Funktionentheorie 1

Sommersemester 2021

Dr. Hendrik Kasten

22. Juli 2021

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Grundbegriffe

1.1 Die komplexen Zahlen

Der historische Ausgangspunkt für die Entwicklung der komplexen Zahlen liegt in der Algebra, genauer im Studium der kubischen Gleichungen. So haben etwa Gleichungen des Typs

$$X^3 + pX + q = 0 \quad \text{mit } p, q \in \mathbb{R}$$

in jedem Fall mindestens eine reelle Lösung und höchstens drei. Im 16. Jahrhundert fand man eine Formel, die eine Lösung dieser Gleichung liefert, die Cardanische[1] Formel

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Ein Problem stellte hierbei allerdings der Fall negativer Diskriminante

$$\Delta := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

dar, der *casus irreducibilis*.

Beispiel 1.1. *Im Jahr 1572 studierte Bombelli*[2] *die Gleichung*

$$X^3 - 15X - 4 = 0.$$

Die Cardanische Formel liefert

$$x = \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}}$$

[1] Gerolamo Cardano (1501-1576)
[2] Rafael Bombelli (1526-1572)

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{4-125}} \\
&= \sqrt[3]{2+11\cdot\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\cdot\sqrt{-1}}.
\end{aligned}
$$

Tatsächlich hat die Gleichung die drei reellen Lösungen

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -2+\sqrt{3} \quad \text{und} \quad x_3 = -2-\sqrt{3}.$$

Was ist hier der Zusammenhang? Ohne das Symbol $\sqrt{-1}$ zu interpretieren, rechnete Bombelli

$$
\begin{aligned}
2+11\cdot\sqrt{-1} &= 8+12\cdot\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1} = (2+\sqrt{-1})^3, \\
2-11\cdot\sqrt{-1} &= 8-12\cdot\sqrt{-1}-6+\sqrt{-1} = (2-\sqrt{-1})^3
\end{aligned}
$$

und erhielt

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{2+11\cdot\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\cdot\sqrt{-1}} \\
&= (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4,
\end{aligned}
$$

was in der Tat eine der reellen Lösungen der Gleichung ist. Sein Kommentar hierzu:

> *Ein ausschweifender Gedanke nach Meinung vieler. Ich selbst war lange Zeit der gleichen Ansicht. Die Sache schien mir auf Sophismen mehr als auf Wahrheit zu beruhen, aber ich suchte so lange, bis ich den Beweis fand.* (Cantor*, 1900)*

Bombellis Rechnung legte den Grundstein für die Entwicklung der komplexen Zahlen.

Wir wollen nun die komplexen Zahlen einführen und definieren dafür auf der Menge $\mathbb{R}^2$ die Verknüpfungen

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix} && \text{für alle } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \\
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} aa'-bb' \\ ab'+ba' \end{pmatrix} && \text{für alle } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}
$$

Proposition 1.2. $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *ist ein Körper, der Körper der **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$.*

Beweis. Das lässt sich leicht nachrechnen; der Vollständigkeit halber führen wir einen Beweis vor: Als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist $\mathbb{R}^2$ zusammen mit $+$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $\binom{0}{0}$. Weiter ist $(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\binom{0}{0}\}, \cdot)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $\binom{1}{0}$,

denn: Zunächst ist die Multiplikation wegen

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'a''-b'b'' \\ a'b''+b'a'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a'a''-b'b'')-b(a'b''+b'a'') \\ a(a'b''+b'a'')+b(a'a''-b'b'') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (aa'-bb')a''-(ab'+ba')b'' \\ (ab'+ba')a''+(aa'-bb')b'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' \\ ab'+ba' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

für alle $\binom{a}{b}, \binom{a'}{b'}, \binom{a''}{b''} \in \mathbb{R}^2$ assoziativ. Die Kommutativität der Multiplikation folgt sofort aus der Definition und der Kommutativität der reellen Multiplikation. Mit

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} \quad \text{für alle } \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist $\binom{1}{0}$ das neutrale Element der Multiplikation. Ist schließlich $\binom{a}{b} \neq \binom{0}{0}$, also $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, so gilt

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{a}{a^2+b^2}\\ \frac{-b}{a^2+b^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

so dass mit $\begin{pmatrix}\frac{a}{a^2+b^2}\\ \frac{-b}{a^2+b^2}\end{pmatrix}$ ein multiplikatives Inverses zu $\binom{a}{b}$ gefunden ist. #

Es gilt in $\mathbb{R}^2$ auch Distributivität, denn für alle $\binom{a}{b}, \binom{a'}{b'}, \binom{a''}{b''} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a''\\b''\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a'+a''\\b'+b''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a(a'+a'') - b(b'+b'')\\ a(b'+b'') + b(a'+a'')\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}aa' + aa'' - bb' - bb''\\ ab' + ab'' + ba' + ba''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(aa' - bb') + (aa'' - bb'')\\ (ab' + ba') + (ab'' + ba'')\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}aa' - bb'\\ ab' + ba'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}aa'' - bb''\\ ab'' + ba''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a''\\b''\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt die Proposition. □

Bemerkung 1.3. *Die Abbildung*

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{C}, \\ a & \mapsto \binom{a}{0} \end{cases}$$

ist ein injektiver Körperhomomorphismus. Wir nutzen dies für eine vereinfachte Notation der komplexen Zahlen und schreiben künftig

- *a für $\binom{a}{0}$ mit $a \in \mathbb{R}$,*
- *i für $\binom{0}{1}$.*

Auf diese Weise hat jede komplexe Zahl offensichtlich eine eindeutige Darstellung

$$z = a + bi \quad \textit{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

*Hierbei heißt a der **Realteil** und b der **Imaginärteil** von z. Wir schreiben*

$$a =: \mathrm{Re}(z) \quad \textit{und} \quad b =: \mathrm{Im}(z).$$

Wenn wir von nun an komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a + bi$ schreiben, meinen wir stets die Darstellung von z über Real- und Imaginärteil.

Wegen

$$i^2 = i \cdot i = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -1$$

haben wir an dieser Stelle übrigens in unserer Körererweiterung $\mathbb{C}$ der reellen Zahlen eine Quadratwurzel aus -1 gefunden und können so Bombellis Rechnungen aus Beispiel 1.1 mit Sinn versehen.

Definition 1.4. *Sei $z = a + bi$ in $\mathbb{C}$. Dann heißt*

$$\overline{z} := a - bi$$

die zu z ***komplex konjugierte Zahl****.*

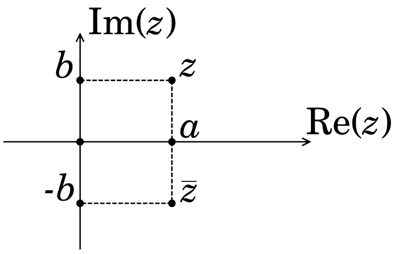


Abbildung 1.1: Die komplexe Konjugation lässt sich geometrisch als Spiegelung an der x-Achse veranschaulichen.

Proposition 1.5. *Für beliebige $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Rechenregeln der komplexen Konjugation:*

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *und* $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(b) $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$,

(c) $\overline{(\overline{z})} = z$,

(d) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

Beweis. Eigenschaft (a) gilt, denn

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z} + \overline{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = ac - bd - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \overline{z} \cdot \overline{w}. \end{aligned}$$

Zum Beweis von Eigenschaft (b) betrachten wir

$$z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi.$$

Dies ist offenbar genau dann Null, wenn z reell ist.

Eigenschaft (c) ist klar.

Eigenschaft (d) gilt wegen

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = a = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{a + bi - (a - bi)}{2i} = b = \operatorname{Im}(z).$$

□

Definition 1.6. *Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ heißt*

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

*der **Absolutbetrag** von z.*

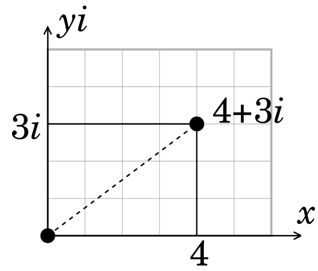


Abbildung 1.2: Identifiziert man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, also $z = a + bi$ mit $\binom{a}{b}$, so ist $|z|$ der EUKLID'sche Abstand[3] von $\binom{a}{b}$ zu $\binom{0}{0}$. Im Beispiel gilt $|4 + 3i| = \|\binom{4}{3}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Proposition 1.7. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Rechenregeln des Absolutbetrags:*

(a) *Positive Definitheit: $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$,*

(b) *Multiplikativität: $|zw| = |z| \cdot |w|$,*

(c) *Dreiecksungleichungen: $|z + w| \leq |z| + |w|$ und $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$,*

(d) *Zusammenhang mit der komplexen Konjugation: $|\overline{z}| = |z|$ und $|z|^2 = z\,\overline{z}$.*

Beweis. Die positive Definitheit (a) und die Eigenschaften (d) sind klar.

Wegen der positiven Definitheit (a) folgt die Multiplikativität (b) aus

$$|zw|^2 \overset{(d)}{=} zw \cdot \overline{zw} = z\,\overline{z} \cdot w\,\overline{w} \overset{(d)}{=} |z|^2 \cdot |w|^2.$$

Es verbleibt, die Dreiecksungleichungen (c) zu zeigen. Wegen der positiven Definitheit (a) folgt die erste Dreieckungleichung, wenn wir

$$\begin{array}{l} |z + w|^2 \overset{(d)}{=} (z + w)\overline{(z + w)} \overset{(d)}{=} |z|^2 + |w|^2 + z\,\overline{w} + w\,\overline{z} \overset{1.5\,(d)}{=} |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}(z\,\overline{w}) \\ \quad \rotatebox{90}{$\geq$} \\ (|z| + |w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| \overset{(b),(d)}{=} |z|^2 + |w|^2 + 2|z \cdot \overline{w}| \end{array}$$

und also $\mathrm{Re}(z \cdot \overline{w}) \leq |z \cdot \overline{w}|$ zeigen können. Dies gilt aber, denn nach dem Satz von Pythagoras[4] stimmt sogar allgemein

$$\mathrm{Re}(u) = a \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |u| \quad \text{für alle } u = a + bi \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

[3] Euklid von Alexandria (ca. 360-280 v. Chr.)
[4] Pythagoras von Samos (ca. 570-510 v. Chr.)

Die zweite Dreiecksungleichung folgt aus der ersten,

denn: Nach der ersten Dreiecksungleichung gilt

$$|z+w| - |w| \leq |z| \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

Setzen wir hier $z' - w'$ bzw. $w' - z'$ für z und w' bzw. z' für w ein, so erhalten wir

$$|z'| - |w'| \leq |z' - w'| \quad \text{bzw.} \quad |w'| - |z'| \leq |w' - z'| \qquad \text{für alle } z', w' \in \mathbb{C}.$$

Wegen $|u| = |-u|$ für alle $u \in \mathbb{C}$ folgt die Behauptung aus diesen beiden Ungleichungen. □

Komplexe Zahlen lassen sich auch in ***Polarkoordinaten*** ausdrücken. Dafür schreiben wir

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Wegen $\mathrm{Re}(\frac{z}{|z|})^2 + \mathrm{Im}(\frac{z}{|z|})^2 = |\frac{z}{|z|}|^2 = 1$ liegt dann $\binom{\mathrm{Re}(\frac{z}{|z|})}{\mathrm{Im}(\frac{z}{|z|})}$ auf dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ und es gibt ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Re}(\frac{z}{|z|}) = \cos\varphi$ und $\mathrm{Im}(\frac{z}{|z|}) = \sin\varphi$. Mit $r := |z|$ gilt insgesamt

$$z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi).$$

Definition 1.8. *Die reelle Zahl φ heißt das **Argument** $\arg z$ von z.*[5] *Wählt man $-\pi < \varphi \leq \pi$, so heißt diese Wahl des Arguments der **Hauptwert** $\operatorname{Arg} z$ des Arguments.*

Wir wollen nun untersuchen, wie das Produkt zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinatenschreibweise aussieht. Seien dafür

$$z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \quad \text{und} \quad w = s(\cos\psi + i\,\sin\psi)$$

zwei komplexe Zahlen mit $r, s \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z \cdot w &= rs(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)(\cos\psi + i\,\sin\psi) \\ &= rs\big((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)\big) \\ &= rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\,\sin(\varphi+\psi)\big). \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen werden also multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente (modulo 2π) addiert.

Ein Spezialfall dieses Multiplikationsgesetzes ist offensichtlich das n-fache Potenzieren komplexer Zahlen vom Absolutbetrag 1. Hier ergibt sich

$$(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\,\sin n\varphi \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ und alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Multipliziert man die linke Seite nach dem binomischen Lehrsatz aus und vergleicht, folgen hieraus die ***de Moivre'schen Formeln***.[6]

[5] Man beachte, dass $\varphi = \arg z$ nur modulo 2π bestimmt ist, so dass mit φ für alle $n \in \mathbb{Z}$ auch $\varphi + 2\pi n$ ein Argument von z ist.

[6] Abraham de Moivre (1667 - 1754)

Beispiel 1.9. *Für $n = 2$ und beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gelten*

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \textit{und} \quad \sin 2x = 2 \cos x \sin x.$$

Proposition 1.10. *Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $a \in \mathbb{C}^\times$ hat die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen z in $\mathbb{C}$. Ist $a = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi)$, so werden diese gegeben durch*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right) + i\ \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right)\right) \quad \textit{mit } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}. \tag{1.2}$$

Beweis. Für jedes z_k wie in (1.2) gilt

$$z_k^n = r\big(\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + i\ \sin(\varphi + k \cdot 2\pi)\big) = r(\cos\varphi + i\ \sin\varphi) = a.$$

Jedes solche z_k ist also eine Lösung der Gleichung $z^n = a$. Andererseits sind alle diese Lösungen paarweise verschieden,

denn: Gilt für $0 \leq k, k' < n$ die Gleichheit

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right) + i\ \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k'\,\frac{2\pi}{n}\right) + i\ \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k'\,\frac{2\pi}{n}\right)\right),$$

so folgt wegen der Eindeutigkeit von Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl

$$\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + k'\,\frac{2\pi}{n}\right),$$
$$\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\varphi}{n} + k'\,\frac{2\pi}{n}\right).$$

Es gibt also ein $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{\varphi}{n} + k\,\frac{2\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + k'\,\frac{2\pi}{n} + 2\,\pi \cdot m$$

und insbesondere $(k - k') = m \cdot n$. Wegen $0 \leq k, k' < n$ ist dies nur möglich, wenn $m = 0$ und somit $k = k'$ gilt. #

Wir haben eingesehen, dass die Zahlen z_k mit $0 \leq k < n$ paarweise verschiedene Lösungen der Gleichung $z^n = a$ darstellen. Da ein beliebiges Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad n höchstens n Nullstellen hat,[7] kann es keine weiteren Lösungen geben und wir haben die Proposition gezeigt. □

[7] Diese Tatsache gilt auch, wenn man $\mathbb{C}$ durch einen beliebigen Körper K ersetzt, und lässt sich mit ein paar Algebrakenntnissen wie folgt einsehen: Sei $\alpha \in K$ eine beliebige Nullstelle von P. In $K[X]$ gilt der Satz von der Polynomdivision, so dass es für $n \geq 1$ eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ gibt mit

$$P(X) = Q(X) \cdot (X - \alpha) + R(X) \quad \text{und} \quad \deg R < \deg(X - \alpha) = 1.$$

Insbesondere ist $R \in K[X]$ konstant und verschwindet sogar, wie man durch Einsetzen von $X = \alpha$ einsieht. Es gibt daher ein größtes $1 \leq r \leq n$, für dass es ein Polynom $\tilde{Q} \in K[X]$ vom Grad $n - r$ gibt mit

$$P(X) = \tilde{Q}(X) \cdot (X - \alpha)^r.$$

Jede von α verschiedene Nullstelle $\beta \in K$ von $P(X)$ ist wegen der Nullteilerfreiheit von K auch eine Nullstelle von $\tilde{Q}(X)$, so dass wir induktiv eine Zerlegung von $P(X)$ als Produkt von höchstens n Linearfaktoren und einem nullstellenfreien Restpolynom erhalten. $P(X)$ hat also höchstens n Nullstellen in K.

Beispiel 1.11. *Der wichtigste Spezialfall von Proposition 1.10 ist der Fall $a = 1$. Lösungen von $z^n = 1$ nennt man **n-te Einheitswurzeln**. Sie spielen unter anderem in der Zahlentheorie eine wichtige Rolle.*

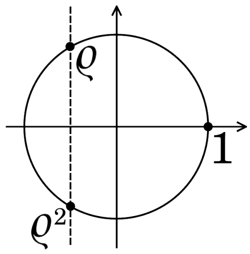


Abbildung 1.3: Die dritten Einheitswurzeln sind 1, ϱ und ϱ^2 mit $\varrho = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$.

1.2 Die Topologie der komplexen Zahlen

Wir haben den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ eingeführt, indem wir auf der Menge $\mathbb{R}^2$ eine geeignete Multiplikation definiert haben. Durch die metrische Topologie auf $\mathbb{R}^2$ wird $\mathbb{C}$ daher zu einem topologischen Raum:

Definition 1.12. *Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ sagen wir:*

(a) *Für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ist*

$$U_\varepsilon(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

*eine **(offene) ε-Umgebung** von z_0.*

(b) *Genau dann ist z_0 ein **innerer Punkt** von D, wenn D eine ε-Umgebung von z_0 enthält.*

(c) *Genau dann ist D **offen**, wenn jeder Punkt $z \in D$ innerer Punkt von D ist, und genau dann D **abgeschlossen**, falls ihr Komplement $\mathbb{C} \setminus D$ offen ist.*

Definition 1.13. (a) *Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für alle $z \in D$ die Abschätzung $|z| \leq C$ gilt.*

(b) *Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von D eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Nach dem Satz von Heine-Borel[8] ist dies äquivalent dazu, dass sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beim Studium komplexer Funktionen werden wir später feststellen, dass viele interessante Funktionen auf $\mathbb{C}$ nur außerhalb einer „kleinen" Teilmenge von Polstellen definiert sind (vgl. Definition 5.26). Das einfachste Beispiel ist hierbei sicherlich die Funktion

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto \frac{1}{z}. \end{cases} \tag{1.3}$$

[8] Eduard Heine (1821 - 1881) und Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 - 1956)

Der Betrag von $\frac{1}{z}$ geht für $z \to 0$ gegen unendlich, ein Verhalten, das allen Polstellen gemein ist. Möchte man solche Funktionen miteinander verketten, ist es also naheliegend, die komplexen Zahlen noch um einen weiteren Punkt „∞“ zu erweitern und Funktionen in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zu betrachten.

Definition 1.14. *Für ein Symbol „∞“ nennen wir*

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

die ***erweiterten komplexen Zahlen****.*

Nach dem Satz von Alexandrow lässt sich die Topologie auf $\overline{\mathbb{C}}$ so wählen, dass $\overline{\mathbb{C}}$ zu einem kompakten topologischen Raum wird, der $\mathbb{C}$ als einen topologischen Unterraum enthält, d. h. eine Teilmenge $\infty \notin U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ist genau dann offen in $\overline{\mathbb{C}}$, wenn sie offen in $\mathbb{C}$ gemäß Definition 1.12 ist. Hierfür setzen wir:

Definition 1.15. *Für eine Teilmenge $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ sagen wir:*

$$\begin{aligned} D \text{ ist } \textbf{\textit{offen}} \quad :\Longleftrightarrow \quad & D \cap \mathbb{C} \text{ ist offen in } \mathbb{C} \text{ und im Fall } \infty \in D \text{ gibt es ein } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit} \\ & U_\varepsilon(\infty) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\} \subseteq D. \end{aligned}$$

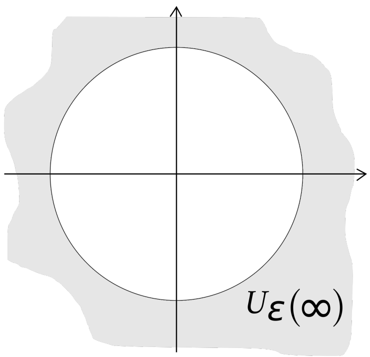


Abbildung 1.4: Anstelle der offenen Umgebungen aus Definition 1.12 betrachten wir für ∞ das Äußere von Kreisen um den Nullpunkt.

Bemerkung 1.16. *Die erweiterten komplexen Zahlen $\overline{\mathbb{C}}$ sind kein Körper, so dass nicht einfach alle Rechenregeln aus den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ übernommen werden können. Außerdem müssen wir beim Definieren von Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$ gesondert angeben, was mit dem Punkt ∞ geschehen soll. Wollen wir etwa die Funktion f aus* (1.3) *als Funktion*

$$f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

schreiben, wählen wir passend zu unserer Anschauung $f(0) = \infty$ und $f(\infty) = 0$.[9]

[9] Das ist gleichzeitig die einzige Wahl, für die die Abbildung $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ stetig ist.

Geometrisch lassen sich die erweiterten komplexen Zahlen $\overline{\mathbb{C}}$ als Kugeloberfläche

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + t^2 = 1 \right\} \cong \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |z|^2 + t^2 = 1\}$$

veranschaulichen,

denn: Um dies einzusehen, zeigt man, dass die durch

$$\sigma(z,t) = \begin{cases} \frac{z}{1-t} & \text{für } (z,t) \neq (0,1), \\ \infty & \text{für } (z,t) = (0,1) \end{cases}$$

gegebene ***stereographischen Projektion*** ein Homöomorphismus, zwischen $\mathbb{S}^2$ und $\overline{\mathbb{C}}$ ist, also eine Bijektion, für die sowohl σ selbst als auch ihre Umkehrabbildung

$$\sigma^{-1}(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) & \text{für } z \neq \infty, \\ (0,1) & \text{für } z = \infty, \end{cases}$$

offene Mengen auf offene Mengen abbilden. Hierbei trägt $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ die Unterraumtopologie , die offenen Teilmengen von $\mathbb{S}^2$ sind also die Durchschnitte der offenen Teilmengen von $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ mit $\mathbb{S}^2$ selbst.

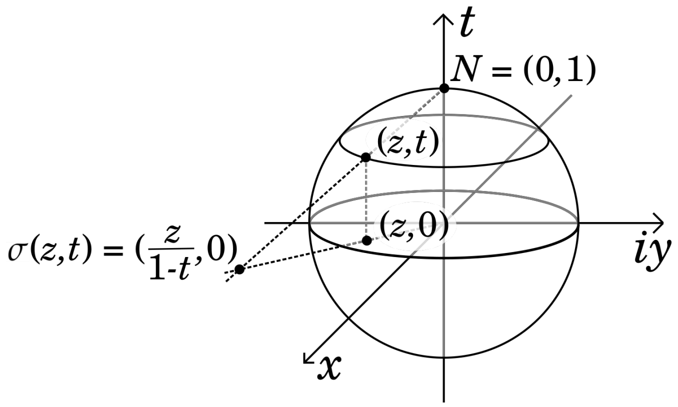


Abbildung 1.5: Die Koordinaten des Bilds unter der stereographischen Projektion erhält man zum Beispiel mit dem Strahlensatz der Euklid'schen Geometrie.

#

Betrachtet man $\mathbb{S}^2$ auf diese Weise als Modell für $\overline{\mathbb{C}}$, so nennt man $\overline{\mathbb{C}}$ auch die ***Riemann'sche Zahlenkugel***.[10]

1.3 Konvergenz von Folgen und Reihen

Wir wenden uns nun analytischen Fragestellungen zu und untersuchen die Konvergenz von Folgen und Reihen komplexer Zahlen.

[10] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Definition 1.17. *Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ komplexer Zahlen heißt* ***konvergent****, wenn es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, so dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit*

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

In diesem Fall heißt $z =: \lim_{n\to\infty} z_n$ der ***Limes*** *von $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$.*

Der Limes hat die aus der reellen Analysis bekannten Verträglichkeiten. Darüber hinaus vertauscht er auch mit der komplexen Konjugation, Real- oder Imaginärteilbildung und dem Absolutbetrag:

Proposition 1.18. *Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ und $(w_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$ mit $\lim z_n = z$ und $\lim w_n = w$. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:*

(a) *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

(b) *Konvergente Folgen sind* ***beschränkt****, es existiert also ein $C > 0$ mit*

$$|z_n| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

(c) $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w$ *und* $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = z \cdot w$.

(d) *Ist $z \neq 0$ und $z_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = \frac{1}{z}$.*

(e) $\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z}$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re} z_n = \mathrm{Re} z$, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im} z_n = \mathrm{Im} z$ *und* $\lim_{n\to\infty}|z_n| = |z|$.

Beweis. Die Beweise zu den Behauptungen (a) und (b) ergeben sich direkt aus der Definition und die zu den Behauptungen (c) und (d) lassen sich leicht nachrechnen; alle können wortwörtlich aus der reellen Analysis übernommen werden. Es verbleibt Behauptung (e) zu zeigen. Für $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ gilt

$$|\overline{z_n} - \overline{z}| = |\overline{z_n - z}| = |z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N$$

und somit $\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z}$. Mit (c) und Teil (d) von Proposition 1.5 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re} z_n = \mathrm{Re} z \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im} z_n = \mathrm{Im} z.$$

Mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ und der zweiten Dreiecksungleichung aus Teil (c) von Proposition 1.7 gilt schließlich

$$||z_n| - |z|| \leq |z_n - z| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N$$

und somit $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$. □

Genau wie in der reellen Analysis benötigen wir Konvergenzkriterien für Folgen.

Definition 1.19. *Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ komplexer Zahlen heißt eine* ***Cauchy-Folge****,[11] wenn gilt:*

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ mit } |z_n - z_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n > N.$$

[11] August Louis Cauchy (1789 - 1857)

Lemma 1.20 (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)**.** *Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ komplexer Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Sei zunächst $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit

$$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n > N$$

und also auch

$$|z_m - z_n| \overset{1.7\,(c)}{\leq} |z_m - z| + |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n > N.$$

Es folgt, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Sei nun umgekehrt $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Cauchy-Folge. Wegen

$$|\mathrm{Re} z_m - \mathrm{Re} z_n| = |\mathrm{Re}(z_m - z_n)| \overset{(1.1)}{\leq} |z_m - z_n| \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

und der analogen Überlegung für den Imaginärteil sind dann auch

$$(\mathrm{Re} z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \quad \text{und} \quad (\mathrm{Im} z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$$

Cauchy-Folgen. Da in $\mathbb{R}$ alle Cauchy-Folgen konvergieren, gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re} z_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im} z_n = \beta$. Für $z := \alpha + \beta i$ gilt dann

$$|z_n - z| = |\mathrm{Re} z_n - \alpha + (\mathrm{Im} z_n - \beta)i| \overset{1.7\,(c)}{\leq} |\mathrm{Re} z_n - \alpha| + |\mathrm{Im} z_n - \beta| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ konvergiert. □

Aus dem Begriff der Folge lässt sich wieder derjenige der Reihe ableiten.

Definition 1.21. *Unter der* ***unendlichen Reihe*** $\sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu$ *mit* $z_\nu \in \mathbb{C}$ *verstehen wir die Folge* $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *der* ***Partialsummen*** $S_n := \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu$. *Ist diese konvergent, so nennen wir die Reihe konvergent. Mit* $S := \lim_{n\to\infty} S_n$ *schreiben wir*

$$S = \sum_{\nu=1}^{\infty} z_\nu.$$

Beispiel 1.22. *Wie im Reellen gilt für die* ***geometrische Reihe*** $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$$S_n := 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z} \qquad \textit{für } |z| < 1.$$

Für komplexe Reihen gelten die aus der reellen Analysis bekannten Gesetzmäßigkeiten, wie etwa:

- Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert, dann ist $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Nullfolge,
- Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergiert, dann auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$,
- Majorantenkriterium, Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, ...

Zum Beweis übertrage man wortwörtlich die Beweise der entsprechenden Aussagen aus der reellen Analysis.

1.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. (a) *Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen:*

$$(-i)^{2021}, \quad -5, \quad -3+3i, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi i}{4}},$$

wobei man $e^{xi} := \cos(x) + i\sin(x)$ *für* $x \in \mathbb{R}$ *definiert.*

(b) *Sei* $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *eine Folge in* $\mathbb{C}$. *Zeigen Sie:*

(i) Konvergiert die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} z_n$ *in* $\mathbb{C}$, *so ist* $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *eine Nullfolge.*

(ii) Wenn die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} |z_n|$ *in* $\mathbb{C}$ *konvergiert, so auch die Reihe* $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} z_n$.

Aufgabe 1.2. *Käpt'n Schwartbart, der alte Haudegen, hinterließ bei seinem Ableben im Alter von* 107 *Jahren eine Schatzkarte:*

> *Geh direkt vom Galgen zur Palme, dann gleich viele Schritte unter rechtem Winkel nach rechts – steck die erste Fahne. Geh vom Galgen zu den drei Felsbrocken, genausoweit unter rechtem Winkel nach links – steck die zweite Fahne. Der Schatz steckt in der Mitte zwischen den beiden Fahnen.*

Die Erben starteten sofort eine Expedition zur Schatzinsel. Die Palme und die Felsbrocken waren sofort zu identifizieren. Vom Galgen jedoch war keine Spur mehr zu finden. Obwohl man die Schritte von einer zufälligen (und sehr wahrscheinlich falschen) Stelle aus gezählt hatte, stieß man gleich beim ersten Spatenstich auf die Schatztruhe. Wie war das möglich und wo lag der Schatz?

Aufgabe 1.3. (a) *Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus von Ringen* $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$ *gibt.*

(b) *Sei* $f(X) = \sum_{j=0}^{d} a_j \cdot X^j \in \mathbb{R}[X]$ *ein nicht-konstantes Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad* $d > 0$. *Zeigen Sie:*

(i) Ist $z \in \mathbb{C}$ *eine Nullstelle von* f, *so auch* $\overline{z}$.

(ii) Wenn der Grad d *von* f *ungerade ist, so besitzt* f *eine Nullstelle in* $\mathbb{R}$.

Hinweis: *Verwenden Sie den Fundamentalsatz der Algebra 3.36: Jedes nicht-konstante Polynom in* $\mathbb{C}[X]$ *besitzt eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$.

KAPITEL 2

Komplexwertige Funktionen

2.1 Stetigkeit

Definition 2.1. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Punkt.*[12] *Dann sagen wir:*

$$
\begin{aligned}
z_0 \textit{ ist ein } \textbf{\textit{Häufungspunkt}} \text{ von } D \quad &:\Longleftrightarrow \quad \textit{in jeder offenen } \varepsilon\textit{-Umgebung von } z_0 \textit{ liegen} \\
& \quad \textit{unendlich viele Punkte aus } D. \\
z_0 \textit{ ist ein } \textbf{\textit{isolierter Punkt}} \text{ von } D \quad &:\Longleftrightarrow \quad z_0 \textit{ liegt in } D \textit{ und ist kein Häufungspunkt von } D \\
&\Longleftrightarrow \quad \textit{es gibt ein } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \textit{ mit } U_\varepsilon(z_0) \cap D = \{z_0\}.
\end{aligned}
$$

Definition 2.2. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von D und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sagen wir:*

$$
\begin{aligned}
&\textit{Der } \textbf{\textit{Limes}} \textit{ von } f \textit{ gegen } z_0 \textit{ existiert und ist gleich } w_0 \textit{ (in Zeichen: } \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0\textit{)} \\
:\Longleftrightarrow \quad &\textit{für alle } \varepsilon > 0 \textit{ gibt es ein } \delta > 0 \textit{ mit } |f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \textit{für alle } z \in D \textit{ mit } 0 < |z - z_0| < \delta.
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2.3. *Dass in Definition 2.2 der Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ein Häufungspunkt von $D \subseteq \mathbb{C}$ ist, ist wichtig für die Wohldefiniertheit des Limes,*

denn: Wäre z_0 kein Häufungspunkt von D, so gäbe es ein $\delta > 0$ mit $U := (U_\delta(z_0) \cap D) \setminus \{z_0\} = \emptyset$. Es folgte für alle $w_0 \in \mathbb{C}$

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \textit{für alle } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \textit{ und alle } z \in U,$$

so dass alle w_0 die Bedingung an den Limes erfüllten. #

[12] Hierbei fordern wir ganz absichtlich nicht $z_0 \in D$.

Definition 2.4. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in D$. Dann sagen wir:*

$$\begin{aligned} & f \text{ ist } \textbf{\textit{stetig}} \text{ in } z_0 \\ :\Longleftrightarrow\ & \text{für alle } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \text{ gibt es ein } \delta \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \text{ für alle } z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta. \end{aligned}$$ [13]

Bemerkung 2.5. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in D$. Ist z_0 ein Häufungspunkt von D, so gilt entsprechend unserer Anschauung*

$$f \text{ ist stetig in } z_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Ist z_0 ein isolierter Punkt von D, so ist trivialerweise jedes f in z_0 stetig.

Wortwörtlich wie in der reellen Analysis zeigt man

Proposition 2.6 (Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Genau dann ist die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ im Punkt $z_0 \in D$ stetig, wenn für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ mit $z_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ die Bedingung*

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0)$$

gilt.

Proposition 2.7. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{C}$ in z_0 stetig. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

---

[13] In der Topologie definiert man die Stetigkeit einer Abbildung zwischen topologischen Räumen in einem gegebenen Punkt über Umgebungsbasen. Dass diese Definition mit der unsrigen übereinstimmt, liegt daran, dass für alle $z_0 \in \mathbb{C}$ die Menge der offenen ε-Umgebungen von z_0 eine Umgebungsbasis von z_0 ist, vgl. etwa hier.

Da auch für $z_0 = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$ die Menge der in Definition 1.15 definierten, offenen ε-Umgebungen von ∞ eine Umgebungsbasis von ∞ bildet, lässt sich Stetigkeit von f in z_0 nur leicht umformuliert auch für $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ und $z_0 \in D$ definieren als:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist } \textbf{\textit{stetig}} \text{ in } z_0 \\ :\Longleftrightarrow\ & \text{für alle } \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \text{ gibt es ein } \delta \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } f(z) \in U_\varepsilon(f(z_0)) \quad \text{für alle } z \in D \cap U_\delta(z_0). \end{aligned}$$

Betrachten wir ein Beispiel: Die in (1.3) eingeführte und in Bemerkung 1.16 erweiterte Funktion

$$f : \begin{cases} \overline{\mathbb{C}} & \to \overline{\mathbb{C}}, \\ z & \mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C}^\times, \\ \infty & \text{für } z = 0, \\ 0 & \text{für } z = \infty \end{cases} \end{cases}$$

ist stetig in $z_0 = 0$ und $z_1 = \infty$,

denn: Für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$f(z) \in U_\varepsilon(\infty) \text{ für alle } z \in U_\varepsilon(0),$$
$$f(z) \in U_\varepsilon(0) \text{ für alle } z \in U_\varepsilon(\infty)$$

und somit mit $\delta = \epsilon$ die Stetigkeit von f in $z_0 = 0$ bzw. $z_1 = \infty$. #

(a) $f+g:\begin{cases} D & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto f(z)+g(z) \end{cases}$ *und* $f\cdot g:\begin{cases} D & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto f(z)\cdot g(z) \end{cases}$ *sind stetig in* z_0.

(b) $z \mapsto \operatorname{Re} f(z)$, $z \mapsto \operatorname{Im} f(z)$, $z \mapsto \overline{f(z)}$ *und* $z \mapsto |f(z)|$ *sind stetig in* z_0.

(c) *Ist* $g(z_0) \neq 0$, *so gibt es eine* δ*-Umgebung* $U_\delta(z_0)$ *von* z_0 *mit* $g(z) \neq 0$ *für alle* $z \in D \cap U_\delta(z_0)$, *und die Abbildung*

$$\frac{f}{g}:\begin{cases} U_\delta(z_0) \cap D & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto \frac{f(z)}{g(z)} \end{cases}$$

ist stetig in z_0.

Beweis. Die Behauptungen (a) und (b) sowie der zweite Teil von (c) folgen sofort aus dem Folgenkriterium 2.6 und den Grenzwertrechenregeln aus Proposition 1.18.

Es verbleibt der erste Teil von Behauptung (c) zu zeigen. Sei also $g(z_0) \neq 0$. Dann ist $\varepsilon := \frac{|g(z_0)|}{2} > 0$. Da g in z_0 stetig ist, existiert zu diesem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in D \text{ mit } |z - z_0| < \delta.$$

Für solche z gilt dann

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |g(z_0) - (g(z_0) - g(z))| \\ &\geq ||g(z_0)| - |g(z_0) - g(z)|| \\ &\geq |g(z_0)| - |g(z) - g(z_0)| \\ &= 2\varepsilon - |g(z) - g(z_0)| \\ &> 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Es ist also $g(z) \neq 0$ für alle $z \in D \cap U_\delta(z_0)$, was zu zeigen war. □

Genau wie in der reellen Analysis zeigt man

Proposition 2.8. *Seien* $D, E \subseteq \mathbb{C}$ *und* $f : D \to \mathbb{C}$ *und* $g : E \to \mathbb{C}$ *zwei Funktionen mit* $f(D) \subseteq E$. *Sind dann* f *in* z_0 *und* g *in* $f(z_0)$ *stetig, so ist auch ihre Hintereinanderausführung* $g \circ f$ *in* z_0 *stetig.*

Die einfachsten Beispiele für stetige Funktionen sind wie in der reellen Analysis:

Beispiel 2.9. *Jede Polynomfunktion* $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ *mit* $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ *ist stetig in jedem* $z_0 \in \mathbb{C}$,

denn: Dass die konstanten Funktionen und die Identität auf $\mathbb{C}$ *stetig sind, lässt sich jeweils leicht und unmittelbar anhand von Definition 2.4 nachweisen. Die Behauptung folgt nun mit Teil (a) von Proposition 2.7.* #

Von überragender Bedeutung für die Funktionentheorie ist das folgende Beispiel einer nicht stetigen Funktion:

Bemerkung 2.10. *Bezeichne*

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

den Einheitskreis in der komplexen Ebene. Dann ist die Einschränkung

$$\operatorname{Arg}|_{\mathbb{S}^1} : \begin{cases} \mathbb{S}^1 & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto \operatorname{Arg} z \end{cases}$$

des in Definition 1.8 eingeführten Hauptwerts des Arguments auf $\mathbb{S}^1$ *im Punkt* $z_0 = -1$ *nicht stetig, denn: Für alle* $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ *liegen die Punkte*

$$a_n = \cos(\pi - \frac{1}{n}) + i \sin(\pi - \frac{1}{n}),$$
$$b_n = \cos(\pi + \frac{1}{n}) + i \sin(\pi + \frac{1}{n})$$

in $\mathbb{S}^1$. *Nun gilt einerseits*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \cos\pi + i \sin\pi = -1$$

und andererseits für die Funktionswerte

$$\operatorname{Arg} a_n = \pi - \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} \pi \quad \text{und} \quad \operatorname{Arg} b_n = -\pi + \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\to} -\pi;$$

und nach dem Folgenkriterium 2.6 folgt die Behauptung. #

Es ist leicht zu sehen, dass $\operatorname{Arg}|_{\mathbb{S}^1}$ *in allen anderen* $z \in \mathbb{S}^1$ *stetig ist. Dass die Unstetigkeitsstelle gerade bei* $z_0 = -1$ *liegt, ergibt sich unmittelbar aus der in Definition 1.8 getroffenen Wahl für die Normierung des Hauptwerts.*

In der Literatur wird der Hauptwert gelegentlich auch anders normiert, was dann zu einer verschobenen Unstetigkeitsstelle führt. So ergibt sich etwa aus der Forderung $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$ *eine Unstetigkeitsstelle in* $z_0 = 1$.

2.2 Komplex differenzierbare Funktionen

Analog zur reellen Analysis definieren wir:

Definition 2.11. *Seien* $D \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* $f : D \to \mathbb{C}$ *eine Funktion und* $z_0 \in D$. *Genau dann heißt* f *in* z_0 ***komplex differenzierbar****, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. Dieser heißt dann die ***komplexe Ableitung*** *von* f *in* z_0 *und wird mit* $f'(z_0)$ *bezeichnet. Ist* f *in jedem* $z_0 \in D$ *komplex differenzierbar, so heißt* f *auf* D ***holomorph****. Gibt es ein* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, *so dass* f *auf* $U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$ *holomorph ist, so sagen wir auch,* f *sei in* z_0 ***holomorph****.*

Bemerkung 2.12. *Natürlich gilt in der Notation von Definition 2.11*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

wenn die Limites existieren.

Beispiel 2.13. *Die Funktion $f(z) = z^n$ ist für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und also auf $\mathbb{C}$ holomorph. Ihre komplexe Ableitung in z_0 ist $f'(z_0) = n\, z_0^{n-1}$,*

denn:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{1}{h}\left((z_0 + h)^n - z_0^n\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} h^\nu\, z_0^{n-\nu} - z_0^n\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(z_0^n + n\, h\, z_0^{n-1} + \sum_{\nu=2}^{n} \binom{n}{\nu} h^\nu\, z_0^{n-\nu} - z_0^n\right) \\
&= n\, z_0^{n-1} + \sum_{\nu=2}^{n} \binom{n}{\nu} h^{\nu-1}\, z_0^{n-\nu} \\
&\overset{h \to 0}{\to} n\, z_0^{n-1}.
\end{aligned}$$

#

Beispiel 2.14. *Die komplexe Konjugation*

$$\bar{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto \overline{z} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar,

denn: Offensichtlich sind $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ und $(\frac{i}{n})_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ komplexe Nullfolgen, konvergieren also gegen $0 \in \mathbb{C}$. Nun gilt für ein beliebiges $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{z_0 + h_n} - \overline{z_0}}{h_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\overline{h_n}}{h_n} = \begin{cases} 1 & \text{für } h_n := \frac{1}{n}, \\ -1 & \text{für } h_n := \frac{i}{n}, \end{cases}$$

so dass der Grenzwert $\lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h}$ nicht existiert, was die Behauptung zeigt. #

Lemma 2.15. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in D$ sowie $w_0 \in \mathbb{C}$ Punkte. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist in z_0 komplex differenzierbar und es gilt $f'(z_0) = w_0$.*

(ii) *Es gibt eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0) \quad \text{und} \quad \varphi(z_0) = w_0.$$

(iii) *Es gilt*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-w_0\,h}{h} = 0.$$

Beweis. Gelte zunächst (i), sei also f in z_0 komplex differenzierbar und erfülle $f'(z_0) = w_0 \in \mathbb{C}$. Dann erfüllt die Funktion

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{für } z \in D \setminus \{z_0\}, \\ w_0 & \text{für } z = z_0 \end{cases}$$

die Bedingung

$$\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = f'(z_0) = w_0 = \varphi(z_0)$$

und ist also in z_0 stetig. Nach Konstruktion folgt Aussage (ii).

Gelte nun Aussage (ii) und sei $\varphi : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit den dort behaupteten Eigenschaften. Setzen wir $h := z - z_0$, so gilt dann

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-w_0\,h}{h} \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-\varphi(z_0+h)\,h}{h} + \lim_{h\to 0}\big(\varphi(z_0+h)-\varphi(z_0)\big) \\
&\overset{2.5}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-\varphi(z)(z-z_0)}{z-z_0} \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{0}{z-z_0} \\
&= 0
\end{aligned}$$

und somit Aussage (iii).

Schließlich gelte Aussage (iii). Dann folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)-w_0\,h}{h} + w_0 = 0 + w_0 = w_0.$$

Es ist also f in z_0 komplex differenzierbar und es gilt $w_0 = f'(z_0)$; es gilt also Aussage (i). □

Proposition 2.16. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in D$. Ist f in z_0 komplex differenzierbar, so ist f in z_0 auch stetig.*

Beweis. Sei f in z_0 differenzierbar. Nach Lemma 2.15 gibt es dann eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z - z_0)$. Wegen

$$\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0) \quad \text{und} \quad \lim_{z\to z_0} (z - z_0) = 0$$

folgt

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) + \lim_{z\to z_0} \varphi(z)(z - z_0) = f(z_0),$$

so dass f in z_0 stetig ist. □

Genau wie in der reellen Analysis zeigt man nun die folgenden Rechenregeln für die komplexe Differentiation:

Proposition 2.17. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbar. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Für $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig ist $f + \lambda g$ in z_0 komplex differenzierbar und hat dort die komplexe Ableitung*

$$(f + \lambda g)'(z_0) = f'(z_0) + \lambda g'(z_0). \qquad \textbf{(\textit{Linearität})}$$

(b) *$f \cdot g$ ist in z_0 komplex differenzierbar und hat dort die komplexe Ableitung*

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0). \qquad \textbf{(\textit{Produktregel})}$$

(c) *Ist $g(z_0) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ (definiert für „z nahe bei z_0") in z_0 komplex differenzierbar und hat dort die komplexe Ableitung*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)}{g^2(z_0)}. \qquad \textbf{(\textit{Quotientenregel})}$$

Beispiel 2.18. *Nach Beispiel 2.13 und der Linearität 2.17 (a) ist jede Polynomfunktion $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$ mit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ auf $\mathbb{C}$ holomorph mit der komplexen Ableitung*

$$P'(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu\, a_\nu\, z^{\nu-1}.$$

Proposition 2.19. *Seien $D, E \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ und $g : E \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Sei weiter $z_0 \in D$. Sind f in z_0 und g in $w_0 := f(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ in z_0 komplex differenzierbar und hat dort die komplexe Ableitung*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0). \qquad \textbf{(\textit{Kettenregel})}$$

Beweis. Nach Lemma 2.15 gibt es eine in w_0 stetige Funktion $\psi : E \to \mathbb{C}$ mit

$$g(w) - g(w_0) = \psi(w)(w - w_0) \quad \text{und} \quad \psi(w_0) = g'(w_0).$$

Mit $w = f(z)$ und insbesondere $w_0 = f(z_0)$ folgt also für $z \neq z_0$

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \psi(f(z))\, \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} \psi(f(z_0))\, f'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

$\square$

Wir hatten ja die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als den mit einer Körpermultiplikation ausgestatteten reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ eingeführt. An dieser Stelle drängt sich daher ein Vergleich der Begriffe der komplexen Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ und der (totalen) reellen Differenzierbarkeit in $\mathbb{R}^2$ auf.

Erinnerung. *Seien $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\binom{x_0}{y_0} \in D$. Eine Funktion $f = \binom{u}{v} : D \to \mathbb{R}^2$ mit $u : D \to \mathbb{R}$, $v : D \to \mathbb{R}$ heißt in $\binom{x_0}{y_0}$* ***total differenzierbar****, wenn es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit*

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{f\big(\binom{x_0+h}{y_0+k}\big) - f\big(\binom{x_0}{y_0}\big) - \varphi\big(\binom{h}{k}\big)}{\|\binom{h}{k}\|} = 0 \tag{2.1}$$

gibt, wobei $\|\binom{h}{k}\| = \sqrt{h^2+k^2}$ die Euklid'sche Norm bezeichnet und die lineare Abbildung φ durch f und $\binom{x_0}{y_0}$ eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, so ist die Darstellungsmatrix von φ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\binom{x}{y} & \frac{\partial u}{\partial y}\binom{x}{y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x}\binom{x}{y} & \frac{\partial v}{\partial y}\binom{x}{y} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

gegeben.

Der Vergleich mit Aussage (iii) aus Lemma 2.15 legt nahe, dass die totale reelle Differenzierbarkeit und die komplexe Differenzierbarkeit miteinander verwandt sind. Um den Zusammenhang besser zu verstehen, untersuchen wir zunächst, welche $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen auf $\mathbb{C}$ auch $\mathbb{C}$-linear sind:

Lemma 2.20. *Sei $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit reeller Abbildungsmatrix M bezüglich der Basis $\{1, i\}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *φ ist $\mathbb{C}$-linear, es gilt also $\varphi(wz) = w\varphi(z)$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$.*

(ii) *$\varphi(iz) = i\varphi(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

(iii) *Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.*

(iv) *Es gibt ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\varphi(z) = \zeta z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.*

Beweis. Offensichtlich impliziert Aussage (i) sofort Aussage (ii).

Gelte nun Aussage (ii) und sei $M = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ die Darstellungsmatrix von φ. Dann gelten

$$\varphi(i) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = c + di,$$
$$i\,\varphi(1) = i\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i(a+bi) = -b + ai.$$

Nach Voraussetzung stimmen diese beiden Ausdrücke überein, es gelten also

$$c = -b \quad \text{und} \quad d = a$$

und somit Aussage (iii).

Gelte nun Aussage (iii). Dann erhalten wir mit $z = x + iy$

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (ax - by) + (bx + ay)i = (a + bi)(x + iy) = (a + bi)z.$$

Mit $\zeta := a + bi$ folgt Aussage (iv).

Gilt schließlich Aussage (iv), so gilt

$$\varphi(wz) = \zeta wz = w\zeta z = w\varphi(z) \quad \text{für alle } w, z \in \mathbb{C}$$

und somit Aussage (i). □

Im Folgenden werden wir zur Vereinfachung der Notation Elemente von $\mathbb{R}^2$ auch als Zeilenvektoren schreiben. Den Zusammenhang zwischen reeller und komplexer Differenzierbarkeit fassen wir in folgendem wichtigen Satz zusammen:

Satz 2.21. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 \in D$. Sei weiter $z = x + i\,y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und insbesondere $z_0 = x_0 + i\,y_0$. Schreiben wir nun*

$$f(x, y) = u(x, y) + i\,v(x, y) \quad \text{mit } u(x, y), v(x, y) \in \mathbb{R},$$

so sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) *f ist in z_0 komplex differenzierbar.*

(ii) *f ist in (x_0, y_0) total reell differenzierbar und es gilt*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned} \qquad \text{(\textbf{\textit{Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen}})}$$

Beweis. Sei f in z_0 komplex differenzierbar und $f'(z_0) =: w_0$. Dann gilt nach Definition

$$0 = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} - w_0 \right| = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(z_0 + t) - f(z_0) - w_0 \cdot t}{t} \right|,$$

was äquivalent zu

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0) - w_0 \cdot t}{|t|}$$

ist. Schreiben wir $w_0 = a + i\,b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $t = h + i\,k$ mit $h, k \in \mathbb{R}$, so übersetzt sich dies zu (2.1), also zur Definition der totalen reellen Differenzierbarkeit von f in z_0. Wenden wir dabei Lemma 2.20 auf die Multiplikation $t \mapsto w_0\,t$ an und beachten (2.2), so erhalten wir die Gültigkeit der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Da die Aussagen in Lemma 2.20 alle zueinander äquivalent sind, lässt sich diese Argumentation auch umkehren, so dass der Satz gezeigt ist. □

Beispiel 2.22. *Mit Satz 2.21 erhalten wir einen neuen Beweis für die Aussage von Beispiel 2.14, dass die komplexe Konjugation*

$$\bar{\cdot} : \begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto \bar{z} \end{cases}$$

in keinem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist,

denn: Für $z = x + i\,y$ gilt $\bar{z} = x - i\,y$ und somit auch

$$\frac{\partial x}{\partial x}(x_0, y_0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial - y}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{für alle } z_0 = x_0 + i\,y_0 \in \mathbb{C}.$$

Es folgt, dass $\bar{\cdot}$ in keinem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt und daher nach Satz 2.21 in keinem $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar ist. #

Korollar 2.23. *In der Notation von Satz 2.21 gilt:*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Beweis. Aus den Überlegungen des Beweises der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen folgt direkt:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= w_0 = a + i\,b = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ i\,f'(z_0) &= i\,w_0 = i\,a - b = i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

□

Definition 2.24. *Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt genau dann ein* ***Gebiet****, wenn D offen und zusammenhängend ist.*

Korollar 2.25. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ auf D holomorph und $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$. Dann ist f konstant auf D.*

Beweis. Wir schreiben wieder $z = x + i\,y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$. Nach Satz 2.21 ist f auf D total reell differenzierbar und es gilt Korollar 2.23. Mit der Voraussetzung $0 \equiv f'(z) \equiv i\,f'(z)$ folgt daraus

$$0 \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Komponentenweise können wir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ablesen. Da nach Voraussetzung $D \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist, können wir einen Satz aus reellen Analysis (Link fehlt noch!) anwenden, der besagt, dass u und v auf D konstant sein müssen. Es folgt schließlich, dass auch f auf D konstant ist. □

Wie wir im Beweis gerade gesehen haben, ist es aufgrund der komplizierten Notation recht umständlich mit den partiellen Ableitungen von u und v nach x und y zu arbeiten. Wir werden daher in Zukunft gelegentlich vereinfachend u_x, u_y, v_x, v_y für $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ schreiben.

2.3 Potenzreihen

Nach Beispiel 2.18 stellen Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ stets holomorphe Funktionen auf ganz $\mathbb{C}$ dar und haben eine leicht zu bestimmende Ableitung. In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie sich Potenzreihen in dieser Hinsicht verhalten. Wir bauen die entsprechende Theorie aus der reellen Analysis nach, oftmals mit den wortwörtlich gleichen Beweisen.

Definition 2.26. *Eine unendliche Reihe der Form*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{mit } z_0 \in \mathbb{C} \textit{ und } a_n \in \mathbb{C} \textit{ für alle } n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

heißt ***Potenzreihe*** *mit den Koeffizienten a_n und um den Entwicklungspunkt z_0. Die Menge der $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe konvergiert, heißt der* ***Konvergenzbereich*** *der Reihe.*

Definition 2.27. *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Funktion $f_n : A \to \mathbb{C}$ gegeben. Dann heißt die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf A* ***gleichmäßig konvergent****, wenn es eine Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ gibt, für die es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \textit{für alle } n \geq N \textit{ und alle } z \in A.$$

Lemma 2.28 (Cauchy'sches Konvergenzkriterium für Funktionenfolgen)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und sei für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Funktion $f_n : A \to \mathbb{C}$ gegeben.*

(a) *Genau dann ist $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf A gleichmäßig konvergent, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit*

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon \quad \textit{für alle } m, n \geq N \textit{ und alle } z \in A.$$

(b) *Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf A gleichmäßig konvergent gegen $f : A \to \mathbb{C}$ und sind alle f_n auf A stetig, so ist auch f auf A stetig.*

Beweis. Der Beweis von Behauptung (a) geht analog zu dem des Cauchy'sche Konvergenzkriteriums 1.20. Behauptung (b) zeigt man wie in der reellen Analysis. □

Definition 2.29. *Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ von Funktionen $f_n : A \to \mathbb{C}$ heißt auf A* ***gleichmäßig konvergent****, wenn die Folge $(S_N)_{N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ der Partialsummen*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} f_n(z) \quad \textit{für alle } N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

auf A gleichmäßig konvergiert.

