Aufgabe 1

(a) a

(b) Für Spitzenformen haben wir auf Blatt 3 gezeigt: $|a_n| \leq Cn^{k/2}$. Es gilt $|a_n(E_k)| = C \cdot \sigma_{k-1}(n) \leq C \cdot \sigma_1^{k-1}(n) \leq Cn^{k-1}$. Wegen $M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k$ folgt die Behauptung.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} e^{\beta y}\right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{(-2\pi n + \beta) y} \\ &\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{(-2\pi n + \beta) y}\end{aligned}$$

Wähle $\beta < 1$. Dann gilt $-2\pi n + \beta < 0$ und es folgt

$$\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{(-2\pi n + \beta) y_0}$$

Außerdem gilt wegen $n \geq 1, \beta < 1$ auch $-2\pi n + \beta \leq -n$

$$\leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{-y_0 \cdot n}$$

Nun ist $\lim\limits_{n \to \infty} n^{k+1} e^{-y_0 \cdot n} = 0$ und daher existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n^{k-1} e^{-y_0 \cdot n} \neq n^{-2}$

$$\begin{aligned}&\leq C \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} n^{k-1} e^{-y_0 \cdot n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-2}\right) \\ &\leq C \cdot \left(D + \frac{\pi^2}{6}\right) \\ &\leq E\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$-E_6(i) = -1 - \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2, (c,d)=1, c>0} (c \cdot i + d)^{-6}$$

Für $d = 0$ gilt $c = 1$ und daher $(ci + d)^{-6} = -1$

$$\begin{aligned}&= -1 + 1 + \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2, (c,d)=1, c>0, d \neq 0} (i \cdot ci + i \cdot d)^{-6} \\ &= \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2, (c,d)=1, c>0, d \neq 0} (d \cdot i - c)^{-6}\end{aligned}$$

Ist $d < 0$, so betrachte $(-d \cdot i + c)^{-6}$. Wegen $(-1)^6 = 1$ ändert sich dadurch am Wert der Summe nichts und wir erhalten

$$\begin{aligned} &= \sum_{(\tilde{c},\tilde{d}) \in \mathbb{Z}^2, (\tilde{c},\tilde{d})=1, \tilde{c} \neq 0, \tilde{d} > 0} (\tilde{d} \cdot i - \tilde{c})^{-6} \\ &= 1 - 1 + \sum_{(\tilde{c},\tilde{d}) \in \mathbb{Z}^2, (\tilde{c},\tilde{d})=1, \tilde{c} \neq 0, \tilde{d} > 0} (\tilde{d} \cdot i - \tilde{c})^{-6} \end{aligned}$$

Wegen $(\tilde{c}, \tilde{d}) = 1$ folgt $\tilde{d} = 1$ für $\tilde{c} = 0$, mit $-1 = (i)^{-6}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &= 1 + \sum_{(\tilde{c},\tilde{d}) \in \mathbb{Z}^2, (\tilde{c},\tilde{d})=1, \tilde{d} > 0} (\tilde{d} \cdot i - \tilde{c})^{-6} \\ &= E_6(i), \end{aligned}$$

also $E_6(i) = 0$. Es folgt $j(i) = 1728 \frac{E_4^3(i)}{E_4^3(i) - E_6^2(i)} = 1728$.

(e) Es gilt $g \in V_l = \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{k/2}}$. Nun ist E_4 holomorph auf $\mathbb{H}$ und E_6 besitzt eine Nullstelle bei i (siehe Aufgabe d). Nach der Valenzformel ist diese eine einfache Nullstelle (Grade fällt mir auf: Aufgabe d hätte man deutlich einfacher über die Valenzformel argumentieren können).

