Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 7

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: Do 18.06.2020 um 9:15 Uhr

---

26. Aufgabe: *(6 Punkte, Universelle Eigenschaft des Kerns)* Seien R ein Ring, M und N zwei R-Moduln und $\varphi\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Sei $\iota\colon \ker(\varphi) \to M$ die kanonische Inklusion. Man zeige, dass das Paar $(\ker(\varphi), \iota)$ die folgende Eigenschaft erfüllt:

(UK) Zu jedem R-Modul U und jedem R-Modulhomomorphismus $f\colon U \to M$ mit $\varphi \circ f = 0$ gibt es einen eindeutig bestimmten R-Modulhomomorphismus $g\colon U \to \ker(\varphi)$ mit $f = \iota \circ g$,

$$\begin{tikzcd}
\ker(\varphi) \arrow[dr, "\iota"] \arrow[drr, "0"] & & \\
& M \arrow[r, "\varphi"] & N, \\
U \arrow[uu, dotted, "g"] \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

d.h. die Abbildung von Mengen

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(U, \ker(\varphi)) &\to \{f \in \mathrm{Hom}_R(U, M) \mid \varphi \circ f = 0\}\\ g &\mapsto \iota \circ g\end{aligned}$$

ist bijektiv.

27. Aufgabe: *(2+4 Punkte, Direkte Summen von freien Moduln)* Seien R ein Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von freien R-Moduln. Sei $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. In dieser Aufgabe soll mit Hilfe der universellen Eigenschaften von direkten Summen und freien Moduln gezeigt werden, dass M frei ist. Sei dazu $(x_{i,j})_{j\in J_i}$ eine Basis von M_i. Wir setzen

$$K := \bigcup_{i\in I} (\{i\} \times J_i)$$

und betrachten $(x_{i,j})_{(i,j)\in K}$ via der kanonischen Inklusionen $q_i\colon M_i \to M$ als Familie von Elementen von M. Sei N ein Modul mit einer Familie von Elementen $(y_{i,j})_{(i,j)\in K}$ aus N.

(a) Man zeige, dass es für alle $i \in I$ einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $f_i\colon M_i \to N$ mit $f_i(x_{i,j}) = y_{i,j}$ für alle $j \in J_i$ gibt.

(b) Man folgere aus (a) und der universellen Eigenschaft der direkten Summe, dass $(M, (x_{i,j})_{(i,j)\in K})$ die Eigenschaft (UF) erfüllt, M also frei ist.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.