Modulformen 1 – Übungsgruppe 12. Januar 2022

Wintersemester 2021/22

A: Besprechung 8.Übungszettel

Aufgabe 1

Wir setzen $s := \begin{pmatrix} a(s) & b(s) \\ 0 & d(s) \end{pmatrix} \in S = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})_\infty$ und möchten zeigen, dass $|{}_R\backslash RsR| = |{}^{RsR}/_R|$ nicht für alle s erfüllt ist. Es gilt

$$RsR = \left\{ \begin{pmatrix} a(s) & \tilde{h} \cdot a(s) + h \cdot d(s) + b(s) \\ 0 & d(s) \end{pmatrix} \mid h, \tilde{h} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Da (R, S) ein Hecke-Paar ist, müssen zu jedem $s \in S$ Folgen $(s_i)_{1 \le i \le n}$ und $(\tilde{s}_j)_{1 \le j \le \tilde{n}}$ mit

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} Rs_i = RsR = \bigsqcup_{j=1}^{\tilde{n}} \tilde{s}_j R$$

existieren. Hierfür gilt

$$Rs_i = \left\{ \begin{pmatrix} a(s_i) & h_{\text{right}} \cdot d(s_i) + b(s_i) \\ 0 & d(s_i) \end{pmatrix} \mid h_{\text{right}} \in \mathbb{Z} \right\} ,$$

$$\tilde{s}_j R = \left\{ \begin{pmatrix} a(\tilde{s}_j) & h_{\text{left}} \cdot a(\tilde{s}_j) + b(\tilde{s}_j) \\ 0 & d(\tilde{s}_j) \end{pmatrix} \mid h_{\text{left}} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Ein Vergleich der Einträge ergibt, dass die Diagonalelemente $a(s_i) =: a := a(\tilde{s}_j)$, $d(s_i) =: d := d(\tilde{s}_j)$ für alle i, j übereinstimmen müssen. Also verbleibt die Identität

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} \mathbb{Z}d + b(s_i) = \{\tilde{h} \cdot a + h \cdot d + b(s) \mid h, \tilde{h} \in \mathbb{Z}\} = \bigsqcup_{j=1}^{\tilde{n}} a\mathbb{Z} + b(\tilde{s}_j) ,$$

welche mit der Wahl von $a = 3, b(s) = 0$ und $d = 2$ auf

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} 2\mathbb{Z} + b(s_i) = \mathbb{Z} = \bigsqcup_{j=1}^{\tilde{n}} 3\mathbb{Z} + b(\tilde{s}_j)$$

und somit $n = 2 \neq 3 = \tilde{n}$ liefert. Damit wurde ein Gegenbeispiel mit $s = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ konstruiert.

Aufgabe 2

(a) Für $s = 0$ ist die Behauptung klar und mit dem Hinweis folgt diese auch für $s = 1$. Auf Basis der Induktionsvoraussetzung und dem Hinweis berechnet man $T_{p^r} T_{p^{s+1}}$ zur Identität

$$T_{p^r} T_{p^{s+1}} = \sum_{n=0}^{\min\{r,s\}} p^{n(k-1)} T_{p^{r+s-2n+1}} + p^{k-1} \sum_{m} p^{m(k-1)} T_{p^{r+s-2m-1}} ,$$

wobei die letzte Summe alle m mit $\min\{r, s-1\} < m \le \min\{r, s\}$ und $2m + 1 \le r + s$ durchläuft. Schließlich folgert man, dass diese Summe nur aus dem Term bei $m = s$ besteht, woraus die Behauptung folgt.

(b) Dies ist leicht nachzurechnen. Aufgrund des Hinweises fällt die Summe weg.

Aufgabe 3

Nach Lemma 4.25 gilt für jede Hecke-Eigenform $f \in M_k$ mit Hecke-Eigenwerten $\lambda_n(f)$:

$$\lambda_n(f) \cdot a_1(f) = a_n(f)\ .$$

Im Falle $f = E_k$ ergibt sich mit dem Resultat aus Beispiel 4.27

$$a_n(E_k) = \sigma_{k-1}(n) \cdot a_1(E_k) = -\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n)$$

für $k \geq 4$. Außerdem erhält man mit der Gleichung 4.11 im Falle $m = 0$

$$a_n(f) = \underbrace{a_0(f)}_{=1} \cdot a_n(f) = a_1(f) \cdot \sum_{d|\operatorname{ggT}(m,n)} d^{k-1} \underbrace{a_0(f)}_{=1} = a_1(f) \cdot \sigma_{k-1}(n)$$

für jede nichtkonstante Hecke-Eigenform. Somit gilt $\sigma_{k-1}(n) = \frac{a_n(f)}{a_1(f)}$, woraus

$$a_n(E_k) = -\frac{2k}{B_k \cdot a_1(f)} \cdot a_n(f) =: c(k) \cdot a_n(f)$$

folgt. Ein Koeffizientenvergleich für $n = 0$ ($a_0(E_k) = 1 = a_0(f)$) liefert $c(k) = 1$ und damit $f \equiv E_k$.

