Aufgabe 6.1

(a) Laut Hinweis existiert eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k \in C^0(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ mit $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$. Nach Proposition 3.36 existiert daher eine Teilfolge f_{k_j} mit $f_{k_j} \to f$ f. ü. (nach Umnummerierung f_k). Da $\mathscr{L}^1(\Omega) < \infty$ lässt sich also der Satz von Egorov anwenden und es gibt zu jedem $\epsilon > 0$ eine Menge $E_{\epsilon/3} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ mit $\mathscr{L}^1(E_{\epsilon/3}) < \epsilon/3$ und $f_k \rightrightarrows f$ in $\Omega \setminus E_{\epsilon/3}$. Es existiert ein $C \in \mathbb{R}$, sodass $\mu(\Omega \cap (-C, C)^c) \leq \epsilon/3$. Wäre dies nicht der Fall, so könnte man eine Folge C_k finden, sodass $\mu(\Omega \cap (-C_k, C_k)^c \cap (-C_{k+1}, C_{k+1})) = \epsilon/3$. Aufgrund der Additivität des Lebesgue-Maßes ist das ein Widerspruch zu $\mu(\Omega) < \infty$. Wir definieren $K' = \Omega \cap (-C, C) \setminus E_{\epsilon/3}$. Aufgrund der Additivität und Regularität des Lebesgue-Maßes ist $\mathscr{L}^1(\Omega) - 2\epsilon/3 \leq \mathscr{L}^1(\Omega \cap (-C, C) \setminus E_{\epsilon/3}) = \sup\{\mathscr{L}^1(K) \colon K \subset \Omega \cap (-C, C) \setminus E_{\epsilon/3}, \text{abgeschlossen}\}$. Daher existiert ein abgeschlossenes $K \subset \Omega \cap (-C, C) \setminus E_{\epsilon/3}$ mit $\mu(K) > \mathscr{L}^1(\Omega) - \epsilon$. K ist wegen $K \subset (-C, C)$ auch beschränkt und daher kompakt. Außerdem gilt $f_k \rightrightarrows f$ auf K als Teilmenge von $\Omega \setminus E_{\epsilon/3}$. f ist als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von stetigen Funktionen wieder stetig auf der kompakten Menge K.

(b) Sei $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen zwischen 0 und 1, d.h. $0 < q_i < 1 \forall i \in \mathbb{N}$. Wir definieren dann die offene Menge $O = \cup_{i=1}^n (q_i, q_i + \epsilon^{-i})$. Damit ist O^C und folglich $K \coloneqq \Omega \setminus O = \Omega \cap O^c = (0, 1) \cap O^c = [0, 1] \cap O^c$ abgeschlossen. Als Teilmenge von $(0, 1)$ ist K auch kompakt. Wegen $\mathbb{Q} \cap K = \emptyset$ gilt $f|_K \equiv 0$ und damit ist $f|_K$ stetig.

Aufgabe 2

(a) Die Folge konvergiert nicht gleichmäßig, da $\forall c \in \mathbb{R} \colon \exists k \in \mathbb{N} \colon f_k(2^{-k}) = \sqrt{2}^k > c$. Die Folge konvergiert im Maß gegen $f \equiv 0$, da

$$\mu(\{x \in \mathbb{R} \colon |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}) = \mu(x \in [2^{-k+1}, 2^k] \colon \frac{1}{\sqrt{x}} > \epsilon) < \mu([2^{-k+1}, 2^k]) = 2^{-k+1} \to 0.$$

Die Folge konvergiert punktweise gegen $f \equiv 0$. Sei dazu $x \in \mathbb{R}$. Dann wähle $N = \lceil -\log_2(x) \rceil$. Dann gilt $\forall k > N \colon 2^{-k} < 2^{-N} \leq 2^{\log_2(x)} = x$. Insbesondere ist also $\forall k > N \colon \chi_{I_k}(x) = 0$ und damit $\forall k > N \colon f_k(x) = 0$.