Sei $g = \frac{P(j)}{Q(j)} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{k/2}}$. Betrachte $\varphi := (j - 1728)^{k/2} \cdot Q(j)$. Dann gilt $g \cdot \varphi = P(j) \cdot E_4^k \cdot \left(\frac{j-1728}{E_6}\right)^{\frac{k}{2}}$. Nun hat $j - 1728$ eine Nullstelle in i, sodass $\frac{j-1728}{E_6}$ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist. Folglich ist $g \cdot \varphi$ ebenfalls holomorph auf $\mathbb{H}$.

(f) f

(g) Für gerades n gilt $n = 2^r \cdot m$ mit $r \geq 1$ und $(2^r, m) = 1$. Also folgt nach Beispiel 4.28 $\tau(n) = \tau(2^r)\tau(m)$. Auch wieder mit Beispiel 4.28 folgt $\tau(2^r) = \tau(2^{r-1})\tau(2) - 2^1 1\tau(2^{r-1})$ für $r \geq 1$. Wegen $\tau(2) = 24$ nach Skript gilt $8|\tau(2), 8|2^1 1$ und damit $8|\tau(2^r)$, also auch $8|\tau(n)$.

(h) Es gilt $\dim_{\mathbb{C}} M_{10} = 1$. Wegen $E_4 \cdot E_6 \in M_{10}$ und $a_1(E_4 E_6) = 1 \cdot 1 = a_1(E_{10})$ folgt die Gleichheit $E_4 E_6 = E_{10}$. Wir setzen die Definitionen ein und erhalten

$$\begin{aligned} E_1 0 &= E_4 \cdot E_6 \\ 1 - \frac{20}{B_{10}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_9(n) q^n &= \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n\right) \left(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n\right) \\ 8 \cdot 3 \cdot 11 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_9(n) q^n &= 8 \cdot 7 \cdot 9 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n - 16 \cdot 3 \cdot 5 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n + 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n\right) \end{aligned}$$

Betrachten wir die Koeffizienten für q^n und teilen durch 24, so ergibt sich

$$11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_5(n-m)$$

Aufgabe 2

(a) Es gilt $\dim_{\mathbb{C}} S_{18} = \lfloor \frac{k}{12} \rfloor = 1$. Da S_k eine Orthogonalbasis aus Hecke-Eigenformen besitzt, ist auch $E_6 \cdot \Delta$ Vielfaches einer Hecke-Eigenform und erfüllt damit die schwache Multiplikativitätseigenschaft.

(b) Es gilt $\dim_{\mathbb{C}} S_{24} = 2$. Da f und $\tilde{f}$ offensichtlich linear unabhängig sind, ist dadurch also bereits eine Basis gegeben.

(c) Nach Satz 4.32 gilt

$$f|_{24}T_2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{a|(m,2),a>0} a^{23} a_{\frac{2m}{a^2}}(f) \right) q^m$$

Es folgt wegen $(1,2) = 1$ und $(2,2) = 2$

$$\begin{aligned} &= a_{\frac{2}{1^2}}(f)q + (a_{\frac{4}{1}}(f) + 2^{23} a_{\frac{4}{2^2}})q^2 + \mathcal{O}(q^3) \\ &= a_2(f) \cdot q + (a_4(f) + 2^{23} a_1(f))q^2 + \mathcal{O}(q^3) \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} f|_{24}T_2 &= -1032q + (2^2 3 - 22.072.640)q^2 = -1032f + (2^2 3 - 22.072.640 - 1032^2)\tilde{f} \\ \tilde{f}|_{24}T_2 &= q + 1080q^2 = f + (1080 + 1032)\tilde{f} \end{aligned}$$

Als Darstellungsmatrix erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -1032 & -14749056 \\ 1 & 2112 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

(a) Aus $|a_p(f)|^2 \leq 4p^{k-1}$ folgt sofort $|a_p(f)| \leq 2p^{\frac{k-1}{2}}$. Es gilt demnach $a_p(f) = 2p^{\frac{k-1}{2}} \cdot x_p$ mit $|x_p| \leq 1$, also $x_p \in [-1,1]$. Nun ist $\cos\colon [0,\pi] \xrightarrow{\sim} [-1,1]$ eine Bijektion, da stetig und streng monoton. Insbesondere existiert also ein eindeutig bestimmtest θ_p mit $\cos(\theta_p) = x_p$. Offensichtlich ist $|\cos\theta_p| < 1$ für $\theta_p \notin \{0,\pi\}$, also $|a_p(f)| = |2p^{\frac{k-1}{2}} \cos\theta_p| < |2p^{\frac{k-1}{2}}|$, d.h. $a_p(f) \neq 2p^{\frac{k-1}{2}}$.

