Übungsblatt 7

1	2	3		Σ

Josua Kugler, Ann Cathrin Wesener

1)

- $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$
  $\dot{x}_2(t) = -4x_1(t)$

  $\ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = -4x_1(t)$

  $\ddot{x}_1(t) + 4x_1(t) = 0$

  $x_1(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ $\qquad$ $\dot{x}_2(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$

  $x_1(0) = A$ $\qquad$ $\hookrightarrow x_2(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$

  $x_2(0) = 2B$

  $$\Rightarrow \boxed{\Phi_t^1\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10}\cos(2t) + \frac{x_{20}}{2}\sin(2t) \\ -2x_{10}\sin(2t) + x_{20}\cos(2t)\end{pmatrix}}$$

- $\dot{y}_1(t) = 2y_2(t)$
  $\dot{y}_2(t) = -2y_1(t)$

  $\ddot{y}_1(t) + 4y_1(t) = 0$

  $\Rightarrow y_1(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

  $y_2(t) = -A\sin(2t) + B\cos(2t)$

  $$\Rightarrow \boxed{\Phi_t^2\begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10}\cos(2t) + y_{20}\sin(2t) \\ -y_{10}\sin(2t) + y_{20}\cos(2t)\end{pmatrix}}$$

Konjugation durch lineare Abbildung $\Psi \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ offensichtlich Homöomorphismus. Diese erfüllt $\Psi \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ \Psi$

$$\begin{pmatrix} a x_{10}\cos(2t) + a\frac{x_{20}}{2}\sin(2t) - b2x_{10}\sin(2t) + bx_{20}\cos(2t) \\ c x_{10}\cos(2t) + c\frac{x_{20}}{2}\sin(2t) - d2x_{10}\sin(2t) + dx_{20}\cos(2t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a x_{10}\cos(2t) + bx_{20}\cos(2t) + cx_{10}\sin(2t) + dx_{20}\sin(2t) \\ -(ax_{10} + bx_{20})\sin(2t) + (cx_{10} + dx_{20})\cos(2t)\end{pmatrix}$$

wobei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

7.2

(a) Nullkline: $x' = x(-x-y+1) = 0 \qquad x=0 \ \vee \ x = 1-y$

$y' = y(-ax-y+b) = 0 \qquad y = 0 \ \vee \ y = b-ax$

Fixpunkte: $(0,0)$, $(0,b)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1-b}{1-a}, \frac{b-a}{1-a}\right)$ für $a>1$, $b<a$ ist $\left(\frac{1-b}{1-a}, \frac{b-a}{1-a}\right)$ relevant

(b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f(x,y)$:

↳ $(0,0)$: $f\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Eigenwerte: $\left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & b-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(b-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda = 1, b$ hyperbolisch

nach 3.19 zu e^{At} konjugiert $\Rightarrow$ Stabilität durch EW gegeben $\Rightarrow$ hier nicht stabil

↳ $(0,b)$: $f\big|_{(0,b)} = \begin{pmatrix} -b+1 & 0 \\ -ba & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-b \end{pmatrix}$ Eigenwerte: $\left|\begin{pmatrix} 1-b-\lambda & 0 \\ -ba & -b-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 = (1-\lambda-b)(-b-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -b, \ \lambda = 1-b$

$\Rightarrow$ stabil

↳ $(1,0)$: $f\big|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -a+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ Eigenwerte: $\left|\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 0 & -a+b-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda = -1 \quad \lambda = -a+b}_{\text{kommt drauf an}}$, für $-a+b>0$ Sattelpunkt, $-a+b<0$ stabil

↳ $\left(\frac{1-b}{1-a}, \frac{b-a}{1-a}\right)$: Dieser Fixpunkt scheint direkt aus der Hölle zu kommen und wird daher ignoriert

(c) Nach 3.17 können wir Rückschlüsse auf die Stabilität des ursprünglichen Systems ziehen.