(b) Konvergiert die Folge in L^p, so muss der Grenzwert stets 0 sein. Wäre nämlich $f_k \to f \neq 0$ in L^p, so würde daraus $f_k \to f \neq 0$ im Maß folgen. Das steht aber im Widerspruch zu $f_k \to 0$ im

Maß. Es gilt für $p \neq 2$:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \|f\|_{L^p(\mathbb{R},\mathscr{L}^1)} &= \lim_{k\to\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{I_k}(x))^p \, \mathrm{d}\mathscr{L}^1 \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\int_{I_k} x^{-\frac{p}{2}} \, \mathrm{d}\mathscr{L}^1 \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\int_{2^{-(k+1)}}^{2^{-k}} x^{-\frac{p}{2}} \, \mathrm{d}\mathscr{L}^1 \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\left[-\frac{2}{p-2} x^{-\frac{p-2}{2}} \right]_{2^{-(k+1)}}^{2^{-k}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{2}{p-2} 2^{k\frac{p-2}{2}} + \frac{2}{p-2} 2^{(k+1)\frac{p-2}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(-2^{k\frac{p-2}{2}} + 2 \cdot 2^{k\frac{p-2}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(2^{k\frac{p-2}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{2}{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \lim_{k\to\infty} \left(2^{\frac{p-2}{2p}} \right)^{k}
\end{aligned}$$

Dieser Term divergiert für alle $p > 2$. Für alle $p < 2$ konvergiert er gegen 0, sodass $f_k \to 0$ in L^p. Für $p = 2$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \|f\|_{L^2(\mathbb{R},\mathscr{L}^1)} &= \lim_{k\to\infty} \left(\int_{2^{-k+1}}^{2^{-k}} \frac{1}{x} \, \mathrm{d}\mathscr{L}^1 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\ln(2^{-k}) - \ln(2^{-(k+1)})} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sqrt{-k\ln(2) + (k+1)\ln(2)} \\
&= \sqrt{\ln(2)}
\end{aligned}$$

Daher konvergiert die Folge $f_k \to 0$ in L^p für alle $1 \leq p < 2$.

Aufgabe 3

(a) Es gilt $\mathscr{B}(\mathbb{R})^n = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\})$. Behauptung: $\sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}) = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon A_i \text{ offen}\})$

Beweis. Die Inklusion $\supset$ ist trivial. Es genügt daher für beliebige $A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ zu zeigen: $\tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_n \in \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon A_i \text{ offen}\})$. Dies ist induktiv leicht einzusehen. Der Induktionsanfang ist trivial. Lässt man nun $A_1 =: B_1$ bis $A_{n-1} =: B_{n-1}$ fest, so erhält man

$$\sigma(\{B_1 \times \cdots \times B_{n-1} \times A_n \colon A_n \text{ offen}\}) = \{B_1 \times \cdots \times B_{n-1} \times A \colon A \in \underbrace{\sigma(\{A_n \colon A_n \text{ offen}\})}_{=\mathscr{B}(\mathbb{R})}\}.$$

□

Das kartesische Produkt endlich vieler offener Mengen ist stets wieder offen. (Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in A_1 \times \ldots A_n$. Dann existieren $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ mit $U_{\epsilon_i}(x_i) \subset A_i \forall i$. In euklidischer Norm gilt $|(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n)| \geq \max_i |x_i - y_i|$. Dann ist $U_{\min_i \epsilon_i}((x_1, \ldots, x_n)) \subset U_{\epsilon_1}(x_1) \times \cdots \times U_{\epsilon_n}(x_n) \subset A_1 \times \cdots \times A_n$. Aufgrund der Äquivalenz von Normen im $\mathbb{R}^n$ folgt daraus bereits die gewünschte Aussage.) Insbesondere ist also $\{A_1 \times \cdots \times A_n \subset \mathbb{R}^n \colon A_i \text{ offen}\} \subset \{A \in \mathbb{R}^n \colon A \text{ offen}\}$ und damit auch

$$\mathscr{B}(\mathbb{R})^n = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}) = \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon A_i \text{ offen}\}) \subset \sigma(\{A \text{ offen}\}) = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$$

Nun zeigen wir die andere Inklusion. Dazu teilen wir den $\mathbb{R}^n$ in kleine Würfel mit Kantenlänge ϵ ein. Es gilt

$$\mathbb{R}^n = \biguplus_{i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}} W^{\epsilon}_{i_1, \ldots, i_n}$$

mit $W^{\epsilon}_{i_1, \ldots, i_n} = [i_1\epsilon, (i_1 + 1)\epsilon) \times \cdots \times [i_n\epsilon, (i_n + 1)\epsilon)$. Dann gilt

$$\bigcup_{\substack{i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z} \\ W^{\epsilon}_{i_1, \ldots, i_n} \subset A}} W^{\epsilon}_{i_1, \ldots, i_n} \subset A.$$

Für eine offene Menge A gilt

$$\forall x \in A \colon \exists \epsilon_x > 0, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z} \colon W^{\epsilon}_{i_1, \ldots, i_n} \subset A.$$

