Aufgabe 40

(a) Angenommen, eine Folge in einem separierten Raum $(X, \mathfrak{U}_X)$ hätte zwei verschiedene Grenzwerte $x \neq x'$. Aufgrund der Separiertheit existieren Umgebungen $U, U' \in \mathfrak{U}_X$ mit $x \in U, x' \in U'$ und $U \cap U' = \emptyset$. Dann liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder in U. Insbesondere liegen höchstens endlich viele Folgenglieder in U'. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass x' ein Grenzwert der Folge ist.

(b) Wir betrachten die Menge $\mathbb{R} \cup \{0'\}$ und statten sie aus mit der Standardtopologie, wobei jede Umgebung der 0 auch $0'$ enthalten soll. Dann besitzt die Folge $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ die beiden Grenzwerte 0 und $0'$. Sowohl jede Umgebung von 0 als auch jede Umgebung von $0'$ enthält nämlich alle bis auf endlich viele Folgenglieder.

Aufgabe 41

Wir zeigen zunächst die Implikation (a) $\implies$ (b). Es gilt

(1) Sei $x \in X$ und $g \in G \setminus \{e\}$. Da die Operation frei ist, existiert eine offene Menge U_x mit $x \in U_x$ derart, dass $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset \implies g = e$. Für $g \neq e$ erhalten wir daher $g(U_x) \cap U_x = \emptyset$.

(2)

Nun zeigen wir die Implikation (b) $\implies$ (a). Es gilt

(1) Z.Z.: $\forall x \in X : \exists U_x$ offen mit $x \in U_x$ und $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset \implies g = e$.

Beweis. Sei $x \in X$. Wähle dann eine Umgebung U_0 von x derart, dass ein Kompaktum K mit $U_0 \subset K$ existiert. Sei dann

$$M := \{g \in G \colon K \cap g(K) \neq \emptyset\}.$$

Wegen Eigenschaft (2) muss diese Menge endlich sein. Aufgrund der Separiertheit existieren für beliebiges $g \in M$ Umgebungen U_g, U_x^g mit $gx \in U_g, x \in U_x^g$ derart, dass $U_g \cap U_x^g \neq \emptyset \implies g = e$. Da M nur eine endliche Menge ist, handelt es sich bei

$$U_x' := \bigcap_{g\in M} U_x^g$$

wieder um eine offene Menge. Es gilt nun für alle $g \in M$:

$$U_g \cap U_x' \neq \emptyset \implies g = e.$$

Definiere schließlich

$$U_x := \bigcap_{g\in M} g^{-1}(U_g) \cap U_x' \cap U_0$$

Als endlicher Schnitt offener Mengen ist auch U_x offen und es gilt

$$\begin{aligned} g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset &\implies g(K) \cap K \neq \emptyset \\ &\implies g \in M \\ &\implies g(U_x) = g\left(\bigcap_{g \in M} g^{-1}(U_g) \cap U'_x \cap U_0\right) \subset g(g^{-1}(U_g)) = U_g \end{aligned}$$

Außerdem gilt $U_x \subset U'_x$. Daher erhalten wir $g(U_x) \cap U_x \subset U_g \cap U'_x$. Wegen $\emptyset \neq g(U_x) \cap U_x$ folgt $\emptyset \neq U_g \cap U'_x \implies g = e$. □

(2) Z.Z.: $x \not\sim_G y \implies \exists U_x, U_y \in \mathfrak{U}_X$ mit $x \in U_x, y \in U_y$ und $U_y \cap g(U_x) = \emptyset \forall g \in G$.

Beweis. Seien $x, y \in X$ gegeben mit $x \not\sim_G y$. Aufgrund der Separiertheit können wir Umgebungen U'_x und U'_y wählen mit $x \in U'_x$ und $y \in U'_y$, $U'_x \cap U'_y = \emptyset$ und $U'_x \subset K_1, U'_y \subset K_2$ für Kompakta $K_1, K_2 \subset X$. Sei $M := \{g \in G\colon g(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\}$. Dann ist M wegen (2) endlich. Analog wie im letzten Beweis finden wir aufgrund der Separiertheit und der Endlichkeit von M offene Umgebungen U''_y und U''_x, mit $U''_y \cap g(U''_x) = \emptyset \forall g \in M$. Schließlich definieren wir $U_x := U'_x \cap U''_x$ und $U_y := U'_y \cap U''_y$. Dann gilt für $g \in G \setminus M$

$$U_y \cap g(U_x) \subset U'_y \cap g(U'_x) \subset K_2 \cap g(K_1) = \emptyset$$

und für $g \in M$

$$U_y \cap g(U_x) \subset U''_y \cap g(U''_x) = \emptyset.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □