Aufgabe 1

a) $(\left|\sqrt{n+1}\right|+|\sqrt{n}|)\cdot(\left|\sqrt{n+1}\right|-|\sqrt{n}|) = n+1-n = 1 \implies (\left|\sqrt{n+1}\right|-|\sqrt{n}|) = \frac{1}{(\left|\sqrt{n+1}\right|+\left|\sqrt{n}\right|)} > 0$

b) Sei S eine obere Schranke für $(|\sqrt{n}|)_{n\in\mathbb{N}}$. Wähle nun $n = \lceil B^2 \rceil + 1$. Dann ist $|\sqrt{n}| = \left|\sqrt{\lceil B^2\rceil + 1}\right| > \left|\sqrt{B^2}\right| = B \lightning$.

c) $\left|\sqrt{n+1}\right| - |\sqrt{n}| = \frac{(\left|\sqrt{n+1}\right|-\left|\sqrt{n}\right|)(\left|\sqrt{n+1}\right|+\left|\sqrt{n}\right|)}{\left|\sqrt{n+1}\right|+\left|\sqrt{n}\right|} = \frac{n+1-n}{\left|\sqrt{n+1}\right|+\left|\sqrt{n}\right|} = \frac{1}{\left|\sqrt{n+1}\right|+\left|\sqrt{n}\right|} < \frac{1}{\left|\sqrt{n}\right|}$.

Da $|\sqrt{n}|_{n\in\mathbb{N}}$ strikt divergent ist, muss $\frac{1}{|\sqrt{n}|}_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $\left|\sqrt{n+1}\right| - |\sqrt{n}|_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\sqrt{n+1}\right| - |\sqrt{n}| = 0$. Nach Lemma 2.4 ist sie also auch eine Cauchy-Folge.

d) Da $\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1 - 2 > \left|\sqrt{1}\right| + 1 - 2 = 0$, ist $\left|\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1 - 2\right| = \left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1 - 2$.

$$= \left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| - 1 = \frac{\left(\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| - 1\right)\left(\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1\right)}{\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1} = \frac{1+\frac{1}{n}-1}{\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1} = \frac{1}{n\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + n} < \frac{1}{n\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right|} < \frac{1}{n\left|\sqrt{1}\right|} = \frac{1}{n}.$$

Da $\frac{1}{n}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, muss $\left|\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1 - 2\right|_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1 - 2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ erst recht eine Nullfolge sein. Daher gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1\right| = 2$. Es ist

$$|\sqrt{n}|\left(\left|\sqrt{n+1}\right| - |\sqrt{n}|\right) = \left|\sqrt{n(n+1)}\right| - |\sqrt{n\cdot n}| = \left|\sqrt{n^2+n}\right| - n = \frac{\left(\left|\sqrt{n^2+n}\right| - n\right)\left(\left|\sqrt{n^2+n}\right| + n\right)}{\left|\sqrt{n^2+n}\right| + n}$$

$$= \frac{n^2+n-n^2}{\left|\sqrt{n^2+n}\right| + n} = \frac{n}{\left|\sqrt{n^2+n}\right| + n} = \frac{1}{\frac{\left|\sqrt{n^2+n}\right|+n}{n}} = \frac{1}{\left|\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}\right| + 1} = \frac{1}{\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1}$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1 - 2\right) = 2$, ist nach Lemma 2.5

$$\lim_{n\to\infty} |\sqrt{n}|\left(\left|\sqrt{n+1}\right| - |\sqrt{n}|\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right| + 1} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2

Z.Z.: Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\gamma c_n + \delta d_n \neq 0$, wenn $\gamma c + \delta d \neq 0$, also

$$\gamma c + \delta d \neq 0 \implies \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \gamma c_n + \delta d_n \neq 0$$

Beweis. Wir fassen γ und δ als Folgen $\gamma_{n\in\mathbb{N}}$ und $\delta n \in \mathbb{N}$ auf mit $\lim_{n\to\infty} \gamma = \gamma$, $\lim_{n\to\infty} \delta = \delta$. Daraus folgt mit Lemma 2.5 $\lim_{n\to\infty} \gamma c_n = \gamma c$, $\lim_{n\to\infty} \gamma d_n = \gamma d$ und schließlich $\lim_{n\to\infty} \gamma c_n + \delta d_n = \gamma c + \delta d$.
Daraus folgt: $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n_1 > N : |\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} - (\gamma c + \delta d)| < \gamma c + \delta d$. Es gibt nun 4 Fälle:

1. $\gamma c + \delta d > 0$ und $\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} \geq \gamma c + \delta d$
2. $\gamma c + \delta d > 0$ und $\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} < \gamma c + \delta d$
3. $\gamma c + \delta d < 0$ und $\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} > \gamma c + \delta d$
4. $\gamma c + \delta d < 0$ und $\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} \leq \gamma c + \delta d$

