Anmerkung: Wir benutzen für Referenzen unser mit ein paar Kommilitonen zusammen getextes Skript, zu finden unter `https://flavigny.de/lecture/pdf/analysis2`.

Aufgabe 1

1. Es gilt

$$\begin{aligned}\|f(t,u(t))\| &\leq \alpha(t)\,\|u(t)\| + \beta(t)\\ &= \alpha(t)\left\|\int_{t_0}^{t} u(t')\,\mathrm{d}t' - u(t_0)\right\| + \beta(t)\\ &\leq \alpha(t)\int_{t_0}^{t}\|f(t',u(t'))\|\,\mathrm{d}t' + u_0\alpha(t) + \beta(t)\end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt also $\|f(t,u(t))\| \leq e^{\alpha(t)(t-t_0)}\cdot(u_0\alpha(t)+\beta(t))$. Da f auch noch stetig ist, folgt nach dem Existenzsatz von Peano die lokale Existenz. Es gilt außerdem

$$\|y(t)\| \leq y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\alpha(t)(t-t_0)}\cdot(u_0\alpha(t)+\beta(t))\,\mathrm{d}t$$

Der Integrand ist stetig, daher auf dem kompakten Intervall $[0,t]$ Riemann-integrierbar und die Stammfunktion ist wieder stetig. Folglich ist erhalten wir nach Korollar 5.10 die globale Existenz einer Lösung.

2. Es gilt

$$\begin{aligned}\|f_1(t,x)\| &= \left\|t|x_1|^{\frac{1}{2}} + \sin(t)x_2\right\| \qquad\qquad \leq |t|(|x_1|+1)+|x_2|\\ &\leq (|t|+1)(|x_1|+1) + (|t|+1)|x_2|\\ &= (|t|+1)(|x_1|+|x_2|) + |t| + 1\\ &= \alpha(t)\,\|x\|_1 + \beta(t)\end{aligned}$$

Also ist f_1 linear beschränkt durch $\alpha(t)=\beta(t)=|t|+1$. Außerdem gilt auch

$$\begin{aligned}\|f_1\| &= \left\|e^{-t^2|x_1|} + x_1\frac{1}{1+x_2^2}\right\|\\ &\leq 1 + |x_1|\\ &\leq \|x\|_1 + 1\end{aligned}$$

Daher ist auch f_2 linear beschränkt, mit $\alpha(t)=\beta(t)=1$.

Aufgabe 2

Es gilt

$$\begin{aligned}u^{(3)}(t) &= \cos(u(t))\cdot u'(t) - 2u''(t)\\ &= \cos(u(t))\cdot u'(t) - 2(-\sin(u(t)) - 2u'(t))\\ &= 2\sin(u(t)) + \cos(u(t))\cdot u'(t) + 4u'(t)\end{aligned}$$

und

$$u^{(4)}(t) = 2u'(t)\cos(u(t)) + \cos(u(t))u''(t) - \sin(u(t))u'(t) + 4u''(t)$$

Wir benötigen die Ableitungen allerdings nur an der Stelle 0. Dort ist

$$\begin{aligned}
u(0) &= 0 \\
u'(0) &= 1 \\
u''(0) &= -\sin(u(0)) - 2u'(0) = -\sin(0) - 2 = -2 \\
u^{(3)}(0) &= 2\sin(u(0)) + \cos(u(0)) \cdot u'(0) + 4u'(0) \\
&= 2\sin(0) + \cos(0) \cdot 1 + 4 = 5 \\
u^{(4)}(0) &= 2u'(0)\cos(u(0)) + \cos(u(0))u''(0) - \sin(u(0))u'(0) + 4u''(0) \\
&= 2\cos(0) + \cos(0) \cdot (-2) - \sin(0) + 4(-2) = 2 - 2 - 8 = -8
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
T_4(u, t, t_0 = 0) &= u(0) + u'(0)t + \frac{u''(0)}{2}t^2 + \frac{u^{(3)}(0)}{6}t^3 + \frac{u^{(4)}}{24}t^4 \\
&= t + \frac{-2}{2}t^2 + \frac{5}{6}t^3 - \frac{8}{24}t^4 \\
&= t - t^2 + \frac{5}{6}t^3 - \frac{1}{3}t^4.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

$\phi(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2 - t + 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $\phi'(t) = A(t)\phi(t)$ und daher

$$\begin{aligned}
A(t) &= \phi'(t) \cdot \phi^{-1}(t) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2t & 2t-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{(1+t)(t^2+t-1) - t^2 \cdot t} \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & -1 \\ -t^2 & 1+t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2t & 2t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & -1 \\ -t^2 & 1+t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 - t^2 & -1 + 1 + t \\ 2t^3 - 2t^2 + 2t - 2t^3 + t^2 & -2t + (2t-1)(1+t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -t + 1 & t \\ -t^2 + 2t & 2t^2 - t - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Um eine partikuläre Lösung zu bestimmen, berechnen wir

$$\begin{aligned}
u(t) &= \phi(t)\left(\int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + c\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2-t+1 \end{pmatrix} \cdot \left(\int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} s^2-s+1 & -1 \\ -s^2 & 1+s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} \,\mathrm{d}s + c\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2-t+1 \end{pmatrix} \cdot \left(\int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} s^2-2s+1 \\ s \end{pmatrix} \,\mathrm{d}s + c\right) \\
&= \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2-t+1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - t^2 + t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t_0^3 - t_0^2 + t_0 \\ \frac{1}{2}t_0^2 \end{pmatrix} + c\right)
\end{aligned}$$

