Aufgabe	1	2	3	4	Bonus	$\sum$
Punkte						

Aufgabe 1

Betrachte für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) **ZZ:** f_1 ist für $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.

Beweis. 1. Stetigkeit: Es gilt $\lim\limits_{x \nearrow 0} x \sin(1/x) = \lim\limits_{x \searrow 0} x \sin(1/x) = 0$ nach Aufgabe 9.3.

2. Differenzierbarkeit: Es gilt für $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h) \sin(\frac{1}{x_0 + h}) + x_0 \sin(\frac{1}{x_0})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \sin(\frac{1}{h}) + 0}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \sin\left(\frac{1}{h}\right) \\
&= \sin\left(\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h}\right)\right) \\
&= \sin(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

(b) **ZZ:** f_2 ist für $x_0 = 0$ differenzierbar, aber f_2' ist an der Stelle nicht stetig.

Beweis. 1. Differenzierbarkeit: Es gilt für $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 \sin(\frac{1}{x_0 + h}) + x_0^2 \sin(\frac{1}{x_0})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cdot \sin(\frac{1}{h}) + 0}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} h \cdot \sin(1/h) \\
&= 0
\end{aligned}$$

2. Stetigkeit: Es gilt $f_2'' = 2x \sin(1/x) - \frac{x^2 \cos(1/x)}{x^2} = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \implies \lim\limits_{x \to 0} (2x \sin(1/x) - \cos(1/x))$ ist nicht definiert. Somit ist f_2' insbesondere nicht stetig in $x_0 = 0$.

□

(c) **ZZ:** f_3 ist nicht in $x_0 = 0$ zweimal differenzierbar:

Beweis. Es gilt für $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 \sin(\frac{1}{x_0+h}) + x_0^3 \sin(\frac{1}{x_0})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \cdot \sin(\frac{1}{h}) + 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h^2 \cdot \sin(1/h) \\ &= 0\end{aligned}$$

Nach Kettenregel gilt jedoch $f_3' = 3x^2 \sin(1/x) - x\cos(1/x)$ und somit insbesondere

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3 \sin(\frac{1}{x_0+h}) - (x_0+h)\cos(\frac{1}{x_0+h}) + x_0^3 \sin(\frac{1}{x_0}) + x_0 \cos(\frac{1}{x_0})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \sin(\frac{1}{h}) + h\cos(\frac{1}{h})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot (h^2 \sin(\frac{1}{h}) - \cos(\frac{1}{h}))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h^2 \sin(\frac{1}{h}) - \cos(\frac{1}{h}) \; \lightning\end{aligned}$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} \cos(\frac{1}{h})$ ist nicht definiert. Somit ist f_3 für $x_0 = 0$ nicht zweimal differenzierbar.

□

Aufgabe 2

(a) **Behauptung:** $f^{(k)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \prod_{n=1}^{k-1}(2n-1) \cdot x^{-\frac{2k-1}{2}}$

Beweis. **Induktionsanfang:** $k = 1 : f^{(1)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \prod_{n=1}^{0}(2-1) \cdot x^{-\frac{2-1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
Induktionsbehauptung: Für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung.
Induktionsschritt: $k \to k+1$:

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \prod_{n=1}^{k-1}(2n-1) \cdot x^{-\frac{2k-1}{2}} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \prod_{n=1}^{k-1}(2n-1) \cdot -\frac{1}{2} \cdot (2k-1) \cdot x^{-\frac{2k-1}{2}-1} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot \prod_{n=1}^{k}(2n-1) \cdot x^{-\frac{2k+1}{2}}\end{aligned}$$

□

(b) $f^{(k)}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \prod_{n=1}^{k-1}(2n-1) \cdot x^{-\frac{2k-1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \cdot x^{-\frac{2k-1}{2}}$

(c)

$$\begin{aligned}
T_\infty(x, x_0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \cdot x_0^{-\frac{2k-1}{2}}}{k!} \cdot (x-x_0)^k \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^{\frac{1}{2}-k}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right) k!} \cdot (x-x_0)^k
\end{aligned}$$

(d) Zunächst formen wir Aussage (ii) zu (ii') um.

$$\begin{aligned}
\Gamma(\varepsilon - k) &= (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(-\varepsilon)\Gamma(1+\epsilon)}{\Gamma(k+1-\epsilon)} \\
(-1)^{k-1} \frac{\Gamma(k+1-\varepsilon)}{\Gamma(-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)} &= \frac{1}{\Gamma(\varepsilon - k)}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^k \cdot \prod_{n=1}^{k-1}(2n-1) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{k-1} \cdot -\frac{1}{2^{k-1}} \cdot \prod_{n=1}^{k-1}(2n-1)$$

