Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
PROF. DR. A. SCHMIDT
DR. C. DAHLHAUSEN

Blatt 6
Abgabe: *Freitag, 28.05.2021, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Projektive Moduln). **(6 Punkte)**
Sei n eine natürliche Zahl.

(a) Sei $d \in \mathbb{N}$ ein Teiler von n. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ genau dann projektiv ist, wenn $\mathrm{ggT}(d, \frac{n}{d}) = 1$ gilt. Insbesondere ist, falls n keine Primpotenz ist, nicht jeder endlich erzeugte, projektive $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul frei. Folgern Sie: Ist $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung von n, so ist jeder endlich erzeugte, projektive $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul von der Form

$$(\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z})^{f_1} \oplus \ldots \oplus (\mathbb{Z}/p_r^{e_r}\mathbb{Z})^{f_r}$$

für geeignete $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{N}_0$. *Hinweis:* Benutzen Sie den Hauptsatz über endliche erzeugte $\mathbb{Z}$-Moduln.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein kofreier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul ist. Folgern Sie daraus, dass jeder endlich erzeugte projektive $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul auch injektiv ist.

Aufgabe 2 (Mono- und Epimorphismen von Ringen). **(6 Punkte)**
Es sei `CRing` die Kategorie der kommutativen, unitären Ringe mit unitären Ringhomomorphismen als Morphismen. In dieser Aufgabe untersuchen wir die Mono- und Epimorphismen in `CRing`. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(a) Jeder injektive Ringhomomorphimsmus ist ein Monomorphismus.
(b) Jeder Monomorphismus ist injektiv.
(c) Jeder surjektive Ringhomomorphimsmus ist ein Epimorphismus.
(d) Jeder Epimorphismus ist surjektiv.

Aufgabe 3 (Halbgeordnete Mengen als Kategorien). **(6 Punkte)**
Sei $(I, \leq)$ eine halbgeordnete Menge. Zeigen Sie:

(a) Die Elemente von I bilden eine Kategorie $\mathrm{Kat}(I)$, d.h. $\mathrm{ob}(\mathrm{Kat}(I)) = I$, wobei für zwei Elemente $i, j \in I$ die Morphismen wie folgt gegeben sind: ist $i \leq j$, so hat die Menge $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Kat}(I)}(i, j)$ genau ein Element, und andernfalls gilt $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Kat}(I)}(i, j) = \emptyset$.

(b) Sei I gerichtet und R ein Ring. Dann ist ein direktes System von R-Moduln genau das gleiche wie ein (kovarianter) Funktor $M \colon \mathrm{Kat}(I) \to R\text{-}\mathtt{Mod}$ und ein projektives System ist genau das gleiche wie ein (kovarianter) Funktor $N \colon \mathrm{Kat}(I)^{\mathrm{op}} \to R\text{-}\mathtt{Mod}$ (d.h. ein kontravarianter Funktor $N \colon \mathrm{Kat}(I) \to R\text{-}\mathtt{Mod}$).

Aufgabe 4 (Ringhomomorphismen und Spektren). **(6 Punkte)**
Sei $\phi \colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Für ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ ist sein Urbild $\phi^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ wieder ein Primideal. Daher erhalten wir eine Mengenabbildung $\phi^* \colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A), \mathfrak{q} \mapsto \phi^*(\mathfrak{q}) := \phi^{-1}(\mathfrak{q})$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $f \in A$ ist $(\phi^*)^{-1}(D(f)) = D(\phi(f))$. Folgern Sie, dass ϕ^* stetig ist.
Hinweis: Blatt 4, Aufgabe 4.

(b) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist $(\phi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$.

(c) Für ein Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$ ist $\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\mathfrak{b}^c)$.[1]

[1] Für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X bezeichnet $\overline{A}$ den Abschluss von A in X, d.h. die kleinste abgeschlossene Menge von X, die A enthält.

Zusatzaufgabe 5 (K-Theorie). **(6 Punkte)**

Sei A ein Ring (kommutativ, mit Eins) und $\mathtt{Proj}(A)^{\cong}$ die Menge der Isomorphieklassen endlich erzeugter, projektiver A-Moduln. Für einen endlich erzeugten, projektiven A-Modul P bezeichne $[P]$ seine Isomorphieklasse. Wir definieren die *K-Gruppe von A* als die Faktorgruppe

$$K(A) := \Big(\bigoplus_{[P] \in \mathtt{Proj}(A)^{\cong}} \mathbb{Z} \cdot [P] \Big) / \mathtt{Exakt}$$

wobei $\mathtt{Exakt}$ die Untergruppe ist, die von den Elementen $[P] - [P'] - [P'']$ für jede kurze exakte Folge $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ endlich erzeugter projektiver A-Moduln erzeugt wird. Zeigen Sie: Ist A ein Hauptidealring, so induziert die Rangabbildung $\mathrm{rg}\colon \mathtt{Proj}(A)^{\cong} \to \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus abelscher Gruppen $K(A) \to \mathbb{Z}$.

Hinweis: Benutzen Sie den Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring.