Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

7. Übungsblatt - Lösungsskizzen

Aufgabe 25 (Faltung und Ausdünnung einer Poisson-Verteilung, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) **Ausdünnung einer Poisson-Verteilung:**
Die Anzahl der Siebenmeter während eines Handballspiels sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Die Siebenmeter werden unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p > 0$ in ein Tor verwandelt. Berechnen Sie die Verteilung der geworfenen Tore durch Siebenmeter während des Spiels.
Hinweis: *Gesucht ist also eine Zähldichte $\mathbb{p}(k)$, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass während des Spiels k Tore durch Siebenmeter geworfen werden.*

(b) **Faltung zweier Poisson-Verteilungen:**
Wir nehmen an, dass die Lebensdauer (in Tagen) zweier Glühbirnen 1 und 2 Poisson-verteilt ist mit Parametern $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$. Wir schrauben nun die Glühbirne 1 in eine Lampe, und ersetzen sie durch Glühbirne 2, wenn sie durchgebrannt ist. Berechnen Sie die Verteilung der Zeit (in Tagen), bis Sie wieder im Dunkeln sitzen. Nehmen Sie dazu an, dass die beiden Glühbirnen unabhängig voneinander durchbrennen.

Lösung 25. (a) Es gibt zwei Möglichkeiten zur Herleitung der Verteilung:
Möglichkeit 1 (mit Ereignissen): Wir definieren die Ereignisse

- $S_n = n$ Siebenmeter treten im Handballspiel auf ($n \in \mathbb{N}_0$).
- $T_k = k$ Tore durch Siebenmeter treten im Handballspiel auf ($k \in \mathbb{N}_0$).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so dass die in der Aufgabenstellung gegebenen Wahrscheinlichkeiten gelten: Die Anzahl Siebenmeter ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(S_n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda},$$

und wenn die Anzahl n der Siebenmeter bekannt ist, ist die Anzahl der Tore binomialverteilt (Siebenmeter werden unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p > 0$ zu Toren). Allerdings kann es immer nur höchstens so viele Tore wie Siebenmeter geben:

$$\mathbb{P}(T_k \mid S_n) = \begin{cases} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Wegen $\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = \Omega$ folgt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(T_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_k|S_n) \cdot \mathbb{P}(S_n) = \sum_{n=k}^{\infty} \left[\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}\right] \cdot \left[\frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}\right]$$

Möglichkeit 2 (mit Zufallsvariablen): Sei $S \sim \mathrm{Poi}_\lambda$ die Anzahl der Siebenmeter in einem Spiel, $T(S) \sim \mathrm{Bin}_{(S,p)}$ die Anzahl der Tore durch Siebenmeter. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T(S)=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T(S)=k, S=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T(S)=k | S=n) \cdot \mathbb{P}(S=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T(n)=k) \cdot \mathbb{P}(S=n) \overset{(*)}{=} \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P}(T(n)=k) \cdot \mathbb{P}(S=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \left[\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}\right] \cdot \left[\frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}\right]
\end{aligned}$$

Erklärung zu $(*)$: Es ist $T(n) \sim \mathrm{Bin}_{(n,p)}$, also $T(n) \in \{0, ..., n\}$. Daher ist $\mathbb{P}(T(n)=k)=0$ für $k > n$.

Aus jeder der beiden Möglichkeiten erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(k \text{ Tore durch Siebenmeter}) \\
= &\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda} \cdot p^k}{k!} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n \cdot (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \\
= &\frac{e^{-\lambda} \cdot p^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k} \cdot (1-p)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot (\lambda p)^k}{k!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot (1-p))^n}{n!} \\
= &\frac{e^{-\lambda} \cdot (\lambda p)^k}{k!} \cdot e^{\lambda \cdot (1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda p}.
\end{aligned}$$

Das ist die Zähldichte einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda \cdot p$, d.h. die Anzahl der Tore durch Siebenmeter während des Spiels folgt einer Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda \cdot p$.

