



Aufgabe 1

(a) In der Abbildung ist $\|x\|_1$ schwarz, $\|x\|_2$ rot und $\|x\|_\infty$ blau.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^n$.

- Es gilt $|x| \leq \max |x|$ und somit für $x_i \in \mathbb{R}$: $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \cdot \max |x_i|$. Wegen $\max |x| \leq |x| + k, k \geq 0$ gilt $\max |x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$. Insgesamt also:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht n gegen unendlich. Es wächst also $\|x\|_1$ schneller als $\|x\|_\infty$.

- Es gilt $|x|^2 \leq \max |x|^2$ und für $x_i \in \mathbb{R}$: $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leq n \cdot \max |x_i|^2$, also insbesondere auch $\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq \sqrt{n \cdot \max |x_i|^2} = \sqrt{n} \cdot \max |x_i|$. Wegen $\max |x|^2 \leq |x|^2 + k, k \geq 0$, gilt insgesamt:

$$\max |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \leq \sqrt{n} \cdot \max |x_i|$$

also

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht \sqrt{n} gegen unendlich. Es wächst also $\|x\|_2$ schneller als $\|x\|_\infty$.

- Es gilt

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k \cdot 1| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz-Ungl.}}{\leq} \|x\|_2 \cdot \|1\|_2 = \sqrt{n} \|x\|_2.$$

Teilen durch \sqrt{n} liefert

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht $\frac{1}{\sqrt{n}}$ gegen Null. Es wächst also $\|x\|_1$ schneller als $\|x\|_2$.

Aufgabe 2

(a) Wir berechnen die Konditionszahl

$$\begin{aligned}
 k &= \left(\frac{df}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)} \right) \\
 &= \frac{\sin(x)x - (1 - \cos(x))}{x^2} \cdot \frac{x \cdot x}{1 - \cos(x)} \\
 &= \frac{x \sin(x) - (1 - \cos(x))}{1 - \cos(x)} \\
 &= \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} - 1
 \end{aligned}$$

Wir wenden den Satz von Taylor in zweiter Ordnung genähert einmal nur auf die trigonometrischen Funktionen an und erhalten

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x(x - \frac{x^3}{3})}{1 - (1 - \frac{x^2}{2})} - 1 \\
 &= \frac{x^2 - \frac{x^4}{3}}{\frac{x^2}{2}} - 1 \\
 &= 1 - \frac{2}{3}x^2
 \end{aligned}$$

Nun machen wir es einmal mathematisch korrekt und wenden den Satz von Taylor auf den gesamten Ausdruck an. Dazu benötigen wir zunächst den Funktionswert an der Stelle 0.

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)} - 1 \\
 &= \frac{x \sin(x)(1 + \cos(x))}{\sin^2(x)} - 1 \\
 &= \frac{x + x \cos(x)}{\sin(x)} - 1
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(x) - x \sin(x)}{\cos(x)}$$

Nach der Regel von L'Hospital erhalten wir also

$$\begin{aligned}
 2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x \cos(x)}{\sin(x)} \\
 1 &= f(0)
 \end{aligned}$$

Außerdem müssen wir noch die Ableitung an der Stelle 0 berechnen.

$$f'(x) = \frac{(1 + \cos(x) - x \sin(x)) \sin(x) - (x + x \cos(x)) \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Es gilt

$$(x - 2 \sin(x)) \sin(x) = \frac{d}{dx} (1 + \cos(x) - x \sin(x)) \sin(x) - (x + x \cos(x)) \cos(x)$$

und daher mit der Regel von L'Hospital

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 2 \sin(x)) \sin(x)}{2 \sin(x) \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos(x) - x \sin(x)) \sin(x) - (x + x \cos(x)) \cos(x)}{\sin^2(x)} = f'(x) \end{aligned}$$

Zusätzlich benötigen wir noch die zweite Ableitung an der Stelle 0

$$f''(x) = \frac{2 - x \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}}{\cos(x) - 1}$$

Wegen

$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}x \sin(\frac{x}{2})}{\frac{1}{2} \cos(\frac{x}{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

können wir auch bei der zweiten Ableitung die Regel von L'Hospital anwenden

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d^4}{d^4 x} 2 - x \frac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}}{\frac{d^4}{d^4 x} \cos(x) - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d^3}{d^3 x} \sin(x) - x}{\frac{d^3}{d^3 x} 2 \sin(x) \sin^2(\frac{x}{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d^2}{d^2 x} \cos(x) - 1}{\frac{d^2}{d^2 x} \cos(x) - \cos(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} - \sin(x)}{\frac{d}{dx} - \sin(x) + 2 \sin(2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x)}{-\cos(x) + 4 \cos(2x)} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$f''(0) = -\frac{1}{3}$$

