Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik Wintersemester 2020/2021

12. Übungsblatt

Ausgabe 09.02.2020 – Besprechung 15.02-18.02.2021

1. Lösung:

(a) Wir beginnen mit der relativistischen Bewegungsgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}(\gamma\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E}\,. \tag{1}$$

Da $\boldsymbol{E}$ konstant ist können wir $\mathrm{d}t$ auf die andere Seite bringen und integrieren. Somit finden wir, dass zu einem beliebigen Zeitpunkt t gilt:

$$q\boldsymbol{E}t = m\gamma\boldsymbol{u} \tag{2}$$

$$= m\frac{\boldsymbol{u}}{\sqrt{1-\boldsymbol{u}^2/c^2}} \tag{3}$$

Auflösen der Gleichung nach $\boldsymbol{u}$ ergibt

$$(q\boldsymbol{E}t)^2 = m^2\frac{\boldsymbol{u}^2}{1-\boldsymbol{u}^2/c^2} \tag{4}$$

$$= m^2\frac{1}{1/\boldsymbol{u}^2 - 1/c^2} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{u}^2 = \frac{1}{\frac{m^2}{(q\boldsymbol{E}t)^2}+\frac{1}{c^2}} \tag{6}$$

$$= \frac{(q\boldsymbol{E}t)^2}{m^2+\frac{(q\boldsymbol{E}t)^2}{c^2}} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{u} = \frac{q\boldsymbol{E}t}{\sqrt{m^2+\frac{(q\boldsymbol{E}t)^2}{c^2}}} \tag{8}$$

Für $t\to\infty$ nähert sich u der Lichtgeschwindigkeit.

(b) Wir müssen $\boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$ nochmal integrieren um die Position des Teilchens zu berechnen. Dazu verwenden wir, dass

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{1+bt^2}}{\mathrm{d}t} = \frac{bt}{\sqrt{1+bt^2}} \tag{9}$$

und finden

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t \mathrm{d}t' \, \frac{qEt'}{\sqrt{m^2 + \frac{(qEt')^2}{c^2}}} && (10)\\
&= \frac{mc^2}{qE} \int_0^t \mathrm{d}t' \, \frac{\frac{(qE)^2}{m^2c^2} t'}{\sqrt{1 + \frac{(qE)^2 t'^2}{m^2c^2}}} && (11)\\
&= \frac{mc^2}{qE} \left(\sqrt{1 + \frac{(qE)^2 t^2}{m^2 c^2}} - 1 \right) && (12)\\
&\approx \frac{qEt^2}{2m} + \mathcal{O}(c^{-2}) \, . && (13)
\end{aligned}
$$

2. Lösung:

(a)

$$
\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m \frac{\mathrm{d}(\gamma \boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \tag{14}
$$

Für γ = 1 gilt folgende Zerlegung in Normal und Tangentialkomponenten

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} && (15)\\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} && (16)\\
&= \hat{\boldsymbol{e}}_t \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} && (17)\\
&= v \hat{\boldsymbol{e}}_t && (18)\\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} && (19)\\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \hat{\boldsymbol{e}}_t + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{e}}_t}{\mathrm{d}t} && (20)\\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \hat{\boldsymbol{e}}_t + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \hat{\boldsymbol{e}}_n && (21)\\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \hat{\boldsymbol{e}}_t + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \hat{\boldsymbol{e}}_n && (22)\\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} \hat{\boldsymbol{e}}_t + \frac{v^2}{\rho} \hat{\boldsymbol{e}}_n && (23)
\end{aligned}
$$

Hier haben wir benutzt, dass

$$
\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{e}}_t}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{\boldsymbol{e}}_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \hat{\boldsymbol{e}}_n = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \hat{\boldsymbol{e}}_n \tag{24}
$$

und

$$
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\rho \Delta t} = \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{25}
$$

Für $\gamma \neq 1$ folgt

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\gamma\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{26}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{v} + \gamma\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{27}$$

$$= \gamma^3 \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{v} + \gamma\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_n\right) \tag{28}$$

$$= \gamma^3 \frac{v^2}{c^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_t + \gamma\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_n\right) \tag{29}$$

$$= \gamma\left(\gamma^2\frac{v^2}{c^2} + 1\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_t + \gamma\frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_n \tag{30}$$

$$= \gamma^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_t + \gamma\frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_n \tag{31}$$

(b)

$$u^\mu \perp \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u^\mu \Rightarrow u^\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u_\mu = 0 \tag{32}$$

Da $u_\mu u^\mu = c^2$, folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(u_\mu u^\mu) = 0 = 2u_\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}u^\mu. \tag{33}$$

3. Lösung:

Für konstante Geschwindigkeit gilt

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{34}$$

$$= \gamma\left(\gamma^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\hat{\boldsymbol{e}}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_n\right) \tag{35}$$

$$= \gamma\frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{e}}_n \tag{36}$$

