Modulformen 1 – Übungsgruppe 27. Oktober 2021

Wintersemester 2021/22

A: Grundwissen aus Funktionentheorie I

1. Komplexwertige Funktionen

- Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen (Satz 2.21)
- Existenz einer Potenzreihe
  - (i) Berechnung des Konvergenzradius über Formel von Cauchy-Hadamard (Satz 2.35)
  - (ii) Ableitung mittels Taylorformel für Potenzreihen (Satz 2.39, Bemerkung 2.40)
- Approximationssatz von Weierstraß (Satz 3.41)
- Ganze Funktionen: Satz von Liouville (Satz 3.34) und Kleiner Satz von Picard (Satz 9.12)

2. Komplexe Integrationstheorie

- Komplexes Kurvenintegral (Definition 3.9) mit Bogenlänge (Definition 3.12)
- Lemma von Goursat (Satz 3.21)
- Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete (Satz 3.25)
- Cauchy'sche Integralformel für Kreiswege (Satz 3.29) und die Verallgemeinerung (Satz 3.31) mit der Cauchy'schen Ungleichung (Proposition 3.32)

3. Lokale Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

- Elementargebiet (Definition 4.1) und Existenz einer holomorphen Funktion (Lemma 4.6)
- Identitätssatz für holomorphe Funktionen (Satz 4.8)
- Satz von der Gebietstreue (Satz 4.14)
- Maximum- und Minimumprinzip (Korollar 4.17) und Lemma von Schwarz (Satz 4.19)

4. Singularitäten

- Definition hebbarer Singularitäten (Definition 5.4) und Riemann'scher Hebbarkeitssatz (Satz 5.7)
- Definition eines Pols (Definition 5.9) und Charakterisierung (Satz 5.11)
- Definition einer wesentlichen Singularität (Definition 5.12) und Satz von Casorati-Weierstraß (Satz 5.14)
- Satz von der Laurent-Entwicklung (Satz 5.23) und Klassifikation der Singularitäten (Satz 5.25)
- Meromorphe Funktionen
  - (i) Meromorphie auf $D \subset \mathbb{C}$ (Definition 5.26) und auf $D \subset \bar{\mathbb{C}}$ (Definition 5.30)
  - (ii) Konstruktion über Mittag-Leffler-Verteilungen (Definition 8.1, Lemma 8.2 , Satz 8.8)
  - (iii) Konstruktion über Cousin-Verteilungen (Definition 8.13, Lemma 8.14, Satz 8.16)

5. Der Residuensatz

- Umlaufzahl (Definition 6.1) mit Werten in $\mathbb{Z}$ (Proposition 6.3)
- Residuum (Definition 6.5) und dessen Berechnung (Bemerkung 6.6, Lemma 6.8)
- Residuensatz (Satz 6.10) und funktionentheoretische Anwendungen (Satz 6.14, Korollar 6.15)
- Satz von Rouché (Satz 6.16) und Satz von Hurwitz (Satz 6.17)

6. Der kleine Riemann'sche Abbildungssatz und Folgerungen

- Definition biholomorpher Funktion (Definition 7.1) und Biholomorphiekriterium (Lemma 7.7)
- Kleiner Riemann'scher Abbildungssatz (Satz 7.9) und Satz von Montel (Satz 7.14)
- Homotopieversion des Cauchy'schen Integralsatzes (Satz 7.23)

B: Aktueller Vorlesungsstoff: Möbiustransformationen

Definition: [Möbiustransformation]
Eine Möbiustransformation ist eine meromorphe Abbildung auf $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sie ist eine gebrochenrationale Funktion der Form

$$\varphi_M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ für } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Satz: [Eigenschaften von Möbiustransformationen]

- Gruppe der Möbiustransformation mit $\varphi_M \circ \varphi_N = \varphi_{MN}$ (Proposition 1.3)
- Erzeuger von Möbiustransformationen $=$ Elementartypen (Proposition 1.4)
- Anzahl Fixpunkte einer nicht-trivialen Möbiustransformation (Proposition 1.7)
- Invarianz des Doppelverhältnis (Proposition 1.12)
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ operiert transitiv via Möbiustransformationen auf $\bar{\mathbb{C}}$ (Beispiel 1.14)
- Klassifikation über die Spur (Proposition 1.15) und über Fixpunkte (Proposition 1.17)

C: Übungsaufgaben

(a) Finde eine Möbiustransformation φ_M mit $\varphi_M(-1) = -1, \varphi_M(0) = i$ und $\varphi_M(1) = 1$.

(b) Bestimme $\varphi_M(A)$ und $\varphi_M(B)$ zu den Punktmengen $A = \{\mathrm{Re}(z) = 0\}$ und $B = \{\mathrm{Im}(z) = 0\}$ für die Möbiustransformation $\varphi_M(z) = \frac{z+1}{z-1}$.