |x|_2 \leq |y|_2^{m_i/n_i}.$$

Ist nun  $m_i/n_i$  eine Folge, die von unten gegen  $\alpha$  konvergiert, so folgt

$$|x|_1 = |y|_1^\alpha \geq |y|_1^{m_i/n_i},$$

also

$$\left| \frac{y^{m_i}}{x^{n_i}} \right|_1 \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{y^{m_i}}{x^{n_i}} \right|_2 \leq 1 \Rightarrow |x|_2 \geq |y|_2^{m_i/n_i}.$$

Zusammen  $|x|_2 = |y|_2^\alpha$ . Wir erhalten für jedes  $x \in K$ ,  $x \neq 0$

$$\frac{\log |x|_1}{\log |x|_2} = \frac{\log |y|_1}{\log |y|_2} =: s$$

und folglich  $|x|_1 = |x|_2^s$  für alle  $x \in K$ .  $\square$

**Korollar 8.26.** Für zwei nicht-archimedische Bewertungen  $|\cdot|_1, |\cdot|_2$  mit Bewertungsringen  $\mathcal{O}_1$  und  $\mathcal{O}_2$  sind äquivalent:

- (i)  $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$ ,
- (ii)  $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ ,
- (iii)  $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$ .

**Satz 8.27** (Schwache Approximation). Sei  $K$  ein Körper,  $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_n$  paarweise inäquivalente Bewertungen auf  $K$  und  $a_1, \dots, a_n \in K$  vorgegebene Elemente. Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $x \in K$  mit  $|x - a_i|_i < \varepsilon$  für  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst mit vollständiger Induktion nach  $n$  die Existenz eines  $z \in K$  mit  $|z|_1 > 1$  und  $|z|_j < 1$ ,  $j = 2, \dots, n$ .

Induktionsanfang:  $n = 2$ . Nach Satz 8.25 existiert ein  $\alpha \in K$  mit  $|\alpha|_1 \leq 1$  und  $|\alpha|_2 > 1$ . Analog existiert  $\beta \in K$  mit  $|\beta|_1 > 1$  und  $|\beta|_2 \leq 1$ . Setzen wir  $z = \frac{\beta}{\alpha}$ , so erhalten wir  $|z|_1 > 1$ ,  $|z|_2 < 1$ .

Induktionsschritt. Sei  $|z|_1 > 1$  und  $|z|_i < 1$ ,  $i = 2, \dots, n-1$ , sowie  $|y|_1 > 1$  und  $|y|_n < 1$ .

1. Fall:  $|z|_n \leq 1$ . Dann erfüllt für großes  $m$  das Element  $z^m y$  das Gewünschte.
2. Fall.  $|z|_n > 1$ . Dann konvergiert die Folge

$$t_m = \frac{z^m}{1 + z^m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)^m + 1}$$

- gegen 1 bzgl.  $|\cdot|_1$  und  $|\cdot|_n$ ,
- gegen 0 bzgl.  $|\cdot|_2, \dots, |\cdot|_{n-1}$ .

Für großes  $m$  erfüllt  $t_m y$  das Gewünschte.

Ist nun  $z \in K$  mit

$$|z|_1 > 1, |z|_i < 1, i = 2, \dots, n,$$

so konvergiert die Folge  $\frac{z^m}{1+z^m}$  gegen 1 für  $|\cdot|_1$  und gegen 0 für  $|\cdot|_2, \dots, |\cdot|_n$ .

Daher finden wir für jedes  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$  ein  $z_i \in K$ , das bzgl.  $|\cdot|_i$  beliebig nahe an 1 und bzgl.  $|\cdot|_j$  für  $j \neq i$  beliebig nahe an 0 liegt. Das Element

$$x = a_1 z_1 + \dots + a_n z_n$$

erfüllt dann das Gewünschte.  $\square$

**Korollar 8.28.** Seien  $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_n$  paarweise inäquivalente Bewertungen auf  $K$  und sei  $K_i = K$ ,  $i = 1, \dots, n$ , mit der durch  $|\cdot|_i$  gegebene Topologie. Dann ist das Bild der Diagonalabbildung

$$K \longrightarrow \prod_{i=1}^n K_i, \quad x \longmapsto (x, \dots, x),$$

dicht.

## 8.4 Fortsetzung von Bewertungen

Wir bezeichnen jetzt Bewertungen mit  $v, w, \dots$  und schreiben

$$|x|_v, |x|_w, \dots$$

**Definition 8.29.** Sei  $L|K$  eine Körpererweiterung und  $v$  eine Bewertung auf  $K$ . Eine Bewertung  $w$  auf  $L$  heißt **Fortsetzung** von  $v$ , wenn  $|x|_v = |x|_w$  für alle  $x \in K$  gilt. Wir schreiben dann  $w \mid v$ .

**Lemma 8.30.** Sei  $w$  eine Fortsetzung der Bewertung  $v$  von  $K$  auf  $L$ . Dann hat jede zu  $v$  äquivalente Bewertung  $v' \sim v$  auf  $K$  eine eindeutige Fortsetzung  $w'$  auf  $L$  mit  $w' \sim w$ .

*Beweis.* Sei  $|x|_{v'} = |x|_v^\alpha$  für alle  $x \in K$ . Dann ist die Bew.  $|y|_{w'} = |y|_w^\alpha$  eine Fortsetzung von  $v'$ . Ist  $w' \sim w$  eine Fortsetzung von  $v'$ , so gilt  $|y|_{w'} = |y|_w^\beta$  für ein  $\beta$  für alle  $y \in L$ , insbesondere gilt für alle

$$x \in K : |x|_{v'} = |x|_v^\beta \implies \beta = \alpha. \quad \square$$

**Definition 8.31.** Sei  $L|K$  eine endliche separable Erweiterung,  $v$  eine diskrete (insbesondere nichtarchimedische) Bewertung auf  $K$  und  $w$  eine Fortsetzung von  $v$  auf  $L$ . Die Zahl  $f(w|v) = [k(w) : k(v)]$ , mit

$$k(w) = \mathcal{O}_w/\mathfrak{p}_w, \quad k(v) = \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$$

heißt der **Trägheitsgrad**. Der Index  $e(w|v) := (w(L^\times) : v(K^\times))$  der in  $\mathbb{R}$  enthaltenen Gitter  $w(L^\times)$  und  $v(K^\times)$  heißt der **Verzweigungsindex**.

**Satz 8.32.** Sei  $L|K$  eine endliche separable Erweiterung,  $v$  eine diskrete Bewertung auf  $K$ , und sei  $B$  der ganze Abschluss von  $\mathcal{O}_v$  in  $L$ . Dann gilt

$$B = \bigcap_{w \mid v} \mathcal{O}_w.$$

Es gibt eine 1:1-Korrespondenz

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Primideale} \\ \mathfrak{p} \neq (0) \text{ in } B \end{array} \right\} \xrightleftharpoons[\psi]{\varphi} \left\{ \begin{array}{l} \text{Bewertungen } w \\ \text{auf } L \text{ mit } w \mid v \end{array} \right\}.$$

$\psi$  ist durch  $\psi(w) = \mathfrak{p}_w \cap B$  gegeben. Es gilt

$$e(w|v) = e_{\psi(w)}(L|K), \quad f(w|v) = f_{\psi(w)}(L|K),$$

wobei  $e_{\psi(w)}(L|K)$  und  $f_{\psi(w)}(L|K)$  der Verzweigungsindex und Trägheitsgrad des Primideals  $\psi(w)$  in  $L|K$  ist.

Insbesondere besitzt  $v$  Fortsetzungen auf  $L$ , und alle Fortsetzungen sind diskret.