Mit (i) folgt

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1)^{k-1} \cdot \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

Mit Aussage (iii) folgt sofort

$$= \frac{1}{2} \cdot (-1)^{k-1} \cdot \frac{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}$$

Mit Aussage (ii') folgt für $\varepsilon = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{3x}-5x\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(e^{3x}-5x)\cdot\frac{1}{x}} \implies \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln(e^{3x}-5x)\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}-5}{e^{3x}-5x} = -2$$
$$\implies \lim_{x\to 0}\left(e^{3x}-5x\right)^{1/x} = e^{-2}$$

(b) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \left(e^{3x} - 5x\right)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(e^{3x}-5x)\cdot\frac{1}{x}} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln(e^{3x} - 5x)\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x} - 5}{e^{3x} - 5x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{5}{e^{3x}}}{1 - \frac{5x}{e^{3x}}} = 3 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \left(e^{3x} - 5x\right)^{1/x} = e^3$$

(c) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 2^x}{x} \Longrightarrow \left(5^x - 2^x\right)' = \left(e^{\ln(5)\cdot x} - e^{\ln(2)\cdot x}\right)' = \ln(5)e^{\ln(5)\cdot x} - \ln(2)e^{\ln(2)\cdot x}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{5^x - 2^x}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(5)e^{\ln(5)\cdot x} - \ln(2)e^{\ln(2)\cdot x} = \ln(5) - \ln(2) = \ln(\frac{5}{2})$$

(d) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2} \Longrightarrow \left(\frac{x - \sin(x)}{x^2}\right)' = \frac{1 - \cos(x)}{2x}$$
$$\Longrightarrow \left(\frac{1 - \cos(x)}{2x}\right)' = \frac{\sin(x)}{2} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2} = 0$$

(e) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} \Longrightarrow \left(\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}\right)' = \frac{\frac{1}{1+x} - \cos(x)}{2x}$$
$$\Longrightarrow \left(\frac{\frac{1}{1+x} - \cos(x)}{2x}\right)' = \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \sin(x)}{2}$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \sin(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

(f) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} ((1 + x^{-1})^x - e) \cdot x = \lim_{y\to\infty} \frac{((1+y)^{\frac{1}{y}} - e)}{y} = 0$$

(g) Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} ((1 + x^{-1})^x - e) \cdot x$$

Substitution: $y = \frac{1}{x}$

$$= \lim_{y\to 0} ((1+y)^{\frac{1}{y}} - e) \cdot \frac{1}{y}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{\left(e^{\ln(1+y)\cdot\frac{1}{y}} - e\right)}{y}$$

l'Hospital

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{y\to 0}\left(\frac{1}{y(1+y)} - \frac{\ln(1+y)}{y^2}\right)\cdot(1+y)^{\frac{1}{y}} \\
&= e\cdot \lim_{y\to 0}\frac{1}{y(1+y)} - \frac{\ln(1+y)}{y^2} \\
&e\cdot \lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{(1+y)} - \ln(1+y)}{y^2}
\end{aligned}
$$

l'Hospital

$$
\begin{aligned}
&= e\cdot \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{1+y} - \frac{y}{(1+y)^2} - \frac{1}{1+y}}{2y} \\
&= e\cdot \lim_{y\to 0} -\frac{1}{2(1+y)^2} \\
&= e\cdot -\frac{1}{2} = -\frac{e}{2}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

(a) Folgende Funktion muss minimiert werden:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - m\cdot x_i - \overline{y} + m\cdot\overline{x})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(m\cdot(\overline{x}-x_i) + y_i - \overline{y})^2$$

Daher setzen wir ihre Ableitung gleich 0.

$$
\begin{aligned}
0 = r'(m^*) &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{N}(\overline{x}-x_i)\cdot 2\cdot(m^*\cdot(\overline{x}-x_i)+y_i-\overline{y}) \\
&= m^*\cdot\sum_{i=1}^{N}(\overline{x}-x_i)^2 + \sum_{i=1}^{N}(\overline{x}-x_i)\cdot(y_i-\overline{y})
\end{aligned}
$$

Umstellen nach $m*$ ergibt

$$m^* = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\overline{x}-x_i)\cdot(\overline{y}-y_i)}{\sum_{i=1}^{N}(\overline{x}-x_i)^2}$$

Um zu zeigen, dass m^* wirklich ein Minimum von r ist, müssen wir überprüfen, dass $r''(m^*) > 0$ ist

$$r''(m^*) = \sum_{i=1}^{N}(\overline{x}-x_i)^2 \geq 0$$

(b) Wir möchten die Nullstelle der Gleichung $m^*\cdot x + b^*$ herausfinden. Umstellen ergibt: $x = -\frac{b^*}{m^*}$. Einsetzen der Werte liefert $m^* = -15.0\overline{6}$ und $b^* = 473.1\overline{6}$ und daher $x \approx 31.43$. Folglich wird nach diesem Modell ab dem 32. Zettel niemand mehr abgeben.

