Aufgabe 17

$q \in \mathbb{Q} \implies \exists a, c \in \mathbb{Z}$, sodass a und c teilerfremd sind und $q = \frac{a}{c}$. Laut Hinweis auf dem Aufgabenblatt $\exists b, d \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$. Daher ist

$$\det M := \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 \implies M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Wir betrachten nun $M\langle \tau_n \rangle = \frac{a\tau_n + b}{c\tau_n + d}$. Zunächst gilt $\frac{b}{c\tau_n + d} \to 0$ für $n \to \infty$, da

$$\left| \Re \frac{b}{c\tau_n + d} \right| = \left| \frac{\Re b \overline{c\tau_n + d}}{|c\tau_n + d|^2} \right| = b \frac{|\Re c\overline{\tau} + d}{|c\tau_n + d|^2} \leq b \frac{|\overline{c\tau_n + d}|}{|c\tau_n + d|^2}$$

sowie analog

$$\left| \Im \frac{b}{c\tau_n + d} \right| = \left| \frac{\Im b \overline{c\tau_n + d}}{|c\tau_n + d|^2} \right| = b \frac{|\Im c\overline{\tau} + d}{|c\tau_n + d|^2} \leq b \frac{|\overline{c\tau_n + d}|}{|c\tau_n + d|^2}$$

und schließlich

$$b \frac{|\overline{c\tau_n + d}|}{|c\tau_n + d|^2} = b \frac{1}{|c\tau_n + d|} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Außerdem gilt $\frac{\tau_n}{\tau_n + \frac{d}{c}} \to 1$ für $n \to \infty$, da

$$\left| \frac{\tau_n}{\tau_n + \frac{d}{c}} - 1 \right| = \left| \frac{\tau_n^2 - \tau_n(\tau_n + \frac{d}{c})}{(\tau_n + \frac{d}{c})\tau_n} \right| = \left| \frac{\frac{d}{c}}{(\tau_n + \frac{d}{c})} \right| \xrightarrow{n \to \infty},$$

wobei wir im letzten Schritt analog wie oben schließen. Insgesamt erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{a\tau_n + b}{c\tau_n + d} &= \lim_{n \to \infty} \frac{a\tau_n}{c\tau_n + d} + \frac{b}{c\tau_n + d} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{a\tau_n}{c\tau_n + d} \\ &= \frac{a}{c} \lim_{n \to \infty} \frac{\tau_n}{\tau_n + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c} \\ &= q. \end{aligned}$$

Aufgabe 18

Laut Skript gilt

$$\lim_{\Im \tau \to \infty} e_1(\tau) = -8 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-2}.$$

und

$$\lim_{\Im \tau \to \infty} e_2(\tau) = - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} n^{-2}$$

. Beide Reihen konvergieren absolut (siehe Ana1). Daher dürfen wir die Terme umordnen oder umgruppieren. Es gilt daher

$$\begin{aligned}
\lim_{\Im\tau\to\infty} e_1(\tau) &= -8\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^{-2} \\
&= -8\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^{2k-1}(2k-1)^{-2} + (-1)^{2k}(2k)^{-2}\right] \\
&= -8\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\left[-\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k)^2}\right]}_{<0} \\
&> 0
\end{aligned}$$

Es gilt aber offensichtlich

$$\lim_{\Im\tau\to\infty} e_2(\tau) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \underbrace{n^{-2}}_{>0} < 0.$$

Also können die beiden Grenzwerte nicht gleich sein.