Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

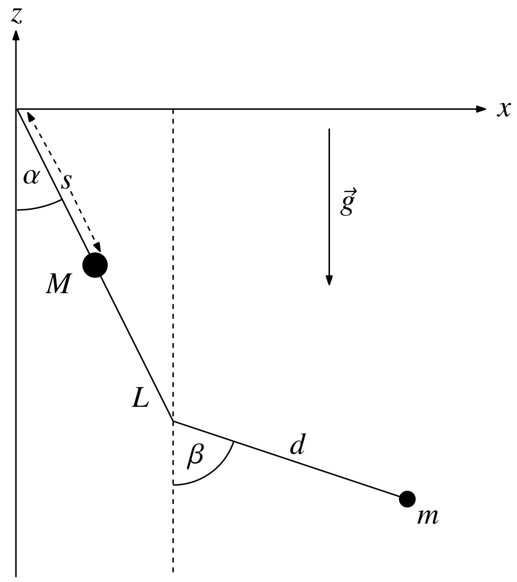
Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 3

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 11. Mai 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. Doppelpendel

An einer Pendelstange der Länge L sei ein zweites Pendel der Masse m und Länge d befestigt. Die Masse M des ersten Pendels sitze in einer festen Entfernung s vom Aufhängepunkt. Die Bewegung des so entstandenen Doppelpendels sei auf die x-z-Ebene beschränkt. Die beiden Massen seien als Punktmassen, die Verbindungsstäbe als masselos angenommen. Das Pendel sei dem als homogen anzunehmenden Gravitationsfeld der Erde mit Gravitationsbeschleunigung $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ ausgesetzt.



a) Stellen Sie die Langrange-Funktion in geeigneten generalisierten Koordinaten auf.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen aus der Langrange-Funktion her.

c) Zeigen Sie, dass es eine Lösung gibt, bei der der zeitliche Verlauf von α und β übereinstimmt. Was bedeutet die Lösung anschaulich?*

Anmerkung: Eine Glocke mit einem Klöppel ist ein System, das einem Doppelpendel entspricht. Die speziellen Lösungen des Aufgabenteils c) sind natürlich höchst unerwünscht, weil die Glocke dann nicht läutet. Bei der Neuinstallation der Glocken am Kölner Dom kam es tatsächlich bei einer der Glocken zu einer solchen Situation. Erst nach Veränderung einiger Parameter gab diese einen Ton von sich.

2. Rutschen vom Tisch

Ein Teil eines mechanischen Systems hänge über die Kante eines Tisches. Die Bewegung verlaufe in der Ebene senkrecht zur Tischkante, Reibungskräfte seien zu vernachlässigen. Das System bestehe aus (i) zwei Massenpunkten der Masse m, die durch einen masselosen Faden der Länge L verbunden sind; (ii) einer homogenen Kette der Masse M und Länge L.

a) Bestimmen Sie für beide Fälle die Lagrange-Funktion.

b) Leiten Sie für beide Fälle die Bewegungsgleichungen aus der Lagrange-Funktion her, und lösen Sie diese unter der Annahme, dass ein Teil des Systems anfangs mit der Länge $\ell_0 < L$ über den Tisch hängt und bei $t = 0$ plötzlich losgelassen wird.

c) Geben Sie für beide Fälle die Energie an, und zeigen Sie explizit, dass diese erhalten ist.

**Hinweis:* Benutzen Sie, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix der beiden Differentialgleichungen für den Winkel α für eine nicht-triviale Lösung verschwindet.

3. *Symmetrischer schwerer Kreisel*

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, lautet die Lagrange-Funktion eines schweren symmetrischen Kreisels mit den Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$, der Masse m und dem Abstand des Schwerpunktes vom Fixpunkt s mit den Euler'schen Winkeln ϑ, φ und ψ

$$\mathcal{L} = \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2 - mgs\cos\vartheta.$$

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen.

b) Bestimmen Sie die drei Erhaltungsgrößen.

4. *Verständnisfragen*

a) Was sind verallgemeinerte Kräfte und in welchem Sinn sind sie verallgemeinert? Haben sie dieselbe Einheit wie die Kraft in der Newton'schen Formulierung der klassischen Mechanik?

b) Diskutieren Sie mit eigenen Worten die Bedeutung der Lagrange-Gleichungen zweiter Art und vergleichen Sie diese mit der Aussage des 2. Newton'schen Axioms.

c) Was ist ein verallgemeinerter Impuls?

Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 3: Lösungen

1. *Doppelpendel*

a) Die Radiusvektoren der Massen M und m sind jeweils durch

$$\vec{r}_M = \begin{pmatrix} s\sin\alpha \\ -s\cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{r}_m = \begin{pmatrix} L\sin\alpha + d\sin\beta \\ -L\cos\alpha - d\cos\beta \end{pmatrix}$$

gegeben, während die Gravitationsbeschleunigung durch

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Zeitableitungen von $\vec{r}_M$ und $\vec{r}_m$ sind jeweils durch

$$\dot{\vec{r}}_M = \begin{pmatrix} s\dot{\alpha}\cos\alpha \\ s\dot{\alpha}\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot{\vec{r}}_m = \begin{pmatrix} L\dot{\alpha}\cos\alpha + d\dot{\beta}\cos\beta \\ L\dot{\alpha}\sin\alpha + d\dot{\beta}\sin\beta \end{pmatrix}$$

gegeben. Somit ergibt sich für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_M^2 + \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_m^2 = \frac{M}{2}s^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m}{2}\Big[L^2\dot{\alpha}^2 + d^2\dot{\beta}^2 + 2Ld\dot{\alpha}\dot{\beta}\underbrace{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}_{=\ \cos(\alpha-\beta)}\Big],$$

während die potentielle Energie durch

$$V = -M\,\vec{r}_M\cdot\vec{g} - m\,\vec{r}_m\cdot\vec{g} = -Msg\cos\alpha - mg\,(L\cos\alpha + d\cos\beta)$$

gegeben ist, wenn die x-Achse als Nullniveau für V gewählt wird. Die Lagrange-Funktion lautet demnach

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{Ms^2 + mL^2}{2}\dot{\alpha}^2 + \frac{md^2}{2}\dot{\beta}^2 + mLd\cos(\alpha-\beta)\,\dot{\alpha}\dot{\beta} + (Ms + mL)\,g\cos\alpha + mgd\cos\beta.$$

b) Die erste Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = 0.$$

Einsetzen von $\mathcal{L}$ und Ausführen der partiellen Ableitungen ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\left(Ms^2 + mL^2\right)\dot{\alpha} + mLd\cos(\alpha-\beta)\,\dot{\beta}\Big] + mLd\sin(\alpha-\beta)\,\dot{\alpha}\dot{\beta} + (Ms + mL)\,g\sin\alpha = 0.$$

Ausführen der totalen Ableitung nach der Zeit ergibt

$$\begin{aligned}&\left(Ms^2 + mL^2\right)\ddot{\alpha} + mLd\Big[\cos(\alpha-\beta)\,\ddot{\beta} - \sin(\alpha-\beta)\left(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\right)\dot{\beta}\Big]\\ &+ mLd\sin(\alpha-\beta)\,\dot{\alpha}\dot{\beta} + (Ms + mL)\,g\sin\alpha = 0.\end{aligned}$$

Die rot markierten Terme heben sich weg, sodass

$$\left(Ms^2 + mL^2\right)\ddot{\alpha} + (Ms + mL)\,g\sin\alpha + mLd\Big[\cos(\alpha-\beta)\,\ddot{\beta} + \sin(\alpha-\beta)\,\dot{\beta}^2\Big] = 0. \qquad \text{(I)}$$

Die zweite Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = 0.$$

Einsetzen von $\mathcal{L}$ und Ausführen der partiellen Ableitungen ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[md^2\dot{\beta} + mLd\cos(\alpha-\beta)\,\dot{\alpha}\right] - mLd\sin(\alpha-\beta)\,\dot{\alpha}\dot{\beta} + mgd\sin\beta = 0.$$

Ausführen der totalen Ableitung nach der Zeit ergibt

$$md^2\ddot{\beta} + mLd\left[\cos(\alpha-\beta)\,\ddot{\alpha} - \sin(\alpha-\beta)\left(\dot{\alpha}-\dot{\beta}\right)\dot{\alpha}\right] - mLd\sin(\alpha-\beta)\,\dot{\alpha}\dot{\beta} + mgd\sin\beta = 0.$$

Die rot markierten Terme heben sich wieder weg, sodass

$$md^2\ddot{\beta} + mgd\sin\beta + mLd\left[\cos(\alpha-\beta)\,\ddot{\alpha} - \sin(\alpha-\beta)\,\dot{\alpha}^2\right] = 0. \qquad \text{(II)}$$

c) Mit $\alpha = \beta$ und $\ddot{\alpha} = \ddot{\beta}$ ergibt sich $\cos(\alpha-\beta) = 1$ und $\sin(\alpha-\beta) = 0$. Somit wird aus beiden Bewegungsgleichungen (I) und (II)

$$\begin{aligned} \left(Ms^2 + mL^2 + mLd\right)\ddot{\alpha} + (Ms + mL)\,g\sin\alpha &= 0, \\ \left(md^2 + mLd\right)\ddot{\alpha} + mgd\sin\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Eine nicht-triviale Lösung gibt es genau dann, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet,

$$\begin{vmatrix} Ms^2 + mL^2 + mLd & (Ms + mL)\,g \\ md^2 + mLd & mgd \end{vmatrix} = 0,$$

sodass

$$\left(Ms^2 + mL^2 + mLd\right)mgd - (Ms + mL)\,g\left(md^2 + mLd\right) = 0.$$

Die roten Terme heben sich wieder weg, sodass

$$Ms^2md - Msmd^2 - MsmLd = Msmd\,[s - (d + L)] = 0.$$

Folglich stimmt der zeitliche Verlauf von α und β überein, wenn $s = d + L$.
Der Befestigungspunkt der Masse M muss also *unterhalb* der Verbindungspunktes der beiden Pendel liegen, und zwar so weit vom Aufhängepunkt des ersten Pendels entfernt wie die Summe aus beiden Pendellängen.

2. *Rutschen vom Tisch*

Durch Umlenkung an der Tischkante sind die Systeme effektiv eindimensional. Im Folgenden ist das Koordinatensystem so orientiert, dass die z-Achse nach oben zeigt und der Nullpunkt auf der Tischkante liegt.

(i) *System aus zwei Massenpunkten:*

a) Die kinetische Energie ist durch

$$T = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = m\dot{z}^2$$

gegeben. Die potentielle Energie ist durch

$$V = mgz$$

gegeben, sodass die Lagrange-Funktion wie folgt lautet,

$$\mathcal{L} = T - V = m\dot{z}^2 - mgz.$$

b) Die Lagrange-Gleichung ergibt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2m\dot{z}) + mg = 2m\ddot{z} + mg,$$

also

$$\ddot{z} = -\frac{1}{2}g. \tag{III}$$

Die allgemeine Lösung für den anfangs hängenden Massepunkt lautet

$$z(t) = -\frac{1}{4}gt^2 + v_0 t + z_0.$$

Mit $v_0 = 0$ und $z_0 = -\ell_0$ ist die Lösung durch

$$z(t) = -\frac{1}{4}gt^2 - \ell_0$$

gegeben.

c) Die Energie ist durch

$$E = T + V = m\dot{z}^2 + mgz$$

gegeben. Die Ableitung nach der Zeit ist durch

$$\dot{E} = 2m\dot{z}\ddot{z} + mg\dot{z} = 2m\dot{z}\left(\ddot{z} + \frac{1}{2}g\right) = 0$$

gegeben, wobei im letzten Schritt die Bewegungsgleichung (III) verwendet wurde.

(ii) *Homogene Kette:*

a) Die kinetische Energie für ein infinitesimales Massenstück dm ist durch

$$\mathrm{d}T = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\,\dot{z}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{d}\ell\,\frac{M}{L}\dot{z}^2$$

gegeben. Integration über ℓ ergibt die gesamte kinetische Energie,

$$T = \int_0^L \mathrm{d}\ell\,\frac{M}{2L}\dot{z}^2 = \frac{1}{2}M\dot{z}^2.$$

Für die potentielle Energie des herabhängenden Teils der Kette gilt entsprechend

$$\mathrm{d}V = -\mathrm{d}m\,g\ell = -\mathrm{d}\ell\,\frac{M}{L}g\ell \qquad \Rightarrow \qquad V = -\frac{Mg}{L}\int_0^{-z}\mathrm{d}\ell\,\ell = -\frac{Mg}{2L}z^2.$$

Somit lautet die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{M}{2}\dot{z}^2 + \frac{Mg}{2L}z^2.$$

b) Die Lagrange-Gleichung ergibt

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M\dot{z}) - \frac{Mg}{L}z = M\ddot{z} - \frac{Mg}{L}z,$$

also

$$\ddot{z} = \frac{g}{L}z. \tag{IV}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$z(t) = A\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right) + B\sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right).$$

Die Ableitung nach der Zeit lautet entsprechend

$$\dot{z}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}}\left[A\sinh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right) + B\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right)\right].$$

Da $v_0 = \dot{z}(t=0) = 0$ sein soll, und $\sinh(0) = 0$ und $\cosh(0) = 1$, muss $B = 0$ sein. Mit $z(t=0) = -\ell_0$ muss also gelten, dass

$$z(t) = -\ell_0\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right).$$

c) Die Energie ist durch

$$E = T + V = \frac{M}{2}\dot{z}^2 - \frac{Mg}{2L}z^2$$

gegeben. Die Ableitung nach der Zeit ist durch

$$\dot{E} = M\dot{z}\ddot{z} - \frac{Mg}{L}z\dot{z} = M\dot{z}\left(\ddot{z} - \frac{g}{L}z\right) = 0$$

gegeben, wobei im letzten Schritt die Bewegungsgleichung (IV) verwendet wurde.

