Gewöhnliche Differentialgleichungen - Übungsblatt 5

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Christian Düll

Abgabe: 26. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 5.1 4 Punkte

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$. Betrachten Sie für $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$ die homogene lineare Differentialgleichung

$$y'(t) = A(t)y(t). \tag{1}$$

Wir bezeichnen mit $V_0 := \{y : I \to \mathbb{R}^n : y \text{ löst } (1)\}$ den $n-$dimensionalen Vektorraum der Lösungen von (1). Eine Basis von V_0 heißt *Fundamentalsystem* von (1). Ist $\phi_1, \dots \phi_n : I \to \mathbb{R}^n$ ein Fundamentalsystem, dann heißt die Matrix $\Phi : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Phi(t) := (\phi_1(t) \ \dots \ \phi_n(t))$ *Fundamentalmatrix.*

Bestimmen Sie für

$$A : [1, \infty) \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} & 0 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix, indem Sie (1) für zwei lineare unabhängige Anfangsvektoren lösen.

Aufgabe 5.2 4 Punkte

Es seien $A \in C^0(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $b \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$. Für $t_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ betrachte das inhomogone lineare System

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \qquad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Sei $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix für das homogene System $y'(t) = A(t)y(t)$ (vgl. Aufgabe 5.1). Zeigen Sie, dass die eindeutige Lösung des AWP (2) durch

$$y(t) = \Phi(t) \left[(\Phi(t_0))^{-1} y_0 + \int_{t_0}^{t} (\Phi(s))^{-1} b(s) \, \mathrm{d}s \right] \tag{3}$$

gegeben ist.

Aufgabe 5.3 4 Punkte

Lösen Sie mit der Methode aus Aufgabe 5.2 das folgende inhomogene Problem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{t} & \frac{1+t}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \cos(t)(1+t) \\ 1 + \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 1 \\ \begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die folgende Matrix eine Fundamentalmatrix für das homogene System ist

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} 1+t & e^t \\ 1 & e^t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.4 4 Punkte

Untersuchen Sie, ob es sich bei den folgenden Beispielen jeweils um ein dynamisches System ϕ mit Zustandsraum M handelt. Welche der Systeme sind invertierbar?

(a) $M = \mathbb{Z}$ und $\phi_k(x) := f^k(x) = f \circ \cdots \circ f$ ($k-$mal), mit $f^0(x) = x$ und $f(x) = 1 + x$.

(b) $M = \mathbb{R}^n$, $\phi(t, x) := (t + 1)x$ mit $t \in \mathbb{R}$

(c) $M = \mathbb{R}^n$, $\phi(t, x) := e^{-5t}x$ mit $t \in \mathbb{R}$

(d) $M = \mathbb{R}^2$ und

$$\phi_n\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & n = 0 \\ \begin{pmatrix} x_{n-1} + y_{n-1} \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, & \text{sonst} \end{cases}.$$