(b) Wir definieren die beiden unabhängigen Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_1}$ (Lebensdauer der ersten Glühbirne) und $Y \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_2}$ (Lebensdauer der zweiten Glühbirne). Aufgrund der Unabhängigkeit von X und Y wissen wir, dass $X + Y \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_1+\lambda_2}$ durch das Faltungstheorem der Poissonverteilung.

Aufgabe 26 (Faltung von stetigen Verteilungen, 4 = 3 + 1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stochastisch unabhängige und stetig verteilte Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsdichten $\mathbb{f}_X, \mathbb{f}_Y$.

(a) **Faltung von Normalverteilungen:**
Seien $X \sim \mathrm{N}_{(\mu_1, \sigma_1^2)}$ und $Y \sim \mathrm{N}_{(\mu_2, \sigma_2^2)}$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Zeigen Sie, dass

$$X + Y \sim \mathrm{N}_{(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)}.$$

Hinweis: *Begründen Sie, warum man o.B.d.A.* $\mu_1 = \mu_2 = 0$ *und* $\sigma_1 = 1$ *annehmen kann. Nutzen Sie quadratische Ergänzung im Exponenten.*

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}_{(\mu,\ \sigma^2)}$. Sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Mittelwert. Berechnen Sie die Verteilung von

$$Z_n := \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}.$$

Lösung 26. (a) Nach dem Satz über die lineare Transformation von Zufallsvariablen (vgl. Bspl. 10.12.(a)) gilt für eine normalverteilte Zufallsvariable $W \sim N_{(\mu,\sigma^2)}$ und $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$: $aW + b \sim N_{(a\mu+b,a^2\sigma^2)}$. Wir betrachten die Darstellung

$$X + Y = \sigma_1 \left(\frac{X - \mu_1}{\sigma_1} + \frac{Y - \mu_2}{\sigma_1} \right) + (\mu_1 + \mu_2).$$

Die Zufallsvariablen $X' := \frac{X-\mu_1}{\sigma_1} \sim N_{(0,1)}$, $Y' := \frac{Y-\mu_2}{\sigma_1} \sim N_{(0,\sigma_2^2/\sigma_1^2)}$ sind laut Lemma 16.05 (Funktionen von unabhängigen Zufallsvariablen sind immer noch unabhängig) immer noch unabhängig. Haben wir nun

$$X' + Y' \sim N_{\left(0,1+\sigma_2^2/\sigma_1^2\right)} \tag{1}$$

gezeigt, so folgt wieder mit der linearen Transformation (vgl. Bspl 10.12 (a)):

$$X + Y = \sigma_1(X' + Y') + (\mu_1 + \mu_2) \sim N_{(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)}.$$

Zum Beweis von (1) nutzen wir die Formel für die Faltung aus Lemma 17.10. und die Abkürzung $\sigma := \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$: Hier ist $\mathbb{f}_{X'}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$ und $\mathbb{f}_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-x^2/(2\sigma^2))$, also für $Z = X' + Y'$:

$$\mathbb{f}_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{f}_X(z-y)\mathbb{f}_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(z-y)^2}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)\,\mathrm{d}y.$$

Beachte

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{\sigma^2} + (z-y)^2 &= \frac{y^2}{\sigma^2} + z^2 - 2yz + y^2 \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\right) \cdot \left(y^2 - 2y \cdot \frac{z}{1+\frac{1}{\sigma^2}} + \left(\frac{z}{1+\frac{1}{\sigma^2}}\right)^2 \right) + z^2 \left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{\sigma^2}}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\right) \cdot \left(y - \frac{z}{1+\frac{1}{\sigma^2}} \right)^2 + \frac{z^2}{1+\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir (beachte: im Integral steht die Dichte einer $N_{(\frac{z}{1+\frac{1}{\sigma^2}},(1+\frac{1}{\sigma^2})^{-1})}$-Verteilung):