(b) Induktion nach r.
Induktionsanfang, $r = 1$: Wegen $A^0 = I$ und $a_1(f) = 1$ bei einer normierten Hecke-Eigenform f gilt

$$\begin{pmatrix} a_p(f) \\ a_1(f) \end{pmatrix} = A^0 \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Induktionsschritt: Gelte die Behauptung für $r = n$. Wir erhalten für $r = n+1$ folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
A^n \cdot \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} &= A \cdot A^{n-1} \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= A \cdot \begin{pmatrix} a_{p^n}(f) \\ a_{p^{n-1}}(f) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_p(f) & -p^{k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{p^n}(f) \\ a_{p^{n-1}}(f) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_p(f) \cdot a_{p^n}(f) - p^{k-1} \cdot a_{p^{n-1}}(f) \\ a_{p^n}(f) \end{pmatrix} \\
&\overset{4.26(\mathrm{ii})}{=} \begin{pmatrix} a_{p^{n+1}}(f) \\ a_{p^n}(f) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Als charakteristisches Polynom erhalten wir $(a_p(f) - \lambda) \cdot (-\lambda) + p^{k-1} = \lambda^2 - a_p(f)\lambda + p^{k-1}$. Durch Anwenden der $p - q$-Formel erhalten wir als mögliche Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = \frac{a_p(f) \pm \sqrt{a_p(f)^2 - 4p^{k-1}}}{2}$$

Insbesondere erhalten wir aus dem Satz von Vieta die Identitäten $\lambda_1 + \lambda_2 = a_p(f)$ und $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = p^{k-1}$. Für den Eigenraum zu λ_1 erhalten wir

$$\ker \begin{pmatrix} a_p(f) - \lambda_1 & -p^{k-1} \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} \lambda_2 & -p^{k-1} \\ \lambda_2 & -\underbrace{\lambda_1 \cdot \lambda_2}_{p^{k-1}} \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} \lambda_2 & -p^{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} p^{k-1} \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenraum von λ_2 hingegen ergibt sich völlig analog

$$\ker \begin{pmatrix} a_p(f) - \lambda_2 & -p^{k-1} \\ 1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} \lambda_1 & -p^{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} p^{k-1} \\ \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Durch $\begin{pmatrix} p^{k-1} \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p^{k-1} \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$ ist demnach eine Basis aus Eigenvektoren gegeben, wir erhalten als Transformationsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} p^{k-1} & p^{k-1} \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \frac{1}{p^{k-1} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \lambda_1 & -p^{k-1} \\ -\lambda_2 & p^{k-1} \end{pmatrix}$$

Es folgt unter massiver Ausnutzung von $a_p(f) = \lambda_1 + \lambda_2$ und $p^{k-1} = \lambda_1\lambda_2$

