Funktionalanalysis - Übungsblatt 0

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: keine, nicht bewertetes Präsenzübungsblatt

Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum mit der zugehörigen Familie der offenen Mengen $\mathcal{T}$. In Lemma 1.5 der Vorlesung wurde behauptet, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie definiert. Dies geschieht vermöge der induzierten Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$ und der folgenden Übungsaufgabe.

Aufgabe 0.1

Sei (V,d) ein metrischer Raum und definiere $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(V)$ (Potenzmenge von V) durch

$$U \in \mathcal{T} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in U\; \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subset U.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf V definiert. Zeigen Sie weiterhin, dass $(V, \mathcal{T})$ **hausdorff'sch** ist, d.h. alle Punkte $x, y \in V$, $x \neq y$ besitzen disjunkte offene Umgebungen

$$\forall x, y \in V, x \neq y\, \exists\, U_x, U_y \in \mathcal{T} \text{ mit } x \in U_x, y \in U_y, U_x \cap U_y = \emptyset.$$

Aufgabe 0.2

Sei (V,d) ein metrischer Raum und $M \subset V$ eine Menge. Zeigen Sie, dass der Abschluss $\overline{M}$ gegeben ist durch

$$\{v \in V :\ \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } w \in M \text{ mit } d(v,w) < \varepsilon\}.$$

Aufgabe 0.3

Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|, |[\cdot]|$ zwei Normen auf V. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|, |[\cdot]|$ genau dann äquivalent sind, wenn für jede Folge $(v_n)_n$ in V gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |[v_n]| = 0.$$

Hinweis: Sie dürfen Lemma 1.12 verwenden.

Aufgabe 0.4

Sei (V,d) ein vollständig metrischer Raum und $M \subset V$. Zeigen Sie, dass M genau dann abgeschlossen ist, wenn $(M, d\,|_{M\times M})$ ebenfalls vollständig ist.

Funktionalanalysis - Übungsblatt 1

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 27.Oktober 2023, bis 11.00 Uhr in die Zettelkästen

Aufgabe 1.1 4 Punkte

Es sei $a < b$. Zeigen Sie, dass

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \le t \le b} |f(t)|$$

auf $V := C([a,b];\mathbb{R})$ eine Norm definiert. Zeigen Sie weiterhin, dass $(V, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 1.2 4 Punkte

Es sei $p \in [1, \infty)$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_p$ auf $\ell_p^{\mathbb{K}}$ eine Norm definiert.
Hinweis: Verwenden Sie für die Dreiecksungleichung die Hölder Ungleichung A.19 mit dem Zählmäß.

Aufgabe 1.3 4 Punkte

Der Raum der Nullfolgen in $\mathbb{K}$ sei definiert durch

$$c_0 := \left\{ b \in \ell_\infty \mid \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \right\} \subset \ell_\infty.$$

Zeigen Sie, dass der Abschluss von c_{00} in ℓ_∞ durch c_0 gegeben ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$c_{00} \subset c_0 \subset \overline{c_{00}}.$$

Aufgabe 1.4 4 Punkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine stetig differenzierbare, strikt monoton wachsende Funktion mit $\varphi(0) = 0$ sowie monoton fallender Ableitung φ', so ist auch $\varphi \circ d$ eine Metrik auf X.

(b) Ist $X = \mathbb{R}$ mit $d_2(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$, so induziert d_2 eine Metrik auf X. Außerdem stimmt die durch d_2 induzierte Topologie mit der Standardtopologie von $(\mathbb{R}, d)$ für $d(x, y) = |x - y|$ überein. Jedoch ist $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht vollständig.

   Hinweis. Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ein Homöomorphismus ist.

Funktionalanalysis - Übungsblatt 2

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 3. November 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Aufgabe 2.1 4 Punkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) A ist präkompakt $\Rightarrow$ A ist **beschränkt**, d.h.

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} < \infty.$$

(b) A ist präkompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ ist präkompakt.

(c) A ist kompakt $\Rightarrow$ A ist beschränkt und abgeschlossen.

Sei nun (X, d) ein vollständiger metrischer Raum.

(d) Zeigen Sie die Äquivalenz

$$A \text{ ist präkompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ist relativ kompakt, d.h. } \overline{A} \text{ ist kompakt.}$$

Aufgabe 2.2 4 Punkte

(a) Es sei (V, d) ein metrischer Raum, sowie $x \in V$ ein Punkt und $A \subseteq V$ eine Menge. Die **Distanz** von x zu A ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz

$$\operatorname{dist}(x, A) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \overline{A}.$$

(b) Sei nun $A \subsetneq X$ ein abgeschlossener, echter Untervektorraum eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums $(X, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in (0, 1)$ ein $x_\theta \in X$ existiert mit $\|x_\theta\| = 1$ und

$$\|x_\theta - a\| \geq 1 - \theta \qquad \forall\, a \in A.$$

Aufgabe 2.3 4 Punkte

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, (Y, d_Y) vollständig und $S \subset X$ eine dichte Teilmenge.

(a) Eine Funktion $\tau : X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$d_Y(\tau(x), \tau(y)) < \varepsilon \qquad \forall\, x, y \in A \text{ mit } d_X(x, y) < \delta.$$

Zeigen Sie, dass sich eine gleichmäßig stetige Funktion $\tau : S \to Y$ eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Funktion $\tilde{\tau} : X \to Y$ fortsetzen lässt, d.h. dass $\tilde{\tau}_{|S} = \tau$ und $\tilde{\tau}$ ist gleichmäßig setig auf ganz X.

Bitte wenden!

(b) Eine Funktion $\tau : X \to Y$ heißt (metrische) **Isometrie**, wenn für alle $x, y \in X$ gilt

$$d_Y(\tau(x), \tau(y)) = d_X(x, y).$$

Zeigen Sie, dass sich auch eine Isometrie $\tau : S \to Y$ eindeutig zu einer Isometrie $\tilde{\tau} : X \to Y$ fortsetzen lässt, d.h. dass $\tilde{\tau}_{|S} = \tau$ und

$$d_Y(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) = d_X(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil a).

Aufgabe 2.4 4 Punkte

Sei X der Raum der reellen Folgen, d.h. $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}\}$ und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, 1)$, $t \mapsto \frac{t}{1+t}$.

(b) Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie, dass $d(x^{(n)}, 0) \to 0$ äquivalent ist zu $x_j^{(n)} \to 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

(c) Beweisen Sie, dass es keine Norm $\|\cdot\|$ auf X gibt, so dass es $c, C > 0$ gibt mit

$$c\,\|x\| \leq d(x, 0) \leq C\,\|x\| \qquad \forall\, x \in X$$

Hinweis. Betrachte $e^{(n)} : \mathbb{N} \to X$ mit $e_j^{(n)} = \delta_{jn}$ (Kroneckersymbol).

Aufgabe 2.1 4 Punkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) A ist präkompakt $\Rightarrow$ A ist **beschränkt**, d.h.

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} < \infty.$$

"Die Vereinigung von endlich vielen Bällen mit endlichem Durchmesser"

A ist präkompakt $\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_1(v_j)$.

Da die Menge der v_j endlich ist, gilt

$$\sup\{d(v_j, v_\ell) \mid 1 \le j,\ell \le n\} = \max\{d(v_j, v_\ell) \mid 1 \le j,\ell \le n\} =: C < \infty,$$

mit der Δ-Ugl. folgern wir für $x, y \in A$: (wobei $x \in B_1(v_j)$ und $y \in B_1(v_\ell)$)

$$d(x,y) \le d(x,v_j) + d(v_j, v_\ell) + d(v_\ell, y) \le 2 + C < \infty$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} \le \sup\{2 + C \mid x,y \in A\} = 2 + C < \infty$ $\square$

(b) A ist präkompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ ist präkompakt.

"$\Rightarrow$" $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $A \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(v_j)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $A \subset \bigcup_{j=1}^{n_{\varepsilon/2}} B_{\varepsilon/2}(v_j)$.

Für jedes $x \in \overline{A}$ existiert ein $y \in A$, sodass $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ist $y \in \bigcup_{j=1}^{n_{\varepsilon/2}} B_{\varepsilon/2}(v_j)$, so muss nach Δ-Ugl $x \in \bigcup_{j=1}^{n_{\varepsilon/2}} B_\varepsilon(v_j)$ sein.

Insbesondere gilt $\overline{A} \subset \bigcup_{j=1}^{n_{\varepsilon/2}} B_\varepsilon(v_j)$, was zu zeigen war.

"$\Leftarrow$" $A \subset \overline{A} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(v_j)$

$\square$

(c) A ist kompakt $\Rightarrow$ A ist beschränkt und abgeschlossen.

Nach VL gilt A kompakt $\Leftrightarrow$ A vollständig & A präkompakt.

Nach (a) haben wir A präkompakt $\Rightarrow$ A beschränkt.

Sei $(a_n) \in A$ eine konvergente Folge $\Rightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge

A vollst.

$\Rightarrow$ $(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} a \in A$ $\Rightarrow$ A ist abgeschlossen. $\square$

Sei nun (X, d) ein vollständiger metrischer Raum.