Lemma 2.30 (Cauchy'sches Konvergenzkriterium für Funktionenreihen)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Funktion $f_n : A \to \mathbb{C}$ gegeben. Dann gilt: Genau dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ auf A gleichmäßig konvergent, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit*

$$|f_n(z) + f_{n+1}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N, \text{ alle } p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ und alle } z \in A.$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium für Funktionenfolgen 2.28. □

Lemma 2.31 (Weierstraß'sches Konvergenzkriterium für Funktionenreihen)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Funktion $f_n : A \to \mathbb{C}$ gegeben. Sei weiter $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine **Majorante** von $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ auf A, gelte also*

$$a_n \geq |f_n(z)| \quad \text{für alle } z \in A \text{ und alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

*Konvergiert dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ auf A **gleichmäßig absolut konvergent**, es ist also $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)|$ auf A gleichmäßig konvergent. Nach dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium 2.30 und wegen der Dreiecksungleichung ist unter diesen Voraussetzungen auch $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ selbst auf A gleichmäßig konvergent.*

Beweis. Wie in der reellen Analysis. □

Beispiel 2.32. *Sei $0 \leq q < 1$ fest. Dann gilt*

$$|z|^n \leq q^n \quad \text{für alle } |z| < q \text{ und alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n < \infty$ ist also eine konvergente Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf $U_q(0)$ und nach dem Weierstraß'schen Konvergenzkriterium 2.31 folgt die gleichmäßig absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ auf $U_q(0)$.

Proposition 2.33. *Ist die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit } z_0 \in \mathbb{C} \text{ und } a_n \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

für $z = z_1 \in \mathbb{C}$ konvergent und gilt $r := |z_1 - z_0|$, so konvergiert sie für alle $z \in U_r(z_0)$. Ferner konvergiert die Reihe gleichmäßig absolut auf $\overline{U_\varrho(z_0)}$ für alle $0 < \varrho < r$.

Beweis. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ konvergiert, bilden die Glieder dieser Reihe eine Nullfolge, insbesondere also eine beschränkte Folge. Es existiert daher ein $c > 0$ mit

$$|a_n|\, r^n = |a_n (z_1 - z_0)^n| \leq c \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

was sich zu

$$|a_n| \leq \frac{c}{r^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

umschreiben lässt, wenn wir ohne Einschränkung annehmen, r sei positiv. Für $z \in \overline{U_\varrho(z_0)}$ mit $\varrho < r$ und für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ folgt hieraus

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,|z-z_0|^n \leq \frac{c}{r^n}\,\varrho^n = c\,q^n \quad \text{mit } q := \frac{\varrho}{r}.$$

Nach Konstruktion gilt $0 < q < 1$, so dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} cq^n$ konvergiert und also wie in Beispiel 2.32 eine konvergente Majorante für die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ auf $\overline{U_\varrho(z_0)}$ ist. □

Nach der Proposition konvergieren Potenzreihen auf Kreisscheiben um ihren Entwicklungspunkt. Die naheliegende Frage ist nun, ob es stets eine wohldefinierte größte solche Kreisscheibe gibt und wie sie sich bestimmen lässt. Weil wir gleich darauf zurückgreifen werden, wollen wir vor Beantwortung dieser Frage jedoch noch an die Definition des Limes superior erinnern:

Bemerkung 2.34. *Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ nach oben beschränkt, so ist die Menge M der Häufungspunkte von $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß*[14] *nichtleer und konstruktionsgemäß nach oben beschränkt. In diesem Fall setzen wir*

$$\limsup_{n\to\infty} b_n := \sup M.$$

Ist andererseits $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ nicht nach oben beschränkt, so setzen wir

$$\limsup_{n\to\infty} b_n := \infty.$$

Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ konvergent, so folgt aus dieser Festlegung

$$\limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Satz 2.35. *Zu jeder vorgegebenen Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{mit } z_0 \in \mathbb{C} \text{ und } a_n \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

*existiert genau ein $r \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$, **Konvergenzradius** genannt, mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für jedes $0 < \varrho < r$ ist die Reihe auf $\overline{U_\varrho(z_0)}$ gleichmäßig absolut konvergent.*

(ii) *Auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_r(z_0)}$ ist die Reihe divergent.*

Für diesen Konvergenzradius gilt

$$r = \begin{cases} \infty & \text{für } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \\ 0 & \text{für } \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty, \\ \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{(\textbf{\textit{Formel von Cauchy-Hadamard}}[15])}$$

[14] Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848)

Beweis. Die Eindeutigkeit des Konvergenzradius ergibt sich unmittelbar aus (i) und (ii). Für den Existenznachweis definieren wir die Menge

$$K := \{|z_1 - z_0| \mid z_1 \in \mathbb{C}, \text{ so dass } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ in } z = z_1 \text{ konvergiert }\}.$$

Wegen $0 \in K$ ist K stets nichtleer. Wir setzen $r := \sup K$, falls K nach oben beschränkt ist, und $r := \infty$, falls dies nicht der Fall ist. Für jedes $0 < \varrho < r$ gibt es dann ein $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $\varrho < |z_1 - z_0| < r$, so dass die Reihe in $z = z_1$ konvergiert. Nach Proposition 2.33 konvergiert die Reihe dann auf $\overline{U_\varrho(z_0)}$ gleichmäßig absolut, so dass wir Eigenschaft (i) gezeigt haben. Zu Eigenschaft (ii) bemerken wir, dass diese für $r = \infty$ automatisch erfüllt ist, und für $r < \infty$ unmittelbar aus unserer Konstruktion von r folgt.

Zum Beweis der Formel von Cauchy-Hadamard zeigen wir nun, dass mit dem im Satz angegebenen Wert von r die Reihe auf $U_r(z_0)$ konvergiert und auf $\mathbb{C} \setminus \overline{U_r(z_0)}$ divergiert.

Sei dafür zunächst $0 < r \leq \infty$. Für ein beliebiges $\varrho \in (0, r)$ gilt dann

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 & \text{für } r = \infty, \\ \frac{1}{r} & \text{sonst} \end{cases} < \frac{1}{\varrho},$$

so dass es ein $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\varrho}$ für alle $n \geq N$, also mit

$$|a_n(z - z_0)^n| < \left(\frac{|z - z_0|}{\varrho}\right)^n \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Nach Beispiel 2.32 konvergiert somit die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ gleichmäßig absolut für $\frac{|z-z_0|}{\varrho} < 1$, also für $z \in U_\varrho(z_0)$. Da $\varrho \in (0, r)$ beliebig gewählt war, erfüllt r somit Eigenschaft (i).

Sei nun $0 \leq r < \infty$. Für ein beliebiges $\varrho \in (r, \infty)$ gilt dann

$$\frac{1}{\varrho} < \begin{cases} \infty & \text{für } r = 0, \\ \frac{1}{r} & \text{sonst} \end{cases} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Daher existiert eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ natürlicher Zahlen mit

$$\frac{1}{\varrho} < |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

also mit $\varrho^{-n_k} < |a_{n_k}|$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_\varrho(z_0)}$ folgt deshalb

$$|a_{n_k}(z - z_0)^{n_k}| = |a_{n_k}||z - z_0|^{n_k} > 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Wir erhalten, dass die Glieder der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ keine Nullfolge bilden, so dass die Reihe in diesem Fall nicht konvergiert. Da $\varrho \in (r, \infty)$ beliebig gewählt war, erfüllt r somit Eigenschaft (ii). □

[15] Jacques Hadamard (1865 - 1963)

Beispiel 2.36. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$ *hat Konvergenzradius* $r = 0$*,*

denn: Dies folgt aus der Formel von Cauchy-Hadamard 2.35 *und*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n|} = \limsup_{n\to\infty} n = \infty.$$

#

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ *hat Konvergenzradius* $r = 1$*,*

denn: Dies folgt aus der Formel von Cauchy-Hadamard 2.35 *und*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

#

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ *hat Konvergenzradius* $r = \infty$*,*

denn: Dies folgt aus der Formel von Cauchy-Hadamard 2.35 *und*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n!}|} = 0.$$

Wer der Berechnung des Limes superior in diesem Fall nicht traut, schätzt vielleicht einen Beweis mit dem Quotientenkriterium:[16] *Für ein beliebiges* $z \in \mathbb{C}^\times$ *gilt*

$$|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}| = \frac{|z|}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1 \quad \textit{für n hinreichend groß,}$$

was die gleichmäßig absolute Konvergenz der Reihe auf ganz $\mathbb{C}$ *zeigt.* #

[16] Gemeint ist das übliche Quotientenkriterium für Reihen komplexer Zahlen, nicht das Quotientenkriterium für Potenzreihen. Letzteres ist eine Verallgemeinerung von ersterem und besagt:

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r, welche für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ die Bedingung $a_n \neq 0$ erfüllt. Dann gilt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq r \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Insbesondere gilt $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, falls der Grenzwert existiert. Dies zeigen wir in Übungsaufgabe 2.5

Ein Beispiel, das die Schwächen des Quotientenkriteriums für Potenzreihen aufzeigt, ist übrigens durch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_n = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{für gerades } n, \\ \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}} & \text{für ungerades } n \end{cases}$$

gegeben. Nach Cauchy-Hadamard gilt offenbar $r = \frac{3}{2}$. Für die Quotienten gilt nur

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{1}{4} < r < 9 = \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Bemerkung 2.37. *Für eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt nach Definition des Konvergenzradius*

$$\begin{aligned} |z - z_0| < r \quad &\Longrightarrow \quad \text{die Reihe konvergiert in } z,\\ |z - z_0| > r \quad &\Longrightarrow \quad \text{die Reihe divergiert in } z. \end{aligned}$$

Über die Punkte z mit $|z - z_0| = r$ wird keine Aussage getroffen. Tatsächlich ist hier sowohl Konvergenz als auch Divergenz möglich,

denn: Die Potenzreihe aus Teil (b) von Beispiel 2.36 hat Konvergenzradius $r = 1$. Im Punkt $z = 1$ erhalten wir die (divergente) harmonische Reihe, im Punkt $z = -1$ die (konvergente) alternierende harmonische Reihe – beide bekannt aus der reellen Analysis. #

Bemerkung 2.38. *Die Formel von Cauchy-Hadamard 2.35 ist nicht immer zweckmäßig: Im weiteren Verlauf dieser Vorlesung werden wir auch lernen, Konvergenzradii von Potenzreihen anhand des funktionentheoretischen Verhaltens und insbesondere der Singularitäten der durch sie beschriebenen Funktionen zu bestimmen. Dies ist in aller Regel deutlich unaufwändiger als eine Berechnung mit der Formel von Cauchy-Hadamard.*

Satz 2.39. *Sei*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit } z_0 \in \mathbb{C} \text{ und } a_n \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$, und sei $f(z)$ die durch diese Reihe auf $U_r(z_0)$ gegebene Funktion. Dann ist $f(z)$ auf $U_r(z_0)$ holomorph und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \text{für alle } z \in U_r(z_0).$$

Beweis. Ohne Einschränkung können wir $z_0 = 0$ annehmen, sonst führen wir eine Translation um $-z_0$ durch. Für jedes $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ schreiben wir dann

$$f(z) = s_N(z) + R_N(z) \quad \text{mit } s_N(z) := \sum_{n=0}^{N-1} a_n\, z^n \text{ und } R_N(z) := \sum_{n=N}^{\infty} a_n\, z^n.$$

Der Konvergenzradius der gliedweise abgeleiteten Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$$

ist ebenfalls r,

denn: Wegen $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\to} 1$ hat $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^n$ Konvergenzradius r. Da z nicht von n abhängt, folgt mit

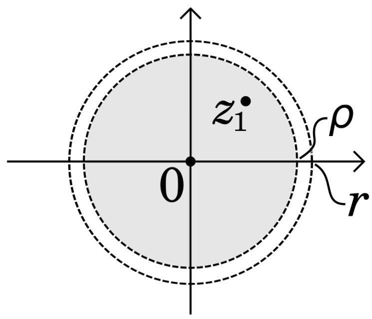
$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$$

die Behauptung. #

Da Polynome gliedweise abgeleitet werden, erhalten wir auf diese Weise eine Funktion

$$f_1(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1} = \lim_{N\to\infty} s'_N(z) \quad \text{für alle } |z| < r. \tag{2.3}$$

Der Satz folgt, wenn wir zeigen können, dass $f(z)$ für $|z| < r$ komplex differenzierbar ist und $f'(z) = f_1(z)$ gilt. Wir untersuchen also die Differenzierbarkeit in $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| < r$. Seien dafür $\varrho \in (|z_1|, r)$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1\}$ mit $|z| < \varrho$.



Für dieses z gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - f_1(z_1) &= \frac{s_N(z) + R_N(z) - s_N(z_1) - R_N(z_1)}{z - z_1} - f_1(z_1) \\ &= \frac{s_N(z) - s_N(z_1)}{z - z_1} - s'_N(z_1) + s'_N(z_1) - f_1(z_1) + \frac{R_N(z) - R_N(z_1)}{z - z_1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Es gilt nun natürlich die einzelnen Terme im Betrag nach oben abzuschätzen und zu zeigen, dass der Gesamtausdruck für z gegen z_1 verschwindet. Wir betrachten zunächst den letzten Term. Dieser lässt sich umschreiben zu

$$\frac{R_N(z) - R_N(z_1)}{z - z_1} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_1^n}{z - z_1} = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \left(z^{n-1} + z^{n-2} z_1 + \ldots + z\, z_1^{n-2} + z_1^{n-1} \right),$$

was uns wegen $|z_1|, |z| < \varrho < r$ die Abschätzung

$$\left|\frac{R_N(z) - R_N(z_1)}{z - z_1}\right| < \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|\, n\, \varrho^{n-1}$$

liefert. Weil der Konvergenzradius der gliedweise abgeleiteten Reihe wieder r ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, n\, z^{n-1}$ für $z = \rho$, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $N_R = N_R(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit

$$\left|\frac{R_N(z) - R_N(z_1)}{z - z_1}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } N \geq N_R \text{ und alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1\} \text{ mit } |z| < \varrho.$$

Wegen (2.3) gibt es zu demselben $\varepsilon > 0$ wie gerade eben ein $N_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit

$$|s'_N(z_1) - f_1(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } N \geq N_1.$$

Sei jetzt $N > \max\{N_R, N_1\}$. Da $s_N(z)$ in z_1 komplex differenzierbar ist, existiert zu dem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|\frac{s_N(z) - s_N(z_1)}{z - z_1} - s'_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } z \in U_\delta(z_1).$$

Wir dürfen hierbei ohne Einschränkung $\delta > 0$ so klein wählen, dass $|z - z_1| < \delta$ schon $|z| < \varrho$ impliziert.[17] Setzen wir unsere Ergebnisse in (2.4) ein, so folgt insgesamt für $0 < |z - z_1| < \delta$

$$|\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - f_1(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

und somit die Behauptung. □

Bemerkung 2.40. *Leiten wir $f(z)$ sukzessive ab, so erhalten wir durch vollständige Induktion für alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k}(z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in U_r(z_0).$$

Setzen wir speziell $z = z_0$, so folgt $f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$, also $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ für alle $k \geq 0$. Insgesamt lässt sich daher $f(z)$ umschreiben zu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in U_r(z_0). \qquad (\textbf{Taylorformel}^{18} \textbf{ für Potenzreihen})$$

2.4 Die komplexe Exponentialfunktion

In der reellen Analysis spielen die durch Potenzreihen definierten Funktionen e^x, $\sin x$ und $\cos x$ eine gewichtige Rolle. Wir werden sehen, dass dies in der Funktionentheorie nicht anders ist, und führen die genannten Funktionen nun auch im Komplexen ein.

Definition 2.41. *Für $z \in \mathbb{C}$ heißt $e^z := \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ die **(komplexe) Exponentialfunktion**.*

Bemerkung 2.42. *Die komplexe Exponentialfunktion $\exp z$ setzt die reelle Exponentialfunktion*

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

„natürlich“ ins Komplexe fort. Wir werden gleich in Proposition 2.43 sehen, dass $\exp z$ eine holomorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ ist, und später in einem Korollar von Satz 4.8 verstehen, dass sie die einzige holomorphe Fortsetzung von $\exp x$ nach $\mathbb{C}$ ist.

[17] Es genügt hierfür offensichtlich $\delta < \varrho - |z_1|$ zu wählen.
[18] Brook Taylor (1685 - 1731)

Proposition 2.43. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Die Potenzreihe* $\exp z$ *hat Konvergenzradius* $r = \infty$.

(b) *Die Ableitung von* $\exp z$ *ist für alle* $z \in \mathbb{C}$ *durch* $\exp' z = \exp z$ *gegeben.*

(c) *Für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt das* ***Additionstheorem*** $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

(d) *Für* $z = x + i\,y$ *mit* $x, y \in \mathbb{R}$ *hat* $\exp(z)$ *die Darstellung*

$$e^z = e^x\, e^{i\,y} \quad \textit{mit } |e^z| = e^x \textit{ und } |e^{i\,y}| = 1.$$

Beweis. Den Konvergenzradius von $\exp z$ haben wir bereits in Teil (c) von Beispiel 2.36 zu $r = \infty$ berechnet. Behauptung (a) ist also schon gezeigt.

Nach Satz 2.39 dürfen wir $\exp z$ gliedweise ableiten. Behauptung (b) folgt daher mit

$$\frac{d}{dz}\frac{z^0}{0!} = \frac{d}{dz}1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dz}\frac{z^n}{n!} = \frac{n\,z^{n-1}}{n!} = \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{für alle } n > 0.$$

Wir wollen nun Behauptung (c), das Additionstheorem, zeigen. Dafür betrachten wir für ein fest gewähltes $c \in \mathbb{C}$ die Funktion $f(z) := e^z \cdot e^{c-z}$. Diese ist als Produkt holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}$ holomorph und nach Aussage (b), der Produktregel 2.17 (b) und der Kettenregel 2.19 gilt

$$f'(z) = e^z \cdot e^{c-z} + (-1)\, e^z \cdot e^{c-z} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Nach Korollar 2.25 ist $f(z) = C \in \mathbb{C}$ auf dem Gebiet $\mathbb{C}$ konstant. Setzt man in dieser Gleichung $z = 0$, so erhält man $C = f(0) = e^c$ und also

$$e^z\, e^{c-z} = e^c \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Da $c \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt war, können wir speziell $c = z + w$ betrachten und erhalten

$$e^z\, e^w = e^{z+w} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C},$$

so dass wir auch Behauptung (c) gezeigt haben.

Zum Beweis von Behauptung (d) verwenden wir zunächst das soeben gezeigte Additionstheorem und erhalten

$$e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy}.$$

Wegen

$$|e^z| = |e^x\, e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = e^x \cdot |e^{iy}|$$

folgt Behauptung (d), wenn wir zeigen können, dass e^{iy} für alle $y \in \mathbb{R}$ Betrag 1 hat. Aber für ein allgemeines $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} \overset{1.18\,(e)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}.$$

Ist speziell $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$, so gilt also

$$\overline{e^{iy}} = e^{\overline{iy}} = e^{-iy}$$

und

$$|e^{iy}|^2 = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^{iy-iy} = e^0 = 1,$$

so dass wir auch die letzte Aussage der Proposition bewiesen haben. □

Definition 2.44. *Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die komplexen* ***trigonometrischen Funktionen***[19] ***Kosinus*** *und* ***Sinus*** *durch:*

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{und} \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Proposition 2.45. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Es gelten die Reihenentwicklungen*

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad \text{und} \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots .$$

Insbesondere stimmen Sinus und Kosinus für reelle z mit den jeweils gleich benannten Funktionen aus der reellen Analysis überein.

(b) *Es gilt die* ***Euler'sche Formel***[20]

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Insbesondere gilt für alle $y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

(c) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$

(d) $\sin' z = \cos z$ *und* $\cos' z = -\sin z.$

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt nach Definition

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\left(i^n + (-i)^n\right).$$

Im Summanden gilt

$$i^n + (-i)^n = (1 + (-1)^n) i^n = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } n, \\ 2 \cdot (-1)^{n/2} & \text{für gerades } n, \end{cases}$$

[19] Der Begriff der trigonometrischen Funktionen wurde übrigens zum ersten Mal 1595 vom damaligen Heidelberger Oberhofprediger BARTOLOMÄUS PITISCUS (1561 - 1613) in seiner Arbeit *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* verwendet. (Quelle: Robert E. Krebs: Groundbreaking scientific experiments, inventions, and discoveries of the Middle Ages and the Renaissance. Greenwood Publishing Group, 2004)

[20] Leonhard Euler (1707 - 1783)

so dass die erste Teilbehauptung von (a) folgt. Die entsprechende Formel für $\sin z$ zeigt man analog.

Die Eulerformel (b) folgt durch Einsetzen der Definitionen von Sinus und Kosinus:

$$\cos z + i\,\sin z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = e^{iz}.$$

Als unmittelbare Folgerung sehen wir

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= (\cos z + i\,\sin z)\cdot(\cos z - i\,\sin z)\\ &\overset{\text{(a)}}{=} (\cos z + i\,\sin z)\cdot(\cos(-z) + i\,\sin(-z))\\ &\overset{\text{(b)}}{=} e^{iz}\cdot e^{-iz} = e^0 = 1\end{aligned}$$

und somit Behauptung (c).

Die Ableitung des Sinus berechnet sich als

$$\sin' z = \frac{i\,e^{iz} + i\,e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

und für die Ableitung des Kosinus verfährt man analog. Das beweist schließlich Behauptung (d). □

Bemerkung 2.46. *Setzen wir in die Eulerformel 2.45 (b) speziell $z = 2\pi$ ein, so erhalten wir*

$$e^{2\pi\,i} = \cos 2\pi + i\,\sin 2\pi = 1.$$

Mit dem Additionstheorem 2.43 (c) folgt $e^{z+2\pi\,i} = e^z$, so dass e^z periodisch mit Periode $2\pi\,i$ ist. Dieselbe Argumentation gilt natürlich für $z = 2\pi\,k$ mit einem beliebigen $k \in \mathbb{Z}$. Tatsächlich gilt sogar

$$e^z = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad z = 2\pi i k \text{ mit } k \in \mathbb{Z},$$

denn: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gegeben. Für $e^z = 1$ gilt insbesondere $e^x = |e^z| = 1$, was genau für $x = 0$ richtig ist. Es folgt also

$$1 = e^z = e^{iy} = \cos y + i\,\sin y,$$

so dass y ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein muss, was zu zeigen war. #

Die übrigen komplexen trigonometrischen Funktionen definiert man vermittels der nun bekannten Funktionen Sinus und Kosinus. So ist beispielsweise

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \cos z \neq 0.$$

2.5 Der komplexe Logarithmus

In der reellen Analysis hat die Exponentialfunktion eine Umkehrfunktion, den Logarithmus, die ebenfalls sehr wichtig ist. In Analogie hierzu definieren wir zunächst

Definition 2.47. *Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann heißt jede Lösung der Gleichung $e^z = w$ ein **(komplexer) Logarithmus** von w.* Ungenau *schreiben wir $z = \log w$.*

Wegen der in Bemerkung 2.46 nachgewiesenen Periodizität der komplexen Exponentialfunktion ist der komplexe Logarithmus zumeist nicht eindeutig:

Proposition 2.48. *Jedes $w \in \mathbb{C}^\times$ hat unendlich viele Logarithmen. Schreiben wir $w = |w| \cdot (\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ in Polarkoordinaten, so sind diese durch*

$$\log w = \log|w| + i\,\varphi + 2\pi i\,k \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

gegeben, wobei $\log|w|$ der gewöhnliche Logarithmus der positiven reellen Zahl $|w|$ ist.

Beweis. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ gilt mit dem Additionstheorem 2.43 (c)

$$e^{\log|w| + i\,\varphi + 2\pi\,i\,k} = e^{\log|w|}\,e^{i\,\varphi}\,e^{2\pi\,i\,k} = |w| \cdot (\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \cdot 1 = w.$$

Sei umgekehrt $e^z = w = |w| \cdot (\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$. Schreiben wir $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und nehmen Absolutbeträge, so erhalten wir $|e^z| = |w| = e^x$ und also $x = \log|w|$. Da andererseits

$$e^x \cdot (\cos y + i\,\sin y) = e^x\,e^{yi} = e^z = |w| \cdot (\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

gilt, folgt

$$\cos y + i\,\sin y = \cos\varphi + i\,\sin\varphi,$$

also

$$y = \varphi + 2\pi\,k \quad \text{mit einem } k \in \mathbb{Z}$$

und somit die Behauptung. □

Es liegt nun nahe, die Eindeutigkeit des Logarithmus durch geschickte Wahl eines Vertreters wieder herzustellen.

Definition 2.49. *Für $w \in \mathbb{C}^\times$ schreiben wir*

$$\operatorname{Log} w := \log|w| + i\,\operatorname{Arg} w. \quad \textit{mit } -\pi < \operatorname{Arg} w \leq \pi \textit{ dem Hauptwert des Arguments.}$$

Proposition 2.50. *Für die spezielle Wahl eines Logarithmus wie in Definition 2.49 gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Die Einschränkung* $\exp|_A$ *der komplexen Exponentialfunktion auf die Menge*

$$A := \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid -\pi < y \leq \pi\}$$

liefert eine Bijektion von A *auf* $\mathbb{C}^\times$*, deren Umkehrabbildung durch* $w \mapsto \operatorname{Log} w$ *gegeben ist.*

(b) *Die Funktion* $\operatorname{Log} w$ *ist unstetig in allen Punkten der negativen reellen Achse.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Injektivität der auf A eingeschränkten Exponentialfunktion. Sei dafür $e^z = e^{z'}$ mit $z, z' \in A$. Dann gilt $e^{z-z'} = 1$, also $z - z' \in 2\pi i\,\mathbb{Z}$. Das ist gleichbedeutend mit

$$x = x' \quad \text{und} \quad y - y' = 2\pi k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Da nach Voraussetzung $-\pi < y, y' \leq \pi$ gilt, folgt $z = z'$ und somit die Injektivität.

Es gilt aber auch Surjektivität von $\exp(z)|_A : A \to \mathbb{C}^\times$,

denn: Für $w \in \mathbb{C}^\times$ gibt es ein $y \in (-\pi, \pi]$ mit

$$w = |w| \cdot (\cos y + i \sin y).$$

Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist surjektiv, so dass es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|w| = e^x$ gibt. Mit der Euler'schen Formel 2.45 (b) folgt

$$w = e^x \cdot e^{yi} = e^{x+yi}.$$

Wir haben also mit $z := x + yi$ ein Urbild von w in A gefunden und somit die Surjektivität gezeigt. #

Nach Definition wird die Umkehrabbildung durch $w \mapsto \operatorname{Log} w$ gegeben, so dass Behauptung (a) gezeigt ist.

Es verbleibt Behauptung (b) zu zeigen, dass also $\operatorname{Log} w$ in allen Punkten der negativen reellen Achse unstetig ist. Das zeigen wir wie in Bemerkung 2.10, wo wir schon einen Spezialfall bewiesen haben. Seien also $x_0 \in \mathbb{R}_{<0}$ und $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\operatorname{Log}(x_0 + ti) = \log|x_0 + ti| + i \operatorname{Arg}(x_0 + ti)$$

und also

$$\lim_{t \searrow 0} \operatorname{Log}(x_0 + ti) = \log|x_0| + i \lim_{t \searrow 0} \operatorname{Arg}(x_0 + ti) = \log|x_0| + \pi i,$$
$$\lim_{t \nearrow 0} \operatorname{Log}(x_0 + ti) = \log|x_0| + i \lim_{t \nearrow 0} \operatorname{Arg}(x_0 + ti) = \log|x_0| - \pi i.$$

Daher kann $\operatorname{Log} w$ in $w = x_0$ nicht stetig sein, und Behauptung (b) ist gezeigt. □

Unter exp wird das Komplement der Geraden $y = \pi$ in A genau auf die längs der negativen reellen Achse geschlitzte $\mathbb{C}$-Ebene

$$\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus \{u \in \mathbb{R} \mid u \leq 0\}$$

abgebildet, denn $e^{x+\pi i} = e^x \cdot (-1) = -e^x$.

Satz 2.51. *Die Funktion* $\operatorname{Log} w$ *ist auf* $\mathbb{C}_-$ *holomorph. Es gilt*

$$\operatorname{Log}' w = \frac{1}{w} \quad \textit{für alle } w \in \mathbb{C}_-.$$

Beweis. Für $w_0 \in \mathbb{C}_-$ schreiben wir $\operatorname{Log} w_0 =: z_0 =: x_0 + y_0 i$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Nach Definition gilt dann $|y_0| < \pi$. Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir die Menge

$$K := \{z = x + yi \mid |y| \leq \pi,\ |x - x_0| \leq \log 2,\ |z - z_0| \geq \varepsilon\}.$$

Diese ist als Durchschnitt dreier abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen und für hinreichend kleines ε auch nichtleer. Da K offensichtlich beschränkt ist, ist es nach dem Satz von Heine-Borel sogar kompakt. Daher nimmt die stetige reellwertige Funktion $z \mapsto |e^z - e^{z_0}|$ auf K ihr Minimum m an. Es ist hierbei $m > 0$,

denn: Wäre $m = 0$, so gäbe es in K ein z mit $|e^z - e^{z_0}| = 0$. Wie im Beweis der Injektivität in Proposition 2.50 und mit $|y_0| < \pi$ folgte dann $z = z_0$. Andererseits gälte $|z - z_0| \geq \varepsilon > 0$ wegen $z \in K$, was offensichtlich nicht beides sein kann. Also ist $m > 0$. #

Wir zeigen nun die Stetigkeit von $\operatorname{Log} w$ in w_0: Sei $\delta := \min\{m, \frac{e^{x_0}}{2}\} > 0$, und sei $w \in \mathbb{C}_-$ mit $|w - w_0| < \delta$. Dann folgt $|\operatorname{Log} w - \operatorname{Log} w_0| < \varepsilon$,

denn: Sei $z = \operatorname{Log} w$. Angenommen, es gälte $|z - z_0| = |\operatorname{Log} w - \operatorname{Log} w_0| \geq \varepsilon$. Wir wollen zeigen, dass dann $z \in K$ folgte. Dies stünde wegen $|w - w_0| = |e^z - e^{z_0}| \geq m \geq \delta$ im Widerspruch zur Voraussetzung $|w - w_0| < \delta$. Um $z \in K$ zu zeigen, genügt es $|x - x_0| \leq \log 2$ zu zeigen, da die Bedingung $|y| \leq \pi$ für $w \in \mathbb{C}_-$ automatisch erfüllt ist. Wir müssen also $x_0 - \log 2 \leq x \leq x_0 + \log 2$ zeigen.

Fall 1: $x > x_0 + \log 2$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}e^{x_0} &\geq \delta && > |w - w_0| && = |e^z - e^{z_0}| \\
&\geq \big||e^z| - |e^{z_0}|\big| && = |e^x - e^{x_0}| && \geq e^x - e^{x_0} \\
&> e^{x_0 + \log 2} - e^{x_0} && = 2e^{x_0} - e^{x_0} && = e^{x_0},
\end{aligned}$$

was nicht sein kann.

Fall 2: $x < x_0 - \log 2$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}e^{x_0} &\geq \delta && > |w - w_0| && = |e^z - e^{z_0}| \\
&= |e^{z_0} - e^z| && \geq \big||e^{z_0}| - |e^z|\big| && = |e^{x_0} - e^x| \\
&\geq e^{x_0} - e^x && > e^{x_0} - e^{x_0 - \log 2} && = e^{x_0} - \tfrac{1}{2}e^{x_0} \\
&= \tfrac{1}{2}e^{x_0},
\end{aligned}$$

was nicht sein kann. #

Schließlich zeigen wir, dass $\operatorname{Log} w$ in w_0 komplex differenzierbar ist, und dass $\operatorname{Log}' w_0 = \frac{1}{w_0}$ gilt. Sei dafür $(w_n)_{n \geq 1}$ eine Folge mit $w_n \in \mathbb{C}_- \setminus \{w_0\}$ und $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0$. Sei $z_n := \operatorname{Log} w_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Wegen der Stetigkeit von Log folgt dann also $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und somit

$$\frac{1}{w_0} = \frac{1}{e^{z_0}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{e^{z_n} - e^{z_0}}{z_n - z_0}}, \qquad ((e^z)'(z_0) = e^{z_0})$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{e^{z_n}-e^{z_0}}{z_n-z_0}} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_0}{e^{z_n} - e^{z_0}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log} w_n - \operatorname{Log} w_0}{w_n - w_0}.
\end{aligned}
$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Definition 2.52. *Die holomorphe Funktion* $\operatorname{Log} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ *heißt der* ***Hauptzweig*** *des (komplexen) Logarithmus.*

2.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. *Sei* $U \subseteq \mathbb{C}$ *offen, und sei* $f : U \to \mathbb{C}$ *gegeben als*

$$f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \text{mit } u = \operatorname{Re}(f), v = \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{C}^1(U).$$

Seien weiter

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Zeigen Sie dann die folgenden Aussagen.

(a) $\left(\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\right) \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0.$

(b) $u, v \in \mathcal{C}^2(U) \implies 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} f = \Delta f := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f.$

(c) $\big(u, v \in \mathcal{C}^2(U) \quad \text{und} \quad f \text{ holomorph}\big) \implies \Delta u = \Delta v = 0.$

Bemerkung. *Eine zweimal (reell) stetig differenzierbare Funktion* $h : U \to \mathbb{R}$ *mit* $\Delta h = 0$ *heißt auch* ***harmonische Funktion****. Wie wir in Satz 3.31 sehen werden, folgt aus der Holomorphie von* f *automatisch* $u, v \in \mathcal{C}^\infty(U)$*. Nach Teil (c) sind also Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen stets harmonisch.*

Aufgabe 2.2. *Kurz nachdem der kostbare Schatz geborgen und sicher an Bord verstaut worden war, stachen die Erben Käpt'n Schwartbarts in See. Beim Durchqueren der Cauchy-Riemann-See geriet das Schiff in verhextes Gewässer. Der oberste Maat notierte dieser Tage in sein Logbuch:*

> *8. Mai 1663. Es herrscht absolute Windstille. Unser Schiff ist vollkommen den merkwürdigen Strömungen ausgesetzt, die dieses Meeresgebiet durchziehen. In dieser Lage bleibt uns nichts anderes übrig, als die Änderung der Strömungsgeschwindigkeiten bei Blick nach Osten und Norden je entlang der Blickrichtung und senkrecht dazu zu beobachten. Seit Tagen ergibt sich dabei stets unverändert das selbe Bild: Blickt man nach Osten, so ändert sich die Strömungsgeschwindigkeit in Blickrichtung in gleicher Weise, wie sie sich bei Blick nach Norden in Blickrichtung ändert. Andererseits gleicht die Änderung der Strömungsgeschwindigkeit in Richtung Norden bei Blick nach Osten dem negativen Wert derer in Richtung Osten bei Blick nach Norden. Darüber hinaus haben wir in unserer Umgebung betragsmäßig stets unverändert die gleiche Strömungsgeschwindigkeit gemessen.*

Trotz des unnatürlichen Wellengangs während der Reise erreichten die Erben schließlich doch noch den sicheren Heimathafen. Welche Route hatte ihr Schiff genommen, wenn es beim Eintreten in das mysteriöse Gewässer nach Osten gesegelt war?

Aufgabe 2.3. *Für zwei komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definieren wir rekursiv eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ durch*

$$\begin{aligned} g_0 &= b, \\ g_1 &= a + b, \\ g_{n+2} &= g_{n+1} + g_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

(a) *Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ in Abhängigkeit von a und b. Was ist der größte Konvergenzradius, der auftreten kann?*

(b) *Zeigen Sie, dass es von a und b abhängige Polynome $r(z)$ und $s(z)$ gibt mit*

$$p(z) = \frac{r(z)}{s(z)} \quad \text{für alle } z \text{ im Inneren des Konvergenzgebiets von } p.$$

Bemerkung. *Für $a = 1$ und $b = 0$ ergibt sich die Folge*

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

*der **Fibonacci-Zahlen**,[21] die im Folgenden mit $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ bezeichnet werden soll. Explizit lassen sich ihre Glieder angeben durch*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n),$$

wobei $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\alpha}$ die beiden Nullstellen des Polynoms $X^2 - X - 1 \in \mathbb{C}[X]$ bezeichnen.

Aufgabe 2.4. *Verifizieren Sie die folgenden Funktionswerte der Exponentialfunktion.*

$$e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{\pm\pi i}{2}} = \pm i \quad \text{und} \quad e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Aufgabe 2.5. *Sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{mit } a_n \in \mathbb{C}^\times \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r und Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \leq r \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

gilt. Hieraus folgt offensichtlich $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = r$, falls der Grenzwert existiert.

[21] Leonardo da Pisa, genannt Fibonacci (ca. 1170 - ca. 1240)

Aufgabe 2.6. *In dieser Aufgabe soll untersucht werden, in wieweit die bekannten Rechenregeln des reellen Logarithmus und die reellen Potenzrechenregeln ins Komplexe übertragen werden können. Zunächst untersuchen wir das Additionstheorem des Logarithmus.*

(a) *Zeigen Sie, dass für je zwei Punkte $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die folgende Äquivalenz gilt.*

$$\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w) \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w) \in (-\pi, \pi]$$

Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{C}$ setzen wir nun $w^a := e^{a \operatorname{Log}(w)}$ und untersuchen die bekannten Potenzrechenregeln. Zeigen Sie also die folgenden Aussagen.

(b) *Es gilt $w^{a+b} = w^a w^b$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.*

(c) *Für $w, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt im Allgmeinen nicht $w^a z^a = (wz)^a$ oder $(w^a)^b = w^{ab}$. Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an.*

(d) *Gilt in (c) zusätzlich $\operatorname{Re}(w), \operatorname{Re}(z) > 0$, dann gilt $w^a z^a = (wz)^a$.*

(e) *Die Abbildung $f : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^s$ ist für alle $s \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, und es gilt $f'(z) = sz^{s-1}$.*

KAPITEL 3

Komplexe Integrationstheorie

3.1 Komplexe Kurvenintegrale

In der reellen Analysis definiert man: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so bedeutet dies in den Randpunkten a und b, dass die einseitigen Limites

$$f'(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{und} \quad f'(b) = \lim_{x \nearrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

existieren.

Definition 3.1. *Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall, und sei $\gamma = \gamma_1 + i\,\gamma_2 : I \to \mathbb{C}$ mit reellwertigen Abbildungen γ_1, γ_2. Genau dann heißt γ* ***stetig*** *bzw.* ***differenzierbar*** *bzw.* ***stetig differenzierbar****, falls die entsprechenden Aussagen für γ_1 und γ_2 gelten. Ist γ differenzierbar, so setzt man $\gamma' := \gamma_1' + i\,\gamma_2'$.*

Lemma 3.2. *Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Summen und Produkte differenzierbarer komplexwertiger Funktionen auf I sind wieder differenzierbar, und es gelten die üblichen Rechenregeln.*

(b) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ auf D holomorph. Sei $\delta : I \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Abbildung mit $\delta(I) \subseteq D$. Dann ist auch*

$$\gamma : \begin{cases} I & \to \mathbb{C}, \\ t & \mapsto f(\delta(t)) \end{cases}$$

differenzierbar und hat die Ableitung

$$\gamma'(t) = f'\big(\delta(t)\big) \cdot \delta'(t).$$

Beweis. Behauptung (a) ist klar.

Wir zeigen nun Behauptung (b) und schreiben dafür $f = u + i\,v$ und $\delta = \delta_1 + i\,\delta_2$ mit reellwertigen Funktionen u, v und δ_1, δ_2. Dann gilt

$$\gamma(t) = u\big(\delta_1(t), \delta_2(t)\big) + i\,v\big(\delta_1(t), \delta_2(t)\big).$$

Nach der Kettenregel aus der reellen Analysis und den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen 2.21 ist $\gamma(t)$ differenzierbar und hat die Ableitung

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= \frac{\partial u}{\partial x}\big(\delta_1(t), \delta_2(t)\big) \cdot \delta_1'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\big(\delta_1(t), \delta_2(t)\big) \cdot \delta_2'(t) \\
&\quad + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\big(\delta_1(t), \delta_2(t)\big) \cdot \delta_1'(t) + \frac{\partial v}{\partial y}\big(\delta_1(t), \delta_2(t)\big) \cdot \delta_2'(t) \right) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\big(\delta_1(t), \delta_2(t)\big) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\big(\delta_1(t), \delta_2(t)\big) \right) \big(\delta_1'(t) + i\,\delta_2'(t)\big) \\
&\overset{2.23}{=} f'\big(\delta(t)\big) \cdot \delta'(t).
\end{aligned}$$

□

Definition 3.3. *Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall, und sei $\gamma = \gamma_1 + i\,\gamma_2 : I \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung mit reellwertigen γ_1, γ_2. Dann sind Integrale über die Abbildung γ definiert durch*

$$\int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b \gamma_1(t)\,\mathrm{d}t + i \int_a^b \gamma_2(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{und} \quad \int_b^a \gamma(t)\,\mathrm{d}t := -\int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t.$$

Lemma 3.4. *Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall und seien $\gamma, \delta : I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) $\displaystyle\int_a^b \big(c\,\gamma(t) + \delta(t)\big)\,\mathrm{d}t = c \int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \delta(t)\,\mathrm{d}t$ *für alle $c \in \mathbb{C}$.*

(b) *Die Abbildung $t \mapsto \int_a^t \gamma(x)\,\mathrm{d}x$ ist auf I differenzierbar und hat die Ableitung*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t \gamma(x)\,\mathrm{d}x \right) = \gamma(t).$$

(c) *Ist $\gamma : I \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so gilt $\displaystyle\int_a^b \gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \gamma(b) - \gamma(a)$.*

Beweis. Behauptung (a) ist klar. Die Behauptungen (b) und (c) folgen sofort aus Definition 3.3 und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der reellen Analysis. □

Proposition 3.5. *Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall, und sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt*

$$|\int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t| \leq \int_a^b |\gamma(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Offenbar stehen auf beiden Seiten der Behauptung nicht-negative Zahlen, so dass wir nichts zeigen müssen, wenn die linke Seite Null ist. Wir dürfen deshalb ohne Einschränkung annehmen, die linke Seite sei echt positiv. Dann gibt es eine Polarkoordinatendarstellung

$$\int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t = r\,e^{i\,\varphi} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ und } \varphi \in \mathbb{R}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} r = e^{-i\,\varphi} \int_a^b \gamma(t)\,\mathrm{d}t &\overset{3.4\,(a)}{=} \int_a^b e^{-i\,\varphi}\,\gamma(t)\,\mathrm{d}t \\ &\overset{3.3}{=} \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\,\varphi}\,\gamma(t)\right)\mathrm{d}t + i \int_a^b \mathrm{Im}\left(e^{-i\,\varphi}\,\gamma(t)\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Wir können auf beiden Seiten der Gleichung den Realteil betrachten und erhalten so

$$r = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\,\varphi}\,\gamma(t)\right)\mathrm{d}t \overset{(1.1)}{\leq} \int_a^b |e^{-i\,\varphi}\,\gamma(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Mit $|e^{i\,\varphi}| = 1$ und der Multiplikativität des Absolutbetrags folgt die Behauptung. □

Definition 3.6. *Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall und sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sagen wir:*

- *γ ist eine* ***(stetige) Kurve*** *mit* ***Anfangspunkt*** *$\gamma(a)$ und* ***Endpunkt*** *$\gamma(b)$.*
- *γ* ***verläuft*** *in $D \subseteq \mathbb{C}$ $\quad :\Longleftrightarrow \quad \gamma(I) \subseteq D$.*
- *γ ist* ***geschlossen*** $\quad :\Longleftrightarrow \quad \gamma(a) = \gamma(b)$.

Weiter ist durch

$$\gamma^-(t) := \gamma(a + b - t) \quad \text{für alle } t \in I$$

eine weitere Kurve γ^- gegeben, die dieselbe Punktemenge wie γ durchläuft, aber in umgekehrter Richtung, also von $\gamma(b)$ nach $\gamma(a)$.

Beispiel 3.7. (a) *Für feste Punkte $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$ ist die Verbindungsstrecke von z_1 nach z_2 durch*

$$\gamma(t) = (1-t)z_1 + t\,z_2 \quad \text{mit } t \in [0,1]$$

gegeben.

(b) *Für feste $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die genau einmal im Gegenuhrzeigersinn duchlaufene Kreislinie um z_0 vom Radius r durch*

$$\gamma(t) = z_0 + r\,e^{2\pi i t} \quad \text{mit } t \in [0,1]$$

gegeben.[22]

Definition 3.8. *Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ ein abgeschlossenes Intervall, und sei $\gamma : I \to \mathbb{C}$ eine Kurve.*

(a) *Die Kurve γ heißt **glatt**, wenn γ stetig differenzierbar ist.*

(b) *Sei $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ eine Unterteilung von I in Teilintervalle. Sei weiter für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Kurve γ_k auf $t \in [a_{k-1}, a_k]$ gegeben, so dass für alle $1 \leq k < n$ die Bedingung*

$$\gamma_k(a_k) = \gamma_{k+1}(a_k)$$

erfüllt ist, dass also der Endpunkt von γ_k gleich dem Anfangspunkt von γ_{k+1} ist. Gilt dann

$$\gamma(t) = \gamma_k(t) \quad \text{für alle } t \in [a_{k-1}, a_k],$$

*so schreiben wir $\gamma = \gamma_1 \star \gamma_2 \star \ldots \star \gamma_n$. Sind hierbei alle γ_k glatt, so heißt γ **stückweise glatt**.*

Definition 3.9. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Seien weiter $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall und $\gamma : I \to D$ eine glatte Kurve. Dann definieren wir das **komplexe Kurvenintegral** von f über γ als*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ist allgemeiner $\gamma = \gamma_1 \star \gamma_2 \star \ldots \star \gamma_n$ stückweise glatt, so setzen wir

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Proposition 3.10. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Sei weiter $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall, und sei $\gamma : I \to D$ eine glatte*[23] *Kurve. Dann hat das komplexe Kurvenintegral von f über γ die folgenden Eigenschaften:*

---

[22] Durch diese Parametrisierung der Kreislinie motiviert sagt man in diesem Fall auch, die Kreislinie werde im ***(mathematisch) positiven Sinn*** durchlaufen, und umgekehrt, im ***(mathematisch) negativen Sinn***, wenn die Kreislinie im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

[23] In Übungsaufgabe 3.1 zeigen wir, dass dieselben Aussagen ebenso für stückweise glatte Kurven gelten.

(a) *Das Kurvenintegral ist in der Weise invariant unter stetig differenzierbarer Parametertransformation* $T\colon [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a, b]$ *mit* $\tilde{a} < \tilde{b}$, $T(\tilde{a}) = a$ *und* $T(\tilde{b}) = b$, *dass*

$$\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\delta(x)\big)\,\delta'(x)\,\mathrm{d}x$$

gilt, wobei $\delta := \gamma \circ T\colon [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{C}$ *ist. Insbesondere ist*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma\circ T} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(b) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$

Beweis. Mit der Substitutionsregel aus der reellen Analysis gilt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{T(\tilde{a})}^{T(\tilde{b})} f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\gamma(T(x))\big)\,\gamma'\big(T(x)\big)\,T'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\delta(x)\big)\,\delta'(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Behauptung (a) folgt.

Wir wollen nun Behauptung (b) zeigen. Nach Definition wird γ^- auf $[a, b]$ durch $\gamma(a + b - t)$ gegeben und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^-} f(z)\,\mathrm{d}z &= -\int_a^b f\big(\gamma(a+b-t)\big)\gamma'(a+b-t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{t\mapsto a+b-t}{=} \int_b^a f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Behauptung (b) folgt. $\square$

Proposition 3.11. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f, g : D \to \mathbb{C}$ stetige Abbildungen. Seien weiter $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall und $\gamma : I \to D$ eine stückweise glatte Kurve. In Analogie zu Teil (a) von Lemma 3.4 gilt dann*

$$\int_\gamma \big(c\, f(z) + g(z)\big)\, \mathrm{d}z = c \cdot \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\, \mathrm{d}z \quad \textit{für alle } c \in \mathbb{C},$$

das komplexe Kurvenintegral ist also ***linear****.*

Beweis. Klar. □

Definition 3.12. *Sei in der Notation von Definition 3.8 eine stückweise glatte Kurve $\gamma = \gamma_1 \star \ldots \star \gamma_n$ gegeben, wobei für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ die Kurve γ_k auf $[a_{k-1}, a_k]$ gegeben ist. Dann heißt*

$$\ell(\gamma) := \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |\gamma_k'(t)|\, \mathrm{d}t$$

die ***Bogenlänge*** *von γ.*

Bemerkung 3.13. *Wird γ einfach durchlaufen, sind also für alle k die Abbildungen γ_k auf den jeweiligen Intervallen $[a_k, a_{k+1}]$ injektiv, so ist $\ell(\gamma)$ die im anschaulichen Sinne gegebene Länge des Bildes von γ. Besonders gut lässt sich dies einsehen, wenn $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ durch $t \mapsto t + iy(t)$ mit einer reell stetig differenzierbaren Abbildung y gegeben ist. Dann gilt*

$$|\gamma'(t)| = |1 + i\, y'(t)| = \sqrt{1 + y'^2(t)}.$$

Andererseits können wir das Bild von γ durch einen Polygonzug approximieren und die Länge mithilfe Riemann'scher Summen berechnen.

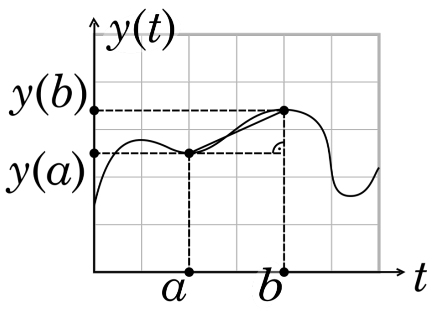


Abbildung 3.1: Die Länge des Geradenstücks zwischen den zwei ausgewählten Punkten ist $\sqrt{(b-a)^2 + (y(b) - y(a))^2} = (b-a) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y(b)-y(a)}{b-a}\right)^2}$.

Beispiel 3.14. *Wir betrachten die Kurven aus Beispiel 3.7:*

(a) *Seien $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{C}$. Ihre Verbindungsstrecke $\gamma(t) = (1-t)z_1 + t\,z_2$ mit $t \in [0,1]$ hat dann erwartungsgemäß die Bogenlänge*

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |-z_1 + z_2|\,\mathrm{d}t = |z_1 - z_2|.$$

(b) *Sei k eine natürliche Zahl, und sei γ die k-fach im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Einheitskreislinie. Dann ist γ gegeben durch $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ für $t \in [0,k]$ und die Bogenlänge ist*

$$\ell(\gamma) = \int_0^k |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^k |2\pi\, i\, e^{2\pi i t}|\,\mathrm{d}t = 2\pi \int_0^k \mathrm{d}t = 2\pi\, k.$$

Lemma 3.15 (Standardabschätzung für Kurvenintegrale)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve, die ganz in D enthalten ist. Ist f auf γ betragsmäßig durch ein $M \in \mathbb{R}_{>0}$ beschränkt, so gilt*

$$|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z| \leq M \cdot \ell(\gamma).$$

Beweis. Mit den üblichen Notationen gilt

$$\begin{aligned}
|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z| &= |\sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z| \\
&\leq \sum_{k=1}^n |\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z| = \sum_{k=1}^n |\int_{a_{k-1}}^{a_k} f\big(\gamma_k(t)\big)\,\gamma_k'(t)\,\mathrm{d}t| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f\big(\gamma_k(t)\big)\,\gamma_k'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq M \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}}^{a_k} |\gamma_k'(t)|\,\mathrm{d}t = M \cdot \ell(\gamma).
\end{aligned}$$

□

Natürlich ist es nicht schlecht, Integrale abschätzen zu können. Ungleich besser ist aber natürlich eine Methode zu ihrer exakten Berechnung. Aus der reellen Analysis wissen wir, dass hierzu die Existenz einer Stammfunktion von großem Nutzen wäre.

Satz 3.16. *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Wir setzen voraus, dass f auf D eine* ***(holomorphe) Stammfunktion*** *hat, dass es also eine holomorphe Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ gibt mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$. Sei weiter γ eine ganz in D enthaltene stückweise glatte Kurve mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1).$$

Beweis. Sei zunächst $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ glatt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{3.2\,(b)}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} F\big(\gamma(t)\big)\,\mathrm{d}t \overset{3.4\,(c)}{=} F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big) \\
&= F(z_2) - F(z_1).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ist $\gamma = \gamma_1 \star \ldots \star \gamma_n$ stückweise glatt, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&\overset{(3.1)}{=} \sum_{k=1}^n \Big(F\big(\gamma_k(a_k)\big) - F\big(\gamma_k(a_{k-1})\big)\Big) \\
&= -F\big(\gamma_1(a_0)\big) + F\big(\gamma_n(a_n)\big) \\
&= F(z_2) - F(z_1).
\end{aligned}$$

□

Aus dem Satz folgt sofort

Korollar 3.17. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.16 gilt für alle geschlossenen stückweise glatten Kurven γ*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beispiel 3.18. *Dieses Korollar hat einen sehr wichtigen Spezialfall: Sei dafür $r \in \mathbb{R}_{>0}$ fest und γ die einfach im mathematisch positiven Sinne durchlaufene Kreislinie um $z_0 = 0$ mit Radius r. Dann gilt*

$$\int_\gamma z^n\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \\ 2\pi i & n = -1, \end{cases}$$

denn: Für $n \neq -1$ ist $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion von z^n auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Da die Kurve γ nach Konstruktion geschlossen ist, erhalten wir $\int_\gamma z^n\,\mathrm{d}z = 0$ nach Korollar 3.17.

Andererseits gilt mit $\gamma(t) = r\,e^{2\pi i t}$ für $t \in [0,1]$

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \frac{1}{r\,e^{2\pi i t}} \left(2\pi i r\,e^{2\pi i t}\right) \mathrm{d}t = 2\pi i.$$

Insbesondere hat nach Korollar 3.17 die Funktion $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{C}^\times$ keine Stammfunktion – nach Satz 2.51 hat sie allerdings mit $\operatorname{Log} z$ eine Stammfunktion auf der Teilmenge $\mathbb{C}_- \subseteq \mathbb{C}^\times$. #

3.2 Der Cauchy'sche Integralsatz

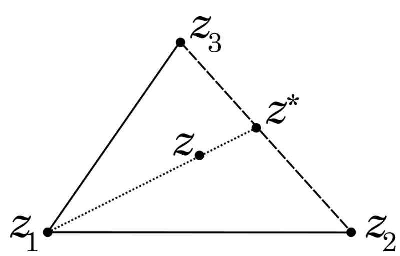
In diesem Abschnitt wollen wir in Ausweitung von Korollar 3.17 zeigen, dass das komplexe Kurvenintegral einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ längs geschlossener „Dreieckswege“ immer Null ist. Hieraus wird sich ergeben, dass jede holomorphe Funktion auf einem „Sterngebiet“ dort immer eine Stammfunktion hat. Dies ist eine Schlüsselaussage der Funktionentheorie, aus der sich viele zentrale Sätze ableiten lassen.

