Funktionalanalysis

Jan Fuhrmann

Wintersemester 2023/24

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume **7**
1.1 Definition und grundlegende Eigenschaften 8
1.2 Vollständigkeit und Kompaktheit 16

2 Hilberträume und die Sätze von Riesz **29**
2.1 Skalarprodukte und Hilberträume 29

Literatur:

Zu den Themen unseres Kurses

Prinzipiell können Sie jedes Lehrbuch zur (linearen) Funktionalanalysis begleitend zur Vorlesung konsultieren. Die folgende Liste enthält eine Auswahl von Büchern, die ich selbst mehr oder weniger regelmäßig nutze.

- W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, 6. Auflage, Springer (2012)
  (online verfügbar via Uni-Bibliothek, auch englisch: "Linear Functional Analysis")
- H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer (2011)
- J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, 2nd edition, Springer (2007)
- M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Academic Press (1972)
- F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, 4. Auflage, Harri Deutsch (1982)
  (auch englisch "Functional Analysis", französisch "Leçons d'analyse fonctionnelle")
- D. Werner, Funktionalanalysis, 8. Auflage, Springer (2018)
  (online verfügbar via Uni-Bibliothek)
- E. Zeidler, Applied Functional Analysis – Applications to Mathematical Physics, Springer (1995)
- E. Zeidler, Applied Functional Analysis – Main Principles and Their Applications, Springer (1995)

Zum Nachschlagen von Vorkenntnissen

Zum Nachschlagen, Wiederholen oder Vertiefen der benötigten Vorkenntnisse können Sie auf eine riesige Auswahl von Lehrbüchern der Analysis und (linearen) Algebra zurück greifen. Die hier aufgeführten begleiten mich (ggf. in anderen Auflagen) zuverlässig seit meinem eigenen Studium.

- M. Artin, Algebra, Springer (1993)
  (Vektorräume und lineare Abbildungen)
- K. Königsberger, Analysis 2, 5. Auflage (2004)
  (Metrische und topologische Räume, Lebesgue-Integral)
- W. Rudin, Analysis, 5. Auflage, De Gruyter Oldenbourg (2022)
  (Metrische und topologische Räume, Lebesgue-Integral)

Notation:

Viele unserer Aussagen gelten für reelle ebenso wie für komplexe Vektorräume, und wir bezeichnen mit $\mathbb{K}$ stets einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Für reelle Zahlen a, b bezeichnen $a \wedge b$ das Minimum und $a \vee b$ das Maximum von a und b. Diese Schreibweise erweist sich insbesondere für reellwertige Funktionen als nützlich, indem etwa $f \wedge g$ als punktweises Minimum von f und g gelesen wird.

Für eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen Vektorräumen V und W bezeichnen wir mit $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0_W\}$ den Kern und mit $\operatorname{im} f = \{f(v) : v \in V\}$ das Bild von f. Letzteres ergibt natürlich auch für Abbildungen zwischen allgemeinen Mengen Sinn.

Mit $(v_n)_n$ werden wir stets Folgen von Elementen v_n einer gegebenen Menge V bezeichnen. Es handelt sich also einfach um eine Kurzschreibweise für $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n=1}^{\infty} = (v_1, v_2, \dots)$.

Für eine beliebige Teilmenge A einer gegebenen Grundmenge Ω bezeichnen wir mit $\mathbf{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ die durch

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in \Omega \backslash A \end{cases}$$

gegebene Indikatorfunktion[1].

Sind V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v \in V$, $A \subset V$ und $\alpha \in K$, so schreiben wir

$$v + A := \{v + w : w \in A\}, \quad \alpha A := \{\alpha w : w \in A\}$$

für die Translation von A um v bzw. die Multiplikation von A mit α.
Ferner bezeichnen wir mit 0_V den Nullvektor im Vektorraum V, lassen das Subskript V aber auch gelegentlich weg, wenn aus dem Kontext klar ist, welches Nullelement gemeint ist.

