Namen: ______________________

____

Aufgabe	2.1	2.2	2.3	Z2.1	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 2

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 2.1 (Lebesgue–Maß) **5 Punkte**

Sei $\lambda\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,\infty]$ das Lebesgue–Maß.

a) Sei $A \subset \mathbb{R}$ abzälbar. Zeigen Sie, dass $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und dass $\lambda(A) = 0$.

b) Zu $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $\alpha > 0$ definieren wir $\alpha A := \{\alpha x : x \in A\}$. Zeigen Sie, dass $\alpha A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $\lambda(\alpha A) = \alpha\lambda(A)$.

c) Zeigen Sie, dass für alle $\alpha > 0$ eine Menge $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ existiert, so dass A dicht ist in $\mathbb{R}$, und $\lambda(A) = \alpha$. Gibt es auch eine offene Menge $A \subset \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.2 (Hausdorff–Maß) **5 Punkte**

Sei $s \geq 0$ und $\delta > 0$. Zu $A \subset \mathbb{R}$ definieren wir $\operatorname{diam}(A) := \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$. Weiterhin definieren wir

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s : A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j,\ \operatorname{diam}(B_j) \leq \delta\Big\} \qquad \text{für alle } A \subset \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Nun definieren wir das Hausdorff–Maß durch

$$\mathscr{H}^s(A) := \limsup_{\delta\to 0} \mathscr{H}^s_\delta(A) \qquad \text{für alle } A \subset \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{H}^s$ ein äußeres Maß ist.

b) Zu $A \subset \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$ definieren wir $\alpha A := \{\alpha x : x \in A\}$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{H}^s(\alpha A) = \alpha^s \mathscr{H}^s(A)$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathscr{H}^s(A + y) = \mathscr{H}^s(A)$ für alle $A \subset \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

d) Zeigen Sie, dass $\mathscr{H}^0$ das Zählmaß ist.

e) Ist $\mathscr{H}^1$ ein Maß? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: In Definition 2.21 wurde der Normierungsfaktor $\alpha(s)$ in die Definition von $\mathscr{H}^s_\delta$ hinzugenommen. Dieser spielt für die zu zeigenden Eigenschaften in dieser Aufgabe keine Rolle und wurde deshalb hier weggelassen.

Aufgabe 2.3 (Caratheodory) **5 Punkte**

Sei X eine Menge und $\nu\colon \mathscr{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ definiert durch

$$\nu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ höchstens abzählbar ist,} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } A \subset X. \tag{3.1}$$

a) Zeigen Sie, dass ν ein äußeres Maß ist.

b) Bestimmen Sie alle Mengen $A \subset X$, so dass

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) \qquad \text{für alle } E \subset X. \tag{3.2}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe bis spätestens 12.11.2020, 14:00 Uhr in Moodle.

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Zusatzufgabe 2.1 **3 Punkte**

Sei $\#\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,\infty]$ das Zählmaß. Wir definieren die Funktion $\mu\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,\infty]$ durch

$$\mu(A) \coloneqq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#(A \cap \{1,\dots,n\}) \qquad \text{für alle } A \subset \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Ist μ ein Maß? Ist μ ein äußeres Maß? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe bis spätestens 12.11.2020, 14:00 Uhr in Moodle.