

## Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 7

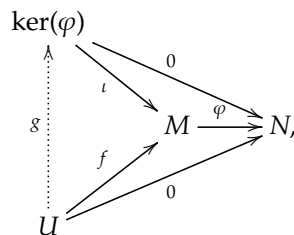
Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel  
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: Do 18.06.2020 um 9:15 Uhr

**26. Aufgabe:** (6 Punkte, Universelle Eigenschaft des Kerns) Seien  $R$  ein Ring,  $M$  und  $N$  zwei  $R$ -Moduln und  $\varphi: M \rightarrow N$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus. Sei  $\iota: \ker(\varphi) \rightarrow M$  die kanonische Inklusion. Man zeige, dass das Paar  $(\ker(\varphi), \iota)$  die folgende Eigenschaft erfüllt:

(UK) Zu jedem  $R$ -Modul  $U$  und jedem  $R$ -Modulhomomorphismus  $f: U \rightarrow M$  mit  $\varphi \circ f = 0$  gibt es einen eindeutig bestimmten  $R$ -Modulhomomorphismus  $g: U \rightarrow \ker(\varphi)$  mit  $f = \iota \circ g$ ,



d.h. die Abbildung von Mengen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(U, \ker(\varphi)) &\rightarrow \{f \in \text{Hom}_R(U, M) \mid \varphi \circ f = 0\} \\ g &\mapsto \iota \circ g \end{aligned}$$

ist bijektiv.

**27. Aufgabe:** (2+4 Punkte, Direkte Summen von freien Moduln) Seien  $R$  ein Ring und  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von freien  $R$ -Moduln. Sei  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ . In dieser Aufgabe soll mit Hilfe der universellen Eigenschaften von direkten Summen und freien Moduln gezeigt werden, dass  $M$  frei ist. Sei dazu  $(x_{i,j})_{j \in J_i}$  eine Basis von  $M_i$ . Wir setzen

$$K := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times J_i)$$

und betrachten  $(x_{i,j})_{(i,j) \in K}$  via der kanonischen Inklusionen  $q_i: M_i \rightarrow M$  als Familie von Elementen von  $M$ . Sei  $N$  ein Modul mit einer Familie von Elementen  $(y_{i,j})_{(i,j) \in K}$  aus  $N$ .

- Man zeige, dass es für alle  $i \in I$  einen eindeutigen  $R$ -Modulhomomorphismus  $f_i: M_i \rightarrow N$  mit  $f_i(x_{i,j}) = y_{i,j}$  für alle  $j \in J_i$  gibt.
- Man folgere aus (a) und der universellen Eigenschaft der direkten Summe, dass  $(M, (x_{i,j})_{(i,j) \in K})$  die Eigenschaft (UF) erfüllt,  $M$  also frei ist.

---

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.