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $A \subset V$ eine nicht leere Teilmenge, so bezeichnen wir mit

$$<A>= \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ v_1, \dots, v_n \in A \right\}$$

die lineare Hülle von A. Man beachte, dass nur endliche Linearkombinationen von Elementen von A zugelassen sind.

[1] In der Analysis finden Sie dafür oft auch die Bezeichnung charakteristische Funktion unter dem Namen χ_A.

KAPITEL 1

Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

In dieser Vorlesung befassen wir uns mit linearer Funktionalanalysis, also vor allem mit linearen Räumen und Abbildungen zwischen diesen. Aus der Analysis 2 wissen wir, dass lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bzw. $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ notwendigerweise bezüglich der euklidischen Topologie stetig und sogar unter jeder Norm (beliebig oft) differenzierbar sind. Im Kern werden wir uns mit der Verallgemeinerung dieser Beobachtung auf den unendlichdimensionalen Fall beschäftigen, werden aber schnell sehen, dass bereits die Stetigkeit nicht mehr notwendigerweise garantiert ist. Auch andere uns bekannte Aussagen lassen sich nicht direkt verallgemeinern. Folgende aus dem endlichdimensionalen Fall bekannte Aussagen werden wir genauer untersuchen müssen:

- Auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V erzeugen alle Normen die gleiche Topologie.

- In einem endlichdimensionalen normierten Vektorraum sind abgeschlossene und beschränkte Mengen kompakt[1]. Insbesondere sind abgeschlossene Einheitskugeln kompakt.

- Lineare Unterräume eines endlichdimensionalen normierten Vektorraums sind abgeschlossen (bzgl. der von der Norm erzeugten Topologie).

- Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist. Genauer gilt für lineare Abbildungen $f : V \to V$ die Dimensionsformel

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}}(\ker f) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{im} f).$$

[1] Für die euklidischen n-dimensionalen Räume $\mathbb{K}^n$ ist das der Satz von Heine-Borel. Nach dem vorherigen Punkt gilt das dann auch unter allen Normen auf $\mathbb{K}^n$.

In gewissem Sinn mag das zwar noch richtig sein, wenn wir auf beiden Seiten ∞ als Wert zulassen, aber die Aussagekraft für einen der Summanden auf der rechten Seite ist recht gering, wenn der andere Summand und die linke Seite unendlich sind.

1.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Wir beginnen mit einer Erinnerung an das Konzept normierter linearer Räume. Dabei handelt es sich um eine spezielle Klasse metrischer Räume, die Sie in der Analysis 2 kennen gelernt haben. Diese wiederum hatten wir als spezielle topologische Räume identifiziert. Viele der hier angegebenen Definitionen und Aussagen sollten Ihnen also bekannt vorkommen. Falls das nicht der Fall ist, können Sie gern in den einschlägigen Lehrbüchern zur Analysis 2 oder elementarer Topologie nachschlagen.

Definition 1.1. *Ein normierter linearer Raum (oder normierter Vektorraum) ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V zusammen mit einer Norm $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ derart, dass für alle $v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$*

(i) $v = 0_V \iff \|v\| = 0$ *(Definitheit)*

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ *(Homogenität)*

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(Dreiecksungleichung)*

gelten.

Da Normen nur auf Vektorräumen Sinn ergeben (wir brauchen die Addition in V inklusive der Null und die Multiplikation mit Skalaren), sprechen wir manchmal kurz von normierten Räumen und wissen dann sofort, dass es sich um normierte *lineare* Räume handeln muss.

Bemerkung. *In der Analysis 2 haben wir gelernt, dass jeder normierte lineare Raum $(V, \|\cdot\|)$ vermöge*

$$d(v, w) = \|v - w\|, \qquad v, w \in V,$$

auch ein metrischer Raum ist. Umgekehrt hatten wir aber gesehen, dass auf jeder nicht leeren Menge etwa die diskrete Metrik definiert werden konnte, auch wenn gar keine lineare Struktur vorlag.

