Aufgabe 2

(a) Es muss gelten

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir $a = \overline{a} \implies a \in \mathbb{R}$ und analog $d \in \mathbb{R}$. Desweiteren muss gelten $c = \overline{b}$. Diese Bedingungen sind offensichtlich notwendig, wegen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} = a & \overline{\overline{b}} = b \\ \overline{b} & \overline{d} = d \end{pmatrix}$$

aber auch hinreichend.

(b) Für $M = \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & d \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ \overline{b} & d - \lambda \end{pmatrix} &= (a - \lambda)(d - \lambda) - b\overline{b} \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - b\overline{b} \\ &= \lambda^2 - (\operatorname{Sp} M)\lambda + \det M \end{aligned}$$

Daraus folgt via $p - q$-Formel für die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{\operatorname{Sp} M}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Sp} M}{2}\right)^2 - \det M}$$

Diese sind genau dann reell, wenn die Diskriminante nichtnegativ ist,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\operatorname{Sp} M}{2}\right)^2 - \det M &\geq 0 \\ (\operatorname{Sp} M)^2 &\geq 4 \det M \\ a^2 + d^2 + 2ad &\geq 4(ad - b\overline{b}) \\ a^2 + d^2 - 2ad &\geq -4|b|^2 \\ (a - d)^2 + 4|b|^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist offensichtlich wahr

(c) i. Es gilt

$$\sigma_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \overline{1} \\ \overline{1} & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1, \qquad \sigma_2^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \overline{i} \\ \overline{-i} & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2, \qquad \sigma_3^\dagger = \begin{pmatrix} \overline{1} & 0 \\ 0 & \overline{-1} \end{pmatrix} = \sigma_3.$$

ii. Nachrechnen

iii. Wegen i. und ii. gilt $\sigma_i^\dagger \sigma_i = \sigma_i^2 = I$, die Pauli-Matrizen sind also unitär. Allerdings gilt $\det \sigma_1 = -1, \det \sigma_2 = -i(-i) = -1, \det \sigma_3 = -1$ und damit $\det \sigma_i \neq 1 \implies \sigma_i \notin \mathrm{SU}(2)$.

iv. Für $i = j$ folgern wir aus ii. sofort $\sigma_i \sigma_j = I$, wegen $\epsilon_{ijk} = 0$ folgt daraus die Behauptung für $i = j$. Für $i \neq j$ ist $\delta_{ij} = 0$ und wir rechnen nach:

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i\sigma_3$$
$$\sigma_2 \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_1$$
$$\sigma_3 \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2$$

Allgemein gilt $\sigma_i \sigma_j = \sigma_i^\dagger \sigma_j^\dagger = (\sigma_j \sigma_i)^\dagger = (i\sigma_k)^\dagger = -i\sigma_k$. Für die ungeraden Permutationen folgt also aus obiger Rechnung $\sigma_2 \sigma_1 = -i\sigma_3, \sigma_3 \sigma_2 = -i\sigma_1, \sigma_1 \sigma_3 = -i\sigma_2$.

Damit ist die Relation bewiesen.

(d) Jede hermitesche 2×2-Matrix hat nach Aufgabe a die Form

$$\begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum der hermiteschen 2×2-Matrizen besitzt somit die Dimension 4. Durch

$$\begin{pmatrix} a & b + ic \\ b - ic & d \end{pmatrix} = \frac{a + d}{2} \sigma_0 + b\sigma_1 - c\sigma_2 + \frac{a - d}{2} \sigma_3$$

ist eine Darstellung in der Form $\sum_{i=0}^{3} a_i \sigma_i$ gegeben. Die σ_i bilden also eine Basis.

Es gilt unter Anwendung von i.-iii.

$$\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle = \mathrm{Sp}(\sigma_i^\dagger \sigma_j) = \mathrm{Sp}(\sigma_i \sigma_j) = \mathrm{Sp}(\delta_{ij} \sigma_0 + i\epsilon_{ijk} \sigma_k) = \delta_{ij} \cdot 2,$$

die Basis ist also orthogonal.