$$\begin{aligned}
&f_Z(z) \\
&= \frac{(1+\frac{1}{\sigma^2})^{-1/2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\frac{1}{\sigma^2})^{-1}}} \exp\left(-\frac{1}{2(1+\frac{1}{\sigma^2})^{-1}} \left(y - \frac{z}{1+\frac{1}{\sigma^2}}\right)^2\right) \mathrm{d}y}_{=1} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\sigma^2)}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1+\sigma^2)}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(1+\sigma^2)}\right).
\end{aligned}$$

Das ist die Dichte einer $N_{(0,1+\sigma^2)}$-Verteilung.

(b) Wenden wir (a) induktiv an, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{N}_{\left(\sum_{i=1}^n \mu, \sum_{i=1}^n \sigma^2\right)} = \mathrm{N}_{(n\cdot\mu, n\cdot\sigma^2)}.$$

Beispiel 10.12 (a) über die lineare Transformation von Zufallsvariablen liefert

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N_{(\mu, \frac{\sigma^2}{n})},$$

und weiter

$$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \sim N_{(0,\frac{1}{n})}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \sim N_{(0,1)}.$$

Aufgabe 27 (Erwartungswert von Summe und Produkt von ZV, 4 = 1 + 3 Punkte).

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen aus $\overline{\mathcal{A}}^+$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X_n\right)$$

gilt (vgl. Lemma 20.18. aus der Vorlesung).

(b) Sei nun $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teil-σ-Algebren für eine nicht-leere Indexmenge I. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, genau dann unabhängig sind, wenn für jede Familie $(X_i)_{i\in I}$ positiver numerischer Zufallsvariablen mit $X_i \in \overline{\mathcal{A}_i}^+$, $i \in I$, und jede endliche nicht-leere Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq I$

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}\left(X_j\right)$$

gilt (vgl. Lemma 20.21 aus der Vorlesung).

Lösung 27. (a) Wir definieren $Y_k := \sum_{n=1}^{k} X_n$ und $Y := \sum_{n=1}^{\infty} X_n$. Da $X_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $Y_k \uparrow Y$ $(k \to \infty)$. Aus 20.09. (iii) folgt damit

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}(Y). \qquad (*)$$

Außerdem folgt aus der Linearität des Erwartungswertes $\mathbb{E}(Y_k) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{k} X_n\right) = \sum_{n=1}^{k} \mathbb{E}(X_n)$ und damit aus $(*)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{E}(X_n) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}Y_k \overset{(*)}{=} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right).$$

(b) Wir müssen hier zwei Richtungen zeigen:

"$\Longleftarrow$ " Seien $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i \in I$ beliebig, wir müssen zeigen, dass die $(A_i)_{i\in I}$ stochastisch unabhängig sind.

Sei dazu $\mathcal{J}$ eine beliebige endliche Teilmenge von I, wir definieren $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ für $i \in \mathcal{J}$. Dann gilt

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}(X_j) \overset{\text{Ann.}}{=} \mathbb{E}\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j\right) \overset{(*)}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcap_{j\in\mathcal{J}} A_j}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in\mathcal{J}} A_j\right)$$

wobei wir in $(*)$ benutzt haben, dass $\prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{1}_{A_j} = \mathbb{1}_{\bigcap_{j\in\mathcal{J}} A_j}$. Damit haben wir gezeigt, dass die $(A_i)_{i\in I}$ stochastisch unabhängig sind.

"$\Longrightarrow$ " Wir verwenden die Beweisstrategie der maßtheoretischen Induktion (09.06.):

- **Schritt 1: Bernoulli-Zufallsvariablen:** Seien $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ für $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i \in \mathcal{J}$ und eine beliebige endliche nicht-leere Indexmenge $\mathcal{J} \subseteq I$. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{1}_{A_j}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcap_{j\in\mathcal{J}} A_j}\right) = \mathbb{P}(\bigcap_{j\in\mathcal{J}} A_j)$$
$$\overset{\text{Ann.}}{=} \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{P}(A_j) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_j}) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}(X_j).$$

  Damit ist die Aussage für Bernoulli-Zufallsvariablen gezeigt.

