Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 9

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 29. Januar

Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Darauf operiert die Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ durch Möbius-Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \langle \tau \rangle = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} .$$

Seien j und $\lambda(\tau) = (e_3(\tau) - e_2(\tau))/(e_1(\tau) - e_2(\tau))$ die Modulfunktionen aus der Vorlesung. Sie können bei jeder Aufgabe die Ergebnisse der vorherigen nutzen, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben. Die besten vier Aufgaben werden gewertet.

40. Aufgabe: (2+2 = 4 Punkte) Sei $(X, \mathfrak{U}_X)$ ein topologischer Raum und $(x_n)_n$ eine Folge in X. Man sagt "Die Folge $(x_n)_n$ konvergiert gegen ein $x \in X$", falls für jede offene Teilmenge $U \in \mathfrak{U}_X$ mit der Eigenschaft $x \in U$ gilt, dass alle bis auf endlich viele Folgenglieder x_n in U liegen. Ein solches x heißt Grenzwert der Folge $(x_n)_n$. Zeigen Sie:

(a) Wenn $(X, \mathfrak{U}_X)$ separiert ist, dann hat eine Folge höchstens einen Grenzwert.

(b) Konstruieren Sie einen topologischen Raum und eine Folge darin, die mehrere verschiedene Grenzwerte hat.

Lösung:

(a) Angenommen, eine Folge in einem separierten Raum $(X, \mathfrak{U}_X)$ hätte zwei verschiedene Grenzwerte $x \neq x'$. Aufgrund der Separiertheit existieren Umgebungen $U, U' \in \mathfrak{U}_X$ mit $x \in U, x' \in U'$ und $U \cap U' = \emptyset$. Dann liegen alle bis auf endlich viele Folgenglieder in U. Insbesondere liegen höchstens endlich viele Folgenglieder in U'. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass x' ein Grenzwert der Folge ist.

(b) Wir betrachten die Menge $\mathrm{R} \cup \{0'\}$ und statten sie aus mit der Standardtopologie, wobei jede Umgebung der 0 auch $0'$ enthalten soll. Dann besitzt die Folge $(1/n)_{n \in \mathfrak{N}}$ die beiden Grenzwerte 0 und $0'$. Sowohl jede Umgebung von 0 als auch jede Umgebung von $0'$ enthält nämlich alle bis auf endlich viele Folgenglieder.

Alternativer Beweis: Sei X eine beliebige Menge mit mehr als einem Element. Wir erklären darauf die indiskrete Topologie $\mathfrak{U}_X = \{\emptyset, X\}$, bei der die einzigen offenen Mengen genau die leere Menge und X selbst sind. Sei $(x_n)_n$ eine beliebige Folge in X, dann prüft man leicht nach, dass diese Folge gegen jedes beliebige $x \in X$ konvergiert. Für die leere Menge $U = \emptyset$ ist nichts zu zeigen, für die andere offene Menge $U = X$ ist die geforderte Bedingung nach Konstruktion erfüllt.

41. Aufgabe: (4 Punkte) Sei X eine Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, die stetig auf X operiert. Zeigen sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Operation ist frei im Sinne der Vorlesung.

(b) Es gelten folgende zwei Eigenschaften:

(1) $gx \neq x$ für alle $x \in X$ und alle $g \in G$ ungleich dem neutralen Element von G.
(2) Für je zwei kompakte Teilmengen K_1 und K_2 von X gibt es nur endlich viele $g \in G$ sodass $g(K_1) \cap K_2$ nichtleer ist.

Diese Aufgabe ist definitiv nicht klausurrelevant. Lösung später.

42. Aufgabe: (1+1+2 = 4 Punkte) Die Funktion $e(x) = \exp(2\pi i x)$ definiert eine Abbildung $e : \mathbb{R} \to S^1$ wobei $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ der Einheitskreis ist. Zeigen Sie:

(a) e ist eine Überlagerung.

(b) Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ operieren durch Translation frei auf $\mathbb{R}$.

(c) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}$ als Mannigfaltigkeit isomorph ist zu S^1.

Lösung:

(a) e ist bekanntlich surjektiver Gruppenhomomorphismus. Für $x \in S^1$ ist $U = S^1 \setminus \{-x\}$ eine e-gute Umgebung.

