Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 1

Abgabe: *Freitag, 23.04.2021, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Lemma 1.32). **(6 Punkte)**
Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset A$ und $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subset B$ Ideale. Zeigen Sie drei der folgenden fünf Aussagen:

(a) $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supset \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$.

(b) $(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subset \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$.

(c) $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c \supset \mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c$.

(d) $(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subset (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$, $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subset (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$.

(e) $r(\mathfrak{a})^e \subset r(\mathfrak{a}^e)$, $r(\mathfrak{b})^c = r(\mathfrak{b}^c)$.

Aufgabe 2 (Lemma 2.4). **(6 Punkte)**
Seien A ein kommutativer Ring mit Eins, M ein A-Modul und N, P zwei A-Untermoduln von M. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Ann}(N+P) = \mathrm{Ann}(N) \cap \mathrm{Ann}(P)$.

(b) $(N : P) = \mathrm{Ann}((N+P)/N)$.

Aufgabe 3 (Einheiten und nilpotente Elemente). **(6 Punkte)**
Sei A ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie:

(a) Ist $x \in A$ nilpotent, so is $1+x$ eine Einheit in A.

(b) Die Summe eines nilpotenten Elementes und einer Einheit ist eine Einheit.

Aufgabe 4 (Produkte von Ringen). **(6 Punkte)**
Seien $A_1, \dots, A_n$ kommutative Ringe mit Eins. Zeigen Sie:

(a) Das kartesische Produkt $A := A_1 \times \ldots \times A_n$ wird mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation zu einem kommutativen Ring mit Eins.

(b) Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ist die kanonische Projektion $\pi_i\colon A \to A_i$ ein Ringhomomorphismus.

(c) Für eine Familie von Idealen $(\mathfrak{a}_i \subseteq A_i)_{i=1}^n$ ist die Teilmenge $\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_n$ ein Ideal von A.

(d) Jedes Ideal von A ist von der Form $\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_n$ für Ideale $\mathfrak{a}_i \subseteq A_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

(e) Jedes Primideal von A ist von der Form $\pi_i^{-1}(\mathfrak{p}_i)$ für ein Primideal $\mathfrak{p}_i \subset A_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$.

Besprechung in der zweiten Übung in der dritten Semesterwoche (26.–30. April).