Lineare Algebra 2 — Lösung zu Übungsblatt 8

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: Do 25.06.2020 um 9:15 Uhr

28. Aufgabe: *(6 Punkte, Isomorphismen von Moduln)* Seien R ein Ring, M und N zwei R-Moduln und $f\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist ein R-Modulisomorphismus.

(ii) Für alle R-Moduln L ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(L,M) &\to \mathrm{Hom}_R(L,N) \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

bijektiv.

Hinweis: Für die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) setze man in (ii) $L = N$ und $L = M$ ein.

Lösung:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Da f nach Voraussetzung ein Isomorphismus ist, exisitiert ein inverser R-Modulhomomorphismus $f^{-1}\colon N \to M$. Somit können wir für alle R-Moduln L die folgende Abbildung definieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(L,N) &\to \mathrm{Hom}_R(L,M) \\ h &\mapsto f^{-1} \circ h \end{aligned}$$

Diese Abbildung und die aus der Aufgabenstellung sind offensichtlich invers zueinander, woraus die Behauptung folgt.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wir setzen $L = N$ in der Abbildung der Aufgabenstellung. Damit erhalten wir die folgende Bijektion:

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathrm{Hom}_R(N,M) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(N,N) \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

Da $\mathrm{id}_N \in \mathrm{Hom}_R(N,N)$ folgt aus der Surjektivität, dass eine Abbildung $h \in \mathrm{Hom}_R(N,M)$ existiert, sodass $f \circ h = \mathrm{id}_N$.
Setzen wir analog $L = M$, so erhalten wir die Bijektion

$$\begin{aligned} \Psi\colon \mathrm{Hom}_R(M,M) &\xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_R(M,N) \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

Sei nun h gewählt wie oben, dann ist $h \circ f \in \mathrm{Hom}_R(M,M)$. Außerdem wird $h \circ f$ unter Ψ auf $f \circ h \circ f \overset{\text{s.o}}{=} \mathrm{id}_N \circ f = f$ abgebildet. Jedoch gilt auch, dass $\Psi(\mathrm{id}_M) = f \circ \mathrm{id}_M = f$ und aus der Injektivität von Ψ folgt, dass $h \circ f = id_M$. Insgesamt erhalten wir, dass f ein R-Modulisomorphismus ist.

29. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Elementare Tensorprodukte)* Man zeige:

(a) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$.

(b) $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) $2 \otimes 1 = 0$ in $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, aber $2 \otimes 1 \neq 0$ in $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Lösung:

(a) Für reine Tensoren $a \otimes b$ in $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gilt $a \otimes b = (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a) \otimes b = \frac{a}{2} \otimes 2b = \frac{a}{2} \otimes 0 = 0$. Da jedes Element in $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ eine Summe reiner Tensoren ist, folgt $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$.

(b) Wir bemerken zunächst, dass die $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismen $f : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}, b \mapsto 2b$ und $g : 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, a \mapsto \frac{a}{2}$ invers zueinander sind, und damit g ein $\mathbb{Z}$-Modulisomorphismus ist. Nach Bem. 8.11 ist damit die induzierte Abbildung

$$g \otimes id : 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\ a \otimes b \mapsto g(a) \otimes b = \frac{a}{2} \otimes b$$

ein Isomorphismus. Da nach Bem. 8.5 $h : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, a \otimes b \mapsto ab$ ein Isomorphismus ist, erhalten wir als Komposition dieser Isomorphismen den gewünschten Isomorphismus $h \circ (g \otimes \mathrm{id}) : 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) In $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist $2 \otimes 1 = 2 \cdot (1 \otimes 1) = 1 \otimes 2 = 1 \otimes 0 = 0$. Da die Abbildung $h \circ (g \otimes id)$ aus Aufgabenteil b) ein Isomorphismus ist und $h \circ (g \otimes id)(2 \otimes 1) = h(1 \otimes 1) = 1 \neq 0$ ist, folgt, dass auch $2 \otimes 1 \neq 0$ in $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.

30. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Ideale und Tensorprodukte)* Seien R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul.

