Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter

Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

4. Übungsblatt

Ausgabe 24.11.2020 – Besprechung 30.11-3.12.2020

- Können Neumann und Dirichlet-Bedingungen unabhängig gestellt werden?
- Welche Rolle spielt die Vollständigkeitsrelation für die Darstellung einer Funktion
- Wenn durch die Helmholtzzerlegung ein Vektorfeld via $\boldsymbol{X} = -\nabla\Psi + \nabla\times\boldsymbol{Q}$ dargestellt werden kann, unter welchen Transformationen von Ψ und $\boldsymbol{Q}$ ist $\boldsymbol{X}$ dann invariant?
- Welchen Vorteil hat die Coulomb Eichung?
- Was besagt die Cauchy-Schwarzungleichung?

1. Aufgabe: Fun with sFericaL hArmoniGS

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int \mathrm{d}\Omega \, Y_{lm}(\theta, \phi) = \begin{cases} \sqrt{4\pi} & \text{für } l = 0 \\ 0 & \text{für } l \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

(b) *Satz von Parseval*
Zeigen Sie, dass die Varianz einer Funktion $a(\theta, \phi)$ im Real- und Fourierraum identisch ist.

(c) *Unsöld Formel*
Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_m |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 = \frac{4\pi}{2l+1} \tag{2}$$

(d) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\sum_l \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\cos\alpha) \to \infty \text{ für } \alpha = 0 \tag{3}$$

(e) Gegeben eine Funktion $a(\theta, \phi) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}$. Zeigen Sie, dass für die durch Spiegelung von a am Äquator erzeugte Funktion a' gilt:

$$a'_{lm} = (-1)^{l+m} a_{lm} \; . \tag{4}$$

2. Aufgabe: Gedämpfte Schwingung

Der Funktionsverlauf für eine gedämpfte Schwingung sei gegeben durch

$$f(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_0 t) \, \theta(t) \; . \tag{5}$$

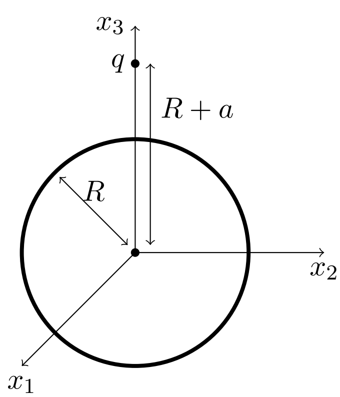
(a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(\omega)$ von f
Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

(b) Bestimmen Sie die komplexe Phase von $\mathcal{F}(\omega)$.

(c) Diskutieren Sie den Verlauf der Amplitude von $\mathcal{F}(\omega)$ für den Grenzfall $\tau \gg 1/\omega_0$.

3. Aufgabe: Die Methode der Spiegelladungen

Stellen Sie sich eine Ladungsverteilung in der Gegenwart einer leitenden Fläche vor. Auf der leitenden Fläche wird Ladung induziert, die a priori unbekannt ist. Das gesamte elektrische Feld wird durch die ursprüngliche Ladungsverteilung, sowie die induzierte Ladung bestimmt. Mathematisch gesehen stellt die leitende Fläche eine Dirichlet-Randbedingung dar, da das Potential auf der leitenden Fläche konstant ist. Die Poisson-Gleichung für das Potential hat aufgrund der Green-Theoreme zu gegebener Dirichlet-Randbedingung eine eindeutige Lösung. Hat man also eine bestimmte Lösung gefunden, ist man fertig; es stellt sich nicht die Frage, ob es eine weitere Lösung gibt. Die Idee der Spiegelladung nutzt diese Eindeutigkeit der Lösung wie folgt aus: Anstatt die auf der leitenden Fläche induzierte Ladung explizit zu berechnen, führt man eine fiktive zusätzliche Spiegelladung im Inneren des Leiters ein. Diese wird so positioniert, dass die ursprüngliche Ladungsverteilung und die Spiegelladung zusammen zu einem Potential führen, welches die gegebenen Dirichlet-Bedingungen auf der Leiteroberfläche erfüllt. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung der Poissongleichung bei vorgegebenen Randbedingungen, stellt dies dann die korrekte Lösung des Problems dar. Die Lösung gilt natürlich nicht jenseits der Randbedingungen, z.B im Inneren des Leiters, wo wir die Spiegelladung platziert haben.



Gegeben sei eine geerdete Metallkugel mit Radius R um den Ursprung. Im Abstand a über dieser Kugel wird eine Punktladung q platziert.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen das Potential sowie das elektrische Feld ausserhalb der Kugel.

b) Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien.

c) Was ändert sich, wenn die Kugel auf Potential ϕ_0 gehalten wird?