Aufgabe 1 (Auflösung von $\mathbb{Z}$ als C_n-Modul). **(4 Punkte)**
Sei $C_n := \{1, t, \ldots, t^{n-1}\}$ die multiplikative zyklische Gruppe von Ordnung $n \geq 2$ mit Erzeuger t. Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als C_n-Modul, d.h. als Modul über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[C_n]$, und die Elemente $\zeta := t-1$ und $N := \sum_{i=0}^{n-1} t^i$ von $\mathbb{Z}[C_n]$. Zeigen Sie, dass

$$\ldots \xrightarrow{\cdot\zeta} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot\zeta} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot\zeta} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ ist.

1. t ist ein Erzeuger von C_n $\to$ $\zeta := t-1$ ist Erzeuger von $\ker \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\zeta \cdot \mathbb{Z}[C_n] \supseteq \ker \varepsilon$, außerdem $\varepsilon_0(\zeta) = 0$ $\Rightarrow$ $\zeta \cdot \mathbb{Z}[C_n] \subseteq \ker \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\mathrm{im}(\cdot\zeta) = \ker(\varepsilon)$

Es gilt $\zeta \cdot N = \left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i\right) \cdot (t-1) = \cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} t^i\right) = \cdot(t^n - 1) = 1-1 = 0$

2. $(\cdot\zeta) \circ (\cdot N) = \cdot 0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{im}(\cdot N) \subseteq \ker(\cdot\zeta)$

$\ker(\zeta) = \left\{ \sum_{g \in C_n} a_g \cdot g : 0 = \zeta \cdot \sum_{g \in C_n} a_g \cdot g = \sum_{g \in C_n} a_g \cdot \zeta \cdot g = \sum_{g \in C_n} a_g\, t g - a_g\, g \right)$

$= \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_{t^i} t^i : \sum_{i=0}^{n-1} a_{t^i} t\, t^i = \sum_{g \in C_n} a_{t^i} t^i \right\}$

Komponentenvergleich in der i-ten Komponente liefert $a_{t^{i-1}} = a_{t^i}$ $\Rightarrow$ $\forall g: a_g = a_1$

$= \left\{ a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} t^i : a_1 \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathrm{im}(\cdot N)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{im}(\cdot N) = \ker(\cdot\zeta)$

3. $(\cdot N) \circ (\cdot\zeta) = \cdot 0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{im}(\cdot\zeta) \subseteq \ker(\cdot N)$

$x \in \ker(N)$ $\Rightarrow$ $x \cdot N = 0$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=0}^{n-1} a_{t^i} t^i \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} t^j\right) = 0$

$\Rightarrow$ $\sum_{i,j=0}^{n-1} a_{t^i} t^i t^j = 0$ $\Rightarrow$ $0 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i+j \equiv k \bmod n} a_i\, t^k$

$\Rightarrow$ $\sum_{i+j \equiv k \bmod n} a_i = 0$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$ $\Rightarrow$ $x \in \ker \varepsilon$ $\Rightarrow$ $x \in \mathrm{im}(\cdot\zeta)$

Aufgabe 2 (Gruppenhomologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten). **(4 Punkte)**
Bestimmen Sie für alle $n \geq 0$ die Gruppenhomologiegruppen $\mathrm{H}_n(G, \mathbb{Z})$ für

(a) $G = \mathbb{Z}^2$. *Hinweis:* Verwenden Sie Blatt 3, Aufgabe 3.

Aus Aufgabe 3.3 folgern wir die Existenz der folgenden projektiven Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}^2$-Modul:

$$0 \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[G] \oplus \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

$$0 \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\wr\wr}{\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}}} \xrightarrow{\partial_2\otimes id} \underset{\mathbb{Z}^2}{\underset{\wr\wr}{\mathbb{Z}[G]\oplus\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}}} \xrightarrow{\partial_1\otimes id} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\wr\wr}{\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}}} \longrightarrow 0$$

$$\left(\begin{array}{ll} \partial_1\otimes id: & (x,y)\otimes z \longmapsto (x(t_1-1)+y(t_2-1))\otimes z \\ \partial_2\otimes id: & x\otimes z \longmapsto (-x(t_2-1),\ x(t_1-1))\otimes z \end{array}\right)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\tilde{\partial}_2} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$\tilde{\partial}_1: (xz, yz) \longmapsto (x(t_1-1)+y(t_2-1))z$
$= xt_1z - x\cdot 1\cdot z + yt_2z - y\cdot 1\cdot z$
$= xz - xz + yz - yz$
$= 0$