(a) Man zeige, dass es einen eindeutigen surjektiven R-Modulhomomorphismus

$$f : I \otimes_R M \to IM$$

mit $f(a \otimes m) = am$ für $a \in I$, $m \in M$ gibt.

(b) Man zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass die Abbildung f aus Teil (a) im Allgemeinen kein R-Modulisomorphismus ist.
Hinweis: Man verwende Aufgabe 29 (b).

Lösung:

(a) Die Abbildung

$$I \times M \to IM, \quad (a, m) \mapsto am$$

ist offensichtlich R-bilinear. Aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts folgt damit, dass es genau einen R-Modulhomomorphismus

$$f : I \otimes_R M \to IM$$

mit $f(a \otimes m) = am$ für $a \in I$, $m \in M$ gibt.
Um die Surjektivität einzusehen, wähle $x \in IM$, dann hat x die Gestalt $x = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$ für $a_i \in I$, $m_i \in M$ und $n \in \mathbb{N}$.
Sei nun $y = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \mathrm{m}_i \in I \otimes_R M$, dann ist

$$f(y) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \mathrm{m}_i) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i \otimes \mathrm{m}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i = x$$

Also ist y ein Urbild von x und f ist damit surjektiv.

(b) Wir wählen in der Notation des ersten Aufgabenteils $R = \mathbb{Z}$, $I = 2\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann gilt einerseits

$$2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

nach Aufgabe 26 (b). Andererseits ist in diesem Fall $IM = 0$, denn die Elemente von IM bestehen gerade aus endlichen Linearkombinationen von Produkten von Elementen aus $2\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, diese Produkte sind aber stets 0.
Somit erhalten wir mit dem ersten Aufgabenteil, dass f hier die Nullabbildung ist und da $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$ ist, ist sie nicht injektiv. Also können wir mit diesem Gegenbeispiel folgern, dass f im Allgemeinen kein R-Modulisomorphismus ist.

31. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Eigenwerte und Tensorpodukte)* Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Seien $f, g \in \operatorname{End}_K(V)$ und sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f und $\mu \in K$ ein Eigenwert von g.

(a) Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Man zeige, dass $v \otimes w \neq 0$ in $V \otimes_K V$.

Hinweis: Man zeige zunächst, dass es eine bilineare Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$ gibt, sodass $\beta(v, w) \neq 0$.

(b) Man zeige, dass $\lambda\mu$ ein Eigenwert von $f \otimes g \in \operatorname{End}_K(V \otimes_K V)$ ist.

(c) Man zeige, dass $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von $f \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes g \in \operatorname{End}_K(V \otimes_K V)$ ist.

Lösung:

(a) Da $v \neq 0$ ist, existiert ein $f_v \in V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K)$, sodass $f_v(v) \neq 0$ ist. Analog existiert ein $f_w \in V^*$, sodass $f_w(w) \neq 0$ ist. Für die durch $\beta\colon V \times V \to K, (x, y) \mapsto f_v(x)f_w(y)$ definierte bilineare Abbildung gilt nun $\beta(v, w) = f_v(v)f_w(w) \neq 0$. Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts liefert damit eine lineare Abbildung $\varphi : V \otimes_K V \to K$, für die $\varphi(v \otimes w) = \beta(v, w) \neq 0$ gilt. Aus der Linearität von φ folgt damit $v \otimes w \neq 0$.

(b) Seien $v \in V \setminus \{0\}$ beziehungsweise $w \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektoren zu λ beziehungsweise μ. Da nach (a) $v \otimes w \neq 0$ ist und

$$(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w) = \lambda v \otimes \mu w = \lambda\mu(v \otimes w)$$

gilt, ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von $f \otimes g$.

(c) Da $(f \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes g)(v \otimes w) = (f \otimes \mathrm{id}_V)(v \otimes w) + (\mathrm{id}_V \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes w + v \otimes g(w) = \lambda v \otimes w + v \otimes \mu w = (\lambda + \mu) v \otimes w$ und $v \otimes w \neq 0$ ist, ist $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von $f \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes g$.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.