Aufgabe 1

(a) Z.Z.: $(i)-(iii)$: U ist Untergruppe von $(V,+,0_v)$. (iv): $f \in U \implies a \cdot f \in U$.

(i) $0_v(m) = 0 \forall m \in M \implies 0_v(m_0) = 0 \implies 0_v \in U$

(ii) Seien $f, f' \in U$. Dann ist $\forall m \in M$

$$(f+f')(m_0) = f(m_0) + f'(m_0) = 0_K + 0_K = 0_K$$

Daher ist $f + f' \in U$.

(iii) Sei $f \in U$. Dann $\exists f^- : M \to K, m \mapsto -f(m)$. Es gilt $\forall m \in M : (f^- + f)(m) = f^-(m) + f(m) = -f(m) + f(m) = 0_K$ und daher $f^- + f = 0_v$. Insbesondere ist auch $f^-(m_0) = -f(m_0) = 0_K$ und folglich $f^- \in U$.

(iv) Sei $f \in U$ und $a \in K$. Dann ist $a \cdot f(m_0) = a \cdot 0_K = 0_K \implies a \cdot f \in U$.

Z.Z.: $(i)-(iii)$: W ist Untergruppe von $(V,+,0_v)$. (iv): $f \in W \implies a \cdot f \in W$.

(i) Seien $x, y \in M$. Dann folgt aus $0_v(m) = 0 \forall m \in M$ sofort $0_v(x) = 0_K = 0_v(y) \implies 0_v \in U$.

(ii) Seien $f, f' \in W$. Dann ist $\forall x, y \in M$

$$(f+f')(x) = f(x) + f'(x) = f(y) + f'(y) = (f+f')(y)$$

Daher ist $f + f' \in W$.

(iii) Sei $f \in W$. Dann $\exists f^- : M \to K, m \mapsto -f(m)$. Es gilt $\forall m \in M : (f^- + f)(m) = f^-(m) + f(m) = -f(m) + f(m) = 0_K$ und daher $f^- + f = 0_v$. Ferner gilt $\forall x, y \in M$: $f^-(x) = -f(x) = -f(y) = f^-(y) \implies f^- \in U$.

(iv) Sei $f \in W$ und $a \in K$. Dann ist $\forall x, y \in M$: $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x) = a \cdot f(y) = (a \cdot f)(y) \implies a \cdot f \in W$.

(b) $v_0(m_0) = 0 \implies v_0 \in U$. Zudem ist $\forall x, y \in M : v_0(x) = 0 = v_0(y) \implies v_0 \in W$. Folglich ist $v_0 \in U \cap W$.
Sei nun $f \in U$ und $f \in W$. Dann ist $f(m_0) = 0_K$, da $f \in U$. Aus $f \in W$ folgt außerdem: $\forall m \in M : f(m) = f(m_0) = 0_K$. Daher ist $f = 0_V$.

(c) i) Z.Z.: $V \subset U + W \iff \forall v \in V : \exists u \in U$ und $w \in W$ mit $v = u + w$.

$\forall m \in M : w(m) \coloneqq v(m_0)$. ($w$ ist offensichtlich in W)

Sei ferner

$$u \coloneqq v - w$$

Aus $(v-w)(m_0) = v(m_0) - w(m_0) \overset{\text{Definition von } w}{=} v(m_0) - v(m_0) = 0_K$ folgt $u = v - w \in U$.
Insgesamt ist also $\forall v \in V :\ v = v - w + w = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.

ii) Z.Z.: $U + W \subset V \iff \forall u \in U : \forall w \in W : u + w \in V$.
$\forall u \in U :$

$$u : M \to K$$

$\forall w \in W :$

$$w : M \to K$$

$\implies$

$$w + u : M \to K$$

$\implies$

$$w + u \in V$$

Aufgabe 2

(a) ψ: Seien $f, g \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned}\psi(f+g) &= (f(0)+g(0), f(1)+g(1), \dots, f(n+1)+g(n+1)) \\ &= (f(0), f(1), \dots, f(n+1)) + (g(0), g(1), \dots g(n+1)) \\ &= \psi(f) + \psi(g)\end{aligned}$$

Sei ferner $a \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned}\psi(a \cdot f) &= (a \cdot f(0), a \cdot f(1), \dots, a \cdot f(n+1)) \\ &= a \cdot (f(0), f(1), \dots, f(n+1)) \\ &= a \cdot \psi(f)\end{aligned}$$

∂: Seien $f, g \in V$. Dann ist

$$\begin{aligned}\partial(f+g) &= (i \mapsto (i+1) \cdot (f+g)(i+1)) \\ &= (i \mapsto (i+1) \cdot (f(i+1) + g(i+1)) \\ &= (i \mapsto (i+1) \cdot f(i+1) + (i+1) \cdot g(i+1)) \\ &= (i \mapsto (i+1) \cdot f(i+1)) + (i \mapsto (i+1) \cdot g(i+1)) \\ &= \partial(f) + \partial(g)\end{aligned}$$

Sei ferner $a \in K$. Dann ist

$$\begin{aligned}\partial(a \cdot f) &= (i \mapsto (i+1) \cdot (a \cdot f)(i+1)) \\ &= (i \mapsto a \cdot (i+1) \cdot f(i+1)) \\ &= a \cdot (i \mapsto a \cdot (i+1) \cdot f(i+1)) \\ &= a \cdot \partial(f)\end{aligned}$$

(b) ψ entspricht der natürlichen Bijektion Φ aus Lemma 0.44. Da ψ zudem linear ist, muss ψ ein Isomorphismus sein.

(c) Z.Z.: Genau dann, wenn $\operatorname{char} K \notin \{2, \ldots, n+1\}$ ist, gilt $\forall u \in U : \ \exists f \in V$ mit

$$
\begin{aligned}
&\partial(f) = u \\
\iff &\forall i \in \{0,1,\ldots,n\} : (i+1)\cdot f(i+1) = u(i) \\
\iff &\forall i \in \{0,1,\ldots,n\} : \underbrace{f(i+1) + f(i+1) + \cdots + f(i+1)}_{i+1 \text{ mal}} = u(i) \\
\iff &\forall i \in \{0,1,\ldots,n\} : \underbrace{f(i+1)\cdot 1_K + f(i+1)\cdot 1_K + \cdots + f(i+1)\cdot 1_K}_{i+1 \text{ mal}} = u(i) \\
\iff &\forall i \in \{0,1,\ldots,n\} : (i+1)\cdot 1_K \cdot f(i+1) = u(i) \\
\iff &\forall i \in \{0,1,\ldots,n\} : f(i+1) = \frac{u(i)}{(i+1)\cdot 1_K}
\end{aligned}
$$

Fallunterscheidung:

1. Ist nun $\operatorname{char} K \notin \{2, \ldots, n+1\}$, dann ist $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\} : \ (i+1)\cdot 1_K \neq 0$. Daher ist $f(i+1) = \frac{u(i)}{(i+1)\cdot 1_k}$ für alle $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ wohldefiniert. Daher gilt:
   Wenn $\operatorname{char} K \notin \{2, \ldots, n+1\}$ ist, gilt $\forall u \in U : \ \exists f \in V$ mit $\partial(f) = u$.
2. Ist nun stattdessen $\operatorname{char} K \in \{2, \ldots, n+1\}$, dann ist also $\operatorname{char} K \cdot 1_K = 0$. Wir betrachten ein u mit $u((\operatorname{char} K) - 1)k \neq 0_K$. Angenommen, u läge im Bild von ∂. Dann wäre nämlich $u((\operatorname{char} K) - 1) = ((\operatorname{char} K) - 1 + 1)\cdot 1_K \cdot f((\operatorname{char} K) - 1 + 1) = \operatorname{char} K \cdot 1_K \cdot f(\operatorname{char} K) = 0_K$. Dies ist ein Widerspruch und damit kann ∂ unter dieser Voraussetzung nicht surjektiv sein.