(b) Die Operation von $\mathbb{Z}$ durch Translation ist offenbar fixpunktfrei. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ wähle das offene Intervall $U = (x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2})$. Dann ist $U \cap n + U$ entweder leer oder es gilt $n = 0$. Das zeigt die erste Eigenschaft einer freien Operation. Wähle nun $x, y \in \mathbb{R}$, die nicht äquivlanet unter der Gruppenoperation sind, das heißt $x - y \notin \mathbb{Z}$. Setze $\delta := \min\{x - y + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, dann ist $\delta > 0$. Die offenen Umgebungen sind $U_x = (x - \delta/2, x + \delta/2)$ und $U_y = (y - \delta/2, y + \delta/2)$ haben nach Konstruktion die Eigenschaft, dass $U_x \cap (U_y + m) = \emptyset$ für alle $m \in \mathbb{Z}$. Damit ist insbesondere der Quotient $X = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}$ eine Mannigfaltigkeit.

(c) Die Abbildung $e : \mathbb{R} \to S^1$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\mathbb{Z}$. Nach dem Homomorphiesatz faktorisiert e über eine Bijektion $e' : \mathbb{Z} \setminus \mathbb{R} \to S^1$. Beachte, dass e eine offene Abbildung ist, also schicken e und die Urbildoperation e^{-1} jeweils offene Mengen auf offene Mengen. Damit sind e' und $(e')^{-1}$ stetig nach Definition der Quotiententopologie. [Die offenen Teilmengen von X sind genau die von der Form $V + \mathbb{Z}$ für ein offenes $V \subseteq \mathbb{R}$.] Es bleibt zu zeigen, dass e' und $(e')^{-1}$ glatt sind. [Ein expliziter Beweis verwendet geeignete Karten von S^1 und X und rechnet das dann nach. Man verwendet den Umkehrsatz aus Analyis 2.]

43. Aufgabe: (1+1+1+1=4 Punkte) Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung topologischer Räume. Zeigen Sie vier der folgenden Aussagen:

(a) Ist $q : Y \to Z$ eine Überlagerung, dann ist auch $q \circ p : X \to Z$ eine Überlagerung.

(b) Ist U offen in X, dann ist auch $p(U)$ offen in Y.

(c) Wenn Y eine Mannigfaltigkeit ist und $Z \subseteq X$ eine Zusammenhangskomponente von X, dann ist $p|_Z : Z \to Y$ eine Überlagerung.

(d) Ist Y zusammenhängend, dann ist die Kardinalität $\#p^{-1}(y)$ für alle $y \in Y$ gleich.

(e) Sei $Z \subseteq Y$ eine offene Teilmenge, dann ist $p : p^{-1}(Z) \to Z$ wieder eine Überlagerung.

(f) Wenn Y separiert ist, dann ist auch X separiert.

Lösung:

(a) **Leider gab es einen Fehler in der Aufgabenstellung. Man braucht, dass q eine endliche Überlagerung ist.**

Zusammensetzungen surjektiver Abbildungen sind surjektiv, daher ist $q \circ p$ surjektiv. Sei $z \in Z$ beliebig. Weil q eine Überlagerung ist, gibt es eine Umgebung $W \subseteq Z$ sodass $q^{-1}(W) = \bigcup_i V_i$ eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen V_i von Y ist derart dass $q : V_i \to W$ bistetig ist. Für jedes i gibt es also genau ein $y_i \in V_i$ mit $q(y_i) = z$. Da p eine Überlagerung ist, gibt es eine Umgebung $y_i \in V_i' \subseteq V_i$ von y_i sodass $p^{-1}(V_i) = \bigcup_j U_j$ eine disjunkte Vereinigung von offenen U_j in X ist.

Wenn q eine endliche Überlagerung ist, bilden wir den Schnitt $W' = \bigcap_i q(V_i')$ und setzen $U_j' := U_j \cap (q \circ p)^{-1}(W')$. Dann ist das Urbild von W' unter $q \circ p$ eine disjunkte Vereinigung von offenen U_j' die von $q \circ p$ bistetig nach W' abgebildet werden.