(d) Zeigen Sie die Äquivalenz

$$A \text{ ist präkompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ist relativ kompakt, d.h. } \overline{A} \text{ ist kompakt.}$$

"$\Rightarrow$" A präkompakt $\overset{(a)}{\Rightarrow}$ $\overline{A}$ präkompakt.

$\overline{A}$ abgeschlossen $\overset{X \text{ vollst}}{\Leftarrow}$ $\overline{A}$ vollst.

$\overline{A}$ präkompakt & vollst $\Rightarrow$ $\overline{A}$ kompakt nach VL

"$\Leftarrow$" $\overline{A}$ kompakt $\Rightarrow$ $\overline{A}$ präkompakt $\overset{(c)}{\Rightarrow}$ A präkompakt

$\square$

Aufgabe 2.2 4 Punkte

(a) Es sei (V, d) ein metrischer Raum, sowie $x \in V$ ein Punkt und $A \subseteq V$ eine Menge. Die **Distanz** von x zu A ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz

$$\operatorname{dist}(x, A) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \overline{A}.$$

Nach VL ist $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists y \in A : d(x,y) < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \inf\{d(x,y) \mid y \in A\} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \operatorname{dist}(x,A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\} = 0$

2b: siehe letzte Seite der pdf

Aufgabe 2.3 4 Punkte

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, (Y, d_Y) vollständig und $S \subset X$ eine dichte Teilmenge.

(a) Eine Funktion $\tau : X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$d_Y(\tau(x), \tau(y)) < \varepsilon \qquad \forall\, x, y \in A \text{ mit } d_X(x, y) < \delta.$$

Zeigen Sie, dass sich eine gleichmäßig stetige Funktion $\tau : S \to Y$ eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Funktion $\tilde{\tau} : X \to Y$ fortsetzen lässt, d.h. dass $\tilde{\tau}_{|S} = \tau$ und $\tilde{\tau}$ ist gleichmäßig setig auf ganz X. **Bitte wenden!**

Setze $\tilde{\tau}(x) := \lim_{n \to \infty} \tau(x_n)$ für eine Folge $x_n \to x$, $x_n \in S$ ($\exists$, weil S dicht ist)

1. Wohldefiniertheit:

- $(\tau(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge: Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, \delta$: $\forall\, n, m$: $d_X(x_n, x_m) < \delta$ $\Rightarrow d_Y(\tau(x_n), \tau(x_m)) < \varepsilon$

  wegen $x_n \to x$ ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, also $\exists\, n_0$: $\forall\, n, m \geq n_0$: $d_X(x_n, x_m) < \delta$.

- Da Y vollständig ist, konvergiert $\tau(x_n)$.

- Betrachte nun eine andere Folge $x_n' \to x$, $x_n' \in S$.

  Sei $\varepsilon > 0$. Wegen τ glm. stetig und $x_n, x_n' \to x$ erhalten wir $\delta > 0$ mit $\exists\, N \in \mathbb{N}$: $\forall\, n \geq N$ $d_X(x_n, x) < \frac{\delta}{2}$ und $d(x_n', x) < \frac{\delta}{2}$

  $$\Rightarrow d_X(x_n, x_n') < \delta$$

  $$\overset{\text{glm. stetig}}{\Rightarrow} d_Y(\tau(x_n), \tau(x_n')) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \tau(x_n) = \lim_{n \to \infty} \tau(x_n')$$

2. Gleichmäßige Stetigkeit:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle δ derart, dass $\forall\, x, y \in S$ gilt:

$$d_X(x, y) < 3\delta \Rightarrow d_Y(\tau(x), \tau(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Seien nun $x, y \in S$ mit $d_X(x, y) < \delta$.
Fixiere Folgen $x_n \to x$, $x_n \in S$ und $y_n \to y$, $y_n \in S$.

Per Definition gilt $\lim_{n\to\infty} d(\tilde{\tau}(x), \tau(x_n)) = 0$ und $\lim_{m\to\infty} d(\tilde{\tau}(y), \tau(y_m)) = 0$.

Daher $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$: $d(\tilde{\tau}(x), \tau(x_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall\, n \geq N_1$

und $\exists\, m_1 \in \mathbb{N}$: $d(\tilde{\tau}(y), \tau(y_m)) < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall\, m \geq m_1$.

Wähle $N_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $d_X(x_n, x) < \delta$ $\forall n \geq N$ und $m_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $d_X(y_m, y) < \delta$ $\forall\, m \geq m_2$.

Setze $N := \max(N_1, N_2)$ und $m := \max(m_1, m_2)$. Dann gilt $\forall\, n \geq N$, $m \geq m$:

$$d_X(x_n, y_m) < d_X(x_n, x) + d_X(x, y) + d_X(y, y_m) < \delta + \delta + \delta = 3\delta \implies d_X(\tau(x_n), \tau(y_m)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann ist $d_Y(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) \leq d_Y(\tilde{\tau}(x), \tau(x_n)) + d_Y(\tau(x_n), \tau(y_m)) + d_Y(\tau(y_m), \tilde{\tau}(y))$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Wir haben also gezeigt, dass $\forall\, x, y \in S$

$$d_X(x, y) < \delta \implies d_Y(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) < \varepsilon \qquad \square$$

(b) Eine Funktion $\tau : X \to Y$ heißt (metrische) **Isometrie**, wenn für alle $x, y \in X$ gilt

$$d_Y(\tau(x), \tau(y)) = d_X(x, y).$$

Zeigen Sie, dass sich auch eine Isometrie $\tau : S \to Y$ eindeutig zu einer Isometrie $\tilde{\tau} : X \to Y$ fortsetzen lässt, d.h. dass $\tilde{\tau}_{|S} = \tau$ und

$$d_Y(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) = d_X(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil a).

Offensichtlich sind metrische Isometrien gleichmäßig stetig (wähle $\delta = \varepsilon$).

Daher ist unsere Fortsetzung $\tilde{\tau}(x) := \lim_{n\to\infty} \tau(x_n)$ für $x_n \to x$, $x_n \in S$

auch wohldefiniert, wenn τ eine Isometrie ist.

z.z.: $d_Y(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) = d_X(x, y)$ für $x, y \in X$.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Fixiere wir oben Folgen $x_n \to x$, $y_m \to y$; $x_n, y_m \in S$

Wegen $\lim_{n\to\infty} d(\tilde{\tau}(x), \tau(x_n)) = \lim_{m\to\infty} d(\tilde{\tau}(y), \tau(y_m)) = 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$:

$\forall\, n, m \geq N$: $d_Y(\tilde{\tau}(x), \tau(x_n)) < \frac{\varepsilon}{4}$, $d_Y(\tilde{\tau}(y), \tau(y_m)) < \frac{\varepsilon}{4}$

$d_X(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{4}$, $d_X(y, y_m) < \frac{\varepsilon}{4}$

$$\Rightarrow \quad d_Y(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) \le d_Y(\tilde{T}(x), T(x_n)) + \underset{\shortparallel}{d_Y(T(x_n), T(y_n))} + d_Y(T(y_n), \tilde{T}(y))$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + d_X(x_n, y_n) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$= d_X(x_n, y_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\le d_X(x_n, x) + d_X(x, y) + d_X(y, y_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + d_X(x, y) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= d_X(x, y) + \varepsilon$$

umgekehrt gilt aber auch:

$$d_X(x, y) \le d_X(x, x_n) + d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, y)$$

$$< d_Y(T(x_n), T(y_n)) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\le d_Y(T(x_n), \tilde{T}(x)) + d_Y(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) + d_Y(\tilde{T}(y), T(y_n)) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< d_Y(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) + \varepsilon$$

Wir erhalten also $\forall \varepsilon > 0$

$$d(x, y) < d_Y(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) + \varepsilon < d(x, y) + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad d_X(x, y) = d_Y(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)).$$

Aufgabe 2.4 4 Punkte

Sei X der Raum der reellen Folgen, d.h. $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}\}$ und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : [0,\infty) \to [0,1)$, $t \mapsto \frac{t}{1+t}$.

- Für beliebige $x, y \in X$ gilt $d(x,y) \in [0,1)$

  wie im Hinweis angedeutet ist $0 \le \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|} < 1$ (klar nach multiplizieren mit dem Nenner)

  Daher ist $0 \le d(x,y) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

- $d(x,y) = 0 \iff \forall k: \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k-y_k|} = 0 \iff |x_k - y_k| = 0 \ \forall k \iff x_k = y_k \ \forall k \iff x = y$

- $d(x,y) = d(y,x)$ folgt aus $|x_k - y_k| = |y_k - x_k| \ \forall k$.

- $\underline{d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)}$: Sei $r_k := |x_k - z_k|$, $s_k := |x_k - y_k|$, $t_k := |y_k - z_k|$

  z.z. $\forall k$: $\frac{r_k}{1+r_k} < \frac{s_k}{1+s_k} + \frac{t_k}{1+t_k}$.

  $f : [0,\infty) \to [0,1)$, $t \mapsto \frac{t}{1+t}$

  $f'(t) = \frac{(1+t) - t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}$ ist stetig, überall positiv $\Rightarrow$ f stetig diffbar, f streng monoton wachsend

  $f'(t)$ ist außerdem monoton fallend und $f(0) = 0$.

