Aufgabe 2

Wir nehmen $n > m$ an und erzeugen einen Widerspruch. Gilt $A^m \cong A^n$, so auch $A^m \otimes_A A/\mathfrak{m} \cong A^n \otimes_A A/\mathfrak{m}$. Nach Korollar 3.8 folgt $(A/\mathfrak{m})^m \cong (A/\mathfrak{m})^n$. Das Standarderzeugendensystem $(a_i)_{i=1}^m$ von A^m ist auch ein Erzeugendensystem von $(A/\mathfrak{m})^m$. Sei also ein Isomorphismus $\phi\colon (A/\mathfrak{m})^m \xrightarrow{\sim} (A/\mathfrak{m})^n$ gegeben. Dann gilt $x = \phi(y) = \phi(\sum_{i=1}^m \alpha_i a_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi(a_i)$. Insbesondere ist also durch $\phi(a_i)_{i=1}^m$ ein Erzeugendensystem von $(A/\mathfrak{m})^n$ gegeben. Dieses Erzeugendensystem ist dann auch ein m-elementiges Erzeugendensystem von $(A/\mathfrak{m})^n$ als $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum ($A/\mathfrak{m}$ ist ein Körper, da $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist). Der $A/\mathfrak{m}$-Vektorraum $(A/\mathfrak{m})^n$ hat aber bekanntlich die Dimension $n > m$, Widerspruch.

Aufgabe 4

(a) Sei $M \subset \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$. Das von M erzeugte Ideal $\mathfrak{a}$ ist das kleinste Ideal, das M enthält und daher gilt $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Insbesondere ist also $V(M) \subset V(\mathfrak{a})$. Die andere Richtung, also $V(\mathfrak{a}) \subset V(M)$, ist klar, da jedes Primideal, das $\mathfrak{a}$ enthält, sofort auch M enthalten muss. Sei nun $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Wir zeigen, dass dann auch $r(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p}$ gilt.

Sei $x \in r(\mathfrak{a})$. Dann $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Nun gilt $x^n \in \mathfrak{p} \overset{\mathfrak{p}\text{ prim}}{\Longrightarrow} x \in \mathfrak{p}$. Insgesamt erhalten wir $r(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p}$. Es folgt

$$\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \implies \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \implies r(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p} \implies \mathfrak{p} \in V(r(\mathfrak{a})),$$

also $V(\mathfrak{a}) \subset V(r(\mathfrak{a}))$. Die andere Richtung, also $V(r(\mathfrak{a})) \subset V(\mathfrak{a})$, ist klar, da jedes Primideal, das $r(\mathfrak{a})$ enthält, sofort auch $\mathfrak{a}$ enthalten muss.

(b) Für ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ gilt per Definition $0 \subset \mathfrak{p}$. Also ist $V(0) = \operatorname{Spec}(A)$. Wegen $\mathfrak{p} \neq A$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$, aber $1 \in \mathfrak{p} \implies \mathfrak{p} = A$ folgt $V(1) = \emptyset$.

(c) Es gilt

$$V\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = \left\{\mathfrak{p}\colon \bigcup_{i\in I} M_i \subset \mathfrak{p}\right\} = \{\mathfrak{p}\colon \forall i\colon M_i \subset \mathfrak{p}\} = \bigcap_{i\in I}\{\mathfrak{p}\colon M_i \subset \mathfrak{p}\} = \bigcap_{i\in I} V(M_i)$$

(d) Wir zeigen zunächst $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \Leftrightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$. Nach VL gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, also ist "$\Rightarrow$"bereits klar. Sei nun $x \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Dann gilt $x^2 \in \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p} \implies x \in \mathfrak{p}$. Damit ist auch "$\Leftarrow$"bewiesen. Wir schließen sofort $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$. Die Aussage $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ folgt aus Aufgabe (c).