Übungsblatt 3

Abgabetermin: 11.05.2017, 9:20 Uhr.

Auf dem gesamten Übungsblatt bezeichne K einen Körper.

Aufgabe 1 *(3+3+2 = 8 Punkte)*

Es bezeichne V einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$.

a) Zeigen Sie: n paarweise verschiedene Elemente $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von V^* sind linear unabhängig, genau dann wenn $\cap_{i=1}^n \ker \varphi_i = \{0\}$ gilt.

b) Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ wie in Teilaufgabe a) linear unabhängig. Zeigen Sie: Es existieren n Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ so dass die Matrix $(\varphi_i(v_j))_{1 \le i,j \le n} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ invertierbar ist.

c) Sei nun $V = \mathbb{R}^3$ und $\mathfrak{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von V. Geben Sie für das lineare Funktional $\varphi \in V^*$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto 4z - 2x - 3y$ ein Darstellung bezüglich der zu $\mathfrak{B}$ dualen Basis von V^* an.

Aufgabe 2 *(2+2+2 = 6 Punkte)*

Es bezeichne V, W zwei K-Vektorräume sowie V_1, V_2 zwei Untervektorräume von V.

a) Zeigen Sie: $(V_1 + V_2)^0 = V_1^0 \cap V_2^0$ und $(V_1 \cap V_2)^0 = V_1^0 + V_2^0$.

b) Zeigen Sie: Ist $f : W \to V$ eine lineare Abbildung, so gilt $(f^{-1}(V_1))^0 = f^*(V_1^0)$.

c) Bestimmen Sie eine Basis von U^0, wobei $U \subset \mathbb{R}^5$ der von $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ erzeugte Unterraum ist.

Aufgabe 3 *(2+2 = 4 Punkte)*

a) Sei V der Vektorraum aller reellen $m \times n$-Matrizen (für $m, n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie: Die Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{sp}(A^t \cdot B)$ definiert eine nicht-ausgeartete und symmetrische Bilinearform auf V.

b) Gegeben sei ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum V zusammen mit einer Basis $\mathfrak{B}$. In der Vorlesung wurden folgende Isomorphismen definiert:

$$\Delta_i : \mathrm{Bil}(V) \to \mathrm{Hom}_K(V, V^*), \gamma \mapsto \Gamma_i$$

$$\Theta_j : \mathrm{Hom}_K(V, V^*) \to \mathrm{Bil}(V), \Gamma \mapsto \gamma_j$$

$$\_^* : \mathrm{Hom}_K(V, V^*) \to \mathrm{Hom}_K((V^*)^*, V^*) \cong \mathrm{Hom}_K(V, V^*)$$

mit $i, j \in \{l, r\}$. Sei $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$ mit Darstellungsmatrix M bezüglich $\mathfrak{B}$ gegeben. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von $\Theta_j \circ \_^* \circ \Delta_i(\gamma)$ bezüglich $\mathfrak{B}$ in Termen von M für alle vier Kombinationen von $i, j \in \{l, r\}$.