Übung 1 *Einfache Eigenschaften*

a) Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $P^2 = P$. Außerdem sei P nicht die Null-Matrix. Zeigen Sie, dass $\|P\| \geq 1$ für jede natürliche Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt.

b) Zeigen Sie:

$$A = \overline{A}^T \quad \Leftrightarrow \quad (Ax, y)_2 = (x, Ay)_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

c) Sei A eine symmetrisch positiv definite Matrix. Aufgrund der Symmetrie lässt sich A orthogonal diagonalisieren, d.h. es existiert eine orthogonale Matrix Q und eine Diagonalmatrix D mit $A = QDQ^T$. Auf der Diagonalen der Matrix D stehen gerade die Eigenwerte von A.

Zeigen Sie, dass eine Matrix B existiert mit $A = B \cdot B$. (Man kann also die Quadratwurzel von A definieren.)

(1+2+2 Punkte)

Übung 2 *Rayleigh-Quotienten*

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine positive definite Matrix. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei A ferner symmetrisch. Der Rayleigh-Quotient eines Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ ist definiert als

$$R_A(x) = \frac{(Ax, x)_2}{(x, x)_2}\,.$$

a) Zeigen Sie folgende Beziehungen zwischen den Rayleigh-Quotienten und dem größten bzw. kleinsten Eigenwert von A:

$$\sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_{\max}(A) = \max\{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von A}\}$$

$$\inf_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} R_A(x) = \lambda_{\min}(A) = \min\{\lambda \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von A}\}\,.$$

b) Die Kondition einer Matrix A in der euklidschen Norm ist definiert als

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2.$$

Zeigen Sie dass sich die Kondition der Matrix in folgender Weise durch den größten und kleinsten Eigenwert von A beschreiben lässt:

$$\text{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

(5 Punkte)

Übung 3 *Eindeutigkeit der LU-Zerlegung*

In dieser Aufgabe wollen wir die Eindeutigkeit der LU-Zerlegung ohne Permutationsmatrix beweisen. Die beiden folgenden Ansätze sind möglich; geben Sie bitte nur Ihre Lösung zu einem der beiden ab.

Ansatz 1

a) Zeigen Sie, dass die Menge der linken unteren Dreiecksmatrizen mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

b) Beweisen oder widerlegen Sie dass diese Gruppe abelsch ist.

c) Wenn eine LU-Zerlegung $A = LU$ (ohne Permutation) existiert, lässt sich mit Hilfe von a) die Eindeutigkeit dieser Zerlegung zeigen. Betrachten Sie dazu zwei Zerlegungen und zeigen Sie dass die L und U-Matrizen beider Zerlegungen gleich sein müssen.

Ansatz 2 Alternativ können Sie die Eindeutigkeit durch explizite Konstruktion der Zerlegung zeigen. Gehen Sie dazu von der Annahme aus dass für eine gegebene Matrix A eine Zerlegung $A = LU$ ohne Permutation möglich ist.

Nutzen Sie die Struktur von L und U um festzuststellen, dass manche Einträge einer der beiden Matrizen bereits eindeutig durch Einträge von A festgelegt sind. Führen Sie das nun fort, indem Sie die jetzt bekannten Enträge der Zerlegung nutzen um in einem geeignet gewählten Muster weitere zu bestimmen. Letztlich lässt sich damit rekursiv die gesamte Zerlegung eindeutig konstruieren.

(2+1+2 Punkte)