Bemerkung. *Ist in Punkt (i) nur die Implikation $v = 0 \implies \|v\| = 0$ erfüllt, kann $\|v\|$ also auch für nicht triviale Vektoren verschwinden, so heißt $\|\cdot\|$ eine Halbnorm (oder Seminorm). Die Menge $N = \{v \in V : \|v\| = 0\}$ ist dann wegen der Homogenität und der Dreiecksungleichung ein Vektorraum, und wir erhalten durch Faktorisierung einen Vektorraum V/N, auf dem $\|\cdot\|$ zu einer Norm wird*[2]*. Sie kennen diese Konstruktion aus der Maßtheorie von der Konstruktion der Räume $L_p(\mu)$.*

[2] Genauer ist für jede Restklasse $v + N$ durch $\|v + N\| = \inf_{w \in N} \|v + w\|_V$ eine Norm definiert.

Die üblichen Verdächtigen $\mathbb{K}^n$ zusammen mit den p-Normen

$$\|v\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p \in [1, \infty), \\ \max\limits_{k=1,\dots,n} |v_k| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

kennen wir schon. Das verallgemeinern wir schnell auf die natürlichen unendlichdimensionalen Versionen.

Beispiel 1. *Mit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bezeichnen wir den Vektorraum der $\mathbb{K}$-wertigen Zahlenfolgen $v = (v_k)_{k\geq 1}$. Wir sehen sofort, dass $\mathbb{K}^n$ mit dem linearen Unterraum der spätestens nach n Gliedern abbrechenden Folgen identifizierbar ist. Jedes $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ liefert nämlich eine eindeutige Folge $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:*

$$v_k = \begin{cases} x_k & \textit{für } k = 1, \dots, n, \\ 0 & \textit{für } k > n. \end{cases}$$

Dass Summen und skalare Vielfache solcher abbrechenden Folgen wieder spätestens bei n abbrechen, ist offensichtlich, also handelt es sich tatsächlich um einen linearen Unterraum.
Auf $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ definieren wir analog zu den bekannten p-Normen

$$\|v\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^\infty |v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \textit{für } p \in [1, \infty), \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |v_k| & \textit{für } p = \infty \end{cases}$$

und stellen sofort fest, dass wir im allgemeinen nicht davon ausgehen können, dass $\|v\|_p \in [0, \infty)$ gilt, wie es sich für eine Norm gehört. Das führt uns zur Definition der Räume der zur pten Potenz (absolut) summierbaren (bzw. im Fall $p = \infty$: der beschränkten) Folgen:

$$\ell_p^{\mathbb{K}} := \left\{ v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|v\|_p < \infty \right\}.$$

Versehen mit $\|\cdot\|_p$ wird $\ell_p^{\mathbb{K}}$ zu einem normierten Vektorraum. Wir rechnen das für den Fall $p = \infty$ nach, für $p < \infty$ können Sie das als Übung unter Verwendung der Rechenregeln für absolut konvergente Reihen und einiger Eigenschaften der Potenzfunktionen selbst überprüfen.
Die Endlichkeit der Norm haben wir durch die Definition von $\ell_\infty^{\mathbb{K}}$ erzwungen, die müssen wir also nicht mehr untersuchen.
Zunächst ist die triviale Folge $0 \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ natürlich beschränkt, also ist $0 \in \ell_\infty$ (wir lassen das $\mathbb{K}$ oft weg, wenn entweder klar oder unerheblich ist, welcher Körper gemeint ist), und es gilt $\|0\|_\infty = \sup_k |0| = 0$. Ist umgekehrt $v \neq 0$, so existiert ein k_0 mit $v_{k_0} \neq 0$, und dann ist $\|v\|_\infty \geq |v_{k_0}| > 0$. Das zeigt die Definitheit.
Für $v \in \ell_\infty$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $|v_k| \leq \|v\|_\infty$. Ist nun $\alpha \in \mathbb{K}$, so folgt $|(\alpha v)_k| = |\alpha||v_k| \leq |\alpha|\|v\|_\infty$, also $\|\alpha v\| \leq |\alpha|\|v\|_\infty$ und insbesondere $\alpha v \in \ell^\infty$. Umgekehrt führen wir die Annahme $\|\alpha v\|_\infty < |\alpha|\|v\|_\infty$, d.h., $\|\alpha v\|_\infty = |\alpha|\|v\|_\infty - \delta$ für ein $\delta > 0$ zum Widerspruch.