*Beweis.* Sei ohne Einschränkung  $v$  durch  $v(K^\times) = \mathbb{Z}$  normiert. Nach Satz 3.34 ist  $B$  ein Dedekindring, der nach Satz 5.9 endlich viele Maximalideale  $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_g$  hat, und es gilt

$$\mathfrak{p}_v \cdot B = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}.$$

Für jedes  $i$  setzt dann offenbar  $\varphi(\mathfrak{P}_i) := w_i = \frac{1}{e_i}v_{\mathfrak{P}_i}$  die Bewertung  $v_{\mathfrak{p}_v} = v$  fort, und es gilt

$$e(w_i|v) = (w_i(L^\times) : v(K^\times)) = (\frac{1}{e_i}\mathbb{Z} : \mathbb{Z}) = e_i.$$

Zudem gilt  $\mathcal{O}_{w_i} = \mathcal{O}_{v_{\mathfrak{P}_i}} = B_{\mathfrak{P}_i}$  und daher

$$B/\mathfrak{P}_i = B_{\mathfrak{P}_i}/\mathfrak{P}_i B_{\mathfrak{P}_i} = \mathcal{O}_{w_i}/\mathfrak{p}_{w_i} = k(w_i).$$

Damit folgt  $f(w_i|v) = [k(w_i) : k(v)] = [B/\mathfrak{P}_i : \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v] = f_{\mathfrak{P}_i}$ . Außerdem gilt nach Lemma 7.3:  $B = \bigcap_i B_{\mathfrak{P}_i} = \bigcap_i \mathcal{O}_{w_i}$ . Daher müssen wir nur noch zeigen, dass  $\varphi$  und die Abbildung  $\psi : w \mapsto \mathfrak{p}_w \cap B$  zueinander invers sind.

Sei also  $w$  eine beliebige Fortsetzung von  $v$  auf  $L$ . Wir zeigen zunächst  $B \subset \mathcal{O}_w$ : In der Tat, für jedes  $b \in B$  gibt es  $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathcal{O}_v$  mit

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Gilt  $b \notin \mathcal{O}_w$ , also  $|b|_w > 1$ , so folgt  $|b^{-1}|_w < 1$ , d. h.  $b^{-1} \in \mathfrak{p}_w \subset \mathcal{O}_w$ , und daher  $-b = a_{n-1} + a_{n-2}b^{-1} + \dots + a_0b^{-(n-1)} \in \mathcal{O}_w$  - Widerspruch.

Das Ideal  $\mathfrak{P} := \psi(w) = \mathfrak{p}_w \cap B$  ist ein Primideal, und wegen  $\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_v = \mathfrak{p}_w \cap \mathcal{O}_v = \mathfrak{p}_v$  gilt  $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i$  für ein  $i$ . Es folgt  $B_{\mathfrak{P}_i} \subset \mathcal{O}_w$  und daher mit Korollar 8.26  $w_i \sim w$ , mit Lemma 8.30 sogar  $w = w_i$ . Mit anderen Worten, es gilt  $\varphi \circ \psi = \text{id}$ . Die Gleichung  $\psi \circ \varphi = \text{id}$  folgt unmittelbar aus  $\mathfrak{P}_i B_{\mathfrak{P}_i} \cap B = \mathfrak{P}_i$ .  $\square$

**Korollar 8.33.** Für eine endliche separable Erweiterung  $L|K$  und eine diskrete Bewertung  $v$  auf  $K$  gilt

$$\sum_{w|v} e(w|v) \cdot f(w|v) = [L : K].$$

*Beweis.* Nach Satz 8.32 und der analogen Formel für die Primideale Satz 5.9.  $\square$

**Lemma 8.34.** Seien  $M|L|K$  endliche separable Körpererweiterungen und  $w_M$  eine diskrete Bewertung auf  $M$ . Wir bezeichnen die Einschränkungen von  $w_M$  auf  $L$  und  $K$  mit  $w_L$  und  $w_K$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} e(w_M|w_L) \cdot e(w_L|w_K) &= e(w_M|w_K), \\ f(w_M|w_L) \cdot f(w_L|w_K) &= f(w_M|w_K). \end{aligned}$$

*Beweis.* Direkt aus Definition oder nutze die entsprechenden Formeln für Primideale.  $\square$

**Definition 8.35.** Sei  $L|K$  eine endliche separable Erweiterung und  $w$  eine diskrete Bewertung auf  $L$ ,  $v := w|_K$ . Man sagt:

- $w|v$  ist **unverzweigt**, wenn  $e(w|v) = 1$  und  $k(w)|k(v)$  eine separable Erweiterung ist.
- $w|v$  ist **zahm verzweigt**, wenn  $\text{char}(k(v)) \nmid e(w|v)$  und  $k(w)|k(v)$  eine separable Erweiterung ist.

Man sagt,  $v$  sei **unverzweigt** bzw. **zahm verzweigt** in  $L|K$ , wenn jede Fortsetzung von  $v$  auf  $w$  unverzweigt bzw. zahm verzweigt ist. Man sagt,  $v$  ist **voll zerlegt**, wenn  $n = [L : K]$  viele inäquivalente Fortsetzungen auf  $L$  existieren.

Diese Begriffe übertragen sich mittels Satz 8.32 auf Primideale in Dedekindringen (vgl. die Definition dort).

Im Falle von inseparablen Erweiterungen wird die Situation sogar noch einfacher:

**Lemma 8.36.** Sei  $L|K$  eine rein inseparablen Körpererweiterung, und sei  $v$  eine nicht-archimedische Bewertung auf  $K$ . Dann setzt sich  $v$  eindeutig auf  $L$  fort.

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $L|K$  endlich,  $[L : K] = p^r$  mit  $p = \text{char}(K) > 0$ . Dann gilt für jedes  $x \in L : x^{p^r} \in K$ . Wegen der Multiplikativität der Bewertung ist die Abbildung

$$|\ |_w : L \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt[p^r]{|x^{p^r}|_v},$$

die einzig mögliche Fortsetzung von  $v$ . Wir prüfen, dass dies eine Bewertung ist: In der Tat gilt  $|x|_w = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,  $|xy|_w = \sqrt[p^r]{|(xy)^{p^r}|_v} = \sqrt[p^r]{|x^{p^r}|_v \cdot |y^{p^r}|_v} = |x|_w |y|_w$  und  $|x + y|_w = \sqrt[p^r]{|x^{p^r} + y^{p^r}|_v} \leq \sqrt[p^r]{\max(|x^{p^r}|_v, |y^{p^r}|_v)} = \max(|x|_w, |y|_w)$ .  $\square$

**Korollar 8.37.** Ist  $L|K$  eine endliche Erweiterung und  $v$  eine diskrete Bewertung von  $K$ , so besitzt  $v$  eine Fortsetzung auf  $L$ .

*Beweis.* Nach Algebra 1, Satz 3.114, ist jede endliche Körpererweiterung die Hintereinanderausführung einer separablen und einer rein inseparablen Erweiterung. Daher folgt die Aussage aus Satz 8.32 und Lemma 8.36.  $\square$

## 8.5 Vervollständigung

Sei  $K$  ein Körper und  $v$  eine archimedische oder nicht-archimedische Bewertung auf  $K$ . Wir betrachten Cauchy-Folgen in  $K$  bzgl.  $v$ , d.h. Folgen  $(x_i)$  in  $K$  mit der Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |x_i - x_j|_v \leq \varepsilon \quad \forall i, j \geq N$$

und sagen

$$(x_i) \sim (y_i) \iff |x_i - y_i|_v \rightarrow 0.$$

**Definition 8.38.**

$$\hat{K}_v = \{\text{Cauchy-Folgen in } K \text{ bzgl. } v\} / \sim$$

heißt die **Vervollständigung** von  $K$  bzgl.  $v$ .

Durch

$$|(x_i)|_v := \lim_{i \rightarrow \infty} |x_i|_v$$

wird  $\hat{K}_v$  in natürlicher Weise zum bewerteten Körper. Die natürliche Inklusion  $K \hookrightarrow \hat{K}_v$  ist eine Isometrie; ist sie bijektiv, so nennt man  $K$  **vollständig** bzgl.  $v$ .

