Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter

Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

5. Übungsblatt

Ausgabe 01.12.2020 – Besprechung 07.12-10.12.2020

Verständnisfragen

- Welche Aussage lässt sich über einen Dipol treffen, der invariant ist unter Spiegelung?
- Wie verhalten sich Felder und Potentiale unter Wahl einer Eichung?
- Wie unterscheiden sich Phasen- und Gruppengeschwindigkeit?
- Welche Polarisation ergibt sich aus der Superposition entgegengesetzt zirkular polarisierter Wellen?
- In welche Richtung zeigt der Poynting-Vektor einer zirkular polarisierten Welle?

1. Aufgabe: Multipolentwicklung in kartesischen Koordinaten

Wie in der Vorlesung gezeigt erzeugt eine Ladungsverteilung $\rho(\boldsymbol{r})$ das elektrische Potential

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \ . \tag{1}$$

Wir wollen nun den Einfluss der Ladungsverteilung auf eine weit entfernte Punktladung bestimmen. Zeigen Sie durch Berechnung der Taylor-Entwicklung von $\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$, dass sich das Skalarpotential schreiben lässt als

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi}\frac{r_i P_i}{r^3} + \sum_{i,j} \frac{1}{8\pi} \frac{3x_i x_j - \delta_{ij} r^2}{r^5} q_{ij} + \dots \tag{2}$$

mit den kartesischen elektrischen Multipolmomenten

$$Q = \int d^3r' \ \rho(\boldsymbol{r}') \tag{3}$$

$$\boldsymbol{P} = \int d^3r' \ \boldsymbol{r}' \rho(\boldsymbol{r}') \tag{4}$$

$$q_{ij} = \int d^3r' \ \left(x_i' x_j' - \frac{\delta_{ij} r'^2}{3} \right) \rho(\boldsymbol{r}') \tag{5}$$

Betrachten Sie das Verhalten der Multipolmomente unter folgenden Transformationen

(a) Translation $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$

(b) Spiegelung $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}' = -\boldsymbol{x}$

(c) Rotation $x_i \to x_i' = D_{ij} x_j$ mit $\boldsymbol{D} \in SO(3)$

Berechnen Sie dazu Q',$\boldsymbol{P}'$, und $\boldsymbol{q}'$ an der Stelle $\boldsymbol{x}'$ und drücken Sie das Resultat durch Q,$\boldsymbol{P}$, und $\boldsymbol{q}$ aus.
Hinweis: Die Ladungsdichte transformiert $\rho(\boldsymbol{x}) \to \rho'(\boldsymbol{x}') = \rho(\boldsymbol{x}) / \det J$ mit $J_{ij} = \dfrac{\partial x_i'}{\partial x_j}$.

2. Aufgabe: Der geladene Würfel

Wir betrachten eine Ladungsverteilung für einen Würfel der Kantenlänge $2l$ mit einer homogenen Ladungsverteilung. Der Mittelpunkt des Würfels liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Bestimmen Sie das elektrische Potential mit Hilfe der Multipolmomente.

3. Aufgabe:

Wir definieren ein komplexes Feld $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{B}$, dessen Realteil und Imaginärteil durch das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$, bzw. durch das magnetische Feld $\boldsymbol{B}$ gegeben ist. Hierbei ist $i^2 = -1$.

(a) Zeigen Sie, dass man zwei der vier Maxwellgleichungen aus der Relation $\boldsymbol{\nabla X} = 4\pi\rho$ ableiten kann.

(b) Welcher Term fehlt auf der rechten Seite der Gleichung $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{X} - i\partial_{ct}\boldsymbol{X}$ um die beiden anderen Maxwellgleichungen zu erhalten?

(c) Zeigen Sie, dass die Ladungserhaltung aus $\boldsymbol{\nabla\nabla} \times \boldsymbol{X}$ folgt.

(d) Zeigen Sie, dass man mit den skalaren und Vektor-Potentialfeldern Φ und $\boldsymbol{A}$, für die gilt $-\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{E} + \partial_{ct}\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ die Wellengleichung aus $\boldsymbol{\nabla X} = 4\pi\rho$ ableiten kann. Verwenden Sie dazu die Lorenz-Eichung $\partial_{ct}\Phi + \boldsymbol{\nabla A} = 0$.

4. Aufgabe:

Zeigen Sie, dass man ein Vektorfeld $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ schreiben kann als

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\,.$$

Hinweis:
Zeigen Sie zunächst, dass gilt $\Delta\boldsymbol{V} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V})$ und verwenden Sie, den Ansatz

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x'\ .$$