  Mit A 1.4 folgt: $d(x,y) = |x-y|$ ist Metrik $\Rightarrow$ $f \circ d$ ist Metrik,

  erfüllt $f \circ d$ Δ-Ungl.,

  $\frac{r_k}{1+r_k} < \frac{s_k}{1+s_k} + \frac{t_k}{1+t_k}$ $\square$

  (man kann es aber auch einfach explizit rechnen:

  Es gilt $r, s, t \ge 0$

  und $r \le s + t$ (Δ-Ungl. für $|\cdot|$),

  $\Rightarrow r \le s + t + 2st + rst$

  $\Rightarrow r + \cancel{rs} + \cancel{rt} + \cancel{rst} \le s + \cancel{sr} + st + \cancel{rst} + t + \cancel{tr} + ts + rst$

  $\Rightarrow r(1+s)(1+t) \le s(1+r)(1+t) + t(1+r)(1+s)$

  $\Rightarrow \frac{r}{1+r} \le \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t}$)

(b) Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie, dass $d(x^{(n)}, 0) \to 0$ äquivalent ist zu $x_j^{(n)} \to 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

"$\Rightarrow$" $d(x^{(n)}, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)}|}{1+|x_k^{(n)}|} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \forall k: \frac{|x_k^{(n)}|}{1+|x_k^{(n)}|} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Da f streng monoton wächst und $f(0) = 0$, folgt $x_k^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \forall k$.

"$\Leftarrow$" $x_k^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \forall k \underset{f(0)=0}{\overset{f\text{ monoton wachsend,}}{\Longrightarrow}} \frac{|x_k^{(n)}|}{1+|x_k^{(n)}|} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \forall k$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle k derart, dass $2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Da f streng monoton wachsend ist, $\exists \delta$: $|x_j^{(n)}| < \delta \Rightarrow \frac{|x_j^{(n)}|}{1+|x_j^{(n)}|} < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle dann N derart, dass
$\forall j \leq k, \forall n \geq N$: $|x_j^{(n)}| < \delta$.

Dann gilt $\forall n \geq N$:

$$d(x^{(n)}, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j^{(n)}|}{1+|x_j^{(n)}|} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j^{(n)}|}{1+|x_j^{(n)}|} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \underbrace{\frac{|x_j^{(n)}|}{1+|x_j^{(n)}|}}_{\leq 1}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j}}_{<1} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}}_{< 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(x^{(n)}, 0) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \qquad \square$$

(c) Beweisen Sie, dass es keine Norm $\|\cdot\|$ auf X gibt, so dass es $c, C > 0$ gibt mit

$$c\,\|x\| \leq d(x,0) \leq C\,\|x\| \qquad \forall\, x \in X$$

Hinweis. Betrachte $e^{(n)} : \mathbb{N} \to X$ mit $e_j^{(n)} = \delta_{jn}$ (Kroneckersymbol).

$$d((e_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}, 0) = \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2^{j+1}} \qquad d(\alpha (e_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}, 0) = \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

Es gilt $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$:
$$c\,\|\alpha x\| \leq d(\alpha x, 0) \leq C\,\|\alpha x\|$$

Für $x = e_j, j \in \mathbb{N}$ gilt:
$$c\,\alpha\,\|x\| \leq \frac{\alpha}{\alpha+1}\, d(x,0) \leq C\,\alpha\,\|x\|$$

$\alpha = 1$
$$\Rightarrow d(x,0) \leq C'\,\|x\|$$

$\alpha + 1 = 2\frac{C'}{c}$
$$\Rightarrow d(x,0) \geq (\alpha+1) \cdot c \cdot \|x\| \geq 2\,C' \cdot \|x\| \qquad \lightning$$

Aufgabe 2.2 4 Punkte

(a) Es sei (V, d) ein metrischer Raum, sowie $x \in V$ ein Punkt und $A \subseteq V$ eine Menge. Die **Distanz** von x zu A ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz

$$\operatorname{dist}(x, A) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \overline{A}.$$

(b) Sei nun $A \subsetneq X$ ein abgeschlossener, echter Untervektorraum eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums $(X, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in (0, 1)$ ein $x_\theta \in X$ existiert mit $\|x_\theta\| = 1$ und

$$\|x_\theta - a\| \geq 1 - \theta \qquad \forall\, a \in A.$$

b) Beweis: Sei $\theta \in (0,1)$ beliebig. Sei $x \in X \setminus A$. Da A abgeschlossen ist, gilt $d \overset{*}{:=} \inf\{\|x - a\| : a \in A\} > 0$, denn andernfalls gäbe es eine Folge $(a_n) \subset A$ mit $\|a_n - x\| \longrightarrow 0$ und x läge in $\bar{A} = A$.

Deshalb ist $d < \frac{d}{1-\delta}$ und es existiert $a_\delta \in A$ mit $\|x - a_\delta\| \overset{*}{<} \frac{d}{1-\delta}$.

Setze $x_\delta := \frac{x - a_\delta}{\|x - a_\delta\|}$, so dass $\|x_\delta\| = 1$.

Sei nun $a \in A$ beliebig. Dann ist:

$$\|x_\delta - a\| = \left\| \frac{x}{\|x - a_\delta\|} - \frac{a_\delta}{\|x - a_\delta\|} - a \right\|$$

$$\overset{\text{Homogenität}}{=} \frac{1}{\|x - a_\delta\|} \cdot \| x - (a_\delta + \|x - a_\delta\| a) \|$$

$$\overset{*}{\geq} \frac{d}{\|x - a_\delta\|}$$

$a_\delta + \|x - a_\delta\| a \in A$

$$\overset{*}{>} 1 - \delta$$

Funktionalanalysis - Übungsblatt 3

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 10. November 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Aufgabe 3.1 4 Punkte

Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen für einen normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ äquivalent sind:

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) $\overline{B_1(0)} \subset X$ ist kompakt.

(iii) Jede beschränkte Folge in X besitzt eine konvergente Teilfolge.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.2 b).

Aufgabe 3.2 4 Punkte

Es sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum und $\|\cdot\|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm. Zeigen Sie die Polarisationsidentitäten, d.h. für alle $v, w \in V$

$$\begin{aligned} (i)\ \langle v|w\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right) && (\mathbb{K}=\mathbb{R}) \\ (ii)\ \langle v|w\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \imath\|v+\imath w\|^2 + \imath\|v-\imath w\|^2\right) && (\mathbb{K}=\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3 4 Punkte

Die sogenannten Legendre-Polynome $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien gegeben durch

$$P_n(x) := \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n (x^2-1)^n.$$

(a) Zeigen Sie, dass $P_n \in C([-1,1])$ tatsächlich Polynome vom Grad n sind mit

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x) \qquad \forall\, x \in [-1,1].$$

(b) Betrachten Sie auf $C([-1,1])$ das Skalarprodukt

$$(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

(Sie müssen nicht zeigen, dass es sich tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt). Zeigen Sie, dass P_n orthogonal zu den Monomen $x \mapsto x^m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$ ist.

(c) Folgern Sie, dass $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ im Prähilbertraum $(C([-1,1]), (\cdot,\cdot))$ ein Orthonormalsystem darstellt, d.h. dass $(P_n, P_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4 4 Punkte

Sei L die lineare Hülle aller Funktionen $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $e_\lambda(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h.

$$L = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und für alle } k \in \{1, ..., n\} : a_k, \in \mathbb{C}, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass L mit

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)^* g(x) \, \mathrm{d}x \qquad \forall\, f, g \in L$$

zu einem Prähilbertraum über $\mathbb{C}$ wird.
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Eulersche Darstellungsformeln für die trigonometrischen Funktionen.

(b) Sei H eine Vervollständigung von L bezüglich der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Norm $\| \cdot \|$. Zeigen Sie

$$\|e_\lambda - e_\mu\|^2 = 2 \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq \mu$$

und folgern Sie, dass H nicht separabel ist.

Funktionalanalysis - Übungsblatt 4

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 17. November 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

---

Aufgabe 4.1 3 Punkte

(a) Beweisen Sie Lemma 2.16 aus der Vorlesung: Ist $C \subset V$ eine konvexe Teilmenge eines normierten linearen Raums V, so sind der Abschluss $\bar{C}$ und für jedes $r > 0$ die r-Umgebung

$$U_r(C) = \{v \in V : \|v - w\| < r \text{ für ein } w \in C\} \equiv \bigcup_{w \in C} B_r(w)$$

von C auch konvex.

(b) Sei $A \subset V$ eine abgeschlossene Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass A genau dann konvex ist, wenn für alle $x, y \in A$ bereits $\frac{1}{2}(x + y) \in A$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst per Induktion, dass für $x, y \in A$ der Ausdruck $\lambda x + (1 - \lambda)y$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ mit $2^n \lambda \in \mathbb{N}$ ebenfalls in A liegt.

Aufgabe 4.2 3 Punkte

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbert Raum und $A \subset H$ eine Teilmenge. Zeigen Sie

(a) $A^\perp$ ist ein abgeschlossener Unterraum von H.

(b) $A^\perp = \left(\overline{< A >}\right)^\perp$.

(c) Sei nun $V \subset H$ ein abgeschlossener Teilraum. Zeigen Sie, dass dann $\left(V^\perp\right)^\perp = V$.

Aufgabe 4.3 3 Punkte

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum.