Außerdem gilt

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{37}$$

$$= qvB\sin\theta\hat{\boldsymbol{e}}_n \tag{38}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} \tag{39}$$

$$= \frac{qvB\sin\theta}{m}\hat{\boldsymbol{e}}_n\,, \tag{40}$$

sodass

$$\frac{qB\sin\theta}{m}\rho = \gamma v \ . \tag{41}$$

Mit $\omega = 2\pi f = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}v$ folgt

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{qB\sin\theta}{m\gamma} \ . \tag{42}$$

Sind Feld und Bewegungsrichtung senkrecht zueinander, ergibt sich

$$f = \frac{1}{2\pi}\frac{qB}{m\gamma} \ . \tag{43}$$

4. Lösung:

(a) Die Oberflächenladungsdichte ist

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \ , \tag{44}$$

sodass

$$\rho = \sigma\delta(r-R) \tag{45}$$

und

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \ . \tag{46}$$

Damit folgt

$$\boldsymbol{\jmath} = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \tag{47}$$

(b)

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\int dV'\ \frac{\boldsymbol{\jmath}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{48}$$

$$= \frac{Q}{16\pi^2R^2}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{49}$$

und

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \int dV'\ \frac{\delta(r'-R)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{r}' \tag{50}$$

$$= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta' \int_0^\infty \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \frac{\delta(r'-R)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\boldsymbol{r}' r'^2 \sin\theta' \tag{51}$$

Aus der Rotationssymmetrie folgt $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = F\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_r$. Wir wählen $\boldsymbol{r}$ entlang der z'-Achse und θ' als den Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$. Damit folgt.

$$F = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta' \int_0^\infty \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \, \frac{\delta(r'-R) r' \cos\theta' r'^2 \sin\theta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta')^{1/2}} \tag{52}$$

$$= 2\pi R^3 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta' \, \frac{\cos\theta' \sin\theta'}{(r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta')^{1/2}} \tag{53}$$

$$= -2\pi R^3 \int_{+1}^{-1} \mathrm{d}x \, \frac{x}{(r^2 + R^2 - 2rRx)^{1/2}} \leftarrow \text{ Substitution } \cos\theta' = x \tag{54}$$

$$= +2\pi R^3 I \tag{55}$$

wobei

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, \frac{x}{(A - Bx)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, \frac{x}{(1 - ax)^{1/2}} \tag{56}$$

mit $A = r^2 + R^2, B = 2rR, a = B/A$.

$$I = \frac{2}{3a^2\sqrt{A}} \left((2-a)\sqrt{1+a} - (2+a)\sqrt{1-a}\right) \tag{57}$$

$$F = 2\frac{2\pi R^3}{3B^2\sqrt{A}} \left((2A - B)A\sqrt{1 + B/A} - (2A + B)A\sqrt{1 - B/A}\right) \tag{58}$$

$$= 2\frac{2\pi R^3}{3B^2} \left((2A - B)\sqrt{A+B} - (2A + B)\sqrt{A - B}\right) \tag{59}$$

$$= \frac{\pi R}{3r^2} \left((2A - B)\sqrt{A+B} - (2A + B)\sqrt{A - B}\right) \tag{60}$$

$$= \frac{2\pi R}{3r^2} \left((r^2 + R^2 - rR)(r + R) - (r^2 R^2 + rR)|r - R|\right) \tag{61}$$

Innerhalb $r < R, |r - R| = R - r$

$$F = \frac{4\pi}{3} R \cdot r \tag{62}$$

Außerhalb $r > R, |r - R| = r - R$

$$F = \frac{4\pi}{3} \frac{R^4}{r^2} \tag{63}$$

Damit ist

$$\boldsymbol{A} = \begin{cases} \dfrac{Q}{12\pi R} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \\ \dfrac{QR^2}{12\pi} \boldsymbol{\omega} \times \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r}{r^2} \end{cases} \tag{64}$$

(c)

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{65}$$

Innerhalb: $r < R$

$$\boldsymbol{B} = \frac{Q}{12\pi R}\left(\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{r}\right) \tag{66}$$
$$= \frac{Q}{12\pi R}\left(3\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\right) \tag{67}$$
$$= \frac{Q}{6\pi R}\boldsymbol{\omega} \tag{68}$$

Außerhalb: $r > R$

$$\boldsymbol{B} = \frac{Q}{12\pi}R^2\frac{1}{r^3}\left(3(\boldsymbol{\omega}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r})\frac{\boldsymbol{r}}{r} - \boldsymbol{\omega}\right) \tag{69}$$
$$= \frac{1}{r^5}(3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\mu}\cdot\vec{r}) - r^2\boldsymbol{\mu}) \tag{70}$$

(d) Daraus folgt

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{QR^2}{12\pi}\boldsymbol{\omega}\ . \tag{71}$$

(e) Das Drehmoment ist gegeben durch

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B} \tag{72}$$
$$= \frac{QR^2}{12\pi}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{B}_{ex} \tag{73}$$
$$\Rightarrow M = \frac{QR^2}{12\pi}\omega B_0\sin\theta \tag{74}$$