Wäre $\alpha = 0$, so stünde hier $0 = 0 - \delta$, was völlig unmöglich ist. Ist aber $|\alpha| > 0$, so fänden wir nach der Definition des Supremums ein k_0 derart, dass

$$|v_{k_0}| \geq \|v\|_\infty - \frac{\delta}{2|\alpha|}, \quad \textit{also} \quad \|v\|_\infty \leq |v_{k_0}| + \frac{\delta}{2|\alpha|}$$

wäre. Damit berechnen wir nach unserer Annahme:

$$|\alpha||v_{k_0}| \leq |\alpha|\|v\|_\infty - \delta \leq |\alpha| \left(|v_{k_0|+\frac{\delta}{2|\alpha|}} \right) - \delta = |\alpha||v_{k_0}| - \frac{\delta}{2},$$

was auch ein Widerspruch ist. Damit haben wir auch die Homogenität gezeigt.
Zur Dreiecksungleichung stellen wir fest, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$|(v+w)_k| = |v_k + w_k| \leq |v_k| + |w_k| \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty.$$

Nehmen wir das Supremum über alle k, so erhalten wir sofort die Dreiecksungleichung, die uns auch nochmal sichert, dass die Summe zweier beschränkter Folgen wieder beschränkt ist.
Wir haben also gezeigt, dass ℓ_∞ tatsächlich ein Vektorraum ist und $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm darauf darstellt.

Bemerkung. *Die Konstruktion der Räume ℓ_p folgt einem allgemeinen Konzept. Ist auf einem Vektorraum V eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty]$ definiert, die bis auf die Endlichkeit alle Eigenschaften einer Norm hat, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine Quasinorm und stellen fest, dass wegen der Homogenität und der Dreiecksungleichung $W = \{v \in V : \|v\| < \infty\}$ ein Untervektorraum von V ist, auf dem $\|\cdot\|$ eine Norm ist.*

Man beachte den Unterschied zum endlichdimensionalen Fall. Bei weitem nicht alle Folgen $v \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ gehören zu einem der Räume ℓ_p, und die Räume enthalten nicht die gleichen Folgen als Elemente[3]. Schließlich sind unendliche Summen bzw. Suprema unendlicher Mengen nicht zwingend endlich. Das ist auch schon die Grundlage der in den einführenden Bemerkungen erwähnten scheiternden Verallgemeinerungen von Aussagen aus der endlichdimensionalen linearen Algebra bzw. Analysis 2.

Bemerkung. *In Erinnerung an die Maßtheorie (aus der höheren Analysis oder Wahrscheinlichkeitstheorie) stellen wir fest, dass es sich bei den ℓ_p-Räumen um Spezialfälle der $L_p(\mu)$-Räume handelt, den Räumen (von Äquivalenzklassen) jener messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$, für die*

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \textit{für } p \in [1, \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| & \textit{für } p = \infty \end{cases}$$

endlich ist. Die Räume ℓ_p hatten wir als Spezialfälle für $\Omega = \mathbb{N}$, versehen mit der Potenzmenge als σ-Algebra und dem Zählmaß als Maß erkannt. Die Folgenräume haben die