- **Schritt 2: Elementare Zufallsvariablen:** Seien $X_i = \sum_{k=1}^{l_i} a_{i,k} \mathbb{1}_{A_{i,k}}$ für $A_{i,k} \in \mathcal{A}_i$, $a_{i,k} \in \overline{\mathbb{R}}^+$, $k \in \{1, \ldots, l_i\}$, $i \in \mathcal{J}$. Dann können wir das Produkt über die Summe der gewichteten Bernoulli-Zufallsvariablen als Summe über das Produkt schreiben:

$$\prod_{j\in\mathcal{J}} \sum_{k_j=1}^{l_j} a_{j,k_j} \mathbb{1}_{A_{j,k_j}} = \sum_{\substack{k_j \in\{1,\ldots,l_j\} \\ \forall j\in\mathcal{J}}} \prod_{j\in\mathcal{J}} a_{j,k_j} \mathbb{1}_{A_{j,k_j}}$$

  Darauf können wir das Resultat des ersten Schrittes anwenden:

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} \sum_{k_j=1}^{l_j} a_{j,k_j} \mathbb{1}_{A_{j,k_j}}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{\substack{k_j \in\{1,\ldots,l_j\} \\ \forall j\in\mathcal{J}}} \prod_{j\in\mathcal{J}} a_{j,k_j} \mathbb{1}_{A_{j,k_j}}\right)$$
$$\overset{\text{Lin.}}{=} \sum_{\substack{k_j \in\{1,\ldots,l_j\} \\ \forall j\in\mathcal{J}}} \prod_{j\in\mathcal{J}} a_{j,k_j} \mathbb{E}\left(\prod_{n\in\mathcal{J}} \mathbb{1}_{A_{n,k_n}}\right) \overset{\text{Schritt 1}}{=} \sum_{\substack{k_j \in\{1,\ldots,l_j\} \\ \forall j\in\mathcal{J}}} \prod_{j\in\mathcal{J}} a_{j,k_j} \prod_{n\in\mathcal{J}} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_{n,k_n}}\right)$$
$$= \sum_{\substack{k_j \in\{1,\ldots,l_j\} \\ \forall j\in\mathcal{J}}} \prod_{j\in\mathcal{J}} a_{j,k_j} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_{j,k_j}}\right)$$
$$= \prod_{j\in\mathcal{J}} \sum_{k_j=1}^{l_j} a_{j,k_j} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{A_{j,k_j}}\right) \overset{\text{Lin.}}{=} \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}\left(X_j\right).$$

  Damit ist die Aussage für elementare Zufallsvariablen gezeigt.

- **Schritt 3: Positive numerische Zufallsvariablen:** Seien nun $X_i \in \overline{\mathcal{A}_i}^+$, $i \in \mathcal{J}$ positive numerische Zufallsvariablen. Dann können wir X_i als Grenzwert einer monoton wachsenden Folge von elementaren Zufallsvariablen schreiben:

$X_{i,k_i} \uparrow X_i$ $(k_i \longrightarrow \infty)$ für elementare Zufallsvariablen X_{i,k_i}.
Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} \lim_{k_j\to\infty} X_{j,k_j}\right) \overset{\mathcal{J}\text{endl.}}{=} \mathbb{E}\left(\lim_{\substack{k_j\to\infty\\ j\in\mathcal{J}}} \prod_{j\in\mathcal{J}} X_{j,k_j}\right) \\
&\overset{\text{mon. Konv}}{=} \lim_{\substack{k_j\to\infty\\ j\in\mathcal{J}}} \mathbb{E}\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} X_{j,k_j}\right) \\
&\overset{\text{Schritt 2}}{=} \lim_{\substack{k_j\to\infty\\ j\in\mathcal{J}}} \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}\left(X_{j,k_j}\right) \\
&\overset{\mathcal{J}\text{endl.}}{=} \prod_{j\in\mathcal{J}} \lim_{k_j\to\infty} \mathbb{E}\left(X_{j,k_j}\right) \\
&\overset{\text{mon. Konv}}{=} \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}\left(\lim_{k_j\to\infty} X_{j,k_j}\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}\left(X_j\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 28 (Multivariate Normalverteilung, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).
Beweisen Sie Korollar 18.10. aus der Vorlesung:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X = (X_1, ..., X_n) \sim N_{(\mu,\Sigma)}$ gemeinsam normalverteilt mit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit.
Zeigen Sie:

(a) Für $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt $Y = AX + b \sim N_{(A\mu+b, A\Sigma A^t)}$.

(b) Für $i \in \{1, ..., n\}$ gilt $X_i \sim N_{(\mu_i, \Sigma_{ii})}$.

(c) Gelte $\Sigma_{ij} = 0$ für zwei $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Dann sind die Koordinaten X_i und X_j unabhängig.

Lösung 28. (a) Da $X \sim \mathrm{N}_{(\mu,\Sigma)}$, gilt per Definition (18.06.) für alle $d \in \mathbb{R}^n$: $\langle X, d\rangle \sim N_{(\langle\mu,d\rangle, \langle\Sigma d, d\rangle)}$. Sei nun $c \in \mathbb{R}^m$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle Y, c\rangle &= \langle AX + b, c\rangle = \langle AX, c\rangle + \langle b, c\rangle \\
&= \underbrace{\langle X, A^t c\rangle}_{\sim N_{(\langle\mu, A^t c\rangle, \langle\Sigma A^t c, A^t c\rangle)}} + \langle b, c\rangle,
\end{aligned}$$

d.h. $\langle Y, c\rangle \sim N_{(\langle A\mu+b, c\rangle, \langle A\Sigma A^t c, c\rangle)}$ für beliebige $c \in \mathbb{R}^n$. Damit folgt $Y \sim N_{(A\mu+b, A\Sigma A^t)}$.

(b) Wir wenden (a) mit $A = e_i^t$, dem transponierten i-ten Einheitsvektor $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ an. Es folgt

$$X_i = AX \sim N_{(A\mu, A\Sigma A^t)}.$$

Hier ist $A\mu = e_i^t \mu = \mu_i$, und $A\Sigma A^t = e_i^t \Sigma e_i = \Sigma_{ii}$. Damit folgt also

$$X_i \sim N_{(\mu_i, \Sigma_{ii})}.$$

(c) Sei oBdA $\Sigma_{ii}, \Sigma_{jj} > 0$. Für den Fall $\Sigma_{ii} = 0$ wäre X_i fast sicher konstant und trivialerweise wären dann X_i und X_j unabhängig. Definiere $Y := \Sigma^{-1/2}(X - \mu)$. Dann gilt nach (a):

$$Y = \Sigma^{-1/2} X - \Sigma^{-1/2}\mu \sim N_{(\Sigma^{-1/2}\mu - \Sigma^{-1/2}\mu, \Sigma^{-1/2}\Sigma\Sigma^{-1/2})} = N_{(0, I_{n\times n})}.$$

Mit $A := \Sigma^{1/2}e_j$, $B = \Sigma^{1/2}e_i$ gilt $A^tB = e_j^t\Sigma e_i = \Sigma_{ij} = 0$, da Σ symmetrisch. Wir möchten nun zeigen, dass wir für eine Matrix $Z \in \mathbb{R}^{(n,m)}$ mit vollem Spaltenrang die Projektion $\Pi_{\text{Bild}(Z)}$, bzw. $\Pi_{\text{Bild}(Z)^\perp}$ explizit angeben können durch $\Pi_{\text{Bild}(Z)}(v) = Z(Z^tZ)^{-1}Z^tv =: Pv$ bzw. durch $\Pi_{\text{Bild}(Z)^\perp}(v) = v - Z(Z^tZ)^{-1}Z^tv =: P^\perp v$ für $v \in \mathbb{R}^n$. Das heißt wir müssen zeigen

(a) $Pv + P^\perp v = v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ (klar!)

(b) $Pv \in \text{Bild}(Z)$

(c) $\langle Pv, P^\perp v\rangle = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Durch die eindeutige Darstellung der direkten Summe folgt dann die Behauptung. Wir sehen, dass (b) gilt, da der Vektor $w = (Z^tZ)^{-1}Z^tv \in \mathbb{R}^{(m,1)}$ und folglich $Pv = \sum_{j\in[\![m]\!]} Z_{\bullet j}w_j \in \text{Bild}(Z)$. Die letzte Eigenschaft erhalten wir durch die Überlegung, dass $PP = P$ und $P^t = p$ ist, dies ist einfach nachzurechnen. Wir folgern damit, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Pv, P^\perp v\rangle = v^tP^tv - vP^tPv = 0 = v^tPv - v^tPv = 0$$

gilt. Da A und B vollen Spaltenrang haben folgern wir aus Lemma 18.08, dass $A(A^tA)^{-1}A^tX$ und $B(B^tB)^{-1}B^tX$ stochastisch unabhängig sind. Weiter gilt $A^tA = \Sigma_{jj}$ und $B^tB = \Sigma_{ii}$ und

$$\begin{aligned} A(A^tA)^{-1}A^TY &= \Sigma_{jj}^{-1}\Sigma^{1/2}e_je_j^t\Sigma^{1/2}Y_j = \Sigma_{jj}^{-1}\Sigma^{1/2}e_j(X_j - \mu_j) \\ B(B^tB)B^tY &= \Sigma_{ii}^{-1}\Sigma^{1/2}e_ie_i^t\Sigma^{1/2}Y_i = \Sigma_{ii}^{-1}\Sigma^{1/2}e_i(X_i - \mu_i). \end{aligned}$$

Durch die Verkettung einer linearen Transformation und der Projektion auf die i-te bzw. j-te Koordinate, welche messbar ist, schließen wir, dass bereits X_i und X_j unabhängig sein müssen.

Alternative: Wieder sei oBdA $\Sigma_{ii}, \Sigma_{jj} > 0$. Wähle $A = \begin{pmatrix} e_i^t \\ e_j^t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,n)}$. Dann gilt unter Verwendung von (a)

$$\begin{pmatrix} X_i \\ X_j \end{pmatrix} = AX \sim \mathrm{N}_{\begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{ii} & 0 \\ 0 & \Sigma_{jj} \end{pmatrix}}.$$

Folglich ist erneut durch Anwendung von (a)

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \Sigma_{ii}^{-1/2}(X_i - \mu_i) \\ \Sigma_{jj}^{-1/2}(X_j - \mu_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{ii}^{-1/2} & 0 \\ 0 & \Sigma_{jj}^{-1/2} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} X_i \\ X_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_j \end{pmatrix} \right) \sim \mathrm{N}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Mittels Korollar 18.04 erhalten wir dann, dass $Z_1, Z_2 \overset{uiv}{\sim} \mathrm{N}_{(0,1)}$ und somit insbesonde unabhängig sind. Da aber $X_i = \Sigma_{ii}^{1/2}Z_1 + \mu_i$ bzw $X_j = \Sigma_{jj}^{1/2}Z_2 + \mu_j$ sich als lineare Transformation, und folglich messbare Transformation, von Z_1 bzw. Z_2 ausdrücken lassen, folgt bereits die Unabhängigkeit von X_i und X_j.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **18. Januar 2021, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`