(d)

$$
\begin{aligned}
&\psi(\mathrm{Kern}(\partial)) \\
=&\psi(\{f \in V | \partial(f) = 0_U\}) \\
=&\psi(\{f \in V | (i \mapsto (i+1)\cdot f(i+1)) = 0_U\})
\end{aligned}
$$

Definition der Nullabbildung

$$
\begin{aligned}
=&\psi(\{f \in V | (i+1)\cdot f(i+1) = 0_K\}) \\
=&\psi(\{f \in V | (i+1)\cdot 1_K \cdot f(i+1) = 0_K\})
\end{aligned}
$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $f(i+1) = 0$ für alle $(i+1) \neq 0$

$$
\begin{aligned}
=&\psi(\{f \in V | f(i+1) = 0_K \ \forall (i+1) \neq 0\}) \\
=&\psi(\{f \in V | f(i+1) = 0_K \ \forall (i+1) \neq \operatorname{char} K\})
\end{aligned}
$$

Wir können also $f(0)$ beliebig wählen. Abgesehen von $f(0)$ kann höchstens ein Funktionswert ungleich 0 sein, nämlich der an $\operatorname{char} K$-ter Stelle (wenn $\operatorname{char} K \neq 0$). Fall 1: $\operatorname{char} K = 0$:

$$\psi(\mathrm{Kern}(\partial)) = (f(0), 0_K, \ldots, 0_K) = K \times \{0_K\}^{n+1}$$

Fall 2: $\operatorname{char} K \neq 0$:

$$\psi(\mathrm{Kern}(\partial)) = (f(0), 0_K, \ldots, 0_K, f(\operatorname{char} K), 0_K, \ldots, 0_K) = K \times \{0_K\}^{\operatorname{char} K - 1} \times K \times \{0_K\}^{n+1-\operatorname{char} K}$$

Aufgabe 3

1. Seien $\varphi, \varphi' \in V^*$. Dann ist

$$f^*(\varphi + \varphi') = (\varphi + \varphi') \circ f = \varphi \circ f + \varphi' \circ f = f^*(\varphi) + f^*(\varphi')$$

Sei ferner $a \in K$. Dann ist

$$f^*(a \cdot \varphi) = (a \cdot \varphi) \circ f = a \cdot (\varphi \circ f) = a \cdot f^*(\varphi)$$

2. Seien $u, u' \in U$. Dann ist

$$\mathrm{ev}(u + u') = (f \mapsto f(u + u'))$$

Da $f \in U^*$ ist f linear. Somit ist

$$(f \mapsto f(u + u')) = (f \mapsto f(u) + f(u')) = (f \mapsto f(u)) + (f \mapsto f(u')) = \mathrm{ev}(u) + \mathrm{ev}(u')$$

Sei ferner $a \in K$. Dann ist

$$\mathrm{ev}(a \cdot u) = (f \mapsto f(a \cdot u)) \overset{f \text{ linear}}{=} (f \mapsto a \cdot f(u)) = a \cdot (f \mapsto f(u)) = a \cdot \mathrm{ev}(u)$$

Aufgabe 4

(a) Seien $f, f' \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ und $\varphi \in V^*$. Dann ist

$$(*(f+f'))(\varphi) = (f+f')^*(\varphi) = \varphi \circ (f+f') = \varphi \circ f + \varphi \circ f' = f^*(\varphi) + f'^*(\varphi) = (f^* + f'^*)(\varphi) = (*(f) + *(f'))(\varphi)$$

Da φ beliebig gewählt war, folgt $*(f + f') = *(f) + *(f')$. Sei ferner $a \in K$. Dann ist

$$*(a \cdot f)(\varphi) = (a \cdot f)^*(\varphi) = \varphi \circ (a \cdot f)$$

Da $\varphi \in V^*$, muss φ linear sein.

$$\varphi \circ (a \cdot f) = a \cdot \varphi \circ f = a \cdot f^*(\varphi) = a \cdot *(f)(\varphi) = (a \cdot *(f))(\varphi)$$

Da φ beliebig gewählt war, folgt $*(a \cdot f) = a \cdot *(f)$

(b) Wir betrachten nun $x, y \in V^*$ mit $x \neq y$. Daher $\exists v \in V$ mit $x(v) \neq y(v)$. Da f surjektiv ist, $\exists u$ mit $f(u) = v$. Wir erhalten: $\exists u \in U$ mit

$$\begin{aligned} x(f(u)) &\neq y(f(u)) \\ (x \circ f)(u) &\neq (x \circ f)(u) \\ f^*(x)(u) &\neq f^*(y)(u) \implies f^*(x) \neq f^*(y) \end{aligned}$$

Wir haben also unter der Annahme, dass f surjektiv ist, gezeigt dass für zwei verschiedene $x, y \in V^*$ auch $f^*(x) \neq f^*(y)$ verschieden sind. f^* ist also injektiv.