UNIVERSITÄT HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 13. Oktober 2021

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE I
ÜBUNGSAUFGABEN 1

DEADLINE: Do. 28. Okt. 2021, 15:00.

1. Sei $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ die Menge aller Polynome in n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit komplexen Koeffizienten. Ist $S = \{f_1, \ldots, f_r\} \subset R$ irgendeine endliche Teilmenge, dann setzen wir
$$\langle S \rangle = \{a_1 f_1 + \ldots + a_r f_r : a_i \in R\}.$$
Definiere eine Teilmenge $V(\langle S \rangle) \subset \mathbb{C}^n$ durch
$$V(\langle S \rangle) = \{p \in \mathbb{C}^n : f(p) = 0 \text{ für alle } f \in \langle S \rangle\}.$$
Sei $\mathcal{T}$ die Kollektion
$$\mathcal{T} = \{\mathbb{C}^n - V : V = V(\langle S \rangle) \text{ für ein } S \text{ wie oben}\}.$$
   (a) Beweisen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{C}^n$ ist. *Hinweis:* Sie dürfen die algebraische Tatsache verwenden, dass für eine gegebene Familie $\{S_\alpha\}$, die Menge
$$\{g_1 + \ldots + g_k : g_i \in \langle S_{\alpha_i} \rangle \text{ für ein } \alpha_i\}$$
gleich $\langle S \rangle$ für eine endliche Teilmenge $S \subset R$ ist.
   (b) Beschreiben Sie alle abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{C}^1, \mathcal{T})$.
2. Beweisen Sie, dass für jede stetige Abbildung $f : S^1 \to \mathbb{R}$ ein Punkt $x \in S^1$ mit $f(x) = f(-x)$ existiert.
3. Zeigen Sie: Eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \to [0, 1]$ besitzt einen Fixpunkt.
4. Sind S^1 und S^2 homöomorph? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Notation: $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$, die n-*Sphäre*.