Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis I

WS 19/20

Blatt 05 22.11.2019

ARSnova-Code: 67 52 65 62

Abgabe bis Fr. 29.11.19, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)

Informationen:

- Am 27.11 findet von 16:15 – 17:45 Uhr eine zusätzliche Vorlesung im INF 252, gHS, statt. Die Zentralübung entfällt an dem Tag.

Themen:

- (Cauchy-)Folgen
- Wurzeln
- Komplexe Zahlen
- Komplexe Gleichungen

Hinweise zur Bearbeitung:

Für Aufgabe 4.4 ist die Darstellung der komplexen Zahlen in der sogenannten *Polarform* von Vorteil. Die Polarform einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist

$$(*) \quad z = \mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z) = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

wobei $r := |z|$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ ein passender Winkel (in Radiant) ist. Sie können die Aufgabe 4.4 komplett in Polarform rechnen und müssen nicht von der Normaldarstellung in die Polarform umrechnen. Die einzigen Ausnahmen sind die folgenden Zahlen, für die wir Ihnen die Polarform vorgeben:

$$i = e^{i\pi/2}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad 1 = e^{i\cdot 0}.$$

Die Umrechnung von Polarform in die Normalform erfolgt durch $(*)$. Zwei wichtige Eigenschaften sind

· $e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i\pi}$ (Periodizität mit 2π)

· $z^p = \left(e^{i\varphi}\right)^p = e^{i\pi\cdot p}$ für alle $p \in \mathbb{R}$.

Auf diese Weise können Sie also auch Wurzeln von komplexen Zahlen berechnen. Für $z \in \mathbb{C}$ gibt es für $n \in \mathbb{N}$ auch n komplexe Zahlen z_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, die $z_k^n = z$ erfüllen. Diese n-ten Wurzeln von $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ lassen sich berechnen durch

$$z_k = re^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}, \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Zum Beispiel können Sie somit die Gleichung $z^2 = -i$ wie folgt (mit verkürzter Begründung)[1] lösen: Wir schreiben $z := e^{i\varphi}$ und es ist $-i = e^{i\cdot(3/2)\pi}$. Es gilt also φ_0 und φ_1 zu finden, sodass $e^{2\cdot i\varphi_0} = e^{2\cdot i\varphi_1} = -i$. Es ist für $k = 0$ nach obiger Formel $\varphi_0 = (3/4)\pi$ gefunden. Für φ_1 müssen wir die Periodizität beachten. Wir finden für $k = 1$ nach obiger Formel $\varphi_1 = (3/4)\pi + \pi$. Dann ist $e^{2\cdot i\varphi_2} = e^{i((3/2)\pi+2\pi)} = e^{i\cdot 3/2\pi} = -i$.

[1] Bitte begründen Sie Ihre Lösungen ausführlicher!

Aufgabe 5.1 (5 Punkte): Quotientenkriterium für Folgen

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ existiert, sodass für alle $n \in N,\ n \geq 2$ gilt

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und daher aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergent ist. Sie dürfen dabei ohne Beweis nutzen, dass $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. 4

Tipp: Nutzen Sie an geeigneter Stelle eine Teleskopsumme und die geometrische Summenformel.

(b) Genügt es zu fordern, dass für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

$$|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$$

gilt, um auf Konvergenz zu schließen? Beweisen Sie Ihre Antwort. 1

Aufgabe 5.2 (4 Punkte): Heron-Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel

Motivation: Sei $A > 0$ und $0 < b < a$, sodass $ab = A$, d. h., a und b sind die Seiten eines Rechtecks mit Flächeninhalt A. Zur Bestimmung von $\sqrt{A}$ kann man nun wie folgt vorgehen: Verkürze a ein wenig und verlängere dabei gleichzeitig b in solchem Maße, dass der Flächeninhalt A erhalten bleibt. Das arithmetische Mittel $(a + b)/2$ erfüllt offenbar $b < (a + b)/2 < a$ und führt auf den Ansatz $(a_0 = a,\ b_0 = b)$

$$a_1 := \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad b_1 := \frac{A}{a_1} = \frac{2a_0b_0}{a_0 + b_0}.$$

Da im Allgemeinen $a_1 \neq b_1$, ist $\sqrt{A}$ noch nicht gefunden. Fährt man in der beschriebenen Weise fort, erhält man die rekursiv definierten Folgen

$$a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \frac{A}{a_{n+1}} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, \quad n \geq 0.$$

Einsetzen von $b_n = A/a_n$ liefert die rekursive Konstruktionsvorschrift

$$(*) \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right), \quad n \geq 0.$$

Die beschriebene Methode zur näherungsweisen Berechnung einer Quadratwurzel ist auch als babylonisches Wurzelziehen oder Heron-Verfahren bekannt.
Dieselbe Konstruktionsvorschrift erhält man zudem, wenn man das sogenannte Newton-Verfahren[2], das zur Bestimmung von Nullstellen genutzt werden kann und dessen mehrdimensionale Verallgemeinerung von enormer Bedeutung in der Nichtlinearen Optimierung ist, auf das Nullstellenproblem

$$0 \overset{!}{=} f(x) := A - x^2$$

anwendet. Die Iterationsvorschrift vom Newton-Verfahren lautet

$$a_{n+1} := a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

[2] `https://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Verfahren`

In diesem Fall also

$$a_{n+1} = a_n - \frac{A - a_n^2}{-2a_n} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right).$$

Zeigen Sie:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $(*)$ ist nach unten beschränkt. Sie dürfen dabei verwenden, dass 1

$$x \leq y \iff x^2 \leq y^2 \text{ für } x, y \geq 0.$$

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $(*)$ ist monoton fallend, d. h. $a_{n+1} - a_n \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. 1

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $(*)$ erfüllt $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{A}$. Sie brauchen dabei nicht zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Dies folgt aus einem Satz, den wir in den kommenden Wochen kennenlernen werden. Sie sollen also nur zeigen, dass der Grenzwert $\sqrt{A}$ ist. 2

Tipp: Bedenken Sie dabei, dass für eine konvergente Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} c_{n+1} = \lim_{n\to\infty} c_n$$

und nutzen Sie Lemma 2.5.

Aufgabe 5.3 (7 Punkte): Rechenregeln für komplexe Zahlen

Zeigen Sie für $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$:

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, 1

(b) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\operatorname{Im}(z) = -\frac{i}{2}(z - \overline{z})$, 1

(c) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$, 1

(d) $|\overline{z}| = |z|$ und $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, 1

(e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, 1

(f) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ und $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$. 2

Aufgabe 5.4 (4 Punkte): Komplexe Gleichungen

Man bestimme alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der jeweiligen folgenden Gleichungen. Beachten Sie dabei die Hinweise zur Bearbeitung. Geben Sie die Lösungen in Polarform an.

(a) $z^2 = i$, 1

(b) $z^4 = -1$, 1

(c) $z^8 = 1$, 1

(d) $z^2 - 2z = i - 1$. 1