$$\begin{aligned}
M^{-1}AM &= \frac{1}{p^{k-1}(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \lambda_1 & -p^{k-1} \\ -\lambda_2 & p^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_p(f) & -p^{k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{k-1} & p^{k-1} \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{p^{k-1}(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1(-\lambda_1\lambda_2) \\ -\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2 & \lambda_2(\lambda_1\lambda_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{k-1} & p^{k-1} \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & -\lambda_1^2\lambda_2) \\ -\lambda_2^2 & \lambda_2^2\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \lambda_1^3\lambda_2 - \lambda_1^2\lambda_2^2 & \lambda_1^3\lambda_2 - \lambda_1^3\lambda_2 \\ -\lambda_2^3\lambda_1 + \lambda_2^3\lambda_1 & -\lambda_2^3\lambda_1 + \lambda_2^2\lambda_1^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wie erwartet. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{p^r}(f) \\ a_{p^{r-1}}(f) \end{pmatrix} &= A^{r-1} \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} = MM^{-1}A^{r-1}MM^{-1} \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} = M(M^{-1}AM)^{r-1}M^{-1} \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= M \begin{pmatrix} \lambda_1^{r-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{r-1} \end{pmatrix} M^{-1} \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{r-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_1\lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \lambda_1^r\lambda_2 & \lambda_2^r\lambda_1 \\ \lambda_1^{r-1}\lambda_2 & \lambda_2^{r-1}\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 \\ -\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \lambda_1^r\lambda_2 & \lambda_2^r\lambda_1 \\ \lambda_1^{r-1}\lambda_2 & \lambda_2^{r-1}\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 \\ -\lambda_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \begin{pmatrix} \lambda_1^{r+2}\lambda_2 - \lambda_2^{r+2}\lambda_1 \\ \lambda_1^{r+1}\lambda_2 - \lambda_2^{r+1}\lambda_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1^{r+1} - \lambda_2^{r+1} \\ \lambda_1^r - \lambda_2^r \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(d) Wir nutzen $a_p(f) = 2p^{\frac{k-1}{2}} \cos\theta_p$ und erhalten

$$\lambda_{1/2} = \frac{2p^{\frac{k-1}{2}} \cos\theta_p \pm \sqrt{4p^{k-1}(\cos^2\theta_p - 1)}}{2} = p^{\frac{k-1}{2}}(\cos\theta_p \pm \sqrt{-\sin^2\theta_p}) = p^{\frac{k-1}{2}}(\cos\theta_p \pm i\sin\theta_p)$$

Es folgt $\lambda_1 = p^{\frac{k-1}{2}} e^{i\theta_p}$ und $\lambda_2 = p^{\frac{k-1}{2}} e^{-i\theta_p}$ und insbesondere verschieden für $\theta_p \notin \{0, \pi\}$. Aus

Aufgabe (c) erhalten wir

$$\begin{aligned}
a_{p^r} &= \frac{\lambda_1^{r+1} - \lambda_2^{r+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
&= p^{r \cdot \frac{k-1}{2}} \frac{e^{i(r+1)\theta_p} - e^{-i(r+1)\theta_p}}{2i \sin \theta_p} \\
&= p^{r \cdot \frac{k-1}{2}} \frac{\cos((r+1)\theta_p) + i \sin((r+1)\theta_p) - \cos(-(r+1)\theta_p) - i \sin(-(r+1)\theta_p)}{2i \sin \theta_p} \\
&= p^{r \cdot \frac{k-1}{2}} \frac{2i \sin((r+1)\theta_p)}{2i \sin \theta_p} \\
&= p^{r \cdot \frac{k-1}{2}} \frac{\sin((r+1) \cdot \theta_p)}{\sin \theta_p}
\end{aligned}$$

(e) Es genügt zu zeigen, dass die Folge $\sin((r+1)\theta_p)_{r \in \mathbb{N}}$ unendlich viele positive wie negative Glieder enthält. Angenommen, es gibt ein maximales R, für das $\sin((R+1)\theta_p)$ negativ ist. Wegen $\theta_p \notin 2\pi\mathbb{Q}$ ist also $\sin((r+1)\theta_p) \neq 0$ und damit positiv $\forall r > R$, also $(R+2)\theta_p \equiv x \mod 2\pi$ mit $0 < x < \pi$. Es existiert aber ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\pi < Nx < 2\pi$. Dann ist $N(R+2)\theta_p \equiv Nx \mod 2\pi$, also $\sin(N(R+2)\theta_p) = \sin(Nx) < 0$, Widerspruch.