Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2022

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. K. Hübner
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 4
Abgabe: *Freitag, 20.05.2022, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Auflösung von $\mathbb{Z}$ als C_n-Modul). **(4 Punkte)**
Sei $C_n := \{1, t, \ldots, t^{n-1}\}$ die multiplikative zyklische Gruppe von Ordnung $n \geq 2$ mit Erzeuger t. Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als C_n-Modul, d.h. als Modul über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[C_n]$, und die Elemente $\zeta := t - 1$ und $N := \sum_{i=0}^{n-1} t^i$ von $\mathbb{Z}[C_n]$. Zeigen Sie, dass

$$\ldots \xrightarrow{\cdot\zeta} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot\zeta} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot\zeta} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

eine freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 2 (Gruppenhomologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten). **(4 Punkte)**
Bestimmen Sie für alle $n \geq 0$ die Gruppenhomologiegruppen $\mathrm{H}_n(G, \mathbb{Z})$ für

(a) $G = \mathbb{Z}^2$. *Hinweis:* Verwenden Sie Blatt 3, Aufgabe 3.

(b) $G = C_n$. *Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3 (Induzierte Moduln). **(4 Punkte)**
Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

(a) Induzierte Moduln sind homologisch trivial.

(b) Für alle $n \geq 0$ ist $\mathrm{H}_n(U, A) \cong \mathrm{H}_n(G, \mathrm{Ind}_G^U(A))$.

Aufgabe 4 (Legendre-Symbol). **(4 Punkte)**
Wir betrachten die multiplikative Gruppe $G := (\mathbb{Z}/p)^\times$ und ihre Untergruppe $U := \{\pm 1\}$. Zeigen Sie, dass sich die Restriktionsabbildung $\mathrm{Res}_U^G \colon \mathrm{H}_1(G, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}_1(U, \mathbb{Z})$ mit dem Legendre-Symbol identifiziert.