[3] Sie rechnen leicht nach, dass $\ell_p \subsetneq \ell_q$ für $p < q$ gilt. Denken Sie etwa an eine durch $v_k = k^{-r}$ gegebene Folge, wobei $r > 0$ so gewählt ist, dass $rp < 1 < rq$ gilt.

angenehme Eigenschaft, dass man auf die Identifizierung fast überall übereinstimmender Funktionen verzichten kann, da es bezüglich des Zählmaßes keine nicht trivialen Nullmengen gibt. Jede der Äquivalenzklassen besteht also aus genau einem Repräsentanten. In dieser Vorlesung werden wir uns nicht explizit mit Maß- und Integrationstheorie beschäftigen, aber in vielen Situationen auf das Lebesgue-Integral zurück greifen. Neben den Folgenräumen werden diese L_p-Räume für das Lebesgue-Maß auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie deren Abkömmlinge eine wichtige Rolle spielen. Die nötigen Aussagen werden wir im Anhang **??** *sammeln; dort können Sie jederzeit nachschlagen.*

Auch hier haben wir uns wieder auf lineare Unterräume des ursprünglichen Raums messbarer Funktionen (genauer: Äquivalenzklassen solcher) zu beschränken, auf denen die Normen endlich sind.

Notation. Wenn wir vom normierten Vektorraum ℓ_p oder $L_p(\mu)$ bzw. $L_p(\Omega)$ sprechen, meinen wir – sofern nicht ausdrücklich anders gesagt – den mit der natürlichen Norm $\|\cdot\|_p$ versehenen Raum. Die Norm gehört also, anders als im endlichdimensionalen Fall, praktisch zum Raum selbst.

Vom üblichen Betrag in $\mathbb{R}$ kennen wir folgende Aussage, deren Beweis wir aus der Analysis 1 praktisch wortgleich übernehmen können.

Lemma 1.2 (Dreiecksungleichung nach unten)**.** *Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so gilt $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$ für alle $v, w \in V$.*

Beweis. Übung (siehe Analysis 1). □

Folgende Definition dürfte eine Wiederholung sein, aber der Vollständigkeit halber müssen wir sie hier noch einmal angeben.

Definition 1.3. *In einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ definieren wir zu $v \in V$ und $r > 0$ die offene Kugel vom Radius r um v durch*

$$B_r(v) = \{w \in V : \|v - w\| < r\},$$

und die abgeschlossene Kugel vom Radius r um v durch

$$\bar{B}_r(v) = \{w \in V : \|v - w\| \leq r\}.$$

Die offene bzw. abgeschlossene Einheitskugel in V sind durch

$$B_V = B_1(0_V) \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{B}_V = \bar{B}_1(0_V)$$

gegeben.

Wie in jedem metrischen Raum[4] erlauben uns die offenen Kugeln die Definition offener Mengen.

[4] In einem metrischen Raum wird eine offene Kugel durch $B_r(v) = \{w \in V : d(v, w) < r\}$ definiert.

Definition 1.4. *Eine Teilmenge $U \subset V$ eines normierten Vektorraums $(V, \|\cdot\|)$ heißt offen, falls zu jedem $v \in U$ ein $r > 0$ derart existiert, dass $B_r(v) \subset U$ gilt.*
Die Familie $\mathcal{T}$ der offenen Mengen ist die von $\|\cdot\|$ erzeugte Topologie über V.

Manchmal schreiben wir $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ für die von $\|\cdot\|$ erzeugte Topologie. Das wird spätestens dann relevant, wenn wir verschiedene Normen oder auch gar nicht von einer Norm erzeugte Topologien auf einem gegebenen Vektorraum betrachten.
Dass es sich bei den so definierten Systemen offener Mengen tatsächlich um Topologien handelt, besagt das folgende Lemma, dessen Aussagen gerade die definierenden Eigenschaften eines Systems offener Mengen (also einer Topologie) sind.