3. *Symmetrischer schwerer Kreisel*

a) Die drei Bewegungsgleichungen für den symmetrischen schweren Kreisel ergeben sich aus der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2 - mgs\cos\vartheta$$

wie folgt. Die erste Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Langrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\varphi} = 0.$$

Dies ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\Theta_1\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + \Theta_3\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)\cos\vartheta\right] = 0.$$

Ausführen der totalen Zeitableitung ergibt

$$\Theta_1\left(\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta\right) + \Theta_3\left(\ddot{\varphi}\cos^2\vartheta - 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta + \ddot{\psi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\right) = 0.$$

Benutzung des Additionstheorems $2\sin x\cos x = \sin(2x)$ und Zusammenfassen von Termen ergibt schließlich

$$\Theta_1\ddot{\varphi}\sin^2\vartheta + (\Theta_1 - \Theta_3)\,\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin(2\vartheta) + \Theta_3\left(\ddot{\varphi}\cos^2\vartheta + \ddot{\psi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\right) = 0. \qquad \text{(V)}$$

Die zweite Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Langrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\vartheta} = 0.$$

Diese führt auf

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Theta_1\dot{\vartheta}\right) - \Theta_1\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + \Theta_3\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)\dot{\varphi}\sin\vartheta - mgs\sin\vartheta = 0.$$

Ausführen der totalen Zeitableitung, Anwendung des obigen Additionstheorems und Zusammenfassen von Termen führt auf

$$\Theta_1\ddot{\vartheta} + \frac{\Theta_3 - \Theta_1}{2}\dot{\varphi}^2\sin(2\vartheta) + \Theta_3\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\vartheta - mgs\sin\vartheta = 0. \tag{VI}$$

Die dritte Bewegungsgleichung ergibt sich schließlich aus der Langrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\psi} = 0.$$

Diese führt auf

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\Theta_3\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)\right] = 0.$$

Ausführen der totalen Zeitableitung führt schließlich auf

$$\ddot{\varphi}\cos\vartheta - \dot{\varphi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta + \ddot{\psi} = 0. \tag{VII}$$

b) Da die Lagrange-Funktion nicht von φ abhängt, ist der zugehörige konjugierte Impuls $p_\varphi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\varphi}$ erhalten, also

$$p_\varphi = \Theta_1\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + \Theta_3\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)\cos\vartheta = \text{const.}$$

Da die Lagrange-Funktion nicht von ψ abhängt, ist der zugehörige konjugierte Impuls $p_\psi = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\psi}$ erhalten, also

$$p_\psi = \Theta_3\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right) = \text{const.}$$

Außerdem ist natürlich noch die Energie erhalten, also

$$E = T + V = \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2 + mgs\cos\vartheta = \text{const.}$$

4. *Verständnisfragen*

a) Verallgemeinerte Kräfte sind Kräfte dargestellt in verallgemeinerten Koordinaten, sodass wieder Arbeit als Kraft mal Weg dargestellt werden kann. Der Weg ist hier jetzt aber in verallgemeinerten Koordinaten gegeben und nicht mehr in kartesischen und hat somit nicht notwendigerweise die Dimension einer Länge. Entsprechend hat auch die verallgemeinerte Kraft nicht notwendigerweise die Einheit Newton, denn das Produkt aus verallgemeinerter Kraft mal Weg in verallgemeinerten Koordinaten muss Joule ergeben.

b) Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art besagen, dass die Zeitableitung des i-ten verallgemeinerten Impulses gleich der partiellen Ableitung der Lagrange-Funktion nach der i-ten verallgemeinerten Koordinate ist. Für kartesische Koordinaten ist letztere genau die negative partielle Ableitung des Potentials nach der i-ten Koordinate, also die i-te Kraftkomponente, sodass daraus direkt das 2. Newton'sche Axiom folgt. Dieses besagt, dass eine Kraft eine zeitliche Änderung des Impulses zur Folge hat. Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art verallgemeinern also das 2. Newton'sche Axiom für verallgemeinerte Koordinaten.

c) Der verallgemeinerte Impuls p_i ist definiert als die partielle Ableitung der Lagrange-Funktion nach $\dot{q}_i$, wobei q_i eine verallgemeinerte Koordinate ist. Im Allgemeinen hat der verallgemeinerte Impuls nicht mehr die Dimension eines Impulses, allerdings hat $p_i q_i$ die Dimension einer Energie.