Aufgabe 8.1

(a) Seien p_j, q_j mit $j \in J$ Polynomfunktionen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und J eine endliche Indexmenge. Dann gilt nach Produktregel für $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} \sum_{j\in J} p_j\left((|x|^2-1)^{-1}\right) q_j(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{j\in J} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} \cdot \underbrace{p_j((|x|^2-1)^{-1}) \cdot -(1/(|x|^2-1))^2}_{\tilde{p}_{j,i,1}(1/(|x|^2-1))} \cdot \underbrace{q_j(x_1,\dots,x_n)\cdot 2x_i}_{\tilde{q}_{j,i,1}(x_1,\dots,x_n)} \\
&+ e^{\frac{1}{|x|^2-1}} \cdot \underbrace{p_j'((|x|^2-1)^{-1})}_{\tilde{p}_{j,i,2}} \cdot \underbrace{(2x_i)\cdot q_j(x_1,\dots,x_n)}_{\tilde{q}_{j,i,2}} \\
&+ e^{\frac{1}{|x|^2-1}} \underbrace{p_j((|x|^2-1)^{-1})}_{\tilde{p}_{j,i,3}} \underbrace{\frac{\partial q_j(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i}}_{\tilde{q}_{j,i,3}} \\
&= e^{\frac{1}{|x|^2-1}} \sum_{j,\iota,\nu\in\tilde{J}} \tilde{p}_{j,\iota,\nu}((|x|^2-1)^{-1})\tilde{q}_{j,\iota,\nu}(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{|x|\nearrow 1} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} \sum_{j\in J} p_j\left((|x|^2-1)^{-1}\right) \underbrace{q_j(x_1,\dots,x_n)}_{\text{beschränkt}} &= C \lim_{|x|\nearrow 1} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} P\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) \\
&= C \lim_{h\to-\infty} e^h P(h) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da die Exponentialfunktion im Limes immer schneller wächst als ein Polynom. Insgesamt folgt per Induktion, dass ϕ beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist (in dem man die obigen Ableitungen stetig durch 0 auf $|x| \geq 1$ fortsetzt). Wir erhalten $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
|(f * \varphi_\epsilon)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_\epsilon(y)\,\mathrm{d}y \; - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x)) \frac{1}{\epsilon^n} \frac{\phi(y/\epsilon)}{\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}} \right| \\
&= \frac{1}{\epsilon^n} \frac{\left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(x-\epsilon z) - f(x))\phi(z)\cdot\epsilon\,\mathrm{d}z\right|}{\int_{\mathbb{R}^n}\phi(z)\,\mathrm{d}z} \\
&\leq \frac{1}{\epsilon^n} \frac{\left|\int_{B_1(0)} (f(x-\epsilon z) - f(x)) \sup_{z\in B_1(0)}\phi(z)\cdot\epsilon\,\mathrm{d}z\right|}{\int_{B_1(0)}\phi(z)\,\mathrm{d}z}
\end{aligned}$$

Es gilt $\sup_{z\in B_1(0)}\phi(z) = \sup_{0<|z|<1} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} = e^{-1}$

$$\leq \frac{e^{-1}}{\epsilon^n} \frac{\left|\int_{B_\epsilon(x)} (f(y) - f(x))\cdot -\mathrm{d}y\right|}{\int_{B_{1/2}(0)} \inf_{|z|<1/2}\phi(z)\,\mathrm{d}z}$$

Es gilt $\inf_{|z|<1/2\phi(z)=\inf_{|z|<1/2} e^{\frac{1}{|z|^2-1}}} = e^{-4/3}$

$$\leq \frac{2^n \cdot e^{\frac{1}{3}}}{\epsilon^n} \frac{\left|\int_{B_\epsilon(x)} (f(y) - f(x)) \cdot - \,\mathrm{d}y\right|}{\int_{B_1(0)} \mathrm{d}z}$$

Wir bezeichnen mit V_n das Maß der n-dimensionalen Einheitskugel und fassen die Konstanten durch $C := \frac{2^n e^{\frac{1}{3}}}{V_n}$ zusammen

$$\leq \frac{C}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} |f(x) - f(y)| \,\mathrm{d}y$$

Sei nun $\delta > 0$. Nach Definition der gleichmäßigen Stetigkeit existiert dann ein $\epsilon > 0$ mit

$$\sup_{y \in B_\epsilon(x)} |f(y) - f(x)| < \delta \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_\epsilon)(x) - f(x)| &\leq \frac{C}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} |f(x) - f(y)| \,\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{C}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \sup_{y \in B_\epsilon(x)} |f(x) - f(y)| \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{C\delta}{\epsilon^n} \int_{B_\epsilon(x)} \mathrm{d}y \\ &= C\delta \int_{B_1(0)} \mathrm{d}y \\ &= CV_n\delta \end{aligned}$$

Zu jedem $\delta > 0$ existiert also ein $\epsilon > 0$ mit $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(f * \varphi_\epsilon)(x) - f(x)| < \delta$, also

$$f * \varphi_\epsilon \to f \qquad \text{in } L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Aufgabe 8.2

Analog zur Vorgehensweise im Beweis von Satz 4.23 wählen wir $F \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|F - f\|_1 < \frac{\epsilon}{2}$. Dann wählen wir $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \,\mathrm{d}x = 1$. Wie in Satz 4.23 definieren wir $\varphi_\delta := \frac{1}{\delta^n}(x/\delta)$. Offensichtlich ist auch $\varphi_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da beide Funktionen kompakten Träger besitzen, besitzt auch die Faltung kompakten Träger. Zusammen mit Lemma 4.22 folgt daraus

$$(F * \varphi_\delta)(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Nach Satz 4.23 folgt nun $F * \varphi_\delta \xrightarrow{\delta \to 0} F$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|(F * \varphi_\delta) - F\|_1 < \frac{\epsilon}{2}.$$

Setzen wir nun $f_\epsilon := F * \varphi_\delta$, so erhalten wir

$$\|f - f_\epsilon\|_1 \leq \|f - F\|_1 + \|F - F * \varphi_\delta\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Aufgabe 8.3

Es gilt $\forall \epsilon > 0 \exists f_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - f_\delta\| < \frac{\epsilon}{3}$. Dann folgt unter Benutzung des Integraltransformationssatzes $\|f_h - f_{\delta,h}\|_1 = \|f(x+h) - f_\delta(x+h)\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$. Außerdem gilt

$$\|f_{\delta,h} - f_\delta\| = \|f_\delta(x+h) - f_\delta(x)\|$$

Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}
&= \left\| \left(\int_0^1 \nabla f_\delta(x+sh)\,\mathrm{d}s \right)^T \cdot h \right\|_1 \\
&= \left\| \sum_{i=1}^n h_i \int_0^1 \partial_i f_\delta(x+sh_i)\,\mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n h_i \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \partial_i f_\delta(x+sh_i)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{i=1}^n h_i \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i f_\delta(x+sh_i)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$\partial_i f_\delta(x+sh_i) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. O.B.d.A daher $\operatorname{supp} \partial_i f_\delta(x+sh_i) \subset K$ Kompaktum.

$$\leq \sum_{i=1}^n h_i \int_0^1 \int_K \partial_i f_\delta(x+sh_i)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s$$

Sei $C_i \coloneqq \sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in K} \partial_i f_\delta(x+sh_i)$ (beschränkt, weil $[0,1]\times K$ kompakt ist.)

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^n |h_i| \int_0^1 \int_K C_i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \\
&\leq \sum_{i=1}^n |h_i| C_i' \\
&\leq \hat{C}_i' \sum_{i=1}^n |h_i| \\
&= C\,\|h\|_1
\end{aligned}$$

Es existiert also ein geeignetes $h \in \mathbb{R}^n$, sodass gilt

$$\|f_{\delta,h} - f_\delta\| < \frac{\epsilon}{3}$$

Insgesamt erhalten wir daher für geeignetes h

$$\|f - f_h\|_1 \leq \|f - f_\delta\|_1 + \|f_\delta - f_{\delta,h}\|_1 + \|f_{\delta,h} - f_h\| \leq 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

und es folgt die Behauptung.

Zusatzaufgabe 8.1

(a) Es gilt

$$\mathrm{D}T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \frac{y^2}{x}}{\partial x} & \frac{\partial \frac{x^2}{y}}{\partial x} \\ \frac{\partial \frac{y^2}{x}}{\partial y} & \frac{\partial \frac{x^2}{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & 2\frac{x}{y} \\ 2\frac{y}{x} & -\frac{x^2}{y^2} \end{pmatrix}$$

Für $x, y > 0$ ist T daher differenzierbar. Es gilt offensichtlich

$$T(\mathbb{R}_+^2) \subset \mathbb{R}_+^2$$

Sei

$$\begin{aligned} S\colon \mathbb{R}_+^2 &\to \mathbb{R}_+^2 \\ (w, z) &\mapsto (\sqrt[3]{wz^2}, \sqrt[3]{w^2 z}). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt dann

$$\left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right) \mapsto (\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}\frac{x^4}{y^2}}, \sqrt[3]{\frac{y^4}{x^2}\frac{x^2}{y}}) = (\sqrt[3]{x^3}, \sqrt[3]{y^3}) = (x, y).$$

Wegen

$$\left(\frac{\sqrt[3]{w^2 z}^2}{\sqrt[3]{wz^2}}, \frac{\sqrt[3]{wz^2}^2}{\sqrt[3]{w^2 z}}\right) = (\sqrt[3]{w^3}, \sqrt[3]{z^3}) = (w, z)$$

ist durch S die eindeutig bestimmte Umkehrabbildung zu T gegeben. Es gilt

$$\mathrm{D}S = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sqrt[3]{wz^2}}{\partial w} & \frac{\partial \sqrt[3]{w^2 z}}{\partial w} \\ \frac{\partial \sqrt[3]{wz^2}}{\partial z} & \frac{\partial \sqrt[3]{w^2 z}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(wz^2)^{-\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}w(w^2 z)^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{3}z(wz^2)^{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{3}(w^2 z)^{-\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

und (wird benötigt für die c)

$$\begin{aligned} \det \mathrm{D}S &= \frac{1}{3}(wz^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}(w^2 z)^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}z(wz^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3}w(w^2 z)^{-\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{9}(w^3 z^3)^{-\frac{2}{3}} (1 - 4zw) \\ &= \frac{1}{9}((wz)^{-2} - 4(wz)^{-1} \end{aligned}$$

Für $w, z > 0$ ist S daher überall stetig partiell differenzierbar, also insbesondere total differenzierbar und somit ist T ein C^1-Diffeomorphismus.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} T(M) &= T\left(\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \colon a < y\frac{y^2}{x} < b,\ p < \frac{x^2}{y} < q\}\right) \\ &= \{(w, z) \in T(M) \colon a < w < b,\ p < z < q\} \\ &= (a, b) \times (p, q) \end{aligned}$$

$(a, b) \times (p, q)$ ist messbar. Da S eine differenzierbare, also insbesondere stetige Abbildung ist, handelt es sich bei $M = S(T(M)) = S((a, b) \times (p, q))$ wieder um eine messbare Menge.

(c)

$$\begin{aligned}
\int_M \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} \,\mathrm{d}\mathscr{L}^2 &= \int_{S(T(M))} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} \,\mathrm{d}\mathscr{L}^2 \\
&= \int_{T(M)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} \circ S |\det \mathrm{D}S| \,\mathrm{d}\mathscr{L}^2 \\
&= \int_a^b \int_p^q \frac{1}{9}((wz)^{-2} - 4(wz)^{-1} \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{9} \int_a^b \left[\frac{1}{-w^2} z^{-1} - \frac{4}{w} \ln(z) \right]_{z=p}^{q} \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{9} \int_a^b \left(\frac{1}{-w^2} (p^{-1} - q^{-1}) - \frac{4}{w} \ln(p/q) \right) \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{9} \left[(p^{-1} - q^{-1}) \frac{1}{w} - 4 \ln(w) \ln(p/q) \right]_{w=a}^{b} \\
&= \frac{1}{9} \left((p^{-1} - q^{-1})(a^{-1} - b^{-1}) - 4 \ln(a/b) \ln(p/q) \right)
\end{aligned}$$