Wenn q nicht endlich ist, dann muss W' nicht notwendig offen sein. Die Aussage ist dann im Allgemeinen falsch. **Beispiel**: Sei $u : \mathbb{R} \to S^1$ die universelle Überlagerung des Einheitskreises. Sei $Z = \prod_{k=1}^{\infty} S^1$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n = \mathbb{R}^n \times \prod_{k=n+1}^{\infty} S^1$ mit der Überlagerungsabbildung

$$q_n = u \times \cdots \times u \times \mathrm{id} \times \dots\ .$$

Sei jetzt $X = \bigcup_n X_n$ die disjunkte Vereinigung, dann verheften die Überlagerungen q_n zu einer Überlagerung $q : X \to Y = \mathbb{N} \times Z, x \mapsto n, q_n(x)$ für n sodass $x \in X_n$. Sei jetzt $p : Y \to Z$ $(n, z) \mapsto z$ die offensichtliche Projektion, dann sind p und q Überlagerungen, aber $q \circ p$ ist keine Überlagerung. Der Grund ist subtil und beruht auf der Definition der Produkttopologie für unendliche Produkte. Jede offene Teilmenge von Z ist von der Form $U \times \prod_{k=n+1}^{\infty} S^1$ für eine offene Teilmenge $U \subseteq (S^1)^n$.

(b) Sei $y \in p[U] \subseteq Y$, dann existiert ein $V^y \subseteq Y$ offen mit $y \in V^y$ und $p^{-1}[V^y] = \bigsqcup_{i \in I} V_i^y$ und $V_i^y \subseteq X$ offen mit $p|_{V_i^y} : V_i^y \to V^y$ ist bistetig. Es existiert ein $j_y \in I$ mit $y \in p[V_{j_y}^y]$. $V_{j_y}^y \cap U$ ist offen, da bistetige Abbildungen offene Abbildungen sind folgt, dass $p[V_{i_y}^y \cap U]$ offen ist.
Da $y \in p[U]$ beliebig war, ist $p[U]$ offen als Vereinigung offener Mengen:

$$p[U] = \bigcup_{y \in p[U]} p[V_{j_y}^y \cap U].$$

(c) **Die Aussage ist natürlich falsch. Sei $X = Y = \{0, 1\}$ und $Z = \{0\}$ und $p = \mathrm{id}$, dann ist $p|_Z$ nicht surjektiv.**

(d) Für $y \in Y$ sei $M_y := \{\tilde{y} \in Y \mid \#p^{-1}[\{\tilde{y}\}] = \#p^{-1}[\{y\}]\}$.
Da p Überlagerung, existiert für $\tilde{y}$ ein $U_y \subseteq Y$ sodass $y \in U_y$ und U_y offen und $p^{-1}[U_y] = \bigsqcup_{i \in I} U_j$ und $p|_{U_J} : U_j \to U_y$ bistetig, woraus sofort folgt $\#I = \#p^{-1}[\{y\}]$. Insbesondere folgt für alle $\tilde{y} \in U_y$ bereits $p^{-1}[\{\tilde{y}\}] = \#I = p^{-1}[\{y\}]$, also $U_y \subseteq M_y$.

Sei $z \in Y$. Dann ist $z \in M_z \neq \emptyset$ offen und abgeschlossen, denn: Sei $y \in M_z$, dann ist $U_y \subseteq M_y = M_z$, es folgt M_z ist offen als Vereinigung offener Mengen wie folgt:

$$M_z = \bigcup_{y \in M_z} U_y.$$

Sei $y \in M_z^c$. Also $p^{-1}[\{y\}] \neq p^{-1}[\{z\}]$, insbesondere $M_y \cap M_z = \emptyset$. Es gilt $U_y \subseteq M_y$, also $U_y \subseteq M_z^c$, folglich ist M_z^c offen als Vereinigung offener Mengen wie folgt:

$$M_z^c = \bigcup_{y \in M_z^c} U_y.$$

Da M_z offen, abgeschlossen und nicht leer, sowie Y zusammenhängend, folgt $M_z = Y$, woraus die Behauptung folgt.

(e) Wir rechnen die Überlagerungseigenschaft für $z \in Z$ nach:
Sei $z \in Z \subseteq Y$, dann existiert ($p\colon X \to Y$ ist Überlagerung) ein $U \subseteq Y$ offen mit $z \in U$ und $p^{-1}[U] = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ und $p|_{U_i}\colon U_i \to U$ bistetig.
$U \cap Z \subseteq Z$ ist offen mit $z \in U \cap Z$. $p^{-1}[Z]$ ist offen, da p stetig ist. Also $p^{-1}[Z] \cap U_i$ offen. Es gilt:

$$p^{-1}[Z \cap U] = p^{-1}[Z] \cap p^{-1}[U] = p^{-1}[Z] \cap \bigsqcup_{i \in I} U_i = \bigsqcup_{i \in I} (p^{-1}[Z] \cap U_i).$$