$t_2z = t_1z = z$, da $t_1, t_2 \in G$

$\tilde{\partial}_2: xz \longmapsto ((-x(t_2-1))z,\ (x(t_1-1))z)$
$= (-xt_2z + x1z,\ xt_1z - x1z)$
$= (-xz + xz,\ xz - xz)$
$= (0,0)$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

1. $Z_0 = \ker(0: \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}\to 0) = \mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}$

$B_0 = \underset{\text{erhält Bilder}}{\operatorname{im}(\partial_1\otimes id)} \overset{\text{Tensorprodukt}}{=} \ker(\varepsilon)\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} = I_G\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}$

$H_0 = Z_0/B_0 \overset{\text{Rechtsexaktheit}}{=} \mathbb{Z}[G]/I_G \otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} \underset{\varepsilon}{\overset{\text{Homomorph.}}{=}} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z}$

oder $Z_0 = \ker(0:\mathbb{Z}\to 0) = \mathbb{Z}$

$B_0 = \operatorname{im}(\partial_1\otimes id) = \operatorname{im}(\tilde{\partial}_1) = 0 \implies H_0 = Z_0/B_0 = \mathbb{Z}$

Warum ist das kein Widerspruch?

$\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$

$a\otimes b \mapsto ab$

surjektiv ist klar, injektiv: $ab=0 \implies a=0 \vee b=0 \implies a\otimes b = 0$

2. $Z_1 = \ker(\partial_1 \otimes \mathrm{id}) \cong \ker(\tilde{\partial}_1 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}) = \ker(0 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z})$

$\Rightarrow Z_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

$B_1 = \operatorname{im}(\partial_2 \otimes \mathrm{id}) \cong \operatorname{im}(\tilde{\partial}_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2) = 0$

$\Rightarrow H_1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

3. $Z_2 = \ker(\partial_2 \otimes \mathrm{id}) \cong \ker(\tilde{\partial}_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}$

$B_2 = \operatorname{im}(0) = 0 \qquad \Rightarrow H_2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

4. $n \geq 3$: $\quad Z_n = \ker(0 : 0 \to X)$, $B_n = \operatorname{im}(0 : 0 \to 0) \Rightarrow H_n(G, \mathbb{Z}) = 0$

(b) $G = C_n$. *Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 1.

Nach Aufgabe 1 ist

$$\ldots \xrightarrow{\cdot \zeta} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot \zeta} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot \zeta} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

eine freie also insb. projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}[C_n]$-Modul, wir betrachten daher

$$\ldots \to \mathbb{Z}[C_n] \otimes_{\mathbb{Z}[C_n]} \mathbb{Z} \xrightarrow{(\cdot N) \otimes \mathrm{id}} \mathbb{Z}[C_n] \otimes_{\mathbb{Z}[C_n]} \mathbb{Z} \xrightarrow{(\cdot \zeta) \otimes \mathrm{id}} \mathbb{Z}[C_n] \otimes_{\mathbb{Z}[C_n]} \mathbb{Z} \to 0$$

$(\cdot N) \otimes \mathrm{id}$: $x \otimes a \mapsto xN \otimes a$; $(\cdot \zeta) \otimes \mathrm{id}$: $x \otimes a \mapsto x\zeta \otimes a$

$$\ldots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\tilde{N}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\tilde{\zeta}} \mathbb{Z} \to 0$$

$\tilde{N}$: $xa \mapsto xNa = x \sum_{i=0}^{n-1} t^i a = x \cdot n \cdot a$; $\quad \tilde{\zeta}$: $xa \mapsto x\zeta a = x(t-1)a = x(ta - a) = x(a-a) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\cdots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z} \to 0$$

$\Rightarrow H_0(C_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_{2k+1}(C_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad H_{2k}(C_n, \mathbb{Z}) = \frac{\ker(\cdot n)}{\operatorname{im}(0)} = 0 \quad \forall k$

Aufgabe 3 (Induzierte Moduln). **(4 Punkte)**
Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

(a) Induzierte Moduln sind homologisch trivial.

