Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis I

WS 19/20

Blatt 04 15.11.2019

ARSnova-Code: 67 52 65 62

Abgabe bis Fr. 22.11.19, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)

Informationen:

- Am 20.11 entfallen sowohl die Vorlesung als auch die Zentralübung. Am 27.11 findet daher von 16:15 – 17:45Uhr eine zusätzliche Vorlesung im INF 252, gHS, statt. Die Zentralübung entfällt an dem Tag.
- Wir werden dieses Mal erneut (ausgewählte) Fragen, die über das ARS gestellt werden, dort auch beantworten. Dafür werden wir die Feedback-Fragen abschalten, da wir aus den sehr wenigen Antworten keine brauchbaren Schlüsse ziehen können. Den Zugangsschlüssel für `https://arsnova.eu/` finden Sie oben links unter der Nummer des aktuellen Übungsblattes.
- Auf mehrfachen Wunsch hin ist nun für jede Teilaufgabe angegeben, wie viele Punkte dafür vorgesehen sind. Diese Punktzahlen sind jedoch nicht verbindlich, sondern sollen Ihnen nur einen Anhaltspunkt geben. Um flexibel auf Ihre Abgaben reagieren zu können, dürfen unsere Tutoren selbst entscheiden, wie Sie die Punkte einer Aufgabe auf die Teilaufgaben verteilen.

Themen:

- (Cauchy-)Folgen
- Infimum und Supremum
- Vollständigkeit
- Dezimalbrüche

Hinweise zur Bearbeitung:

- In Aufgabe 4.3 ist der Begriff der *offenen*, bzw. der *abgeschlossenen* Intervalle hilfreich. Die Begriffe *offen* und *abgeschlossen* werden im Laufe der Grundvorlesungen noch allgemeiner definiert. Für den Moment reichen die folgenden Definitionen:
  - Ein Intervall $I = (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \subset \mathbb{R}$ heißt *offenes Intervall.*
  - Ein Intervall $I = [a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossenes Intervall.*
  - Ein Intervall $I = [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \subset \mathbb{R}$ heißt *halboffenes Intervall.* Das Intervall $I = (a, b]$ ist analog definiert und ebenso ein halboffenes Intervall. $I = [a, b)$ nennt man auch *rechtsoffenes* Intervall und $I = (a, b]$ *linksoffen.*

  Für Aufgabe 4.3 relevant sind dabei die folgenden Eigenschaften:
  Seien $I_1 := (-\infty, a]$, $I_2 := (a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt
  - $x_1 \leq a$ für alle $x_1 \in I_1$ ist und $x_2 > a$ für alle $x_2 \in I_2$,
  - $I_1 \cup I_2 = \mathbb{R}$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$,
  - $\mathbb{R} \backslash I_1 = I_2$ und $\mathbb{R} \backslash I_2 = I_1$.

  Analoges gilt für $I_1 := (-\infty, a),\ I_2 := [a, \infty),\ a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4.1 (5 Punkte): Produkte von Zahlenfolgen

Geben Sie Beispiele von Folgen $(a_n), (b_n)$ mit

$$a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

an, sodass

(a) $a_n b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

(b) $a_n b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$

(c) $a_n b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(d) $a_n b_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} c \in \mathbb{R}$

(e) $(a_n b_n)$ beschränkt ist, aber nicht konvergent

Aufgabe 4.2 (7 Punkte): Infimum und Supremum von Mengen

(a) (4 Punkte) Untersuchen Sie die folgende Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ auf Beschränktheit und bestimmen Sie ggf. Infimum, Supremum, Minimum und Maximum:

$$A := \{2^{-m} + n^{-1} \mid m, n \in \mathbb{N}\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 10x \leq 24\}.$$

(b) (3 Punkte) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei Mengen. *Nicht notwendigerweise die aus (a)!* Seien ferner die Operationen „+“ und „·“ für zwei Mengen A und B definiert als

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \\ A \cdot B &:= \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}. \end{aligned}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

(i) $\sup A + B = \sup A + \sup B$,

(ii) $\inf A \cdot B = \inf A \cdot \inf B$.

Aufgabe 4.3 (5 Punkte): Trennungseigenschaft und Existenz des Supremums

Zeigen Sie, dass die Trennungseigenschaft die Existenz eines Supremums für jede beschränkte Menge impliziert. D.h. zeigen sie, dass aus der Aussage (i) die Aussage (ii) folgt.

(i) Sind $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei nichtleere Mengen mit $A \cup B = \mathbb{R}$ und $A \cap B = \emptyset$, sodass $a < b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $a \leq c \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

(ii) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.

1. Tipp: Überlegen Sie sich, wie die Menge aller oberen Schranken für eine gemäß (ii) gegebene Menge M aussieht (offen oder halboffen?) und wie Sie diese Menge nutzen können, um Mengen A, B mit den Eigenschaften aus (i) zu konstruieren.

2. Tipp: Überlegen Sie sich dann, welche Zahl als Supremum infrage kommt und weisen dann für diese Zahl nach, dass sie in der Tat das Supremum von M ist.

3. Tipp: Beachten Sie die Hinweise zur Bearbeitung zum Thema offene und abgeschlossene Intervalle. Diese sollten dabei helfen, den Beweis sauber zu formulieren.

Aufgabe 4.4 (3 Punkte): Alternative, hinreichende Bedingung für Vollständigkeit

Beweisen Sie dass die Tatsache, dass jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ besitzt, impliziert, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist.

Bemerkung: Dass tatsächlich jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ besitzt, wird später durch den Satz von Bolzano-Weierstraß bewiesen.

Bonusaufgabe 4.5 (5 Bonuspunkte): Eindeutigkeit der Dezimalbrüche

Gegeben seien zwei (unendliche) Dezimalbrüche

$$a = c.a_1a_2a_3a_4\ldots,$$
$$b = c.b_1b_2b_3b_4\ldots,$$

die gegen dieselbe Zahl $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. Dabei ist $a_n, b_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. O.B.d.A. gilt dabei, dass $c.a_1 \ldots a_n \geq c.b_1 \ldots b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (ansonsten werden a und b vertauscht). Zeigen Sie, dass entweder $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt oder, dass eine natürliche Zahl $k \geq 1$ existiert, sodass die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(i) $a_n = b_n \quad$ für alle $n < k$,

(ii) $a_k = b_k + 1$,

(iii) $a_n = 0 \quad$ für alle $n > k$, und

(iv) $b_n = 9 \quad$ für alle $n > k$.

Bemerkung: Da die Periode $c_{n-1}c_n\overline{9}$ mit $c_{n-1}(c_n + 1)0\ldots$ identifiziert wird, ist somit die Eindeutigkeit der Dezimalbruchdarstellung gezeigt.