In Fall 1 und Fall 4 ist offensichtlich, dass $\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} \neq 0$, also bleiben noch Fall 2 und 3. Wir betrachten weiterhin Folgenglieder mit $n_1 > N$, also ist $|\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} - (\gamma c + \delta d)| < \gamma c + \delta d$
Fall 2:

$$\begin{aligned}
\gamma c + \delta d &> |\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} - (\gamma c + \delta d)| \\
\gamma c + \delta d &> -(\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} - (\gamma c + \delta d)) \\
0 &> -(\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1}) \\
\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} &> 0 \\
\implies \gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} &\neq 0
\end{aligned}$$

Fall 3:

$$\begin{aligned}
\gamma c + \delta d &> |\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} - (\gamma c + \delta d)| \\
\gamma c + \delta d &> (\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} - (\gamma c + \delta d)) \\
2(\gamma c + \delta d) &> \gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} \\
\gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} &< 2(\gamma c + \delta d) < 0 \\
\implies \gamma c_{n_1} + \delta d_{n_1} &\neq 0
\end{aligned}$$

□

Z.Z.: $\gamma c + \delta d \neq 0 \implies \frac{\alpha a_n + \beta b_n}{\gamma c_n + \delta d_n} \stackrel{n\to\infty}{\to} \frac{\alpha a + \beta b}{\gamma c + \delta d}$.

Beweis. Wir betrachten die Folge $\frac{\alpha a_{n_1} + \beta b_m}{\gamma c_m + \delta d_m}{}_{m>N, m\in\mathbb{N}}$ mit $\forall m > N : \gamma c_m + \delta d_m \neq 0$. (ein solches N existiert nach dem ersten Teil der Aufgabe). $\frac{\alpha a_m + \beta b_m}{\gamma c_m + \delta d_m}$ ist also stets wohldefiniert, da der Nenner ungleich 0 ist. Daher können wir Lemma 2.5 anwenden und erhalten analog zum ersten Teil der Aufgabe $\lim_{n\to\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha a + \beta b$, $\lim_{n\to\infty} \gamma c_n + \delta d_n = \gamma c + \delta d$ und schließlich

$$\frac{\alpha a_n + \beta b_n}{\gamma c_n + \delta d_n} \stackrel{n\to\infty}{\to} \frac{\alpha a + \beta b}{\gamma c + \delta d}.$$

□

Aufgabe 3

(a)

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon|a| - |b|)^2 &\geq 0 \\
\varepsilon^2|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 &\geq 0 && \Big| \cdot \frac{1}{2\varepsilon} \\
\frac{\varepsilon a^2}{2} - 2|ab| + \frac{b^2}{2\varepsilon} &\geq 0 && |+2|ab| \\
\frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon} &\geq 2|ab|
\end{aligned}
$$

(b) (a)

$$
\begin{aligned}
x^2 + xy + y^2 &= 0 \\
x^2 + 2xy + y^2 &= xy \\
xy = (x+y)^2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Es gilt also $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0, xy \geq 0$, aber $x^2 + xy + y^2 = 0$. Daraus folgt direkt $x^2 = 0, y^2 = 0, xy = 0$. Mit dem Satz vom Nullprodukt erhalten wir $x = y = 0$.

(b) Es ist $0 = x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$. Mit dem Satz vom Nullprodukt folgt: 1. $(x+y) = 0$ oder 2. $(x^2 - xy + y^2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
x^2 - xy + y^2 &= 0 \\
x^2 - 2xy + y^2 &= -xy \\
-xy = (x-y)^2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Es gilt also $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0, -xy \geq 0$, aber $x^2 + (-xy) + y^2 = 0$. Daraus folgt direkt $x^2 = 0, y^2 = 0, -xy = 0$. Mit dem Satz vom Nullprodukt erhalten wir $x = y = 0$ und damit $x + y = 0$. Sowohl aus 1., als auch aus 2. folgt also $(x + y) = 0$.

Aufgabe 4

(a)

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\
&> \binom{n}{2} x^2 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} x^2 \\
&= \frac{2n^2+2n}{4} x^2 \\
&= \frac{n^2+(n^2-2n)}{4} x^2 \\
&= \frac{n^2+n(n-2)}{4} x^2 && | n \geq 2 \implies (n(n-2)) \geq 0 \\
&\geq \frac{n^2}{4} x^2
\end{aligned}
$$

(b) Sei $x = b - 1$. Sei $n_0 = \frac{4}{x^2}$

$$
\begin{aligned}
b^n &= (1+x)^n \\
&\overset{(a)}{>} \frac{n^2}{4} x^2 \\
&= n \frac{nx^2}{4} \\
&\overset{n > n_0}{>} n \frac{n_0 x^2}{4} \\
&= n \frac{4 \cdot x^2}{x^2 \cdot 4} \\
&= n
\end{aligned}
$$