Namen: ______________________

____

Aufgabe	6.1	6.2	6.3	Z6.1	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 6

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 6.1 (Satz von Lusin) **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen und es gelte $\mathscr{L}^1(\Omega) < \infty$. Sei $f \in L^\infty(\Omega)$.

a) Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ existiert, so dass $\mathscr{L}^1(\Omega \setminus K) < \varepsilon$ und $f|_K$ ist stetig.

b) Sei $\Omega = (0, 1)$ und $f := \chi_{\mathbb{Q}\cap\Omega}$. Warum widerspricht f nicht a)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für alle $f \in L^1(\Omega)$ eine Folge $f_k \in C^0(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ existiert, so dass $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$.

Aufgabe 6.2 **5 Punkte**

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathscr{L}^1)$. Zu $k \in \mathbb{N}$ definiere $I_k := [2^{-(k+1)}, 2^{-k}]$. Sei $f_k \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{I_k}(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

a) Untersuchen Sie die Folge auf punktweise, Maß– und gleichmäßige Konvergenz. Geben Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion an. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie alle $1 \le p < \infty$, so dass die Folge in $L^p(\mathbb{R})$ konvergiert. Bgründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6.3 (Borel– und Lebesgue–σ–Algebra) **5 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathscr{L}^n$ das n–dimensionale Lebesgue–Maß.

a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = (\mathscr{B}(\mathbb{R}))^n$.

b) Sei $n \ge 2$. Sei $N \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ eine $\mathscr{L}^1$–Nullmenge und $\Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1})$. Zeigen Sie, dass $N \times \Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{L}^n(N \times \Omega) = 0$.

c) Sei $\mathscr{L}_n$ die Menge der Lebesgue–Mengen in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $(\mathscr{L}_1)^n \subsetneq \mathscr{L}_n$.

Hinweis: Zu c): Nutzen Sie die Vollständigkeit von $\mathscr{L}_n$. Aufgabe 1.1 und Aufgabe 3.3 erweisen sich als nützlich.

Zusatzufgabe 6.1 **3 Punkte**

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathscr{L}^1)$. Seien $f_k, f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Seien $f_k, f \in L^1(\mathbb{R})$ und es gelte $f_k \to f$ punktweise fast–überall. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 \xrightarrow{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1. \tag{4.1}$$

b) Sei $f_k \ge 0$ und es gelte $f_k \searrow f$ punktweise fast–überall. Es gelte $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 \xrightarrow{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1. \tag{4.2}$$

Abgabe bis spätestens 17.12.2020, 14:00 Uhr in Moodle.

c) Sei $f_k \geq 0$ und es gelte $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$, und $f_k \searrow f$ punktweise fast-überall. Dann ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \, \mathrm{d}\mathscr{L}^1 \xrightarrow{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mathscr{L}^1. \tag{4.3}$$

d) Seien $f_k, f \in L^1(\mathbb{R})$ und es gelte $f_k \to f$ in $L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt $f_k \to f$ punktweise fast–überall.