Ist  $v$  diskret, so wird für jede, nicht gegen 0 konvergierende Cauchy-Folge  $(x_i)$  in  $K$  die reelle Cauchy-Folge  $|x_i|_v$  ab einer gewissen Stelle stationär. Folglich stimmen die Wertegruppen von  $v$  auf  $K$  und  $v$  auf  $\hat{K}_v$  überein. Es gilt

$$\mathcal{O}_{\hat{K}_v} = \hat{\mathcal{O}}_v,$$

wobei  $\hat{\mathcal{O}}_v$  die Vervollständigung des lokalen Rings  $\mathcal{O}_v$  nach seiner  $\mathfrak{p}_v$ -adischen Topologie ist.

**Definition 8.39.** Ein Hausdorffraum  $X$  heißt **lokal-kompakt**, wenn zu jedem  $x \in X$  eine offene Teilmenge  $x \in U \subset X$  existiert, so dass der Abschluss  $\overline{U}$  von  $U$  kompakt ist.

**Definition 8.40.** Ein **lokaler Körper** ist ein Körper  $K$  zusammen mit einer Bewertung  $v$ , so dass die induzierte Topologie lokal-kompakt ist.

**Bemerkung 8.41.** Die Topologie hängt nur von der Äquivalenzklasse der Bewertung  $v$  ab. Man kann (sollte) daher einen lokalen Körper eher als einen Körper  $K$  zusammen mit einer Äquivalenzklasse von Bewertungen definieren, so dass die Topologie lokal-kompakt ist. Wir werden in dieser Hinsicht ein wenig schludrig sein.

**Lemma 8.42.** Sei  $(K, v)$  ein lokaler Körper. Dann ist  $K$  vollständig bzgl.  $v$ .

*Beweis.* Durch Übergang zu einer äquivalenten Bewertung erreichen wir die Gültigkeit der  $\Delta$ -Ungleichung, d.h. die Topologie auf  $K$  kommt von einer Metrik. Sei nun  $U$  eine offene Umgebung der 0 mit  $\overline{U}$  kompakt. Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  gilt

$$M_\varepsilon := \{x \in K \mid |x| < \varepsilon\} \subset U$$

also ist  $\overline{M}_\varepsilon \subset \overline{U}$  kompakt. Nun sei  $(x_i)$  eine Cauchy-Folge in  $K$ . Für hinreichend großes  $N$  ist dann die Cauchy-Folge  $(x_{N+i} - x_N)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\overline{M}_\varepsilon$  enthalten.

$$\rightsquigarrow \exists y \in \overline{M}_\varepsilon \text{ mit } (x_{N+i} - x_N) \rightarrow y \rightsquigarrow (x_i) \rightarrow y + x_N \in K.$$

□

**Beispiele 8.43.**

- $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  sind archimedische lokale Körper.
- $\mathbb{Q}_p$  ist ein nicht-archimedischer lokaler Körper.

**Lemma 8.44.** *Sei  $(K, v)$  ein nicht-archimedischer lokaler Körper. Dann sind  $\mathcal{O}_v$  und  $\mathfrak{p}_v$  kompakt.*

*Beweis.* Nach Voraussetzung existiert ein  $c > 0$ , so dass die Menge

$$\overline{M}_c = \{x \in K \mid |x|_v \leq c\}$$

kompakt ist. Sei  $c' = \sup_{x \in \overline{M}_c} |x|_v$ . Dann gilt  $\overline{M}_c = \overline{M}_{c'}$  und wegen der Kompaktheit existiert ein  $x \in \overline{M}_{c'}$  mit  $|x|_v = c'$ . Dann ist  $\mathcal{O}_v = \overline{M}_1$  das Bild von  $\overline{M}_{c'}$  unter der stetigen Abbildung  $K \rightarrow K$ ,  $y \mapsto x^{-1}y$ , also kompakt. Schließlich ist  $\mathfrak{p} = M_1$  eine offene Untergruppe von  $\mathcal{O}$ , also (siehe Algebra 2, 23.21(i)) abgeschlossen, also kompakt.  $\square$

**Satz 8.45.** *Sei  $K$  ein Körper mit einer nicht-archimedischen Bewertung  $v$  und sei  $k_v = \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$  der Restklassenkörper. Dann ist  $(K, v)$  genau dann ein lokaler Körper, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- $K$  ist vollständig bzgl.  $v$ .
- $k_v$  ist endlich.
- $v$  ist diskret.

*Beweis.* Sei  $(K, v)$  lokal. Nach Lemma 8.42 folgt (i). Nach Lemma 8.44 ist  $\mathcal{O}_v$  kompakt, und weil  $\mathfrak{p}_v \subset \mathcal{O}_v$  eine offene Untergruppe ist, ist  $k_v$  kompakt und diskret, also endlich. Dies zeigt (ii). Nach Lemma 8.44 ist  $\mathfrak{p}_v$  kompakt. Daher hat die offene Überdeckung

$$U_n := \left\{ x \in K \mid |x|_v < 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

von  $\mathfrak{p}_v$  eine endliche Teilüberdeckung  $\Rightarrow \mathfrak{p}_v = U_n$  für ein  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow v$  diskret.

Gelten (i)–(iii), so ist  $\mathcal{O}_v$  ein diskreter Bewertungsring, vollständig bzgl. der Topologie die durch  $\mathfrak{p}_v \supset \mathfrak{p}_v^2 \supset \dots$  gegeben ist. Nach Lemma 3.69 ist für alle  $n \geq 1$

$$\mathfrak{p}_v^{n-1}/\mathfrak{p}_v^n \cong \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$$

endlich, also auch  $\mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v^n$ . Es folgt, dass

$$\mathcal{O}_v = \varprojlim_n \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v^n$$

als projektiver Limes endlicher (also kompakter) Ringe selbst kompakt ist. Weil  $v$  diskret ist, ist  $\mathcal{O}_v$  auch offen.  $\Rightarrow \mathcal{O}_v$  ist offene kompakte Umgebung der 0.  $\Rightarrow K$  lokal-kompakt.  $\square$

**Definition 8.46.** Sei  $K$  ein Körper, und sei  $|\cdot|$  eine Bewertung auf  $K$  mit  $\Delta$ -Ungleichung. Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Eine Funktion

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

heißt **Norm** auf  $V$ , wenn

- (i)  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
- (ii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in V$ ,
- (iii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \alpha \in K, x \in V$ .

$(V, \|\cdot\|)$  heißt **normierter Vektorraum** über  $(K, |\cdot|)$ .

**Beispiel 8.47.** Wir betrachten den  $K^n$  stets mit der Supremumsnorm

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\| := \sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|,$$

durch die er zu einem normierten  $K$ -Vektorraum wird.

**Definition 8.48.** Zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  auf  $V$  heißen **äquivalent**, wenn Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  mit  $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1 \forall x \in V$  existieren. (Dann gilt auch  $\frac{1}{c_2}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{c_1}\|x\|_2 \forall x \in V$ , d.h. Äquivalenz ist eine Äquivalenzrelation.)

Ein normierter Vektorraum trägt eine Topologie, die durch die Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$  gegeben ist. Sind  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  äquivalent mit Konstanten  $c_1, c_2 > 0$ , so gilt für  $\varepsilon > 0$ :  $\|x\|_2 < \varepsilon c_1 \Rightarrow \|x\|_1 < \varepsilon$  und  $\|x\|_1 < \varepsilon/c_2 \Rightarrow \|x\|_2 < \varepsilon$ . Daher haben beide Topologien dieselbe Umgebungsbasis der 0 und stimmen daher überein.