B homologisch trivial $\Leftrightarrow$ $H_n(U, B) = 0 \quad \forall n$ und jede $U \leq G$

B induziert $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ G-Modul A: $B = \operatorname{Ind}_G A \overset{nat.}{\cong} \operatorname{Ind}_G A^{tr} = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A^{tr}$

$$H_n(G, \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A^{tr}) = H_n(\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A^{tr} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P_\bullet) = H_n(A^{tr} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} P_\bullet)$$

$$= H_n(A^{tr} \otimes_{\mathbb{Z}} P_\bullet) \cong \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A^{tr}, \mathbb{Z}) = 0$$

wird als $\mathbb{Z}[G]$-Modul-Komplex zum $\mathbb{Z}$-Modul-Komplex

projektiv

$$(\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} A^{tr})_G \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A^{tr} \cong A^{tr}$$

(b) Für alle $n \geq 0$ ist $\mathrm{H}_n(U, A) \cong \mathrm{H}_n(G, \mathrm{Ind}_G^U(A))$.

$$H_n(G, \operatorname{Ind}_G^U(A)) = H_n(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \operatorname{Ind}_G^U(A)) = H_n(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} A)$$

$$= H_n(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[U]} A) = H_n(U, A)$$

mit $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$ als G-Modul, daher auch als U-Modul.

Aufgabe 4 (Legendre-Symbol). **(4 Punkte)**
Wir betrachten die multiplikative Gruppe $G := (\mathbb{Z}/p)^\times$ und ihre Untergruppe $U := \{\pm 1\}$. Zeigen Sie, dass sich die Restriktionsabbildung $\mathrm{Res}_U^G\colon \mathrm{H}_1(G, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_1(U, \mathbb{Z})$ mit dem Legendre-Symbol identifiziert.

$(\mathbb{Z}/p)^\times$ zyklisch als Einheitengruppe eines Körpers.

$$G \cong H_1(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\operatorname{Res}_U^G} H_1(U, \mathbb{Z}) \cong U$$

$$\mathbb{Z}[G^2] \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$\begin{array}{c}
\mathbb{Z}[G^2] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
\Big\downarrow \mathrm{res}^G_U \\
\mathbb{Z}[G^2] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[U]} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[U]} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\
\Big\downarrow
\end{array}$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi(p)} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$H_1(G) = \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$

$$H_1(U) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \{\pm 1\}$$

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \{\pm 1\}$$

$$x \longmapsto \Big(\sum_{s \in U\backslash G} s \cdot x\Big) \cdot \big((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\big)^2$$

Es gilt $G/U = ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times)^2$, da $G = ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times)^2 \cup -1 \cdot ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times)^2$. Durch Umordnen erhalten wir, dass jede Nebenklasse von $\{\pm 1\}$ ein Quadrat enthält.

$$x \longmapsto \Big(\sum_{s \in ((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times)^2} s \cdot x\Big) \cdot \big((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\big)^2$$

$$= x \cdot \big((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times\big)^2$$

Es gilt $\mathrm{cor}^U_G \circ \mathrm{res}^G_U = \#G \cdot \mathrm{id} = \underbrace{\varphi(p)}_{=p-1} \cdot \mathrm{id} = \overset{\text{multiplikative}}{\underset{\text{Schreibweise}}{(\ )^{\frac{p-1}{2}}}}$ $\qquad (G:U) = \frac{\varphi(p)}{2} = \frac{p-1}{2}$

Laut Skript ist $\mathrm{cor}^U_G : \underset{\substack{\| \\ U^{ab}}}{H_1(U, \mathbb{Z})} \longrightarrow \underset{\substack{\cong \\ G^{ab}}}{H_1(G, \mathbb{Z})}$ die natürliche durch $U \hookrightarrow G$ induzierte Abbildung auf den Abelisierungen, also $U^{ab} = U = \{\pm 1\} \hookrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times = G = G^{ab}$,

daher ist $\mathrm{cor}^U_G \circ \mathrm{res}^G_U = i \circ \mathrm{res}^G_U = (\ )^{\frac{p-1}{2}}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{res}^G_U(x) = x^{\frac{p-1}{2}} \quad \forall x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

$\square$