Lemma 1.5. *Für die von $\|\cdot\|$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}$ über einem normierten Vektorraum V gelten:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{T}$ *(die leere Menge und der gesamte Raum sind stets offen)*

(ii) *Ist $\mathcal{I}$ eine beliebige (nicht leere) Indexmenge und sind $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in \mathcal{I}$, so ist $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$ (beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen)*

(iii) *Sind $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ (endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen)*

Beweis. Übungsblatt 0 □

Selbstverständlich sind (nach Dreiecksungleichung) alle offenen Kugeln offen (also in $\mathcal{T}$), wie Sie sich schnell überzeugen. Wir werden gleich sehen, dass auch der Begriff der *abgeschlossenen* Kugel durchaus sinnvoll gewählt ist.

Definition 1.6. *Die Norm $\|\cdot\|$ auf dem Vektorraum V heißt stärker als die Norm $|[\cdot]|$ auf V, wenn die von $|[\cdot]|$ erzeugte Topologie in der von $\|\cdot\|$ erzeugten enthalten ist.*
Zwei Normen $\|\cdot\|$, $|[\cdot]|$ auf dem gleichen Vektorraum heißen äquivalent, wenn sie die gleiche Topologie erzeugen.

Zwei Normen sind also äquivalent, wenn jede der beiden stärker als die andere ist.

Lemma 1.7. *Zwei Normen $\|\cdot\|$, $|[\cdot]|$ auf einem Vektorraum sind genau dann äquivalent, wenn Konstanten $C \geq c > 0$ derart existieren, dass für alle $v \in V$*

$$c\|v\| \leq |[v]| \leq C\|v\| \tag{1.1}$$

gilt.

Beweis. Zum Beweis der Äquivalenz der Normen genügt es zu zeigen, dass in jeder offenen Kugel bezüglich $\|\cdot\|$ eine offene Kugel bezüglich $|[\cdot]|$ liegt und umgekehrt. Dann finden wir nämlich zu einer Menge U und einem $v \in U$ stets genau dann eine in U liegende ε-Kugel bezüglich $\|\cdot\|$ um v, wenn wir eine solche bezüglich $|[\cdot]|$ finden.

Zu $\varepsilon > 0$ und $v \in V$ gilt

$$B_{\varepsilon,|[\cdot]|}(v) = \{w : |[v-w]| < \varepsilon\} \subset \{w : c\|v-w\| < \varepsilon\} = B_{\frac{\varepsilon}{c},\|\cdot\|}(v)$$

und umgekehrt $B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(v) \subset B_{C\varepsilon,|[\cdot]|}(v)$, wie verlangt.

Zur Notwendigkeit der Bedingung nehmen wir an, wir hätten zu jedem $C_n = n$ ein $v_n \in V$ derart, dass $|[v_n]| > n\|v_n\|$ ist, dass also die rechte Ungleichung nicht gilt. Dank der Homogenität beider Normen gilt dann auch für $w_n := \frac{v_n}{\|v_n\|}$ (man beachte, dass die v_n notwendigerweise von 0 verschieden sind):

$$|[w_n]| > n \left\| \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\| = n.$$

Die Einheitskugel $U = B_{1,|[\cdot]|}(0)$ ist offen in $(V, |[\cdot]|)$, also nach Annahme der Äquivalenz auch in $(V, \|\cdot\|)$. Zu $0 \in U$ müssten wir also ein $\varepsilon > 0$ derart finden, dass $B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(0) \subset U$ gilt. In $B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(0)$ liegen nun aber alle $\frac{\varepsilon}{2}w_n$, also gilt für alle n:

$$\frac{\varepsilon}{2}w_n \in B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(0) \subset U = B_{1,|[\cdot]|}(0), \quad \text{also} \quad \frac{\varepsilon}{2}|[w_n]| \leq 1.$$

Das steht aber für $n > \frac{2}{\varepsilon}$ im Widerspruch zu $|[w_n]| > n$.
Völlig symmetrisch führen wir auch die Annahme, die linke Ungleichung gälte nicht, zu einem Widerspruch. □

