Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

12. Übungsblatt

Ausgabe 09.02.2020 – Besprechung 15.02-18.02.2021

1. Aufgabe:

Die relativistische Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{u} = (u, 0, 0)$ in einem konstanten elektrischen Feld $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$ ist gegeben durch

$$m\frac{\mathrm{d}(\gamma \boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E}\,.$$

a) Wenn das Teilchen bei $t = 0$ in Ruhe war, was ist seine Geschwindigkeit bei $t > 0$ und für $t = \infty$?

b) Berechnen Sie die Potision $x(t)$ des Teilchens, wenn es bei $t = 0$ am Ursprung $x = 0$ startet. Zeigen Sie, dass für das Limit kleiner Geschwindigkeiten gegenüber der Lichtgeschwindigkeit das nicht-relativistische Resultat für Teilchen, die konstant beschleunigt werden folgt:

$$mx = \frac{1}{2}qEt^2 + \mathcal{O}(c^{-2})\,,$$

2. Aufgabe:

Die relativistische Verallgemeinerung des zweiten Newtonschen Gesetzes ist gegeben durch

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}(\gamma \boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass für ein Teilchen mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{u}$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \gamma m\left(\gamma^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_n\right)\,,$$

wobei $\hat{\boldsymbol{e}}_t$ der Einheitsvektor entlang der Tangente der Trajektorie des Teilchens, $\hat{\boldsymbol{e}}_n$ der Einheitsvektor der senkrecht darauf steht, $v = |\boldsymbol{u}|$ die Geschwindigkeit des Teilchens und ρ der Krümmungsradius der Trajektorie ist.

b) Zeigen Sie, dass die 4-Beschleunigung senkrecht auf der 4-Geschwindigkeit steht

$$u^\mu \perp \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u^\mu\,.$$

3. Aufgabe:

Ein Teilchen mit Ladung q und Masse m bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in einem konstanten magnetischen Feld $\boldsymbol{B}$. Verwenden Sie die Lorentzkraft und das zweite Newtonsche Gesetz um zu zeigen, dass sich das Teilchen mit einer Frequenz

$$f = \frac{qB}{2\pi m\gamma}$$

auf einer Kreisbahn bewegt.

4. Aufgabe:

Nehmen Sie an, eine hohle, geladene Kugel mit Radius R und gleichmässig auf der Oberfläche verteilten Ladung Q rotiert um die z-Achse (die Nord- mit Südpol der Kugel verbindet) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Oberflächen-Ladungsdichte $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ und die Stromdichte $\boldsymbol{\jmath} = \rho\boldsymbol{v}$.

b) Zeigen Sie, dass das Vektorpotential innerhalb und außerhalb der Kugel gegeben ist durch

$$\boldsymbol{A} = \begin{cases} \dfrac{Q}{12\pi R}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}\,, & r < R\,, \\[2ex] \dfrac{QR^2}{12\pi}\boldsymbol{\omega}\times\dfrac{\hat{\boldsymbol{e}}_r}{r^2}\,, & r > R\,. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass in Coloumb-Eichung

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{\jmath}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'\,,$$

und das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-ax}}\,dx = \frac{2}{3a^2}\left((2-a)\sqrt{1+a}-(2+a)\sqrt{1-a}\right)\,.$$

c) Bestimmen Sie das magnetische Feld $\boldsymbol{B}$ innerhalb und ausserhalb der rotierenden Hohlkugel.

d) Zeigen Sie, dass das magnetische Dipolmoment der rotierenden Hohlkugel gegeben ist durch

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{QR^2}{12\pi}\boldsymbol{\omega}\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass man das magnetische Feld ausserdhalb der Hohlkugel schreiben kann als $\boldsymbol{B} = (3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\mu}\cdot\vec{r}) - r^2\boldsymbol{\mu})/r^5$.

e) Nun nehmen wir an die Hohlkugel befände sich in einem externen magnetischen Feld $\boldsymbol{B}_{\text{ext}} = B_0\,\hat{\boldsymbol{e}}_b/r$ mit konstantem B_0 und dem Winkel θ zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_b$. Berechnen Sie die Kraft $\boldsymbol{F}$ die aufgrund des externen Magnetfeldes auf die Oberfläche der Hohlkugel wirkt.

Hinweis: Das Potential ist gegeben durch $U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}_{\text{ext}}$.