Definition 3.19. *Die von $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ aufgespannte* ***abgeschlossene Dreiecksfläche***[24]

$$\{z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \mid t_1, t_2, t_3 \geq 0,\ t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$$

bezeichnen wir mit $\triangle(z_1, z_2, z_3)$.

Das ist die Beschreibung der Dreiecksfläche mit ***baryzentrischen Koordinaten***. Anschaulich besteht $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ aus genau den Punkten z, die auf den Verbindungsstrecken von z_1 nach z^* liegen, wobei z^* alle Punkte auf der Verbindungsstrecke von z_2 und z_3 durchläuft:



Ist z^* ein Punkt auf der Verbindungsstrecke von z_2 und z_3 und ist z ein Punkt auf der Verbindungsstrecke von z_1 und z^*, so gelten

$$\begin{aligned} z &= t_1 z_1 + t^* z^* && \text{mit } t_1 + t^* = 1, \\ z^* &= \tilde{t}_2 z_2 + \tilde{t}_3 z_3 && \text{mit } \tilde{t}_2 + \tilde{t}_3 = 1. \end{aligned}$$

Setzen wir $t_2 := t^* \tilde{t}_2$ und $t_3 := t^* \tilde{t}_3$, so haben wir offensichtlich eine Darstellung von z als Punkt von $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ gefunden. Die umgekehrte Inklusion zeigt man analog.

Definition 3.20. *Für $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir mit γ_{z_1,z_2,z_3} die durch*

$$\gamma_{z_1,z_2,z_3}(t) := \begin{cases} z_1 + t(z_2 - z_1) & \textit{für } t \in [0,1], \\ z_2 + (t-1)(z_3 - z_2) & \textit{für } t \in [1,2], \\ z_3 + (t-2)(z_1 - z_3) & \textit{für } t \in [2,3] \end{cases}$$

gegebene geschlossene, stückweise glatte Kurve. Anschaulich beschreibt γ_{z_1,z_2,z_3} den genau einmal durchlaufene Rand der abgeschlossenen Dreiecksfläche $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ aus Definition 3.19, angefangen bei z_1, dann weiter nach z_2, und über z_3 zurück nach z_1.

[24] Sind $z_1 - z_2, z_1 - z_3$ nicht linear unabhängig über $\mathbb{R}$, entartet diese zu einem Punkt oder einer Strecke.

Satz 3.21 (Lemma von Goursat[25]). *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien weiter $z_1, z_2, z_3 \in D$ so gewählt, dass die abgeschlossene Dreiecksfläche $\triangle(z_1, z_2, z_3)$ ganz in D enthalten ist. Dann gilt:*

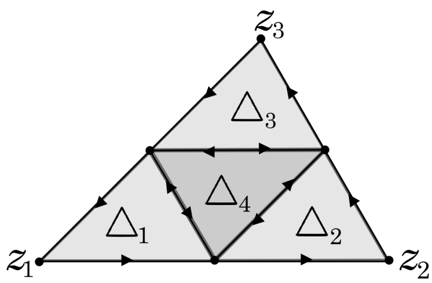
$$\int\limits_{\gamma_{z_1,z_2,z_3}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis. Wir schreiben verkürzend $\triangle := \triangle(z_1, z_2, z_3)$ und $\gamma := \gamma_{z_1,z_2,z_3}$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Kurve γ im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird, und ersetzen sonst γ durch γ^{-1}. Weiter können wir annehmen, dass $\triangle$ nicht entartet ist, dass also z_1, z_2 und z_3 nicht auf einer Geraden liegen,

denn: Sind zwei Eckpunkte gleich, etwa $z_1 = z_2$, so wird nach Definition 3.9 und Teil (a) von Proposition 3.10 zunächst von z_1 nach $z_2 = z_1$ integriert, dann von $z_1 = z_2$ nach z_3 und schließlich von z_3 zurück nach $z_1 = z_2$. Nach Teil (b) von Proposition 3.10 ist also das Integral Null.

Sind andererseits die drei Eckpunkte paarweise verschieden, liegen aber trotzdem alle drei auf einer gemeinsamen Geraden, so können wir ohne Einschränkung annehmen, z_3 liege auf der Verbindungsstrecke $\overline{z_1 z_2}$. Integriert wird nun in analoger Argumentation zunächst von z_1 nach z_2 und dann über z_3 zurück nach z_1 und das Gesamtintegral ist wieder Null. #

Wir verbinden nun die Mittelpunkte der Kanten von $\triangle$ und erhalten so vier abgeschlossene Dreiecksflächen $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4 \subseteq \triangle$ mit ihren jeweiligen, mathematisch positiv einfach durchlaufenen Randkurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_4$.



Da sich nach Teil (b) von Proposition 3.10 die Integrale in entgegengesetzten Richtungen längs der Kanten von $\triangle_4$ aufheben, erhalten wir so

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Mit der Dreiecksungleichung 1.7 (c) folgt

$$|\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z| \leq |\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z| + \ldots + |\int\limits_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z|.$$

[25]Édouard Goursat (1858 - 1936)

Es gibt unter den vier nichtnegativen reellen Zahlen auf der rechten Seite eine mit maximalem Betrag. Wir wählen eine solche aus und bezeichnen die zugehörige abgeschlossene Dreiecksfläche samt Randkurve mit $\triangle^{(1)}$ bzw. $\gamma^{(1)}$. Es folgt

$$|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z| \le 4 \cdot |\int_{\gamma^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z|.$$

Wir verfahren jetzt mit $\triangle^{(1)}$ wie zuvor mit $\triangle$ und erhalten eine abgeschlossene Dreiecksfläche $\triangle^{(2)} \subseteq \triangle^{(1)}$ mit positiv orientierter Randkurve $\gamma^{(2)}$ und

$$|\int_{\gamma^{(1)}} f(z)\,\mathrm{d}z| \le 4 \cdot |\int_{\gamma^{(2)}} f(z)\,\mathrm{d}z|.$$

Fahren wir induktiv fort, so erhalten wir mit $\triangle^{(0)} := \triangle$ und $\gamma^{(0)} := \gamma$ eine Folge $(\triangle^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ abgeschlossener Dreiecksflächen mit positiv orientierten Randkurven $(\gamma^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$, die für alle $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ die Aussagen

$$\triangle^{(n+1)} \subseteq \triangle^{(n)} \quad \text{und} \quad |\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z| \le 4^n \cdot |\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z|$$

erfüllen. Nach Konstruktion ist die Folge $(\triangle^{(n)})_{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}}$ geschachtelt. In Verallgemeinerung des aus der reellen Analysis bekannten Intervallschachtelungsprinzips der reellen Zahlen ist daher der Durchschnitt $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}} \triangle^{(n)}$ nichtleer. Es gibt also einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein $N = N(\delta) \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ gibt mit

$$\triangle^{(n)} \subseteq U_\delta(z_0) \quad \text{für alle } n \ge N.$$

Wegen $z_0 \in \triangle \subseteq D$ ist f in z_0 komplex differenzierbar, es gibt also nach Lemma 2.15 eine in z_0 stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\varphi(z) \quad \text{und} \quad \varphi(z_0) = f'(z_0).$$

Wir benutzen jetzt die Stetigkeit von φ in z_0. Sei dafür $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|\varphi(z) - f'(z_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in U_\delta(z_0).$$

Für hinreichend großes n gilt $\triangle^{(n)} \subseteq U_\delta(z_0)$. Schreiben wir

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (\varphi(z) - f'(z_0))(z - z_0)$$

und integrieren über $\gamma^{(n)}$, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{\gamma^{(n)}} f(z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{(n)}} f'(z_0)(z - z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{(n)}} \big(\varphi(z) - f'(z_0)\big)(z - z_0)\,\mathrm{d}z \\
&= f(z_0) \int_{\gamma^{(n)}} dz + f'(z_0) \int_{\gamma^{(n)}} (z - z_0)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma^{(n)}} \big(\varphi(z) - f'(z_0)\big)(z - z_0)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Die Integranden der ersten beiden Integrale sind Polynome in z und besitzen daher eine holomorphe Stammfunktion auf ganz $\mathbb{C}$. Nach Korollar 3.17 verschwinden diese Integrale also und es folgt

$$\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma^{(n)}} \big(\varphi(z) - f'(z_0)\big)(z - z_0)\,\mathrm{d}z.$$

Wegen $\operatorname{Bild}(\gamma^{(n)}) \subseteq \triangle^{(n)} \subseteq U_\delta(z_0)$ gilt für alle $z \in \operatorname{Bild}(\gamma^{(n)})$ die Abschätzung $|\varphi(z) - f'(z_0)| < \varepsilon$. Für $z \in \operatorname{Bild}(\gamma^{(n)})$ gilt zudem elementargeometrisch $|z - z_0| \leq \ell(\gamma^{(n)})$, denn es war ja $z_0 \in \triangle^{(n)}$ vorausgesetzt. Mit der Standardabschätzung 3.15 für Kurvenintegrale folgt daher

$$\Big|\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq \varepsilon \cdot \ell(\gamma^{(n)})^2.$$

Andererseits gilt nach Konstruktion $\ell(\gamma^{(n+1)}) = \frac{1}{2}\,\ell(\gamma^{(n)})$ und induktiv $\ell(\gamma^{(n)}) = \frac{1}{2^n}\,\ell(\gamma)$, also

$$\Big|\int_{\gamma^{(n)}} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq \frac{\varepsilon}{4^n}\,\ell(\gamma)^2.$$

Zusammengesetzt gilt somit für alle $\varepsilon > 0$

$$\Big|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq 4^n\,\frac{\varepsilon}{4^n}\,\ell(\gamma)^2 = \varepsilon\,\ell(\gamma)^2.$$

Der Satz folgt, wenn wir ε gegen Null gehen lassen. □

Definition 3.22. *Eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt* ***Sterngebiet****, falls es einen Punkt $z_* \in D$ gibt, für den mit jedem $z \in D$ auch die Verbindungsstrecke $\overline{z_* z}$ von z_* nach z ganz in D enthalten ist. Ein solcher (nicht notwendig eindeutig bestimmter) Punkt z_* heißt ein* ***Sternmittelpunkt*** *von D.*

Beispiel 3.23. (a) *Offensichtlich sind offene, konvexe Teilmengen von $\mathbb{C}$ Sterngebiete; hier sind alle (und somit unendlich viele) Punkte Sternmittelpunkte. Besonders wichtige Beispiele dieses Typs sind $\mathbb{C}$ selbst und offene Kreisscheiben in $\mathbb{C}$.*

(b) *Wegen des komplexen Logarithmus ist natürlich auch die geschlitzte komplexe Ebene $\mathbb{C}_-$ von Interesse. Hier sind alle Punkte auf der positiven reellen Achse Sternmittelpunkte.*

(c) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *und* $U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ *sind keine Sterngebiete.*

Bemerkung 3.24. *Nach Definition 3.22 sind Sterngebiete wegzusammenhängend, nach einem Standardresultat aus der mengentheoretischen Topologie also auch zusammenhängend und somit Gebiete im Sinne von Definition 2.24.*

Satz 3.25 (Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *f hat auf D eine holomorphe Stammfunktion.*

(b) *Ist γ eine stückweise glatte Kurve in D, so hängt das Integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ nur vom Anfangspunkt und vom Endpunkt von γ ab.*

(c) *Ist γ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in D, so ist $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

Beweis. Die Behauptungen (b) und (c) folgen unmittelbar aus Behauptung (a), wenn wir Satz 3.16 bzw. Korollar 3.17 anwenden. Es genügt also Behauptung (a) zu zeigen.

Für Punkte $z_1, z_2 \in D$, deren Verbindungstrecke $\overline{z_1 z_2}$ in D enthalten ist, schreiben wir ab sofort

$$\int_{z_1}^{z_2} f(w)\,\mathrm{d}w := \int_{\gamma_{z_1,z_2}} f(w)\,\mathrm{d}w \quad \text{mit } \gamma_{z_1,z_2}(t) = (1-t)\,z_1 + t\,z_2 \text{ für } t \in [0,1],$$

wir integrieren also entlang der Verbindungsstrecke von z_1 nach z_2. Sei nun $z_* \in D$ ein fest gewählter Sternmittelpunkt von D. Da D als Sterngebiet für alle $z \in D$ die gesamte Verbindugsstrecke $\overline{z_* z}$ enthält, ist dann die Funktion

$$F(z) := \int_{z_*}^{z} f(w)\,\mathrm{d}w \quad \text{für alle } z \in D \tag{3.2}$$

wohldefiniert. Behauptung (a) und somit der Satz folgen, wenn wir zeigen können, dass F auf D eine holomorphe Stammfunktion von f ist. Dafür genügt es

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = 0 \quad \text{für alle } z \in D \tag{3.3}$$

zu zeigen. Sei also im Folgenden $z \in D$ fest gewählt. Ist $h \in \mathbb{C}$ betragsmäßig klein, so ist $\triangle(z_*, z+h, z)$ ganz in D enthalten,

denn: Da D offen ist, ist z ein innerer Punkt von D, so dass für hinreichend kleines $|h|$ auch $z + h$ samt der Verbindungsstrecke $\overline{z(z+h)}$ in D liegt. Da D ein Sterngebiet ist, enthält es dann auch jeden Punkt auf der Verbindungsstrecke von z_* und jedem Punkt auf obiger Verbindungsstrecke. Dies zeigt die Behauptung. #

Nach dem Lemma von Goursat 3.21 gilt somit für betragsmäßig kleine $h \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_{z_*,z+h,z}} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &= \int_{z_*}^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{z+h}^{z} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{z}^{z_*} f(w)\,\mathrm{d}w \\ &\overset{(3.2)}{=} F(z+h) - \int_{z}^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w - F(z). \end{aligned}$$

Für $h \neq 0$ gilt daher

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w - f(z)\\ &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)\,\mathrm{d}w - \frac{1}{h} f(z)\int_z^{z+h} \mathrm{d}w\\ &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} \big(f(w)-f(z)\big)\,\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $f(w)$ in $w = z$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(w)-f(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } w \in D \text{ mit } |w-z| < \delta.$$

Wir wählen $|h| > 0$ so klein, dass insbesondere $|h| < \delta$ und $\triangle(z_*, z+h, z) \subseteq D$ gelten. Für jeden Punkt $w = z + t\,h$ mit $t \in [0,1]$ auf der Verbindungsstrecke von z nach $z+h$ gilt dann

$$|w-z| = |t \cdot h| \leq |h| < \delta.$$

Also folgt $|f(w)-f(z)| < \varepsilon$, also

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_z^{z+h} \big(f(w)-f(z)\big)\,\mathrm{d}w\right| \leq \frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon\cdot|h| = \varepsilon$$

und im Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ somit (3.3). Daher ist F in z komplex differenzierbar und es gilt $F'(z) = f(z)$. □

Beispiel 3.26. *Für $z \in \mathbb{C}_-$ sei*

$$L(z) := \int_1^z \frac{\mathrm{d}w}{w},$$

wobei über irgendeine stückweise glatte Kurve von 1 nach z integriert wird, die in $\mathbb{C}_-$ enthalten ist. Die so entstehende Funktion ist nach dem Cauchy'schen Integralsatz 3.25 wohldefiniert, da $\mathbb{C}_-$ ein Sterngebiet und die Funktion $\frac{1}{w}$ darauf holomorph ist. Nach Satz 3.16 und wegen $\operatorname{Log}' w = \frac{1}{w}$ für alle $w \in \mathbb{C}_-$ gilt

$$L(z) = \operatorname{Log} z - \operatorname{Log} 1 = \operatorname{Log} z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_-.$$

Wir erhalten also eine Integraldarstellung des Hauptzweigs des komplexen Logarithmus, die die klassische Formel aus der reellen Analysis verallgemeinert.

Bemerkung 3.27. *Eine nützliche Anwendung des Cauchy'schen Integralsatzes 3.25 liegt darin, dass wir nun unter geeigneten Bedingungen Integrale über komplizierte Integrationskurven durch solche über besonders einfache erklären können. Betrachten wir beispielsweise die Kurve $\gamma = \gamma_1 \star \gamma_2$ mit*

$$\gamma_1(t) := e^{2\pi i t} \qquad \text{für } t \in [0, \tfrac{3}{4}],$$

$$\gamma_2(t) := -i + (4t-3)(1+i) \qquad \textit{für } t \in [\frac{3}{4}, 1]$$

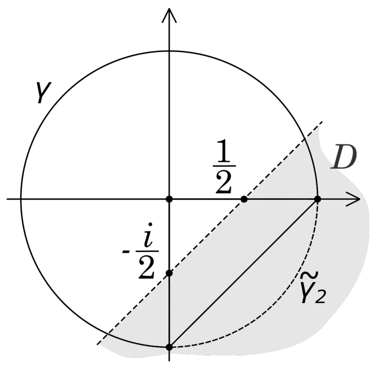
und führen als Alternative zu γ_2 *die Kurve*

$$\tilde{\gamma}_2(t) := e^{2\pi i t} \qquad \textit{für } t \in [\frac{3}{4}, 1]$$

ein. Offensichtlich ist die Halbebene

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\frac{2z+i}{i+1}) < 0\}$$

ein Sterngebiet, in dem die Funktion $f(z) = \frac{1}{z}$ *holomorph ist, und in der die geschlossene Kurve* $\gamma_2^- \star \tilde{\gamma}_2$ *zur Gänze enthalten ist.*



Nach dem Cauchy'schen Integralsatz 3.25 und Beispiel 3.18 gilt dann

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1 \star \gamma_2} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2^- \star \tilde{\gamma}_2} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1 \star \tilde{\gamma}_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

3.3 Die Cauchy'schen Integralformeln

Lemma 3.28 (Lemma von Lebesgue). *Sei* $D \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $K \subseteq D$ *kompakt. Dann gibt es ein* $r \in \mathbb{R}_{>0}$, *so dass für alle* $a \in K$ *die offene Kreisscheibe* $U_r(a)$ *vom Radius* r *um* a *ganz in* D *enthalten ist. Eine solche (nicht eindeutige) Zahl* r *nennt man eine* ***Lebesgue'sche Zahl***.[26]

Beweis. Zu jedem $a \in K$ wählen wir ein $r_a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $U_{2r_a}(a) \subseteq D$. Dann ist $\{U_{r_a}(a)\}_{a \in K}$ eine offene Überdeckung von K. Da K als kompakt vorausgesetzt war, hat diese Überdeckung nach Teil (b) Definition 1.13 eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{N} U_{r_\nu}(a_\nu) \qquad \text{mit } r_\nu := r_{a_\nu}.$$

[26]Henri Léon Lebesgue (1875 - 1941)

Sei $r := \min_{\nu=1,\ldots,N} r_\nu$. Für jedes feste $a \in K$ wählen wir nun ein $\nu \in \{1,\ldots,N\}$ mit $|a - a_\nu| < r_\nu$. Sei $z \in U_r(a)$. Dann gilt

$$|z - a_\nu| \leq |z - a| + |a - a_\nu| < r + r_\nu \leq 2\, r_\nu.$$

Insbesondere liegt also z in $U_{2r_\nu}(a_\nu) \subseteq D$ und somit ganz $U_r(a)$ in D. □

Satz 3.29 (Cauchy'sche Integralformel für Kreiswege)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Die abgeschlossene Kreisscheibe*

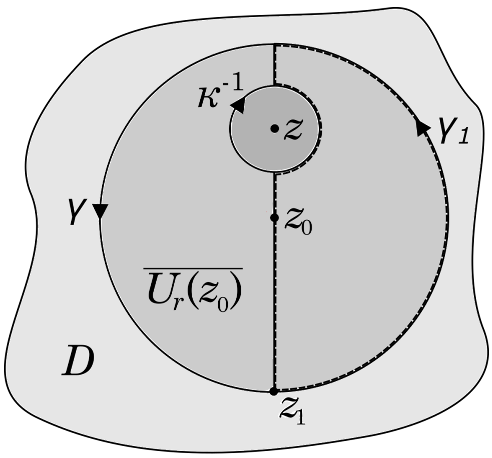
$$\overline{U_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$$

sei ganz in D enthalten. Dann gilt für alle z in der offenen Kreisscheibe $U_r(z_0)$ die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w,$$

wobei γ für $t \in [0,1]$ durch die Gleichung $z_0 + r\, e^{2\pi i t}$ gegeben wird.

Beweis. Sei im Folgenden $z \in U_r(z_0)$ fest gewählt und z_1 einer der Schnittpunkte der Geraden durch z und z_0 mit dem Bild von γ. Bezeichne weiter κ eine im mathematisch positiven Sinn einfach durchlaufene ganz in $U_r(z_0)$ enthaltene Kreislinie um z.



Wir definieren nun wie in der Abbildung zwei im mathematisch positiven Sinne einfach durchlaufene Kurven γ_1 und γ_2 jeweils mit Anfangs- und Endpunkt z_1. Hierbei bestehe $\mathrm{Bild}(\gamma_1)$ aus dem großen Halbkreis rechts, dem kleinen Durchmesserstück, dann der rechten Hälfte des Kreises $\mathrm{Bild}(\kappa)$ um z und schließlich dem großen Durchmesserstück. $\mathrm{Bild}(\gamma_2)$ bestehe aus den entsprechenden Stücken links.

Wegen $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ gibt es nach dem Lemma von Lebesgue 3.28 ein $\varepsilon > 0$, so dass auch die offene Kreisscheibe $U_{r+\varepsilon}(z_0)$ ganz in D enthalten ist. Entfernen wir aus dieser Kreisscheibe den jeweils passenden, von z ausgehenden Schlitz, der senkrecht auf der Verbindungsgeraden von

z und z_0 steht, so erhalten wir für die geschlossenen, stückweise glatten Kurven γ_1 und γ_2 jeweils ein Sterngebiet, in dem sie ganz enthalten sind und auf dem die Funktion $w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ holomorph ist. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete 3.25 gilt daher

$$\int_{\gamma_k} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0 \quad \text{für } k = 1, 2.$$

Dies lässt sich praktischerweise umformen zu

$$0 = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\kappa^{-1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w,$$

denn die Integrale entlang der $\operatorname{Bild}(\gamma_1)$ und $\operatorname{Bild}(\gamma_2)$ gemeinsamen Geradenstücke mit entgegengesetzter Orientierung heben sich gegenseitig auf. Wir erhalten

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\kappa} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = f(z) \int_{\kappa} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} + \int_{\kappa} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w. \tag{3.4}$$

Das erste Integral rechts lässt sich leicht berechnen: Die Kurve κ ist durch $z + \varrho\, e^{2\pi i t}$ mit $t \in [0,1]$ und $\varrho > 0$ gegeben, so dass

$$\int_{\kappa} \frac{dw}{w-z} = \int_0^1 \frac{2\pi i\, \varrho\, e^{2\pi i t}}{\varrho\, e^{2\pi i t}}\,\mathrm{d}t = 2\pi i$$

gilt. Wir wollen nun das zweite Integral rechts in (3.4) bestimmen. Sei dafür $\varepsilon > 0$. Da $f(w)$ in $w = z$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|f(w) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } w \in D \text{ mit } |w - z| < \delta.$$

Wir wählen nun speziell ein $\varrho \in (0, \delta)$. Für alle Punkte $w = z + \varrho\, e^{2\pi i t}$ aus $\operatorname{Bild}(\kappa)$ gilt dann

$$|w - z| = |\varrho\, e^{2\pi i t}| = \varrho < \delta,$$

also $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Es folgt daher

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\kappa} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w\Big| &= \Big|\int_0^1 \Big(f(z + \varrho\, e^{2\pi i t}) - f(z)\Big) \frac{2\pi i\, \varrho\, e^{2\pi i t}}{\varrho\, e^{2\pi i t}}\,\mathrm{d}t\Big| \\ &= 2\pi \Big|\int_0^1 \Big(f(z + \varrho\, e^{2\pi i t}) - f(z)\Big)\,\mathrm{d}t\Big| \le 2\pi\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $\varepsilon > 0$. Setzen wir dies in (3.4) ein, erhalten wir

$$\Big|\int_{\kappa} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - 2\pi i\, f(z)\Big| \le 2\pi\,\varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Der Satz folgt, wenn wir ε gegen Null gehen lassen. □

Die Cauchy'sche Integralformel lässt sich kanonisch verallgemeinern auf eine Formel über die n-ten Ableitungen der behandelten Funktion f. Dafür benötigen wir einen Hilfssatz, der uns unter bestimmten Bedingungen erlaubt, Differentiation und Integration zu vertauschen.

Lemma 3.30 (Leibniz'sche Regel[27]). *Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Sei weiter $f_\mathbb{C} : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die für jedes feste $t \in [a,b]$ komplex nach $z \in D$ differenzierbar ist, so dass die Ableitung*

$$\frac{\partial f_\mathbb{C}}{\partial z} : [a,b] \times D \to \mathbb{C}$$

stetig ist. Dann ist die Funktion

$$g_\mathbb{C} : \begin{cases} D & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto \int\limits_a^b f_\mathbb{C}(t,z)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

holomorph auf D und es gilt

$$g'_\mathbb{C}(z) = \int\limits_a^b \frac{\partial f_\mathbb{C}(t,z)}{\partial z}\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die entsprechende Aussage im Reellen und führen dann das Lemma darauf zurück:

Behauptung. *Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $c < d \in \mathbb{R}$. Sei weiter $f_\mathbb{R} : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass die partielle Ableitung $(t,x) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f_\mathbb{R}(t,x)$ existiere und stetig sei. Dann ist die Funktion*

$$g_\mathbb{R} : \begin{cases} [c,d] & \to \mathbb{R}, \\ x & \mapsto \int\limits_a^b f_\mathbb{R}(t,x)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

differenzierbar und es gilt

$$g'_\mathbb{R}(x) = \int\limits_a^b \frac{\partial f_\mathbb{R}(t,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}t.$$

denn: Wir bilden den Differenzenquotienten in einem Punkt $x_0 \in [c,d]$:

$$\frac{g_\mathbb{R}(x) - g_\mathbb{R}(x_0)}{x - x_0} = \int\limits_a^b \frac{f_\mathbb{R}(t,x) - f_\mathbb{R}(t,x_0)}{x - x_0}\,\mathrm{d}t.$$

[27] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein von t abhängiges ξ_t zwischen x und x_0 mit

$$\frac{f_{\mathbb{R}}(t,x)-f_{\mathbb{R}}(t,x_0)}{x-x_0}=\left(\frac{\partial f_{\mathbb{R}}}{\partial x}\right)(t,\xi_t).$$

Nach dem Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit sind stetige Funktionen auf dem Kompaktum $[a,b]\times[c,d]$ gleichmäßig stetig; es gibt also für alle $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ mit

$$|\left(\frac{\partial f_{\mathbb{R}}}{\partial x}\right)(t_1,x_1)-\left(\frac{\partial f_{\mathbb{R}}}{\partial x}\right)(t_2,x_2)|<\varepsilon \qquad \text{für } |x_1-x_2|<\delta \text{ und } |t_1-t_2|<\delta.$$

Insbesondere gilt

$$|\left(\frac{\partial f_{\mathbb{R}}}{\partial x}\right)(t,\xi_t)-\left(\frac{\partial f_{\mathbb{R}}}{\partial x}\right)(t,x_0)|<\varepsilon \qquad \text{für } |\xi_t-x_0|<\delta,$$

wobei weiterhin δ nicht von t abhängt. Wir erhalten so mit der reellen Standardabschätzung für Integrale[28]

$$\begin{aligned}|\frac{g_{\mathbb{R}}(x)-g_{\mathbb{R}}(x_0)}{x-x_0}-\int_a^b\left(\frac{\partial f_{\mathbb{R}}}{\partial x}\right)(t,x_0)\,\mathrm{d}t| &= |\int_a^b\left(\left(\frac{\partial f_{\mathbb{R}}}{\partial x}\right)(t,\xi_t)-\left(\frac{\partial f_{\mathbb{R}}}{\partial x}\right)(t,x_0)\right)\mathrm{d}t|\\ &\le \varepsilon(b-a) \quad \text{für } |x-x_0|<\delta.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir ε gegen Null gehen lassen. #

Schreiben wir nun $f_{\mathbb{C}}(t,x,y)=u_{\mathbb{C}}(t,x,y)+i\,v_{\mathbb{C}}(t,x,y)$ mit reellwertigen Funktionen $u_{\mathbb{C}},v_{\mathbb{C}}$. Dann ist

$$g_{\mathbb{C}}(x,y)=\int_a^b u_{\mathbb{C}}(t,x,y)\,\mathrm{d}t+i\int_a^b v_{\mathbb{C}}(t,x,y)\,\mathrm{d}t.$$

Nach Voraussetzung existiert $\frac{\partial}{\partial x}u_{\mathbb{C}}(t,x,y)$ und ist stetig. Die reelle Leibniz-Regel liefert, dass der erste Summand rechts nach x differenzierbar ist mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b u_{\mathbb{C}}(t,x,y)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}u_{\mathbb{C}}(t,x,y)\,\mathrm{d}t,$$

und diese ist sogar stetig. Eine analoge Rechnung kann man für $\frac{\partial}{\partial y}$ und für $v_{\mathbb{C}}$ ausführen, so dass $g_{\mathbb{C}}(x,y)$ stetig partiell und damit total reell differenzierbar ist. Es verbleibt zu zeigen, dass $g_{\mathbb{C}}(x,y)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen 2.21 erfüllt. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b u_{\mathbb{C}}(t,x,y)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}u_{\mathbb{C}}(t,x,y)\,\mathrm{d}t$$

[28]Diese zeigt man genauso wie die Standardabschätzung 3.15 für Kurvenintegrale, kann dabei aber auf einige technische Überlegungen verzichten.

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} v_{\mathbb{C}}(t,x,y)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\partial}{\partial y} \int_a^b v_{\mathbb{C}}(t,x,y)\,\mathrm{d}t,$$

wobei wir die reelle Leibniz-Regel und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für $f_{\mathbb{C}}$ verwendet haben. Analog erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b u_{\mathbb{C}}(t,x,y)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b v_{\mathbb{C}}(t,x,y)\,\mathrm{d}t.$$

Somit ist $g_{\mathbb{C}}(z)$ komplex differenzierbar. Die Formel für die Ableitung ergibt sich schließlich wie folgt:

$$g'_{\mathbb{C}}(z) \overset{2.23}{=} \frac{\partial g_{\mathbb{C}}}{\partial x}(x,y) = \int_a^b \frac{\partial f_{\mathbb{C}}(t,x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}t \overset{2.23}{=} \int_a^b \frac{\partial f_{\mathbb{C}}(t,z)}{\partial z}\,\mathrm{d}t.$$

□

Satz 3.31 (Verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel für Kreiswege). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gelten folgende Aussagen.*

(a) *f ist auf D beliebig oft komplex differenzierbar.*[29]

(b) *Seien $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ und γ wie im Satz über die Cauchy'sche Integralformel 3.29. Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt dann die Verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \quad \textit{für alle } z \in U_r(z_0),$$

wobei $f^{(n)}$ die n-te komplexe Ableitung von f bezeichne.

Beweis. Wir zeigen zunächst Aussage (b). Nach der Cauchy'schen Integralformel 3.29 gilt in der gegebenen Situation

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für alle } z \in U_r(z_0)$$

[29]Das gilt bekanntlich in der reellen Analysis nicht: So ist etwa der reelle Absolutbetrag stetig aber im Punkt $x = 0$ nicht reell differenzierbar. Ihre nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung existente Stammfunktion ist daher einmal aber nicht zwei Mal stetig reell differenzierbar. Holomorphie ist also ein sehr starker Begriff!

Der Integrand ist stetig, für jedes feste $t \in [0,1]$ komplex differenzierbar, und die Ableitung ist (als Funktion in t und z) stetig, da wegen $z \in U_r(z_0)$ und $w \in \mathrm{Bild}(\gamma)$ niemals $w = z$ gelten kann. Somit ist die Leibniz'sche Regel 3.30 anwendbar, und wir erhalten

$$\begin{aligned} f^{(1)}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\gamma'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{(\gamma(t)-z)^2}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,\mathrm{d}w \quad \text{für alle } z \in U_r(z_0). \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir auf diese Weise sowohl die Existenz der n-ten Ableitung von f auf $U_r(z_0)$ als auch die in (b) behauptete Formel: Zum Nachweis von Behauptung (a) sei $z_0 \in D$. Da D offen ist, existiert ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $U_r(z_0) \subseteq D$. Wählen wir nun $\rho \in (0,r)$, so ist $\overline{U_\rho(z_0)} \subseteq D$, und aus Aussage (b) ergibt sich die Existenz der n-ten Ableitung von f auf $U_\rho(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Da z_0 aus D beliebig war, folgt Behauptung (a). □

3.4 Direkte Folgerungen aus den Cauchy'schen Integralformeln

Proposition 3.32 (Cauchy'sche Ungleichungen). *Seien $U_r(z_0)$ eine offene Kreisumgebung um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Gibt es dann eine positive reelle Zahl $M \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in U_r(z_0)$, so gilt*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq M\frac{n!}{r^n} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Beweis. Wir verwenden die Verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel 3.31 mit $z = z_0$ und $\gamma(t) = z_0 + \varrho\, e^{2\pi i t}$ mit $t \in [0,1]$, wobei $\varrho < r$ gelte. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right| \\ &= \frac{n!}{2\pi}\cdot\left|\int_0^1 \frac{f(z_0+\varrho\, e^{2\pi i t})}{(\varrho\, e^{2\pi i t})^{n+1}}\cdot 2\pi i\,\varrho\, e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\int_0^1 \frac{|f(z_0+\varrho\, e^{2\pi i t})|}{|(\varrho\, e^{2\pi i t})^{n+1}|}\,|\varrho\, 2\pi i\, e^{2\pi i t}|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{\varrho^n}2\pi = M\frac{n!}{\varrho^n}. \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $\varrho \in (0,r)$. Lassen wir ϱ gegen r gehen, folgt daher

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq M\frac{n!}{r^n}$$

und somit die Behauptung. □

Definition 3.33. *Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, heißt eine **ganze** Funktion.*

Mit den Cauchy'schen Ungleichungen 3.32 zeigen wir den folgenden zentralen Satz:

Satz 3.34 (Satz von Liouville[30]). *Eine beschränkte ganze Funktion ist notwendigerweise konstant.*

Beweis. Aus der Cauchy'schen Ungleichung 3.32 für $n = 1$ folgt

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r} \quad \text{für alle } z_0 \in \mathbb{C} \text{ und alle } r > 0,$$

wobei M eine Schranke für $|f|$ auf ganz $\mathbb{C}$ sei. Lassen wir r gegen unendlich gehen, so folgt daher $|f'(z_0)| = 0$ und somit auch $f'(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$. Also ist f' identisch Null, und somit nach Korollar 2.25 konstant, denn $\mathbb{C}$ ist ein Gebiet und insbesondere zusammenhängend. □

Bemerkung 3.35. *Es gilt sogar noch mehr: Nach dem Kleinen Satz von Picard[31] 9.12 ist eine ganze Funktion bereits konstant, wenn es zwei komplexe Zahlen gibt, die nicht in ihrem Bild liegen.*

Mit dem Satz von Liouville kann man beispielsweise das folgende wichtige Resultat beweisen:

Satz 3.36 (Fundamentalsatz der Algebra[32]). *Sei P ein nichtkonstantes Polynom mit komplexen Koeffizienten. Dann hat P eine komplexe Nullstelle.*

Für den Beweis des Fundamentalsatzes 3.36 ziehen wir noch ein Hilfsresultat heran:

Lemma 3.37 (Wachstumslemma für Polynomfunktionen). *Sei $P(X) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu X^\nu \in \mathbb{C}[X]$ mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$. Dann gibt es für je zwei Konstanten $0 < c_1 < 1 < c_2 < \infty$ eine Schranke $R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit*

$$c_1 \, |a_n| \, |z|^n \leq |P(z)| \leq c_2 \, |a_n| \, |z|^n \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_R(0)}.$$

Beweis. Für $z \neq 0$ gilt

$$P(z) = z^n \cdot \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{\nu - n} = z^n \cdot (a_n + g(z))$$

mit

$$g(z) := \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}.$$

Für $|z| \to \infty$ geht $|g(z)|$ gegen Null, insbesondere gibt es ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$|g(z)| \leq \min\{(1 - c_1)\,|a_n|, (c_2 - 1)\,|a_n|\} \quad \text{für alle } z \text{ mit } |z| > R.$$

[30] Joseph Liouville (1809 - 1882)

[31] Charles Émile Picard (1856 - 1941)

[32] Das klassisch wichtigste Problem der Algebra ist die Lösung algebraischer Gleichungen. Historisch ist das nichts anderes als die Bestimmung von Nullstellen von Polynomen mit reellen Koeffizienten. Hier ist offensichtlich der von Johann Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855) bewiesene Fundamentalsatz von grundlegender Bedeutung.

Mit den Dreiecksungleichungen 1.7 (c) gilt dort dann

$$|P(z)| = |z|^n\,|a_n + g(z)| = |z|^n\,|a_n - (-g(z))| \geq |z|^n\,\big(|a_n| - |g(z)|\big) \geq c_1\,|a_n|\,|z|^n,$$
$$|P(z)| = |z|^n\,|a_n + g(z)| \leq |z|^n\,\big(|a_n| + |g(z)|\big) \leq c_2\,|a_n|\,|z|^n.$$

Insgesamt haben wir so das Lemma gezeigt. □

Beweis des Fundamentalsatzes 3.36. Angenommen wir hätten $P(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann wäre die Funktion $1/P(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph. Schreiben wir $P(X) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu X^\nu \in \mathbb{C}[X]$ mit $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$. Dann ist durch P eine Funktion

$$P : \begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto P(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \end{cases}$$

gegeben.[33] Wegen $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$ und nach dem Wachstumslemma für Polynomfunktionen 3.37 geht $|P(z)|$ für $|z| \to \infty$ gegen unendlich. Für ein vorgegebenes $M > 0$ gibt es also ein $R > 0$ mit

$$|P(z)| \geq M \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R,$$

beziehungsweise mit

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq M^{-1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R.$$

Da $1/P(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ stetig wäre, wäre ihr Betrag $|1/P(z)|$ auf dem durch $|z| \leq R$ gegebenen Kompaktum beschränkt. Insgesamt wäre also die ganze Funktion $1/P(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt, nach dem Satz von Liouville 3.34 also konstant. Es folgte, dass auch $P(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ konstant wäre, was im Widerspruch zu unserer Annahme stünde. $P(z)$ muss also eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ haben. □

Satz 3.38 (Potenzreihenentwicklungssatz)**.** *Sei $U_r(z_0)$ eine offene Kreisumgebung um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und sei $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z - z_0)^\nu \quad \textit{für alle } z \in U_r(z_0). \qquad \text{(Taylor-Reihendarstellung)}$$

Beweis. Sei $\varrho \in (0, r)$. Dann ist $\overline{U_\varrho(z_0)} \subseteq U_r(z_0)$ und nach der Cauchy'schen Integralformel 3.29 gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w \quad \text{für alle } z \in U_\varrho(z_0),$$

wobei γ durch $\gamma(t) = \varrho\, e^{2\pi i t}$ mit $t \in [0, 1]$ gegeben ist.

[33] Da $\mathbb{C}$ ein unendlicher Körper ist, ist die Abbildung, die einem Polynom die zugehörige komplexe Polynomfunktion zuordnet, sogar injektiv.

Die Idee ist nun, den ***Cauchy-Kern*** $\frac{1}{w-z}$ in eine geometrische Reihe zu entwickeln. Für $w \in \mathrm{Bild}(\gamma), z \in U_\varrho(z_0)$ gilt wegen $\frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$ offenbar

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} \cdot \frac{\frac{1}{w-z_0}}{\frac{1}{w-z_0}} = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} \cdot \frac{1}{w-z_0} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^\nu$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^\nu}{(w-z_0)^{\nu+1}}.$$

Insbesondere ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{\nu+1}} (z-z_0)^\nu \, \mathrm{d}w \quad \text{für alle } z \in U_\varrho(z_0). \tag{3.5}$$

Für festes $z \in U_\varrho(z_0)$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{\nu+1}} (z-z_0)^\nu$$

gleichmäßig auf $\mathrm{Bild}(\gamma)$,

denn: Die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^\nu}{(w-z_0)^{\nu+1}} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^\nu$$

konvergiert wegen $\frac{|z-z_0|}{|w-w_0|} < 1$ gleichmäßig. Als stetiges Bild des Kompaktums $[0,1]$ ist $\mathrm{Bild}(\gamma)$ kompakt. Die Funktion f ist holomorph und somit stetig auf $U_r(z_0)$, weshalb sie auf der kompakten Menge $\mathrm{Bild}(\gamma)$ beschränkt ist. Der Faktor $f(w)$ ändert deshalb nichts an der gleichmäßigen Konvergenz. #

Nach Übungsaufgabe 3.2 können wir daher in (3.5) Integration und Summation vertauschen und erhalten

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{\nu+1}} \, \mathrm{d}w \right) (z-z_0)^\nu.$$

Nach der Verallgemeinerten Cauchy'schen Integralformel 3.31 gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{\nu+1}} \, \mathrm{d}w = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$$

und somit

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z-z_0)^\nu \quad \text{für alle } z \in U_\varrho(z_0).$$

Da ϱ beliebig mit $0 < \varrho < r$ war, ist hiermit der Satz gezeigt. □

Aus dem Satz lässt sich folgendes sehr wichtige Korollar gewinnen.

Korollar 3.39. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist auf D holomorph.*

(ii) *f ist auf D **analytisch**, d. h., f ist um jeden Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe entwickelbar. Es gibt also zu jedem $z_0 \in D$ eine offene Kreisumgebung $U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$ und eine Potenzreihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$$

mit Entwicklungspunkt z_0, die auf $U_\varepsilon(z_0)$ konvergiert und mit $f(z)$ übereinstimmt.

Beweis. Sei zunächst f auf D holomorph. Wegen der Offenheit von D gibt es zu jedem beliebigen Punkt $z_0 \in D$ ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$. Die Funktion f ist dann insbesondere auf $U_\varepsilon(z_0)$ holomorph und somit analytisch nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38.

Sei nun umgekehrt f auf D analytisch, also in jedem Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe mit Konvergenzbereich $U_\varepsilon(z_0) \subseteq D$ entwickelbar, wobei ε von z_0 abhängt. Da Potenzreihen nach Satz 2.39 auf dem Konvergenzbereich holomorph sind, ist f auf $U_\varepsilon(z_0)$ holomorph. Da z_0 in D beliebig gewählt war, ist f auf ganz D holomorph. $\square$

Bemerkung 3.40. (a) *Für die Koeffizienten in Aussage (ii) von Korollar 3.39 gilt nach der Taylorformel für Potenzreihen 2.40 notwendigerweise*

$$a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}.$$

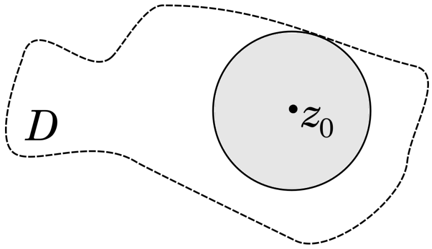
(b) *Das reelle Analogon von Korollar 3.39 gilt nicht: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, so braucht f nicht um jeden Punkt $x_0 \in I$ in einer Potenzreihe entwickelbar zu sein,*

denn: Betrachten wir $I = (-1, 1)$ und $f : I \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Mit Methoden der reellen Analysis zeigt man, dass f auf I beliebig oft differenzierbar ist, aber für alle $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ die Bedingung $f^{(\nu)}(0) = 0$ erfüllt. Die Taylor-Reihe von f an der Stelle $x_0 = 0$ ist also identisch Null, die Funktion selbst ist aber nur für $x_0 = 0$ gleich Null. f ist somit in $x_0 = 0$ nicht in eine Potenzreihe entwickelbar. #

(c) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $r > 0$ eine positive reelle Zahl mit $U_r(z_0) \subseteq D$. Dann konvergiert nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38 die Taylor-Reihe von f in z auf $U_r(z_0)$ und stimmt dort mit f überein.*



Ist nun $R > 0$ die größte reelle Zahl, für die $U_R(z_0)$ noch in D enthalten ist, so kann es passieren, dass die Taylor-Reihe tatsächlich auf einem sehr viel größeren Bereich konvergiert, dort aber nicht mehr notwendigerweise die Funktion f darstellt,

denn: Sei $\operatorname{Log}(z)$ der für $z \in \mathbb{C}_-$ definierte Hauptwert des Logarithmus. Sei weiter $z_0 \in \mathbb{C}_-$. Mit

$$\operatorname{Log}'(z_0) = \frac{1}{z_0} \quad \textit{und somit auch} \quad \operatorname{Log}^{(\nu)}(z_0) = (\nu-1)!\,\frac{(-1)^{\nu-1}}{z_0^\nu} \textit{ für alle } \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$

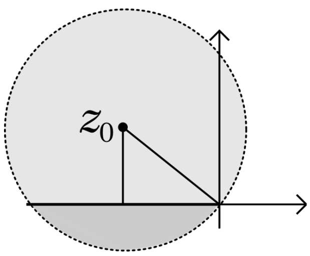
erhalten wir für alle $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subseteq \mathbb{C}_-$ die Potenzreihenentwicklung

$$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(z_0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}}{z_0^\nu \nu}(z-z_0)^\nu \quad \textit{für alle } z \in U_r(z_0)$$

an der Stelle $z = z_0$. Nach der Formel von Cauchy-Hadamard 2.35 hat die Potenzreihe rechts den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\left|\frac{(-1)^{\nu-1}}{z_0^\nu \nu}\right|}} = |z_0|.$$

Andererseits ist für $\operatorname{Re} z_0 < 0$ analog zu (1.1) der Abstand von z_0 zur negativen reellen Achse, auf der $\operatorname{Log}(z)$ unstetig ist, echt kleiner als $|z_0|$.



#

Satz 3.41 (Approximationssatz von Weierstraß[34]). *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, die punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Die Konvergenz*

[34] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 - 1897)

sei gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von D, und alle f_n seien auf D holomorph. Dann ist f auf D holomorph, die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ konvergiert gegen f', und die Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von D.

Beweis. Die Funktion f ist auf D stetig,

denn: Sei $z_0 \in D$ fest und sei $U_r(z_0)$ eine Kreisumgebung von z_0 mit $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$. Der Abschluss $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ ist kompakt und vollständig in D enthalten, so dass nach Voraussetzung die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Da weiterhin die Funktionen f_n stetig sind, folgt wie in der reellen Analysis die Stetigkeit von f auf $\overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$. Da $z_0 \in D$ beliebig gewählt war, folgt die Stetigkeit von f in ganz D. #

Seien wieder $z_0 \in D$ fest und $U_r(z_0)$ eine Kreisumgebung von z_0 mit $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$. Mit der Cauchy'schen Integralformel 3.29 gilt dann für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{w-z}\, dw \quad \text{für alle } z \in U_r(z_0),$$

wobei die Integrationskurve durch $\gamma(t) = z_0 + r\, e^{2\pi i t}$ mit $t \in [0,1]$ gegeben sei. Für $z \in \overline{U_{\frac{r}{2}}(z_0)}$ und $w \in \operatorname{Bild}(\gamma)$ gilt

$$|w-z| = |(w-z_0)-(z-z_0)| \geq |w-z_0| - |z-z_0| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}. \tag{3.6}$$

Da $\operatorname{Bild}(\gamma) \subseteq D$ kompakt ist, konvergiert nach Voraussetzung die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf $\operatorname{Bild}(\gamma)$ gleichmäßig gegen f, für alle $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit

$$|f_n(w) - f(w)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N \text{ und alle } w \in \operatorname{Bild}(\gamma).$$

Für $z \in U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ und $w \in \operatorname{Bild}(\gamma)$ folgt dann mit (3.6)

$$\left|\frac{f_n(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-z}\right| = \frac{|f_n(w)-f(w)|}{|w-z|} \leq \frac{2\,\varepsilon}{r}.$$

Das bedeutet, dass die Folge $\left(\frac{f_n(w)}{w-z}\right)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf $\operatorname{Bild}(\gamma)$ gleichmäßig gegen $\frac{f(w)}{w-z}$ konvergiert. Für alle $z \in U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ folgt somit nach Übungsaufgabe 3.2.

$$\begin{aligned} f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w)}{w-z}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(w)}{w-z}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw. \end{aligned}$$

Mit der Leibniz'schen Regel 3.30 folgt, dass $f(z)$ auf $U_{\frac{r}{2}}(z_0)$ holomorph ist. Wegen $z_0 \in D$ beliebig ist also f auf D holomorph. Der Rest der Behauptung wird in Übungsaufgabe 3.6 gezeigt. □

3.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. *Übertragen Sie Proposition 3.10 auf stückweise glatte Kurven $\gamma = \gamma_1 \star \ldots \star \gamma_n$.*

Aufgabe 3.2. *Zeigen Sie die folgenden Aussagen.*

(a) *Sei durch $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve gegebene, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(b) *Sei $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, und sei durch $\gamma : (a, b) \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Kurve gegeben. Sei weiter $f : \gamma((a, b)) \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist in Analogie zum Reellen das* ***uneigentliche Kurvenintegral*** *definiert durch*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei rechts das uneigentliche Riemann- oder Regelintegral bzw. das Lebesque-Integral steht (falls existent).

Sei nun außerdem $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} : \gamma((a, b)) \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, deren Summe $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_n(z)$ lokal gleichmäßig konvergiert und für die

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \int_a^b |f_n(\gamma(t))\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

existiert. Dann existiert auch $\int_C (\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_n(z))\,\mathrm{d}z$, und es gilt[35]

$$\int_\gamma \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_n(z) \right) \mathrm{d}z = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 3.3 (Satz von Morera). [36] *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Gibt es für alle $z_0 \in D$ eine offene Kreisumgebung $U_r(z_0) \subseteq D$, in der für alle Dreiecke $\triangle(z_1, z_2, z_3) \subseteq D$ das Integral*

$$\int_{\gamma_{z_1,z_2,z_3}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

verschwindet, so ist f holomorph.

[35] Beim Beweis hilft der folgende Satz aus der reellen Analysis, der für alle oben genannten Integrale gilt: Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Folge auf (a, b) absolut integrierbarer Funktionen. Seien weiter die Summen

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \int_a^b |f_n(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_n(x)$$

konvergent, und sei die letzte Summe als Funktion in x sogar stetig. Dann existiert das Integral $\int_a^b (\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_n(x))\,\mathrm{d}x$ und nimmt den Wert $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ an.

[36] Giacinto Morera (1856 - 1909)

Aufgabe 3.4 (Riemann'scher Fortsetzungssatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $A \subseteq D$ eine abgeschlossene Teilmenge, die nur aus isolierten Punkten besteht. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen über eine auf $D \setminus A$ holomorphe Funktion f äquivalent sind:*

(i) *f ist holomorph nach ganz D fortsetzbar.*

(ii) *f ist stetig nach ganz D fortsetzbar.*

(iii) *f ist in einer Umgebung $U \subseteq D$ eines jeden Punktes $a \in A$ beschränkt.*

(iv) $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$ *für alle $a \in A$.*

Aufgabe 3.5. *Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:*

(a) *Das Bild einer jeden nichtkonstanten ganzen Funktion f liegt dicht in $\mathbb{C}$.*

(b) *Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ ist surjektiv, es gilt also $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.*

(c) *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und reelle Konstanten $M, R > 0$ mit*
$$|f(z)| \leq M|z|^n \quad \text{für alle } |z| > R,$$
dann ist f ein Polynom von Grad $\deg(f) \leq n$.

Aufgabe 3.6. (a) *Beenden Sie den Beweis des Approximationssatzes von Weierstraß 3.41: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} : D \to \mathbb{C}$ eine Folge von holomorphen Funktionen, die punktweise gegen eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Die Konvergenz sei gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von D. Zeigen Sie, dass dann die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ gegen f' konvergiert, und zwar gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von D.*

(b) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$. Sei weiter*
$$F(z) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad \text{für alle } z \in D$$
*eine **normal konvergente** Reihe, es gebe also für jedes Kompaktum $K \subseteq D$ eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ nichtnegativer reeller Zahlen mit $|f_n(z)| \leq M_n$ für alle $z \in K$ und alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $F(z)$ dann auf D holomorph ist und die komplexe Ableitung durch*
$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z) \quad \text{für alle } z \in D$$
gegeben ist.

(c) *Zeigen Sie in der Situation von Aufgabenteil (b), dass die Reihe der Ableitungen $F'(z)$ ebenfalls normal konvergent ist.*

Hinweis: *Für ein Kompaktum K betrachte man eine offene Überdeckung von Kreisscheiben $\{U_\varepsilon(a)\}_{a\in K}$ eines festen Radiuses $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(a) \subset D$ für alle $a \in K$.*

Aufgabe 3.7. (a) *Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

für $z \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(z) > 0$ *absolut konvergent ist und auf* $D := \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) > 0\}$ *eine holomorphe Funktion darstellt.*

Hinweis: *Zum Beweis der Holomorphie zeigt man zunächst, dass die Funktionenfolge* $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *mit*

$$\Gamma_n(z) := \int_{1/n}^n t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \textit{für alle } z \in D$$

auf Kompakta gleichmäßig gegen $\Gamma(z)$ *konvergiert und benutzt die Leibniz'sche Regel 3.30 sowie den Approximationssatz von Weierstraß 3.41.*

(b) *Zeigen Sie die Funktionalgleichung*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \textit{für alle } z \in D$$

und folgern Sie $\Gamma(n+1) = n!$ *für* $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

KAPITEL 4

Lokale Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

4.1 Elementargebiete

Definition 4.1. *Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt* ***Elementargebiet****, wenn jede holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf D eine Stammfunktion hat.*

Beispiel 4.2. (a) *Nach dem Cauchy'schen Integralsatz 3.25 ist jedes Sterngebiet ein Elementargebiet.*

(b) *Nach Beispiel 3.18 hat die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion $\frac{1}{z}$ dort keine Stammfunktion. Es folgt, dass $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kein Elementargebiet ist.*

Proposition 4.3. *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ zwei Elementargebiete. Gilt $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ und ist $D_1 \cap D_2$ zusammenhängend, so ist auch $D_1 \cup D_2$ ein Elementargebiet.*

Beweis. Als Vereinigung offener Teilmengen ist $D_1 \cup D_2$ wieder offen und als Vereinigung zweier zusammenhängender Teilmengen mit nichtleerem Durchschnitt ist $D_1 \cup D_2$ auch zusammenhängend. Insgesamt ist also $D_1 \cup D_2$ ein Gebiet.