(a) Sei $A \subset H$ eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Menge und $x \in H$. Zeigen Sie, dass dann für eine Abbildung $P : H \to A$ die folgenden Aussagen äquivalent sind

  (i) $\|x - P(x)\| = \inf_{a \in A} \|a - x\|$.
  (ii) $\operatorname{Re} \langle x - P(x), a - P(x) \rangle \leq 0 \quad \forall\, a \in A$.

(b) Sei nun $Y \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum und sei $P : H \to Y$ die durch Lemma 2.15 eindeutig definierte **Projektionsabbildung** auf Y, d.h. $P(v) = w_0$ mit

$$\|v - P(v)\| = \|v - w_0\| = \operatorname{dist}(v, Y) = \inf_{w \in Y} \|v - w\|.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung P linear ist und äquivalent charakterisiert durch

$$\langle x - P(x), y \rangle = 0 \quad \forall\, y \in Y. \tag{1}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4.4 3 Punkte

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subset X$ abgeschlossen und konvex mit $0 \in \mathring{M}$ (Inneres von M). Definiere für $x \in X$

$$p(x) := \inf \left\{ \lambda > 0 \,\middle|\, \frac{x}{\lambda} \in M \right\}.$$

(a) Zeigen Sie $0 \leq p(x) < \infty$ für $x \in X$ und dass p sublineares Funktional ist.

(b) Beweisen Sie $M = p^{-1}([0,1])$.

(c) Weisen Sie für $M = \overline{B_1(0)}$ die Gleichheit $p(x) = \|x\|$ für alle $x \in X$ nach.

In dieser Aufgabe wollen wir näher auf die Bemerkung zur Notwendigkeit der Vollständigkeit im Satz von Riesz-Fréchet eingehen.

Aufgabe 4.5 4 Punkte

Betrachten Sie den Raum der abbrechenden reellen Nullfolgen $c_{00} \subset \ell_2$ ausgestattet mit dem ℓ_2 Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Wir definieren den Unterraum

$$W = \left\{ x \in c_{00} \mid \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} = 0 \right\}.$$

(a) Vergewissern Sie sich, dass $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nicht vollständig ist.

(b) Beweisen Sie, dass das Funktional $L : c_{00} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ linear und stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass W abgeschlossen ist und dass das orthogonale Komplement

$$W^{\perp} = \{ y \in c_{00} \mid \langle y, x \rangle = 0 \text{ für alle } x \in W \}$$

in c_{00} trivial ist.

(d) Zeigen Sie, dass L keine Darstellung der Form $Lx = \langle y, x \rangle$ für ein $y \in c_{00}$ und alle $x \in c_{00}$ besitzt.

Funktionalanalysis - Übungsblatt 5

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 24. November 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Aufgabe 5.1 4 Punkte

Sei X ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) X ist separabel.

(ii) Es gibt eine abzählbare Menge $A \subset X$ mit $X = \overline{< A >} = \overline{\text{Spann(A)}}$.

(b) Untersuchen Sie nun die Folgenräume ℓ_p für $1 \leq p < \infty$ auf Separabilität.

Aufgabe 5.2 4 Punkte

(a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|)$ genau dann ein Banachraum ist, wenn alle absolut konvergenten Reihen konvergieren, d.h.

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\| < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} x_k \quad \text{konvergiert.}$$

(b) Zeigen Sie, dass eine Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ genau dann ℓ_1 ist, wenn für jede Nullfolge $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ in $\mathbb{K}$ konvergent ist .

Aufgabe 5.3 4 Punkte

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $S = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein höchstens abzählbar unendliches Orthonormalsystem.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P : H \ni x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x\rangle e_n$ die eindeutige Orthogonalprojektion auf $\overline{\langle S\rangle}$ ist (vgl. Aufgabe 4.3).

(b) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ heißt **schwach konvergent** gegen $x \in V$, falls für alle $f \in V'$

$$f(x_n) \to f(x) \qquad (n \to \infty).$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen Null konvergiert.

Aufgabe 5.4 4 Punkte

Betrachten Sie die Legendre-Polynome $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus Aufgabe 3.4 in dem Prähilbertraum $(C([-1,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und die Unterräume $U_n :=< \{P_k \mid 0 \leq k \leq n\} >$.

(a) Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau eine Abbildung $\tilde{P}_n : C([-1,1]) \to U_n$ gibt mit

$$\|x - \tilde{P}_n(x)\| = \inf_{y\in U_n} \|x - y\|$$

und geben Sie eine Darstellung von $\tilde{P}_n(x)$ an.
Hinweis: Aufgabe 5.3.

(b) Berechnen Sie für $f(x) = \mathrm{e}^x$ die Projektionen $\tilde{P}_0(f), \tilde{P}_1(f)$ sowie $\tilde{P}_2(f)$.

(c) Setzen Sie $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} U_n$ und entscheiden Sie, ob $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum ist.
Hinweis: Aufgabe 5.2 könnte hilfreich sein.

Funktionalanalysis - Übungsblatt 6

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 1. Dezember 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Aufgabe 6.1 4 Punkte

[1+1.5+1+0.5 Punkte]

In dieser Aufgabe konstruieren Sie einen isometrischen Isomorphismus $\Phi : \ell_1 \to c_0'$ (hier ist $\ell_1 = \ell_1^{\mathbb{R}}$). Gehen Sie dafür wie folgt vor:

(a) Für $a \in \ell_1$ sei

$$\phi_a : c_0 \to \mathbb{K}, \qquad \phi_a(b) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n.$$

Zeigen Sie, dass ϕ_a wohldefiniert ist und $\phi_a \in c_0'$.

(b) Für $i \in \mathbb{N}$ sei $e_i = (\delta_{in})_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ die Standardeinheitsfolge. Zu einem beliebigen $\phi \in c_0'$ definieren wir $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = \phi(e_n).$$

Zeigen Sie, dass $a \in \ell_1$.

(c) Zu $\phi \in c_0'$ sei $a \in \ell_1$ die konstruierte Folge aus b). Zeigen Sie, dass ϕ auf c_0 mit dem Operator ϕ_a aus Teil a) übereinstimmt.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst beide Operatoren auf c_{00}.

(d) Wir definieren nun die Abbildung

$$\Phi : \ell_1 \to c_0', \qquad a \mapsto \phi_a.$$

Zeigen Sie, dass Φ ein isometrischer Isomorphismus ist.

Aufgabe 6.2 4 Punkte

[1+0.5+0.5+0.5+1.5 Punkte]

(a) Es seien X, Y, Z normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $S \in \mathcal{L}(X,Y), T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Zeigen Sie, dass $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$ gilt.

Berechnen nun Sie die Operatornorm der folgenden linearen Abbildungen:

b) Die Einbettungsabbildung $\phi : (C^1([0,1]), \|\cdot\|_{C^1([0,1])}) \to (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ mit der C^1 Norm

$$\|f\|_{C^1([0,1])} := \max\left\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right\}.$$

c) Die Einschränkung ϕ_0 von ϕ auf den Unterraum $U := \{f \in C^1([0,1]) \mid f(0) = 0\}$.

d) Die Einbettung $\psi : (C^0([0,1], \|\cdot\|_\infty) \to L_1([0,1])$ (ausgestattet mit dem Lebesgue Maßes auf $[0,1]$).

e) Die Verkettung $\psi \circ \phi_0$ der Abbildungen aus c) und d).

Bitte wenden!

Aufgabe 6.3 4 Punkte

[3+1 Punkte]
Seien $X = C([0,1])$, $Y = C^1([0,1])$ reellwertige Funktionenräume, jeweils ausgestattet mit $\|\cdot\|_\infty$. Für $f \in X$ definieren wir den Operator

$$(Sf)(x) := \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall\, x \in [0,1].$$

(a) Zeigen Sie, dass $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ und bestimmen Sie den Kern $\ker(S)$ und das Bild $\operatorname{im}(S)$ von S, wobei

$$\ker(S) = \{x \in X \mid Sx = 0\}, \qquad \operatorname{im}(S) = \{Sx \mid x \in X\}.$$

Folgern Sie, dass $\operatorname{im}(S) \subset Y$ abgeschlossen ist.

(b) Wir fassen nun S als Operator $S \in \mathcal{L}(X,X)$ auf. Zeigen Sie, dass $\operatorname{ran}(S)$ nicht abgeschlossen in X ist.
Sie können zum Beispiel die folgende Familie von Funktionen betrachten

$$f_k(x) = \sqrt{x + \frac{1}{k}} - \sqrt{\frac{1}{k}}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Aufgabe 6.4 4 Punkte

[0.5 +3.5 Punkte]
Seien X ein Banachraum, Y ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen

(i) Es gibt ein $S \in \mathcal{L}(Y,X)$ mit $S \circ T = I$.

(ii) Es gibt ein $c > 0$ mit $c\|x\| \le \|Tx\|$ für alle $x \in X$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\operatorname{im}(T) \subset Y$ *abgeschlossen ist und verwenden Sie den 1.Satz von Riesz.*

Funktionalanalysis - Übungsblatt 7

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 8. Dezember 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

---

Aufgabe 7.1 4 Punkte

Sei X ein Banach-Raum und $T \in \mathcal{L}(X, X)$ mit

$$\limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} < 1.$$

Dann ist $I - T$ bijektiv mit $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ und es gilt

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

wobei $T^0 := I$ die Identität auf X bezeichne und T^n die n-fache Komposition $T \circ ... \circ T$ von T.