Nun wählen wir c so, dass $u(0) = (1, 0)$ ist. Das ergibt die Gleichung

$$u(0) = \phi(0) \cdot \left(0 - \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t_0^3 - t_0^2 + t_0 \\ \frac{1}{2}t_0^2 \end{pmatrix} + c\right)$$

Es gilt $t_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot c = c$$

Also wählen wir $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und erhalten als Lösung:

$$u(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2-t+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3}t^3 - t^2 + t + 1 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

(a) Wir formulieren zunächst das RWP als System 1. Ordnung. Dann erhalten wir das System

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow Y'(t) &= A(t) \cdot Y(t) + f(t)
\end{aligned}$$

mit $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}[a, b]$ und $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}[a, b]$, wobei wir noch keine Nebenbedingungen berücksichtigt haben. Sei $U_0 = \begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_0'(t) \end{pmatrix}$ eine Lösung der AWA $U_0(a) = 0$ nach Bemerkung 5.32 und seien U_1, U_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung mit, ebenfalls nach Bemerkung 5.32 $U(t) = [U_1(t), U_2(t)]$ und $U(0) = \mathbb{I}_2$. Dann lässt sich eine beliebige Lösung der RWA in der Form $U_0(t) + s_1U_1(t) + s_2U_2(t)$ schreiben. Die Lösung ist eindeutig, wenn s_1, s_2 durch die Randbedingungen eindeutig festgelegt sind. Die Randbedingungen schreiben sich in der folgenden Form

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}u_0(a)\\ u_0'(a)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1(a) & u_2(a)\\ u_1'(a) & u_2'(a)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\eta\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_0 & \alpha_1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\left(\underbrace{U_0(a)}_{=0}+U(a)\cdot s\right)=\begin{pmatrix}\eta_0\\ 0\end{pmatrix}$$

Und völlig analog

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta_0 & \beta_1\end{pmatrix}\cdot(U_0(b)+U(b)\cdot s)=\begin{pmatrix}0\\ \eta_1\end{pmatrix}$$

Bringen wir die Terme, die nicht von s abhängen, auf die andere Seite, und vereinfachen, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix}\alpha_0u_1(a)+\alpha_1u_1'(a) & \alpha_0u_2(a)+\alpha_1u_2'(a)\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot s=\begin{pmatrix}\eta_0\\ 0\end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ \beta_0u_1(b)+\beta_1u_1'(b) & \beta_0u_2(b)+\beta_1u_2'(b)\end{pmatrix}\cdot s=\begin{pmatrix}0\\ \eta_1-\beta_0u_0(b)-\beta_1u_0'(b)\end{pmatrix}$$

Addieren der zwei Gleichungen ergibt

$$\begin{pmatrix}\alpha_0u_1(a)+\alpha_1u_1'(a) & \alpha_0u_2(a)+\alpha_1u_2'(a)\\ \beta_0u_1(b)+\beta_1u_1'(b) & \beta_0u_2(b)+\beta_1u_2'(b)\end{pmatrix}\cdot s=\begin{pmatrix}\eta_0\\ \eta_1-\beta_0u_0(b)-\beta_1u_0'(b)\end{pmatrix}$$

Diese Gleichung ist eindeutig lösbar genau dann, wenn die Determinante der linken Matrix $\neq 0$ ist, was zu zeigen war.

(b) Es gilt $u_0(t)=-\cos(t)+1$. Dann ist nämlich $u_0(0)=0$ und $u_0'(0)=0$ erfüllt. $u_1(t)=\cos(t), u_2(t)=\sin(t)$ bilden ein Fundamentalsystem, da

$$\left.\begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\right|_{t=0}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen daher die Matrix aus Kriterium (**) und setzen sofort $a=0$ sowie $\alpha_1=\beta_1=0$, da der Definitionsbereich in allen drei Fällen bei 0 beginnt und die Bedingungen nie von u' abhängen. Außerdem sind alle Vorfaktoren in den Randbedingungen immer 1, sodass wir $\alpha_0=\beta_0=1$ setzen können und daher erhalten

$$M=\begin{pmatrix}\cos(0) & \sin(0)\\ \cos(b) & \sin(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \cos(b) & \sin(b)\end{pmatrix}$$

In Fall (i)ist $\det M=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-1$ und daher ist die Lösung eindeutig bestimmt. Im Fall (ii) und (iii) ist $\det M=\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=0$. Also gilt Kriterium (**) nicht. Wir erhalten für (ii) stattdessen die Gleichung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot s &= \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 - u_0(\pi) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot s &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 + \underbrace{\cos(\pi) - 1}_{=0} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Offensichtlich sind also alle Vektoren $s = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ eine Lösung des Gleichungssystems und damit lösen alle Funktionen $u(t) = u_0(t) + x \cdot \sin(x) = x\sin(t) - \cos(t) + 1$ die RWA, was man auch leicht durch Einsetzen verifiziert. Es gibt in diesem Fall also unendlich viele Lösungen. Wir erhalten für (iii) stattdessen die Gleichung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot s &= \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 - u_0(\pi) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot s &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \underbrace{\cos(\pi) - 1}_{=0} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} s_1 \\ -s_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung, daher hat auch die Randwertaufgabe für diese Anfangsbedingungen keine Lösung.