Sei nun $f : D_1 \cup D_2 \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann sind auch die Einschränkungen $f|_{D_1}$ und $f|_{D_2}$ holomorph. Da D_1 und D_2 Elementargebiete sind, gibt es holomorphe Funktionen $F_1 : D_1 \to \mathbb{C}$ bzw. $F_2 : D_2 \to \mathbb{C}$, deren Ableitungen auf D_1 bzw. D_2 mit $f(z)$ übereinstimmen. Es folgt

$$(F_1 - F_2)'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in D_1 \cap D_2.$$

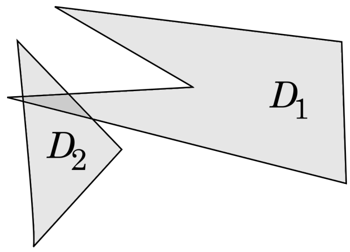
Da $D_1 \cap D_2$ zusammenhängend ist, gibt es daher nach Korollar 2.25 eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $F_1 = F_2 + c$ auf $D_1 \cap D_2$. Mit F_2 ist auch $F_2 + c$ Stammfunktion von f auf D_2. Wir können somit ohne Einschränkung F_2 durch $F_2 + c$ ersetzen, also annehmen, dass F_1 und F_2 auf $D_1 \cap D_2$ übereinstimmen. Wir setzen nun

$$F : \begin{cases} D_1 \cup D_2 & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto F_k(z) \text{ für } z \in D_k \text{ und } k \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

Dann ist F wohldefiniert, holomorph auf $D_1 \cup D_2$ und erfüllt $F' = f$ auf $D_1 \cup D_2$. Folgerichtig ist $D_1 \cup D_2$ ein Elementargebiet. $\square$

Bemerkung 4.4. *Man kann Proposition 4.3 benutzen, um zu einzusehen, dass nicht jedes Elementargebiet auch ein Sterngebiet ist,*

denn:



D_1 und D_2 sind als Sterngebiete insbesondere Elementargebiete. Nach Proposition 4.3 ist also auch $D_1 \cup D_2$ ein Elementargebiet. Man sieht andererseits schnell, dass $D_1 \cup D_2$ kein Sterngebiet ist. #

Bemerkung 4.5. *In Abschnitt 7.3 werden wir zeigen, dass sich Elementargebiete auch geometrisch charakterisieren lassen als* ***einfach zusammenhängende*** *Gebiete, also Gebiete, in denen jede geschlossene Kurve* ***nullhomotop*** *ist, sich also stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Anschaulich sind Elementargebiete also Gebiete „ohne Löcher".*

Lemma 4.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nullstellenfrei. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:*

(a) *Es gibt eine holomorphe Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \exp(h(z))$ für alle $z \in D$.*

(b) *Für jedes $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $n \geq 1$ gibt es eine holomorphe Funktion $H : D \to \mathbb{C}$ mit $H^n = f$ auf D.*

Beweis. Da f auf D keine Nullstellen hat, ist die ***logarithmische Ableitung*** $\frac{f'}{f}$ auf D holomorph. Da D ein Elementargebiet ist, hat somit $\frac{f'}{f}$ eine Stammfunktion F auf D. Schreiben wir

$$G(z) := \frac{\exp F(z)}{f(z)} \quad \text{mit } z \in D,$$

so gilt

$$G'(z) = \frac{F'(z)\, f(z)\, \exp F(z) - \exp F(z)\, f'(z)}{f^2(z)} = \frac{f'(z)\, \exp F(z) - f'(z)\, \exp F(z)}{f^2(z)} = 0.$$

Da D ein Gebiet ist, gibt es somit nach Korollar 2.25 eine Konstante $C \in \mathbb{C}^\times$ mit $G(z) = C$ für alle $z \in D$. Andererseits ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ surjektiv, so dass es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $C = e^c$ gibt. Insgesamt gilt

$$e^c = \frac{e^{F(z)}}{f(z)},$$

also

$$f(z) = e^{F(z)-c}.$$

Wir können daher $h := F(z) - c$ wählen, was Behauptung (a) zeigt.

Setzen wir $H(z) := \exp(\frac{1}{n} h(z))$, so gilt

$$H^n(z) = \exp\big(h(z)\big) = f(z),$$

und Behauptung (b) folgt. $\square$

4.2 Der Identitätssatz

Lemma 4.7 (Identitätssatz für Potenzreihen). *Seien*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu \text{ und } \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z-z_0)^\nu \quad \text{mit } a_\nu, b_\nu \in \mathbb{C} \text{ für alle } \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

zwei Potenzreihen mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$, die in einer Kreisumgebung $U_r(z_0)$ von z_0 konvergieren. Sei weiter $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Gilt dann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z_n-z_0)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (z_n-z_0)^\nu \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{0\},$$

so gilt bereits $a_\nu = b_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $a_\nu \neq b_\nu$. Sei μ die kleinste solche Zahl. Dann gilt

$$\sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_\nu (z_n-z_0)^\nu = \sum_{\nu=\mu}^{\infty} b_\nu (z_n-z_0)^\nu \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}.$$

Nach Division durch $(z_n - z_0)^\mu \neq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} a_\mu + a_{\mu+1}(z_n-z_0) + \ldots &= \sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_\nu (z_n-z_0)^{\nu-\mu} \\ &= \sum_{\nu=\mu}^{\infty} b_\nu (z_n-z_0)^{\nu-\mu} = b_\mu + b_{\mu+1}(z_n-z_0) + \ldots . \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ liegen die Folgenglieder z_n schon in einem Kompaktum $\overline{U_\varrho(z_0)} \subseteq U_r(z_0)$ mit $0 < \varrho < r$. Nach Proposition 2.33 konvergieren die Potenzreihen in diesem Kompaktum gleichmäßig, und bei gleichmäßig konvergenten Reihen dürfen Grenzübergänge und Summation vertauscht werden. Lassen wir also n gegen ∞ gehen, so folgt wegen $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ die Gleichheit $a_\mu = b_\mu$, was im Widerspruch zu unserer Annahme steht. Es gilt also $a_\nu = b_\nu$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so dass das Lemma bewiesen ist. $\square$

Wie wir wissen, sind holomorphe Funktionen lokal in Potenzreihen entwickelbar. Auf diese Weise sollten wir das Lemma also auch auf holomorphe Funktionen anwenden können. In der Tat:

Satz 4.8 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Es gebe außerdem einen Punkt $z_0 \in D$ und eine Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ in $D \smallsetminus \{z_0\}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, für die*

$$f(z_n) = g(z_n) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \smallsetminus \{0\}$$

gilt. Dann stimmen auf ganz D die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ überein.

Beweis. Sei $F(z) := f(z) - g(z)$ für alle $z \in D$. Dann ist $F(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \smallsetminus \{0\}$. Seien

$$A := \{z \in D \mid F^{(\nu)}(z) = 0 \text{ für alle } \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\},$$
$$B := \{z \in D \mid \text{ es gibt ein } \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ mit } F^{(\nu)}(z) \neq 0\}.$$

Wir wollen nun zeigen, dass A und B beides offene Mengen sind. Dazu schreiben wir die Funktion $F(z)$ um: Holomorphe Funktionen sind nach Korollar 3.39 analytisch, und nach Teil (a) von Bemerkung 3.40 kennen wir die Gestalt der lokalen Taylor-Koeffizienten. Es gibt somit zu jedem $a \in D$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(a) \subseteq D$ und

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{F^{(\nu)}(a)}{\nu!} (z-a)^{\nu} \quad \text{für alle } z \in U_\varepsilon(a). \tag{4.1}$$

A ist offen,

denn: Sei $a \in A$. Nach (4.1) verschwindet $F(z)$ dann auf ganz $U_\varepsilon(a)$, insbesondere gilt $F^{(\nu)}(z) = 0$ für alle $z \in U_\varepsilon(a)$ und alle $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Es folgt $U_\varepsilon(a) \subseteq A$ und somit die Offenheit von A. #

B ist offen,

denn: Sei $a \in B$. Dann gibt es ein $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $F^{(\nu)}(a) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von $F^{(\nu)}$ gibt es eine Umgebung V von a, auf der $F^{(\nu)}(z)$ keine Nullstelle hat. Insbesondere ist V in B enthalten, und letzteres ist offen. #

Weiter gilt nach Konstruktion

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{und} \quad A \cup B = D,$$

so dass D die disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen ist.

Außerdem ist $A \neq \emptyset$,

denn: Wählen wir speziell $a = z_0$ und schreiben $F(z)$ wie in (4.1). Da nach Voraussetzung $F(z_n) = 0$ gilt für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \smallsetminus \{0\}$, folgt mit dem Identitätssatz für Potenzreihen 4.7 $F^{(\nu)}(z_0) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Insbesondere liegt z_0 in A. #

Der Zusammenhang des Gebiets D lässt sich so charakterisieren, dass D nicht als disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Mengen geschrieben werden kann. Mit dem bisher Gezeigten folgt daher $B = \emptyset$ und somit $D = A$. Insbesondere ist $F(z) = 0$ für alle $z \in D$, also $f(z) = g(z)$ auf ganz D. □

Bemerkung 4.9. (a) *Der Identitätssatz 4.8 gilt nicht für beliebige offene Teilmengen $D \subseteq \mathbb{C}$,*

denn: Sei $D = U_1(0) \cup U_1(3)$. Dann stimmen die Funktionen $f = \mathrm{id}_D$ und $g : D \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} z & z \in U_1(0), \\ -z & z \in U_1(3) \end{cases}$$

auf jeder in $U_1(0)$ enthaltenen Folge mit Grenzwert 0 überein, sind aber offensichtlich verschieden. #

(b) *Nach dem Identitätssatz 4.8 ist der Gesamtverlauf einer holomorphen Funktion auf einem Gebiet schon durch ihre Werte auf einer „sehr kleinen Teilmenge“ von D, wie etwa einem Geradenstückchen, vollständig bestimmt.*

Korollar 4.10. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph nicht identisch Null auf D. Dann ist die Nullstellenmenge $T(f) := \{z \in D \mid f(z) = 0\}$ abgeschlossen in D und besteht nur aus isolierten Punkten.*

Beweis. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind ein Hausdorff-Raum und die einelementige Teilmenge $\{0\} \subseteq \mathbb{C}$ somit abgeschlossen. Als Urbild von $\{0\}$ unter der stetigen Funktion f ist folglich auch die Nullstellenmenge $T(f)$ abgeschlossen.

Das Korollar folgt nun, wenn wir zeigen können, dass $T(f)$ in D keinen Häufungspunkt hat. Nehmen wir also an, es gäbe einen Häufungspunkt z_0 von $T(f)$ in D. Dann existierte eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ in $T(f) \setminus \{z_0\}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$. Nach Konstruktion gälte $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und mit dem Identitätssatz 4.8 folgte $f \equiv 0$ auf D. Das hatten wir aber explizit ausgeschlossen. □

Bemerkung 4.11. *Ist eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ nicht zusammenhängend, so lässt sich D als disjunkte Vereinigung nichtleerer offener Teilmengen $D = D_1 \dot\cup D_2$ schreiben. Dann sind durch*

$$f_1(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } z \in D_1, \\ 0 & \text{für } z \in D_2 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(z) := \begin{cases} 0 & \text{für } z \in D_1, \\ 1 & \text{für } z \in D_2 \end{cases}$$

offensichtlich zwei nichttriviale, holomorphe Funktionen auf D gegeben, deren Nullstellenmengen nicht aus isolierten Punkten bestehen.

Folgendes zweites Korollar des Identitätssatzes ist zwar offensichtlich, aber dennoch von großem Nutzen:

Korollar 4.12 (Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subseteq D$ eine Teilmenge, die in D mindestens einen Häufungspunkt besitzt. Sei $f : M \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Gibt es eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}(z) = f(z)$ auf ganz M, so ist $\tilde{f}$ eindeutig bestimmt.*

Beispiel 4.13. *Die reellen Funktionen $e^x, \sin x, \cos x$ usw. haben genau eine holomorphe Fortsetzung ins Komplexe.*

4.3 Der Satz von der Gebietstreue

Satz 4.14 (Satz von der Gebietstreue)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant auf D. Dann ist auch $f(D)$ ein Gebiet.*

Beweis. Die Funktion f ist stetig und D ist zusammenhängend. Da Zusammenhang eine topologische Eigenschaft ist, ist auch $f(D)$ zusammenhängend. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $f(D)$ offen ist.

Sei dafür $a \in D$ mit Bild $b := f(a)$. Es gilt zu zeigen, dass es eine offene Umgebung $U_\varepsilon(b)$ von b gibt, die ganz in $f(D)$ enthalten ist. Ersetzen wir dabei gegebenenfalls $f(z)$ durch $g(z) := f(z+a) - b$ und beachten, dass Translationen Homöomorphismen sind, so können wir ohne Einschränkung $a = b = 0$ annehmen.

D ist offen, so dass $0 \in D$ ein innerer Punkt ist. Da f holomorph und nach Korollar 3.39 also analytisch ist, gibt es somit eine offene Umgebung $U_\varepsilon(0)$ in D und eine auf $U_\varepsilon(0)$ konvergente Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu$ mit Koeffizienten $a_\nu \in \mathbb{C}$ und

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, z^\nu \quad \text{für alle } z \in U_\varepsilon(0).$$

D ist ein Gebiet und f nach Voraussetzung auf D nicht konstant, insbesondere nicht konstant Null. Die Teilmenge $U_\varepsilon(0) \subseteq D$ ist offen und enthält damit einen Häufungspunkt. Nach dem Identitätssatz 4.8 ist f daher auch auf $U_\varepsilon(0)$ nicht konstant Null, so dass nicht alle Koeffizienten a_ν Null sein können. Wegen $f(0) = 0$ gilt aber $a_0 = 0$. Sei also nun $n \geq 1$ der kleinste Index ν mit $a_\nu \neq 0$. Wir können somit

$$f(z) = z^n \cdot \underbrace{\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu\, z^{\nu-n}}_{=:g(z)} \quad \text{für alle } z \in U_\varepsilon(0)$$

schreiben. Die Funktion $g(z)$ ist hierbei auf $U_\varepsilon(0)$ holomorph und erfüllt $g(0) = a_n \neq 0$. Da g stetig ist, folgt hieraus $g(z) \neq 0$ in einer ganzen Kreisumgebung $U_{\varepsilon_1}(0)$ mit einem hinreichend kleinen $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$. Wir wenden nun Teil (b) von Lemma 4.6 an auf die Funktion

$$g : U_{\varepsilon_1}(0) \to \mathbb{C}.$$

Das dürfen wir, da $U_{\varepsilon_1}(0)$ ein Sterngebiet und also insbesondere ein Elementargebiet ist. Es folgt die Existenz einer holomorphen Funktion

$$H : U_{\varepsilon_1}(0) \to \mathbb{C} \text{ mit } g(z) = H^n(z) \quad \text{für alle } z \in U_{\varepsilon_1}(0).$$

Setzen wir $F(z) := z\,H(z)$ auf $U_{\varepsilon_1}(0)$, so erhalten wir dort $f(z) = (z\,H(z))^n = F^n(z)$.[37] Ferner gilt $F(0) = 0$ und $F'(0) = H(0) + 0\,H'(0) = H(0) \neq 0$. Wir wollen den Satz über die inverse

[37] Insbesondere haben wir hier in Verallgemeinerung von Lemma 4.6 eine n-te Wurzel aus einer nicht nullstellenfreien holomorphen Funktion gezogen. Vgl. hierzu auch Übungsaufgabe 4.1.

Funktion aus der reellen Analysis auf F im Punkt $z = 0$ anwenden und interpretieren dafür $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Das dürfen wir tun,

denn: Wir schreiben $F = u + vi$ mit reellen Funktionen u und v. Als holomorphe Funktion ist F nach Satz 2.21 reell total differenzierbar und nach Korollar 2.23 gilt $F' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$. Wegen der Stetigkeit von F' sind somit die partiellen Ableitungen von F stetig, was die erste Voraussetzung des Satzes über die inverse Funktion ist. Wir müssen noch zeigen, dass die Jacobi-Determinante[38]

$$J(F) = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = u_x\, v_y - u_y\, v_x$$

für $x = y = 0$ nicht verschwindet. Als holomorphe Funktion erfüllt F die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen 2.21, es gelten also $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Mit $F' = u_x + iv_x$ und $F'(0) \neq 0$ folgt somit für $x = y = 0$

$$J(F) = u_x^2 + v_x^2 \neq 0,$$

was zu zeigen war. #

Mit dem Satz über die inverse Funktion erhalten wir nun eine offene Umgebung $V \subseteq U_{\varepsilon_1}(0)$ von 0 und eine offene Umgebung W von 0, so dass $F|_V^W : V \to W$ bijektiv ist. Insbesondere ist $F(V)$ offen. $0 = F(0)$ ist somit ein innerer Punkt von $F(V)$, so dass es ein hinreichend kleines $r > 0$ gibt mit $U_r(0) \subseteq F(V)$. Dann gilt bereits $U_{r^n}(0) \subseteq f(V) \subseteq f(D)$,

denn: Wir können ein beliebiges $w \in U_{r^n}(0)$ in der Form $w = \tau^n$ mit einem $\tau \in \mathbb{C}$ schreiben. Dann gilt $|\tau|^n = |w| < r^n$ und also $|\tau| < r$. Wegen $U_r(0) \subseteq F(V)$ gibt es daher ein $z \in V$ mit $F(z) = \tau$. Es folgt

$$w = \tau^n = F(z)^n = F^n(z) = f(z)$$

und damit die Behauptung. #

Wir haben somit gezeigt, dass es eine offene Umgebung von 0 gibt, die ganz in $f(D)$ enthalten ist. Da wir bereits zu Beginn den Satz auf diese Behauptung zurückgeführt hatten, ist dieser hiermit bewiesen. □

Korollar 4.15 (Offenheitssatz)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf keiner Zusammenhangskomponente von D konstant ist. Dann ist f eine* ***offene*** *Abbildung, bildet also offene Teilmengen von D stets auf offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ ab.*

Beweis. Sei A eine offene Teilmenge von D. Wegen der Offenheit von A in D und der von D in $\mathbb{C}$ ist nach Konstruktion der Unterraumtopologie auch A offen in $\mathbb{C}$. Insbesondere erhalten wir

$$A = \bigcup_{a \in A} U_{\varepsilon_a}(a),$$

wobei $\varepsilon_a > 0$ jeweils so gewählt sei, dass $U_{\varepsilon_a}(a) \subseteq A$ gilt. Da f nach Voraussetzung auf keiner Zusammenhangskomponente konstant ist und wegen der Eindeutigkeit der holomorphen

[38] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851)

Fortsetzung 4.12 ist f auf keinem der Gebiete $U_{\varepsilon_a}(a)$ konstant. Nach dem Satz von der Gebietstreue 4.14 ist dann für alle $a \in A$ das Bild $f(U_{\varepsilon_a}(a)) \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die Behauptung folgt, da nach Definition der Topologie die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist. □

Der Satz von der Gebietstreue 4.14 hat noch zwei weitere Korollare, für deren Formulierung wir allerdings zuerst noch etwas Notation einführen.

Definition 4.16. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wir sagen, f habe in $z_0 \in D$ ein* ***lokales Betragsmaximum*** *bzw.* ***lokales Betragsminimum****, wenn es eine offene Umgebung $U_\delta(z_0)$ von z_0 in D gibt mit*

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \textit{bzw.} \quad |f(z)| \geq |f(z_0)| \quad \textit{für alle } z \in U_\delta(z_0).$$

Korollar 4.17. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die auf D nicht konstant ist. Dann gilt*

(a) *Die Funktion f hat auf D kein lokales Betragsmaximum.* ***(Maximumprinzip)***

(b) *Besitzt f in z_0 ein lokales Betragsminimum, so gilt $f(z_0) = 0$.* ***(Minimumprinzip)***

Beweis. Wir zeigen zunächst das Maximumprinzip. Angenommen, f nähme in $z_0 \in D$ ein lokales Betragsmaximum an. Nach Definition 4.16 gäbe es dann eine offene Umgebung $U_\delta(z_0) \subseteq D$ mit $\delta > 0$ und

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \text{für alle } z \in U_\delta(z_0).$$

Die Funktion f wäre auch eingeschränkt auf $U_\delta(z_0)$ nicht konstant,

denn: Der Punkt z_0 ist ein Häufungspunkt von $U_\delta(z_0)$. Wäre also f eingeschränkt auf $U_\delta(z_0)$ konstant, so nach dem Identitätssatz 4.8 auch auf ganz D, was der Voraussetzung des Satzes widerspäche. #

Nach dem Satz von der Gebietstreue 4.14 wäre somit auch $f(U_\delta(z_0))$ ein Gebiet und insbesondere offen, und $f(z_0)$ wäre ein innerer Punkt von $f(U_\delta(z_0))$. Es gäbe dann also eine offene Umgebung $U_\varepsilon(f(z_0)) \subseteq f(U_\delta(z_0))$ mit $\varepsilon > 0$. Jede solche Umgebung enthielte aber einen Punkt $f(z_1)$ mit $z_1 \in U_\delta(z_0)$ und $|f(z_1)| > |f(z_0)|$,[39] was ein Widerspruch zu unserer Annahme ist.

Der Beweis des Minimumprinzips geht genauso, mit dem einzigen Unterschied, dass im Fall $f(z_0) = 0$ in der Entsprechung zu Fußnote 39 kein Punkt mit kleinerem Betrag zu finden ist. Alternativ können wir wie folgt argumentieren. Angenommen, f nähme in $z_0 \in D$ ein lokales Betragsminimum mit $f(z_0) \neq 0$ an. Dann existierte ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq D$ und $f(z) \neq 0$ für alle $z \in U_\delta(z_0)$. Die Abbildung $\frac{1}{f} : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ wäre dann nicht konstant, denn andernfalls wäre f auf $U_\delta(z_0)$ und damit auch auf D konstant, und würde ein Betragsmaximum in z_0 annehmen, was ein Widerspruch zu Aussage (a) ist. □

Korollar 4.18 (Maximumprinzip für Kompakta)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $K \subseteq D$ kompakt und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nimmt die Einschränkung $f|_K$ ihr – wegen der Kompaktheit von K existentes – Betragsmaximum auf dem Rand $\partial K = \overline{K} \setminus \mathring{K} = K \setminus \mathring{K}$ von K an.*

[39] Für $f(z_0) = 0$ ist das klar. Für $f(z_0) \neq 0$ können wir $f(z_1) := (1 + \frac{\varepsilon}{2|f(z_0)|}) f(z_0)$ wählen.

Beweis. Es gilt $K = \mathring{K} \dot{\cup} \partial K$. Sei $z_0 \in K$ ein Punkt, in dem $f|_K$ sein Betragsmaximum annimmt. Liegt z_0 auf dem Rand ∂K, so ist nichts zu zeigen. Liegt z_0 im Inneren $\mathring{K}$, so nimmt f in $z_0 \in D$ ein lokales Betragsmaximum an, ist also nach dem Maximumprinzip 4.17 (a) konstant auf D, also auch auf K. Auch in diesem Fall wird also das Betragsmaximum auf dem Rand angenommen. □

Satz 4.19 (Lemma von Schwarz[40]). *Sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die* ***offene Einheitskreisscheibe****. Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ holomorph und gelte $f(0) = 0$. Dann gelten*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{E} \quad \textit{und} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Beweis. Wegen $f(0) = 0$ ist die Funktion $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{für } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

auf dem Gebiet $\mathbb{E}$ holomorph.[41] Nach dem Maximumprinzip auf Kompakta 4.18 nimmt daher die Funktion g eingeschränkt auf das Kompaktum $K_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ mit $r \in (0, 1)$ ihr Maximum auf dem Rand $\partial K_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ an. Dort gilt aber

$$|g(z)| = |\frac{f(z)}{z}| = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r},$$

so dass $|g(z)|$ auf ganz K_r durch $\frac{1}{r}$ beschränkt ist. Lassen wir r gegen 1 gehen, folgt für alle $z \in \mathbb{E}$

$$|g(z)| \leq 1 \quad \text{und somit auch} \quad |f(z)| \leq |z|.$$

Außerdem gilt $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$. □

Korollar 4.20. *Gibt es in der Situation des Lemmas von Schwarz 4.19 zusätzlich einen Punkt $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ vom Betrag $|c| = 1$ mit $f(z) = cz$. Geometrisch lässt sich f also als Drehung verstehen.*

Beweis. Sei $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$, also mit $|g(z_0)| = 1$. Wegen $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$ (vgl. Beweis des Lemmas von Schwarz 4.19) nimmt g dann in z_0 ein lokales Betragsmaximum an. Nach dem Maximumprinzip 4.17 ist also g auf $\mathbb{E}$ konstant, so dass wir

$$g(z) = c \quad \text{für alle } z \in \mathbb{E}$$

schreiben können mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$. Setzen wir nun $z = z_0$ in $g(z)$ ein, so folgt $|c| = 1$ wegen $|g(z_0)| = 1$. Hieraus folgt offensichtlich das Korollar. □

[40]Hermann Amandus Schwarz (1843 - 1921)

[41]Hierfür kann der Riemann'sche Hebbarkeitssatz 5.7 verwendet werden, den wir im nächsten Kapitel behandeln werden. Wegen $f(0) = 0$ ist nämlich $\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$, d.h. die Funktion $\frac{f(z)}{z}$ ist stetig nach $z_0 = 0$ fortsetzbar, nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz also auch holomorph nach $z_0 = 0$ fortsetzbar.

4.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 4.1. *Sei D ein Elementargebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei z_0 die einzige Nullstelle von f in D. Zeigen Sie: Genau dann gibt es eine in D holomorphe Funktion h mit $(h(z))^k = f(z)$, wenn k die Nullstellenordnung von f in z_0 teilt.*

Aufgabe 4.2. *In der reellen Analysis ordnet man einer glatten Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ihre Taylor-Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 \in I$ zu. Nach Teil (b) von Bemerkung 3.40 besitzt die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \in \mathbb{R}^\times, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

zwar mit $\sum_{n=0}^{\infty} 0x^n$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Taylor-Reihe um $x_0 = 0$, diese stellt jedoch g offensichtlich nur im Punkt $x = 0$ dar. Andererseits besagt der Potenzreihenentwicklungssatz 3.38, dass jede auf einer offenen Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ gegebene holomorphe Funktion in allen Punkten der Kreisscheibe durch ihre Taylor-Reihe um den Mittelpunkt dargestellt wird. In dieser Aufgabe untersuchen wir, wie sich die Funktion g beim Übergang ins Komplexe verhält.

(a) *Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen*

$$h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

mit $h(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^\times$.

(b) *Zeigen Sie, dass sich keine der in (a) bestimmten Funktionen h stetig nach $z = 0$ fortsetzen lässt.*

(c) *Welchen Konvergenzradius hat die reelle Taylor-Reihe der Funktion g um $x = 1$?*

(d) *Wie wir in Kapitel 5 sehen werden, trifft für jede holomorphe Funktion $h : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $a \in D$ genau einer der folgenden drei Fälle zu.*

(i) *h ist stetig nach a fortsetzbar.*

(ii) *Es gilt $|h(z)| \to \infty$ für $z \to a$.*

(iii) *h kommt in jeder in D gelegenen Umgebung von a jedem Wert in $\mathbb{C}$ beliebig nahe.*

Welcher Fall trifft jeweils für die in Teil (a) bestimmten Funktionen h zu?

Aufgabe 4.3. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $u : D \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion (vgl. Übungsaufgabe 2.1).*

(a) *Zeigen Sie, dass es dann eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gibt mit $\mathrm{Re}(f) = u$.*

Hinweis: *Falls es ein solches f gibt, kann man f' durch u ausdrücken.*

(b) *Folgern Sie mit dem Satz von der Gebietstreue 4.14, dass die Funktion u konstant ist, wenn sie ein lokales Extremum hat.*

Aufgabe 4.4. *Für ein beliebiges Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt*

$$\mathrm{Aut}(D) := \{f : D \to D \mid f \textit{ bijektiv und } f, f^{-1} \textit{ sind holomorph}\}$$

*die **Automorphismengruppe** von D. In dieser Aufgabe sollen die Automorphismengruppen der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ und der oberen komplexen Halbebene $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ bestimmt werden.*

(a) *Zeigen Sie, dass die Abbildung*

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{E} & \to \mathbb{E}, \\ z & \mapsto \frac{z-a}{\overline{a}z-1} \end{cases}$$

für alle $a \in \mathbb{E}$ wohldefiniert, selbstinvers und holomorph ist.

(b) *Folgern Sie*

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{E}) = \left\{ \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \textit{ mit } |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

und

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \right\}.$$

Hinweis: *Ist $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{E})$, so gibt es ein $a \in \mathbb{E}$ und ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$, für die $f = c \cdot \varphi_a$ gilt mit der Funktion φ_a aus Teil (a).*

KAPITEL 5

Singularitäten

5.1 Klassifikation der Singularitäten

Definition 5.1. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann heißt für alle $r > 0$*

$$\dot{U}_r(z_0) := U_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

*eine **punktierte Kreisscheibe** um $z = z_0$.*

Definition 5.2. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ aber $\dot{U}_r(z_0) \subseteq D$ für ein $r > 0$. Dann heißt z_0 eine **(isolierte) Singularität** von f.*

Bemerkung 5.3. *Wir sprechen Definition 5.2 von* isolierten *Singularitäten, da wir per Konstruktion ausgeschlossen haben, dass die Menge der Singularitäten einen Häufungspunkt enthält. Man kann allgemeiner auch Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit nicht-isolierten Singularitäten betrachten, wie etwa*

$$D = \mathbb{C} \setminus (\{k^{-1} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{0\}) \quad \textit{und} \quad f : \begin{cases} D & \to \mathbb{C}, \\ z & \mapsto \sin(\frac{\pi}{z})^{-1}. \end{cases}$$

Offensichtlich ist für jedes $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ die Stelle $z_k := k^{-1}$ eine isolierte Singularität von f wie in der Definition. Ebenfalls offensichtlich ist f auch in $z_0 := 0$ nicht definiert. Wegen $\lim_{k\to\infty} z_k = z_0$ liegt aber in z_0 keine isolierte Singularität vor. Wir werden im Weiteren keine nicht-isolierten Singularitäten behandeln und deshalb vereinfachend schlicht von Singularitäten *sprechen, wenn wir* isolierte Singularitäten *meinen.*

Definition 5.4. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine Singularität von f. Genau dann heißt z_0 **hebbar**, wenn sich f holomorph auf $D \cup \{z_0\}$ fortsetzen lässt, wenn es also eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ gibt mit $\tilde{f}|_D = f$.*

Bemerkung 5.5. *In der Situation von Definition 5.4 lässt sich zweierlei feststellen:*

(a) *Als Vereinigung zweier offener Mengen ist $D \cup \{z_0\} = D \cup U_r(z_0)$ offen.*

(b) *$\tilde{f}$ ist holomorph und insbesondere stetig in z_0. Somit gilt*

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \tilde{f}(z) = \lim_{z \to z_0} f(z),$$

und $\tilde{f}$ ist, wenn existent, eindeutig durch f bestimmt. Wir schreiben daher auch einfach f statt $\tilde{f}$.

Beispiel 5.6. *Die Funktion*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}^\times$$

hat im Punkt $z = 0$ eine hebbare Singularität,

denn: Mit der Taylor-Entwicklung 2.45 (a) des Sinus gilt

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \dots\right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Die Potenzreihe

$$1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \dots$$

konvergiert somit für alle $z \in \mathbb{C}$, liefert uns also eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die für $z \neq 0$ mit $f(z)$ übereinstimmt, so dass wir eine holomorphe Fortsetzung von $f(z)$ in $z = 0$ erhalten. #

Satz 5.7 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz). *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine Singularität von f. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *z_0 ist hebbar.*

(ii) *f ist stetig nach $D \cup \{z_0\}$ fortsetzbar.*

(iii) *Es gibt ein $\delta > 0$ mit $\dot{U}_\delta(z_0) \subseteq D$, so dass f auf $\dot{U}_\delta(z_0)$ beschränkt ist.*

(iv) *$\lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z) = 0$.*

Beweis. Aus Aussage (i) folgt offensichtlich Aussage (ii).

Gelte nun Aussage (ii) und nehmen wir an, f sei stetig nach $D \cup \{z_0\}$ fortsetzbar. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0)| < 1 \quad \text{für alle } z \in U_\delta(z_0).$$

Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$ ist $\tilde{f}(z) = f(z)$, also gilt für solche z

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(z) - \tilde{f}(z_0)| + |\tilde{f}(z_0)| \\ &= |\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z_0)| + |\tilde{f}(z_0)| \\ &\leq 1 + |\tilde{f}(z_0)|, \end{aligned}$$

so dass f auf $\dot{U}_\delta(z_0)$ beschränkt ist. Das ist Aussage (iii).

Aussage (iii) impliziert sofort Aussage (iv).

Gelte schließlich Aussage (iv). Wir definieren eine Funktion $g : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ durch

$$g(z) := \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & \text{für } z \neq z_0, \\ 0 & \text{für } z = z_0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist g auf $\dot{U}_\delta(z_0)$ holomorph. Wegen (iv) gilt

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)^2 f(z) - 0}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0,$$

und g ist auch in $z = z_0$ komplex differenzierbar mit Ableitung $g'(z_0) = 0$. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38 hat deshalb g auf $U_\delta(z_0)$ die Taylor-Entwicklung

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu$$

mit $a_\nu = \frac{g^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}$. Wegen $g(z_0) = g'(z_0) = 0$ gilt dabei $a_0 = a_1 = 0$. Klammern wir nun $(z-z_0)^2$ aus und setzen

$$h(z) := \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^{\nu-2} \quad \text{für alle } z \in U_\delta(z_0).$$

Dann ist h holomorph auf $U_\delta(z_0)$, denn wegen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu = (z-z_0)^2 \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^{\nu-2}$$

haben die Potenzreihen auf beiden Seiten der Gleichung denselben Konvergenzradius. Außerdem stimmt h auf $\dot{U}_\delta(z_0)$ wegen

$$h(z) = \frac{1}{(z-z_0)^2} \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu = \frac{g(z)}{(z-z_0)^2} = f(z) \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_\delta(z_0)$$

mit f überein. h liefert also eine holomorphe Fortsetzung von f auf ganz $U_\delta(z_0)$. Die Hebbarkeit der Singularität z_0 folgt, wenn wir wie folgt eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|_D = f$ definieren.

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} h(z) & \text{für } z \in U_\delta(z_0), \\ f(z) & \text{für } z \notin U_\delta(z_0). \end{cases}$$

□

Beispiel 5.8. *In Beispiel 5.6 haben wir*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \quad \textit{mit } z \in \mathbb{C}^\times$$

betrachtet. Mit dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 5.7 lässt sich die hebbare Singularität in $z = 0$ nun leichter nachweisen, *denn: Es gilt*

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \sin z = \sin 0 = 0$$

und die Hebbarkeit von $z = 0$ folgt mit Eigenschaft (iv) des Hebbarkeitssatzes. #

Definition 5.9. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine Singularität von f. Genau dann heißt z_0 ein **Pol** von f, wenn es ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subseteq D \cup \{z_0\}$ gibt, eine holomorphe Funktion $g : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ und ein $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ mit*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_\delta(z_0).$$

*Die Zahl m heißt hierbei die **Polstellenordnung** $\infty\text{-ord}(f; z_0)$ von f in z_0. Ist speziell $m = 1$, so heißt z_0 ein **einfacher Pol** von f.*

Bemerkung 5.10. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine Singularität von f.*

(a) *Die Polstellenordnung $\infty\text{-ord}(f; z_0)$ wie in Definition 5.9 ist eindeutig bestimmt,*

denn: Nehmen wir an, es gälte für $m > \tilde{m} \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \frac{h(z)}{(z - z_0)^{\tilde{m}}} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_\delta(z_0),$$

wobei $g, h : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorphe Abbildungen mit $g(z_0) \neq 0 \neq h(z_0)$ seien. Wegen $h(z_0) \neq 0$ und der Stetigkeit von h gibt es eine punktierte Umgebung von $z = z_0$, in der wir $h(z)$ invertieren können und in der $\frac{1}{h}$ beschränkt ist, und es gilt dort

$$(z - z_0)^{m - \tilde{m}} = \frac{g(z)}{h(z)}.$$

Lassen wir nun z gegen z_0 gehen, folgt mit $m - \tilde{m} > 0$ die Unmöglichkeit $g(z_0) = 0$. Da sich $m < \tilde{m}$ analog ausschließen lässt, folgt $m = \tilde{m}$ und somit die Eindeutigkeit von m. #

(b) *Gilt $\infty\text{-ord}(f; z_0) = m$, so gibt es ein $\delta > 0$ mit*

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_\delta(z_0)$$

für geeignete Koeffizienten $a_\nu \in \mathbb{C}$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq -m}$ und $a_{-m} \neq 0$. Dafür müssen wir nur $g(z)$ in $z = z_0$ in eine Potenzreihe entwickeln und $g(z_0) \neq 0$ beachten. Wir werden diesen Effekt in Abschnitt 5.2 genauer untersuchen.

Satz 5.11. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine Singularität von f. Dann sind die folgenden Aussagen gleichbedeutend:*

(i) *z_0 ist ein Pol von f.*

(ii) $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$.

Beweis. Sei zunächst z_0 ein Pol von f und

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_\delta(z_0)$$

mit g und m wie in Definition 5.9. Wegen $g(z_0) \neq 0$, der Stetigkeit von g in z_0 und $m \geq 1$ folgt dann wie verlangt

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \frac{|g(z)|}{|z-z_0|^m} = \infty,$$

also Aussage (ii).

Gelte nun umgekehrt die in (ii) angegebene Bedingung $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$. Dann gibt es eine ganz in D enthaltene, punktierte Umgebung $\dot{U}_\delta(z_0)$ von z_0, auf der $|f(z)| > C$ für ein $C \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Dort ist $1/f$ definiert, holomorph und beschränkt. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 5.7 läßt sich $1/f$ somit holomorph zu einer Funktion $\tilde{f}$ auf $U_\delta(z_0)$ fortsetzen, die nach Konstruktion $\tilde{f}(z_0) = 0$ erfüllt. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38 hat deshalb $\tilde{f}$ auf $U_\delta(z_0)$ eine Taylor-Entwicklung

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\nu=m}^{\infty} a_\nu (z-z_0)^\nu \quad \text{mit } a_\nu \in \mathbb{C} \text{ für alle } \nu \in \mathbb{Z}_{\geq m}$$

mit einem $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $a_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es gilt also

$$\tilde{f}(z) = (z-z_0)^m \, h(z)$$

mit einer holomorphen Funktion $h : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ ohne Nullstellen in $U_\delta(z_0)$.[42] Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$ gilt somit

$$f(z) = \frac{1}{\tilde{f}(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m \, h(z)} = \frac{\frac{1}{h(z)}}{(z-z_0)^m} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m},$$

wobei $g := 1/h$ auf $U_\delta(z_0)$ holomorph ist und $g(z_0) \neq 0$ erfüllt. □

Definition 5.12. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine Singularität von f. Genau dann heißt z_0 eine* ***wesentliche*** *Singularität von f, wenn z_0 weder hebbar noch ein Pol von f ist.*

Beispiel 5.13. *Die Funktion $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ist holomorph auf $D = \mathbb{C}^\times$ und hat eine wesentliche Singularität in $z = 0$,*

denn: Die Folgen $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ und $\left(\frac{1}{i\,n}\right)_{n=1}^{\infty}$ haben beide den Grenzwert 0 für n gegen unendlich. Es gilt aber

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = e^n \overset{n\to\infty}{\to} \infty \quad \textit{und} \quad |f\left(\frac{1}{i\,n}\right)| = |e^{i\,n}| = 1 \overset{n\to\infty}{\to} 1,$$

so dass f weder einen Pol in $z = 0$ hat noch sich dorthin holomorph fortsetzen lässt. #

[42] Dass h in $\dot{U}_\delta(z_0)$ keine Nullstellen hat, ist klar, denn andernfalls hätte $\tilde{f}$ und damit $\frac{1}{f}$ dort eine Nullstelle. Außerdem gilt $h(z_0) = a_m \neq 0$.

Satz 5.14 (Satz von Casorati-Weierstraß[43]). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine wesentliche Singularität von f. Sei weiter $\dot{U}_\delta(z_0)$ eine beliebige, vorgegebene punktierte Umgebung von z_0. Dann existiert zu jedem $a \in \mathbb{C}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $z \in \dot{U}_\delta(z_0) \cap D$ mit $|f(z) - a| < \varepsilon$.*

Bemerkung 5.15. *Im Satz von Casorati-Weierstraß 5.14 kommt also die Funktion f in jeder noch so kleinen punktierten Umgebung $\dot{U}$ von z_0 jedem Wert $a \in \mathbb{C}$ beliebig nahe. Es gilt sogar noch mehr: Nach dem Großen Satz von Picard 9.19 gibt es für jedes $\dot{U}$ ein $c(\dot{U}) \in \mathbb{C}$, so dass $\mathbb{C} \setminus \{c(\dot{U})\}$ in $f(\dot{U})$ enthalten ist.*

Beweis von Satz 5.14. Sei ohne Einschränkung $\delta > 0$ so klein, dass $\dot{U}_\delta(z_0)$ ganz in D liegt. Angenommen die Behauptung wäre nicht richtig. Dann gäbe es ein $a \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|f(z) - a| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_\delta(z_0).$$

Es folgte, dass durch

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - a}$$

auf $\dot{U}_\delta(z_0)$ eine holomorphe und beschränkte Funktion ohne Nullstellen gegeben wäre. Nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 5.7 ließe sich dieses g dann holomorph auf $U_\delta(z_0)$ fortsetzen.

Fall 1: $g(z_0) \neq 0$. Dann gilt $f(z) = \frac{1}{g(z)} + a$ auf ganz $U_\delta(z_0)$, und $f(z)$ ist auf $U_\delta(z_0)$ holomorph, so dass z_0 eine hebbare Singularität von f ist. Widerspruch.

Fall 2: $g(z_0) = 0$. Da g auf $U_\delta(z_0)$ nicht identisch Null ist, gilt nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38 und dem Identitätssatz 4.8

$$g(z) = (z - z_0)^m \, h(z) \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ und } h : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C} \text{ holomorph mit } h(z_0) \neq 0.$$

Hierbei ist sogar $h(z) \neq 0$ für alle $z \in U_\delta(z_0)$. Für $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$ folgt

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + a = \frac{1/h(z)}{(z - z_0)^m} + a = \frac{G(z)}{(z - z_0)^m}$$

mit

$$G(z) := \frac{1}{h(z)} + a(z - z_0)^m \quad \text{für alle } z \in U_\delta(z_0).$$

Es gilt $G(z_0) = \frac{1}{h(z_0)} \neq 0$, so dass f in z_0 einen Pol hat. Widerspruch.

Insgesamt ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 5.16. *Es gilt auch die Umkehrung des Satzes von Casorati-Weierstraß 5.14,*

denn: Liegt das Bild einer beliebigen punktierten Umgebung von z_0 dicht in $\mathbb{C}$, so kann z_0 nach den Sätzen 5.7 und 5.11 weder hebbar noch ein Pol sein. Definitionsgemäß ist z_0 dann wesentlich, was zu zeigen war. #

[43] Felice Casorati (1835 - 1890)

5.2 Laurent-Zerlegung

Nach Korollar 3.39 können wir eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ in jedem Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe entwickeln. Es stellt sich heraus, dass dies in punktierten Umgebungen isolierter Singularitäten im Wesentlichen genauso funktioniert. Es lassen sich sogar allgemeiner Reihenentwicklungen für holomorphe Funktionen auf so genannten Ringgebieten definieren. Letztere wollen wir nun einführen.

Definition 5.17. *Für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ und alle $r, R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $0 \le r < R \le \infty$ heißt das Gebiet*

$$D_r^R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$$

*ein **Ringgebiet**.*

Bemerkung 5.18. *Wir werden im Weiteren ohne Einschränkung zumeist nur Ringgebiete $D_r^R(z_0)$ mit $z_0 = 0$ studieren, da die allgemeineren Ringgebiete mit $z_0 \neq 0$ aus diesen schlicht durch Translation hervorgehen. Für diese schreiben wir dann kurz $D_r^R := D_r^R(0)$.*

Satz 5.19 (Satz von der Laurent-Zerlegung[44])**.** *Seien $r, R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $0 \le r < R \le \infty$, und sei $f : D_r^R \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann besitzt f eine Zerlegung*

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{für alle } z \in D_r^R \tag{5.1}$$

mit holomorphen Funktionen

$$g : U_R(0) \to \mathbb{C} \quad \text{und} \quad h : U_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C} \text{ mit } h(0) = 0.$$

*Diese Zerlegung ist eindeutig bestimmt. Die Funktion $z \mapsto h(\frac{1}{z})$ heißt hierbei der **Hauptteil** und die Funktion $z \mapsto g(z)$ der **Nebenteil** von f. Die Zerlegung (5.1) heißt die **Laurent-Zerlegung** von f.*

Bevor wir den Satz beweisen, zeigen wir noch ein technisches Lemma, das wir für den Nachweis der Existenz der Laurent-Zerlegung benötigen werden.

Lemma 5.20. *Seien $r, \varrho, P, R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $0 \le r < \varrho < P < R \le \infty$, und sei $G : D_r^R \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

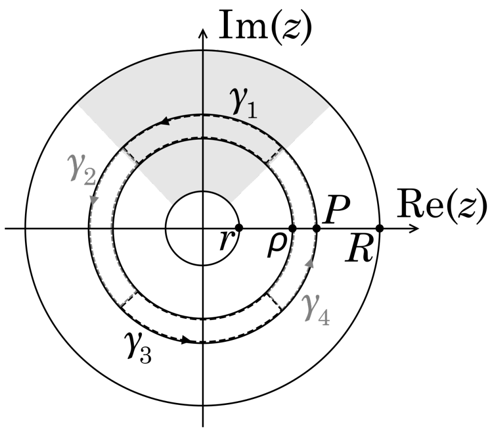
$$\int_{|w|=\varrho} G(w)\,\mathrm{d}w = \int_{|w|=P} G(w)\,\mathrm{d}w,$$

wobei jeweils einfach im mathematisch positiven Sinn über die angegebenen Kreislinien integriert wird.[45]

[44] Pierre Alphonse Laurent (1813 - 1854)

[45] Hierbei wird also für ein beliebiges $r \in \mathbb{R}_{>0}$ im Fall des Integrals über $|w| = r$ längs der Kurve $\gamma_r : t \mapsto r\,e^{2\pi i t}$ mit $t \in [0, 1]$ integriert. Diese abkürzende Schreibweise ist praktisch und wird künftig weiter benutzt werden.

Beweis. Sei die Notation wie in der folgenden Skizze:



Die Kurven γ_k mit $k \in \{1, \dots, n\}$[46] sind geschlossen und stückweise glatt, und ihre Bilder liegen jeweils in einem – in der Skizze für γ_1 grau markierten – Sterngebiet, auf dem $G(w)$ holomorph ist. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz 3.25 gilt daher

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} G(w)\,\mathrm{d}w = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0.$$

Da sich die Integrale über die entgegengesetzt orientierten kleinen Geradenstückchen gegenseitig aufheben, folgt also

$$0 = \int_{|w|=P} G(w)\,\mathrm{d}w + \left(- \int_{|w|=\varrho} G(w)\,\mathrm{d}w \right),$$

und das Lemma ist bewiesen. □

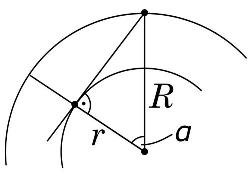
Beweis von Satz 5.19. Wir zeigen zuächst die Eindeutigkeit der Laurent-Zerlegung. Seien

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{g}(z) + \tilde{h}\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{für alle } z \in D_r^R$$

zwei Zerlegungen mit Funktionen h und g bzw. $\tilde{h}$ und $\tilde{g}$ wie im Satz gefordert. Mit $G := g - \tilde{g}$ und $H := h - \tilde{h}$ gilt dann

$$G(z) = -H\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{für alle } z \in D_r^R.$$

[46] Im Bild ist $n = 4$. Die tatsächlich benötigte Anzahl von Unterteilungen hängt von $\alpha := \arccos \frac{r}{R}$ ab:



Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir

$$F(z) := \begin{cases} G(z) & \text{für } |z| < R, \\ -H\left(\frac{1}{z}\right) & \text{für } |z| > r. \end{cases}$$

Dann ist F wohldefiniert und auf $\mathbb{C}$ holomorph. Sei nun $\varrho \in (r, R)$. Auf dem Kompaktum $|z| \leq \varrho$ ist die stetige Funktion $F(z) = G(z)$ beschränkt. Ebenso ist die stetige Funktion $H(w)$ auf dem Kompaktum $|w| \leq \frac{1}{\varrho} < \frac{1}{r}$ beschränkt, so dass $F(z) = -H(\frac{1}{z})$ auf $|z| \geq \varrho$ beschränkt ist. Insgesamt ist $F(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt und somit nach dem Satz von Liouville 3.34 konstant. Es gilt

$$\lim_{|z|\to\infty} |F(z)| = \lim_{|z|\to\infty} \left|-H\left(\frac{1}{z}\right)\right| = \lim_{|z|\to\infty} \left|H\left(\frac{1}{z}\right)\right| = 0,$$

denn es gilt ja $h(0) = 0$, $\tilde{h}(0) = 0$ und $H = h - \tilde{h}$. Also ist F auf $\mathbb{C}$ identisch Null, also sind G und H identisch Null und somit $g = \tilde{g}$ und $h = \tilde{h}$.

Es verbleibt die Existenz der Laurent-Zerlegung zu zeigen. Gelte dafür $r < \varrho < P < R$ wie in Lemma 5.20. Da wir die Eindeutigkeit der Laurent-Zerlegung bereits gezeigt haben, genügt es, ihre Existenz auf jedem der kleineren Ringgebiete D_ϱ^P zu beweisen. Das wollen wir mit dem Lemma tun. Sei also $z \in D_\varrho^P$ fest. Für $w \in D_r^R$ sei

$$G(w) := \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{für } w \neq z, \\ f'(z) & \text{für } w = z. \end{cases}$$

Dann ist $G(w)$ auf $D_r^R \setminus \{z\}$ holomorph. Außerdem ist $G(w)$ in $w = z$ stetig, denn f ist ja in $w = z$ komplex differenzierbar. $G(w)$ ist somit in einer Umgebung von $w = z$ beschränkt und lässt sich daher nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 5.7 holomorph auf ganz D_r^R fortsetzen. Nach Lemma 5.20 gilt somit

$$\begin{aligned} \int\limits_{|w|=P} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z) \int\limits_{|w|=P} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} &= \int\limits_{|w|=P} G(w)\,\mathrm{d}w \\ &= \int\limits_{|w|=\varrho} G(w)\,\mathrm{d}w \\ &= \int\limits_{|w|=\varrho} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z) \int\limits_{|w|=\varrho} \frac{\mathrm{d}w}{w-z}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Die Funktion $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ ist für $w \neq z$ holomorph. Da wir außerdem $|z| > \varrho$ vorausgesetzt hatten, gilt nach dem Cauchy'schen Integralsatz 3.25

$$\int_{|w|=\varrho} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} = 0.$$

Nach der Cauchy'schen Integralformel 3.29 gilt zudem wegen $|z| < P$

$$\int\limits_{|w|=P} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} = 2\pi i.$$

Setzen wir dies in (5.2) ein, ergibt sich

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|w|=P} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int\limits_{|w|=\varrho} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$$

mit

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=P} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad \text{für } |z| < P,$$

$$h(z) := \frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\varrho} \frac{f(w)}{w-\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}w \qquad \text{für } 0 < |z| < \frac{1}{\varrho}.$$

Analog zum Beweis der verallgemeinerten Cauchy'schen Integralformel 3.31 zeigt man, dass $g(z)$ auf $U_P(0)$ und $h(z)$ auf $\dot{U}_{\frac{1}{\varrho}}(0)$ holomorph ist. Wir müssen noch zeigen, dass sich h durch $h(0) = 0$ holomorph nach $z = 0$ fortsetzen läßt. Für $|w| = \varrho$ und $|z| < \frac{1}{\varrho}$ gilt

$$|w - \frac{1}{z}| = |\frac{1}{z} - w| \geq ||\frac{1}{z}| - |w|| = ||\frac{1}{z}| - \varrho|.$$

Mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale 3.15 folgt

$$|h(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\max_{|w|=\varrho}|f(w)|}{|\frac{1}{z}| - \varrho} \cdot 2\pi\varrho \overset{z\to 0}{\to} 0.$$

Insbesondere ist $h(z)$ beschränkt für z nahe bei 0, hat also nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 5.7 eine hebbare Singularität bei $z = 0$. Aus Stetigkeitsgründen folgt $h(0) = 0$. $\square$

Definition 5.21. *Unter einer* ***unendlichen Reihe*** *der Form* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ *versteht man das Paar*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\right).$$

Eine solche Reihe heißt ***konvergent****, wenn* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}$ *beide konvergieren; in diesem Fall heißt* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *der* ***Grenzwert*** *von* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$*, und man schreibt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}.$$

Im selben Sinn verwenden wir die Begriffe ***absoluter Konvergenz*** *und* ***gleichmäßiger Konvergenz*** *bei obigen Reihen.*

Definition 5.22. *Eine* ***Laurent-Reihe*** *mit* ***Entwicklungspunkt*** $z_0 \in \mathbb{C}$ *ist eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \textit{mit } a_n \in \mathbb{C} \textit{ für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Satz 5.23 (Satz von der Laurent-Entwicklung)**.** *Sei für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < R \leq \infty$ eine holomorphe Abbildung $f : D_r^R(z_0) \to \mathbb{C}$ gegeben. Dann besitzt f eine eindeutige Laurent-Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in D_r^R(z_0),$$

die auf $D_r^R(z_0)$ absolut und auf jeder kompakten Teilmenge von $D_r^R(z_0)$ gleichmäßig absolut konvergiert. Für die Koeffizienten gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w-z_0|=\varrho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z},$$

wobei über die genau einmal im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Kreislinie vom Radius $\varrho \in (r, R)$ um z_0 integriert wird.

Beweis. Sei ohne Einschränkung $z_0 = 0$. Sei $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})$ wie im Satz von der Laurent-Zerlegung 5.19. Seien

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für alle } z \in U_R(0),$$
$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \quad \text{für alle } z \in U_{\frac{1}{r}}(0)$$

die Taylor-Reihen von g und h – man beachte $h(0) = 0$. Setzen wir $a_{-n} := b_n$ für alle $n \geq 1$, so gilt

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{für alle } z \in D_r^R.$$

Die Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung folgt dann aus der entsprechenden Aussage aus dem Satz von der Laurent-Zerlegung 5.19. Die Aussagen über die Konvergenz folgen aus den wohlbekannten Sätzen über Konvergenz von Potenzreihen und der Stetigkeit der Funktion $\frac{1}{z}$.

Es verbleibt die Koeffizientenformel zu zeigen. Für $n \geq 0$ gilt hier nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38 und der verallgemeinerten Cauchy'schen Integralformel 3.31

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\varrho} \frac{g(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w \quad \text{für alle } \varrho \in (0, R).$$

Sei jetzt zusätzlich $\varrho > r$. Die Abbildung $w \mapsto \frac{1}{w}$ bildet die Kreislinie $|w| = \varrho$ auf die Kreislinie $|w| = \frac{1}{\varrho}$ ab und ändert die Orientierung. Daher gilt

$$\int\limits_{|w|=\varrho} \frac{h(\frac{1}{w})}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w \overset{w \mapsto \frac{1}{w}}{=} - \int\limits_{|w|=\frac{1}{\varrho}} \frac{h(w)}{\left(\frac{1}{w}\right)^{n+1}} \, \mathrm{d}\left(\frac{1}{w}\right) = \int\limits_{|w|=\frac{1}{\varrho}} h(w)\, w^{n-1} \, \mathrm{d}w,$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen $\mathrm{d}(\frac{1}{w}) = -\frac{\mathrm{d}w}{w^2}$ beachten.[47] Dieses Integral ist Null, *denn:* Nach Voraussetzung gilt $\frac{1}{\varrho} < \frac{1}{r}$, und $w \mapsto h(w)\, w^{n-1}$ ist wegen $h(0) = 0$ für $n \geq 0$ holomorph. Wir können somit den Cauchy'schen Integralsatz 3.25 anwenden, und die Behauptung folgt. #

Zusammengefasst gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\varrho} \frac{g(w) + h(\frac{1}{w})}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\varrho} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

wie verlangt.

Für $n < 0$ gilt nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38 und der verallgemeinerten Cauchy'schen Integralformel 3.31 für alle $\varrho \in (r, R)$

$$a_n = \frac{h^{(-n)}(0)}{(-n)!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\frac{1}{\varrho}} \frac{h(w)}{w^{-n+1}}\,\mathrm{d}w \overset{w\mapsto\frac{1}{w}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\varrho} \frac{h(\frac{1}{w})}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

und desweiteren mit derselben Argumentation wie im Fall $n \geq 0$ auch

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\varrho} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w = 0.$$

Zusammengefasst gilt auch hier

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\varrho} \frac{g(w) + h(\frac{1}{w})}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=\varrho} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

wie verlangt. □

Beispiel 5.24. *Die Funktion*

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 3} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$$

hat in D_1^3 eine Laurent-Entwicklung. Diese können wir wie folgt bestimmen: Die Partialbruchzerlegung liefert

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-3}.$$

[47] Für komplexe Kurvenintegrale haben wir eigentlich keine Transformationsformel bewiesen, die hier anwendbar ist. Strenggenommen müssten wir also die Integrale unter Verwendung der enstprechenden Parametrisierungen berechnen. Dies liefert in der Tat dasselbe Ergebnis.

Weiter gilt

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^n} = -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} \qquad \text{für } 1 < |z|,$$
$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{3^{n+1}} \qquad \text{für } |z| < 3.$$

$f(z)$ hat also auf D_1^3 eine Laurent-Zerlegung $f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z})$ mit

$$g(z) = -\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{3^{n+1}} \qquad \text{für alle } |z| < 3,$$
$$h(z) = -\sum_{n\geq 1} z^n \qquad \text{für alle } |z| < 1.$$

Satz 5.25. *Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine Singularität von f, so ist f auf dem Ringgebiet $\dot{U}_R(z_0) = D_0^R(z_0)$ für geeignetes $R > 0$ holomorph, besitzt dort also nach Satz 5.23 eine Laurent-Entwicklung. In dieser Situation gilt*

(a) *Genau dann ist z_0 hebbar, wenn $a_n = 0$ gilt für alle $n < 0$.*

(b) *Genau dann ist z_0 eine Polstelle der Ordnung $m \geq 1$, wenn $a_n = 0$ gilt für alle $n < -m$ und $a_{-m} \neq 0$ erfüllt ist.*

(c) *Genau dann ist z_0 wesentlich, wenn $a_n \neq 0$ gilt für unendlich viele $n < 0$.*

Beweis. Behauptung (a) gilt,

denn: Sei zunächst z_0 hebbar. Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38 für die holomorphe Fortsetzung von f nach z_0 besitzt dann f eine Potenzreihenentwicklung auf $U_R(z_0)$, die konstruktionsgemäß nur Koeffizienten zu nichtnegativen Indizes aufweist. Nach der in Satz 5.23 gezeigten Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung stimmt diese Potenzreihenentwicklung auf $\dot{U}_R(z_0)$ mit der Laurent-Entwicklung von f überein, und es folgt $a_n = 0$ für alle $n < 0$.

Erfüllt umgekehrt die Laurent-Entwicklung von f auf $\dot{U}_R(z_0)$ die Bedingung $a_n = 0$ für alle $n < 0$, so ist diese eine Potenzreihe, konvergiert nach Proposition 2.33 auf ganz $U_R(z_0)$ und stellt dort nach Satz 2.39 eine holomorphe Funktion dar. Nach Definition 5.4 ist z_0 dann hebbar. #

Behauptung (b) gilt,

denn: Sei zunächst z_0 ein Pol der Ordnung $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Nach Definition 5.9 gibt es dann eine auf $U_R(z_0)$ holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ und nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38 gibt es komplexe Zahlen b_n für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $b_0 \neq 0$ und

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in U_R(z_0).$$

Es folgt

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_{n+m}(z - z_0)^n \qquad \text{für alle } z \in \dot{U}_R(z_0).$$

Wegen der in Satz 5.23 gezeigten Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung erhalten wir sofort

$$a_{-m} = b_0 \neq 0 \quad \text{und} \quad a_n = 0 \text{ für alle } n < -m.$$

Erfüllt umgekehrt die Laurent-Entwicklung von f für ein $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ auf $\dot{U}_R(z_0)$ die Bedingung $a_{-m} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -m$, so ist

$$(z - z_0)^m \cdot \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^{m+n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z - z_0)^n$$

ebenfalls auf $\dot{U}_R(z_0)$ holomorph und sogar eine Potenzreihe. Nach Proposition 2.33 konvergiert diese auf ganz $U_R(z_0)$ und stellt dort nach Satz 2.39 eine holomorphe Funktion g dar, die nach Konstruktion $g(z_0) \neq 0$ erfüllt. Nach Division durch $(z - z_0)^m$ erhalten wir

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_R(z_0),$$

so dass z_0 nach Definition 5.9 ein Pol von Ordnung m ist. #

Da die Fallunterscheidung in der Formulierung des Satzes vollständig ist, folgt Behauptung (c) aus dem bisher Gezeigten. □

5.3 Meromorphe Funktionen

Wir haben in den letzten zwei Abschnitten drei Typen isolierter Singularitäten kennengelernt. Wir wollen nun auch Funktionen studieren, die in ihrem Definitionsbereich (isolierte) Singularitäten aufweisen. Dies wäre im Allgemeinen recht kompliziert, wir beschränken uns daher auf Funktionen, deren Singularitäten hebbar oder Pole sind. Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol in $z_0 \in \mathbb{C}$, so setzen wir $f(z_0) := \infty$ und betrachten f als eine Funktion mit Werten in der in Definition 1.14 eingeführten erweiterten komplexen Ebene $\overline{\mathbb{C}}$. Diese Notation rechtfertigt sich durch den in Satz 5.11 gezeigten Grenzwert $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Versehen wir $\overline{\mathbb{C}}$ mit der in Definition 1.15 festgelegten Topologie, so ist diese Funktion insbesondere stetig in z_0.

Definition 5.26. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Abbildung. Genau dann heißt f eine* ***meromorphe Funktion*** *auf D, falls gilt*

(i) *$S(f) := f^{-1}(\{\infty\})$ ist abgeschlossen und besteht nur aus isolierten Punkten in D.*

(ii) *Die Einschränkung $f_0 := f|_{D \setminus S(f)}$ ist holomorph.*

(iii) *Alle Punkte aus $S(f)$ sind Polstellen von f_0. Vereinfachend sprechen wir künftig auch von Polstellen der meromorphen Funktion f.*

Bemerkung 5.27. *Nach unserer Vorüberlegung sind meromorphe Funktionen stetig. Außerdem lässt sich jede meromorphe Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung jeder Polstelle als Quotient zweier holomorpher Funktionen schreiben,*

denn: Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph. Sei weiter $z_0 \in D$ eine Polstelle von f mit Polstellenordnung $\infty\text{-}\mathrm{ord}(f; z_0) = m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\dot{U}_r(z_0) \cap S(f) = \emptyset$, so dass f eingeschränkt auf die punktierte Umgebung $\dot{U}_r(z_0)$ holomorph ist. Dort gilt also

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \text{mit einer holomorphen Funktion } g : U_r(z_0) \to \mathbb{C} \text{ mit } g(z_0) \neq 0.$$

#

Proposition 5.28. *Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, so bilden die meromorphen Funktionen auf D eine $\mathbb{C}$-Algebra $\mathcal{M}(D)$, die die Menge der auf D holomorphen Funktionen $\mathcal{O}(D)$ als Unteralgebra enthält. Ist D ein nichtleeres Gebiet, so ist $\mathcal{M}(D)$ zudem ein Körper.*

Beweisskizze. Wir betrachten exemplarisch die Summe zweier meromorpher Funktionen $f, g : D \to \overline{\mathbb{C}}$ mit Polstellenmengen $S(f)$ und $S(g)$. Zunächst ist die Summe $f_0 + g_0$ eine holomorphe Funktion auf $D \setminus (S(f) \cup S(g))$, welche die Punkte aus $S(f) \cup S(g)$ als Singularitäten hat. Eine solche Singularität z_0 ist hebbar, wenn sich die Hauptteile der Laurent-Entwicklungen von f_0 und g_0 um z_0 nur um das Vorzeichen unterscheiden, und sonst eine Polstelle. Daher lässt sich $f_0 + g_0$ eindeutig zu einer meromorphen Funktion $f + g$ auf D ergänzen. Ähnlich definiert man die meromorphen Funktionen $f - g$, $f \cdot g$, sowie $c f$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{C}$ und rechnet nach, dass $\mathcal{M}(D)$ so zu einer $\mathbb{C}$-Algebra wird.[48]

Sei nun D ein nichtleeres Gebiet und g nicht identisch Null. Nach Korollar 4.10 ist die Nullstellenmenge von g eine abgeschlossene Teilmenge von D und besteht aus isolierten Punkten. Deshalb wird $\frac{1}{g}$ zu einer meromorphen Funktion auf D, deren Polstellenmenge $S(\frac{1}{g})$ durch die Nullstellenmenge von g gegeben ist.[49] □

Beispiel 5.29. (a) *Rationale Funktionen $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit Polynomen $P(z), Q(z)$ mit $Q \not\equiv 0$ sind meromorphe Funktionen auf $D = \mathbb{C}$. Die Menge $S(R)$ ist hierbei eine Teilmenge der Nullstellenmenge von Q.*

(b) $\cot \pi z := \dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$ *ist meromorph auf $D = \mathbb{C}$. Es gilt hierbei $S(\cot \pi z) = \mathbb{Z}$.*

(c) *Quotienten $\frac{f}{g}$ beliebiger holomorpher Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ mit g nicht identisch Null auf einem Gebiet $\emptyset \neq D$ sind meromorph.*[50]

---

[48] Ist $D = \emptyset$, so sehen wir die *leere Funktion* $\emptyset \to \overline{\mathbb{C}}$ als meromorph an; $\mathcal{M}(D)$ ist dann der Nullring.

[49] Ist D nicht zusammenhängend, so gibt es nichttriviale, meromorphe Funktionen, die kein meromorphes multiplikatives Inverses haben; betrachte etwa die Funktionen f_1 und f_2 aus Bemerkung 4.11. Mit diesen Funktionen lässt sich auch schnell die Nullteilerfreiheit von $\mathcal{M}(D)$ in diesem Fall widerlegen.

[50] Man kann sogar zeigen, dass alle meromorphen Funktionen $h : D \to \overline{\mathbb{C}}$ von diesem Typ sind. Das sehen wir später mit dem Weierstraß'schen Produktsatz 8.25. Algebraisch formuliert ist dann $\mathcal{M}(D)$ gerade der Quotienten-

Es bietet sich nun an, den Begriff der meromorphen Funktion auch auf offenen Teilmengen $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ einzuführen, wie wir sie in 1.15 definiert haben.

Definition 5.30. *Sei $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ offen und $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Abbildung. Genau dann heißt f eine* ***meromorphe Funktion*** *auf D, wenn die folgenden Bedingungen gelten:*

(i) *f ist auf $D \cap \mathbb{C}$ meromorph.*

(ii) *Die Funktion*
$$\hat{f}(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$$
ist auf der offenen Menge
$$\hat{D} := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \frac{1}{z} \in D\}, & \text{falls } \infty \notin D, \\ \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \frac{1}{z} \in D\} \cup \{0\}, & \text{falls } \infty \in D \end{cases}$$
meromorph.

Bemerkung 5.31. *Offensichtlich ist der Meromorphiebegriff aus Definition 5.30 im Fall $\infty \notin D$ äquivalent zu dem aus Definition 5.26. Im Fall $\infty \in D$ bedeutet Bedingung (ii) jedoch eine echte Zusatzforderung, die* ***Meromorphie von $f(z)$ in $z = \infty$***. *Diese entspricht definitionsgemäß gerade der Meromorphie von $\hat{f}(z)$ in $z = 0$.*

Klammheimlich reden wir hier über holomorphe Abbildungen von der ***Riemann'schen Fläche $\overline{\mathbb{C}}$*** *auf sich selbst. Die Struktur als Riemann'sche Fläche von $\overline{\mathbb{C}}$ ist wie folgt gegeben:*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, phantom, "\subsetneq"] \arrow[d, "\varphi_1 = \mathrm{id}"'] & \overline{\mathbb{C}} \arrow[r, phantom, "\supsetneq"] & \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \arrow[d, "\varphi_2"] \\
\mathbb{C} \arrow[rr, leftrightarrow, "z \mapsto \frac{1}{z}"] & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Die Menge $\overline{\mathbb{C}}$ wird überdeckt von den offenen Teilmengen $\mathbb{C}$ und $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, die sich jeweils auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, in diesem Fall $\mathbb{C}$ selbst, abbilden lassen. Diese ***Kartenabbildungen*** *$\varphi_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\varphi_2 : \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ sind durch*
$$\varphi_1(z) = z \text{ für } z \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \varphi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C}^\times, \\ 0 & \text{für } z = \infty \end{cases}$$
gegeben und homöomorph, d. h. stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung. Auf $\mathbb{C}^\times$ ist die ***Kartenwechselabbildung*** *$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ defininiert und biholomorph, also holomorph und bijektiv mit holomorpher Umkehrabbildung, vgl. Definition 7.1.*

körper
$$\mathrm{Quot}(\mathcal{O}(D)) = \{\frac{f}{g} \mid f, g \in \mathcal{O}(D), g \not\equiv 0\}$$
des Rings der holomorphen Funktionen $\mathcal{O}(D)$.

Das legt folgende Festsetzungen nahe:

Definition 5.32. *Sei $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ eine offene Teilmenge, die ∞ enthält, und sei $f : D \setminus \{\infty\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann sagen wir:*

(a) *Der Punkt ∞ ist eine **Singularität** von f. Weiter nennen wir ∞ eine **hebbare Singularität**, einen **Pol** bzw. eine **wesentliche Singularität**, wenn die Singularität 0 der Funktion $\hat{f}$ die entsprechende Eigenschaft besitzt.*

(b) *Die Laurent-Entwicklung von $f(z)$ um den Punkt $z = \infty$ erhält man aus der Laurent-Entwicklung von $\hat{f}(z)$ um den Punkt $z = 0$, indem man z durch $\frac{1}{z}$ ersetzt.*

Bemerkung 5.33. *Seien $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ eine offene Teilmenge, die ∞ enthält. Dann sind die meromorphen Funktionen $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ nach Bemerkung 5.31 gerade die meromorphen Funktionen auf $D \setminus \{\infty\}$, die zusätzlich in $z = \infty$ meromorph sind, die also in der Sprache von Definition 5.32 in $z = \infty$ eine hebbare Singularität oder einen Pol haben. Analog zur Argumentation in Proposition 5.28 lässt sich zeigen, dass die Menge $\mathcal{M}(D)$ der meromorphen Funktionen auf D die Struktur einer $\mathbb{C}$-Algebra trägt und sogar ein Körper ist, wenn D zusammenhängt.*

Beispiel 5.34. (a) *Seien $a_\nu \in \mathbb{C}$ für $\nu \in \{0, \ldots, n\}$ komplexe Zahlen mit $a_n \neq 0$ und*

$$P(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

eine Polynomfunktion. Das Verhalten von $P(z)$ bei $z = \infty$ entspricht definitionsgemäß dem Verhalten von

$$\hat{P}(z) = P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{n-1}}{z^{n-1}} + \ldots + a_0$$

bei $z = 0$. $P(z)$ hat also in $z = \infty$ für $n = 0$ eine hebbare Singularität und für positives n einen Pol n-ter Ordnung.

(b) *Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion, die kein Polynom ist. Da*

$$\hat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} a_{-n} z^n$$

nach Satz 5.25 in $z = 0$ eine wesentliche Singularität hat, trifft das auch auf $f(z)$ an der Stelle $z = \infty$ zu. Insbesondere ist $f(z)$ keine meromorphe Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$. In Korollar 8.5 zeigen wir, dass die meromorphen Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$ alle rational sind.

Beispiel 5.35. *Für ein beliebiges*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

ist durch

$$\varphi_M(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

eine meromorphe Funktion $\varphi_M : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *gegeben, die zu* M *gehörige* ***Möbius-Transformation****,*

denn: Im Fall $c = 0$ *ist*

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{d} & \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \infty & \text{für } z = \infty \end{cases}$$

ein Polynom von Grad $n = 1$ *wie in Teil (a) von Beispiel 5.34 und insbesondere eine meromorphe Funktion auf* $\overline{\mathbb{C}}$*.*

Im Fall $c \neq 0$ *gilt*

$$\varphi_M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ \infty & \text{für } z = -\frac{d}{c}, \\ \frac{a}{c} & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

Offensichtlich ist dann $\varphi_M|_{\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}}$ *holomorph und* $-\frac{d}{c}$ *wegen*

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{c} \cdot \frac{1}{z - (-\frac{d}{c})} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(-\frac{d}{c}) \text{ mit hinreichend kleinem } r$$

ein Pol erster Ordnung. Hierbei ist zu beachten, dass $\frac{az+b}{c}$ *für* $z = -\frac{d}{c}$ *wegen* $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *von Null verschieden ist.* $\varphi_M|_{\mathbb{C}}$ *ist also eine meromorphe Funktion auf* $\mathbb{C}$*. Desweiteren gilt auf einer kleinen Umgebung von* $z = 0$ *in* $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$

$$\hat{\varphi}_M(z) = \varphi_M\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a\frac{1}{z}+b}{c\frac{1}{z}+d} = \frac{a+bz}{c+dz} \xrightarrow{z\to 0} \frac{a}{c},$$

die Singularität von φ_M *in* ∞ *ist also hebbar.* #

5.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. *Sei* $D \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $f, g : D \to \mathbb{C}$ *holomorph mit einer gemeinsamen Nullstelle* $z_0 \in D$*, die für beide Funktionen dieselbe Nullstellenordnung* k *hat. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:*

(a) *Es gibt ein* $\delta > 0$ *mit* $U_\delta(z_0) \subseteq D$ *und* $g(z) \neq 0$ *für alle* $z \in \dot{U}_\delta(z_0)$*.*

(b) *Die Funktion* $f/g : \dot{U}_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ *hat in* z_0 *eine hebbare Singularität.*

(c) $\displaystyle\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{g^{(k)}(z_0)}$.

Aufgabe 5.2. *Betrachten Sie die folgende Laurent-Entwicklung für die Nullfunktion:*

$$0 = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n.$$

Dies scheint ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung zu sein. Warum ist es das nicht?

Aufgabe 5.3. *Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und sei $\mathcal{M}(D)$ die Menge der meromorphen Funktionen auf D.*

(a) *Seien $f, g \in \mathcal{M}(D)$. Zeigen Sie, dass dann auch $f - g$ und $f \cdot g$ in $\mathcal{M}(D)$ liegen, und dass dies im Fall $g \neq 0$ auch auf f/g zutrifft.*

(b) *Folgern Sie, dass $\mathcal{M}(D)$ mit den so definierten Verknüpfungen ein Körper ist.*

(c) *Gibt es ein $0 \neq f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit $f(1/n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$?*

Aufgabe 5.4. (a) *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, welche in ∞ eine nicht-wesentliche Singularität besitzt. Zeigen Sie, dass f dann ein Polynom ist.*

(b) *Bestimmen Sie die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ der komplexen Ebene.*

Hinweis: *Verwenden Sie den Satz von Casorati-Weierstraß 5.14, um zu zeigen, dass jedes $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ eine nicht-wesentliche Singularität in ∞ hat. Welche Polynome definieren bijektive Abbildungen?*

Aufgabe 5.5. *Zeigen Sie die folgenden Aussagen.*

(a) *Jede meromorphe Funktion $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist rational.*

Hinweis: *Zeigen Sie zunächst, dass f nur endlich viele Singularitäten in $\mathbb{C}$ haben kann und modifizieren Sie f geeignet mit den Hauptteilen dieser Singularitäten, um eine Funktion wie in Teil (a) von Aufgabe 5.4 zu erhalten.*

(b) *Sei $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ meromorph mit $f(\overline{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist f bereits konstant.*

Aufgabe 5.6. *In dieser Aufgabe wollen wir*

$$\operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{\varphi_M \mid M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\}$$

zeigen. Beweisen Sie dafür die folgenden Aussagen.

(a) *Für $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gilt $\varphi_M \in \operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$.*

(b) *Ist $f \in \operatorname{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$, dann ist f stetig.*

Hinweis: *Da $\overline{\mathbb{C}}$ das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, sind hier die Begriffe der Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent, was ohne Beweis verwendet werden darf. Hierbei ist der topologische Konvergenzbegriff zu verwenden, d. h. eine Folge konvergiert gegen einen Punkt $z \in \overline{\mathbb{C}}$, wenn jede offene Menge in $\overline{\mathbb{C}}$, die z enthält, auch fast alle Folgenglieder enthält.*

(c) *Ist* $f \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$, *dann gibt es ein* $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ *mit* $f = \varphi_M$.

Hinweis: *Verwenden Sie Übungsaufgabe 5.4 und beachten Sie, dass dort die Holomorphie der Umkehrfunktion im Beweis nicht benötigt wurde.*

KAPITEL 6

Der Residuensatz

Ist $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, so wissen wir, dass für alle geschlossenen stückweise glatten Kurven γ in D und für alle holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ das Integral

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

verschwindet. Der Residuensatz lässt uns eine größere Klasse von Integralen berechnen: Sei $f : D \smallsetminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei $z_1, \ldots, z_k$ endlich viele paarweise verschiedene Punkte aus D sind, und sei γ eine Kurve, die durch keinen der Punkte $z_1, \ldots, z_k$ läuft. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \chi(\gamma; z_j)\ \mathrm{res}_{z=z_j} f,$$

wobei $\chi(\gamma; z_j)$ die Umlaufzahl von γ bzgl. z_j ist und $\mathrm{res}_{z=z_j} f$ das Residuum von f in z_j.

Um den Residuensatz formulieren und dann auch beweisen zu können, müssen wir offenbar zunächst die Begriffe der Umlaufzahl und des Residuums einführen.

6.1 Die Umlaufzahl

Definition 6.1. *Sei γ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathrm{Bild}(\gamma)$. Dann heißt*

$$\chi(\gamma; z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z}$$

*die **Umlaufzahl** von γ bzgl. z.*

Beispiel 6.2. *Sei $k \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, und sei γ die k-fach im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Kreislinie um einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$, also*

$$\gamma(t) = z_0 + r\, e^{2\pi i k t} \quad \textit{für } t \in [0, 1].$$

Offensichtlich gibt hierbei das Vorzeichen von k den Umlaufsinn der Kurve vor. Es gilt dann

$$\chi(\gamma; z) = \begin{cases} 0 & \text{für } |z - z_0| > r, \\ k & \text{für } |z - z_0| < r, \end{cases}$$

denn: Im ersten Fall liegt γ in einem Sterngebiet, auf dem die Funktion $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ holomorph ist. Mit dem Cauchy'schen Integralsatz 3.25 folgt somit die Behauptung.

Im zweiten Fall gilt mit der Cauchy'schen Integralformel 3.29 für die Abbildung $f(w) \equiv 1$

$$\chi(\gamma; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z} = k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|w - z_0| = r} \frac{\mathrm{d}w}{w - z} = k.$$

#

Unsere Definition der Umlaufzahl ist ungeometrisch, stimmt aber im gerade untersuchten Beispiel mit unserer Anschauung überein. In der Topologie zeigt man, dass sich jede geschlossene Kurve auf $\mathbb{C}^\times$ mit Anfangs- und Endpunkt 1 stetig in eine k-fach durchlaufene Einheitskreislinie mit geeignetem $k \in \mathbb{Z}$ deformieren lässt, dass sie also ***(relativ) homotop*** zu dieser ist. Mit der Homotopieversion des Cauchy'schen Integralsatzes 7.23 werden wir später einsehen, dass sich der Wert des relevanten Integrals dabei nicht ändert.

Proposition 6.3. *Sei γ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Bild}(\gamma)$. Dann gilt $\chi(\gamma; z) \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei ohne Einschränkung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ glatt. Wir setzen

$$h(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z} \, \mathrm{d}u \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Dann gilt insbesondere $h(b) = 2\pi i\, \chi(\gamma; z)$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist h auf $[a, b]$ stetig differenzierbar und es gilt

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

Sei nun weiter $H(t) := e^{-h(t)} \cdot (\gamma(t) - z)$ für alle $t \in [a, b]$. Dann gilt $H'(t) = 0$, so dass insbesondere $H(t)$ auf $[a, b]$ konstant ist. Mit

$$H(a) = e^{-h(a)} (\gamma(a) - z) = e^0 (\gamma(a) - z) = \gamma(a) - z$$

folgt $H(t) \equiv \gamma(a) - z$ auf $[a, b]$ und somit

$$e^{h(t)} = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z} \quad \text{für alle } t \in [a, b].$$

Setzen wir nun speziell $t = b$, so folgt wegen der Geschlossenheit der Kurve γ

$$e^{h(b)} = \frac{\gamma(b) - z}{\gamma(a) - z} = 1.$$

Es folgt $h(b) \in 2\pi i\, \mathbb{Z}$ und damit die Behauptung $\chi(\gamma; z) \in \mathbb{Z}$. □

Proposition 6.4. *Sei γ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve, und seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\gamma)$. Die Punkte z_0 und z_1 seien durch eine Kurve in $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\gamma)$ verbindbar, es existiere also ein stetiges $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\gamma)$ mit $\varphi(0) = z_0$ und $\varphi(1) = z_1$. Dann gilt*

$$\chi(\gamma; z_0) = \chi(\gamma; z_1).$$

Beweis. Die Teilmenge $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\gamma) \subseteq \mathbb{C}$ ist offen. Nach Konstruktion ist

$$W(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\gamma) \mid z \text{ ist mit } z_0 \text{ durch eine Kurve in } \mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\gamma) \text{ verbindbar}\}$$

wegzusammenhängend und somit auch zusammenhängend. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\gamma) &\to \mathbb{C}, \\ z &\mapsto \chi(\gamma; z) \end{aligned}$$

ist holomorph nach der Leibniz-Regel 3.30, also auch stetig. Zusammenhang ist eine topologische Eigenschaft, so dass mit $W(z_0)$ auch $\chi(\gamma; W(z_0))$ zusammenhängend ist. Nach Proposition 6.3 besteht andererseits $\chi(\gamma; W(z_0)) \subseteq \mathbb{Z}$ aus isolierten Punkten. Es folgt, dass $\chi(\gamma; W(z_0))$ nur aus einem einzigen Punkt bestehen kann. Da nach Voraussetzung z_0 und z_1 beide in $W(z_0)$ liegen, folgt die Behauptung $\chi(\gamma; z_0) = \chi(\gamma; z_1)$. □

6.2 Das Residuum

Definition 6.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 eine Singularität von f. Sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{für } z \in \dot{U}_R(z_0)$$

mit einem geeigneten $R > 0$ die Laurent-Entwicklung von f um z_0. Dann heißt der Koeffizient a_{-1} das ***Residuum*** *von f in z_0. Wir schreiben dafür*

$$a_{-1} =: \operatorname{res}_{z=z_0} f.$$

Bemerkung 6.6. *Gelte die Notation aus Definition 6.5. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Nach der Koeffizientenformel aus dem Satz von der Laurent-Entwicklung 5.23 gilt für hinreichend kleines ϱ*

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\varrho} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

(b) *Ist z_0 hebbar, so verschwinden nach Satz 5.25 alle Koeffizienten a_n mit $n < 0$. Insbesondere gilt $\operatorname{res}_{z=z_0} f = 0$.*

Beispiel 6.7. (a) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z}{z} = 1$,

denn: Es gilt $\dfrac{\cos z}{z} = \dfrac{1 - \frac{z^2}{2!} \pm \ldots}{z} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{2} \pm \ldots$ *für alle* $z \in \mathbb{C}^\times$. #

(b) $\operatorname{res}_{z=0} e^{1/z} = 1$,

denn: Es gilt $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} (n! \cdot z^n)^{-1}$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. #

(c) *Analog gilt* $\operatorname{res}_{z=0} e^{1/z^k} = 0$ *für alle* $1 < k \in \mathbb{Z}$.

Lemma 6.8. *Sei* $D \subseteq \mathbb{C}$ *offen,* $f : D \to \mathbb{C}$ *holomorph und* z_0 *ein Pol von* f *der Ordnung* $m \geq 1$. *Nach Definition 5.9 gibt es ein* $R > 0$ *und eine holomorphe Funktion* $g : U_R(z_0) \to \mathbb{C}$ *mit* $g(z_0) \neq 0$*, so dass wir*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_R(z_0)$$

schreiben können. In dieser Situation gilt

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Insbesondere gilt für $m = 1$*, also für einen einfachen Pol,*

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Beweis. Sei

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{für alle } z \in U_R(z_0)$$

die Taylor-Entwicklung von g um z_0. Für $z \neq z_0$ folgt dann

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-m};$$

das ist die Laurent-Entwicklung von f um z_0. Nach Definition des Residuums gilt also

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Ist speziell $m = 1$, so gilt

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f = g(z_0) = \lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

□

Beispiel 6.9. (a) *Wir betrachten* $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + 1}$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$:

Offensichtlich hat $f(z)$ *in* $z = \pm i$ *jeweils einen einfachen Pol. Daher gilt nach dem Spezialfall von Lemma 6.8 für* $m = 1$

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=i} f &= \lim_{z \to i} (z - i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{z + i} = \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{-i}{2e}, \\
\operatorname{res}_{z=-i} f &= \lim_{z \to -i} (z + i) f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{e^{iz}}{z - i} = \frac{e}{-2i} = \frac{e\,i}{2}.
\end{aligned}$$

(b) *Wir betrachten* $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$*:*

Offensichtlich hat f *in* $z = \pm i$ *jeweils einen Pol der Ordnung* $m = 3$ *und es gilt*

$$f(z) = \frac{g_\mp(z)}{(z \mp i)^3} \quad \text{mit } g_\mp(z) = \frac{1}{(z \pm i)^3} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{\mp i\}.$$

Nach Lemma 6.8 für $m = 3$ *gilt dann wegen* $g''_\mp(z) = \frac{12}{(z \pm i)^5}$

$$\operatorname{res}_{z=\pm i} f = \frac{g''_\mp(\pm i)}{2!} = \frac{6}{(\pm 2i)^5} = \frac{\mp 3i}{16}.$$

6.3 Der Residuensatz

Satz 6.10 (Residuensatz)**.** *Sei* $D \subseteq \mathbb{C}$ *ein Elementargebiet, und seien* $z_1, \ldots, z_k$ *endlich viele, paarweise verschiedene Punkte in* D*. Sei weiter* $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ *holomorph und* γ *eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in* $D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$*. Dann gilt die Residuenformel*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \chi(\gamma; z_j)\ \operatorname{res}_{z=z_j} f.$$

Beweis. Definitionsgemäß sind die Punkte z_j mit $j = \{1, \ldots, k\}$ Singularitäten von f. Sei also für je ein geeignetes $R_j > 0$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,j}\,(z - z_j)^n \qquad \text{für alle } z \in \dot{U}_{R_j}(z_j)$$

die Laurent-Entwicklung von f um z_j. Nach dem Satz über die Laurent-Zerlegung 5.19 ist jeder Hauptteil

$$h_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,j}(z - z_j)^n \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{z_j\}$$

holomorph. Sei

$$g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) \qquad \text{für alle } z \in D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}.$$

Die einzigen Singularitäten von $g(z)$ sind die bekannten Punkte $z_1, \ldots, z_k$. Da aber die Laurent-Entwicklung von $g(z)$ um jeden der Punkte z_j keine negativen Terme hat, sind nach Satz 5.25 die Singularitäten in allen z_j hebbar. Da D ein Elementargebiet ist, hat g auf D eine Stammfunktion. Es gilt also

$$0 = \int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\gamma \left(f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j \left(\frac{1}{z - z_j} \right) \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{k} \int_\gamma h_j \left(\frac{1}{z - z_j} \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{k} \int_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,j} (z - z_j)^n \right) \mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

Nach dem Satz von der Laurent-Entwicklung 5.23 konvergieren die Laurent-Entwicklungen auf der kompakten Menge $\operatorname{Bild}(\gamma)$ gleichmäßig, so dass wir in der Summe rechts Integration und Summation vertauschen dürfen. Es gilt somit

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,j} \int_\gamma (z - z_j)^n \, \mathrm{d}z \\
&= \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{k} a_{-1,j} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_j} \\
&= \int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{k} \left(\operatorname{res}_{z=z_j} f\right) \cdot \left(2\pi i\, \chi(\gamma; z_j)\right),
\end{aligned}
$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen berücksichtigt haben, dass die Integrale rechts für $n < -1$ verschwinden, da dann die Funktion $(z - z_j)^n$ mit $\frac{1}{n+1}(z - z_j)^{n+1}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ eine Stammfunktion hat.[51] □

Bemerkung 6.11. *In der Residuenformel liefern nur diejenigen Punkte z_j einen Beitrag, deren Umlaufzahl $\chi(\gamma; z_j)$ nicht verschwindet, die also im Inneren der Kurve γ liegen.*

Als Korollar des Residuensatzes erhalten wir die folgende Version der Cauchy'schen Integralformel:

Satz 6.12 (Cauchy'sche Integralformel für stückweise glatte, geschlossene Kurven)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und γ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in D. Dann gilt für alle $z \in D \setminus \operatorname{Bild}(\gamma)$*

$$
\chi(\gamma; z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, \mathrm{d}w.
$$

Beweis. Sei z fest gewählt. Dann setzen wir

$$
g(w) := \frac{f(w)}{w - z} \quad \text{für alle } w \in D \setminus \{z\}.
$$

[51] Dieses Wegfallen der anderen Terme erklärt übrigens den Namen „Residuum", also Rest.

Im Fall $f(z) = 0$ hat die Funktion g in $w = z$ eine hebbare Singularität und es gilt offensichtlich

$$\int_\gamma g(w)\,\mathrm{d}w = 0 = 2\pi i\,\chi(\gamma; z)\,f(z).$$

Im Fall $f(z) \neq 0$ hat die Funktion g einen Pol erster Ordnung in $w = z$, so dass sich nach Lemma 6.8

$$\operatorname{res}_{w=z} g(w) = \lim_{w\to z}(w-z)g(w) = \lim_{w\to z} f(w) = f(z)$$

ergibt. Des Weiteren ist $g(w)$ holomorph auf $D \setminus \{z\}$. Nach dem Residuensatz 6.10 gilt also ebenfalls

$$\int_\gamma g(w)\,\mathrm{d}w = 2\pi i\,\chi(\gamma; z)\,f(z).$$

□

6.4 Funktionentheoretische Anwendungen des Residuensatzes

Definition 6.13. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei z_0 eine nicht-wesentliche Singularität von f, um die es eine punktierte Kreisscheibe gibt, auf der f nicht konstant Null ist. Sei schließlich für ein hinreichend kleines $R > 0$*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \textit{für alle } z \in \dot{U}_R(z_0)$$

die Laurent-Entwicklung von f um z_0. Wir definieren dann die ***Nullstellenordnung***

$$0\text{-ord}(f; z_0) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\} & \textit{falls es kein } n < 0 \textit{ gibt mit } a_n \neq 0, \\ 0 & \textit{falls es ein } n < 0 \textit{ gibt mit } a_n \neq 0 \end{cases}$$

und erweitern die Definition 5.9 der ***Polstellenordnung***

$$\infty\text{-ord}(f; z_0) := \begin{cases} 0 & \textit{falls es kein } n < 0 \textit{ gibt mit } a_n \neq 0, \\ -\min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\} & \textit{falls es ein } n < 0 \textit{ gibt mit } a_n \neq 0. \end{cases}$$

Satz 6.14 (Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f \not\equiv 0$ eine auf D meromorphe Funktion mit nur endlich vielen Null- und Polstellen $z_1, \ldots, z_n$. Sei γ eine geschlossene stückweise glatte Kurve mit $z_j \notin \operatorname{Bild}(\gamma)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\gamma; z_\nu)\cdot\big(0\text{-ord}(f; z_\nu) - \infty\text{-ord}(f; z_\nu)\big).$$

Beweis. Die Funktion $\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist holomorph auf $D \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$. Nach dem Residuensatz 6.10 gilt also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} \chi(\gamma; z_\nu)\ \operatorname{res}_{z=z_\nu} \frac{f'}{f}$$

und es genügt zu zeigen: Ist z_0 eine Nullstelle oder ein Pol von f, so gilt

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{f'}{f} = 0\text{-ord}(f; z_0) - \infty\text{-ord}(f; z_0) =: m \in \mathbb{Z}.$$

Es gibt ein $R > 0$ und eine holomorphe Funktion $g : U_R(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$, so dass wir

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_R(z_0)$$

schreiben können.

denn: Ist hierbei $m < 0$, so hat f einen Pol und wir verwenden Lemma 6.8. Ist $m > 0$, so hat f eine Nullstelle und die Behauptung ist klar. #

Für z nahe bei aber ungleich z_0 gilt dann

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$$

und somit

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)}{(z - z_0)^m g(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Da mit g auch $\frac{g'}{g}$ in z_0 holomorph ist, folgt mit Lemma 6.8 wie behauptet

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{f'}{f} = m.$$

□

Hieraus ergibt sich unmittelbar das folgende Korollar.

Korollar 6.15 (Argumentprinzip). *Seien die Voraussetzungen wie im Satz von Null- und Polstellen zählenden Integral 6.14. Sei weiter*

$$N(0) := \sum_{\nu=1}^{n} 0\text{-ord}(f; z_\nu) \quad \textit{bzw.} \quad N(\infty) := \sum_{\nu=1}^{n} \infty\text{-ord}(f; z_\nu)$$

die Gesamtanzahl der Null- bzw. Polstellen von f, jeweils mit Vielfachheit gezählt. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = N(0) - N(\infty)$$

für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve γ, die jeden der Punkte z_ν genau einmal im positiven Sinne umläuft.

Satz 6.16 (Satz von Rouché[52]). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, seien f und g zwei holomorphe Funktionen auf D, und sei $\gamma : [0,1] \to D$ eine geschlossene stückweise glatte Kurve, welche jeden Punkt in ihrem Inneren genau einmal in mathematisch positiver Richtung umläuft.*[53] *Es haben f und g nur endlich viele Nullstellen in D und es gelte*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \textit{für alle } z \in \gamma([0,1]).$$

Dann haben f und g im Inneren der Kurve γ mit Vielfachheiten gerechnet gleich viele Nullstellen.

Beweis. Wir betrachten für alle $t \in [0,1]$ die Funktion $h_t := f + t(g - f)$ auf D. Offensichtlich gilt $h_0 = f$ und $h_1 = g$. Nach Voraussetzung gilt für alle $z \in \gamma([0,1])$

$$\begin{aligned} &|h_t(z)| \geq |f(z)| - |t(g(z) - f(z))| > |f(z)| - t\,|f(z)| \geq 0 && \text{für } t \neq 0, \\ &|h_t(z)| > |f(z) - g(z)| \geq 0 && \text{für } t = 0. \end{aligned}$$

Für $t \in [0,1]$ hat also $h_t(z)$ auf $\gamma([0,1])$ keine Nullstellen, und wir können den Satz vom Null- und Polstellen zählenden Integral 6.14 anwenden. Wir erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h_t'(z)}{h_t(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z) + t(g'(z) - f'(z))}{f(z) + t(g(z) - f(z))}\,\mathrm{d}z = N_t(0),$$

wobei $N_t(0)$ die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen von h_t im Inneren von γ bezeichne. Wie man der Formel entnimmt, hängt $N_t(0)$ stetig von t ab. Damit ist der Wertebereich von $N_t(0)$ als stetiges Bild des zusammenhängenden Intervalls $[0,1]$ zusammenhängend; andererseits liegt der Wertebereich von $N_t(0)$ in den natürlichen Zahlen, so dass $N_t(0)$ für $t \in [0,1]$ konstant sein muss. Insbesondere folgt $N_1(0) = N_0(0)$ und somit der Satz. □

Satz 6.17 (Satz von Hurwitz[54]). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, die auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Es gelte $f_n(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ und alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann ist entweder f identisch Null auf D oder f hat keine Nullstelle auf D.*

Beweis. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß 3.41 ist f auf D holomorph. Wir nehmen an, f sei nicht identisch Null auf D. Da D ein Gebiet ist, besteht dann die Nullstellenmenge von f in D nach Korollar 4.10 nur aus isolierten Punkten. Wir müssen nun für ein beliebiges aber festes $z_0 \in D$ zeigen, dass $f(z_0) \neq 0$ gilt. Wegen der Isoliertheit der Nullstellen gibt es ein $r > 0$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subseteq D$ und $f(z) \neq 0$ für alle $\overline{U_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$. Insbesondere gilt für dieses r

$$M := \min_{|z - z_0| = r} |f(z)| > 0.$$

Da $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf der kompakten Menge $|z - z_0| = r$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{M}{2} \quad \text{für alle } n > N \text{ und alle } z \in D \text{ mit } |z - z_0| = r.$$

[52] Eugène Rouché (1832-1910)
[53] Wir verlangen also, dass für alle $z \in D \setminus \gamma([0,1])$ die Umlaufzahl $\chi(C; z)$ entweder 0 oder 1 ist.
[54] Adolf Hurwitz (1859 - 1919)

Für solche n und solche z folgt dann

$$|f_n(z)| = |f(z) - (f(z) - f_n(z))| \geq |f(z)| - |f(z) - f_n(z)| \geq M - \frac{M}{2} = \frac{M}{2}$$

und somit

$$|\frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)}| = \frac{|f(z) - f_n(z)|}{|f_n(z)| \cdot |f(z)|} \leq \frac{2}{M} \cdot \frac{1}{M} |f_n(z) - f(z)|.$$

Da nach Voraussetzung die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf $|z - z_0| = r$ gleichmäßig gegen f konvergiert, konvergiert dort also auch die Folge $\left(\frac{1}{f_n}\right)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ gleichmäßig, und zwar gegen $\frac{1}{f}$. Nach der zweiten Aussage des Approximationssatzes von Weierstraß 3.41 konvergiert $(f_n')_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf $|z - z_0| = r$ gleichmäßig gegen f', so dass dort insgesamt $\left(\frac{f_n'}{f_n}\right)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ gleichmäßig gegen $\frac{f'}{f}$ konvergiert. Es folgt

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} \,\mathrm{d}z.$$

Da die Funktionen f_n nach Voraussetzung auf D keine Nullstellen haben, verschwindet nach dem Argumentprinzip 6.15 die linke Seite für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Wenden wir das Argumentprinzip auf die rechte Seite an, folgt jetzt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < r$. Insbesondere gilt $f(z_0) \neq 0$ und somit der Satz. □

Korollar 6.18. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein nichtleeres Gebiet und $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge injektiver holomorpher Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, die auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig gegen ein $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f entweder konstant oder auch injektiv.*

Beweis. Sei f nicht konstant und $z_0 \in D$ fest gewählt. Dann sind die Funktionen $f_n(z) - f_n(z_0)$ nullstellenfrei auf dem Gebiet $D \setminus \{z_0\}$. Nach dem Satz von Hurwitz 6.17 ist dann $f(z) - f(z_0)$ auf $D \setminus \{z_0\}$ entweder identisch Null oder nullstellenfrei. Der erste Fall ist nach Voraussetzung ausgeschlossen, also gilt $f(z) \neq f(z_0)$ für alle $z \in D \setminus \{z_0\} \neq \emptyset$. Da $z_0 \in D$ beliebig gewählt war, folgt die Injektivität von f auf D. □

6.5 Berechnung reeller Integrale mithilfe des Residuensatzes

Satz 6.19. *Seien $P(X,Y)$ und $Q(X,Y)$ zwei Polynome in zwei Variablen mit reellen bzw. komplexen Koeffizienten, und sei*

$$R(x,y) := \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

die als Quotient von P und Q gegebene rationale Funktion. Weiter sei $Q(x,y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Dann lässt sich R komplex längs der Einheitskreislinie integrieren und es gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) \,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{z_0 \in \mathbb{E}} \mathrm{res}_{z=z_0} f, \text{[55]}$$

[55] Man beachte: In der Summe rechts wird in Wirklichkeit nur über die endlich vielen Polstellen von f summiert.

wobei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ *die offene Einheitskreisscheibe sei und* f *die rationale Funktion*

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Beweis. Für $|z| = 1$ ist $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$, und die Zahlen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) &= \mathrm{Re} z = x \\ \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) &= \mathrm{Im} z = y \end{aligned}$$

sind reell. Wegen $1 = |z|^2 = x^2 + y^2$ hat $Q(x,y)$ für solche z nach Voraussetzung keine Nullstellen; insbesondere hat f auf $|z| = 1$ keine Pole. Damit ist das Integral aus dem Satz definiert und lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right), \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right) e^{-it}\, i\, e^{it}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Die Funktion f ist rational in den Variablen z und z^{-1} und somit nach Erweiterung mit geeigneten z-Potenzen eine rationale Funktion in z. Insbesondere besitzt f nur endlich viele Polstellen und wir können zur Berechnung des Integrals den Residuensatz 6.10 bezüglich der durch $|z| = 1$ gegebenen Kurve γ anwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}\int_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \frac{1}{i}\left(2\pi i \sum_{\substack{z_0 \in \mathbb{E} \\ z_0 \text{ Pol}}} \chi(\gamma; z_0)\,\mathrm{res}_{z=z_0} f\right) \\ &= 2\pi \sum_{\substack{z_0 \in \mathbb{E} \\ z_0 \text{ Pol}}} \mathrm{res}_{z=z_0} f, \end{aligned}$$

wobei wir verwenden, dass für $z_0 \in \mathbb{E}$ stets $\chi(\gamma; z_0) = 1$ gilt. □

Beispiel 6.20. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \cos t}$ *für ein* $a \in \mathbb{R}_{>1}$. *Hier gilt* $R(x,y) = \frac{1}{a+x}$, *also*

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z^2 + 2a\,z + 1} = \frac{2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

mit reellen Zahlen

$$\alpha = -a + \sqrt{a^2 - 1} \quad \textit{und} \quad \beta = -a - \sqrt{a^2 - 1}.$$

Hierbei gilt $|\alpha| < 1$,

denn:

$$\begin{aligned} |\alpha| < 1 \quad &\iff \quad -1 < -a + \sqrt{a^2 - 1} < 1 \\ &\iff \quad a - 1 < \sqrt{a^2 - 1} < a + 1 \\ &\iff \quad (a-1)^2 < a^2 - 1 < (a+1)^2 \\ &\iff \quad -2a + 1 < -1 < 2a + 1 \\ &\iff \quad -a < -1 < a. \end{aligned}$$

Wegen $a > 1$ ist die letzte Zeile erfüllt und die Behauptung ist gezeigt. #

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir $\alpha \cdot \beta = 1$ und insbesondere $|\beta| > 1$. Wenden wir nun Satz 6.19 an, erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \cos t} &= 2\pi \operatorname{res}_{z=\alpha} \frac{2}{z^2 + 2a\,z + 1} \\ &= 4\pi \operatorname{res}_{z=\alpha} \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} \\ &\overset{6.8}{=} 4\pi \lim_{z \to \alpha} \frac{z - \alpha}{(z-\alpha)(z-\beta)} \\ &= 4\pi \frac{1}{\alpha - \beta} \\ &= 2\pi \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Definition 6.21. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt f **integrierbar über** $\mathbb{R}$, falls die beiden Grenzwerte*

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{und} \quad \lim_{B \to \infty} \int_{-B}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$$

(unabhängig voneinander) existieren. Wir schreiben dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A \to \infty} \int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{B \to \infty} \int_{-B}^0 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*f heißt **absolut integrierbar**, falls $|f|$ integrierbar ist. Man zeigt leicht, dass absolute Integrierbarkeit die Integrierbarkeit impliziert.*[56]

Satz 6.22. *Seien $P(X)$ und $Q(X)$ zwei Polynome mit reellen Koeffizienten. Es gelte*

$$\deg Q \geq \deg P + 2 \quad \textit{und} \quad Q(x) \neq 0 \textit{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für die auf $\mathbb{C}$ definierte Quotientenfunktion $R(z) := \frac{P(z)}{Q(z)}$ gilt dann

(a) *$R(x)$ ist absolut integrierbar über $\mathbb{R}$.*

[56] Beweis mit Hilfe eines Analogons des Cauchy-Kriteriums, ähnlich wie bei unendlichen Reihen.

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{z=z_j} R,$

wobei $z_1, \ldots, z_k$ *gerade die Polstellen von* $R(z)$ *in der oberen Halbebene* $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ *sind.*

Beweis. Sei m der Grad von P und n der Grad von Q. Dann schreiben wir

$$P(X) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu X^\nu \quad \text{und} \quad Q(X) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu X^\nu.$$

Für $z \in \mathbb{C}^\times$ gilt

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = z^{m-n} \cdot \frac{\frac{a_0}{z^m} + \ldots + a_m}{\frac{b_0}{z^n} + \ldots + b_n}.$$

Für $|z| \to \infty$ strebt der zweite Faktor gegen $\frac{a_m}{b_n}$, ist also insbesondere beschränkt. Es gibt somit Konstanten $M > 0$ und $c > 0$ mit

$$|R(z)| \leq |z^{m-n}|\, M \quad \text{für alle } |z| > c.$$

Mit $n - m \geq 2$ folgt

$$|R(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad \text{für alle } |z| > c.$$

$R(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Für $z = x$ reell folgt also für hinreichend großes $A \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_0^A |R(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^c |R(x)|\,\mathrm{d}x + \int_c^A |R(x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^c |R(x)|\,\mathrm{d}x + M \cdot \int_c^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\
&= \int_0^c |R(x)|\,\mathrm{d}x + M \left(-x^{-1}\right)\Big|_c^A \\
&= \int_0^c |R(x)|\,\mathrm{d}x + M \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{c}\right) \\
&\leq \int_0^c |R(x)|\,\mathrm{d}x + \frac{M}{c} < \infty.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung ist unabhängig von A. Hieraus folgt leicht, dass der Grenzwert

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A |R(x)|\,\mathrm{d}x$$

existiert.[57] Genauso zeigt man die Existenz von $\lim_{B\to\infty} \int_{-B}^{0} |R(x)|\,\mathrm{d}x$. Insgesamt haben wir hiermit Behauptung (a) gezeigt.

[57] Das ist das Analogon zur Tatsache, dass eine monoton wachsende, beschränkte Zahlenfolge konvergiert.

Es verbleibt Behauptung (b) zu zeigen. Sei dafür $r > 0$ und γ_r die durch

$$\gamma_r(t) = \begin{cases} t & \text{für alle } t \in [-r, r], \\ r\, e^{i(t-r)} & \text{für alle } t \in [r, r+\pi] \end{cases}$$

gegebene geschlossene, stückweise glatte Kurve. Nehmen wir weiter an, r sei größer als $|z_j|$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$, und schreiben wir α_r für die durch $\gamma_r|_{[r,r+\pi]}$ gegebene Halbkreiskurve. Mit dem Residuensatz 6.10 gilt dann

$$\int_{\alpha_r} R(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma_r} R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{res}_{z=z_j} R,$$

denn für alle j gilt ja $\chi(\gamma_r; z_j) = 1$. Andererseits gilt

$$\Big|\int_{\alpha_r} R(z)\,\mathrm{d}z\Big| = \Big|\int_0^{\pi} R(r\,e^{it})\, ri\,e^{it}\,\mathrm{d}t\Big| \leq r \int_0^{\pi} |R(r\,e^{it})|\,\mathrm{d}t \overset{r \gg 0}{\leq} r\,\frac{M}{r^2}\,\pi = \frac{M\,\pi}{r} \overset{r\to\infty}{\to} 0.$$

Offenbar folgt hieraus die Behauptung. □

Beispiel 6.23. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$.

Es gilt $z^2 + 1 = (z-i)(z+i)$. Also hat $\frac{1}{z^2+1}$ genau eine Polstelle in $\mathbb{H}$, nämlich i, und es gilt

$$\operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Mit Satz 6.22 folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = 2\pi i\,\frac{1}{2i} = \pi.$$

6.6 Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, und sei $f : D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einfachen Polen in $a_\nu \in D$ für alle $\nu = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie: Gilt dann für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve γ in $D \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$*

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \in 2\pi i\mathbb{Z},$$

so gibt es eine in D meromorphe Funktion g mit $f = \frac{g'}{g}$.

Aufgabe 6.2. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine injektive, holomorphe Funktion, und sei $z_0 \in D$ und $R > 0$ mit $\overline{U_R(z_0)} \subseteq D$. Zeigen Sie, dass dann die Formel*

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(z_0)} \frac{w f'(w)}{f(w) - z}\,\mathrm{d}w \quad \text{für alle } z \in f(U_R(z_0))$$

gilt.

Bemerkung: *Insbesondere ist $f|_{U_R(z_0)} : U_R(z_0) \to f(U_R(z_0))$ biholomorph (vgl. Definition 7.1).*

Aufgabe 6.3. *Diese Aufgabe ist eine erstaunliche Anwendung des Satzes von Rouché 6.16.*

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius* $R > 0$*, und sei* $z_0 \in U_R(0)$ *ein beliebiger Punkt. Zeigen Sie: Zu jeder offenen Umgebung* $z_0 \in U \subseteq U_R(0)$ *gibt es ein* $z_1 \in U$ *und ein* $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *mit*

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n = \sum_{n=0}^{N} a_n z_1^n.$$

Hinweis: *Ohne Einschränkung ist* f *nicht konstant. Dann findet man* $\varepsilon > 0$ *und* $\delta > 0$ *mit* $\overline{U_\varepsilon(z_0)} \subseteq U$ *und* $|f(z_0) - f(z)| \geq \delta$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z_0 - z| = \varepsilon$*.*

Aufgabe 6.4. *Seien* $f, g \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ *zwei Polynome mit* $\deg(g) > \deg(f)$ *und* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \geq 0$*. Sei außerdem* $n > 1$ *eine natürliche Zahl,* $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ *und* $A_n \subseteq \mathbb{C}$ *gegeben durch das Segment*

$$A_n := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Arg}(z) < \frac{2\pi}{n} \right\}.$$

(a) *Zeigen Sie mithilfe des Residuensatzes 6.10 die Formel*

$$\int_0^\infty \frac{f(x^n)}{g(x^n)} \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1 - \zeta_n} \sum_{z \in A_n} \operatorname{res}_{w=z} \frac{f(w^n)}{g(w^n)}.$$

Hinweis: *Betrachten Sie das geschlossene Kurvenintegral*

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(z^n)}{g(z^n)} \,\mathrm{d}z := \int_0^R \frac{f(z^n)}{g(z^n)} \,\mathrm{d}z + \int_{\delta_R} \frac{f(z^n)}{g(z^n)} \,\mathrm{d}z + \int_{\zeta_n R}^0 \frac{f(z^n)}{g(z^n)} \,\mathrm{d}z,$$

wobei $\delta_R : [0, \frac{2\pi}{n}] \to \mathbb{C}$ *das Kreissegment* $\delta_R(t) = Re^{it}$ *bezeichne.*

(b) *Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale mithilfe der in Teilaufgabe (a) hergeleiteten Formel.*

(i) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1 + x + x^2} \,\mathrm{d}x,$ *(ii)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1 + x^6} \,\mathrm{d}x,$ *(iii)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1 + x^n} \,\mathrm{d}x.$

KAPITEL 7

Der Kleine Riemann'sche Abbildungssatz und Folgerungen

7.1 Biholomorphe Funktionen

Definition 7.1. *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ offen. Genau dann heißt eine Funktion $\varphi : D_1 \to D_2$* ***biholomorph****, wenn die folgenden Bedingungen gelten.*

(i) *φ ist bijektiv.*

(ii) *φ ist holomorph.*

(iii) *φ^{-1} ist holomorph.*

Aufgrund der aus Proposition 2.16 bekannten Stetigkeit holomorpher Funktionen sind biholomorphe Funktionen insbesondere Homöomorphismen.

Bemerkung 7.2. *Biholomorphe Funktionen werden in der Literatur häufig auch „konform“ genannt. Wir verwenden diese Bezeichung nicht, weil sie in der Geometrie in anderer, aber verwandter Bedeutung eingesetzt wird und wir Verwechslungen vorbeugen wollen.*

Beispiel 7.3. *Sei*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

und φ_M die zugehörige Möbius-Transformation, wie wir sie in Beispiel 5.35 eingeführt haben.

(a) *Ist $c = 0$, so ist offensichtlich φ_M eine biholomorphe Funktion von $\mathbb{C}$ auf sich selbst.*

(b) *Ist $c \neq 0$, so ist φ_M eine biholomorphe Funktion von $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ nach $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.*

Natürlich lässt sich φ_M auf eine beliebige offene Teilmenge D_1 von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ einschränken. Dann erhält man eine biholomorphe Funktion von D_1 auf $\varphi_M(D_1)$. Wir werden gleich sehen, wieso dies nützlich ist.

Beispiel 7.4. *Nach Proposition 2.50 und Satz 2.51 ist die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf die Menge*

$$\{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid -\pi < y < \pi\}$$

eine biholomorphe Funktion von dieser nach $\mathbb{C}_-$, deren Umkehrabbildung durch den Hauptzweig des komplexen Logarithmus gegeben ist.

Definition 7.5. *Zwei Gebiete $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ heißen **biholomorph äquivalent**, wenn es eine biholomorphe Funktion $\varphi : D_1 \to D_2$ gibt.*[58]

Beispiel 7.6. (a) *Die obere Halbebene $\mathbb{H}$ und die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ sind biholomorph äquivalent,*

denn: Die Möbius-Transformation φ_M mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

*heißt die **Cayley-Transformation**[59] und ist nach Beispiel 7.3 biholomorph und bildet $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{E}$ ab:*

$$\begin{aligned}
|\frac{z-i}{z+i}| < 1 &\iff |z-i|^2 < |z+i|^2 \\
&\iff (z-i)(\overline{z}+i) < (z+i)(\overline{z}-i) \\
&\iff |z|^2 + i(z-\overline{z}) + 1 < |z|^2 - i(z-\overline{z}) + 1 \\
&\iff 2i(z-\overline{z}) < 0 \\
&\iff \frac{z-\overline{z}}{2i} > 0 \\
&\iff \mathrm{Im} z > 0 \\
&\iff z \in \mathbb{H}.
\end{aligned}$$

#

(b) *Im Gegensatz dazu sind $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ nicht biholomorph äquivalent,*

denn: Eine holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$ ist stets beschränkt, nach dem Satz von Liouville 3.34 also konstant. Insbesondere kann eine solche holomorphe Funktion f keine Bijektion sein. #

Lemma 7.7 (Biholomorphiekriterium). *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete und $\varphi : D_1 \to D_2$ eine Abbildung. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *φ ist biholomorph.*

(ii) *φ ist bijektiv, holomorph und $\varphi'(z)$ hat auf D_1 keine Nullstelle.*

(iii) *φ ist bijektiv und holomorph.*

[58] Dieser Begriff ist insofern wohldefiniert als die biholomorphe Äquivalenz tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Gebiete in $\mathbb{C}$ definiert. Letzteres zu überprüfen ist eine leichte *Übung*.

[59] Arthur Cayley (1821-1895)

Beweis. Gelte zunächst Aussage (i), sei also φ biholomorph. Dann gilt $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}$ und nach der Kettenregel 2.19 also

$$\varphi'\left(\varphi^{-1}(w)\right)\left(\varphi^{-1}\right)'(w) = 1 \qquad \text{für alle } w \in D_2.$$

Insbesondere gilt

$$\varphi'(\varphi^{-1}(w)) \neq 0 \qquad \text{für alle } w \in D_2$$

und wegen der Bijektivität von φ^{-1}

$$\varphi'(z) \neq 0 \quad \text{für alle } z \in D_1,$$

also Aussage (ii).

Dass Aussage (ii) Aussage (iii) impliziert, ist trivial.

Es verbleibt zu zeigen, dass Aussage (iii) Aussage (i) impliziert, dass also die Umkehrabbildung φ^{-1} einer bijektiven, holomorphen Funktion $\varphi : D_1 \to D_2$ stets holomorph ist. Zunächst ist φ^{-1} stetig,

denn: Sei $U \subseteq D_1$ eine offene Teilmenge. Als injektive Funktion ist φ auf keiner Zusammenhangskomponente von U konstant, so dass wir den Offenheitssatz 4.15 anwenden können, nach dem das Urbild $(\varphi^{-1})^{-1}(U) = \varphi(U)$ unter der Umkehrabbildung φ^{-1} offen ist. #

Insbesondere ist φ ein Homöomorphismus. Die Ableitung φ' ist wegen der Injektivität auf keinem Teilgebiet von D_1 identisch Null, so dass nach Korollar 4.10 die Nullstellenmenge $N(\varphi';0)$ von φ' nur aus isolierten Punkten besteht und abgeschlossen in D_1 ist. Da φ ein Homöomorphismus ist, besteht dann auch $N := \varphi(N(\varphi';0))$ nur aus isolierten Punkten und ist abgeschlossen in D_2.

Sei nun $w_0 \in D_2 \setminus N$ mit Urbild $z_0 := \varphi^{-1}(w_0)$. Dann gilt

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + (z - z_0)\psi(z)$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion $\psi : D_1 \to \mathbb{C}$ mit $\psi(z_0) = \varphi'(z_0) \neq 0$. Setzen wir nun $z := \varphi^{-1}(w)$ für alle $w \in D_2$, so folgt

$$w = w_0 + \left(\varphi^{-1}(w) - \varphi^{-1}(w_0)\right) \cdot \psi(\varphi^{-1}(w)).$$

Die Funktion $q := \psi \circ \varphi^{-1}$ ist stetig in w_0 und erfüllt $q(w_0) = \psi(z_0) \neq 0$, es gibt also ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\varphi^{-1}(w) = \varphi^{-1}(w_0) + \frac{w - w_0}{q(w)} \quad \text{für alle } w \in U_r(w_0) \cap D_2.$$

Hieraus lässt sich ablesen, dass der Differenzenquotient von $\varphi^{-1}(w)$ in w_0 durch die stetige Funktion $\frac{1}{q(w)}$ gegeben ist, so dass φ^{-1} in w_0 komplex differenzierbar ist und dort die Ableitung

$$(\varphi^{-1})'(w_0) = \frac{1}{q(w_0)} = \frac{1}{\psi(z_0)} = \frac{1}{\varphi'(z_0)} = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(w_0))}$$

besitzt.

Nach dem eben Gezeigten ist φ^{-1} auf $D_2 \setminus N$ holomorph. Andererseits ist φ^{-1} ja auf ganz D_2 stetig. Nach dem Riemann'schen Fortsetzungssatz (Übungsaufgabe 3.4) ist somit φ^{-1} holomorph auf ganz D_2. □

Zwei Gebiete, die biholomorph äquivalent sind, sollten dieselben funktionentheoretischen Eigenschaften haben. In der Tat gilt:

Lemma 7.8. *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete und $\varphi : D_1 \to D_2$ eine biholomorphe Funktion. Ist dann D_1 ein Elementargebiet, so auch D_2.*

Beweis. Sei $g : D_2 \to \mathbb{C}$ holomorph. Wir müssen zeigen, dass g eine Stammfunktion $G : D_2 \to \mathbb{C}$ hat. Es gilt das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "g\circ\varphi"'] & & D_2 \arrow[dl, "g"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

Da D_1 ein Elementargebiet ist und $(g \circ \varphi)\,\varphi' : D_1 \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung, hat $(g \circ \varphi)\,\varphi'$ eine Stammfunktion $F : D_1 \to \mathbb{C}$. Für $G := F \circ \varphi^{-1}$ gilt nun

$$\begin{aligned} G'(w) &= (F \circ \varphi^{-1})'(w) \\ &= F'\big(\varphi^{-1}(w)\big)\,(\varphi^{-1})'(w) \\ &= (g \circ \varphi)\big(\varphi^{-1}(w)\big) \cdot \varphi'\big(\varphi^{-1}(w)\big) \cdot (\varphi^{-1})'(w) \\ &= g(w) \cdot (\varphi \circ \varphi^{-1})'(w) \\ &= g(w). \end{aligned}$$

Es ist also G eine Stammfunktion von g. Es folgt, dass D_2 ein Elementargebiet ist. □

Die große Fragestellung über biholomorphe Äquivalenz ist offensichtlich die nach einem Vertretersystem der Äquivalenzklassen. Wir suchen also eine Liste möglichst schön beschreibbarer Gebiete $D \subseteq \mathbb{C}$, so dass jedes Gebiet in $\mathbb{C}$ äquivalent ist zu einem Gebiet aus der Liste und keine zwei Gebiete in der Liste äquivalent sind.

7.2 Der Kleine Riemann'sche Abbildungssatz

Für Elementargebiete ist die Antwort auf diese Frage – wenn auch nicht ihr Beweis – einfach:

Satz 7.9 (Kleiner Riemann'scher Abbildungssatz)**.** *Sei $\emptyset \subsetneqq D \subsetneqq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet.*[60] *Dann ist D biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$.*

[60] In unserer Definition ist auch die leere Menge ein Elementargebiet, für welches der Satz aber offensichtlich falsch wäre. Weil das unintuitiv ist, wird oft auch die leere Menge als Gebiet verboten.

Bemerkung 7.10. *Der Kleine Riemann'sche Abbildungssatz ist ein Spezialfall des Großen Riemann'schen Abbildungssatzes, welcher besagt, dass jede einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche biholomorph äquivalent ist zu $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ oder $\overline{\mathbb{C}}$.*

Den Beweis des Abbildungssatzes erfolgt in mehreren Schritten und füllt den Rest dieses Abschnitts aus.

1. Schritt: Vorbereitung

Lemma 7.11. *Sei $\emptyset \subsetneqq D_1 \subsetneqq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet. Dann ist D_1 biholomorph äquivalent zu einem Elementargebiet D_2 mit $0 \in D_2 \subseteq \mathbb{E}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein $c \in \mathbb{C} \setminus D_1$, so dass die holomorphe Funktion $f(z) = z - c$ auf D_1 keine Nullstelle hat. Da D_1 ein Elementargebiet ist, hat somit f auf D_1 nach Lemma 4.6 eine holomorphe Quadratwurzel, also eine holomorphe Funktion $g : D_1 \to \mathbb{C}$ mit $g^2(z) = f(z)$ auf ganz D_1. Für $z_1, z_2 \in D_1$ gilt dann

$$g(z_1) = \pm g(z_2) \quad \Longrightarrow \quad f(z_1) = f(z_2) \quad \Longrightarrow \quad z_1 = z_2.$$

Hieraus folgt einerseits, dass g injektiv ist und nach Lemma 7.8 also eine biholomorphe Funktion von D_1 auf das Elementargebiet $g(D_1)$. Andererseits folgt

$$w \in g(D_1) \setminus \{0\} \quad \Longrightarrow \quad -w \notin g(D_1), \tag{7.1}$$

denn: Ist $w = g(z_1) = -g(z_2)$ mit $z_1, z_2 \in D_1$, so gilt nach dem obigen $z_1 = z_2$. Setzen wir dies in die ursprüngliche Gleichung ein, erhalten wir $w = -w$ und somit $w = 0$. #

Da $g(D_1)$ offen und nicht leer ist, gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und ein $r > 0$ mit $U_r(z_0) \subseteq g(D_1)$ und $0 \notin U_r(z_0)$. Dann gilt

$$|w + z_0| \geq r \quad \text{für alle } w \in g(D_1),$$

denn: Gäbe es ein $w \in g(D_1)$ mit $|w + z_0| < r$, dann läge dieses in $U_r(-z_0) = -U_r(z_0)$. Nach (7.1) und den Voraussetzungen an w und z_0 ist aber der Durchschnitt $-U_r(z_0) \cap g(D_1)$ leer, was einen Widerspruch ergäbe. #

Die Abbildung

$$h : w \mapsto \frac{1}{w + z_0}$$

ist für $w \neq -z_0$ holomorph und injektiv, bildet also $g(D_1)$ auf das biholomorph äquivalente Gebiet $h(g(D_1))$ ab. Dieses ist beschränkt,

denn: Für $w \in g(D_1)$ gilt nach dem obigen $|w + z_0| \geq r$ und somit $|\frac{1}{w+z_0}| \leq \frac{1}{r}$. #

Nach Anwenden einer geeigneten Translation $t : w \mapsto w + a$ erhalten wir ein biholomorph äquivalentes beschränktes Elementargebiet $t(h(g(D_1)))$, das 0 enthält. Nach Anwenden einer geeigneten zentrischen Streckung $s : w \mapsto \varrho \cdot w$ erhalten wir ein biholomorph äquivalentes Gebiet D_2, das wie verlangt $0 \in D_2 \subseteq \mathbb{E}$ erfüllt. □

Wir nehmen Lemma 7.11 zum Anlass, im weiteren Beweis des Kleinen Riemann'schen Abbildungssatzes 7.9 stets $0 \in D \subseteq \mathbb{E}$ vorauszusetzen. Da für $D = \mathbb{E}$ nichts zu zeigen ist, können wir im Folgenden sogar $0 \in D \subsetneqq \mathbb{E}$ annehmen.

2. Schritt: Rückführung auf ein Extremalproblem

Lemma 7.12. *Sei D ein Elementargebiet mit $0 \in D \subsetneqq \mathbb{E}$. Dann gibt es eine injektive holomorphe Abbildung $\varphi : D \to \mathbb{E}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $|\varphi'(0)| > 1$.*

Beweis. Für jedes $a \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ gilt

$$M_a := \begin{pmatrix} 1 & -a \\ \bar{a} & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Nach Beispiel 7.3 ist die Möbius-Transformation $\varphi_a := \varphi_{M_a}$ eine biholomorphe Funktion von $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{a}}\}$ auf sich selbst. Nach Übungsaufgabe 4.4 ist die Einschränkung von $\varphi_a|_{\mathbb{E}} : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ ebenfalls biholomorph. Offensichtlich gilt dabei außerdem $\varphi_a(a) = 0$.

Nach Voraussetzung gibt es ein $b \in \mathbb{E} \setminus D$. Das zugehörige φ_b ist daher auf D nullstellenfrei. Da D ein Elementargebiet ist, gibt es eine holomorphe Abbildung $h : D \to \mathbb{C}$ mit $h^2(z) = \varphi_b(z)$ für alle $z \in D$. Da außerdem

$$|\varphi_b(z)| < 1 \quad \text{für alle } z \in D$$

gilt und φ_b auf D injektiv ist, gelten diese beiden Eigenschaften auch für h. Setzen wir $c := h(0)$ fest – das geht, da wir $0 \in D$ angenommen hatten. Dann ist auch $\varphi := \varphi_c \circ h$ eine injektive holomorphe Abbildung von D nach $\mathbb{E}$. Weiter gilt

$$\varphi(0) = \frac{h(0) - c}{\bar{c}\, h(0) - 1} = \frac{0}{|c|^2 - 1} = 0.$$

Es verbleibt zu zeigen, dass die Ableitung von φ an der Stelle $z = 0$ betragsmäßig größer als 1 ist. Es gilt

$$\varphi'(0) = \frac{h'(0)\big(\bar{c}\, h(0) - 1\big) - \bar{c}\, h'(0)\big(h(0) - c\big)}{\big(\bar{c}\, h(0) - 1\big)^2} = \frac{h'(0)\,\big(|c|^2 - 1\big)}{\big(|c|^2 - 1\big)^2} = \frac{h'(0)}{|c|^2 - 1}. \tag{7.2}$$

Wir müssen nun den Term auf der rechten Seite noch genauer untersuchen. Es gilt $h^2(z) = \varphi_b(z)$, also insbesondere

$$2\, h'(0)\, h(0) = (h^2)'(0) = \varphi_b'(0) = \frac{(\bar{b}\, 0 - 1) - \bar{b}(0 - b)}{(\bar{b}\, 0 - 1)^2} = |b|^2 - 1.$$

Andererseits gilt

$$|c|^2 = |h(0)|^2 = |\varphi_b(0)| = |b|$$

und somit $|c| = |h(0)| = \sqrt{|b|}$. Setzen wir beides in (7.2) ein, erhalten wir

$$|\varphi'(0)| = \Big|\frac{2\, h'(0)\, h(0)}{2\, h(0)(|c|^2 - 1)}\Big| = \frac{\big||b|^2 - 1\big|}{2\,|c|(1 - |c|^2)} = \frac{|b| + 1}{2\sqrt{|b|}} > 1,$$

wobei wir in der Abschätzung benutzt haben, dass

$$|b| - 2\sqrt{|b|} + 1 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\sqrt{|b|} - 1\right)^2 > 0$$

gilt. $\square$

Korollar 7.13. *Sei D ein Elementargebiet mit $0 \in D \subsetneqq \mathbb{E}$, und sei weiter*

$$\mathfrak{K}(D) := \{\varphi : D \to \mathbb{E} \mid \varphi \text{ injektiv, holomorph, } \varphi(0) = 0\}.$$

Falls es ein $\psi \in \mathfrak{K}(D)$ gibt mit

$$|\psi'(0)| \geq |\varphi'(0)| \quad \text{für alle } \varphi \in \mathfrak{K}(D), \tag{7.3}$$

dann ist dieses ψ eine biholomorphe Funktion von D nach $\mathbb{E}$.

Beweis. Angenommen ψ wäre nicht surjektiv, es gälte also $\psi(D) \subsetneqq \mathbb{E}$. Nach Lemma 7.8 ist mit D auch $\psi(D)$ ein Elementargebiet, so dass wir dann Lemma 7.12 auf $\psi(D)$ anwenden könnten. Nach diesem gäbe es dann ein $\varphi \in \mathfrak{K}(\psi(D))$ mit $|\varphi'(0)| > 1$. Es gälte dann $\varphi \circ \psi \in \mathfrak{K}(D)$ und

$$|(\varphi \circ \psi)'(0)| = |\varphi'(\psi(0))\, \psi'(0)| = |\varphi'(0)| \cdot |\psi'(0)| > |\psi'(0)|.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von $|\psi'(0)|$. Also ist ψ surjektiv und daher nach Lemma 7.7 eine biholomorphe Funktion von D auf $\mathbb{E}$. $\square$

Wir haben also den Beweis des Riemann'schen Abbildungssatzes 7.9 darauf reduziert, die Voraussetzung (7.3) zu zeigen. Im nächsten Schritt gelingt uns dies mithilfe des Satzes von Montel 7.14.

3. Schritt: Rückführung auf den Satz von Montel[61]

Sei

$$K := \sup_{\varphi \in \mathfrak{K}(D)} |\varphi'(0)|.$$

Das ist ein wohldefiniertes Element aus $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, da mit $\mathrm{id}_D \in \mathfrak{K}(D)$ die Menge $\mathfrak{K}(D)$ nicht leer ist. Nach Definition des Supremums gibt es eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ von Funktionen $\varphi_n \in \mathfrak{K}(D)$, für die $|\varphi_n'(0)|$ mit $n \to \infty$ gegen K geht.

Satz 7.14 (Satz von Montel)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ offen und $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : A \to \mathbb{C}$, die auf A beschränkt ist, für die es also ein $C > 0$ gibt mit $|f_n(z)| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und alle $z \in A$. Dann besitzt $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine konvergente Teilfolge, die auf jeder kompakten Teilmenge von A gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. Im 4. Schritt. $\square$

[61] Paul Antoine Aristide Montel (1876 - 1975)

Wegen $\varphi_n(D) \subseteq \mathbb{E}$ ist die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ von oben beschränkt. Wir können also den Satz von Montel 7.14 auf sie anwenden, der besagt, dass sie eine Teilfolge besitzt, die auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\psi : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Bezeichnen wir die Glieder dieser Teilfolge mit φ_{n_ν}.

Wegen $\varphi_{n_\nu}(0) = 0$ und
$$\varphi_{n_\nu}(0) \overset{\nu\to\infty}{\to} \psi(0)$$
gilt $\psi(0) = 0$. Da $(\varphi_{n_\nu})_{\nu\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ nach dem Satz von Montel 7.14 auf Kompakta gleichmäßig konvergiert, können wir den Weierstraß'schen Approximationssatz 3.41 anwenden, und erhalten die Holomorphie der Grenzfunktion ψ auf D sowie $\varphi'_{n_\nu}(z) \to \psi'(z)$ für alle $z \in D$, insbesondere also für $z = 0$. Wegen
$$|\varphi'_{n_\nu}(0)| \overset{\nu\to\infty}{\to} K$$
folgt also $K = |\psi'(0)|$, insbesondere gilt $K < \infty$ und $|\varphi'(0)| \leq |\psi'(0)|$ für alle $\varphi \in \mathfrak{K}(D)$.

Mit der soeben gezeigten Maximalitätseigenschaft von ψ und $\mathrm{id}|_D \in \mathfrak{K}(D)$ folgt $\psi'(0) \neq 0$, so dass insbesondere ψ auf dem Gebiet nicht konstant sein kann.[62] Da alle φ_{n_ν} injektiv sind, ist somit nach Korollar 6.18 auch ψ injektiv.

Da die Folge $\varphi_{n_\nu}(z)$ für $\nu \to \infty$ auf ganz D gegen $\psi(z)$ konvergiert und dort stets $|\varphi_{n_\nu}(z)| < 1$ gilt, folgt $|\psi(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$. Gäbe es ein $z_0 \in D$ mit $|\psi(z_0)| = 1$, so nähme ψ in diesem z_0 ein Betragsmaximum, wäre also nach dem Maximumprinzip 4.17 konstant, was bereits ausgeschlossen wurde. Also gilt $\psi(D) \subseteq \mathbb{E}$.

Insgesamt liegt also ψ in $\mathfrak{K}(D)$ und erfüllt die Extremalbedingung (7.3). Mit den Ergebnissen des 2. Schritts haben wir somit gezeigt, dass der Kleine Riemann'sche Abbildungssatz 7.9 aus dem Satz von Montel 7.14 folgt. Letzteren gilt es nun noch zu beweisen.

4. Schritt: Beweis des Satzes von Montel

Lemma 7.15. *Sei $A \subseteq \mathbb{C}$ offen, $C \in \mathbb{R}_{>0}$ eine Konstante und $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge holomorpher Funktionen*
$$f_n : A \to \mathbb{C} \quad \text{mit } |f_n(z)| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ und alle } z \in A.$$
Es gebe eine dichte Teilmenge $S \subseteq A$, auf der $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ punktweise konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf A, und zwar gleichmäßig auf kompakten Teilmengen.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes Kompaktum $K \subseteq A$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit
$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n > N \text{ und alle } z \in K, \tag{7.4}$$

denn: Aus (7.4) folgt wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ zunächst die Konvergenz von $(f_n(z))_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ in jedem $z \in K$. Sei die Grenzfunktion durch
$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \text{für alle } z \in K$$

[62] denn sonst wäre ja $\psi'(z) = 0$ für alle $z \in D$

gegeben. Wählen wir $n > N$ fest aber beliebig und lassen m in (7.4) gegen ∞ gehen, so folgt

$$|f(z) - f_n(z)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } z \in K.$$

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ konvergiert auf K somit gleichmäßig gegen f. #

Sei also $K \subseteq A$ kompakt. Da A offen ist, gibt es zu jedem $a \in K \subseteq A$ ein $r_a > 0$ mit $\overline{U_{2r_a}(a)} \subseteq A$. Die Familie $\{U_{r_a}(a)\}_{a\in K}$ bildet eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, hat diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{N} U_{r_\nu}(a_\nu) \quad \text{mit } a_1, \ldots, a_N \in K,$$

wobei wir kurz $r_\nu := r_{a_\nu}$ geschrieben haben. Es folgt insbesondere

$$K \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{N} \overline{U_{r_\nu}(a_\nu)} \subseteq A,$$

wobei die zweite Inklusion nach Konstruktion der Umgebungen $U_{r_\nu}(a_\nu)$ gilt. Es genügt daher, (7.4) für kompakte Mengen der Form

$$K = \overline{U_r(a)} \subseteq A \quad \text{mit } a \in A \text{ und } r > 0$$

zu zeigen, wobei wir noch $\overline{U_{2r}(a)} \subseteq A$ annehmen dürfen.

Das wollen wir nun tun. Zu einem $\varepsilon > 0$ wählen wir also ein $\frac{r}{24C} \cdot \varepsilon > \delta > 0$. Seien $z_0, z_1 \in U_{\frac{3}{2}r}(a)$ mit $|z_0 - z_1| < \delta$. Nach der Cauchy'schen Integralformel 3.29 gilt dann für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$\begin{aligned} |f_n(z_0) - f_n(z_1)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-a|=2r} \left(\frac{f_n(w)}{w - z_0} - \frac{f_n(w)}{w - z_1} \right) \mathrm{d}w \right| \\ &= \frac{|z_0 - z_1|}{2\pi} \cdot \left| \int_{|w-a|=2r} \frac{f_n(w)}{(w - z_0)(w - z_1)} \mathrm{d}w \right|. \end{aligned}$$

Für $|w - a| = 2r$ und $z \in U_{\frac{3}{2}r}(a)$ gilt

$$|w - z| = |(w - a) - (z - a)| \geq |w - a| - |z - a| \geq 2r - \frac{3}{2}r = \frac{r}{2}.$$

Setzen wir dies in die obige Gleichung ein, so erhalten wir mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale 3.15

$$|f_n(z_0) - f_n(z_1)| \leq \frac{|z_0 - z_1|}{2\pi} \left(\frac{2}{r}\right)^2 \cdot C \cdot 4\pi r = \frac{|z_0 - z_1| \cdot 8C}{r} < \frac{r}{24C} \cdot \varepsilon \cdot \frac{8C}{r} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Zusammengefasst erhalten wir also

$$|f_n(z_0) - f_n(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ und alle } z_0, z_1 \in U_{\frac{3}{2}r}(a) \text{ mit } |z_0 - z_1| < \delta. \tag{7.5}$$

Da S dicht in A ist, lässt sich $\overline{U_r(a)}$ wie folgt überdecken:

$$\overline{U_r(a)} \subseteq \bigcup_{b \in S \cap U_{\frac{3}{2}r}(a)} U_\delta(b).$$

Da $\overline{U_r(a)}$ kompakt ist, hat diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung

$$\overline{U_r(a)} \subseteq \bigcup_{\mu=1}^{M} U_\delta(b_\mu) \quad \text{mit } b_1, \ldots, b_M \in S \cap U_{\frac{3}{2}r}(a). \tag{7.6}$$

Sei $z \in \overline{U_r(a)}$. Dann gibt es also ein $\mu \in \{1, \ldots, M\}$ mit $|z - b_\mu| < \delta$. Insbesondere können wir (7.5) anwenden und erhalten für alle m, n, die größer als ein geeignetes $N_\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sind,

$$\begin{aligned} |f_m(z) - f_n(z)| &\leq |f_m(z) - f_m(b_\mu)| + |f_m(b_\mu) - f_n(b_\mu)| + |f_n(b_\mu) - f_n(z)| \\ &\overset{(7.5)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + |f_m(b_\mu) - f_n(b_\mu)| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Abschätzung die punktweise Konvergenz der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf S ausgenutzt haben. Da die Überdeckung (7.6) endlich war, existiert das Maximum $N := \max_{\mu=1}^{M} N_\mu$, und für alle $z \in \overline{U_r(a)}$ und alle $m, n > N$ gilt die Behauptung. □

Beweis des Satzes von Montel 7.14. Sei S eine abzählbare dichte Teilmenge von A, etwa

$$S = \{x + iy \in A \mid x, y \in \mathbb{Q}\},$$

und sei $s_1, s_2, \ldots$ eine Abzählung von S. Die Folge $(f_n(s_1))_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ist beschränkt, also hat die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß[63] eine Teilfolge, die in s_1 konvergiert. Eine solche sei $f_{11}, f_{12}, f_{13} \ldots$. Ebenso hat diese wiederum eine Teilfolge $f_{21}, f_{22}, f_{23}, \ldots$, die in s_2 konvergiert. Induktiv konstruiert man eine Folge von Folgen, derart dass jede dieser Folgen Teilfolge der vorhergehenden ist und so dass die n-te Folge $f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \ldots$ in $s_1, \ldots, s_n$ konvergiert. Offensichtlich konvergiert dann die Diagonalfolge $f_{11}, f_{22}, f_{33}, \ldots$ in allen $s \in S$. Der Satz von Montel 7.14 folgt somit aus Lemma 7.15. □

Insgesamt haben wir so den Kleinen Riemann'schen Abbildungssatz 7.9 bewiesen.

7.3 Geometrische Charakterisierung von Elementargebieten

Ein Elementargebiet in $\mathbb{C}$ ist nach Definition 4.1 ein Gebiet auf dem jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion besitzt. Diese Definition ist zwar gut geeignet, um Sätze in der Integrationstheorie zu zeigen, gibt aber nicht gut darüber Aufschluss, ob ein gegebenes Gebiet ein Elementargebiet ist oder nicht. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass die Elementargebiete in $\mathbb{C}$ gerade diejenigen Gebiete in $\mathbb{C}$ sind, die einfach zusammenhängend sind, die also anschaulich „keine Löcher haben". Für dieses Resultat werden wir eine Umformulierung des Cauchy'schen Integralsatzes 3.25 verwenden, die wir nun zunächst herleiten wollen.

[63] Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 - 1848)

Lemma 7.16. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine (stetige) Kurve in D. Dann existiert eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ und ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$, derart dass*

$$U_r(z_\nu) \subseteq D \quad \textit{mit} \quad z_\nu := \gamma(a_\nu) \quad \textit{für alle } 0 \leq \nu \leq n$$

und

$$\gamma([a_\nu, a_{\nu+1}]) \subseteq U_r(z_\nu) \cap U_r(z_{\nu+1}) \quad \textit{für alle } 0 \leq \nu \leq n-1$$

gelten.

Beweis. Da $\gamma([a,b])$ als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung wieder kompakt ist, gibt es nach dem Lemma von Lebesgue 3.28 ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $U_r(z) \subseteq D$ für alle $z \in \gamma([a,b])$. Da die stetige Funktion γ auf dem Kompaktum $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu diesem r ein $\delta > 0$ mit

$$|\gamma(t) - \gamma(t')| < r \quad \text{für alle } t, t' \in [a,b] \text{ mit } |t - t'| < \delta.$$

Wir wählen nun ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $\frac{b-a}{n} < \delta$ und unterteilen das Intervall $[a,b]$ in die n Teilintervalle

$$\left[a + \frac{b-a}{n}\nu,\, a + \frac{b-a}{n}(\nu+1)\right] \quad \text{mit } \nu \in \{0, \ldots, n-1\}$$

der Länge $\frac{b-a}{n} < \delta$. Seien

$$a_\nu := a + \frac{b-a}{n}\nu \quad \text{und} \quad z_\nu := \gamma(a_\nu) \quad \text{für alle } \nu \in \{0, \ldots, n\}.$$

Dann liegt nach Konstruktion $U_r(z_\nu)$ in D, und für ein beliebiges $t \in [a_\nu, a_{\nu+1}]$ gilt $|t - a_\nu|, |t - a_{\nu+1}| < \delta$. Mit der gleichmäßigen Stetigkeit von γ folgt dann

$$|\gamma(t) - z_\nu|, |\gamma(t) - z_{\nu+1}| < r,$$

also $\gamma(t) \in U_r(z_\nu) \cap U_r(z_{\nu+1})$. □

Definition 7.17. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine Kurve in D. Sei die Notation wie in Lemma 7.16. Dann ist das Integral von f längs γ definiert als*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

wobei jeweils längs der Verbindungsstrecke von z_ν nach $z_{\nu+1}$ integriert wird.[64]

Bemerkung 7.18. (a) *Definition 7.17 ist wohldefiniert in dem Sinne, dass sie unabhängig ist von der Auswahl der Unterteilung,*

denn: Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass sich der Wert des Integrals beim Übergang zu einer Verfeinerung der Unterteilung nicht ändert. Genauer sei $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ eine

[64] Man beachte, dass nach Lemma 7.16 die Punkte $z_\nu, z_{\nu+1}$ samt ihrer Verbindungsstrecke in D liegen.

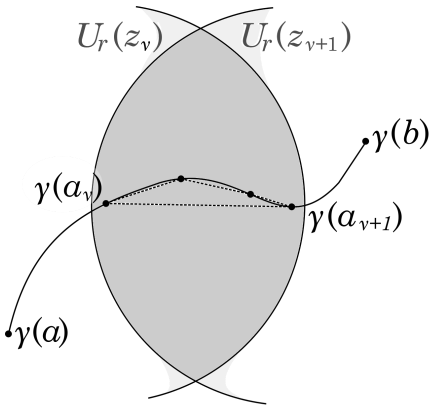
Unterteilung von $[a, b]$ wie in Lemma 7.16 und $a = \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \ldots < \tilde{a}_m = b$ eine weitere solche Unterteilung mit $m \geq n$ und $\{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq \{\tilde{a}_0, \ldots, \tilde{a}_m\}$. Dann gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\mu=0}^{m-1} \int_{\gamma(\tilde{a}_\mu)}^{\gamma(\tilde{a}_{\mu+1})} f(z)\,\mathrm{d}z,$$

denn: Betrachten wir $a_\nu = \tilde{a}_\mu < \tilde{a}_{\mu+1} < \ldots < \tilde{a}_{\mu+k} = a_{\nu+1}$ mit einem $k > 0$. Nach Voraussetzung liegen die Bilder davon unter γ alle in der offenen Kreisscheibe $U_r(z_\nu)$. Da letztere konvex ist, sind damit auch alle Verbindungsstrecken ganz enthalten. Da $f(z)$ auf $U_r(z_\nu)$ holomorph ist, folgt mit dem Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete 3.25

$$\int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma(a_\nu)}^{\gamma(a_{\nu+1})} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{\kappa=\mu}^{\mu+k-1} \int_{\gamma(\tilde{a}_\kappa)}^{\gamma(\tilde{a}_{\kappa+1})} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

#



#

(b) *Ist γ stückweise glatt, so ist die rechte Seite der Definition gerade das übliche Kurvenintegral,*

denn: Ist γ stückweise glatt, so trifft dies insbesondere auf das Teilstück von z_ν nach $z_{\nu+1}$ zu, also ist dieses zusammen mit der Strecke von z_ν nach $z_{\nu+1}$ eine geschlossene stückweise glatte Kurve im Sterngebiet $U_r(z_\nu)$, also ist wieder nach dem Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete 3.25 das Integral von f hierüber gleich Null. #

Definition 7.19. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und seien $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ zwei Kurven in D. Dabei gelte*

$$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \quad \textit{und} \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(1),$$

*es sollen also die Anfangs- und die Endpunkte von γ_1 und γ_2 jeweils übereinstimmen. Genau dann heißen γ_1 und γ_2 **homotop in D (mit festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt)**, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0, 1] \times [0, 1] \to D$ gibt mit*

(a) $H(t, 0) = \gamma_1(t)$ *und* $H(t, 1) = \gamma_2(t)$.

(b) *Für alle $s \in [0,1]$ gilt*

$$H(0,s) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0) \quad \textit{und} \quad H(1,s) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1).$$

In diesem Fall nennt man auch H eine ***Homotopie*** *von γ_1 nach γ_2 in D.*

Diese Definition bedeutet gerade, dass man γ_1 in D stetig nach γ_2 deformieren kann, wobei Anfangs- und Endpunkt fest bleiben. Wir werden im Folgenden nur Homotopie von Kurven mit festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt betrachten und dabei kurz von Homotopie von Kurven sprechen.

Beispiel 7.20. *Ist D konvex, so sind je zwei Kurven γ_1 und γ_2 in D mit gleichem Anfangs- und Endpunkt homotop in D. Eine Abbildung H mit den geforderten Eigenschaften ist*

$$H(t,s) = \gamma_1(t) + s\,(\gamma_2(t) - \gamma_1(t)) \quad \textit{mit } s,t \in [0,1].$$

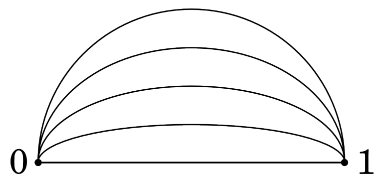
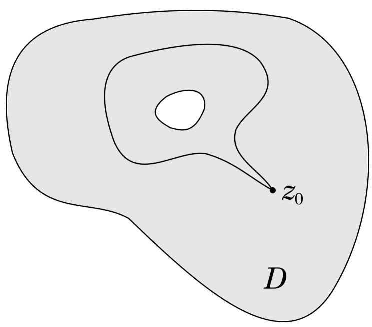


Abbildung 7.1: Im konvexen Gebiet $D = \mathbb{C}$ sind die gerade Strecke von 0 nach 1 und der Halbkreisbogen von Radius $\frac{1}{2}$ um $\frac{1}{2}$ homotop. Eingezeichnet sind die Kurven $H(t,s)$ mit $s \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Definition 7.21. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und γ eine geschlossene Kurve in D mit Anfangs- und Endpunkt z_0. Genau dann nennen wir γ* ***nullhomotop in*** *D, falls γ in D zur* ***Punktkurve*** *γ_{z_0} homotop ist.*[65]

Definition 7.22. *Ein Gebiet D heißt* ***einfach zusammenhängend****, falls jede geschlossene Kurve in D nullhomotop in D ist.*

Anschaulich bedeutet das, dass es „keine Löcher" aufweist, dass also sein Komplement keine beschränkten Zusammenhangskomponenten besitzt.



[65]Hierbei ist γ_{z_0} gegeben durch $\gamma_{z_0}(t) = z_0$ für alle $t \in [0,1]$.

Im Bild lässt sich die rot eingezeichnete geschlossene Kurve wegen des „Lochs" im Gebiet D nicht zur Punktkurve γ_{z_0} „zusammenziehen".

Satz 7.23 (Homotopieversion des Cauchy'schen Integralsatzes)**.** *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und γ, γ' zwei Kurven in D mit gleichem Anfangs- und Endpunkten, die in D homotop sind. Sei weiter $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma'} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Ist speziell D ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

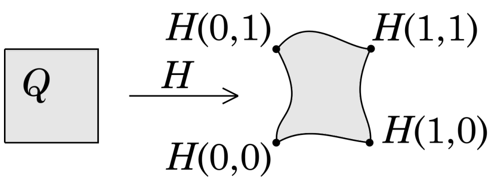
für alle geschlossenen Kurven γ in D.

Vor dem Satz zeigen wir noch ein technisches Lemma, das wir für den Beweis benötigen.

Lemma 7.24. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, sei $Q := [0,1] \times [0,1]$, und sei $H : Q \to D$ eine stetige Abbildung. Das Kurve γ sei gegeben als $\gamma_1 \star \gamma_2 \star \gamma_3 \star \gamma_4$, wobei für $k \in \{1,2,3,4\}$ die Kurve γ_k durch*

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &:= H(t,0) && \text{für } t \in [0,1],\\
\gamma_2(t) &:= H(1,t-1) && \text{für } t \in [1,2],\\
\gamma_3(t) &:= H(3-t,1) && \text{für } t \in [2,3],\\
\gamma_4(t) &:= H(0,4-t) && \text{für } t \in [3,4]
\end{aligned}$$

gegeben sei.



Für jede holomorphe Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ gilt dann

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis. Die stetige Funktion H ist auf dem Kompaktum Q gleichmäßig stetig. Ähnlich wie beim Beweis von Lemma 7.16 kann man daher unter Benutzung des Lemmas von Lebesgue 3.28 eine derartige Unterteilung von Q in n^2 Teilquadrate

$$Q_{\mu\nu} \quad \text{mit } \mu,\nu \in \{0,\dots,n-1\}$$

gleicher Kantenlänge finden, dass die Bildmengen $H(Q_{\mu\nu})$ jeweils ganz in einer offenen Kreisscheibe $U_{\mu\nu} \subseteq D$ liegen. Analog zu γ definieren wir dann geschlossene Kurven $\gamma_{\mu\nu}$ für

$1 \leq \mu, \nu \leq n$, wobei Q jeweils durch $Q_{\mu\nu}$ ersetzt wird. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz 3.25[66] gilt

$$\int_{\gamma_{\mu\nu}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Mit

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{0 \leq \mu,\nu < n} \int_{\gamma_{\mu\nu}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

folgt hieraus die Behauptung. □

Beweis von Satz 7.23. Die zweite Behauptung folgt sofort aus der ersten, denn für die Punktkurve γ_{z_0} gilt ja

$$\int_{\gamma_{z_0}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Wir wollen nun die erste Behauptung zeigen. Sei dafür in der Notation von Lemma 7.24 mit $H : Q \to D$ eine Homotopie von γ nach γ' gegeben; insbesondere gelten also $\gamma_1 = \gamma$ und $\gamma_3(t) = \gamma'^{-}(t-2)$, und die beiden Kurven γ_2 und γ_4 sind konstant. Nach Lemma 7.24 gilt somit

$$0 = \int_{H(Q)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + 0 - \int_{\gamma'} f(z)\,\mathrm{d}z + 0$$

und der Satz folgt. □

Satz 7.25. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *D ist ein Elementargebiet.*

(ii) *D ist einfach zusammenhängend.*

Beweis. Für leeres D ist nichts zu zeigen. Sei also für den Rest des Beweises D nicht leer.

Sei zunächst D einfach zusammenhängend, und sei $z_1 \in D$ fest gewählt. Zu einer beliebigen holomorphe Abbildung $f : D \to \mathbb{C}$ definieren wir dann

$$F(z) := \int_{z_1}^{z} f(w)\,\mathrm{d}w \quad \text{für alle } z \in D.$$

Integriert wird hierbei entlang einer beliebigen Kurve von z_1 nach z. Das ist möglich, da D einfach zusammenhängend ist, und das Integral somit nach der Homotopieversion des Cauchy'schen Integralsatzes 7.23 unabhängig von der Auswahl der Kurve ist. Genau wie im Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes für Sterngebiete 3.25 zeigt man, dass F holomorph ist und $F' = f$ erfüllt. Es folgt, dass D ein Elementargebiet ist.

[66]Diesen dürfen wir anwenden, da das Integral längs der nur stetigen Kurven $\gamma_{\mu\nu}$ laut Definition 7.17 durch das Integral längs einer stückweise glatten Kurve gegeben ist.

Sei nun umgekehrt D ein Elementargebiet. Nach dem Kleinen Riemann'schen Abbildungssatz 7.9 ist dann $D = \mathbb{C}$, oder D ist biholomorph äquivalent zu $\mathbb{E}$. $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ sind beide konvex und insbesondere einfach zusammenhängend. Dass D einfach zusammenhängend ist, folgt nun, wenn wir zeigen können, dass Nullhomotopie von Kurven unter biholomorphen Abbildungen erhalten wird. Dies folgt aus Übungsaufgabe 7.1. □

Korollar 7.26. *Je zwei nichtleere einfach zusammenhängende Gebiete in der komplexen Ebene sind homöomorph.*

Beweis. Nach Satz 7.25 sind einfach zusammenhängende Gebiete stets Elementargebiete. Nach dem Kleinen Riemann'schen Abbildungssatz 7.9 gibt es bis auf biholomorphe Äquivalenz genau zwei nichtleere Elementargebiete, nämlich $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$. Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen können, dass $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ homöomorph sind. Tatsächlich ist

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{E}, \\ z & \mapsto \frac{z}{1+|z|}, \end{cases}$$

ein Homöomorphismus,

denn: Zunächst einmal gilt

$$|\frac{z}{1+|z|}| = \frac{|z|}{1+|z|} < 1$$

und somit tatsächlich $\varphi(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{E}$. Dass hier in Wirklichkeit Gleichheit herrscht, dass also φ surjektiv ist, zeigen wir zusammen mit seiner Injektivität durch Angabe einer Umkehrabbildung: Wie man leicht nachrechnet, ist diese durch

$$\varphi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{E} & \to \mathbb{C}, \\ w & \mapsto \frac{w}{1-|w|} \end{cases}$$

gegeben. Dass sowohl φ als auch φ^{-1} stetig sind, folgt leicht aus der Stetigkeit von $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ bzw. $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ und den Rechenregeln aus Proposition 2.7. #

□

7.4 Übungsaufgaben

Aufgabe 7.1. *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ offen, und sei $\varphi : D_1 \to D_2$ ein Homöomorphismus. Zeigen Sie: Ist dann H eine Homotopie in D_1, so ist $\varphi \circ H$ eine Homotopie in D_2.*

KAPITEL 8

Konstruktion meromorpher Funktionen

Ziel in diesem Kapitel ist es, auf einem gegebenen Gebiet $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ konkrete meromorphe Funktionen mit bestimmten Eigenschaften zu konstruieren. In den Abschnitten 8.1, 8.2 und 8.4 wollen wir Beispiele für solche Eigenschaften studieren. Vorgegeben sind hier jeweils meromorphe Funktionen auf offenen Mengen, die unser Gebiet D überdecken, und gesucht ist jeweils eine globale meromorphe Funktion. In Abschnitt 8.1 sollen sich hierbei die meromorphen Funktionen in den Übergängen nur um einen holomorphen Summanden unterscheiden, in den Abschnitten 8.2 und 8.4 nur um einen invertierbaren holomorphen Faktor.

8.1 Mittag-Leffler-Verteilungen

Definition 8.1. *Sei $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und $D = \bigcup_{i\in I} U_i$ für eine geeignete Indexmenge I eine offene Überdeckung von D. Sei weiter für jedes $i \in I$ eine meromorphe Funktion $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$ gegeben, so dass für je zwei $i_1, i_2 \in I$ die Differenz $\left(f_{i_1} - f_{i_2}\right)$ eine holomorphe Funktion in $\mathcal{O}\left(U_{i_1} \cap U_{i_2}\right)$ ist. Die Menge $\{f_i\}_{i\in I}$ nennt man dann eine* ***Mittag-Leffler-Verteilung***[67].

Unter einer ***Lösung der Mittag-Leffler-Verteilung*** *versteht man eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(D)$ mit $\left(f|_{U_i} - f_i\right) \in \mathcal{O}(U_i)$ für alle $i \in I$.*

Mittag-Leffler-Verteilungen lassen sich in größerer Allgemeinheit auf Riemann'schen Flächen definieren. Auf nicht-kompakten Riemann'schen Flächen sind sie stets lösbar, das wurde 1884 für $D = \mathbb{C}$ von Mittag-Leffler und 1948 in voller Allgemeinheit von Herta Florack bewiesen. Auf nicht einfach zusammenhängenden kompakten Riemann'schen Flächen gibt es dagegen stets unlösbare Mittag-Leffler-Verteilungen. Wir studieren in diesem Abschnitt die Spezialfälle $D = \overline{\mathbb{C}}$ und $D = \mathbb{C}$ und zeigen in den Sätzen 8.4 und 8.8, dass es dort für alle Mittag-Leffler-Verteilungen Lösungen gibt.

[67] Magnus Gösta Mittag-Leffler (1846-1927)

Lemma 8.2. *Ist f eine Lösung einer Mittag-Leffler-Verteilung auf einem gegebenen Gebiet $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ bezüglich einer beliebigen offenen Überdeckung $D = \bigcup_{i \in I} U_i$, so ist die Menge aller möglichen Lösungen durch*

$$f + \mathcal{O}(D) = \{f + g \mid g \in \mathcal{O}(D)\}$$

gegeben.

Beweis. Offensichtlich ist mit f auch jede Funktion aus $f + \mathcal{O}(D)$ eine mögliche Lösung. Sind andererseits f und $\tilde{f}$ zwei Lösungen, so ist $f - \tilde{f}$ auf jedem U_i mit $i \in I$ eine holomorphe Funktion aus $\mathcal{O}(U_i)$. Da Holomorphie lokal definiert ist, folgt daraus $f - \tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$ und somit die Behauptung. □

Lemma 8.3. *Sei $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und $\{f_i\}_{i \in I}$ für eine geeignete Indexmenge I eine Mittag-Leffler-Verteilung auf einer offenen Überdeckung $D = \bigcup_{i \in I} U_i$ von D. Sei $S(f_i)$ für jedes $i \in I$ die Menge der Polstellen von f_i in U_i, und sei*

$$S := \bigcup_{i \in I} S(f_i).$$

(a) *Liegt ein $s \in S$ im Durchschnitt mehrerer Mengen U_i mit $i \in I$, so stimmen die Hauptteile $h_{s,i}$ der Laurent-Zerlegungen der jeweiligen f_i in s überein,*[68] *so dass wir zu jedem $s \in S$ eine holomorphe Funktion $h_s(z)$ mit $h_s(0) = 0$ erhalten.*

(b) *Eine Lösung der Mittag-Leffler-Verteilung $\{f_i\}_{i \in I}$ ist nichts anderes als eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(D)$, deren Hauptteile an den Stellen $s \in S$ mit den gegebenen h_s übereinstimmen, also eine Lösung der durch $\{h_s\}_{s \in S}$ gegebenen* ***Hauptteilverteilung****.*

Beweis. Liege s in $S \cap (U_{i_1} \cap U_{i_2})$. Da nach Voraussetzung die Differenz $(f_{i_1} - f_{i_2})$ eine holomorphe Funktion aus $\mathcal{O}(U_{i_1} \cap U_{i_2})$ ist, müssen die Hauptteile h_{s,i_1} und h_{s,i_2} der Laurent-Zerlegungen von f_{i_1} bzw. f_{i_2} übereinstimmen. Das zeigt Behauptung (a) und sogleich die Hinrichtung von Behauptung (b).

Es verbleibt die Rückrichtung von Behauptung (b) zu zeigen. Sei dafür f eine Lösung der Hauptteilverteilung $\{h_s\}_{s \in S}$. Dann gilt für ein beliebiges $i \in I$ die Identität $S \cap U_i = S(f_i)$. Außerdem haben die Funktionen f und f_i in jedem $s \in S(f_i)$ dieselben Hauptteile und sind ansonsten holomorph. Es folgt $f|_{U_i} - f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, so dass f auch eine Lösung der gegebenen Mittag-Leffler-Verteilung ist. □

Satz 8.4. *Auf den erweiterten komplexen Zahlen $\overline{\mathbb{C}}$ ist jede Mittag-Leffler-Verteilung lösbar. Die Lösung einer gegebenen Mittag-Leffler-Verteilung ist dabei bis auf eine additive Konstante aus $\mathbb{C}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $\overline{\mathbb{C}} = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine beliebige offene Überdeckung und $\{f_i\}_{i \in I}$ eine darauf vorgegebene Mittag-Leffler-Verteilung. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass I endlich ist,

[68] Da s nach Voraussetzung ein isolierter Punkt ist, ist es natürlich insbesondere eine isolierte Singularität, so dass die jeweiligen Laurent-Zerlegungen wohldefiniert sind. Die Laurent-Entwicklung einer meromorphen Funktion $f_i(z)$ um $z = \infty$ ist hierbei wie in Definition 5.32 (b) durch die Laurent-Entwicklung von $f_i(\frac{1}{z})$ um $z = 0$ gegeben.

denn: Weil $\overline{\mathbb{C}}$ kompakt ist, hat jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung. Offensichtlich ist jede Lösung bezüglich dieser Teilüberdeckung bereits eine Lösung bezüglich der ursprünglichen Überdeckung. #

Die Vereinigung $S := \bigcup_{i\in I} S(f_i)$ der Polstellenmengen ist endlich,

denn: Für jeden Punkt aus $s \in S$ gibt es wegen der Isoliertheit der Polstellen meromorpher Funktionen in jedem U_i eine offene Umgebung $\tilde{U}_i$, in der kein weiterer Pol von f_i liegt. Der Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} \tilde{U}_i$ dieser endlich vielen Umgebungen ist eine offene Umgebung von s in $\overline{\mathbb{C}}$, in der kein weiteres Element von S liegt. Es folgt, dass jeder Punkt $s \in S$ ein isolierter Punkt in $\overline{\mathbb{C}}$ ist. Außerdem ist S als endliche Vereinigung abgeschlossener Polstellenmengen selbst wieder eine abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums $\overline{\mathbb{C}}$, also selbst wieder kompakt, vgl. Topologie. Die Behauptung folgt, da kompakte Teilmengen, die nur aus isolierten Punkten bestehen, endlich sind.[69] #

Eine Lösung der zu $\{f_i\}_{i\in I}$ gehörigen (endlichen) Hauptteilverteilung $\{h_s\}_{s\in S}$ lässt sich leicht angeben durch

$$f(z) := \begin{cases} \sum_{s\in S} h_s\left(\frac{1}{z-s}\right) & \text{für } \infty \notin S, \\ \sum_{s\in S\setminus\{\infty\}} h_s\left(\frac{1}{z-s}\right) + h_\infty(z) & \text{für } \infty \in S, \end{cases} \tag{8.1}$$

so dass wir die Lösbarkeit einer beliebigen Mittag-Leffler-Verteilung auf $\overline{\mathbb{C}}$ bewiesen haben.