Nun setzen wir dies in den Satz von Taylor ein

$$\begin{aligned} f(0) &\approx f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{x^2}{2} f''(0) + O(x^3) \\ &\approx 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^3) \end{aligned}$$

Diese Auswertung zeigt zum einen, dass $f(x)$ für $|x| \ll 1$ gut konditioniert ist, zum anderen wird daraus klar, dass es wirklich einen Unterschied macht, ob man einfach nur die trigonometrischen Funktionen approximiert oder den ganzen Term. Ich würde einfach mal die (erstmal unbegründete) These aufstellen, dass es Funktionen gibt, für die eine Näherung auf die erste Art und Weise eine schlechte Konditionierung, die Näherung nach der zweiten Methode eine gute Konditionierung ergibt. Meine Frage wäre trotzdem: Muss in Zukunft so eine Analyse sein? Oder genügt die sehr viel schnellere Analyse mithilfe einer polynomiellen Näherung der trigonometrischen Funktionen.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{\text{rd}}(x) - f(x)}{f(x)} &= \frac{\frac{(1-\cos(x) \cdot (1+\varepsilon_1)) \cdot (1+\varepsilon_2)}{x} \cdot (1+\varepsilon_3) - \frac{1-\cos(x)}{x}}{\frac{1-\cos(x)}{x}} \\
 &= \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \cdot (1-\cos(x) \cdot (1+\varepsilon_1)) - (1-\cos(x))}{1-\cos(x)} \\
 &= \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \cdot (1-\cos(x)) - (1-\cos(x) - (1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\varepsilon_1 \cos(x))}{1-\cos(x)} \\
 &= (1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - 1 - \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)\varepsilon_1 \cos(x)}{1-\cos(x)}
 \end{aligned}$$

Betrachten wir also nur lineare Term in ε , so erhalten wir

$$= \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \frac{\cos(x)}{1-\cos(x)} \varepsilon_1$$

Da $|x| \ll 1$, ist der Faktor vor ε_1 sehr groß, obwohl der Algorithmus gut konditioniert ist. Dieser Algorithmus ist also instabil.

(c) Es gilt

$$f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x} = \frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x))} = \frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))}$$

Wir erhalten damit

$$f_{\text{rd}}(x) = \frac{\sin^2(x)(\varepsilon_1+1)(\varepsilon_2+1) \cdot (1+\varepsilon_6)}{(1+\varepsilon_5)(1+\cos(x)(1+\varepsilon_3))(1+\varepsilon_4)} = \frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x)(1+\varepsilon_3))} \cdot \underbrace{\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_6)}{(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_5)}}_{\xi}$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \frac{f_{\text{rd}}(x) - f(x)}{f(x)} &= \frac{\frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x)(1+\varepsilon_3))} \cdot \xi - \frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))}}{\frac{\sin^2(x)}{x(1+\cos(x))}} \\
 &= \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)(1+\varepsilon_3)} \cdot \xi - 1 \\
 &= \frac{1+\cos(x)(1+\varepsilon_3)}{1+\cos(x)(1+\varepsilon_3)} \cdot \xi - 1 - \frac{\cos(x)\varepsilon_3}{1+\cos(x)(1+\varepsilon_3)} \cdot \xi \\
 &= \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_6)}{(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_5)} - 1 - \frac{\cos(x)\varepsilon_3}{1+\cos(x)(1+\varepsilon_3)} \cdot \xi
 \end{aligned}$$

Als nächstes nutzen wir, dass $f(x) = \frac{a}{1+x}$ in erster Taylor-Näherung gleich $a(1-x)$ ist und nähern linear in ε_5

$$\approx \frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_6)(1-\varepsilon_5)}{(1+\varepsilon_4)} - 1 - \frac{\cos(x)\varepsilon_3}{1+\cos(x)(1+\varepsilon_3)} \cdot \xi,$$

in ε_4

$$\approx (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_6)(1-\varepsilon_5)(1-\varepsilon_4) - 1 - \frac{\cos(x)\varepsilon_3}{1+\cos(x)(1+\varepsilon_3)} \cdot \xi$$

und in ε_3

$$\approx (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_6)(1 - \varepsilon_5)(1 - \varepsilon_4) - 1 - \frac{\cos(x)\varepsilon_3}{1 + \cos(x)} \cdot \xi(1 - \varepsilon_3)$$

Entfernen wir nun alle Terme höherer Potenz in ε_i , erhalten wir

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_6 - \varepsilon_5 - \varepsilon_4 - \varepsilon_3 \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)}$$

Da alle Vorfaktoren betragsmäßig ≤ 1 sind bzw. der Vorfaktor von ε_3 sogar ca. gleich $\frac{1}{2}$, ist dieser Algorithmus numerisch stabil.

