Gewöhnliche Differentialgleichungen - Übungsblatt 11

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Christian Düll

Abgabe: 21. Januar, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 11.1 6 Punkte

Das folgende System besitzt einen nicht-hyperbolischen Fixpunkt im Ursprung. Untersuchen Sie daher mit der Methode von Lyapunov dessen Stabilität.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x^3 + 2y^3 \\ -2xy^2 \end{pmatrix} = F(x, y).$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $L(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Aufgabe 11.2 6 Punkte

Sei $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wir betrachten das System

$$\begin{cases} x' = -h(x, y)x + y \\ y' = -h(x, y)y - x^3 \end{cases} \tag{1}$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, mittels einer Lyapunovfunktion, die Stabilität des Ursprungs zu untersuchen.

a) Nehmen Sie zunächst an, dass $h(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Finden Sie eine Lyapunovfunktion und untersuchen Sie die Stabilität des Ursprungs.

b) Es gelte nun $h(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie die Stabilität des Ursprungs.

Hinweis: Zu a): Verwenden Sie den Ansatz $V(x, y) = F(x) + G(y)$ *und versuchen Sie mit dem Ansatz eine Lyapunovfunktion zu konstruieren, die entlang von Lösungen in* B *konstant ist.*
Zu b): Nutzen Sie die Lyapunovfunktion aus a).

Aufgabe 11.3 4 Punkte

Betrachten Sie für $\mu \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ die folgende parameterabhängige Differentialgleichung

$$y' = F(y, \mu) = (y - 1)(e^{y^2 - \mu} - 1).$$

a) Bestimmen Sie alle Fixpunkte in Abhängigkeit von μ. Identifizieren Sie alle Bifurkationspunkte $(y^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^2$. Wenn Sie die Änderungen der Fixpunkte betrachten, welche Arten von Verzweigungen erwarten Sie? Es ist nicht nötig, die analytischen Kriterien aus der Vorlesung anzuwenden!

b) Zeichnen Sie das Bifurkationsdiagramm und geben Sie dabei an, welche Gleichgewichtspunkte stabil und welche instabil sind.