Aufgabe 4

Wir nutzen die spezielle Rechenregel $\tau(p^r) \cdot \tau(p) = \tau(p^{r+1}) + p^{11}\tau(p^{r-1})$ für p prim und $r \in \mathbb{N}$ (Beispiel 4.28). Für $n = 1$ gilt die Voraussetzung. Per Induktion $n \to n+2$ ergibt sich mit $\tau(p) = 0$

$$\tau(p^{n+2}) = -p^{11} \cdot \tau(p^n) \overset{\text{IV}}{=} 0\ .$$

Im anderen Fall ist die Aussage für $m = 0$ wegen $\tau(1) = 1$ klar. Außerdem liefert dieselbe Induktion

$$\tau(p^{m+2}) = -p^{11} \cdot \tau(p^m) \overset{\text{IV}}{=} (-1)^{\frac{2}{2}} \cdot p^{\frac{2\cdot 11}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot p^{\frac{11n}{2}} = (-1)^{\frac{n+2}{2}} \cdot p^{\frac{11(n+2)}{2}}\ .$$

B: Wiederholung zum bisherigen Vorlesungsstoff

Fundamentalbereich / volle Modulgruppe

- Modulformen lassen sich mit Werten in $\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1, |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ repräsentieren
- $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \mid \det(M) = 1\}$
- Erzeuger: $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T, S\rangle = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$

Valenzformel $\operatorname{ord}(f;\infty) + \frac{1}{2}\operatorname{ord}(f;i) + \frac{1}{3}\operatorname{ord}(f;\rho) + \sum_{z \not\sim i,\rho} \operatorname{ord}(f;z) = \frac{k}{12}$ für $0 \not\equiv f \in V_k$

Eisensteinreihe

- holomorphe Modulform vom Gewicht k mit $a_0(E_k) = 1$ und $a_1(E_k) = -\frac{2k}{B_k}$
- Zusammenhang Petersson-Skalarprodukt: $\langle E_k \mid g\rangle = 0$ für $g \in S_k$ und $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$
- Zusammenhang Poincaré-Reihe: $\langle g \mid \tilde{P}_{n,k}\rangle = a_n(g)$ für $g \in S_k$ und $E_k = P_{0,k}$

Diskriminantenfunktion

- $\Delta(z) = \frac{1}{1728}(E_4^3(z) - E_6^2(z))$
- Fourier-Entwicklung $\Delta(z) = 0 + q - 24q^2 + \mathcal{O}(q^3) \in S_{12}$ aus ganzzahligen Fourier-Koeffizienten
- Vektorraumisomorphismus $M_{k-12} \to S_k, f \mapsto f\Delta$

j-Invariante

- $j(z) = \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$ ist meromorphe Modulform vom Gewicht 0 (= Modulfunktion)
- invariant unter Möbiustransformationen, d.h. $j(M\langle z\rangle) = j(z)$ für alle $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
- existieren Bijektionen ${}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathbb{H}} \cong \mathbb{C}$ bzw. ${}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathbb{H}\cup\{\infty\}} \cong \bar{\mathbb{C}}$

Struktursätze für Modulformen $M_k = \bigoplus_{4\alpha+6\beta=k} \mathbb{C}E_4^\alpha E_6^\beta$ und $V_k = \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{k/2}}$

Hecke-Eigenform

- Modulformen, die Eigenformen bzgl. jedes Hecke-Operators sind
- normierte Hecke-Eigenform = Hecke-Eigenform mit $a_1(f) = 1$
- Beispiele: Eisensteinreihe E_k für $k \geq 4$, Diskriminantenfunktion Δ (sogar normiert)

Ramanujan τ-Funktion

- Fourier-Koeffizienten und Hecke-Eigenwerte der Diskriminantenfunktion
- schwach multiplikativ, d.h. $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$