Es verbleibt die Eindeutigkeit bis auf eine additive Konstante zu zeigen. Diese folgt aber unmittelbar aus Lemma 8.2, weil nach Beispiel 5.34 alle holomorphen Funktionen auf den erweiterten komplexen Zahlen $\overline{\mathbb{C}}$ konstante Polynome sind. □

Korollar 8.5. *Der Körper $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ der meromorphen Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$ stimmt mit dem Körper der **rationalen Funktionen** $\mathbb{C}(X)$ überein, also der Menge der Quotienten je zweier durch Polynome aus $\mathbb{C}[X]$ gegebener Funktionen.*

Beweis. Nach den Beispielen 5.29 und 5.34 (a) sind rationale Funktionen meromorphe Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$. Für die andere Inklusion betrachten wir eine beliebige meromorphe Funktion f auf $\overline{\mathbb{C}}$. Diese löst für eine beliebige Überdeckung $\overline{\mathbb{C}} = \bigcup_{i\in I} U_i$ die Mittag-Leffler-Verteilung $\{f|_{U_i}\}_{i\in I}$. Letztere hat nach Satz 8.4 aber auch eine Lösung $\tilde{f}$ wie in (8.1). Wegen der Eindeutigkeitsaussage in Satz 8.4 unterscheiden sich je zwei Lösungen einer Mittag-Leffler-Verteilung auf $\overline{\mathbb{C}}$ nur um eine additive Konstante. Für ein beliebiges $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ gilt also

$$f(z) = \tilde{f}(z) + (f - \tilde{f})(z_0) \quad \text{für alle } z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Betrachten wir die Lösung $\tilde{f}$ aus (8.1) genauer, so stellen wir fest, dass die dort vorkommenden endlich vielen Funktionen $h_s(z)$ allesamt Hauptteile meromorpher Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ und somit Polynomfunktionen sind – diese meromorphe Funktion ist im Falle $s \neq \infty$ durch ein geeignetes $f_i(z)$ gegeben, im Falle $s = \infty$ durch ein geeignetes $f_i(\frac{1}{z})$. □

[69] Sei $S \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge von isolierten Punkten in einem topologischen Raum X. Wegen der Isoliertheit aller Punkte $s \in S$ gibt es für jedes solche s eine offene Umgebung U_s, die außer s kein weiteres Element aus S enthält. Offenbar ist $S \subseteq \bigcup_{s\in S}$ eine offene Überdeckung von S, die wegen der Kompaktheit von S eine endliche Teilüberdeckung haben muss. Da in jeder in der Überdeckung verwendeten offenen Teilmenge $U_s \subseteq X$ genau ein Element von S liegt, folgt die Endlichkeit von S.

Unmittelbar aus Korollar 8.5 erhalten wir die folgenden zwei Resultate:

Korollar 8.6. *Jede meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, die keine rationale Funktion ist, hat als Funktion auf $\overline{\mathbb{C}}$ betrachtet in $z = \infty$ eine wesentliche Singularität.*

Korollar 8.7 (Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen). *Seien P und $Q \not\equiv 0$ zwei Polynome in $\mathbb{C}[X]$, und sei*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \textit{für alle } z \in \overline{\mathbb{C}}$$

die zugehörige rationale Funktion. Seien $s_1, \dots, s_k$ die verschiedenen Polstellen von R und $u_1, \dots, u_k$ die zugehörigen Ordnungen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $h_1, \dots, h_k$ sowie $h_\infty \in \mathbb{C}[X]$ mit $\deg(h_j) = u_j$ und $h_j(0) = 0$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ und

$$R(z) = \sum_{j=1}^{k} h_j\Big(\frac{1}{z - s_j}\Big) + h_\infty(z) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Dies nennt man die ***Partialbruchzerlegung*** *von R.*

Wir wollen nun auch die Lösbarkeit beliebiger Mittag-Leffler-Verteilungen auf $\mathbb{C}$ beweisen. Da $\mathbb{C}$ im Gegensatz zu $\overline{\mathbb{C}}$ nicht kompakt ist, können wir hier bei der Lösung der entsprechenden Hauptteilverteilung allerdings nicht von einer endlichen Polstellenmenge ausgehen, und für unendliches S ist die Summe über die Hauptteile

$$\sum_{s \in S} h_s\Big(\frac{1}{z - s}\Big)$$

im Allgemeinen divergent. Wir werden uns mit der Einführung sogenannter ***konvergenzerzeugender Summanden*** behelfen.

Satz 8.8 (Satz von Mittag-Leffler). *Auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind alle Mittag-Leffler-Verteilungen lösbar.*

Beweis. Sei $\mathbb{C} = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine beliebige offene Überdeckung und $\{f_i\}_{i \in I}$ eine darauf vorgegebene Mittag-Leffler-Verteilung. Dann ist die Vereinigung $S := \bigcup_{i \in I} S(f_i)$ der Polstellenmengen nicht überabzählbar,

denn: Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebige kompakte und somit beschränkte Menge. Hätte die beschränkte Menge $K \cap S$ unendlich viele Elemente, so enthielte sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß zwangsläufig einen Häufungspunkt, was wegen der Isoliertheit der Punkte in S nicht sein kann. Ist S endlich, so ist nichts mehr zu zeigen. Ist S unendlich, so betrachten wir die kompakten Mengen $K_n := \overline{U_n(0)} \subseteq \mathbb{C}$ mit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Eine Abzählung von S erhalten wir, indem wir zunächst die endlich vielen Elemente von $K_1 \cap S$ anordnen, dann die endlich vielen in $K_2 \cap S$, die nicht schon in $K_1 \cap S$ liegen, dann die endlich vielen in $K_3 \cap S$, die nicht schon in $K_2 \cap S$ liegen, usw. #

Es gilt nun, die Lösbarkeit der zu $\{f_i\}_{i\in I}$ gehörigen Hauptteilverteilung $\{h_s\}_{s\in S}$ zu untersuchen.

Fall 1: S **ist endlich.** Hier ist offenbar

$$f(z) = \sum_{s\in S} h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$$

eine mögliche Lösung von $\{h_s\}_{s\in S}$.

Fall 2: S **ist abzählbar.** Sei $s_0, s_1, s_2, \dots$ eine Abzählung von S mit

$$|s_0| \leq |s_1| \leq |s_2| \leq \dots$$

Für diese gelten offensichtlich

$$0 \in S \Longrightarrow s_0 = 0 \quad \text{und} \quad n \geq 1 \Longrightarrow |s_n| > 0.$$

Für $n \geq 1$ ist daher die Funktion $h_n(\frac{1}{z-s_n}) := h_{s_n}(\frac{1}{z-s_n})$ holomorph auf der offenen Kreisscheibe $U_{|s_n|}(0)$ und lässt sich dort nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38 um den Punkt $z = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln, die auf Kompakta gleichmäßig absolut konvergiert. Durch Abbrechen dieser Entwicklung an geeigneter Stelle erhalten wir ein Polynom $P_n(z)$ mit

$$|h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - P_n(z)| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle } z \text{ aus dem Kompaktum } \overline{U_{\frac{|s_n|}{2}}(0)}. \tag{8.2}$$

Sei nun $K \subseteq \mathbb{C}$ ein beliebiges Kompaktum. Dann gibt es eine natürliche Zahl N mit

$$K \subseteq \overline{U_{\frac{|s_n|}{2}}(0)} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wegen (8.2) und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ folgt somit, dass die Reihe

$$h(z) := h_0\left(\frac{1}{z-s_0}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n\left(\frac{1}{z-s_n}\right) - P_n(z)\right)$$

auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert. Mit dem Approximationssatz von Weierstraß 3.41 zeigt man, dass h auf $\mathbb{C} \setminus S$ holomorph ist und somit nach Konstruktion eine Lösung der Hauptteilverteilung. Das beweist den Satz. □

Korollar 8.9 (Partialbruchzerlegung meromorpher Funktionen). *Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ eine meromorphe Funktion mit Hauptteilen h_s für $s \in S(f)$. Dann gibt es eine ganze Funktion g und für jedes $s \in S(f)$ ein Polynom $P_s \in \mathbb{C}[X]$ mit*

$$f(z) = \sum_{s\in S(f)} \left(h_s\left(\frac{1}{z-s}\right) - P_s(z)\right) + g(z) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C},$$

wobei die Reihe rechts auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert.

Beweis. Die Hauptteilverteilung $\{h_s\}_{s\in S(f)}$ hat nach Konstruktion f als eine mögliche Lösung, aber auch die im Beweis von Satz 8.8 explizit konstruierte. Nach Lemma 8.2 unterscheiden sich die beiden somit nur um eine ganze Funktion g, was die Behauptung zeigt. □

Die Partialbruchzerlegung einer meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ ist leicht zu berechnen. Ein „Kochrezept" zur expliziten Berechnung einer Darstellung einer meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ wie in Korollar 8.9 ist das folgende:

(i) Bestimme die Hauptteile h_s für alle $s \in S(f)$.

(ii) Untersuche $\sum_{s\in S(f)} h_s(\frac{1}{z-s})$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls für alle $s \in S(f)$ konvergenzerzeugende Summanden, also Polynome P_s, so dass

$$\sum_{s\in S(f)} \left(h_s(\frac{1}{z-s}) - P_s(z)\right)$$

auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus S$ gleichmäßig absolut konvergiert. Es bietet sich hier an, die ersten Terme der Potenzreihenentwicklung der jeweiligen Hauptteile zu versuchen.

(iii) Versuche (sic!) eine ganze Funktion g mit

$$f(z) = \sum_{s\in S(f)} \left(h_s(\frac{1}{z-s}) - P_s(z)\right) + g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

zu finden.

Beispiel 8.10 (Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\sin^2}$)**.** *Es gilt*

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}, \tag{8.3}$$

wobei die rechte Seite auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut konvergiert.

Beweis. Die Polstellenmenge in diesem Fall ist offensichtlich auf beiden Seiten durch $S = \mathbb{Z}$ gegeben, so dass es genügt, die behaupteten Aussagen für holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ zu zeigen.

Wir wollen nun als Punkt (i) des „Kochrezepts" die Hauptteile von $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ in den $n \in \mathbb{Z}$ bestimmen. Zunächst einmal gilt

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \ldots \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

und somit auch

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + \frac{(\pi z)^4}{5!} \mp \ldots} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Für alle $z \in \dot{U}_r(0)$ mit hinreichend kleinem r stellt der Bruch ganz rechts eine holomorphe Funktion dar, so dass wir

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z}\left(1 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots\right) \qquad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(0)$$

mit geeigneten Koeffizienten $a_\nu \in \mathbb{C}$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ schreiben können. In dieser Notation folgt

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{1}{z^2}\left(1 + 2a_2 z^2 + \ldots\right) = \frac{1}{z^2} + 2a_2 + \ldots \qquad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(0).$$

Der Hauptteil von $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ in $z = 0$ ist also durch $h_0(z) = z^2$ gegeben. Wegen

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n) + \pi n)} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi(z-n))} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

können wir die Überlegungen zu h_0 direkt auf die anderen Hauptteile anwenden und erhalten $h_n(z) = z^2$ für den Hauptteil von $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ in $z = n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{Z}$.

Für Punkt (ii) des „Kochrezepts“ wollen wir nun zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

auf Kompakta in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut konvergiert. Für eine beliebige kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ lässt sich ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ finden mit $K \subseteq \overline{U_c(0)}$, so dass also

$$|z-n| \geq |n| - |z| \geq |n| - c \geq \frac{|n|}{2} \quad \text{für alle } n \geq 2c$$

gilt. Es folgt

$$\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2c}} \frac{1}{|z-n|^2} \leq 4 \cdot \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| \geq 2c}} \frac{1}{n^2} < \infty$$

und somit die gewünschte gleichmäßig absolute Konvergenz auf K.

Es folgt somit, dass beide Seiten von (8.3) die gleiche Polstellenmenge $S = \mathbb{Z}$ mit den jeweils gleichen Hauptteilen haben. Wie in Korollar 8.9 gezeigt, gibt es also eine ganze Funktion g mit

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} + g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Für Punkt (iii) des „Kochrezepts“ werden wir zeigen, dass g identisch verschwindet. Dafür halten wir zunächst fest, dass g auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ periodisch mit Periode 1 ist, weil die beiden anderen Terme in der obigen Gleichung es sind. Aus Stetigkeitsgründen gilt dann sogar

$$g(z+1) = g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Ebenfalls wegen der Stetigkeit ist g auf der Menge

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$$

beschränkt. Können wir nun noch die Beschränktheit von g auf der Menge

$$R := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 1,\ |y| > 1\}$$

zeigen, so folgt mit der 1-Periodizität auch schon die Beschränktheit von g auf ganz $\mathbb{C}$, so dass g nach dem Satz von Liouville 3.34 konstant sein muss. Diese Beschränktheit gilt aber tatsächlich,

denn: Zum Einen gilt

$$\begin{aligned}
|\sin^2(\pi z)| &= |\frac{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}{2i}|^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}\right)\left(e^{\pi i\bar{z}} - e^{-\pi i\bar{z}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2\pi y} + e^{-2\pi y} - e^{2\pi ix} - e^{-2\pi ix}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2\pi y} + e^{-2\pi y}\right) - \frac{1}{2}\cos(2\pi x) \\
&\overset{y\to\infty}{\to} \infty \qquad \text{(gleichmäßig in } x\text{)}
\end{aligned}$$

und somit auch

$$|\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}| \overset{y\to\infty}{\to} 0, \qquad \text{(gleichmäßig in } x\text{)}$$

so dass $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$ auf R beschränkt ist. Zum Anderen gilt für $n \neq 0$ und alle $z \in R$

$$\begin{aligned}
|z-n|^2 = |(x-n) + iy|^2 = (x-n)^2 + y^2 &= |n-x|^2 + y^2 \\
\geq (|n| - |x|)^2 + y^2 \geq (|n|-1)^2 + y^2 &\geq (|n|-1)^2 + 1
\end{aligned}$$

und also

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} = \frac{1}{|z|} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|z-n|^2} \leq 1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(|n|-1)^2+1} < \infty, \tag{8.4}$$

so dass auch $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ auf R beschränkt ist. Wie bei der Periodizität folgt die Behauptung aus der Definition von g. #

Die Abschätzung (8.4) zeigt die gleichmäßig absolute Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ auf R. Halten wir nun ein $x \in [-1, 1]$ fest, so gilt

$$\lim_{y\to\infty} |\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}| \leq \lim_{y\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|z-n|^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{|x-n|^2 + y^2} = 0$$

Vorhin hatten wir schon gezeigt, dass auch $|\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}|$ auf R für $y \to \infty$ gleichmäßig in x gegen Null geht. Wieder folgt die entsprechende Aussage für g. Mit der Konstanz von g folgt schließlich die Behauptung. □

Beispiel 8.11 (Partialbruchzerlegung des Kotangens). *Es gilt*

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}, \tag{8.5}$$

wobei die rechte Seite auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut gegen einen Wert aus $\mathbb{C}$ konvergiert.

Beweis. Die Polstellenmenge ist offensichtlich wie im letzten Beispiel auf beiden Seiten durch $S = \mathbb{Z}$ gegeben, so dass es wieder genügt, die behaupteten Aussagen für holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ zu zeigen.

Die Hauptteile der linken Seite berechnen sich genauso wie die für $\frac{1}{\sin}$, nämlich zu

$$h_n(z) = z,$$

womit wir Punkt (i) des „Kochrezepts" genüge getan haben.

Die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{z-n}$ konvergiert nicht für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

denn: Nehmen wir an, die Reihe konvergierte für ein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dann konvergierte auch die Teilreihe[70]

$$\sum_{n=\lceil x \rceil}^{\infty} \frac{1}{x-n}$$

aus negativen Summanden und somit auch deren Abschätzung

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

was bekanntermaßen nicht sein kann. Die Reihe konvergiert also in keinem $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und insbesondere nicht in allen $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. #

In Punkt (ii) des „Kochrezepts" müssen wir daher für alle $n \in \mathbb{Z}$ konvergenzerzeugende Summanden P_n finden. Für $n \neq 0$ ist der konstante Term der Taylor-Entwicklung von $\frac{1}{z-n}$ gleich

$$\left(\frac{1}{z-n}\right)\Big|_{z=0} = -\frac{1}{n}.$$

Nach Übungsaufgabe 8.1 konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)$$

auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut. Nach Korollar 8.9 gibt es daher eine ganze Funktion g mit

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{8.6}$$

[70] $\lceil x \rceil$ bezeichnet hierbei die kleinste ganze Zahl n, für die $n - x$ positiv ist.

Es verbleibt zum Beweis der Behauptung zu zeigen, dass g auf ganz $\mathbb{C}$ identisch verschwindet. Dafür leiten wir beide Seiten von (8.6) ab; nach dem Approximationssatz von Weierstraß 3.41 dürfen wir dies auf der rechten Seite gliedweise tun. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) + g(z)\right) &= -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-n)^2}\right) + g'(z) \\ &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} + g'(z)\end{aligned}$$

für die rechte Seite und

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\pi \cot(\pi z)\right) = \pi \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}$$

für die linke Seite. Nach (8.3) folgt hieraus $g'(z) \equiv 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Weil letzteres ein Gebiet ist, folgt hieraus, dass g auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ eine konstante Funktion ist. Andererseits ist g eine ungerade Funktion,

denn: Die Funktion $\pi \cot(\pi z)$ ist bekanntermaßen ungerade, und es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{(-z)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(-z)-n} + \frac{1}{n}\right) &= -\left(\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen die Reihe mit $n \mapsto -n$ umsortiert haben, was wir wegen der bereits gezeigten absoluten Konvergenz tun dürfen. g ist somit nach (8.6) die Differenz zweier ungerader Funktionen und als solche selbst wieder ungerade. #

Die Behauptung folgt, da es außer der Nullfunktion keine weitere ungerade konstante Funktion gibt. □

8.2 Cousin-Verteilungen

Definition 8.12. *Sei $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ eine offene Teilmenge.*

(a) *Die Menge der multiplikativ invertierbaren Elemente im Ring $\mathcal{O}(D)$ der holomorphen Funktionen auf D besteht aus den nullstellenfreien holomorphen Funktionen auf D und wird mit $\mathcal{O}(D)^\times$ bezeichnet.*

(b) *Die Menge der multiplikativ invertierbaren Elemente im Ring $\mathcal{M}(D)$ der meromorphen Funktionen auf D ist durch alle meromorphen Funktionen auf D gegeben, die auf keiner Zusammenhangskomponente von D identisch verschwinden, und wird mit $\mathcal{M}(D)^\times$ bezeichnet.*

Offensichtlich tragen $\mathcal{O}(D)^\times$ und $\mathcal{M}(D)^\times$ beide die Struktur einer multiplikativen Gruppe.

Definition 8.13. *Sei $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und $D = \bigcup_{i \in I} U_i$ für eine geeignete Indexmenge I eine offene Überdeckung von D. Sei weiter für jedes $i \in I$ eine meromorphe Funktion $f_i \in \mathcal{M}(U_i)^\times$ gegeben, so dass für je zwei $i_1, i_2 \in I$*

$$\frac{f_{i_1}}{f_{i_2}} \in \mathcal{O}(U_{i_1} \cap U_{i_2})^\times$$

*gilt. Die Menge $\{f_i\}_{i \in I}$ nennt man dann eine **(multiplikative)**[71] **Cousin-Verteilung**[72].*

*Unter einer **Lösung der Cousin-Verteilung** versteht man eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(D)^\times$ mit*

$$\frac{f|_{U_i}}{f_i} \in \mathcal{O}(U_i)^\times \quad \text{für alle } i \in I.$$

Cousin-Verteilungen lassen sich in größerer Allgemeinheit auf Riemann'schen Flächen definieren. Auf nicht-kompakten Riemann'schen Flächen sind stets alle Cousin-Verteilungen lösbar.[73] Wir werden dies mit dem Weierstraß'schen Produktsatz 8.25 im Spezialfall der Riemann'schen Fläche $\mathbb{C}$ beweisen. Auf kompakten Riemann'schen Flächen wird die Lösbarkeit durch das Abel'sche Theorem[74] beschrieben, das wir in Satz 8.16 für die Riemann'sche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ beweisen werden.

Lemma 8.14. *Ist f eine Lösung einer Cousin-Verteilung auf einem gegebenen Gebiet $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ bezüglich einer beliebigen offenen Überdeckung $D = \bigcup_{i \in I} U_i$, so ist die Menge aller möglichen Lösungen durch*

$$f \cdot \mathcal{O}(D)^\times = \{f \cdot g \mid g \in \mathcal{O}(D)^\times\}$$

gegeben.

Beweis. Offensichtlich ist mit f auch jede Funktion aus $f \cdot \mathcal{O}(D)^\times$ eine mögliche Lösung. Sind andererseits f und $\tilde{f}$ zwei Lösungen, so ist ihr Quotient auf jedem U_i mit $i \in I$ eine invertierbare holomorphe Funktion aus $\mathcal{O}(U_i)^\times$. Da Holomorphie lokal definiert ist, folgt daraus

$$\frac{f}{\tilde{f}} \in \mathcal{O}(D)^\times$$

und somit die Behauptung. □

Lemma 8.15. *Sei $D \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und $\{f_i\}_{i \in I}$ für eine geeignete Indexmenge I eine Cousin-Verteilung auf einer offenen Überdeckung $D = \bigcup_{i \in I} U_i$ von D. Sei $S(f_i)$ (bzw. $T(f_i)$) für jedes $i \in I$ die Menge der Polstellen (bzw. der Nullstellen) von f_i in U_i, und sei*

$$S := \bigcup_{i \in I} S(f_i) \quad \text{und} \quad T := \bigcup_{i \in I} T(f_i).$$

[71] Das Wort „multiplikativ" dient zur Abgrenzung, da manche Autoren die Bezeichnung „additive Cousin-Verteilung" für Mittag-Leffler-Verteilungen verwenden.

[72] Pierre Auguste Cousin (1867-1933)

[73] Das wurde wie schon die entsprechende Aussage für Mittag-Leffler-Verteilungen im Jahr 1948 von Herta Florack bewiesen.

[74] Dieses gibt eine äquivalente Bedingung für die Lösbarkeit einer Cousin-Verteilung an, deren eine Richtung 1828 von Niels Henrik Abel (1802-1829) gezeigt wurde, die andere Richtung 1865 von Rudolph Friedrich Alfred Clebsch (1833-1872).

(a) *Liegt ein $s \in S$ (bzw. ein $t \in T$) im Durchschnitt mehrerer Mengen U_i mit $i \in I$, so stimmen die Vielfachheiten u_s (bzw. u_t) überein, mit der die entsprechenden Funktionen f_i in s (bzw. in t) den Wert ∞ (bzw. den Wert 0) annehmen.*

(b) *Eine Lösung der gegebenen Cousin-Verteilung ist nichts anderes als eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(D)^\times$ ohne Null- und Polstellen in $D \setminus (S \cup T)$ und mit Vielfachheiten*

$$\infty\text{-ord}(f; s) = u_s \textit{ für alle } s \in S \quad \textit{und} \quad 0\text{-ord}(f; t) = u_t \textit{ für alle } t \in T,$$

*also eine Lösung der durch $\big(\{u_s\}_{s \in S}, \{u_t\}_{t \in T}\big)$ gegebenen **Null- und Polstellenverteilung**.*

Beweis. Liege s in $S \cap \big(U_{i_1} \cap U_{i_2}\big)$ für zwei Werte $i_1, i_2 \in I$. Da nach Voraussetzung

$$\frac{f_{i_1}}{f_{i_2}} \in \mathcal{O}(U_{i_1} \cap U_{i_2})^\times$$

holomorph und nullstellenfrei ist, müssen die Polstellenordnungen $\infty\text{-ord}(f_{i_1}; s)$ und $\infty\text{-ord}(f_{i_2}; s)$ übereinstimmen. Die entsprechende Aussage für ein $t \in T \cap \big(U_{i_1} \cap U_{i_2}\big)$ zeigt man analog, so dass wir nun Behauptung (a) und sogleich die Hinrichtung von Behauptung (b) bewiesen haben.

Es verbleibt die Rückrichtung von Behauptung (b) zu zeigen. Sei dafür f eine Lösung der Null- und Polstellenverteilung $\big(\{u_s\}_{s \in S}, \{u_t\}_{t \in T}\big)$. Dann gelten für ein beliebiges $i \in I$ die Identitäten $S \cap U_i = S(f_i)$ und $T \cap U_i = T(f_i)$. Außerdem haben die Funktionen f und f_i in jedem $s \in S(f_i)$ dieselbe Pol- und in jedem $t \in T(f_i)$ dieselbe Nullstellenordnung und sind ansonsten null- und polstellenfrei. Es folgt

$$\frac{f|_{U_i}}{f_i} \in \mathcal{O}(U_i)^\times,$$

so dass f auch eine Lösung der gegebenen Cousin-Verteilung ist. □

Satz 8.16 (Abel'sches Theorem auf $\overline{\mathbb{C}}$)**.** *Auf den erweiterten komplexen Zahlen $\overline{\mathbb{C}}$ sind genau jene Cousin-Verteilungen lösbar, deren zugehörige Null- und Polstellenverteilung in der Notation von Lemma 8.15 die Bedingung*

$$\sum_{s \in S} u_s = \sum_{t \in T} u_t \tag{8.7}$$

erfüllt. Die Lösung einer gegebenen Cousin-Verteilung ist dabei bis auf eine multiplikative Konstante aus $\mathbb{C}^\times$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $\overline{\mathbb{C}} = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine beliebige offene Überdeckung und $\{f_i\}_{i \in I}$ eine darauf vorgegebene Cousin-Verteilung. Genau wie im Beweis von Satz 8.4 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass I endlich ist. Wenn wir berücksichtigen, dass mit den Polstellen einer meromorphen Funktion auch ihre Nullstellen isolierte Punkte sind, können wir mit einer nur leichten Abwandlung der entsprechenden Stelle im Beweis von Satz 8.4 zudem zeigen, dass die Mengen S und T endlich sind (*Übung!*).

In Korollar 8.5 haben wir gezeigt, dass die meromorphen Funktionen auf $\overline{\mathbb{C}}$ gerade die rationalen Funktionen, also Brüche von Polynomfunktionen, sind. Die Gesamtnullstellenordnung einer komplexen Polynomfunktion P ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra 3.36 gleich $\deg(P)$. Als ganze Funktion hat P in keinem $z \in \mathbb{C}$ einen Pol und nach Beispiel 5.34 (a) ist seine Polstellenordnung in $z = \infty$ gleich $\deg(P)$. Insgesamt folgt, dass Polynome und somit auch alle meromorphen Funktionen aus $\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ Bedingung (8.7) erfüllen. Nur in diesem Fall kann es also eine Lösung der Null- und Polstellenverteilung geben.

Ist umgekehrt (8.7) erfüllt, so lässt sich eine Lösung der (endlichen) Null- und Polstellenverteilung $(\{u_s\}_{s\in S}, \{u_t\}_{t\in T})$ leicht angeben durch

$$f(z) := \frac{\prod_{t\in T\setminus\{\infty\}}(z-t)^{u_t}}{\prod_{s\in S\setminus\{\infty\}}(z-s)^{u_s}}, \tag{8.8}$$

so dass wir die Lösbarkeit einer beliebigen Cousin-Verteilung auf $\overline{\mathbb{C}}$ bewiesen haben.

Es verbleibt die Eindeutigkeit bis auf eine invertierbare multiplikative Konstante zu zeigen. Diese folgt aber unmittelbar aus Lemma 8.14, weil nach Beispiel 5.34 alle holomorphen Funktionen auf den erweiterten komplexen Zahlen $\overline{\mathbb{C}}$ konstante Polynome sind. □

Wir würden nun gerne noch die Lösbarkeit beliebiger Cousin-Verteilungen auf $\mathbb{C}$ beweisen. Da letzteres im Gegensatz zu $\overline{\mathbb{C}}$ nicht kompakt ist, können wir hier bei der Lösung der entsprechenden Null- und Polstellenverteilung allerdings nicht von endlichen Null- und Polstellenmengen ausgehen. Um auch für unendliche S und T eine Lösung angeben zu können, bietet es sich in Hinsicht auf (8.8) an, „unendliche Produkte“ einzuführen und ihr Konvergenzverhalten zu studieren. Das werden wir im nächsten Abschnitt tun und danach in Abschnitt 8.4 wieder auf die Cousin-Verteilungen zurückkommen.

8.3 Unendliche Produkte

Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, auf sinnvolle Weise ein Produkt unendlich vieler meromorpher Funktionen einzuführen, um zu gegebenen unendlichen Verteilungen von Null- und Polstellen eine meromorphe Funktion konstruieren zu können, die diese annimmt.

Als ersten Schritt führen wir dafür unendliche Produkte komplexer Zahlen ein. Die naheliegende Methode, dies zu tun, ist die folgende:

Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann sagen wir:

$$\begin{aligned} & \text{das Produkt } \prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} p_n \text{ konvergiert} \\ :\Longleftrightarrow\quad & \text{die Folge } (P_N)_{N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \text{ der Partialprodukte } P_N := \prod_{n=0}^{N} p_n \text{ konvergiert.} \end{aligned}$$

Gilt hierbei $\lim_{N\to\infty} P_N = P$, so setzen wir $\prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} p_n := P$.

Das Problem an dieser Definition ist, dass schon ein einziges Folgeglied $p_n = 0$ dafür sorgt, dass das unendliche Produkt mit Grenzwert 0 konvergiert. Wir definieren darum etwas sorgfältiger

Definition 8.17. *Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge komplexer Zahlen, für die die Menge $\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid p_n = 0\}$ endlich ist, und sei m die kleinste nichtnegative ganze Zahl, die größer als jedes Element dieser Menge ist. Genau dann heißt das Produkt $\prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} p_n$ konvergent, wenn die Folge $(P_{N,m})_{N\geq m}$ der Partialprodukte*

$$P_{N,m} := \prod_{n=m}^{N} p_n$$

konvergiert und einen von 0 verschiedenen Grenzwert P hat. Wir setzen dann

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} p_n := p_0 \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_{m-1} \cdot P.$$

Bemerkung 8.18. *Nach Definition 8.17 nimmt ein konvergentes Produkt genau dann den Wert 0 an, wenn einer seiner Faktoren gleich 0 ist.*

Beispiel 8.19. (a) $\prod_{n=2}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$ *ist konvergent und hat den Wert* $\frac{1}{2}$,

denn: Alle Terme p_n sind ungleich Null. Weiter gilt

$$P_{N,2} = \prod_{n=2}^{N}(1-\frac{1}{n^2}) = \prod_{n=2}^{N}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{N}\cdot\frac{N+1}{2} \overset{N\to\infty}{\to} \frac{1}{2}.$$

#

(b) $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$ *ist – wie in Teil (a) gesehen – konvergent und hat den Wert 0.*

(c) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *ist nicht konvergent,*

denn: $P_{N,1} = \prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \frac{1}{N!} \overset{N\to\infty}{\to} 0.$ #

Lemma 8.20 (Notwendige Konvergenzbedingung für unendliche Produkte)**.** *Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Ist $\prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} p_n$ konvergent, so folgt $p_n \overset{n\to\infty}{\to} 1$.*

Beweis. Die Behauptung gilt, weil in der Notation von Definition 8.17 für $N \geq m$

$$p_{N+1} = \frac{P_{N+1,m}}{P_{N,m}} \overset{N\to\infty}{\to} \frac{P}{P} = 1$$

gilt. Hierfür benötigen wir $p_n \neq 0$ für alle $N \geq m$ und $P \neq 0$. □

Satz 8.21 (Konvergenzkriterium für unendliche Produkte)**.** *Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $p_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann gilt die folgende Äquivalenz:*

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} p_n \text{ konvergiert} \iff \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \operatorname{Log} p_n \text{ konvergiert}.$$

Genauer gelten

(a) $\prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} p_n = P \implies \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P + 2\pi i h$ *für ein* $h \in \mathbb{Z}$,

(b) $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \operatorname{Log} p_n = S \implies \prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} p_n = e^S$.

Beweis. Wir zeigen zunächst Behauptung (b). Sei dafür $S = \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \operatorname{Log} p_n$, also

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N \quad \text{mit } S_N := \sum_{n=0}^{N} \operatorname{Log} p_n.$$

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt dann

$$\begin{aligned} e^S &= \lim_{N\to\infty} e^{S_N} = \lim_{N\to\infty} \exp\left(\sum_{n=0}^{N} \operatorname{Log} p_n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} \exp(\operatorname{Log} p_n) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} p_n = \lim_{N\to\infty} P_{N,0}, \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.

Wir zeigen nun Behauptung (a). Konvergiere dafür das Produkt $\prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} p_n$ gegen den Wert P. Dann gilt auch

$$(a_N)_{N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} := \left(\frac{\prod_{n=0}^{N} p_n}{P}\right)_{N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \overset{N\to\infty}{\to} 1.$$

Setzen wir nun $\varepsilon_N := \operatorname{Log} a_N$, so folgt wegen der Stetigkeit des Logarithmus in $z = 1$

$$\lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = \operatorname{Log} 1 = 0. \tag{8.9}$$

Weiter gibt es für jedes $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ein $h_N \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varepsilon_N = \sum_{n=0}^{N} \operatorname{Log} p_n - \operatorname{Log} P + 2\pi i h_N, \tag{8.10}$$

denn: Nach Definition von ε_N und dem Additionstheorem der Exponentialfunktion 2.43 (c) gilt

$$\exp \varepsilon_N = \frac{\prod_{n=0}^{N} p_n}{P} = \exp\left(\sum_{n=0}^{N} \operatorname{Log} p_n - \operatorname{Log} P\right).$$

Die Behauptung folgt, da bekanntermaßen das Urbild einer festen komplexen Zahl $w \in \mathbb{C}$ unter der Exponentialfunktion durch $\exp^{-1}(\{w\}) = \operatorname{Log} w + 2\pi i\mathbb{Z}$ gegeben ist. #

Durch Vergleich von (8.10) für N und für $N+1$ erhalten wir

$$2\pi i(h_{N+1} - h_N) = (\varepsilon_{N+1} - \varepsilon_N) - \operatorname{Log} p_{N+1}. \tag{8.11}$$

Nach (8.9) gehen hierbei ε_{N+1} und ε_N für $N \to \infty$ gegen Null. Des Weiteren gilt wegen der Konvergenz von $\prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} p_n$ nach der notwendigen Konvergenzbedingung für unendliche Produkte 8.20

$$\lim_{N\to\infty} p_N = 1,$$

so dass auch der letzte Summand auf der rechten Seite von (8.11) für $N \to \infty$ gegen Null strebt. Da die h_N für $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ganze Zahlen sind, folgt hieraus, dass für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ die Folge $(h_N)_{N\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ konstant wird, etwa $h_N = h \in \mathbb{Z}$ für $N \gg 1$. Mit (8.9) und (8.10) folgt dann

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \operatorname{Log} p_n = \operatorname{Log} P - 2\pi i h$$

und somit die Behauptung. □

Das Konvergenzkriterium für unendliche Produkte 8.21 liefert uns ein Kriterium für die Konvergenz unendlicher Produkte. Leider sind die dort vorkommenden unendlichen Summen von Logarithmen immer noch recht schwer zu kontrollieren. Dieses Problem soll das folgende Lemma beheben:

Lemma 8.22. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq -1$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \operatorname{Log}(1+a_n) \text{ konvergiert absolut} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

Beweis. Ist $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} |a_n|$ konvergent, so ist nach der notwendigen Konvergenzbedingung die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Nullfolge. Ist $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} |\operatorname{Log}(1+a_n)|$ konvergent, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ ebenfalls eine Nullfolge,

denn: Nach der notwendigen Konvergenzbedingung ist $\big(\operatorname{Log}(1+a_n)\big)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Nullfolge. Nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit erhalten wir nach Einsetzen der Folge in die (stetige) Exponentialfunktion den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(1+a_n) = 1$ und somit die Behauptung. #

Es gilt

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log}(1)}{z} = \left(\frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Log} z\right)(1) = 1 \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_1(0).$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so dass für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $n > N$ die Abschätzungen

$$(1-\varepsilon)|a_n| \leq |\operatorname{Log}(1+a_n)| \leq (1+\varepsilon)|a_n| \tag{8.12}$$

gelten, wobei für $a_n = 0$ diese Abschätzungen trivialerweise richtig sind. Das Lemma folgt somit aus dem Majorantenkriterium für Reihen. □

Wir können das Gezeigte nun in dem folgenden Kriterium für unbedingte Konvergenz unendlicher Produkte zusammenfassen:

Satz 8.23 (Unbedingtes Konvergenzkriterium für unendliche Produkte)**.** *Ist die Reihe* $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} a_n$ *absolut konvergent, so konvergiert auch das unendliche Produkt* $\prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}(1+a_n)$*. Die Konvergenz des Produkts ist hierbei sogar* ***unbedingt****, das heißt, der Wert des Produkts hängt nicht von der Reihenfolge der Faktoren ab.*

Beweis. Ist die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}|a_n|$ konvergent, so strebt insbesondere die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ gegen Null. Es gibt also ein $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $|a_n| < \frac{1}{2}$ für alle $n > N$. Für solche n ist dann auch $a_n \neq -1$ und wir können Lemma 8.22 verwenden. Hiermit und mit dem Konvergenzkriterium für unendliche Produkte 8.21 folgt dann sofort die Konvergenz des unendlichen Produkts.

Die Unbedingtheit der Konvergenz ergibt sich, weil eine Reihe genau dann absolut konvergiert, wenn sie unbedingt konvergiert, vgl. reelle Analysis. □

Wir werden im Folgenden unendliche Produkte holomorpher Funktionen betrachten. Es bietet sich daher an, genauer zu untersuchen, wann ein solches Produkt unbedingt konvergiert:

Satz 8.24 (Unbedingtes Konvergenzkriterium für unendliche Produkte holomorpher Funktionen)**.** *Sei* $D \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ *eine Folge holomorpher Funktionen* $f_n : D \to \mathbb{C}$*, für die die Reihe* $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_n(z)$ *auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig absolut konvergiert. Dann ist für jedes* $z \in D$ *das Produkt*

$$f(z) = \prod_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} (1 + f_n(z))$$

unbedingt konvergent, und die so definierte Funktion $f(z)$ *ist auf D holomorph.*

Beweis. Die unbedingte Konvergenz des Produkts für jedes $z \in D$ folgt unmittelbar aus dem unbedingten Konvergenzkriterium 8.23, wenn wir dort $a_n = f_n(z)$ setzen.

Es verbleibt die Holomorphie von f auf D zu zeigen. Nach Konstruktion der Topologie auf $\mathbb{C}$ können wir D mit offenen Mengen U überdecken, deren topologischer Abschluss $\overline{U}$ kompakt ist und gänzlich in D liegt. Da Holomorphie lokal definiert ist, genügt es daher, die Holomorphie von f auf solchen offenen Mengen U zu untersuchen.

Nach Voraussetzung konvergiert $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} f_n(z)$ auf $\overline{U}$ und also auch auf U gleichmäßig absolut. Nach der notwendigen Konvergenzbedingung für gleichmäßige Konvergenz konvergiert daher die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf U gleichmäßig gegen Null. Insbesondere gibt es ein $N_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so dass für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $n > N_1$

$$|f_n(z)| < 1 \qquad \text{für alle } z \in U$$

gilt. Wir können also die Abschätzung (8.12) anwenden und tun dies mit der speziellen Wahl $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Es gibt dann ein $N_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, so dass für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $n > N_2$ die Abschätzung

$$|\mathrm{Log}(1 + f_n(z))| \leq \frac{3}{2}|f_n(z)| \qquad \text{für alle } z \in U$$

gilt. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum_{n=N_2+1}^{\infty} f_n(z)$ gleichmäßig auf $U \subseteq \overline{U}$, und nach der obigen Abschätzung gilt dasselbe auch für

$$S(z) := \sum_{n=N_2+1}^{\infty} \operatorname{Log}(1 + f_n(z)).$$

Nach dem Approximationssatz von Weierstraß 3.41 ist also $S(z)$ auf U holomorph, und nach dem Konvergenzkriterium 8.21 gilt das auch für

$$e^{S(z)} = \prod_{n=N_2+1}^{\infty} (1 + f_n(z)).$$

Es folgt, dass auch

$$f(z) = (1 + f_1(z)) \cdot \ldots \cdot (1 + f_{N_2}(z)) \cdot e^{S(z)}$$

eine auf U holomorphe Funktion ist, was zu zeigen war. □

8.4 Der Produktsatz von Weierstraß

Satz 8.25 (Produktsatz von Weierstraß). *Auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind alle Cousin-Verteilungen lösbar. Die Lösung einer gegebenen Cousin-Verteilung ist dabei bis auf einen Faktor $e^{h(z)}$ mit $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $\mathbb{C} = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine beliebige offene Überdeckung und $\{f_i\}_{i \in I}$ eine darauf vorgegebene Cousin-Verteilung. Wenn wir berücksichtigen, dass mit den Polstellen einer meromorphen Funktion auch ihre Nullstellen isolierte Punkte sind, können wir mit einer nur leichten Abwandlung der entsprechenden Stelle im Beweis von Satz 8.8 auch zeigen, dass in der Notation von Lemma 8.15 die Mengen S und T nicht überabzählbar sind (*Übung!*).

Es gilt nun, die Lösbarkeit der zu $\{f_i\}_{i \in I}$ gehörigen Null- und Polstellenverteilung

$$\big(\{u_s\}_{s \in S}, \{u_t\}_{t \in T}\big)$$

zu zeigen. Hierfür ist es offenbar ausreichend, wenn wir für jede Nullstellenverteilung $\{u_t\}_{t \in T}$ eine holomorphe Lösung in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ finden.

Fall 1: T ist endlich. Hier ist offenbar

$$f(z) = \prod_{t \in T} (z - t)^{u_t}$$

eine mögliche Lösung von $\{u_t\}_{t \in T}$.

Fall 2: T ist abzählbar. Sei $t_0, t_1, t_2, \ldots$ eine Abzählung von T mit

$$|t_0| \leq |t_1| \leq |t_2| \leq \ldots \tag{8.13}$$

und schreiben wir kurz u_n statt u_{t_n} für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Da wir eine Nullstelle der Ordnung u in $z = 0$ durch nachträgliches Multiplizieren mit z^u erzwingen können, dürfen wir ohne Einschränkung $0 \notin T$ annehmen. Daraus folgt offensichtlich $|t_n| > 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Das hat den Vorteil – wir erhoffen uns hiervon bessere Konvergenzeigenschaften – dass wir statt Faktoren der Form $(z - t_n)^{u_n}$ solche der Form $(1 - \frac{z}{t_n})^{u_n}$ betrachten können.

Die Funktion $(1 - \frac{z}{t_n})^{u_n}$ ist auf dem Elementargebiet $U_{|t_n|}(0)$ holomorph und nullstellenfrei, so dass es eine Funktion $h_n \in \mathcal{O}(U_{|t_n|}(0))$ gibt mit

$$(1 - \frac{z}{t_n})^{u_n} = e^{-h_n(z)} \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0). \tag{8.14}$$

Ohne Einschränkung gilt dabei $h_n(0) = 0$,

denn: Setzen wir in der definierenden Gleichung $z = 0$, so erhalten wir

$$1 = (1 - \frac{0}{t_n})^{u_n} = e^{-h_n(0)}$$

und somit $h_n(0) \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Durch Addition eines geeigneten ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ erhalten wir also $h_n(0) = 0$. #

Die Taylor-Entwicklung von h_n um $z = 0$ konvergiert auf dem Kompaktum

$$K_n := \overline{U_{\frac{|t_n|}{2}}(0)}$$

gleichmäßig absolut. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also ein Polynom P_n mit

$$|h_n(z) - P_n(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in K_n.$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, gibt es insbesondere ein Polynom P_n mit

$$|(1 - \frac{z}{t_n})^{u_n} \cdot e^{P_n(z)} - 1| = |e^{P_n(z) - h_n(z)} - 1| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle } z \in K_n.$$

Wegen (8.13) ist ein beliebiges Kompaktum $K \subseteq \mathbb{C}$ für alle $n > N$ mit einem hinreichend großen $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ in K_n enthalten. Es folgt also, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((1 - \frac{z}{t_n})^{u_n} \cdot e^{P_n(z)} - 1 \right)$$

auf beliebigen Kompakta $K \subseteq \mathbb{C}$ gleichmäßig absolut konvergiert. Nach dem unbedingten Konvergenzkriterium für Produkte holomorpher Funktionen 8.24 ist somit das unendliche Produkt

$$f(z) := \prod_{n=0}^{\infty} \left((1 - \frac{z}{t_n})^{u_n} \cdot e^{P_n(z)} \right)$$ [75]

auf ganz $\mathbb{C}$ unbedingt konvergent und stellt eine holomorphe Funktion dar. Nach Konstruktion ist offensichtlich f eine Lösung der Nullstellenverteilung $\{u_t\}_{t \in T}$, so dass wir gezeigt haben, dass sich auf $\mathbb{C}$ jede Cousin-Verteilung lösen lässt.

[75] Offenbar spielen hier die Faktoren $e^{P_n(z)}$ die analoge Rolle zu den konvergenzerzeugenden Summanden im Beweis des Satzes von Mittag-Leffler 8.8. Man spricht daher auch von ***konvergenzerzeugenden Faktoren***.

Nach Lemma 8.14 unterscheiden sich zwei Lösungen einer Cousin-Verteilung auf $\mathbb{C}$ um einen Faktor $H \in \mathcal{O}(\mathbb{C})^\times$. Nach Lemma 4.6 sind diese Funktionen von der Form

$$H(z) = e^{h(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

mit einem $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Damit haben wir auch die Eindeutigkeitsaussage gezeigt. □

Korollar 8.26. *Sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine holomorphe Funktion mit Nullstellenmenge $T(f)$, und sei $u_t :=$ 0-ord$(f;t)$ für alle $t \in T(f)$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und für jedes $t \in T(f)$ ein Polynom $P_t \in \mathbb{C}[X]$ mit*

$$f(z) = \begin{cases} \prod\limits_{t \in T(f)} \left(\left(1 - \frac{z}{t}\right)^{u_t} \cdot e^{P_t(z)} \right) \cdot e^{g(z)} & \text{falls } 0 \notin T(f), \\ z^{u_0} \cdot \prod\limits_{t \in T(f) \setminus \{0\}} \left(\left(1 - \frac{z}{t}\right)^{u_t} \cdot e^{P_t(z)} \right) \cdot e^{g(z)} & \text{falls } 0 \in T(f), \end{cases}$$

wobei das jeweilige Produkt rechts auf $\mathbb{C}$ unbedingt konvergiert.

Beweis. Die Nullstellenverteilung $\{u_t\}_{t \in T(f)}$ hat nach Konstruktion f als eine mögliche Lösung, aber auch die im Beweis des Produktsatzes von Weierstraß 8.25 explizit konstruierte. Nach der Eindeutigkeitsaussage des Produktsatzes unterscheiden sich die beiden also um einen Faktor der Form e^g mit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, was die Behauptung zeigt. □

Korollar 8.27. *Jede nicht identisch verschwindende meromorphe Funktion aus $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ ist Quotient zweier holomorpher Funktionen aus $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.*[76]

Beweis. Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Dann besteht die Polstellenmenge $S(f)$ von f aus isolierten Punkten. Setzen wir $u_s := \infty$-ord$(f;s)$ für alle $s \in S(f)$, so hat nach dem Weierstraß'schen Produktsatz 8.25 die Nullstellenverteilung $\{u_s\}_{s \in S(f)}$ eine Lösung $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Nach Konstruktion ist das Produkt $g := fh$ in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, so dass wir mit $f = \frac{g}{h}$ eine Darstellung wie gewünscht gefunden haben. □

Wir wollen nun in Analogie zum „Kochrezept" zur Berechnung der Lösung einer Mittag-Leffler-Verteilung auf $\mathbb{C}$ auch die Lösung einer Cousin-Verteilung auf $\mathbb{C}$ explizit berechnen können.

Bemerkung 8.28. *Die im Beweis des Weierstraß'schen Produktsatzes 8.25 in (8.14) durch*

$$\left(1 - \frac{z}{t_n}\right)^{u_n} = e^{-h_n(z)} \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0) \quad \text{und} \quad h_n(0) = 0$$

eingeführte Funktion $h_n \in \mathcal{O}(U_{|t_n|}(0))$ ist eindeutig und hat die Reihendarstellung

$$h_n(z) = u_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \cdot t_n^k} \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0).$$

[76] Etwas eleganter formuliert besagt das Korollar, dass der Körper $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ der Quotientenkörper des nullteilerfreien Rings $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ der ganzen Funktionen ist.

Beweis. Seien h_n und $\tilde{h}_n$ zwei Funktionen, die den beiden obigen Bedingungen genügen. Dann gilt

$$e^{-h_n(z)} = e^{-\tilde{h}_n(z)} \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0).$$

Es gibt also eine ganzzahlige Funktion $h(z)$ mit

$$h_n(z) = \tilde{h}_n(z) + 2\pi i h(z) \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0).$$

Wegen der Stetigkeit von h_n und $\tilde{h}_n$ ist $h(z)$ auf $U_{|t_n|}(0)$ konstant, und wegen $h_n(0) = \tilde{h}_n(0) = 0$ verschwindet $h(z)$ sogar identisch. Die Eindeutigkeitsaussage haben wir somit bewiesen.

Es gilt

$$(1 - \frac{z}{t_n}) \in U_1(1) \quad \text{für alle } z \in U_{|t_n|}(0),$$

so dass wir dort den (Hauptzweig des) Logarithmus aus der definierenden Gleichung ziehen können und äquivalent

$$h_n(z) = -u_n \cdot \mathrm{Log}(1 - \frac{z}{t_n})$$

erhalten. Die Bemerkung folgt mit der Taylor-Reihenentwicklung

$$\mathrm{Log}(1 - w) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k} \quad \text{für alle } w \in U_1(0).$$[77]

□

Bemerkung 8.29. *Will man ein Weierstraß-Produkt zu einer Nullstellenverteilung $\{u_t\}_{t \in T}$ explizit angeben, so kann man wegen der gleichmäßig absoluten Konvergenz von Taylor-Reihen innerhalb ihres Konvergenzradiuses für die Polynome P_t geeignete Partialsummen der Reihen aus Bemerkung 8.28 wählen.*

Beispiel 8.30. (a) *Die Nullstellenverteilung $\{1\}_{t \in T}$ mit $T = \{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ wird durch*

$$f(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{n^2}) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gelöst. Die unbedingte Konvergenz des Produkts folgt hierbei nach dem unbedingten Konvergenzkriterium für Produkte holomorpher Funktionen 8.24 aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n^2}$ auf Kompakta.

(b) *Die Nullstellenverteilung $\{1\}_{t \in \mathbb{Z}}$ wird durch*

$$f(z) = z \cdot \prod_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 - \frac{z}{n})\, e^{\frac{z}{n}} = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) \quad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}$$

gelöst,

[77] Differenzieren beider Seiten liefert $-\frac{1}{1-w}$ bzw. $-\sum_{k=0}^{\infty} w^k$, so dass sich diese höchstens um eine additive Konstante $C \in \mathbb{C}$ unterscheiden. Setzt man in beiden Seiten $w = 0$ ein, so erhält man sofort $C = 0$.

denn: Da die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{z}{n}$ nicht auf Kompakta absolut konvergiert, müssen wir wie in der obigen Bemerkung explizit Polynome P_t konstruieren. Der lineare Term von h_n mit $n \neq 0$ in der Reihenentwicklung von Bemerkung 8.28 ist $\frac{z}{n}$. Mit der bekannten Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion gilt

$$\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} = \left(1-\frac{z}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{z}{n}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{n}\right)^2+\dots\right) = 1+\left(\frac{z}{n}\right)^2\cdot B\left(\frac{z}{n}\right)$$

mit einer holomorphen Funktion $B \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $B(0) = -1+\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$. Die unbedingte Konvergenz des linken Produkts aus der Behauptung folgt nun wieder nach Satz 8.24 aus der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{z}{n}\right)^2 B\left(\frac{z}{n}\right)$$

auf Kompakta. Wegen der unbedingten Konvergenz dürfen wir schließlich die Faktoren umsortieren und erhalten so das rechte Produkt aus der Behauptung. #

(c) *Es gilt*

$$\sin(\pi z) = \pi z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \quad \textit{für alle } z\in\mathbb{C}.$$

denn: Die Funktion $\sin(\pi z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ist bekanntermaßen eine Lösung der Nullstellenverteilung $\{1\}_{t\in\mathbb{Z}}$. Für die rechte Seite haben wir dies in Aussage (b) gezeigt. Da $\mathbb{C}$ ein Elementargebiet ist, gibt es nach der Eindeutigkeitsaussage des Produktsatzes 8.25 und Lemma 4.6 eine ganze Funktion h mit

$$e^{h(z)}\cdot\sin(\pi z) = \pi z\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \quad \textit{für alle } z\in\mathbb{C}.$$

Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass h identisch verschwindet.

Nach der bekannten Taylor-Entwicklung des Sinus hat $\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$ in $z=0$ eine hebbare Singularität und nimmt dort den Wert 1 an. Werten wir die Gleichung

$$e^{h(z)}\cdot\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) \tag{8.15}$$

an der Stelle $z=0$ aus, erhalten wir daher $e^{h(0)} = 1$, also $h(0)\in 2\pi i\mathbb{Z}$. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, es gelte $h(0) = 0$, und ändern h sonst um ein geeignetes ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ab.