Aufgabe 7.2 4 Punkte

[1+1+1.5+0.5 Punkte]

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein linearer Unterraum. Zeigen Sie:

a) Ist Y endlich dimensional, so ist $(Y, \|\cdot\|)$ vollständig und insbesondere $Y \subset X$ abgeschlossen.

b) Ist X ein Banachraum und Y besitzt nicht leeres Inneres, dann ist $Y = X$.

c) Ist X ein Banachraum, so besitzt X entweder eine endliche oder eine überabzählbare Hamelbasis, also insbesondere keine abzählbar unendliche.
Verwenden Sie den Satz von Baire.

d) Sei P der Raum aller reellwertigen Polynome. $(P, \|\cdot\|)$ ist für jede beliebige Norm $\|\cdot\|$ kein Banachraum.

Zur Erinnerung: Eine Hamelbasis ist eine linear unabhängige Teilmenge, so dass sich jedes Element des Vektorraumes als endliche Linearkombination aus dieser Teilmenge darstellen lässt. Das ist also die Art Basis, die Sie aus der linearen Algebra kennen. Von dort ist auch bekannt, dass jeder Vektorraum eine (Hamel-)Basis besitzt

Aufgabe 7.3 4 Punkte

[1+1.5+1.5 Punkte]

Sei $X \subset L_1(\mathbb{R})$ ein abgeschlossener Untervektorraum mit

$$X \subseteq \bigcup_{p>1} L_p(\mathbb{R}).$$

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass ein $p_0 > 1$ existiert, sodass $X \subset L_{p_0}(\mathbb{R})$. Gehen Sie dafür, wie folgt vor:

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge

$$F_k = \{f \in X \mid \|f\|_{L_{1+1/k}} \leq k\}.$$

Zeigen Sie, dass die F_k abgeschlossene Mengen bzgl. der L_1 Norm sind.
Bitte wenden!

(b) Zeigen Sie, dass $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$.

Hinweis: Zeigen Sie $\|f\|_{L_{1+1/k}} \leq \left(\|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{1+1/k}}$*, indem Sie das Integral geeignet aufspalten.*

(c) Folgern Sie, dass ein $p_0 > 1$ existiert, sodass $X \subset L_{p_0}(\mathbb{R})$.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Baire.

Aufgabe 7.4 3 Punkte

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) A ist beschränkt (siehe Aufgabe 2.1).

ii) Für alle $f \in X'$ gilt: $\sup\{|f(x)| \mid x \in A\} < \infty$.

Aufgabe 7.5 1 Punkt

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\|T_n\| \to \infty$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass ein $x \in X$ existiert, sodass die Folge $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

Aufgabe 7.1 4 Punkte

Sei X ein Banach-Raum und $T \in \mathcal{L}(X, X)$ mit

$$\limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} < 1.$$

Dann ist $I - T$ bijektiv mit $(I-T)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ und es gilt

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

wobei $T^0 := I$ die Identität auf X bezeichne und T^n die n-fache Komposition $T \circ ... \circ T$ von T.

VL Lemma: $L(X,X)$ ist Banachraum. Zeige, dass $\sum_{n=1}^{n} T^n$ Cauchy-Folge ist.

Betrachte die Familie von Operatoren F_k := sum_0^k T^n. Sei x in X. Dann gilt

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|F_k(x)\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=0}^{k} T^n(x) \right\| \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{k} \|T^n(x)\| = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \underbrace{\|T^n(x)\|}_{\le \|T^n\| \|x\|} \le \|x\| \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \|T^n\|$$

Nach Voraussetzung gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$ und mit dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

Die punktweise Beschränktheit liefert uns mit dem Satz von Banach-Steinhaus, dass auch sup ||F_k|| endlich sein muss.
Weil X ein Banachraum ist, folgt außerdem aus der absoluten Konvergenz von sum_0^infty T^n(x) die Konvergenz.
Nach Satz 3.15 erhalten wir damit die Existenz eines stetigen Grenzwerts F \in L(X,X). Weiter gilt:

$$[F \circ (I-T)](x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \circ (I-T)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(x) - T^{n+1}(x) \overset{\text{Teleskop}}{=} T^0(x) = x$$

$$[(I-T)\circ F](x) = I\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n(x)\right) - T\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n(x)\right) = x + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} T^n(x) = x \checkmark$$

I - T ist also invers zu F, F = (I - T)^{-1}.

Aufgabe 7.2 4 Punkte

[1+1+1.5+0.5 Punkte]

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein linearer Unterraum. Zeigen Sie:

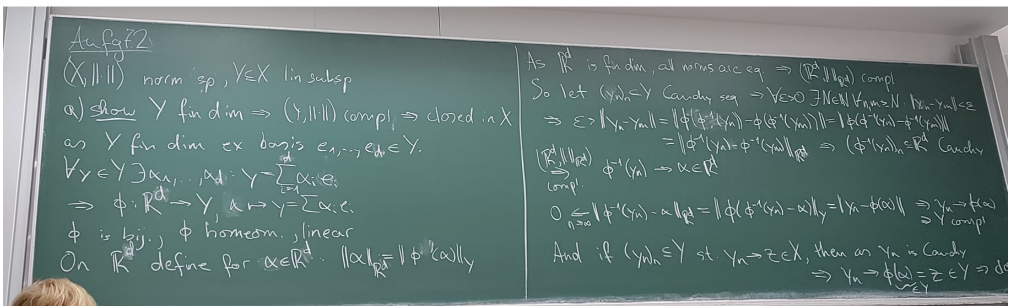
a) Ist Y endlich dimensional, so ist $(Y, \|\cdot\|)$ vollständig und insbesondere $Y \subset X$ abgeschlossen.

Mit VL (Bsp. 2) folgt sofort die Vollständigkeit. Nach Lemma 1.17 ist dann auch Y in X abgeschlossen.

b) Ist X ein Banachraum und Y besitzt nicht leeres Inneres, dann ist $Y = X$.

Beweis per Kontraposition: Wir nehmen an, dass X von Y verschieden ist, d.h. Y ist ein echter Unterraum von X und X\Y ist nichtleer.
Z.Z: Der Abschluss von X\Y ist der gesamte Raum. Für leeres Y ist das klar, sei also Y nichtleer
Sei y \in Y und x in X\Y. Dann ist y + a*x \in X\Y für alle a \in \R\{0}. Ansonsten wäre nämlich
alpha * x = (y + alpha*x) - y \in Y
und somit auch x in Y. Betrachte also die Folge x_n := y + 1/n * x. Diese konvergiert gegen y im Banachraum X.
Daher liegt y im Abschluss von X\Y und somit ist der Abschluss von X\Y bereits ganz X.

Wir sind an dieser Stelle schon fertig, weil das Innere von Y dadurch gekennzeichnet ist, dass es zu jedem Punkt einen Ball gibt,
der ganz in Y enthalten ist. Das kann aber nicht gegeben sein, wenn zu jedem Punkt y \in Yeine Folge in X\Y mit Grenzwert y existiert.



full proof of a

c) Ist X ein Banachraum, so besitzt X entweder eine endliche oder eine überabzählbare Hamelbasis, also insbesondere keine abzählbar unendliche.
Verwenden Sie den Satz von Baire.

Zunächst halten wir fest, dass nach LA1 jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Angenommen, X besitzt keine endliche Hamelbasis, aber dafür eine abzählbar unendliche Basis (v_i)_{i \in N}.
Dann lässt sich X schreiben als abzählbare Vereinigung der linearen Unterräume V_i = (v_i), die von einem Basiselement erzeugt werden.
Außerdem ist jedes V_i ein echter Unterraum (sonst wäre durch das Element v_i eine Basis gegeben).
Nach (a) sind diese Räume abgeschlossen und nach (b) ist ihr Inneres leer, d.h. V_i ist nirgends dicht für alle i.
Somit ist X mager, im Widerspruch zum Satz von Baire. Also besitzt X entweder eine endliche oder überabzählbare Basis.

d) Sei P der Raum aller reellwertigen Polynome. $(P, \|\cdot\|)$ ist für jede beliebige Norm $\|\cdot\|$ kein Banachraum.

Durch die Monome 1, x^1, x^2, ... ist eine abzählbar unendliche Basis von P gegeben (dass die Monome ein Erzeugendensystem bilden ist aus der Standarddarstellung der Polynome sofort ersichtlich. Lineare Unabhängigkeit ist auch klar per Definition:
Nur das Nullpolynom hat vor allen Monomen Koeffizient 0.
Mit Aufgabe (c) folgt daher, dass P kein Banachraum sein kann.

Aufgabe 7.3 4 Punkte

[1+1.5+1.5 Punkte]

Sei $X \subset L_1(\mathbb{R})$ ein abgeschlossener Untervektorraum mit

$$X \subseteq \bigcup_{p>1} L_p(\mathbb{R}).$$

$L_q \subset L_p$ falls $p < q$

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass ein $p_0 > 1$ existiert, sodass $X \subset L_{p_0}(\mathbb{R})$. Gehen Sie dafür, wie folgt vor:

$\frac{1}{1+1/k} + \frac{1}{k+1} = 1$

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge

$$F_k = \{f \in X \mid \|f\|_{L_{1+1/k}} \leq k\}.$$

wegen $k \geq 1$. warum?