Bonusaufgabe

(a) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}x\right) \overset{\text{Stetigkeit}}{=} \sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}x\right) = \sin(0) = 0$ für ein beliebiges $x \in [-\pi, \pi]$. Da $f_n(x) - 0$ stetig differenzierbar ist, $|\sin\left(\frac{1}{n}\pi\right)| = |\sin\left(\frac{1}{n} - \pi\right)|$ und es sich bei $[-\pi, \pi]$ um ein kompaktes Intervall handelt, folgt mit dem Mittelwertsatz, dass es ein $x_0 \in [-\pi, \pi]$ geben muss, sodass $|\sin(\frac{1}{n} \cdot x) - 0|$ extremal wird. Da nur bei $x = 0$ die Ableitung gleich 0 ist, sich dort aber ein Minimum des Betrags befindet, sind die globalen Maxima an den Rändern. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n} \cdot \pm\pi\right) = 0$, gilt $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\epsilon : |f_n(\pm\pi) - 0| < \epsilon$, wegen der Maximalität von $f(\pm\pi)$ gilt diese Aussage für alle $x \in [-\pi, \pi]$ und folglich ist die Funktionenfolge gleichmäßig konvergent.

(b) Fallunterscheidung:

- $x = 1 : \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$
- $x = 0 : \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$
- $0 < x < 1$: Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x(1-x)^{n+1}}{nx(1-x)^n}$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot (1-x) = \lim_{n\to\infty} (1-x) + \frac{1}{n}(1-x) = 1 - x < 1$. Diese Folge ist also monoton fallend und $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} < 1$. Außerdem ist stets $f_n(x) > 0$. Endlich viele Folgenglieder ändern nichts am Konvergenzverhalten, sodass $f_n(x)\ \forall n > N$ monoton fällt und durch 0 unten beschränkt ist. Für alle $n > N$ gilt also, da die Folge der Quotienten monoton fallend ist: $f_n(x) \leq f_N(x) \cdot \left(\frac{f_{N+1}(x)}{f_N(x)}\right)^{n-N}$. Nun ist $\left(\frac{f_{N+1}(x)}{f_N(x)}\right)$ nach Definition von N kleiner als 1. Es gilt also $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für ein beliebiges $x \in [0, 1]$. Gleichmäßige Konvergenz: Ableiten der Funktion führt zu $f_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1}$. Die Nullstelle dieser Funktion erhält man folgendermaßen.

$$\begin{aligned}
0 = f_n'(x_0) &= -n(1-x_0)^{n-1}(nx_0 + x_0 - 1) \\
&= nx_0 + x_0 - 1 \\
(1+n)x_0 &= 1 \\
x_0 &= \frac{1}{1+n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= n^2(1-x)^{n-2}(nx + x - 2) \\
f''(x_0) &= n^2(1 - \frac{1}{1+n})^{n-2}(n\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+n} - 2) \\
&= n^2(\frac{n}{1+n})^{n-2}(\frac{n+1}{1+n} - 2) \\
&= -n^2(\frac{n}{1+n})^{n-2}
\end{aligned}$$

Wegen $n \in \mathbb{N}$ ist dieser Ausdruck kleiner 0. Daher hat $f_n(x)$ an der Stelle x_0 ein Maximum. Nun ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$. Folglich gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass $\forall n \in \mathbb{N} : n > N_1 : \left|f_n(x_0) - \frac{1}{e}\right| < \frac{1}{2e}$ und daher $f_n(x_0) > \frac{1}{e}$. Angenommen, die Funktionenfolge würde gleichmäßig konvergieren, dann gäbe es ein $N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n > N_2 : \forall x \in [0,1] : |f_n(x) - 0| = f_n(x) < \epsilon$. Diese Aussage gilt insbesondere auch für $x = x_0$. Wähle nun $\epsilon = \frac{1}{2e}$. Dann ist $\forall n \in \mathbb{N} : n > \max(N_0, N_\epsilon) : \frac{1}{2e} < f_n(x_0) < \frac{1}{2e}$. Das ist allerdings ein Widerspruch.