Für $z \in U_1(0)$ sind alle Faktoren im Produkt auf der rechten Seite von (8.15) ungleich Null, so dass wir Satz 8.21 anwenden können. Da für Argumente nahe bei Eins die aus dem Reellen bekannten Logarithmusrechenregeln gelten,[78] *gibt es für $z \in U_r(0)$ mit $r < 1$ klein eine ganzzahlige Funktion*

[78] Nämlich $\mathrm{Log}(zw) = \mathrm{Log}(z)+\mathrm{Log}(w)$ und $\mathrm{Log}(e^z) = z$.

t mit

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log}(1-\frac{z^2}{n^2}) &\overset{8.21}{=} \operatorname{Log}\Big(\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z^2}{n^2})\Big)\\ &= \operatorname{Log}\Big(e^{h(z)}\cdot\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}\Big)+2\pi i t(z)\\ &= h(z)+\operatorname{Log}(\frac{\sin(\pi z)}{\pi z})+2\pi i t(z).\end{aligned} \tag{8.16}$$

Da die Reihe auf der linken Seite von (8.16) auf Kompakta in $U_r(0)$ gleichmäßig absolut konvergiert, stellt sie dort eine holomorphe und insbesondere stetige Funktion dar. Es folgt

$$t(z) := t \quad \textit{konstant auf } U_r(0).$$

Nach dem Approximationssatz von Weierstraß 3.41 können wir gliedweise ableiten und erhalten für alle $z \in \dot{U}_r(0)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2\,\frac{z}{n^2}}{1-\frac{z^2}{n^2}}\\ &= h'(z)+\frac{\frac{\partial}{\partial z}\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}}{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}}\\ &= h'(z)+\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}\cdot\frac{\pi\,(\pi z\cos(\pi z)-\sin(\pi z))}{(\pi z)^2}\\ &= h'(z)+\pi\cot(\pi z)-\frac{1}{z}.\end{aligned}$$

Andererseits gilt mit der Partialbruchzerlegung des Kotangens (8.5) für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$

$$\pi\,\cot(\pi z) = \frac{1}{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}) = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2},$$

so dass wir insgesamt

$$h'(z) = 0 \quad \textit{für alle } z \in \dot{U}_r(0)$$

erhalten. Nach dem Identitätssatz 4.8 folgt, dass h' auf ganz $\mathbb{C}$ identisch verschwindet und h somit eine konstante Funktion ist. Die Behauptung folgt wegen $h(0) = 0$. #

8.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 8.1. *Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n})$ auf Kompakta $K \subseteq \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ gleichmäßig absolut konvergiert.*

Aufgabe 8.2. *Leiten Sie den Weierstraß'schen Produktsatz 8.25 aus dem Satz von Mittag-Leffler 8.8 her, indem Sie die folgenden Aussagen zeigen:*

(a) *f ist genau dann eine Lösung der Nullstellenverteilung $\{u_t\}_{t\in T} := (\emptyset, \{u_t\}_{t\in T})$ auf $\mathbb{C}$, wenn $\frac{f'}{f}$ eine Lösung der Hauptteilverteilung $\{h_t(z) = u_t z\}_{t\in T}$ auf $\mathbb{C}$ ist.*

(b) *Zu jeder meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, deren Pole alle einfach sind und positive ganzzahlige Residuen haben, gibt es eine ganze Funktion g mit $f = \frac{g'}{g}$.*

Hinweis: *Für jedes $R > 0$ findet man eine auf $U_R(0)$ definierte holomorphe Funktion g_R mit $f = \frac{g_R'}{g_R}$ auf $U_R(0)$. Dabei ist g_R eindeutig bestimmt bis auf einen Faktor aus $\mathbb{C}^\times$. Durch geeignetes Abändern können die g_R mit $R \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ zu einer ganzen Funktion zusammengesetzt werden.*

(c) *Die Lösbarkeit der Nullstellenverteilung $\{u_t\}_{t\in T}$ in $\mathbb{C}$ folgt nun mit dem Satz von Mittag-Leffler 8.8.*

KAPITEL 9

Bildbereiche holomorpher Funktionen

In diesem Kapitel untersuchen wir Bilder holomorpher Funktionen. Die generische Fragestellung ist hier die folgende:

> Sei $\mathscr{F}$ die Familie holomorpher Funktionen auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, die eine bestimmte Eigenschaft P erfüllen. Wie sieht dann für alle $f \in \mathscr{F}$ das Bild $f(D)$ aus?

Wir haben bereits Ergebnisse dieser Art bewiesen, wie etwa den Satz von Casorati-Weierstraß 5.14. Dieses Kapitel wird in einer Verschärfung dieses Satzes münden, dem Großen Satz von Picard 9.19. Bevor wir diesen zeigen können, müssen wir noch eine Reihe weiterer Resultate über den Bildbereich holomorpher Funktionen zeigen, die aber auch jeweils für sich von Interesse sind.

9.1 Der Satz von Bloch ($\star$)

Passend zur Notation der Einleitung sei in diesem Abschnitt $D = \mathbb{E}$ die offene Einheitskreisscheibe und $D' \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das den Abschluss $\overline{\mathbb{E}}$ von $\mathbb{E}$ in $\mathbb{C}$ enthält. Sei weiter $\mathscr{F}_{\mathbb{E}}$ die Menge aller holomorphen Funktionen $f : D' \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Wegen $f'(0) = 1 \neq 0$ ist für jedes $f \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}$ das Bild $f(\mathbb{E})$ eine offene Menge und enthält so eine offene Kreisscheibe von positivem Radius. Wir wollen nun mit dem Satz von Bloch[79] zeigen, dass es eine Unterschranke für den größtmöglichen Radius einer solchen Kreisscheibe gibt. Dafür zeigen wir zunächst einige vorbereitende Lemmata:

Lemma 9.1. *Sei $C \in \mathbb{R}_{>0}$, und sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ holomorph mit*

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \quad \textit{und} \quad |f(z)| \leq C \textit{ für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Dann gilt $C \geq 1$ und $f(\mathbb{E}) \supseteq U_{(6C)^{-1}}(0)$.

[79] André Bloch (1893-1948)

Beweis. Nach den Cauchy'schen Ungleichungen 3.32 gilt

$$|f^{(n)}(0)| \leq Cn! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Die holomorphe Funktion f ist nach dem Potenzreihenentwicklungssatz 3.38 auf $\mathbb{E}$ durch ihre Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

mit Entwicklungspunkt $z = 0$ gegeben, so dass wir stattdessen bequemer auch $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ schreiben können. Insbesondere gilt mit $1 = |a_1| \leq C$ die erste Behauptung.

Es liegen dann alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = (4C)^{-1}$ in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$. Betrachten wir f auf dieser Kreislinie, so gilt wegen $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\geq |z| - |\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n| && \text{(zweite Dreiecksungleichung)}\\
&\geq (4C)^{-1} - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\,(4C)^{-n} && \text{(Dreiecksungleichung)}\\
&\geq (4C)^{-1} - \sum_{n=2}^{\infty} C\,(4C)^{-n} && (|a_n| \leq C \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})\\
&= (4C)^{-1} - C \cdot \Big(\frac{1}{1-(4C)^{-1}} - (1 + (4C)^{-1})\Big) && \text{(geometrische Reihe)}\\
&= (4C)^{-1} - (16C^2 - 4)^{-1}\\
&\geq (6C)^{-1}.
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun ein $w \in U_{(6C)^{-1}}(0)$, so hat die Funktion $g(z) := f(z) - w$ in $\mathbb{E}$ eine Nullstelle,

denn: Für $|z| = (4C)^{-1}$ gilt

$$|f(z) - g(z)| = |w| < (6C)^{-1} \leq |f(z)|,$$

so dass nach dem Satz von Rouché 6.16 die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ in $U_{(4C)^{-1}}(0)$ dieselbe Anzahl von Nullstellen haben. Die Behauptung folgt mit $f(0) = 0$. #

Für ein fest vorgegebenes $w \in U_{(6C)^{-1}}(0)$ gibt es also ein $z \in \mathbb{E}$ mit $f(z) = w$, was das Lemma zeigt. □

Lemma 9.2. *Sei $R > 0$ eine reelle Zahl und sei $g : U_R(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit*

$$g(0) = 0, \quad |g'(0)| =: C_1 > 0 \quad \textit{und} \quad |g(z)| \leq C_2 \textit{ für alle } z \in U_R(0).$$

Dann gilt

$$g(U_R(0)) \supseteq U_r(0) \quad \textit{mit } r = \frac{R^2 C_1^2}{6C_2}.$$

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{E}$ setzen wir $f(z) := \left(Rg'(0)\right)^{-1} g(Rz)$. Dann erfüllt f offensichtlich die Voraussetzungen von Lemma 9.1 mit $C = \frac{C_2}{RC_1}$. Es folgt also

$$f(\mathbb{E}) \supseteq U_{\frac{RC_1}{6C_2}}(0).$$

Das Lemma folgt unmittelbar, wenn wir in diese Inklusion die Definition von f einsetzen. □

Lemma 9.3. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, und sei $R > 0$ eine reelle Zahl. Dann ist jede holomorphe Funktion $f : U_R(z_0) \to \mathbb{C}$ mit*

$$|f'(z) - f'(z_0)| < |f'(z_0)| \quad \text{für alle } z \in U_R(z_0)$$

injektiv.

Beweis. Seien $z_1 \neq z_2$ zwei verschiedene Punkte in $U_R(z_0)$. Sei weiter $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$ für $t \in [0,1]$. Dann folgt mit der zweiten Dreiecksungleichung aus 1.7 (c)

$$\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_2)| &= \left|\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z\right| \\
&= \left|\int_\gamma f'(z_0)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma \left(f'(z) - f'(z_0)\right)\mathrm{d}z\right| \\
&\geq \left|\int_\gamma f'(z_0)\,\mathrm{d}z\right| - \left|\int_\gamma \left(f'(z) - f'(z_0)\right)\mathrm{d}z\right| \\
&\geq |f'(z_0)| \cdot |z_1 - z_2| - \int_\gamma |f'(z) - f'(z_0)|\,|\mathrm{d}z|.^{80}
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist dies eine echt positive Zahl; es folgt also $f(z_1) \neq f(z_2)$ und somit die Injektivität von f. □

Satz 9.4 (Satz von Bloch)**.** *Sei $f \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}$. Dann enthält $\mathbb{E}$ eine offene Kreisscheibe U, so dass die folgenden beiden Aussagen gelten:*

(i) *$f|_U$ ist injektiv.*

(ii) *$f(U)$ enthält eine offene Kreisscheibe von Radius $\frac{1}{72}$.*

Beweis. Wir wollen zunächst eine offene Kreisscheibe U finden, auf die eingeschränkt f injektiv ist. Das tun wir, indem wir für ein geeignetes U die Voraussetzungen von Lemma 9.3 zeigen. Wir interessieren uns also für die Ableitung f' von f.

Für $r \in [0,1]$ sei

$$K(r) := \max_{|z|=r} |f'(z)|.$$

Die Funktion $K : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist offenbar stetig und nach dem Maximumprinzip für Kompakta 4.18 außerdem monoton wachsend. Setzen wir weiterhin

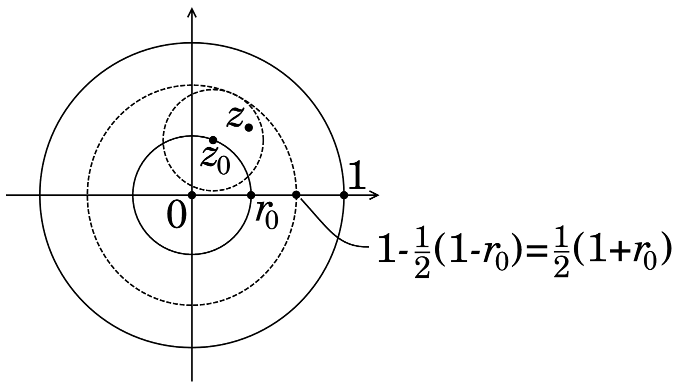
$$h(r) := (1-r)K(r),$$

[80] Wir haben die Schreibweise $|\mathrm{d}z|$ nicht eingeführt. Gemeint ist hier das Integral $\int_0^1 |f'(\gamma(t)) - f'(z_0)|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$.

so erhalten wir in $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $h(0) = 1$ und $h(1) = 0$. Mit $r_0 := \sup_{h(r)=1} r$ gilt dann aus Stetigkeitsgründen $h(r_0) = 1$ und $h(r) < 1$ für $r > r_0$. Wegen $h(1) = 0$ folgt außerdem $r_0 < 1$.

Wählen wir nun ein z_0 mit $|z_0| = r_0$ und $|f'(z_0)| = K(r_0)$, so gilt nach Definition von r_0

$$|f'(z_0)| = \frac{1}{1 - r_0}. \tag{9.1}$$



Für jedes $z \in U_{\frac{1-r_0}{2}}(z_0)$ ist

$$|z| < |z - z_0| + |z_0| \le \frac{1 - r_0}{2} + r_0 = \frac{1 + r_0}{2}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
|f'(z)| &\le K(|z|) && \text{(Definition von } K\text{)}\\
&\le K\left(\frac{1 + r_0}{2}\right) && \text{(Monotonie von } K \text{ und } |z| < \tfrac{1+r_0}{2}\text{)}\\
&= \frac{h\left(\frac{1+r_0}{2}\right)}{1 - \frac{1+r_0}{2}} && \text{(Definition von } h\text{)}\\
&< \frac{2}{1 - r_0}. && (h(r) < 1 \text{ für alle } r > r_0)
\end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung und (9.1) folgt

$$|f'(z) - f'(z_0)| \le |f'(z)| + |f'(z_0)| < \frac{3}{1 - r_0} \quad \text{für alle } z \in U_{\frac{1-r_0}{2}}(z_0). \tag{9.2}$$

Mit dem Lemma von Schwarz 4.19 gilt sogar

$$|f'(z) - f'(z_0)| \le \frac{6\,|z - z_0|}{(1 - r_0)^2} \quad \text{für alle } z \in U_{\frac{1-r_0}{2}}(z_0),$$

denn: Betrachten wir die auf $\mathbb{E}$ definierte Abbildung

$$F := \varphi_{\tilde{D}} \circ \varphi_{\tilde{T}} \circ f' \circ \varphi_T \circ \varphi_D,$$

wobei $\varphi_\cdot$ mit $\cdot \in \{D, T, \tilde{T}, \tilde{D}\}$ die durch

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1-r_0}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} 1 & -f'(z_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} \frac{1-r_0}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebenen Möbiustransformationen seien.[81] Offensichtlich gilt $F(0) = 0$. Mit (9.2) lässt sich außerdem leicht $F(\mathbb{E}) \subseteq \mathbb{E}$ zeigen, so dass für F die Voraussetzungen des Lemmas von Schwarz 4.19 erfüllt sind. Nach diesem gilt dann

$$\begin{aligned} & |F(z)| \le |z| && \text{für alle } z \in \mathbb{E} \\ \iff & |(\varphi_{\tilde{D}} \circ \varphi_{\tilde{T}})(f'(z))| \le \frac{2\,|z - z_0|}{1 - r_0} && \text{für alle } z \in U_{\frac{1-r_0}{2}}(z_0) \\ \iff & \left|\frac{1 - r_0}{3}\,(f'(z) - f'(z_0))\right| \le \frac{2\,|z - z_0|}{1 - r_0} && \text{für alle } z \in U_{\frac{1-r_0}{2}}(z_0) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. #

Insbesondere gilt mit (9.1)

$$|f'(z) - f'(z_0)| < \frac{6\,\frac{1-r_0}{6}}{(1 - r_0)^2} = \frac{1}{1 - r_0} = |f'(z_0)| \quad \text{für alle } z \in U_{\frac{1-r_0}{6}}(z_0).$$

Nach Lemma 9.3 ist dann die Einschränkung von f auf $U_{\frac{1-r_0}{6}}(z_0)$ injektiv. $U_{\frac{1-r_0}{6}}(z_0)$ ist demnach eine mögliche Wahl für eine offene Kreisscheibe U mit Eigenschaft (i). Es bleibt nachzuweisen, dass $U_{\frac{1-r_0}{6}}(z_0)$ auch Eigenschaft (ii) erfüllt und also eine offene Kreisscheibe vom Radius $\frac{1}{72}$ enthält. Das wollen wir tun, indem wir die offene Kreisscheibe $U_{\frac{1-r_0}{6}}(z_0)$ nach Null verschieben und dann eine geeignete Funktion g wie in Lemma 9.2 finden.

Betrachten wir also die auf $U_{\frac{1-r_0}{6}}(0)$ definierte Abbildung

$$g := \varphi_{\hat{T}} \circ f \circ \varphi_T$$

mit den durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & z_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & -f(z_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebenen Möbiustransformationen φ_T und $\varphi_{\hat{T}}$. Mit (9.1) gilt offensichtlich

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad |g'(0)| = |f'(z_0)| = \frac{1}{1 - r_0} > 0.$$

[81] Man sieht leicht ein, dass φ_D und $\varphi_{\tilde{D}}$ Drehstreckungen und φ_T und $\varphi_{\tilde{T}}$ Translationen sind.

Für $z \in U_{\frac{1-r_0}{6}}(0)$ liegt das Bild der Kurve $\gamma(t) = z_0 + tz$, $t \in [0,1]$ ganz in der offenen Kreisscheibe $U_{\frac{1-r_0}{6}}(z_0) \subseteq U_{\frac{1-r_0}{2}}(z_0)$. Es gilt daher

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |\int_\gamma f'(w)\,\mathrm{d}w| \\ &< \frac{2\,|z|}{1-r_0} && \text{(Standardabschätzung und } |f'(w)| < \tfrac{2}{1-r_0}\text{)} \\ &< \frac{2\,\frac{1-r_0}{6}}{1-r_0} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Lemma 9.2 besagt nun, dass das Bild $g(U_{\frac{1-r_0}{6}}(0))$ die offene Kreisscheibe $U_r(0)$ mit

$$r = \frac{\left(\frac{1-r_0}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1-r_0}\right)^2}{6 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{72}$$

enthält. Der Satz folgt nach Übersetzen in eine Aussage über f. □

Korollar 9.5. *Sei $R > 0$ eine reelle Zahl und sei*

$$RD' := \{z \in \mathbb{C} \mid z = Rw \text{ für ein } w \in D'\}.$$

Dann enthält das Bild $f(U_R(0))$ einer jeden holomorphen Funktion $f : RD' \to \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe vom Radius $\frac{R\,|f'(0)|}{72}$.

Beweis. Für $f'(0) = 0$ ist offenbar die leere Kreisscheibe in $f(U_R(0))$ enthalten, so dass wir für den weiteren Beweis ohne Einschränkung $f'(0) \neq 0$ annehmen können. Es bleibt nun nur noch der Bloch'sche Satz 9.4 auf die Funktion

$$g(z) := \frac{f(Rz) - f(0)}{Rf'(0)}$$

anzuwenden. Das ist erlaubt, da g offensichtlich in $\mathscr{F}_{\mathbb{E}}$ liegt. □

Bemerkung 9.6. *Sei für jedes $f \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}$ die Zahl $\beta(f)$ gegeben als das Supremum aller reellen Zahlen r, für die es eine offene Kreisscheibe $U \subseteq \mathbb{E}$ gibt, so dass $f|_U$ injektiv ist und $f(U)$ eine offene Kreisscheibe vom Radius r enthält. Der Satz von Bloch 9.4 besagt dann $\frac{1}{72} \leq \beta(f)$.*

*Für die **Bloch'sche Konstante** $B := \inf_{f \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}} \beta(f)$ gilt deshalb und wegen $\mathrm{id}_{D'} \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}$ die Abschätzung*

$$\frac{1}{72} \leq B \leq 1.$$

Tatsächlich sind noch sehr viel bessere Abschätzungen von B bekannt; man weiß[82]

$$0{,}4332 < B \leq 0{,}4719.$$

Den tatsächlichen Wert von B kennt man nicht.

[82] Die obere Schranke wurde 1937 von Lars Valerian Ahlfors (1907-1996) und Helmut Grunsky (1904-1986) bewiesen, die untere in einer Reihe von Artikeln bis zurzeit 2003 von mehreren Autoren. Die Grundidee hierzu lieferte Mario Bonk im Jahr 1990.

Ganz ähnlich wie die Bloch'sche Konstante lässt sich die etwas einfachere Landau'sche Konstante[83] einführen.

Definition 9.7. *Sei für jedes $f \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}$*

$$\lambda(f) := \sup\{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ ist Radius einer offenen Kreisscheibe in } f(\mathbb{E})\}.$$

*Die **Landau'sche Konstante** L ist dann definiert als $L := \inf\limits_{f \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}} \lambda(f)$.*

Auch hier bekommt man schnell Abschätzungen geliefert: Es gilt

$$B \leq L \leq 1,$$

wobei die Abschätzung nach unten trivial ist und die Abschätzung nach oben wie für die Bloch'sche Konstante geschieht. Wieder kann man die Abschätzung signifikant verbessern; es gilt[84]

$$0,5 < L \leq 0,5433$$

und insbesondere $B < L$.

Proposition 9.8. *Für jedes $f \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}$ enthält $f(\mathbb{E})$ eine offene Kreisscheibe vom Radius $L > 0$.*

Beweis. Nach dem Satz von Bloch 9.4 ist $B > 0$ und somit auch $L > 0$. Insbesondere ist $\lambda(f) > 0$ für jedes $f \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}$. Zum Nachweis der Proposition zeigen wir die etwas stärkere Aussage, dass für jedes $f \in \mathscr{F}_{\mathbb{E}}$ das Bild $f(\mathbb{E})$ eine offene Kreisscheibe vom Radius $\lambda(f)$ enthält. Nach Definition von $\lambda(f)$ gibt es für jedes $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ein $z_n \in f(\mathbb{E})$ mit $U_{\lambda(f)-\frac{1}{n}}(z_n) \subseteq f(\mathbb{E})$. Da $f(\overline{\mathbb{E}})$ kompakt ist, gibt es ein $z_0 \in f(\overline{\mathbb{E}})$, gegen das eine Teilfolge von (z_n) konvergiert, ohne Einschränkung sei dies bereits die Folge (z_n) selbst.

Für ein beliebiges $z \in U_{\lambda(f)}(z_0)$ wählen wir ein $n(f)$ mit

$$|z - z_0| < \lambda(f) - \frac{1}{n(f)}.$$

Wegen der Konvergenz der Folge gibt es ein $n(z) > n(f)$ mit

$$|z_n - z_0| < \left(\lambda(f) - \frac{1}{n(f)}\right) - |z - z_0| \qquad \text{für alle } n \geq n(z).$$

Es folgt

$$|z - z_n| \leq |z - z_0| + |z_0 - z_n| < \lambda(f) - \frac{1}{n(f)} < \lambda(f) - \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \geq n(z).$$

Da $z \in U_{\lambda(f)}(z_0)$ beliebig war, folgt $U_{\lambda(f)}(z_0) \subseteq f(\mathbb{E})$ und somit die Proposition. □

[83] Edmund Georg Hermann Landau (1877-1938)

[84] Die obere Schranke wurde 1943 von Hans Adolph Rademacher (1892-1969) bewiesen, die untere 1938 von Raphael Mitchel Robinson (1911-1995).

Korollar 9.9. *Sei $R > 0$ eine reelle Zahl. Dann enthält das Bild $f(U_R(0))$ einer jeden holomorphen Funktion $f : RD' \to \mathbb{C}$ eine offene Kreisscheibe vom Radius $R\,|f'(0)|\,L$.*

Beweis. Analog zum Beweis von Korollar 9.5. □

9.2 Der Kleine Satz von Picard (⋆)

Das Ziel dieses Abschnitts, der Kleine Satz von Picard 9.12, ist eine Verschärfung des Satzes von Liouville 3.34. Statt der Beschränktheit der ganzen Funktion wird für ihre Konstanz nur noch gefordert, dass ihr Wertebereich zwei komplexe Zahlen auslässt. Wie im vergangenen Abschnitt auch zeigen wir zunächst einige vorbereitende Lemmata.

Lemma 9.10. *Sei D ein Elementargebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\{0,1\} \cap f(D) = \emptyset$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = -\exp(\pi i \cosh(2g(z))) \quad \textit{für alle } z \in D.$$

Beweis. Da f auf dem Elementargebiet D holomorph ist und keine Nullstelle hat, gibt es nach Lemma 4.6 eine holomorphe Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{h(z)}$.

Nähme nun die Funktion $\frac{h(z)}{2\pi i}$ einen ganzzahligen Wert an, so wäre im Widerspruch zur Voraussetzung der Wert von f an dieser Stelle gleich 1. Da $\frac{h(z)}{2\pi i}$ also insbesondere die Werte 0 und 1 nicht annimmt, ist es, wieder mit Lemma 4.6, möglich, auf D holomorphe Funktionen $Q_1 : D \to \mathbb{C}$ und $Q_2 : D \to \mathbb{C}$ mit

$$Q_1(z)^2 = \frac{h(z)}{2\pi i} \quad \text{und} \quad Q_2(z)^2 = \frac{h(z)}{2\pi i} - 1 \quad \text{für alle } z \in D$$

zu definieren und diese zu einer holomorphen Funktion $H : D \to \mathbb{C}$ mit

$$H(z) := Q_1(z) - Q_2(z) \quad \text{für alle } z \in D$$

zusammenzufügen. Nach Konstruktion hat $H(z)$ auf D keine Nullstellen, so dass wir wie gerade eben eine holomorphe Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ finden mit $H(z) = e^{g(z)}$. Es folgt[85]

$$\begin{aligned}
\cosh(2g(z)) + 1 &= \frac{1}{2}\,(e^{2g(z)} + e^{-2g(z)}) + 1 \\
&= \frac{1}{2}\,(e^{g(z)} + e^{-g(z)})^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(H(z) + \frac{1}{H(z)}\right)^2 \\
&= \frac{h(z)}{\pi i}.
\end{aligned}$$

[85]Die letzte Gleichheit erfordert hierbei etwas Rechenarbeit. Die Durchführung dauert zwar ein wenig, kommt aber ohne besondere Tricks aus.

Setzen wir dies in die Definition von h ein, so erhalten wir

$$f(z) = e^{h(z)} = \exp(\pi i \cosh(2g(z)) + \pi i) = -\exp(\pi i \cosh(2g(z))).$$

$\square$

Lemma 9.11. *Seien D, f und g wie in Lemma 9.10. Dann enthält $g(D)$ keine offene Kreisscheibe von Radius 1.*

Beweis. Wir zeigen das Lemma, indem wir eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ angeben, die mit $g(D)$ leeren Schnitt haben muss, und deren Komplement keine offene Kreisscheibe von Radius 1 enthält. Wir wollen zeigen, dass

$$M := \{\pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{m\pi}{2} i \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

eine mögliche Wahl ist. Wegen $\log(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) > 0$ sind die Elemente von M die Eckpunkte einer Parkettierung der komplexen Ebene mit Rechtecken positiver Breite. Genauer gelten für die Abmessungen dieser Rechtecke die Abschätzungen

$$\text{Höhe} = \frac{\pi}{2} < \sqrt{3}$$

und

$$\text{Breite} = \log(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) - \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) \leq \log(\sqrt{2} + 1) - \log(1) < \log(e) = 1.$$

Mit dem Satz von Pythagoras folgt, dass die Länge einer jeden Rechtecksdiagonalen echt kleiner ist als 2, so dass $\mathbb{C} \setminus M$ keine offene Kreisscheibe von Radius 1 enthalten kann.

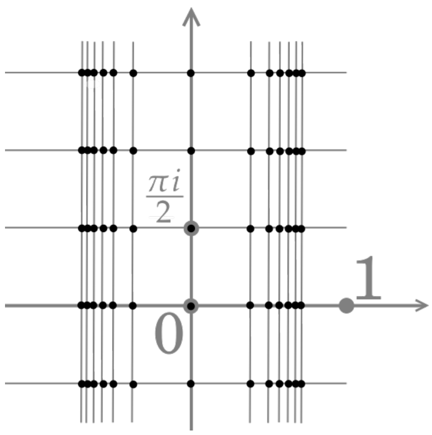


Abbildung 9.1: Die Werte für $-1 \leq m \leq 3$ und $1 \leq n \leq 7$.

Es verbleibt also noch zu zeigen, dass $g(D)$ mit M leeren Schnitt hat. Nehmen wir dafür an, es gäbe einen Punkt $z_0 \in D$ gibt mit

$$g(z_0) = \pm \log(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) + \frac{m\pi}{2} i$$

für geeignete $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dann gälte

$$\begin{aligned}
\cosh(2g(z_0)) &= \frac{1}{2}\left(e^{2g(z_0)} + e^{-2g(z_0)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{\pi i m}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\pm 2} + e^{-\pi i m}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^{\mp 2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((-1)^m\left((\sqrt{n} + \sqrt{n-1})^2 + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})^2\right)\right) \\
&= (-1)^m\,(2n-1),
\end{aligned}$$

wobei wir beim vorletzten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass nach der 3. binomischen Formel

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = n - (n-1) = 1 \tag{9.3}$$

gilt. Nach der Definition von g folgte $f(z_0) = -\exp(\pi i\,(-1)^m(2n-1))$. Da $2n-1$ ungerade ist, erhielten wir so

$$f(z_0) = 1,$$

was nicht sein kann. Der Durchschnitt von $g(D)$ und M ist also tatsächlich leer und das Lemma bewiesen. $\square$

Satz 9.12 (Kleiner Satz von Picard)**.** *Sei f eine ganze Funktion. Gibt es zwei komplexe Zahlen, die nicht im Bild $f(\mathbb{C})$ liegen, so ist f konstant.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die zwei komplexen Zahlen, die nicht im Bild von f liegen, gerade 0 und 1 sind,

denn: Wenn a und b zwei verschiene komplexen Zahlen sind, die nicht im Bild von f liegen, dann nimmt die ganze Funktion

$$\frac{f(z) - a}{b - a}$$

die Werte 0 und 1 nicht an. #

Nach Lemma 9.10 gibt es dann eine ganze Funktion g mit

$$f(z) = -\exp(\pi i \cosh(2g(z))) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

und nach Lemma 9.11 gibt es keine offene Kreisscheibe von Radius 1, die ganz im Bild $g(\mathbb{C})$ enthalten ist.

Nehmen wir nun an, f wäre nicht konstant. Dann wäre auch g nicht konstant, so dass es einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ gäbe mit $g'(z_0) \neq 0$. Wir können hierbei ohne Einschränkung $z_0 = 0$ annehmen,

denn: Offensichtlich erfüllte die Funktion $g(z + z_0)$ die Bedingung $g'(0) \neq 0$ und hätte ebenfalls keine offene Kreisscheibe von Radius 1 im Bild. #

Wir können aber auch Korollar 9.9 auf g anwenden. Dieses besagt, dass für ein beliebiges $R \in \mathbb{R}_{>0}$ die Menge $g(U_R(0))$ eine offene Kreisscheibe von Radius $R\,|g'(0)|\,L$ enthält. Insbesondere enthält $g(\mathbb{C})$ eine offene Kreisscheibe von Radius 1, was ein Widerspruch zur Annahme ist, f wäre nicht konstant. $\square$

9.3 Der Satz von Schottky ($\star$)

Satz 9.13 (Satz von Schottky[86]). *Seien $\alpha \in (0,\infty)$ und $\beta \in [0,1)$ beliebig. Dann gibt es eine Konstante $C(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_{>0}$ mit folgender Eigenschaft: Ist D' ein Elementargebiet, das den Abschluss $\overline{\mathbb{E}}$ der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ enthält, und $f : D' \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, welche die Werte 0 und 1 nicht annimmt und außerdem $|f(0)| \in (0,\alpha]$ erfüllt, so gilt*

$$|f(z)| \leq C(\alpha,\beta) \quad \textit{für alle } z \in \overline{U_\beta(0)}.$$

Beweis. Haben wir den Satz für ein festes $\alpha_0 \in (0,\infty)$ gezeigt, so folgt er offensichtlich für alle $\alpha \in (0,\alpha_0]$. Es genügt daher ohne Einschränkung, wenn wir den Satz für $\alpha \in (2,\infty)$ zeigen. Den eigentlichen Beweis erledigen wir, indem wir zwei Fälle getrennt studieren.

Fall 1: $|f(0)| \in [\frac{1}{2},\alpha]$.[87] Wir verwenden die Notation aus dem Beweis von Lemma 9.10. Das heißt, zu unserer gegebenen Funktion f betrachten wir

- eine Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = e^{h(z)}$ auf ganz D,
- Funktionen $Q_1 : D \to \mathbb{C}$ und $Q_2 : D \to \mathbb{C}$ mit
$$h(z) = 2\pi i\, Q_1(z)^2 = 2\pi i\,(Q_2(z)^2 + 1) \quad \text{für alle } z \in D,$$
- eine Funktion $H : D \to \mathbb{C}$ mit $H(z) = Q_1(z) - Q_2(z)$ auf ganz D,
- eine Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ mit $H(z) = e^{g(z)}$ auf ganz D.

Die Funktionen h und g sind hierbei offensichtlich nur bis auf Addition ganzzahliger Vielfacher von $2\pi i$ eindeutig gewählt. Für unseren Beweis wählen wir die Normierungen[88]

$$-\pi < \operatorname{Im}(h(0)) \leq \pi \quad \text{und} \quad -\pi < \operatorname{Im}(g(0)) \leq \pi. \tag{9.4}$$

Auch die Quadratwurzeln Q_1 und Q_2 sind nicht eindeutig, es gibt hier jeweils zwei Wahlen, die sich nur um das Vorzeichen unterscheiden. Für H ergeben sich so vier Möglichkeiten, von denen wir aber keine besondere auswählen.

Wir wollen uns als erstes eine Abschätzung für den Betrag $|g(0)|$ herleiten. Unter Ausnutzung von $|f(0)| \in [\frac{1}{2},\alpha]$ und $\alpha \geq 2$ liefert uns die Normierung (9.4)

$$\begin{aligned} |h(0)| &= |\log|f(0)| + i\operatorname{Arg}(f(0))| \\ &\leq |\log|f(0)|| + |\operatorname{Arg}(f(0))| \\ &\leq \max\{\log(2), \log(\alpha)\} + \pi \\ &= \log(\alpha) + \pi \\ &=: 2\pi\, C_0(\alpha). \end{aligned} \tag{9.5}$$

[86] Friedrich Schottky (1851-1935)

[87] An dieser Stelle benötigen wir $\alpha \geq \frac{1}{2}$. In (9.5) werden wir sehen, warum wir sogar $\alpha \geq 2$ vorausgesetzt haben.

[88] Wir können *ungenau*

$$h(z) = \log(f(z)) = \log|f(z)| + i\arg(f(z)) \quad \text{für alle } z \in D$$

schreiben. Dann bedeutet unsere Normierung von h, dass wir für $z = 0$ den Hauptwert des Arguments auswählen und die Funktion h stetig fortsetzen. Das Analoge gilt natürlich für die Normierung von g.

Dies können wir benutzen, um eine Abschätzung des Betrags von $|H(0)|$ zu bekommen. Wir untersuchen dabei alle vier Möglichkeiten für H gleichzeitig.

$$\begin{aligned} |\pm Q_1(0) \pm Q_2(0)| &\leq |Q_1(0)| + |Q_2(0)| \\ &= \left(\frac{|h(0)|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{|h(0) - 2\pi i|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{|h(0)|}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{|h(0)|}{2\pi} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_0(\alpha)^{\frac{1}{2}} + \big(C_0(\alpha) + 1\big)^{\frac{1}{2}} \\ &=: C_1(\alpha). \end{aligned} \tag{9.6}$$

Analog zu (9.5) erhalten wir schließlich die gesuchte Abschätzung von $|g(0)|$. Es gilt

$$\begin{aligned} |g(0)| &\leq \begin{cases} \log|H(0)| + \pi & \text{falls } |H(0)| \geq 1, \\ -\log|H(0)| + \pi & \text{falls } |H(0)| < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \log|Q_1(0) - Q_2(0)| + \pi & \text{falls } |H(0)| \geq 1, \\ \log|Q_1(0) + Q_2(0)| + \pi & \text{falls } |H(0)| < 1 \end{cases} \\ &\overset{(9.6)}{\leq} \log(C_1(\alpha)) + \pi \\ &=: C_2(\alpha), \end{aligned} \tag{9.7}$$

wobei wir für das zweite Gleichheitszeichen wieder den Trick mit der 3. binomischen Formel aus (9.3) angewendet haben.

Unser nächstes Ziel ist eine Abschätzung für den Betrag $|g(z_0)|$, wenn $z_0 \in \mathbb{E}$ beliebig ist. Sei dafür C das durch $\gamma(t) = tz_0$ mit $t \in [0,1]$ parametrisierte Geradenstück. Dann gilt

$$\begin{aligned} |g(z_0)| &\leq |g(0)| + |g(z_0) - g(0)| \\ &\overset{(9.7)}{\leq} C_2(\alpha) + \left|\int_C g'(z)\,\mathrm{d}z\right| \\ &\leq C_2(\alpha) + |z_0| \max_{z \in \gamma([0,1])} |g'(z)|. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Wir benötigen also eine Abschätzung für $|g'(z)|$ mit $z \in \mathbb{E}$. Sei dafür $z_1 \in \mathbb{E}$ fest gewählt. Dann enthält das Bild $g\big(U_{1-|z_1|}(z_1)\big) \subseteq g(\mathbb{E})$ nach Korollar 9.9 eine offene Kreisscheibe von Radius $(1 - |z_1|) \cdot |g'(z_1)| \cdot L$.[89] Andererseits enthält das Bild $g(\mathbb{E})$ nach Lemma 9.11 keine offene Kreisscheibe von Radius 1. Es folgt

$$|g'(z_1)| < \frac{1}{(1 - |z_1|)\,L} \quad \text{für alle } z_1 \in \mathbb{E}.$$

Setzen wir dies in (9.8) ein, so erhalten wir

$$|g(z_0)| \leq C_2(\alpha) + \frac{|z_0|}{(1 - |z_0|)\,L}.$$

Offensichtlich ist die rechte Seite dieser Abschätzung monoton in $|z_0|$. Setzen wir also für ein $\beta \in [0,1)$

$$C_3(\alpha,\beta) := C_2(\alpha) + \frac{\beta}{(1-\beta)\,L},$$

so folgt

$$|g(z)| \leq C_3(\alpha,\beta) \quad \text{für alle } z \in \overline{U_\beta(0)}.$$

Es gilt abschließend für diesen Fall

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |\exp(\pi i \cosh(2g(z)))| \\
&\leq \exp(\pi\,|\cosh(2g(z))|) \\
&\leq \exp(\pi\, e^{2|g(z)|}) \\
&\leq \exp(\pi\, e^{2C_3(\alpha,\beta)}) \\
&=: C_4(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

Fall 2: $0 < |f(0)| < \frac{1}{2}$**.** Dann gilt

$$\frac{1}{2} < 1 - |f(0)| \leq |1 - f(0)| \leq 1 + |f(0)| < \frac{3}{2},$$

die Funktion $(1-f)$ genügt also den Bedingungen von Fall 1 mit $\alpha = \frac{3}{2}$. Es gilt also

$$|1 - f(z)| \leq C_4(\frac{3}{2},\beta) \quad \text{für alle } z \in \overline{U_\beta(0)},$$

und $|f(z)|$ ist für alle $z \in \overline{U_\beta(0)}$ durch $1 + C_4(\frac{3}{2},\beta)$ beschränkt.

In Zusammenfassung von Fall 1 und Fall 2 folgt der Satz mit

$$C(\alpha,\beta) := \max\{C_4(\alpha,\beta), 1 + C_4(\frac{3}{2},\beta)\}.$$

□

Korollar 9.14. *Seien $R \in (0,\infty), \alpha \in (0,\infty), \beta \in [0,1)$ reelle Zahlen. Sei weiter $f : R\mathbb{D}' \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, welche die Werte 0 und 1 nicht annimmt und der Bedingung $|f(0)| \in (0,\alpha]$ erfüllt. Dann gilt*

$$|f(z)| \leq C(\alpha,\beta) \quad \textit{für alle } z \in \overline{U_{R\beta}(0)},$$

wobei $C(\alpha,\beta)$ die Konstante aus dem Satz von Schottky 9.13 bezeichne.

Beweis. Man wende den Satz von Schottky 9.13 auf die Funktion $f(Rz)$ an. □

Der Satz von Schottky 9.13 und auch Korollar 9.14 liefern Folgen von Funktionen, die auf offenen Kreisscheiben in $\mathbb{E}$ gleichmäßig beschränkt sind. Nach dem Satz von Montel 7.14 hat jede solche Folge eine auf kompakten Teilmengen gleichmäßig konvergente Teilfolge. Diese Anwendung des Satzes von Schottky wird uns im nächsten Abschnitt für den Beweis des Großen Satzes von Picard 9.19 von Nutzen sein.

9.4 Der Große Satz von Picard (⋆)

Bevor wir den Großen Satz von Picard 9.19 beweisen können, führen wir noch einige Begriffe ein:

Definition 9.15. *Eine Familie $\mathscr{F}$ von Funktionen auf einer offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt **lokal gleichmäßig beschränkt**, wenn es für jedes $z_0 \in D$ eine offene Umgebung $U \subseteq D$ und ein $C > 0$ gibt mit*

$$|f(z)| < C \quad \text{für alle } z \in U \text{ und alle } f \in \mathscr{F}.$$

Definition 9.16. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.*

(a) *Genau dann heißt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ **kompakt konvergent**, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf D punktweise konvergiert und die Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von D gleichmäßig ist.*

(b) *Genau dann heißt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ **kompakt divergent**, wenn es für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq D$ und jedes $C > 0$ ein $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gibt mit*

$$|f_n(z)| > C \quad \text{für alle } n > N \text{ und alle } z \in K.$$

(c) *Eine Familie $\mathscr{F}$ von auf D holomorphen Funktionen heißt **normal**, wenn jede Folge in $\mathscr{F}$ eine kompakt konvergente Teilfolge besitzt.*

(d) *Eine Familie $\mathscr{F}$ von auf D holomorphen Funktionen heißt **fast normal**, wenn jede Folge in $\mathscr{F}$ eine kompakt konvergente oder eine kompakt divergente Teilfolge besitzt.*

In dieser Sprache lässt sich der Satz von Montel 7.14 wie folgt fassen:

Lemma 9.17 (Verallgemeinerung des Satzes von Montel)**.** *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist jede lokal gleichmäßig beschränkte Familie $\mathscr{F}$ auf D holomorpher Funktionen normal.*

Beweis. Wir setzen

$$S := \{z \in D \mid \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{Q}\}$$

und wählen eine Abzählung $s_1, s_2, \ldots$ von S.

Für eine beliebige Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ in $\mathscr{F}$ gibt es nach Voraussetzung eine offene Umgebung $U_1 \subseteq D$ von s_1, in der $(f_n|_{U_1})_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Montel 7.14 gibt es daher eine auf U_1 kompakt konvergente Teilfolge $(f_{1n})_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Iterativ erhalten wir so eine auf $\bigcup_{m=1}^{M} U_m$ kompakt konvergente Teilfolge $(f_{mn})_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$.

Die Diagonalfolge $(f_{nn})_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ konvergiert dann kompakt auf $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ und wegen der Dichtheit von S in D somit auf ganz D. Das zeigt die Normalität von $\mathscr{F}$ und somit die allgemeinere Formulierung des Satzes von Montel. □

Eine unmittelbare Anwendung ist das folgende für den Beweis des Großen Satzes von Picard 9.19 wichtige Ergebnis:

Satz 9.18 (Satz von Montel-Carathéodory[90]). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und*

$$\mathscr{F} := \{f : D \to \mathbb{C} \text{ holomorph } \mid f(z) \neq \{0,1\} \text{ für alle } z \in D\}.$$

Dann ist $\mathscr{F}$ fast normal.

Beweis. Für ein festes $z_0 \in D$ definieren wir

$$\mathscr{F}_1 := \{f \in \mathscr{F} \mid |f(z_0)| \leq 1\} \quad \text{und} \quad \mathscr{F}_2 := \{f \in \mathscr{F} \mid |f(z_0)| > 1\}.$$

Wir werden zeigen, dass $\mathscr{F}_1$ normal und $\mathscr{F}_2$ fast normal ist.

Zum Beweis der ersten Aussage langt es nach der Verallgemeinerung des Satzes von Montel 9.17 die lokal gleichmäßige Beschränktheit von $\mathscr{F}_1$ zu zeigen. Sei dazu $w_0 \in D$ beliebig und C eine Kurve in D mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt w_0. Eine solche Kurve gibt es,

denn: Als Gebiet ist D zusammenhängend und offen. Offene Teilmengen in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ sind lokal wegzusammenhängend, da mit jedem Punkt auch eine (konvexe) offene Kreisscheibe enthalten ist. Eine zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Menge ist aber auch wegzusammenhängend, vgl. Topologie. #

Wir wählen nun Punkte $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k = w_0$ auf dem Graphen von C und geeignete Umgebungen $D_\kappa := U_{r_\kappa}(z_\kappa)$ mit $\kappa \in \{0, \ldots, k\}$, für die die folgenden Bedingungen gelten:

(i) $z_{\kappa-1}, z_\kappa \in D_{\kappa-1} \cap D_\kappa$ für alle $\kappa \in \{1, \ldots, k\}$,

(ii) $\overline{D_\kappa} \subseteq D$ für alle $\kappa \in \{0, \ldots, k\}$.

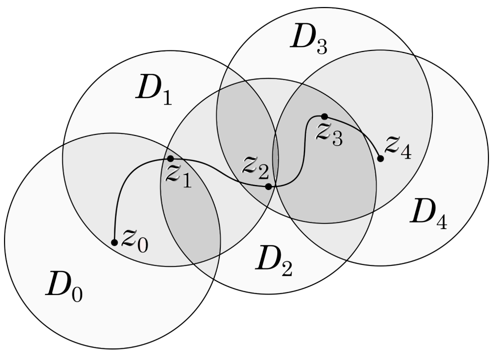


Abbildung 9.2: Nach Konstruktion liegt also jedes z_κ nicht nur in D_κ sondern auch in $D_{\kappa-1}$ und $D_{\kappa+1}$, falls es diese gibt.

Solche Punkte und Umgebungen gibt es,

denn: Der Graph einer Kurve ist als stetiges Bild eines kompakten Intervalls selbst wieder kompakt. Nach dem Lemma von Lebesgue 3.28 gibt es also eine Lebesgue-Zahl $r \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass

[90] Constantin Carathéodory (1873-1950)

für alle Punkte z auf dem Graphen die offenen Umgebungen $U_r(z)$ ganz in D liegen. Im vorliegenden Fall wählen wir dann $r_\kappa := \frac{r}{2}$ für alle $\kappa \in \{0, \ldots, k\}$ um Bedingung (ii) zu erfüllen und setzen k so groß, dass auch Bedingung (i) gilt. #

Für ein beliebiges $f \in \mathscr{F}_1$ gilt $|f(z_0)| \leq 1$. Wir können daher auf die Funktion f und das Gebiet D_0 das Korollar des Satzes von Schottky 9.13 anwenden[91] und erhalten

$$|f(z)| < C(1, r_0) =: C_0 \qquad \text{für alle } z \in D_0.$$

Nach Konstruktion liegt nun z_1 in D_0. Nach dem eben Gezeigten gilt also $|f(z_1)| < C_0$, so dass wir erneut Korollar 9.14 anwenden können, diesmal auf die Funktion f und das Gebiet D_1. So erhalten wir

$$|f(z)| < C(C_0, r_1) =: C_1 \qquad \text{für alle } z \in D_1.$$

Sukzessiv erhalten wir schließlich

$$|f(z)| < C(C_{k-1}, r_k) =: C_k \qquad \text{für alle } z \in D_k.$$

Wegen $w_0 \in D_k$ und der Beliebigkeit von $f \in \mathscr{F}_1$ haben wir die gleichmäßige Beschränktheit von $\mathscr{F}_1$ in einer offenen Umgebung von w_0 gezeigt. Da auch $w_0 \in D$ beliebig gewählt war, folgt die lokal gleichmäßige Beschränktheit und nach der Verallgemeinerung des Satzes von Montel 9.17 auch die Normalität von $\mathscr{F}_1$.

Wir wollen nun die zweite Aussage zeigen, dass nämlich $\mathscr{F}_2$ fast normal ist. Sei dazu $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge in $\mathscr{F}_2$. Dann ist offenbar $(1/f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ eine Folge in $\mathscr{F}_1$. Wegen der Normalität von $\mathscr{F}_1$ gibt es eine Teilfolge von $(1/f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, die kompakt gegen eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Jede der Funktionen $1/f_n$ ist nullstellenfrei, da ja die Funktionen f_n holomorph sind. Nach dem Satz von Hurwitz 6.17 ist also entweder $\tilde{f}$ ebenfalls nullstellenfrei oder konstant Null auf D. Wegen der kompakten Konvergenz von $(1/f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ gibt es eine Teilfolge von $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, die kompakt divergiert – falls $\tilde{f}$ die Nullfunktion ist – oder kompakt gegen $1/\tilde{f} =: f$ konvergiert – falls $\tilde{f}$ nullstellenfrei ist. Es folgt, dass $\mathscr{F}_2$ fast normal ist.

Damit ist der Satz bewiesen, denn jede Folge in $\mathscr{F}$ hat eine Teilfolge in $\mathscr{F}_1$ oder in $\mathscr{F}_2$. □

Satz 9.19 (Großer Satz von Picard). *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität in $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann nimmt f in jeder Umgebung von z_0 in D jeden Wert in $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.*

Beweis. Wir nehmen nun an, es gäbe eine Umgebung $U \subseteq D$ von z_0, in der f mehr als nur einen Wert in $\mathbb{C}$ nicht annähme, und wollen dies zum Widerspruch führen. Ohne Einschränkung dürfen wir dabei annehmen, dabei gälte $z_0 = 0$, und die nicht angenommenen Funktionswerte wären 0 und 1,

denn: Anstelle von $f(z)$ betrachten wir $f(z - z_0)$ für die erste Annahme und, analog zum Beweis des Kleinen Satzes von Picard 9.12, $\frac{f(z)-a}{b-a}$ für die zweite Annahme, wobei hier a, b die von f nicht angenommenen Funktionswerte bezeichnen. #

[91] Hierfür benötigen wir $r_0 < 1$. Da wir r_0 jederzeit kleiner wählen dürfen, ist das aber kein Problem. Dasselbe trifft auf die folgenden Anwendungen von Korollar 9.14 und die Abschätzungen der r_κ mit $\kappa \in \{1, \ldots, k\}$ zu.

Des Weiteren können wir ohne Einschränkung annehmen, U wäre von der Gestalt $U = \dot{U}_r(0)$ mit einem kleinen $r > 0$ und ersetzen sonst U durch eine solche punktierte Kreisscheibe in U. Wir definieren nun eine Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen durch

$$f_n(z) = f(\frac{z}{n}) \quad \text{für alle } z \in U.$$

Die f_n sind wohldefiniert, da mit z auch jedes $\frac{z}{n}$ mit $n \geq 1$ in U liegt, und nach Annahme nähme keine der Funktionen f_n die Werte 0 und 1 an. Es folgte, dass die Folge $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ in der Familie

$$\mathscr{F} := \{f : U \to \mathbb{C} \text{ holomorph } \mid f(z) \neq \{0,1\} \text{ für alle } z \in U\}$$

läge, so dass wir den Satz von Montel-Carathéodory 9.18 anwenden könnten. Nach diesem gäbe es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, die kompakt divergiert oder kompakt gegen eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. In beiden Fällen werden wir im Folgenden einen Widerspruch herleiten.

Im Falle der kompakten Divergenz gälte

$$\lim_{k\to\infty} f(\frac{z}{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z) = \infty \quad \text{für alle } z \in U.$$

Da für alle $z \in U$ die Folge $(\frac{z}{n_k})$ für k gegen unendlich gegen 0 konvergiert, wäre dann $z = 0$ eine Polstelle von f, was unserer Voraussetzung widerspricht, die Singularität dort sei wesentlich.

Im Falle der kompakten Konvergenz setzen wir

$$K := \{z \in U \mid |z| = \frac{r}{2}\} \quad \text{und} \quad C := \max_{z\in K}|g(z)|.$$

Da K kompakt ist, konvergierte $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ auf K gleichmäßig gegen g. Es gäbe also ein $k_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, für das

$$|f_{n_k}(z) - g(z)| \leq C \qquad \text{für alle } k > k_0 \text{ und alle } z \in K$$

gälte. Es folgte

$$|f(\frac{z}{n_k})| = |f_{n_k}(z)| \leq |f_{n_k}(z) - g(z)| + |g(z)| \leq 2C \qquad \text{für alle } k > k_0 \text{ und alle } z \in K.$$

Das ist äquivalent zu

$$|f(z)| \leq 2C \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_{\frac{r}{2n_k}}(0) \text{ mit } k > k_0.$$

Die Funktion f wäre folglich in einer punktierten Umgebung von $z = 0$ beschränkt und hätte dort somit eine hebbare Singularität, was unserer Voraussetzung widerspricht, die Singularität dort sei wesentlich.

Wir haben nun gezeigt, dass f in einer beliebigen Umgebung einer wesentlichen Singularität z_0 jeden bis auf möglicherweise einen Wert aus $\mathbb{C}$ annimmt. Es bleibt noch zu zeigen, dass jeder dieser Werte unendlich oft angenommen wird. Nehmen wir also an, es gäbe einen Wert, der von f in einer Umgebung U von z_0 nur endlich oft angenommen wird und einen weiteren, der dort von f ebenfalls nur endlich oft oder sogar gar nicht angenommen wird. Dann wären die Stellen in U, an denen diese Werte angenommen werden, isoliert, und wir könnten in U eine Umgebung von z_0 bestimmen, in der beide Werte gar nicht angenommen werden, was nicht sein kann. □

Bemerkung 9.20. *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität in $z_0 \in \mathbb{C}$. Der Satz von Casorati-Weierstraß 5.14 besagt, dass für eine beliebige offene Umgebung U von z_0 das Bild $f(U)$ dicht in $\mathbb{C}$ ist. Der Große Satz von Picard 9.19 verschärft diese Aussage dazu, dass $\mathbb{C} \setminus f(U)$ höchstens ein Element enthält. Das Beispiel*

$$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad f(z) = e^{1/z} \quad \textit{und} \quad z_0 = 0$$

zeigt, dass sich diese Aussage nicht verbessern lässt, denn es gilt bekanntlich $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.

Wenden wir den Großen Satz von Picard 9.19 nun auf ganze Funktionen an, so erhalten wir eine Aussage in der Form des Kleinen Satzes von Picard 9.12:

Satz 9.21 (Satz von Picard)**.** *Sei f eine ganze Funktion, die nicht durch ein Polynom gegeben ist. Dann nimmt f mit einer möglichen Ausnahme jeden Wert in $\mathbb{C}$ unendlich oft an.*

Beweis. Wie wir schon in Abschnitt 5.3 eingesehen haben, hat f in $z = \infty$ eine wesentliche Singularität. Nach dem Großen Satz von Picard 9.19 folgt somit, dass f mit einer möglichen Ausnahme jeden Wert in $\mathbb{C}$ unendlich oft annimmt. □