Für einen Punkt  $x \in V$  und eine beliebige Teilmenge  $A \subset V$  setzen wir

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

**Satz 8.49.** Sei  $(K, v)$  ein vollständig bewerteter Körper,  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter  $K$ -Vektorraum und  $W \subset V$  ein endlich-dimensionaler Unterraum. Sei  $w_1, \dots, w_n$  eine Basis von  $W$ . Dann gilt:

- (i) Die durch den Isomorphismus

$$\varphi : K^n \xrightarrow{\sim} W, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n,$$

und die Supremumsnorm auf  $K^n$  auf  $W$  induzierte Norm ist äquivalent zur Einschränkung von  $\|\cdot\|$  auf  $W$ . Insbesondere ist  $W$  vollständig.

- (ii) Für jedes  $x \in V \setminus W$  gilt  $d(x, W) > 0$ .

*Beweis.* Der Beweis läuft über vollständige Induktion, wobei wir (i) und (ii) im Wechsel zeigen. Der Induktionsanfang (i) und (ii) für  $n = 0$ , ist trivial.

*Erster Induktionsschritt:* (ii) für  $n - 1 \Rightarrow$  (i) für  $n$ :

Sei  $\|\cdot\|_{\sup}$  die von der Supremumsnorm auf  $K^n$  über  $\varphi$  induzierte Norm auf  $W$ . Wir müssen zeigen, dass  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|_{\sup}$  äquivalent sind.

Die Abschätzung  $\|\cdot\| \leq c_2 \|\cdot\|_{\sup}$  für  $c_2 = \sum_{i=1}^n \|\omega_i\|$  folgt direkt aus der Dreiecksungleichung:

$$\|\sum \alpha_i \omega_i\| \leq \sum \|\alpha_i \omega_i\| = \sum |\alpha_i| \|\omega_i\| \leq \sup |\alpha_i| \sum \|\omega_i\|.$$

Es bleibt noch die umgekehrte Abschätzung zu zeigen. Für  $i = 1, \dots, n$  sei dazu  $W_i$  der von  $w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_n$  aufgespannte Unterraum von  $W$ . Nach Induktionsannahme gilt  $d(-w_i, W_i) > 0$  für alle  $i$ ; sei  $c_1 := \min_{1 \leq i \leq n} d(-w_i, W_i)$ . Ist nun  $0 \neq \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $|\alpha_j| = \|\alpha\| = \|\varphi(\alpha)\|_{\sup}$ , so gilt

$$\begin{aligned} \|\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n\| &= |\alpha_j| \cdot \|\frac{\alpha_1}{\alpha_j} w_1 + \dots + w_j + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_j} w_n\| \\ &\geq |\alpha_j| \cdot d(-w_j, W_j) \\ &\geq c_1 \|\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n\|_{\sup}. \end{aligned}$$

*Zweiter Induktionsschritt:* (i) für  $n \Rightarrow$  (ii) für  $n$ :

Sei  $x \in V \setminus W$ . Wäre  $d(x, W) = 0$ , so gäbe es zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $x_k \in W$  mit  $d(x_k, x) \leq \frac{1}{k}$ . Dann ist  $(x_k)$  eine Cauchyfolge in  $W$ . Da  $W$  nach Induktionsannahme vollständig ist, liegt auch der Grenzwert  $x$  dieser Cauchyfolge in  $W$ , im Widerspruch zur Annahme.  $\square$

**Korollar 8.50.** Sei  $(K, v)$  ein vollständig bewerteter Körper und  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum. Dann sind alle Normen auf  $V$  äquivalent. Jeder endlich-dimensionale Untervektorraum in einem normierten  $K$ -Vektorraum ist abgeschlossen.

*Beweis.* Die erste Aussage folgt aus Satz 8.49(i) mit  $V = W$ . Endlich-dimensionale Unterräume sind nach Satz 8.49(i) vollständig, also abgeschlossen.  $\square$

**Korollar 8.51.** Sei  $K$  ein lokaler Körper und  $V$  ein endlich-dimensionaler normierter  $K$ -Vektorraum. Dann ist  $V$  lokal-kompakt.

*Beweis.*  $V$  ist homöomorph zum  $K^n$  und  $K$  und damit auch  $K^n$  ist lokal-kompakt.  $\square$

**Korollar 8.52.** Sei  $(K, v)$  ein vollständig bewerteter Körper und  $L|K$  eine endliche Körpererweiterung. Dann gibt es höchstens eine Fortsetzung von  $v$  auf  $L$ .

*Beweis.* Jede Fortsetzung von  $v$  auf  $L$  macht  $L$  zu einem endlich-dimensionalen normierten  $K$ -Vektorraum. Die Normen zu zwei Fortsetzungen sind daher äquivalent und induzieren dieselbe Topologie auf  $L$ . Die fortsetzenden Bewertungen sind daher äquivalent nach Satz 8.25 und sogar gleich nach Lemma 8.30.  $\square$

**Korollar 8.53.** Sei  $K$  ein lokaler Körper,  $V$  ein normierter Vektorraum über  $K$  und  $W \subset V$  ein endlich-dimensionaler Untervektorraum. Dann gibt es für jedes  $x \in V$  ein  $w \in W$  mit

$$d(x, W) = d(x, w).$$

*Beweis.* Sei für hinreichend großes  $N$ :

$$X = \{y \in W \mid d(y, x) \leq N\} \subset W.$$

Dann ist  $X$  kompakt und die stetige reellwertige Funktion  $y \mapsto d(x, y)$  nimmt auf  $X$  ihr Minimum an.  $\square$

**Satz 8.54.** Sei  $V$  ein normierter Vektorraum über einem lokalen Körper. Ist  $V$  lokal-kompakt, so ist  $V$  endlich-dimensional.

**Bemerkung 8.55.** Im Fall  $K = \mathbb{R}$  heißt dies Satz von Riesz.

*Beweis.* Nachdem wir  $\|\cdot\|$  durch eine äquivalente Norm ersetzt haben, können wir annehmen, dass  $\overline{M}_1 = \{x \in V, \|x\| \leq 1\}$  kompakt ist.

Wir wählen ein  $\alpha \in K$  und eine positive reelle Zahl  $r$  mit  $r < |\alpha| < 1$ . Wegen der Kompaktheit von  $\overline{M}_1$  finden wir nun endlich viele Vektoren  $x_1, \dots, x_n \in V$ , so dass  $\overline{M}_1$  durch die offenen Kugeln von Radius  $r$  um die  $x_i$  überdeckt wird. Setze  $W = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset V$ . Wäre  $V \neq W$ , so gäbe es ein  $x \in V \setminus W$ , und nach Korollar 8.53 gäbe es ein  $w \in W$  mit  $d(x, w) = d(x, W) > 0$ . Indem wir  $x$  durch  $\alpha^m(x - w)$  für geeignetes  $m \in \mathbb{Z}$  ersetzen, können wir annehmen, dass

$$1 \geq \|x\| = d(x, 0) = d(x, W) > |\alpha|.$$

Aus  $x \in \overline{M}_1$  und  $d(x, x_i) > r$  für  $i = 1, \dots, n$  ergibt sich ein Widerspruch zu der Tatsache, dass die Kugeln mit Radius  $r$  um die  $x_i$  die Menge  $\overline{M}_1$  überdecken. Daher ist  $V = W$ , also  $V$  endlich-dimensional.  $\square$

## 8.6 Klassifikation lokaler Körper

**Satz 8.56.** (i) Jeder archimedische lokale Körper ist isomorph zu  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .  
(ii) Jeder nicht-archimedische lokale Körper der Charakteristik 0 ist isomorph zu einer endlichen Erweiterung von  $\mathbb{Q}_p$ , für eine Primzahl  $p$ .  
(iii) Jeder lokale Körper der Charakteristik  $p > 0$  ist isomorph zu einer endlichen Erweiterung von  $\mathbb{F}_p((T))$ .

**Bemerkungen 8.57.** Zu (i). Es gilt mehr. Der Satz von Gelfand-Tornheim-Ostrowski sagt, dass jeder vollständig archimedisch bewertete Körper isomorph zu  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist (siehe Neukirch AZT, Satz II.4.2).

Zu (ii). Die Primzahl  $p$  ist die Charakteristik des endlichen Restklassenkörpers.

*Beweis von Satz 8.56.* Sei zunächst  $\text{char } K = 0$ , also  $\mathbb{Q} \subset K$ . Ist  $v$  archimedisch, so auch die Einschränkung von  $v$  auf  $\mathbb{Q}$ . Nach dem Satz von Ostrowski 8.18 gilt  $v|_{\mathbb{Q}} \sim v_{\infty}$ , d.h. die Bewertung:

$$|\cdot|_v : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ist äquivalent zum gewöhnlichen Absolutbetrag. Da  $K$  vollständig ist, setzt sich die Körpereinbettung  $\mathbb{Q} \hookrightarrow K$  eindeutig zu einer Einbettung  $\mathbb{R} \hookrightarrow K$  fort. Dann ist  $K$  ein lokal-kompakter normierter Vektorraum über  $\mathbb{R}$ , also endlich-dimensional, d.h.  $[K : \mathbb{R}] < \infty \implies K = \mathbb{R}$  oder  $K = \mathbb{C}$ .

Ist  $v$  nicht-archimedisch, so gilt  $v|_{\mathbb{Q}} \sim v_p$  für eine Primzahl  $p$  und dasselbe Argument zeigt

$$\mathbb{Q}_p \subset K, \quad [K : \mathbb{Q}_p] < \infty.$$

Sei nun  $\text{char } K = p > 0$ . Dann gilt  $\mathbb{F}_p \subset K$ . Sei  $t \in K$  ein Element mit  $|t| < 1$ . Dann ist  $t$  keine Einheitswurzel,  $\implies t \notin \overline{\mathbb{F}}_p \implies t$  ist transzendent über  $\mathbb{F}_p$ . Die Zuordnung  $T \mapsto t$  gibt uns eine Einbettung  $\mathbb{F}_p(T) \hookrightarrow K$ . Die Einschränkung von  $v$  auf  $\mathbb{F}_p(T)$  ist eine Bewertung mit  $|T|_v < 1$ . Nach Satz 8.21 ist  $v|_{\mathbb{F}_p(T)}$  äquivalent zu der durch das Primideal  $T \cdot \mathbb{F}_p[T] \subset \mathbb{F}_p[T]$  gegebenen Bewertung auf  $\mathbb{F}_p(T)$ . Da  $K$  vollständig ist, setzt sich die Einbettung  $\mathbb{F}_p(T) \hookrightarrow K$  zu einer Einbettung  $\mathbb{F}_p((T)) \hookrightarrow K$  fort. Wie vorher schließt man:  $[K : \mathbb{F}_p((T))] < \infty$ .  $\square$

**Satz 8.58** (Henselsches Lemma). *Sei  $(A, \mathfrak{m})$  ein lokaler Ring der vollständig in seiner  $\mathfrak{m}$ -adischen Topologie ist. Sei  $k = A/\mathfrak{m}$  und sei  $f \in A[X]$  ein Polynom, so dass seine Reduktion  $\bar{f} \in k[X]$  eine einfache Nullstelle  $\lambda \in k$  hat. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Element  $x \in A$  mit  $f(x) = 0$  und  $\bar{x} = \lambda$ .*

*Beweis.* Eindeutigkeit: Seien  $x, x' \in A$  mit  $f(x) = 0 = f(x')$  und  $\bar{x} = \lambda = \bar{x}'$ . Es gilt  $f(X) = (X - x)g(X)$  und  $\bar{g}(\lambda) \neq 0$ . Für  $X = x'$  erhalten wir:  $0 = f(x') = (x' - x)g(x')$ . Wegen  $\bar{g}(\bar{x}') = \bar{g}(\lambda) \neq 0$  folgt  $g(x') \notin \mathfrak{m} \implies g(x') \in A^{\times} \implies x' - x = 0$ .

Existenz: Wir konstruieren eine Folge  $x_n \in A$  mit  $\bar{x}_1 = \lambda$ ,  $x_{n+1} \equiv x_n \pmod{\mathfrak{m}^n}$  und  $f(x_n) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^n}$  für alle  $n$ . Dann erfüllt  $x = \lim_n x_n$  das Gewünschte.

Ein beliebiges Urbild  $x_1$  von  $\lambda$  unter  $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$  gibt den Induktionsanfang. Seien  $x_1, \dots, x_n$  schon konstruiert. Mit Hilfe der Newton-Methode konstruieren wir  $x_{n+1}$ : Es gilt  $\bar{f}'(x_n) = \bar{f}'(\lambda) \neq 0$ , weil  $\lambda$  einfache Nullstelle von  $\bar{f}$  ist. Es folgt  $f'(x_n) \in A^{\times}$ .

Wir machen den Ansatz  $x_{n+1} = x_n + h$ ,  $h \in \mathfrak{m}^n$ . Die Taylorentwicklung gibt

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + h f'(x_n) + h^2 \cdot y$$

mit  $y \in A$ . Nun gilt  $h^2 y \in \mathfrak{m}^{2n} \subset \mathfrak{m}^{n+1}$ . Daher erfüllt  $h = -f'(x_n)^{-1} \cdot f(x_n)$  das Gewünschte.  $\square$

**Korollar 8.59.** Sei  $(A, \mathfrak{m})$  ein vollständiger, lokaler Ring, so dass der Restklassenkörper  $k = A/\mathfrak{m}$  endlich ist. Sei  $q = \#k$ . Dann existieren in  $A$  genau  $q - 1$  viele  $(q - 1)$ te Einheitswurzeln.

*Beweis.* Da  $k^\times$  zyklisch ist, zerfällt das Polynom  $f(X) = X^{q-1} - 1$  über  $k$  in  $(q - 1)$  paarweise verschiedene Linearfaktoren. Das henselsche Lemma gibt das Ergebnis.  $\square$

**Beispiel 8.60.**  $\mathbb{Z}_p$  enthält  $p - 1$  viele  $(p - 1)$ te Einheitswurzeln.

**Satz 8.61.** Sei  $K$  ein lokaler Körper der Charakteristik  $p > 0$  und sei  $k = \mathbb{F}_q$ ,  $q = p^f$ , sein Restklassenkörper. Dann existiert ein Isomorphismus

$$K \cong \mathbb{F}_q((T)).$$

*Beweis.* Nach dem henselschen Lemma existiert  $\zeta_{q-1} \in \mathcal{O} \subset K$ , also enthält  $K$  den Körper  $\mathbb{F}_p(\zeta_{q-1}) = \mathbb{F}_q$ . Sei nun  $\pi \in K$  ein Element mit  $(\pi) = \mathfrak{p}$ . Dann liegen die Elemente der Form

$$\sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i \pi^i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \quad \alpha < \beta, \quad a_i \in \mathbb{F}_q$$

dicht in  $K$ . Die Zuordnung  $T \mapsto \pi$  definiert eine Körpereinbettung  $\mathbb{F}_q(T) \hookrightarrow K$  die sich, wie im Beweis von Satz 8.56 zu einer Einbettung  $\mathbb{F}_q((T)) \hookrightarrow K$  fortsetzt. Nun ist  $\mathbb{F}_q((T))$  und damit auch sein Bild in  $K$  vollständig. Außerdem enthält das Bild eine in  $K$  dichte Teilmenge.  $\leadsto \mathbb{F}_q((T)) \xrightarrow{\sim} K$ .  $\square$

Ist  $K$  ein Körper mit einer diskreten Bewertung  $v$ , so ist das Maximalideal  $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$  ein Hauptideal. Ein  $\pi \in \mathcal{O}$  mit  $(\pi) = \mathfrak{p}$  nennt man *Uniformisierende* von  $K$ . Die Uniformisierende ist bis auf Multiplikation mit einer Einheit eindeutig.

