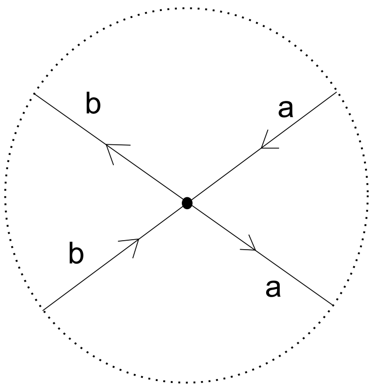
UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 16. November 2021

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE I
ÜBUNGSAUFGABEN 5

DEADLINE: Do. 25. Nov. 2021, 15:00.

1. Indem man zwei Kreise an einem Punkt verklebt, erhält man einen Raum $X = S^1 \vee S^1$, der wie die Ziffer "8" aussieht. Konstruieren Sie eine Überlagerung von X mit Grad 4.
2. Für $X = S^1 \vee S^1$ wie oben, konstruieren Sie die (bis auf Äquivalenz eindeutige) einfach zusammenhängende Überlagerung.
3. Ein *Graph* (im Sinne der Graphentheorie) besteht aus Knotenpunkten und Kanten, die Knoten miteinander verbinden. (Schleifen sind erlaubt.) Wir nennen einen solchen Graphen *orientiert 2-färbbar*, wenn man jeder Kante eine Orientierung und eine von zwei Farben a oder b zuweisen kann, sodass eine kleine Umgebung jedes Knotens wie im Bild aussieht:



(Insbesondere ist jeder Knoten inzident mit genau 4 Kanten.) Zeigen Sie: 1) Jeder zusammenhängende orientiert 2-färbbare Graph definiert eine Überlagerung von $X = S^1 \vee S^1$. 2) Umkehrung: Jeder (zusammenhängende) Überlagerungsraum von X ist ein orientiert 2-färbbarer Graph. 3) Frage: Sei ein zusammenhängender 4-valenter Graph gegeben, d.h. ein Graph, sodass jeder Eckpunkt inzident mit genau 4 Kanten ist. Tritt jeder endliche solche Graph als Überlagerungsraum von X auf?
Hinweis zu 3): Erarbeiten Sie sich den Begriff "Eulerkreis" aus der Graphentheorie. Besitzt jeder 4-valente Graph einen Eulerkreis? Falls ja, kann man einen Eulerkreis dazu verwenden, eine Färbung mit a und b vorzunehmen?