Zeigen Sie, dass die F_k abgeschlossene Mengen bzgl. der L_1 Norm sind.

$$\int |f(x)|^{1+1/k} dx \leq k^{1+1/k}$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in F_k mit Grenzwert $f \in X$. z.z.: $f \in F_k$ d.h.

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} |f_n(x)|\right)^{1+1/k} dx \leq k^{1+1/k}$$

$$= \int \lim_{n\to\infty} |f_n(x)|^{1+1/k} dx$$

kann man den Limes vertauschen?

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq g(x) \; ?$$

a) define $F_k := \{ f \in X \mid \|f\|_{1+1/k} \leq k \}$

show: $F_k \subseteq L^1(\mathbb{R})$ closed

proof: Let $(f_n)_n \subseteq F_K$ $f_n \xrightarrow{L^1} f \in L^1(\mathbb{R})$

By Ana 3 we know $\exists (f_{n_m})_m$ subsequence s.t. $f_{n_m} \to f$ λ-almost everywhere ptw.

$$\|f\|_{1+1/k}^{1+1/k} = \int_{\mathbb{R}} |f|^{1+1/k} d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{m\to\infty} |f_{n_m}|^{1+1/k} d\lambda$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_{n_m}|^{1+1/k} d\lambda \leq k^{1+1/k}$$

$\Rightarrow f \in F_k$

b) show $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ by showing $\|f\|_{1+1/k}^{1+1/k} \leq \|f\|_1 + \|f\|_p^p$

proof: Let $f \in X \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R})$ for some $p > 1$.

Let k be suff large s.t. $1 + 1/k \leq p$

$$\|f\|_{1+1/k}^{1+1/k} = \int_{\mathbb{R}} |f|^{1+1/k} d\lambda = \int_{\{|f|<1\}} |f|^{1+1/k} d\lambda + \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^{1+1/k} d\lambda$$

$$\leq \int_{\{|f|<1\}} |f|^1 d\lambda + \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^p d\lambda$$

$(0,\infty) \ni \alpha \mapsto c^\alpha$

$c < 1$ mon dec

$c \geq 1$ mon incr.

$$\leq \|f\|_1 + \|f\|_p^p$$

$$\Rightarrow \|f\|_{1+1/k} \leq (\|f\|_1 + \|f\|_p^p)^{1/1+1/k} \xrightarrow{k\to\infty} \|f\|_1 + \|f\|_p^p$$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \|f\|_{1+1/k} \leq k \Rightarrow f \in F_k.$

(b) Zeigen Sie, dass $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$.

Hinweis: Zeigen Sie $\|f\|_{L_{1+1/k}} \le \left(\|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^p\right)^{\frac{1}{1+1/k}}$*, indem Sie das Integral geeignet aufspalten.*

$$\|f_{L_{1+1/k}}\|^{1+1/k} = \int |f|^{1+1/k}\,dx = \int_{\{|f|\le 1\}} |f|^{1+1/k}\,dx + \int_{\{|f|>1\}} |f|^{1+1/k}\,dx$$

$$\le \int_{\{|f|\le 1\}} |f|\,dx + \int_{\{|f|>1\}} |f|^p\,dx \qquad \forall p > 1+1/k$$

$$\le \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^p}^p$$

Sei f \in X. Dann existiert ein p > 0 mit f \in L_p(R). Für alle k \in \N mit 1+1/k < p gilt dann ||f||_1 + ||f||_p^p < C^(1/(1 + 1/k)) für C \in \R.
Wir suchen nun ein solches k, sodass C^(1/(1 + 1/k)) <= k gilt.
Es gilt 0.5 <= (1/(1 + 1/k)) < 1 für k >= 1 und somit C^(1/(1 + 1/k)) < C. Wähle also k >= C und k so groß, dass 1 + 1/k < p.
Dann ist f \in F_k.

(c) Folgern Sie, dass ein $p_0 > 1$ existiert, sodass $X \subset L_{p_0}(\mathbb{R})$.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Baire.

Annahme: $\bigcup L_p$ ist offen in L_1 und X ist von erster Kategorie

$\Rightarrow$ $\bigcup_{p>1} L_p \setminus X$ ist offen und von zweiter Kategorie

insbesondere nichtleer $\Rightarrow$ $\exists\ f \in \bigcup_{p>1} L_p \setminus X$.

Tut.: Proof: As X is closed subspace of L^1 $\Rightarrow$ X Banach space $\overset{\text{Baire}}{\Rightarrow}$ $\mathring{X} = \emptyset$

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k \overset{\text{Baire}}{\Rightarrow} \exists k_0 \in \mathbb{N}: \mathring{F}_{k_0} \ne \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists f_0 \in F_{k_0},\ r_0 > 0: \overline{B_{r_0}^{L_1}(f_0)} \subseteq F_{k_0}$$

$\forall f \in X$: $$f_0 + \underbrace{\frac{r_0 f}{2\|f\|_1}}_{\|\cdot\| = \frac{r_0}{2}} \in \overline{B}_{r_0}^{L_1} \subseteq F_{k_0}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{r_0 f}{2\|f\|_1}\right\|_{1+1/k_0} \le \left\|f_0 + \frac{r_0 f}{2\|f\|_1}\right\|_{1+1/k_0} + \|f_0\|_{1+1/k_0} \le 2k_0$$

$$\Rightarrow \|f\|_{1+1/k_0} \le \frac{4k_0}{r_0}\|f\|_1 < \infty, \quad \text{mit } p_0 := 1 + 1/k_0$$

Aufgabe 7.4 3 Punkte

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) A ist beschränkt (siehe Aufgabe 2.1).

ii) Für alle $f \in X'$ gilt: $\sup\{|f(x)| \mid x \in A\} < \infty$.

(i) => (ii): Lemma 3.3(g). Alternativ:

$$|f(x)| = |f(a_0 + d)| \le |f(a_0)| + |f(d)| \qquad \|d\| \le \operatorname{diam} A$$

$$\sup_{x \in A} |f(x)| \le |f(a_0)| + \sup_{\|d\| \le \operatorname{diam} A} |f(d)| < \infty \qquad \text{Stetigkeit von } f$$

(ii) => (i). Definiere F_x: X' -> \R durch F_x(f) = f(x). Behauptung: F_x ist linear und stetig.

- Linearität: F_x(a*f+g) = (a*f + g)(x) = a* f(x) + g(x) = a * F_x(f) + F_x(g).
- Stetigkeit: Sei f_n eine Folge von Funktionalen in X'. X' ist ein Banachraum, also existiert ein eindeutiger Grenzwert f in X'. Der punktweise Grenzwert erfüllt dabei die geforderten Bedingungen, es gilt also f(x) = lim f_n(x). Nun gilt F_x(lim f_n) = F_x(f) = f(x) = lim f_n(x) = lim F_x(f_n). Somit ist F_x stetig.

Betrachte nun die Familie von linearen Operatoren M = {F_x | x\in A} \subset L(X', \R).
M ist punktweise beschränkt: Sei dazu f \in X' beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung

infty > sup_{x \in A} |f(x)| = sup_{x \in A} |F_x(f)| = sup_{F \in M} |F(f)|.

Wir können also den Satz von Banach-Steinhaus anwenden und erhalten, dass die Familie von Operatoren beschränkt ist, sup_{F \in M} ||F|| = C < infty.

sup_{F \in M} ||F|| = sup_{x \in A} sup_{f \in X': ||f|| <= 1} |F_x(f)| = sup_{x \in A} sup_{f \in X': ||f|| <= 1} |f(x)|

$$= \sup_{x \in A} \sup_{f \in X' : \|f\| \le 1} |f(x)| = \sup_{f \in X'} \sup_{x \in A} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

Consider $J : X \hookrightarrow X'' = \mathcal{L}(X', \mathbb{K})$

J isometric: $\|J(x)\|_{X''} = \|x\|_X$ (use Hahn-Banach for backwards direction)

Aufgabe 7.5 1 Punkt

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|T_n\| \to \infty$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass ein $x \in X$ existiert, sodass die Folge $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

Angenommen, es existiert kein solches x. Dann ist die Familie von Operatoren T_n punktweise beschränkt, denn es gilt sup T_n(x) < infty für alle x \in X. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist dann aber sup ||T_n|| < \infty, im Widerspruch zu ||T_n|| -> infty.

Funktionalanalysis - Übungsblatt 8

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 15. Dezember 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Aufgabe 8.1 4 Punkte

[2.5+1.5 Punkte]

(a) Für $c > 0$ definieren wir

$$M_c := \left\{ f \in C^1([0,1]) \mid \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx + \int_0^1 |f'(x)|^2 \, dx \le c \right\}$$

Zeigen Sie, dass $\overline{M}_c$ kompakt ist in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Sei V ein abgeschlossener Untervektorraum von $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ und es gebe ein $c > 0$ mit

$$\forall f \in V \, \exists \, a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) : |f(x) - f(y)| \le c\|f\|_\infty \|x - y\|^a. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass V endlich dimensional ist.