**Lemma 8.62.** Sei  $L|K$  eine endliche Erweiterung nicht-archimedischer lokaler Körper, und seien  $e, f$  ihr Verzweigungsindex bzw. ihr Trägheitsgrad. Dann gilt

$$ef = [L : K].$$

*Beweis.* Wegen der Multiplikativität aller auftretenden Größen können wir uns auf die Fälle  $L|K$  separabel und  $L|K$  rein inseparabel beschränken.

Im Fall  $L|K$  separabel folgt dies aus Korollar 8.33 und der Tatsache, dass es nur eine Fortsetzung der Bewertung von  $K$  auf  $L$  gibt (Korollar 8.52).

Im Fall  $L|K$  rein inseparabel können wir uns weiter einschränken und annehmen, dass  $[L : K] = p = \text{char}(K)$ . Nach Satz 8.61 können wir  $k$  als Unterkörper von  $K$  auffassen, so dass  $k \subset \mathcal{O}_K$  gilt und die Komposition  $k \rightarrow \mathcal{O}_K \rightarrow k$  die Identität ist.

Wir betrachten die Restklassenkörpererweiterung  $\ell|k$ : Zu  $\alpha \in \ell$  existiert ein Urbild  $a \in \mathcal{O}_L$  und es gilt  $a^p \in \mathcal{O}_K$ , also  $\alpha^p \in k$ . Somit ist auch  $\ell|k$  rein inseparabel. Da  $k$  als endlicher Körper aber perfekt ist, gilt  $\ell = k$  und  $f = 1$ . Sei  $v$  die

Bewertung von  $K$  und  $w$  ihre eindeutige Fortsetzung auf  $L$ . Nach dem Beweis von Lemma 8.36 gilt für  $x \in L^\times$ :  $|x|_w = \sqrt[p]{|x^p|_v}$ , bzw.  $w(x) = \frac{1}{p}v(x^p)$ . Wir erhalten Inkusionen von Gittern in  $\mathbb{R}$ :

$$p \cdot w(L^\times) \subset v(K^\times) \subset w(L^\times).$$

Für den Verzweigungsindex  $e = (w(L^\times) : v(K^\times))$  gilt daher  $e \mid p$ . Wäre  $e = 1$ , so wäre eine Uniformisierende  $\pi$  von  $K$  zugleich auch Uniformisierende von  $L$ . Daher lägen die Elemente der Form  $\sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i \pi^i$ ,  $a_i \in k = \ell$  sowohl in  $K$  als auch in  $L$  dicht und es folgte  $K = L$  – Widerspruch.

Folglich gilt  $e = p$  und daher auch in diesem Fall  $ef = p = [L : K]$ .  $\square$

Wir wählen nun für einen lokalen Körper  $K$  aus jeder Äquivalenzklasse von Bewertungen eine aus und nennen diese die **normalisierte** Bewertung:

- $K = \mathbb{R} : |x|_{\text{norm}} = |x|_\infty$ , der gewöhnliche Absolutbetrag.
- $K = \mathbb{C} : |z|_{\text{norm}} = |z\bar{z}|_\infty$ , das Quadrat des gewöhnlichen Absolutbetrags.
- $K$  nicht-archimedisch: Sei  $\mathcal{O} \subset K$  der Bewertungsring,  $k = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$  der Restklassenkörper und  $\pi \in \mathcal{O}$  eine Uniformisierende. Sei  $q = \#k$ . Wir normalisieren die Bewertung durch

$$|\pi|_{\text{norm}} = q^{-1},$$

d.h. für ein  $x \in K^\times$  mit  $x = \pi^n u$ ,  $u \in \mathcal{O}^\times$ , gilt

$$|x|_{\text{norm}} = q^{-n}.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl der Uniformisierenden  $\pi$ . Die assoziierte Exponentialbewertung  $v : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  wird in hierzu in konsistenter Weise durch  $v(\pi) = 1$  normalisiert, d.h.  $v : K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ . Es gilt dann  $|x| = q^{-v(x)}$ .

**Warnung:** Ist  $L|K$  eine endliche Erweiterung lokaler Körper, so setzt die normalisierte Bewertung von  $L$  i.A. *nicht* die normalisierte Bewertung von  $K$  fort.

**Lemma 8.63.** Ist  $L|K$  eine endliche Erweiterung lokaler Körper und sind  $|\cdot|_L$  und  $|\cdot|_K$  die normalisierten Bewertungen, so gilt

$$|x|_L = |x|_K^n \quad \text{mit} \quad n = [L : K]$$

für alle  $x \in K$ .

*Beweis.* Im archimedischen Fall ist dies gerade so definiert. Seien  $L|K$  nicht-archimedisch und seien  $e, f$  der Verzweigungsindex bzw. der Trägheitsgrad. Nach Lemma 8.62 gilt  $ef = n$ . Sei  $\pi \in K$  eine Uniformisierende. Dann gilt  $v_K(\pi) = 1$ ,  $v_L(\pi) = e$ . Sind  $l$  und  $k$  die Restklassenkörper, so gilt  $f = [l : k]$ . Mit  $q = \#k$  gilt somit  $\#l = q^f$ . Zusammen folgt für  $x \in K$ :

$$\begin{aligned} |x|_L &= (q^f)^{-v_L(x)} = (q^f)^{-ev_K(x)} \\ &= (q^{-v_K(x)})^{ef} \\ &= |x|_K^n. \end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung 8.64.** Die normalisierte Bewertung auf  $\mathbb{C}$  erfüllt nicht die Dreiecksungleichung, ist also keine Bewertung im Sinne der meisten Lehrbücher. Das Problem wird meistens ignoriert (z.B. in Neukirch).

**Bemerkung 8.65.** So wie das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$  existiert auch auf jedem nicht-archimedischen lokalen Körper ein bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmtes translationsinvariantes Maß  $\mu$  („Haarsches Maß“). Man normalisiert dies durch  $\mu(\mathcal{O}) = 1$ .

## 8.7 Fortsetzung vollständiger Bewertungen

**Lemma 8.66.** *Sei  $(K, v)$  ein vollständig bewerteter Körper und  $L|K$  eine algebraische Erweiterung. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung  $w$  von  $v$  auf  $L$ .*

*Beweis.* Wir beschränken uns auf den Fall, dass  $K$  lokal-kompakt, d.h. ein lokaler Körper ist. Der allgemeine Fall wird z.B. in Neukirchs Buch behandelt.

Es genügt, den Fall  $[L : K] = n < \infty$  zu betrachten. Nach Lemma 8.30 können wir  $v$  durch eine äquivalente Bewertung ersetzen, also gilt ohne Einschränkung die Dreiecksungleichung.

Die Eindeutigkeit wurde bereits in Korollar 8.52 behandelt. Auch die Existenz ist leicht gezeigt: Ist  $v$  archimedisch, so ist  $K$  nach Satz 8.56 isomorph zu  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ , und die Aussage ist wohlbekannt. Ist  $v$  nicht-archimedisch, so ist  $v$  nach Satz 8.45 diskret und die Existenz der Fortsetzung wurde bereits in Korollar 8.37 gezeigt.  $\square$

**Korollar 8.67.** *Jede endliche Erweiterung eines lokalen (bzw. vollständig bewerteten) Körpers ist in natürlicher Weise ein lokaler (bzw. vollständig bewerteter) Körper.*

*Beweis.* Dies folgt aus Satz 8.49 und Korollar 8.51.  $\square$

**Korollar 8.68.** *Seien  $L$  und  $L'$  algebraische Erweiterungen eines vollständig bewerteten Körpers  $(K, v)$ ,  $w$  und  $w'$  die Fortsetzungen von  $v$  auf  $L$  bzw.  $L'$ , und sei  $\sigma \in \text{Hom}_K(L, L')$ . Dann gilt für jedes  $x \in L$  :*

$$|\sigma x|_{w'} = |x|_w,$$

also ist  $\sigma$  eine Isometrie und daher stetig.