(Einschränkung eine bijketiven Funktion auf eine Menge sowie des Bilds der Menge liefert bijektive Abbildung, Stetigkeit bleibt unter Einschränkung auf offene Menge erhalten, insbesondere Stetigkeit der Umkehrabbildung) Insbesondere erhalten wir eine bistetige Abbildung:

$$p|_{U_i}\big|_{p^{-1}[Z] \cap U_i} = p|_{p^{-1}[Z] \cap U_i}\colon p^{-1}(Z) \cap U_i \to Z \cap U.$$

(f) Seien $x, z \in X$ mit $x \neq z$. Fallunterscheidung:
$p(x) \neq p(z)$, da Y separiert ist, existieren $V_x, V_z \subseteq Y$ offen sodass $p(x) \in V_x$ und $p(z) \in V_z$ mit $V_x \cap V_z = \emptyset$. Da p stetig ist, sind $p^{-1}[V_x]$ und $p^{-1}[V_z]$ offen. Insbesondere gilt $p^{-1}[V_x] \cap p^{-1}[V_z] = \emptyset$ und $x \in p^{-1}[V_x]$ und $z \in p^{-1}[V_z]$.
$p(x) = p(z) =: y \in Y$, da p eine Überlagerung ist existiert ein $U \subseteq Y$ offen mit $y \in U$ mit $p^{-1}[U] = \bigsqcup_{i \in I} U_i$ und $p|_{U_i}\colon U_i \to U$ bistetig. Da $p(x) = p(z) \in U$ sind $x, z \in p^{-1}(U)$. Also existieren $i, j \in I$ mit $x \in U_i$ und $z \in U_j$. Da $p|U_i\colon U$ bijektiv ist und $p(z) = p(y)$ folgt $i \neq j$ und somit $U_i \cap U_j = \emptyset$.

44. Aufgabe: (2+2 = 4 Punkte) Die Diskriminantenfunktion Δ ist eine Modulform zur vollen Modulgruppe Γ und besitzt daher eine Fourierentwicklung

$$\Delta(\tau) = (60 G_4(\tau))^3 - 27(140 G_6(\tau))^2 = (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \qquad , \qquad q = \exp(2\pi i \tau) \ .$$

Zeigen Sie explizit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Hinweis: Verwenden Sie zum Beispiel Aufgabe 36.

Lösung: Aufgabe 36 liefert

$$G_4(\tau) = 2\zeta(4) + \frac{16\pi^4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n \qquad G_6(\tau) = 2\zeta(6) - \frac{16\pi^6}{15} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n.$$

Es ist $\sigma_3(1) = \sigma_5(1) = 1$. Absolute Konvergenz der Reihen sowie Cauchy-Faltung liefert:

$$G_4(\tau)^2 = 4\zeta(4)^2 + 4\zeta(4)\frac{16\pi^4}{3} q + \mathcal{O}(q^2)$$

$$G_4(\tau)^3 = 8\zeta(4)^3 + 8\zeta(4)^2 \frac{16\pi^4}{3} q + 4\zeta(4)^2 \frac{16\pi^4}{3} q + \mathcal{O}(q^2) = 8\zeta(4)^3 + 12\zeta(4)^2 \frac{16\pi^4}{3} q + \mathcal{O}(q^2)$$

$$G_6(\tau)^2 = 4\zeta(6)^2 - 4\zeta(6)\frac{16\pi^6}{15} q + \mathcal{O}(q^2)$$

Wir verwenden die speziellen Werte $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ und $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$ und rechnen somit aus:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 60^3 \cdot 8 \cdot \zeta(4)^3 - 27 \cdot 140^2 \cdot 4\zeta(6)^2 \\
&= \pi^{12} \left(8 \cdot \frac{60^3}{90^3} - 27 \cdot \frac{140^2}{945^2} \right) = \pi^{12} \cdot 0 = 0. \\
(2\pi)^{12} a_1 &= 60^3 \cdot 12\zeta(4)^2 \frac{16\pi^4}{3} + 27 \cdot 140^2 \cdot 4\zeta(6) \frac{16\pi^6}{15} \\
&= \pi^{12} \cdot \left(60^3 \cdot 12 \cdot \frac{16}{3 \cdot 90^2} + 27 \cdot 140^2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{15 \cdot 945} \right) = 4096\pi^{12} = (2\pi)^{12}.
\end{aligned}$$