Wählt man nun $m > \frac{1}{\epsilon_x} \implies \epsilon_x > \frac{1}{m}$, so gilt demzufolge

$$x \in \bigcup_{\substack{i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z} \\ W^{1/m}_{i_1, \ldots, i_n} \subset A}} W^{1/m}_{i_1, \ldots, i_n}.$$

Insbesondere ist also

$$A \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z} \\ W^{1/m}_{i_1, \ldots, i_n} \subset A}} W^{1/m}_{i_1, \ldots, i_n} \subset A$$

und damit haben wir A als abzählbare Vereinigung von Würfeln $W^{\epsilon}_{i_1, \ldots, i_n}$ dargestellt. Offensichtlich ist jedes der Intervalle $[i_1\epsilon, (i_1 + 1)\epsilon), \ldots, [i_n\epsilon, (i_n + 1)\epsilon) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und damit $W^{\epsilon}_{i_1, \ldots, i_n} \in \{A_1 \times \cdots \times A_n \colon A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ und folglich $A \in \sigma(\{A_1 \times \cdots \times A_n \colon A_i \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$, wobei A eine beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ war. Da die offenen Mengen gerade $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ erzeugen folgt daraus $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$.

(b) Es gilt $\Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^{n-1}$. Also ist $N \times \Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \times \mathscr{B}(\mathbb{R})^{n-1} = \mathscr{B}(\mathbb{R})^n = \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt nach Satz 4.5

$$\mathscr{L}^n(N \times \Omega) = \mathscr{L}^1(N) \cdot \mathscr{L}^{n-1}(\Omega) = 0.$$

(c) Sei $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ nicht $(\mathscr{L}_1)^{n-1}$-messbar (Eine solche Menge existiert stets nach Vitali). Dann gilt auch $N \times A \notin (\mathscr{L}_1)^n$ für ein $N \subset \mathbb{R}$. Wähle also ein $N \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ mit $\mathscr{L}^1(N) = 0$. Es existiert ein $\Omega \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $A \subset \Omega$. Nach Teilaufgabe b gilt dann

$$\mathscr{L}^n(N \times A) \leq \mathscr{L}^n(N \times \Omega) = 0.$$

Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathscr{L}^n$ ist $N \times A$ damit messbar, $N \times A \notin (\mathscr{L}_1)^n$ aber $N \times A \in \mathscr{L}_n$. Die Inklusion $(\mathscr{L}_1)^n \subset \mathscr{L}_n$ folgt aus der Definition von $\mathscr{L}_n$ als Vervollständigung von $(\mathscr{L}_1)^n$.

Zusatzaufgabe

(a) Sei $f_k = k \cdot \chi_{[0,\frac{1}{k}]}$. Dann gilt $f_k \to 0$ punktweise fast-überall. Allerdings erhalten wir

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,\frac{1}{k}]} k \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} 0 \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 .$$

Daher ist diese Aussage falsch.

(b) **fehlt**

(c) Sei A nicht Lebesgue-messbar. Wähle $f_1 = 2e^{-x^2}$ und für $k \geq 2$ $f_k = (\chi_A(x) + \frac{1}{k})e^{-x^2}$. Dann konvergiert $f_k \searrow \chi_A(x)e^{-x^2}$ punktweise fast-überall, es gilt außerdem $f_k \geq 0$ und $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$. Allerdings ist f wegen $f^{-1}([0,1]) = A$ nicht einmal messbar, geschweige denn $f \in L^1(\mathbb{R})$. Daher ist diese Aussage falsch.

(d) Sei $a_k \coloneqq \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \mod 1$ und sei $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k = \begin{cases} \chi_{a_k, a_{k+1}} & |a_{k+1} > a_k \\ 0 & |\text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|f_k\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 = \begin{cases} \int_{a_k}^{a_{k+1}} 1 \,\mathrm{d}\mathscr{L}^1 & |a_{k+1} > a_k \\ 0 & |\text{sonst} \end{cases} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Also gilt $f_k \to 0$ in L^1. Allerdings konvergiert f_k in keinem Punkt aus $[0,1]$, da es $\forall x \in [0,1] \forall N \in \mathbb{N}$ stets ein $k \geq N$ gibt mit $a_k \leq x \leq a_{k+1} \implies f_k(x) = 1$ (weil die harmonische Reihe divergiert). Damit konvergiert f_k nicht punktweise fast-überall und die Aussage ist falsch.