Aufgabe 8.2 4 Punkte

[2+2 Punkte]

Seien X, Y Banachräume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt *beschränkt von unten*, falls ein $c > 0$ existiert, sodass

$$\|Tx\| \ge c\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(a) Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ von unten beschränkt, so ist $\operatorname{im}(T) \subset Y$ abgeschlossen.

(b) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, X)$ ist invertierbar genau dann, wenn T von unten beschränkt ist und $\operatorname{im}(T) \subset Y$ dicht liegt.

Aufgabe 8.3 4 Punkte

[1.5 + 1 + 1.5 Punkte]

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein linearer Operator.

(a) Zeigen Sie, dass T stetig ist, falls

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \forall \, x, y \in H. \tag{2}$$

Nehmen Sie nun an, dass T stattdessen die folgende Bedingung erfülle

$$\langle Tx, x\rangle \ge 0 \qquad \forall \, x \in H \tag{3}$$

b) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass T Bedingung (2) erfüllt und somit stetig ist.

c) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass T stetig ist aber im Allgemeinen (2) nicht erfüllt.

Hinweis: Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Bitte wenden!

Aufgabe 8.4 4 Punkte

Seien $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ zwei Banachräume und $T \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $\operatorname{im}(T)$ abgeschlossen und $\dim \ker(T) < \infty$. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf V, die von $\|\cdot\|_V$ dominiert wird, d.h. es existiert eine Konstante $M > 0$, sodass $\|x\| \leq M\|x\|_V$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass dann ein $C > 0$ existiert, sodass

$$\|x\|_V \leq C(\|Tx\|_W + \|x\|) \qquad \forall x \in V.$$

Hinweis: Argumentieren Sie per Widerspruch und schauen Sie sich den Beweis von der offenen Abbildung noch einmal an.

Aufgabe 8.1 4 Punkte

[2.5+1.5 Punkte]

(a) Für $c > 0$ definieren wir

$$M_c := \left\{ f \in C^1([0,1]) \mid \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx + \int_0^1 |f'(x)|^2 \, dx \leq c \right\}$$

Zeigen Sie, dass $\overline{M}_c$ kompakt ist in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Arzela-Ascoli: V = [0,1] ist kompakt und Y = \R ist ein Banachraum. M_c relativ kompakt <=>

1. M_c,v = {f(v): f in M_C} ist relativ kompakt
2. M_c ist punktweise gleichgradig stetig

1. $f_n \in M_c$, $f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

$$\frac{f(x) - f(0)}{|x|} = f'(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in [0,x]$$

2.2. $\int |f|^2$ groß oder $\int |f'|^2$ groß

Mittelwertsatz, Hölder, HDI

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx = \|f\|_2^2$$

$$\|f f\|_1 \leq \|f\|_2 \|f\|_2 \quad \text{trivial}$$

2. Gleichgradig stetig:

2.2. $\forall v \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad |w - v| < \delta \Rightarrow \|f(w) - f(v)\| < \varepsilon \quad \forall f \in M_c$

Beweis:

$$\lim_{w \to v} \frac{\|f(w) - f(v)\|}{|w - v|} = f'(v) \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \frac{\sup_{v \in [0,1]} f'(v)}{\varepsilon}$$

$$|w - v| < \delta \Rightarrow \|f(w) - f(v)\| \leq f'(v) \, \delta < \varepsilon$$

$\boxtimes$

(b) Sei V ein abgeschlossener Untervektorraum von $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ und es gebe ein $c > 0$ mit

$$\forall f \in V\, \exists a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) : |f(x) - f(y)| \leq c\|f\|_\infty \|x - y\|^a. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass V endlich dimensional ist.

V ist genau dann endlichdimensional, wenn der Einheitsball B_1 relativ kompakt ist.
Arzela-Ascoli: V = [0,1] ist kompakt und Y = \R ist ein Banachraum. B_1 relativ kompakt <=>
1. B_1,v = {f(v): f in B_1} ist relativ kompakt
2. B_1 ist punktweise gleichgradig stetig

2. Sei $x \in [0,1]$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{\max(c,1)}\right)^2$

OE $\varepsilon < 1$

$\forall y \in B_\delta(x)$: $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot \|x-y\|^a \leq c \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\max(c,1)}\right)^{2a} < \varepsilon^{2a} < \varepsilon$

1. $B_{1,x} = \{f(x) : f \in B_1^V\} \leq \sup_{x \in [0,1]} f(x) \leq 1 \quad \forall x$

$\Rightarrow B_{1,x}$ beschränkt $\Rightarrow B_{1,x}$ relativ kompakt $\square$

Aufgabe 8.2 4 Punkte

[2+2 Punkte]

Seien X, Y Banachräume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt *beschränkt von unten*, falls ein $c > 0$ existiert, sodass

$$\|Tx\| \geq c\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(a) Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ von unten beschränkt, so ist $\mathrm{im}(T) \subset Y$ abgeschlossen.

Sei y_n eine Folge in $\mathrm{im}(T)$ mit Limes $y \in Y$.

$\left(0 = \|Tx\| \geq c \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \right) \Rightarrow \underline{\ker T = \{0\}}$

Zu jedem y_n $\exists!$ $x_n \in X$: $Tx_n = y_n$ (da $\ker T = 0$, LA1).

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CF $\Rightarrow \forall \varepsilon \exists N$: $\|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$

$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c} \cdot \|T(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c} \cdot \|Tx_n - Tx_m\| < \frac{\varepsilon}{c} \quad \forall n, m > N$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt Grenzwert $x \in X$.

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\| = \lim_{n\to\infty} T\|x_n - x\|$$
$$= T \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = T(0) = 0$$

$\Rightarrow Tx$ ist Grenzwert von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $Tx \in \mathrm{im}(T) \Rightarrow \mathrm{im}(T)$ abg.

(b) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X, X)$ ist invertierbar genau dann, wenn T von unten beschränkt ist und $\mathrm{im}(T) \subset Y$ dicht liegt.

* (a) $\Rightarrow \mathrm{im}(T)$ ist abg und dicht $\Rightarrow \mathrm{im}(T) = X \Rightarrow T$ surjektiv

* Beweis von (a) $\Rightarrow \ker(T) = 0 \Rightarrow T$ injektiv

$\Rightarrow T$ bijektiv.

Nach Korollar 3.24 ist die Umkehrabbildung stetig und somit T invertierbar.

Aufgabe 8.3 4 Punkte

[1.5 + 1 + 1.5 Punkte]

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein linearer Operator.

(a) Zeigen Sie, dass T stetig ist, falls

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \forall\, x, y \in H. \tag{2}$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ eine Nullfolge in H, sodass $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} y \in H$.

Sei außerdem x in H beliebig. Dann gilt $\langle y, x\rangle = 0$:

$$= \langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, x\rangle \overset{\text{Stetigkeit } \langle,\rangle}{=} \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Tx\rangle$$

$$\overset{\text{Stetigkeit } \langle,\rangle}{=} \langle \lim_{n\to\infty} x_n, Tx\rangle = \langle 0, Tx\rangle = 0$$

Diese Gleichung gilt für alle x in H. Daher ist y = 0. Nach Lemma 3.30 ist T damit abgeschlossen. H ist ein Hilbertraum und damit\
insbesondere ein Banachraum. Daher folgt mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen die Stetigkeit von T.

Nehmen Sie nun an, dass T stattdessen die folgende Bedingung erfülle

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \qquad \forall\, x \in H \tag{3}$$

b) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass T Bedingung (2) erfüllt und somit stetig ist.

$$4\langle Tx, x\rangle = \|Tx + x\|^2 - \|Tx - x\|^2 - i\,\|Tx + ix\|^2 + i\,\|Tx - ix\|^2$$

Es gilt $\|Tx - ix\|^2 = \|Tx + ix\|^2$

$\Leftrightarrow$ $\langle Tx - ix, Tx - ix\rangle = \langle Tx + ix, Tx + ix\rangle$

$\Leftrightarrow$ $\langle Tx, -ix\rangle + \langle -ix, Tx\rangle + \langle -ix, -ix\rangle = \langle Tx, ix\rangle + \langle ix, Tx\rangle + \langle ix, ix\rangle$

$\Leftrightarrow$ $-\overline{(-\langle ix, ix\rangle)} = 2\left(\langle Tx, ix\rangle + \overline{\langle Tx, ix\rangle}\right) + i\langle ix, x\rangle$

$\Leftrightarrow$ $\overline{i\langle ix, x\rangle} = 2\left(i\langle Tx, x\rangle + \overline{i\langle Tx, x\rangle}\right) + i\,\overline{i\langle x, x\rangle}$

$\Leftrightarrow$ $-i \cdot \langle x, ix\rangle = 2\left(i\langle Tx, x\rangle - i\langle Tx, x\rangle\right) + \langle x, x\rangle$

$\Leftrightarrow$ $\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle$ ✓

$\Rightarrow$ $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$.

