Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 13
Keine Abgabe

Dieses Blatt dient zur Vorbereitung auf die Klausur am 19.07 und wird nicht abgegeben. Am Mittwoch, 14.07. werden Lösungsskizzen zu den Aufgaben auf MaMpf bereitgestellt.

Notation: Im Folgenden sei A stets ein kommutativer Ring mit Eins.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass eine kanonische Bijektion $\mathrm{Hom}_{\mathtt{Ab}}(\mathbb{Z},A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathtt{Ring}}(\mathbb{Z}[T],A)$ existiert.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für die folgenden Paare (A,B) von Ringen jeweils möglichst explizit und mit Begründung die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathtt{Ring}}(A,B)$ aller (unitären) Ringhomomorphismen von A nach B.

(a) $\big(\mathbb{Z}, \mathbb{C}(X)[Y]/(Y^2-X^2)\big)$

(b) $(\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$

(c) $(\mathbb{Q}, \mathbb{C})$

(d) $(\mathbb{Z}[X], \mathbb{Z}[X])$

(e) $(0, \mathbb{R})$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ flach, aber nicht projektiv ist.

Aufgabe 4. Sei A ein Hauptidealring und seien M_1, M_2 und N endlich erzeugte A-Moduln. Zeigen Sie:

(a) Ist $M_1 \oplus N \cong M_2 \oplus N$, so folgt bereits $M_1 \cong M_2$.

(b) Die Aussage aus (a) ist für nicht endlich erzeugte Moduln im Allgemeinen falsch.

Aufgabe 5. Sei A ein lokaler, nullteilerfreier Ring mit Maximalideal $\mathfrak{m}$, Restklassenkörper $\kappa = A/\mathfrak{m}$ und Quotientenkörper $K = \mathrm{Quot}(A)$. Ferner sei M ein endlich erzeugter A-Modul. Zeigen Sie:

(a) Es ist $\dim_K(M \otimes_A K) \leq \dim_\kappa(M \otimes_A \kappa)$.

(b) In (a) gilt genau dann Gleichheit, wenn M frei ist.

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass die beiden A-Algebren $A[X]_X$ und $A[X,Y]/(XY-1)$ isomorph zueinander sind.

Aufgabe 7. Sei

$$\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 &
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von A-Moduln mit exakten Zeilen. Zeigen Sie: Ist f_2 ein Isomorphismus, dann ist f_1 genau dann surjektiv, wenn f_3 injektiv ist.

Aufgabe 8. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \ldots\ldots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-2} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von A-Moduln endlicher Länge. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^n (-1)^i\, \ell_A(M_i) = 0$.

Aufgabe 9. Sei M ein A-Modul. Zeigen Sie:

(a) Ist $\operatorname{Ext}^1_A(N,M)=0$ für jeden A-Modul N, so ist M injektiv.

(b) Ist $\operatorname{Ext}^1_A(M,N)=0$ für jeden A-Modul N, so ist M projektiv.

Aufgabe 10. Sei A noethersch und seien M und N endlich erzeugte A-Moduln. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Tor}^A_n(M,N)$ für alle $n \geq 0$ ein endlich erzeugter A-Modul ist.

Aufgabe 11. Entscheiden Sie mit Begründung, welche der folgenden Aussagen wahr sind:

(a) Jeder noethersche Modul ist artinsch.

(b) Jeder artinsche Modul ist noethersch.

(c) Jeder noethersche Ring ist artinsch.

(d) Jeder artinsche Ring ist noethersch.

(e) Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}[T]$ ist noethersch.

(f) Der $\mathbb{Z}[T]$-Modul $\mathbb{Z}[T]$ ist noethersch.

Aufgabe 12. Sei A noethersch und sei jedes Element von A entweder eine Einheit oder nilpotent. Zeigen Sie, dass A ein artinscher lokaler Ring ist.

Aufgabe 13. Seien A ein Hauptidealring und $0 \neq \mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass der Faktorring $A/\mathfrak{a}$ artinsch ist.

Aufgabe 14. Sei G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist H eine Untergruppe von G, dann ist auch ihr Abschluss $\overline{H}$ eine Untergruppe von G.

(b) Ist H ein Normalteiler von G, dann ist auch $\overline{H}$ ein Normalteiler von G.

Aufgabe 15. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und sei A vollständig bezüglich der $\mathfrak{a}$-adischen Topologie. Zeigen Sie: Ist $A/\mathfrak{a}$ noethersch und $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ ein endlich erzeugter A-Modul, so ist A bereits noethersch.

Aufgabe 16. Welche Dimension haben die folgenden Ringe?

(a) $\mathbb{C}[X,Y]$

(b) $\mathbb{C}[X]/(X^2+1)$

(c) $\mathbb{C}[X,Y]_{(X,Y)}/(Y^2-X)$