Aufgabe 3

1. Die Matrix B ist eine $(N^2 - 1) \times (2N(N - 1))$ -Matrix, A ist eine $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ -Matrix.
2. In der Matrix B gibt es in allen Zeilen, deren Kante nicht am Referenzknoten anliegt, zwei Einträge ungleich 0, sonst nur einen. In der Matrix A lässt sich das nicht so einfach sagen.
3. Das Gleichungssystem $Ap = b$ ist eindeutig lösbar, da bei einer symmetrischen positiv definiten quadratischen reellen Matrix alle Eigenwerte größer 0 sind und somit auch $\det A > 0$ ist.
- 4.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = B^T B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b sieht folgendermaßen aus:

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_p \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem lautet also :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_p \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist daher

$$p = \begin{pmatrix} \frac{q_p}{14} \\ \frac{3q_p}{14} \\ -\frac{q_p}{14} \\ 0 \\ \frac{5q_p}{14} \\ -\frac{3q_p}{14} \\ -\frac{5q_p}{14} \\ \frac{6q_p}{7} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

(a) Wir nutzen aus, dass man Skalare einfach transponieren darf.

$$x^T \frac{1}{2}(A + A^T)x = \frac{1}{2}(x^T Ax + x^T A^T x) = \frac{1}{2}(x^T Ax + (x^T A^T x)^T) = \frac{1}{2}(x^T Ax + x^T Ax) = x^T Ax$$

Es gilt also $x^T Ax > 0 \iff x^T A_S x > 0$.

(b) Sei $N := \{1, \dots, n\}$ und A positiv definit. Dann ist $\forall x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax = \sum_{i,j \in N} x_i A_{ij} x_j > 0$. Es gilt:

$$\forall x' \in \mathbb{R}^{|X|} : \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x_i = 0 \ \forall i \notin X : \sum_{i,j=1}^{|X|} x'_i (A_X)_{ij} x'_j = \sum_{i,j \in X} x_i a_{ij} x_j,$$

da die $x_i | i \notin X$ überhaupt nicht in der Summe vorkommen und man die restlichen x_i nur umindizieren muss. Allerdings gilt auch $\forall x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_i = 0 \ \forall i \notin X$

$$\sum_{i,j \in X} x_i a_{ij} x_j = \sum_{i,j \in N} x_i a_{ij} x_j \stackrel{A \text{ positiv definit}}{>} 0,$$

da hier nur Nullterme hinzukommen. Wegen den oben gezeigten Gleichheit gilt also auch

$$\forall x' \in \mathbb{R}^{|X|} : \sum_{i,j=1}^{|X|} x'_i (A_X)_{ij} x'_j > 0.$$

Daraus folgt aber sofort, dass A_X positiv definit sein muss.

- (c) Wenn A positiv definit ist, dann gilt $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -(1+\alpha) & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 - (1+\alpha)yx + 2y^2 = 2(x^2 - \frac{\alpha}{2}xy + y^2) > 0$ Sei nun $\alpha < 4$. Dann gilt $2(x^2 - \frac{\alpha}{2}xy + y^2) > 2(x^2 - \frac{4}{2}xy + y^2) = (x-y)^2 \geq 0$. Sei nun $\alpha \geq 4$. Wähle dann $x = y = 1$. Dann erhält man $2(x^2 - \frac{\alpha}{2}xy + y^2) = 2(2 - \frac{\alpha}{2}) \leq 2(2 - \frac{4}{2}) = 0$. Also ist A genau für $\alpha < 4$ positiv definit.
- (d) Es gilt $\bar{x}^T A x = \bar{x}^T \bar{H}^T H x = \overline{(Hx)}^T (Hx) = \|Hx\|_2^2 > 0 \iff Hx \neq 0$. Daraus folgt: A positiv definit $\iff \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : Hx \neq 0 \iff \text{rg}(H) = n$.