Insbesondere gilt obige Aussage im Fall, dass  $L = L'$  eine Galoiserweiterung von  $K$  und  $\sigma \in \text{Gal}(L|K)$  ist.

*Beweis.* Die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \longmapsto |\sigma x|_{w'},$$

ist eine Bewertung auf  $L$ , die auf  $K$  mit  $|\cdot|_v$  übereinstimmt. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt  $|\sigma x|_{w'} = |x|_w \quad \forall x \in L$ .  $\square$

**Satz 8.69.** Sei  $(K, v)$  ein vollständig bewerteter Körper und  $L|K$  eine endliche Erweiterung vom Grad  $n$ . Dann ist die eindeutig bestimmte Fortsetzung  $w$  von  $v$  auf  $L$  durch

$$|x|_w = \sqrt[n]{|N_{L/K}(x)|_v} \quad \forall x \in L$$

gegeben.

*Beweis.* Es sei  $\bar{K}$  ein algebraischer Abschluss von  $K$ ,  $\bar{v}$  die eindeutige Fortsetzung von  $v$  auf  $\bar{K}$ ,  $[L : K]_i$  der Inseparabilitätsgrad von  $L|K$  und  $\text{Hom}_K(L, \bar{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ . Dann gilt  $n = r[L : K]_i$ ,  $\bar{v}|_L = w$  und

$$|N_{L/K}(x)|_v = \left| \left( \prod_{j=1}^r \sigma_j(x) \right)^{[L:K]_i} \right|_{\bar{v}} = \left( \prod_{j=1}^r |\sigma_j(x)|_{\bar{v}} \right)^{n/r} \stackrel{8.68}{=} |x|_w^n. \quad \square$$

**Bemerkung 8.70.** Sei  $L|K$  eine *unendliche* algebraische Erweiterung des lokalen Körpers  $(K, v)$  (z.B.  $L = \bar{K}$ ) und sei  $w$  die eindeutig bestimmte Fortsetzung von  $v$  auf  $L$ . Nach Satz 8.54 ist  $(L, w)$  *kein* lokaler Körper. Man kann sogar zeigen, dass  $(L, w)$  niemals vollständig ist.

## 8.8 Fortsetzung von Bewertungen II

Sei  $L|K$  eine endliche Körpererweiterung und  $w$  eine Fortsetzung der Bewertung  $v$  auf  $K$ .

**Lemma 8.71.** Die durch die natürlichen Einbettungen  $L \hookrightarrow \hat{L}_w$ ,  $\hat{K}_v \hookrightarrow \hat{L}_w$ , induzierte Abbildung

$$\varphi : L \otimes_K \hat{K}_v \longrightarrow \hat{L}_w$$

ist stetig und surjektiv. Hierbei ist  $L \otimes_K \hat{K}_v$  mit der Topologie eines endlich-dimensionalen  $\hat{K}_v$ -Vektorraums ausgestattet.

*Beweis.* Ohne Einschränkung erfülle  $w$  die  $\Delta$ -Ungleichung. Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine  $K$ -Basis von  $L$  und  $a = \max(|x_1|_w, \dots, |x_n|_w)$ . Für  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \hat{K}_v$  gilt daher

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right|_w &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i x_i|_w \leq n \cdot \max_i |\alpha_i x_i|_w \\ &\leq n \cdot a \cdot \max_i (|\alpha_1|_v, \dots, |\alpha_n|_v). \end{aligned}$$

Daher ist die Abbildung

$$\hat{K}_v^n \longrightarrow \hat{L}_w, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \longmapsto \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

stetig. Nach Satz 8.49 erhalten wir

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{K}_v^n & & \\
 \downarrow \iota & \searrow \text{stetig} & \rightarrow \hat{L}_w. \\
 & \nearrow \varphi & \\
 L \otimes_K \hat{K}_v & & 
 \end{array}$$

Daher ist  $\varphi$  stetig. Das Bild von  $\varphi$  ist ein endlich-dimensionaler  $\hat{K}_v$ -Vektorraum, also vollständig und daher abgeschlossen.  $L$  liegt dicht in  $\hat{L}_w$  und ist in  $\text{im}(\varphi)$  enthalten  $\Rightarrow \text{im}(\varphi) = \hat{L}_w \Rightarrow \varphi$  surjektiv.  $\square$

**Korollar 8.72.**  $\hat{L}_w| \hat{K}_v$  ist eine endliche Erweiterung.

**Korollar 8.73.** Ist  $K$  ein Zahlkörper und  $v$  eine Bewertung auf  $K$ , so ist  $\hat{K}_v$  ein lokaler Körper.

*Beweis.* Setze  $v_0 = v|_{\mathbb{Q}}$ . Nach Korollar 8.72 ist  $K_v|_{\mathbb{Q}_{v_0}}$  eine endliche Erweiterung. Nach dem Satz von Ostrowski 8.18 ist  $\mathbb{Q}_{v_0}$  ein lokaler Körper und daher nach Korollar 8.67 auch  $K_v$ .  $\square$

Sei  $L|K$  eine algebraische Erweiterung,  $v$  eine Bewertung auf  $K$  und  $w$  eine Bewertung auf  $L$ , die  $v$  fortsetzt. Sei  $L = \bigcup L_i$ , wobei die  $L_i$  endlich über  $K$  sind, und sei  $w_i = w|_{L_i}$ . Dann sind die  $(\hat{L}_i)_{w_i}$  endliche Erweiterungen von  $\hat{K}_v$  und für  $L_i \subset L_j$  ist kanonisch  $(\hat{L}_i)_{w_i} \hookrightarrow (\hat{L}_j)_{w_j}$ . Die Vereinigung (d.h. der direkte Limes) der  $(\hat{L}_i)_{w_i}$  heißt die **Lokalisierung** von  $L$  bei  $w$  und wird mit  $L_w$  bezeichnet. Für  $L|K$  endlich gilt  $L_w = \hat{L}_w$ , im Allgemeinen ist  $L_w \subsetneqq \hat{L}_w$ .  $L_w$  ist eine algebraische Erweiterung von  $K_v = \hat{K}_v$ .

Sei nun  $\bar{K}_v$  ein algebraischer Abschluss von  $K_v$ , zusammen mit der eindeutig bestimmten Bewertung  $\bar{v}$ , die  $v$  fortsetzt. Jede  $K$ -Einbettung  $\tau : L \longrightarrow \bar{K}_v$  gibt uns mittels  $\bar{v} \circ \tau$  eine Fortsetzung von  $v$  auf  $L$ . Jedes  $\sigma \in \text{Aut}_{K_v}(\bar{K}_v)$  (automatisch stetig nach Korollar 8.68) liefert eine weitere Einbettung:

$$\sigma \circ \tau : L \longrightarrow \bar{K}_v.$$

Wir nennen  $\sigma \circ \tau$  zu  $\tau$  über  $K_v$  **konjugiert**.

**Satz 8.74.** Sei  $L|K$  eine algebraische Körpererweiterung und  $v$  eine Bewertung auf  $K$ .

(i) Jede Fortsetzung  $w$  von  $v$  auf  $L$  entsteht durch eine  $K$ -Einbettung

$$\tau : L \longrightarrow \bar{K}_v.$$

- (ii) Zwei Fortsetzungen  $\bar{v} \circ \tau$  und  $\bar{v} \circ \tau'$  sind genau dann gleich, wenn  $\tau$  und  $\tau'$  über  $K_v$  konjugiert sind.

*Beweis.* (i) Ist  $w$  eine Fortsetzung von  $K$  auf  $L$ , dann ist  $L_w|K_v$  algebraisch. Ist  $\tau : L_w \rightarrow \bar{K}_v$  eine  $K_v$ -Einbettung, so gilt nach dem Eindeutigkeitssatz

$$w = \bar{v} \circ \tau.$$

Die Einschränkung von  $\tau$  auf  $L$  ist daher die gesuchte Einbettung.

(ii) Seien  $\tau, \tau' : L \rightarrow \bar{K}_v$  gegeben, so dass  $\bar{v} \circ \tau = \bar{v} \circ \tau'$ .

Sei zunächst  $L|K$  endlich. Der Abschluss  $\bar{\tau}L$  des Unterkörpers  $\tau L \subset \bar{K}_v$  ist ein Unterkörper von  $\bar{K}_v$ . Er enthält  $\tau L$  und  $K_v$ , also auch das Kompositum  $(\tau L)K_v$ . Dies ist ein endlich-dimensionaler  $K_v$ -Vektorraum, also nach Korollar 8.50 abgeschlossen, also gilt  $\bar{\tau}L = (\tau L) \cdot K_v$ . Die Abbildung  $L \rightarrow \tau L$  setzt sich daher zu einem stetigen Isomorphismus  $L_{\bar{v} \circ \tau} \xrightarrow{\sim} (\tau L)K_v$  fort. Für  $L|K$  von unendlichem Grad erhalten wir dies durch Übergang zu  $\varinjlim$ .

Damit erhalten wir Isomorphismen

$$\sigma : (\tau L) \cdot K_v \xrightarrow{\sim} L_{\bar{v} \circ \tau} = L_{\bar{v} \circ \tau'} \xrightarrow{\sim} (\tau' L) \cdot K_v.$$

Wir setzen  $\sigma$  zu einem Isomorphismus

$$\sigma : \bar{K}_v \xrightarrow{\sim} \bar{K}_v$$

fort. Dann gilt  $\tau' = \sigma \circ \tau$ , also sind  $\tau'$  und  $\tau$  konjugiert über  $K_v$ . Sind umgekehrt  $\tau', \tau$  konjugiert über  $K_v$ , also  $\tau' = \sigma \circ \tau$ , so stimmen wegen  $\bar{v} \circ \sigma = \bar{v}$  die Bewertungen  $\bar{v} \circ \tau'$  und  $\bar{v} \circ \tau$  auf  $L$  überein.  $\square$

**Korollar 8.75.** Sei  $L = K(\alpha)$  und  $f \in K[X]$  das Minimalpolynom von  $\alpha$ . Sei

$$f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$$

die Primzerlegung von  $f$  in  $K_v$ . Dann existieren genau  $r$  Fortsetzungen  $w_1, \dots, w_r$  von  $v$  auf  $L$ . Man erhält  $w_i$  durch die Einbettung

$$L \longrightarrow \bar{K}_v, \alpha \longmapsto \alpha_i,$$

wobei  $\alpha_i$  eine Nullstelle von  $f_i$  in  $\bar{K}_v$  ist.

*Beweis.* Nach Galoistheorie entsprechen die  $K$ -Einbettungen  $L \rightarrow \bar{K}_v$  genau den Nullstellen von  $f$  in  $\bar{K}_v$ . Die durch zwei Nullstellen  $\beta, \beta'$  von  $f$  in  $\bar{K}_v$  gegebenen Einbettungen sind genau dann über  $K_v$  konjugiert, wenn  $\beta$  und  $\beta'$  Nullstellen des gleichen irreduziblen Faktors von  $f$  über  $K_v$  sind.  $\square$

**Bemerkung 8.76.** Ist  $f$  ein separables Polynom, so sind die  $m_i$  alle = 1.

**Korollar 8.77.** Sei  $K|\mathbb{Q}$  ein Zahlkörper. Dann gibt es genau  $r_1 + r_2$  inäquivalente archimedische Bewertungen auf  $K$ , und zwar  $r_1$  viele mit Vervollständigung isomorph zu  $\mathbb{R}$  und  $r_2$  viele mit Vervollständigung isomorph zu  $\mathbb{C}$ .

*Beweis.* Jede archimedische Bewertung von  $K$  ist eine Fortsetzung der eindeutigen archimedischen Bewertung auf  $\mathbb{Q}$ . Die archimedischen Bewertungen auf  $K$  stehen daher nach Satz 8.74 in Bijektion zu den Einbettungen  $K \hookrightarrow \mathbb{C}$  modulo Konjugation über  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Satz 8.78.** Sei  $L|K$  eine endliche separable Erweiterung. Dann gibt es einen kanonischen topologischen Isomorphismus

$$\varphi : L \otimes_K K_v \xrightarrow{\sim} \prod_{w|v} L_w.$$

*Beweis.* Für jedes  $w$  haben wir nach Lemma 8.71 einen stetigen Homomorphismus

$$L \otimes_K K_v \rightarrow L_w.$$

Durch Aufsummieren erhalten wir  $\varphi$ . Nach dem Satz vom primitiven Element finden wir ein  $\alpha \in L$  mit  $L = K(\alpha)$ . Sei  $f \in K[X]$  das (separable) Minimalpolynom von  $\alpha$  und  $f = f_1 \cdots f_r$  seine Primzerlegung in  $K_v[X]$ . Dann entsprechen die Fortsetzung von  $v$  auf  $L$  nach Korollar 8.75 bijektiv den  $f_i$ . Nennen wir sie  $w_1, \dots, w_r$ . Wir erhalten die Isomorphismen  $K[X]/(f) \cong L$  und  $K_v[X]/(f_i) \cong L_{w_i}$  für  $i = 1, \dots, r$ . Tensorieren des ersten Isomorphismus mit  $K_v$  liefert den Isomorphismus  $K_v[X]/(f) \cong L \otimes_K K_v$  und der Chinesische Restsatz gibt uns den Isomorphismus  $K_v[X]/(f) \cong \prod_{i=1}^r K_v[X]/(f_i)$ . Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_v[X]/(f) & \xrightarrow{\sim} & \prod_{i=1}^r K_v[X]/(f_i) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ L \otimes_K K_v & \xrightarrow{\varphi} & \prod_{i=1}^r L_{w_i}, \end{array}$$

zeigt daher, dass  $\varphi$  ein algebraischer Isomorphismus ist. Zudem ist  $\varphi$  ein Homöomorphismus, da Quelle und Ziel endlich-dimensionale normierte Vektorräume über  $K_v$  sind.  $\square$

**Korollar 8.79.** Ist  $L|K$  endlich separabel, so gilt

$$[L : K] = \sum_{w|v} [L_w : K_v].$$

**Bemerkung 8.80.** Ist  $K$  ein Zahlkörper und  $v = v_{\mathfrak{p}}$  für ein Primideal in  $\mathcal{O}_K$ , so wussten wir das schon: Für  $w \mid v$  gilt

$$e_{w|v}(L_w|K_v) = e_{w|v}(L|K), \quad f_{w|v}(L_w|K_v) = f_{w|v}(L|K)$$

Also gilt nach Korollar 8.33:

$$[L : K] = \sum_{w|v} e_{w|v}(L|K) f_{w|v}(L|K) = \sum_{w|v} [L_w : K_v].$$

Es sei  $K|\mathbb{Q}$  ein Zahlkörper und  $P(K)$  die Menge der Äquivalenzklassen von Bewertungen auf  $K$ . Wir wählen für jede Klasse in  $P(K)$  den Vertreter  $v$ , der auf der Vervollständigung  $K_v$  die normalisierte Bewertung des lokalen Körpers  $K_v$  induziert. Dann gilt

**Satz 8.81** (Geschlossenheitsrelation). *Für  $x \in K^\times$  gilt  $|x|_v = 1$  für fast alle  $v$  und*

$$\prod_{v \in P(K)} |x|_v = 1.$$

*Beweis.* Es ist  $v_{\mathfrak{p}}(x) = 0$  für alle Primideale  $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$ , die nicht in der Primzerlegung des gebrochenen Hauptideals  $(x)$  vorkommen. Das sind fast alle und es gibt nur endlich viele archimedische Bewertungen auf  $K$ . Daher gilt  $|x|_v = 1$  für fast alle  $v$ .