Anmerkung: Wir benutzen für Referenzen unser mit ein paar Kommilitonen zusammen getextes Skript, zu finden unter `https://flavigny.de/lecture/pdf/analysis2`.

Aufgabe 1

Wir definieren

$$g\colon \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{wv}{w+2u} \\ \frac{w+2u}{v} \\ \frac{uv}{w+2u} \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$g \circ f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = g(\begin{pmatrix} yz \\ x+2z \\ xy \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{xy(x+2z)}{xy+2yz} \\ \frac{xy+2yz}{x+2z} \\ \frac{yz(x+2z)}{xy+2yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Also ist $f^{-1} = g$. Nun berechnen wir die Jacobi-Matrizen.

$$D_f(2,1,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ 1 & 0 & 2 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}^{-1} \Bigg|_{(2,1,0)^T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} D_g(2,1,0) &= \begin{pmatrix} -2\frac{wv}{(w+2u)^2} & \frac{w}{w+2u} & \frac{v(w+2u)-wv}{(w+2u)^2} \\ \frac{2}{v} & -\frac{w+2u}{v^2} & \frac{1}{v} \\ \frac{v(w+2u)-2uv}{(w+2u)^2} & \frac{u}{w+2u} & \frac{uv}{(w+2u)^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{f(2,1,0)} \\ &= \begin{pmatrix} -2\frac{wv}{(w+2u)^2} & \frac{w}{w+2u} & \frac{2uv}{(w+2u)^2} \\ \frac{2}{v} & -\frac{w+2u}{v^2} & \frac{1}{v} \\ \frac{vw}{(w+2u)^2} & \frac{u}{w+2u} & \frac{uv}{(w+2u)^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,2,2)^T} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Definiere

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y-z-1 \\ x^2+y^2-1 \end{pmatrix}$$

und

$$f(x) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Aufgabenstellung besteht nun darin, f unter der Bedingung $g = 0$ zu minimieren. Zunächst berechnen wir

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{und } \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nach Lagrange existieren $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 = \nabla f$$

Daraus ergibt sich für jede Komponente eine Gleichung

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 x = 2x \tag{1}$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 y = 2y \tag{2}$$
$$-\lambda_1 = 2z \tag{3}$$

Setzen wir nun Gleichung 3 in Gleichung 1 und 2 ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} -2z + 2\lambda_2 x &= 2x \\ -z + \lambda_2 x &= x \\ x(\lambda_2 - 1) &= z \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -2z + 2\lambda_2 y &= 2y \\ -z + \lambda_2 y &= y \\ y(\lambda_2 - 1) &= z \end{aligned}$$

Wir nehmen zunächst $\lambda_2 - 1 \neq 0$ an

$$x = \frac{z}{\lambda_2 - 1} \qquad\qquad y = \frac{z}{\lambda_2 - 1}$$

Also ist $y = x$. Da die Punkte auf Z liegen, ist $1 = x^2 + y^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$. Daraus ergibt sich $x_{1,2} = y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Da die Punkte auch in P liegen, erhalten wir $z = x + y - 1 = \pm\sqrt{2} - 1$. Damit erhalten wir die Punkte $\vec{x}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} - 1)$ und $\vec{x}_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2} - 1)$. Nun betrachten wir den Fall $\lambda_2 = 1$. Dann erhalten wir $z = 0$. Aus den Zwangsbedingungen ergibt sich dann $x + y = 1$ und $x^2 + y^2 = 1$. Einsetzen ergibt $1 = (1 - y)^2 + y^2 = 1 - 2y + 2y^2$, also $y^2 - y = 0$. Mögliche Lösungen sind also $y = 0$ und $y = 1$, korrespondierend zu $x = 1$ und $x = 0$. Damit ergeben sich zwei weitere Punkte $\vec{x}_3 = (1, 0, 0)$ und $\vec{x}_4 = (0, 1, 0)$. Wir berechnen nun die Werte der Zielfunktion an diesen vier Punkten.

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1) &= f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 4 - 2\sqrt{2} \\ f(\vec{x}_2) &= f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 4 + 2\sqrt{2} \\ f(\vec{x}_3) &= f(1, 0, 0) = 1 \\ f(\vec{x}_4) &= f(0, 1, 0) = 1 \end{aligned}$$

Der minimale Abstand ist also 1.

Aufgabe 3

Wir definieren $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - c^T x$ mit

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist Q symmetrisch. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} q_{jk}x_j x_k - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\sum_{k\neq i} q_{jk}x_j x_k + \frac{1}{2}\sum_{k\neq i} q_{ik}x_i x_k + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} q_{ji}x_j x_i + \frac{1}{2}q_{ii}x_i^2 - \sum_{j\neq i} c_j x_j - c_i x_i \\
\frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{1}{2}\sum_{k\neq i} q_{ik}x_k + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} q_{ji}x_j + q_{ii}x_i - c_i \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k\neq i} q_{ik}x_k + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i} q_{ij}x_j + q_{ii}x_i - c_i \\
&= \sum_{j\neq i} q_{ij}x_j + q_{ii}x_i - c_i \\
&= (Qx - c)_i
\end{aligned}$$

Also ist $\nabla f(x) = Qx - c$. Weiter definieren wir $g(x) = A \cdot x - b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$\partial_i g_j = \partial_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k - b_j\right) = a_{ji},$$

woraus wir schließen $\nabla g = A^T$ (ist glaube ich eher sloppy, funktioniert aber völlig analog). Durch Ausmultiplizieren erkennt man, dass die oben definierten Matrizen die Kriterien aus der Aufgabenstellung erfüllen, wir können also f s.t. $g = 0$ optimieren. Nach Lagrange existiert also ein $\lambda \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\nabla g \cdot \lambda = \nabla f \Leftrightarrow A^T \cdot \lambda = Qx - c \Leftrightarrow Qx = A^T \cdot \lambda + c.$$

Außerdem muss noch $Ax = b$ gelten. Insgesamt erhalten wir demnach

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 - 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir lösen zunächst die zweite Gleichung. Es gilt

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & -2 & 7\\ -3 & 2 & -1 & 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-1 & 3 & -2 & 7\\ 0 & -7 & 5 & -19\end{pmatrix} \begin{array}{l}\mid -1\\ \mid -\frac{1}{7}\end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{8}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{19}{7}\end{pmatrix}.$$

Damit folgt für x

$$x \in \begin{pmatrix}\frac{8}{7}\\ \frac{19}{7}\\ 0\end{pmatrix} + \operatorname{Lin} \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\5\\7\end{pmatrix}, \quad \text{also } \exists a\colon x = \begin{pmatrix}1+a\\ 2+5a\\ -1+7a\end{pmatrix}$$

Dies setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten

$$\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+a\\ 2+5a\\ -1+7a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\\ -2\lambda_1 - \lambda_2 - 2\end{pmatrix}$$

Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{pmatrix}2+18a\\ 7+27a\\ -2+49a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\\ -2\lambda_1 - \lambda_2 - 2\end{pmatrix}$$

Durch kurzes Umformen sehen wir nun

$$\begin{pmatrix}18a + \lambda_1 + 3\lambda_2\\ 27a - 3\lambda_1 - 2\lambda_2\\ 49a + 2\lambda_1 + \lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 18\\ -3 & -2 & 27\\ 2 & 1 & 49\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}$$

Wir lösen nun auch dieses Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 18 & -5\\ -3 & -2 & 27 & 1\\ 2 & 1 & 49 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 3 & 18 & -5\\ 0 & 7 & 81 & -14\\ 0 & -5 & 13 & 10\end{pmatrix} \begin{array}{l}\\ \mid \frac{1}{7}\\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-117}{7} & 1\\ 0 & 1 & \frac{81}{7} & -2\\ 0 & 0 & \frac{496}{7} & 0\end{pmatrix}$$

Mit geeigneten Faktoren kann man die 3. Zeile auf alle anderen addieren

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Es folgt $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2$ und $a = 0$. Das setzen wir in unser Ergebnis für x ein und erhalten

$$x = \begin{pmatrix} 1+a \\ 2+5a \\ -1+7a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun $f(x) = -6$. Wir überprüfen noch eine anderen Punkt, der $g = 0$ erfüllt, z.B. mit $a = 1$.

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = 86$$

Also ist x tatsächlich das gesuchte Minimum von f s.t. $g = 0$.

Aufgabe 4

(a) Folgendes Gleichungssystem erster Ordnung ist äquivalent zum Gleichungssystem aus der Aufgabe

$$\begin{aligned} v_2'(t) &= \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(t) & v_2'''(t) &= \frac{\mathrm{d}v_2''}{\mathrm{d}t}(t) & \frac{\mathrm{d}v_2'''(t)}{\mathrm{d}t} - a\frac{\mathrm{d}v_1'}{\mathrm{d}t}(t) &= f(t) \\ v_2''(t) &= \frac{\mathrm{d}v_2'}{\mathrm{d}t}(t) & v_1'(t) &= \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}(t) & \frac{\mathrm{d}v_1'}{\mathrm{d}t}(t) + bv_2(t) &= g(t) \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t) = -p(t)W(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1(t)u_2(t)\right) = -p(t)\left(u_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2(t) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1(t)u_2(t)\right)$$

Beim Ausschreiben der Ableitung der Wronskideterminante werden sich die gemischten Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2(t)$ kürzen, daher schreiben wir sie gar nicht auf.

$$\begin{aligned} u_1(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u_2(t) - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u_1(t)u_2(t) &= -p(t)u_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1(t)u_2(t) \\ u_1(t)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u_2(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2(t)\right) &= u_2(t)\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u_1(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1(t)\right) \\ u_1(t)\left(-q(t)u_2(t)\right) &= u_2(t)\left(-q(t)u_1(t)\right) \\ q(t)u_1(t)u_2(t) &= q(t)u_2(t)u_1(t) \end{aligned}$$