$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \|Tx + x\|^2 \geq \|Tx - x\|^2$

$$\langle Tx+x, Tx+x\rangle \geq \langle Tx-x, Tx-x\rangle$$

$\Leftrightarrow$ $\langle Tx, x\rangle + \langle x, Tx\rangle + \langle x,x\rangle \geq \langle Tx, -x\rangle + \langle -x, Tx\rangle + \langle -x, -x\rangle$

$\Leftrightarrow$ $3\langle x, Tx\rangle + \langle x,x\rangle \geq \overline{\langle Tx, -x\rangle} - \overline{\langle x, -x\rangle}$

$\quad\quad\quad = \quad\quad \geq -\langle x, Tx\rangle + \langle x,x\rangle$

$\Leftrightarrow$ $\langle Tx, x\rangle \geq 0$

2.2. $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

1.22. $\langle Tx, y\rangle \geq \langle x, Ty\rangle$

$\mathrm{Re}\,\langle x, Ty\rangle \leq \mathrm{Re}\,\langle x, Tx+Ty\rangle + \langle y, Ty\rangle + \mathrm{Re}\,\langle y, Tx\rangle - \mathrm{Re}\,\langle y, Tx\rangle$

$\quad = \mathrm{Re}\,\langle x+y, T(x+y)\rangle - \mathrm{Re}\,\langle y, Tx\rangle$

$\langle x-y, Tx-Ty\rangle \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\langle x, Tx\rangle + \langle -y, Tx\rangle + \langle x, -Ty\rangle + \langle -y, -Ty\rangle \geq 0$

$4\langle Tx, y\rangle = \|Tx+y\|^2 - \|Tx-y\|^2 - i\|Tx+iy\|^2 + i\|Tx-iy\|^2$

$4\langle x, Ty\rangle = \|x+Ty\|^2 - \|x-Ty\|^2 - i\|x+iTy\|^2 + i\|x-iTy\|^2$

2.2.: $\langle Tx+y, Tx+y\rangle + \langle x-Ty, x-Ty\rangle = \langle x+Ty, x+Ty\rangle + \langle Tx-y, Tx-y\rangle$

$\|Tx+x\|^2 \geq \|Tx-x\|^2$

$\|Tx+Ty+x+y\|^2 \geq \|Tx+Ty-x-y\|^2$

$\Leftrightarrow$ $\langle T(x+y), x+y\rangle \geq \langle T(x+y), -(x+y)\rangle$

$+ \langle x+y, T(x+y)\rangle \quad + \langle -(x+y), T(x+y)\rangle$

c) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass T stetig ist aber im Allgemeinen (2) nicht erfüllt.

Aufgabe 8.4 4 Punkte

Seien $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ zwei Banachräume und $T \in \mathcal{L}(V,W)$ mit $\operatorname{im}(T)$ abgeschlossen und $\dim \ker(T) < \infty$. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf V, die von $\|\cdot\|_V$ dominiert wird, d.h. es existiert eine Konstante $M > 0$, sodass $\|x\| \le M\|x\|_V$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass dann ein $C > 0$ existiert, sodass

$$\|x\|_V \le C(\|Tx\|_W + \|x\|) \qquad \forall x \in V.$$

Hinweis: Argumentieren Sie per Widerspruch und schauen Sie sich den Beweis von der offenen Abbildung noch einmal an.

$V \xrightarrow{T} \operatorname{im}(T) \overset{\text{abg.}}{\subset} W \Rightarrow \operatorname{im}(T)$ Banach

$\dim \ker(T) < \infty$

$\|x\|_V \le C(\|Tx\|_W + \|x\|)$

$\tilde{T}: V \twoheadrightarrow \operatorname{im}(T) \Rightarrow \tilde{T}$ offen

Angenommen, $\forall C > 0\ \exists x: \|x\|_V > C\cdot(\|Tx\|_W + \|x\|)$, $x \neq 0$

OE $\|x\|_V = 1$

$\left(\text{Sonst } x = \frac{x}{\|x\|_V}: \left\|\frac{x}{\|x\|_V}\right\|_V > C\cdot\left(\left\|T\frac{x}{\|x\|_V}\right\|_W + \frac{\|x\|}{\|x\|_V}\right)\right)$

$C\|x\| < \|x\|_V$

$\|x\| \le 1 \|x\|_V$

$\forall C > 0\ \exists x: \|x\|_V = 1, \ \|x\| < \frac{1}{C}, \ \|Tx\|_W < \frac{1}{C}$

$\forall C > \frac{1}{\delta}$

$\Rightarrow Tx \in B_\delta(0_W) \subset T(B_1(0_V))$

$\Rightarrow \exists x^{(1)} \in B_1(0_V)$ mit $Tx^{(1)} = Tx \Rightarrow x' - x \in \ker T$.

$\|x^{(1)}\| = s_1 \qquad \left\|T\frac{x_1}{s_1}\right\|_W < \frac{\delta}{s_1}$

$\forall C > 0\ \exists x \in V, \|x\|_V = 1: \|x\|_V > C\cdot\|x\|$, i.e. $\|x\| < \frac{1}{C}$, d.h. $x \in \bigcap_{1/C}$ offen

$\{x \in V: \|x\| < \frac{1}{C}\}$

Angenommen $\forall c > 0 \; \exists x: \|x\|_V = 1, \; \|x\| < \frac{1}{c}, \quad \|Tx\|_W = 0$

Für $c_n = n$ wähle $x_n \in \ker T$ s.t. $\|x_n\| < \frac{1}{n}$.

$$\xrightarrow{\ker T \text{ kompakt}} \exists \text{ konvergente TF } x_{n_k} \text{ mit } \bar{x} = \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in \ker T,$$

$$\|\bar{x}\| = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \lightning$$

$$\bigcap_n \left\{ x \in V, \|x\|_V = 1, \; \|Tx\|_W < \frac{1}{n} \right\}$$

Funktionalanalysis - Übungsblatt 9

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 20. Dezember 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Bitte beachten Sie die verkürzte Abgabefrist!

Aufgabe 9.1 4 Punkte

Beweisen Sie Satz 3.46 aus der Vorlesung, d.h.: Ist $W \subset V$ ein linearer Teilraum und $v \in V$ ein Element in einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ mit

$$\operatorname{dist}(v, W) := \inf\{\|v - w\| : w \in W\} > 0,$$

so existiert ein $\Phi \in V'$ derart, dass

$$\|\Phi\|_{V'} = 1, \quad \Phi(v) = \operatorname{dist}(v, W), \quad \Phi(w) = 0 \text{ für alle } w \in W.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Teilraum $W_v := \mathbb{K}v + W = \{\lambda v + w : w \in W\}$ und definieren Sie ein geeignetes Funktional auf W_v.

Aufgabe 9.2 4 Punkte

Seien X, Y Banachräume. Seien $A : X \to Y$ und $B : Y' \to X'$ linear. Für alle $x \in X$ und $y' \in Y'$ gelte

$$\langle Ax, y' \rangle_Y = \langle x, By' \rangle_X$$

Man zeige, dass dann A und B stetig sind.

Aufgabe 9.3 4 Punkte

Sei X ein Banachraum und X' separabel. Zeigen Sie, dass dann auch X separabel ist.

Die folgenden Aufgaben müssen Sie nicht einreichen. Sie dienen zur Wiederholung oder der Erweiterung des Vorlesungsstoffes. Dafür können Sie auch Aussagen und Konzepte aus der Vorlesungswoche des 18.12. verwenden.

Aufgabe 9.4

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist $A \subset X$ genau dann präkompakt wenn für jede Folge in A eine in X konvergente Teilfolge existiert.

Aufgabe 9.5

Sei $V = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der üblichen euklidschen Norm und betrachten Sie den linearen Teilraum $W = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$. Wir definieren das Funktional $\phi : W \to \mathbb{R}$ durch $\phi(x) = x_1$.

Zeigen Sie, es existiert eine eindeutige Hahn-Banach Fortsetzung $\Phi \in V'$ von ϕ, d.h. $\Phi|_W = \phi$ und $\|\Phi\|_{V'} = \|\phi\|_{W'}$. Diese ist gegeben durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{5}(4x_1 + 2x_2).$$

Aufgabe 9.6

Sei $V = \ell_1$ ausgestattet mit der üblichen $\|\cdot\|_{\ell_1}$ Norm. Betrachten Sie den Untervektorraum

$$W = \{v \in \ell_1 \mid v_k = 0 \text{ für alle } k \text{ ungerade}\}.$$

Betrachten Sie den Operator $\phi : W \to \mathbb{R}$, $\phi(w) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j$. Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \ell_\infty$ mit

$$y_k = \begin{cases} 1, & k \text{ gerade,} \\ |y_k| \leq 1, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

der Operator Φ_y definiert durch $\Phi_y(v) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^* v_k$ eine Hah-Banach Fortsetzung von ϕ.
Hinweis: $\ell_1' = \ell_\infty$.

Aufgabe 9.7
Bestimmen Sie für die folgenden Operatoren den adjungierten Operator:

(a) $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$, $T(v_1, v_2, ...) = \left(\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{v_2+v_3}{2}, \frac{v_3+v_4}{2}, ...\right)$.

(b) $T \in \mathcal{L}(L_2([0,1])))$, $(Tf)(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$.

(c) $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$, mit $(Tf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$ fast überall. Hierbei ist $k \in C^0([0,1] \times [0,1], \mathbb{K})$ ein Integralkern.

(d) $TT^* \in \mathcal{L}(L^2([0,1])$ mit T und T^* aus Aufgabenteil c).