Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 3
Abgabe: *Freitag, 07.05.2021, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Tensorprodukte über lokalen Ringen). **(6 Punkte)**
Sei $(A,\mathfrak{m})$ ein lokaler kommutativer Ring und seien M und N endlich erzeugte A-Moduln. Zeigen Sie:

(a) Ist $M \otimes_A A/\mathfrak{m} = 0$, so ist bereits $M = 0$.

(b) Ist $M \otimes_A N = 0$, so ist schon $M = 0$ oder $N = 0$. *Hinweis:* Nutzen Sie (a), um auf die entsprechende Aussage für Vektorräume zu reduzieren.

Aufgabe 2 (Exaktheit via Hom (Satz 4.5 (ii))). **(6 Punkte)**
Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass eine Folge von R-Moduln

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$$

genau dann exakt ist, wenn für jeden R-Modul M die induzierte Folge abelscher Gruppen

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N') \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Hom}_R(M,N'')$$

exakt ist.

Aufgabe 3 (Schlangenlemma (Lemma 4.17)). **(6 Punkte)**
Sei R ein Ring und sei

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\alpha} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\beta'} & N & \xrightarrow{\beta} & N'' & & \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen. Zeigen Sie:

(a) Die induzierte Folge $\ker(\varphi') \xrightarrow{\alpha'} \ker(\varphi) \xrightarrow{\alpha} \ker(\varphi'')$ is exakt.

(b) Die induzierte Folge $\mathrm{coker}(\varphi') \xrightarrow{\overline{\alpha'}} \mathrm{coker}(\varphi) \xrightarrow{\overline{\alpha}} \mathrm{coker}(\varphi'')$ is exakt.

(c) Die Folge $\ker(\varphi) \xrightarrow{\alpha} \ker(\varphi'') \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}(\varphi') \xrightarrow{\overline{\alpha'}} \mathrm{coker}(\varphi)$ ist exakt, wobei δ der in der Vorlesung konstruierte Homomorphismus ist.

Aufgabe 4 (Flache und treuflache Algebren). **(6 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass für einen kommutativen Ring A der Polynomring $A[T]$ eine treuflache A-Algebra ist.

(b) Zeigen Sie, dass die $\mathbb{Z}$-Algebra $\mathbb{Q}$ flach, aber nicht treuflach, ist.

Zusatzaufgabe 5 (Zariski-abgeschlossene Mengen und Radikalideale[1]). **(6 Punkte)**
In Aufgabe 4 auf Blatt 2 wurde die Zariski-Topologie auf der Menge $\operatorname{Spec}(A)$ der Primideale eins kommutativen Rings A definiert. Für eine Teilmenge Y von $\operatorname{Spec}(A)$ definieren wir das Primideal $I(Y) := \bigcap_{\mathfrak{p}\in Y} \mathfrak{p}$. Zeigen Sie:

(a) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ ist $I(V(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$ sein Radikalideal.

(b) Für eine Teilmenge $Y \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ ist $V(I(Y)) = \overline{Y}$ der Abschluss von Y in $\operatorname{Spec}(A)$.

(c) Die Zuordnungen $\mathfrak{a} \mapsto V(\mathfrak{a})$ und $Y \mapsto I(Y)$ definieren *inklusionsumkehrende* Bijektionen

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale in } A, \\ \text{d. h. Ideale } \mathfrak{a} \subset A \text{ mit } \mathfrak{a} = r(\mathfrak{a}) \end{array} \right\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \text{abgeschlossene Teilmengen} \\ Y \subseteq \operatorname{Spec} A \end{array} \right\}.$$

[1] Diese Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.