Namen: ______________________

____

Aufgabe	9.1	9.2	9.3	Z9.1	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 9

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 9.1 **5 Punkte**

Sei $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ der Schwartzraum.

a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ein $\mathbb{C}$–Vektorraum ist.

b) Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty]$.

c) Seien $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $fg \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 9.2 **5 Punkte**

Zu $j \in \mathbb{N}$ sei $H_j \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ das j–te Hermite Polynom, d.h. H_j ist gegeben durch

$$H_0(x) \coloneqq 1, \qquad H_j(x) \coloneqq (-1)^j e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j} e^{-x^2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Sei $\psi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ gegeben durch $\psi_j(x) \coloneqq H_j(x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\psi_{j+1}(x) = x\,\psi_j(x) - \psi_j'(x), \qquad \widehat{\psi}_{j+1}(\xi) = -\mathbf{i}(\xi\widehat{\psi}_j(\xi) - (\widehat{\psi}_j)'(\xi)) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

und folgern Sie daraus, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ ein $\lambda_j \in \{\pm 1, \pm \mathbf{i}\}$ existiert, so dass $\widehat{\psi}_j = \lambda_j \psi_j$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $H_{j+1}(x) = 2xH_j(x) - H_j'(x)$.

Aufgabe 9.3 **5 Punkte**

Sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Zu $\alpha > 0$ und $y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Operatoren

$$\tau_y f(x) \coloneqq f(x-y), \qquad \delta_\alpha f(x) \coloneqq f(\alpha x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Zeigen Sie:

a) $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{-\mathbf{i}\xi\cdot y}\widehat{f}(\xi)$ für alle $y, \xi \in \mathbb{R}^n$.

b) $\widehat{\delta_\alpha f}(\xi) = \frac{1}{\alpha^n}\widehat{f}(\frac{\xi}{\alpha})$ für alle $\alpha > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

c) $\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\widehat{f}\,\widehat{g}$.

Zusatzaufgabe 9.1 **3 Punkte**

Zu $\in \mathbb{N}$ seien $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Wir definieren $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) \coloneqq \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Zeigen Sie, dass $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ und dass $\widehat{f}(\xi) = \prod_{i=1}^n \widehat{f}_i(\xi_i)$.

Abgabe bis spätestens 28.01.2021, 14:00 Uhr in Moodle.