In diesem Beweis haben wir einige sehr mächtige Tricks benutzt, die Beweise zu normierten Vektorräumen oft erleichtern. Zum einen haben wir uns im zweiten Teil auf Kugeln um den Ursprung beschränkt. Das funktioniert, weil V dank der Vektorraumstruktur überall lokal gleich aussieht. Die Kugel $B_\varepsilon(0)$ unterscheidet sich also nicht von $B_\varepsilon(v)$. Tatsächlich liegt ja w genau dann in $B_\varepsilon(v)$, wenn $w - v$ in $B_\varepsilon(0)$ liegt. Zweitens haben wir benutzt, dass Kugeln eines gegebenen Radius wegen der Homogenität einfach durch Aufblähen oder Schrumpfen aus solchen mit Radius 1 hervorgehen: $v \in B_1(0) \iff \varepsilon v \in B_\varepsilon(0)$, d.h.:

$$B_\varepsilon(w) = \{w + \varepsilon v : v \in B_1(0)\}.$$

Das Studium der Einheitskugel eines normierten Vektorraums verrät uns also schon alles über, was wir über Kugeln in diesem Raum wissen müssen, insbesondere charakterisiert die Einheitskugel die Norm und die von ihr erzeugte Topologie vollständig. Da Kugeln auch Umgebungen eindeutig charakterisieren, erhalten wir insbesondere folgende Aussage.

Korollar 1.8. *Die Normen $\|\cdot\|$ und $|[\cdot]|$ auf dem Vektorraum V sind genau dann äquivalent, wenn für jede Folge $(v_n)_n$ in V gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 0 \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} |[v_n]| = 0.$$

Beweis. Übung.
Man erinnere sich daran, dass Konvergenz bzgl. einer Topologie über V bedeutet:

$$v_n \to v \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Für jede Umgebung } U \text{ von } v \text{ ex. } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } v_n \in U \text{ f.a. } n \geq n_0.$$

Eine Umgebung von v ist im topologischen Sinn einfach eine Menge U, die eine offene Menge W mit $v \in W \subset U$ enthält. In normierten Räumen können wir uns um kugelförmige Umgebungen beschränken, also:

$$v_n \to v \iff \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ ex. } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } v_n \in B_\varepsilon(v) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Äquivalente Topologien ergeben also für genau die gleichen Folgen Konvergenz (mit gleichem Grenzwert). □

Da wir normierte Vektorräume als spezielle topologische Räume identifiziert haben, können wir uns über Stetigkeit unterhalten. Dabei benutzen wir ohne Beweis, dass in normierten Vektorräumen wie in allen metrischen Räumen ε-δ-Stetigkeit (wie auch Folgenstetigkeit, aber dafür brauchen wir noch Grenzwerte) äquivalent zur topologischen Definition (Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen sind offen) ist.

Korollar 1.9. *Die Norm auf einem normierten Vektorraum ist eine stetige Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, wenn wir $\mathbb{R}$ mit seinem Standardbetrag versehen.*

Beweis. Das ist gerade die Aussage der Dreiecksungleichung nach unten. □

Ebenso schnell rechnen wir folgende Aussage nach.

Lemma 1.10. *Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, so sind die Vektorraumoperationen*

$$(v, w) \mapsto v + w \quad (V \times V \to V), \qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha v \quad (\mathbb{K} \times V \to V)$$

stetig bezüglich $\|\cdot\|$.

Beweis. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gilt für $v, w, \tilde{v}, \tilde{w} \in V$ mit $\|v - \tilde{v}\|, \|w - \tilde{w}\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\big|\|\tilde{w} + \tilde{v}\| - \|w + v\|\big| \leq \|(\tilde{w} + \tilde{v}) - (w + v)\| \leq \|\tilde{w} - w\| + \|\tilde{v} - v\| < 2\delta = \varepsilon.$$

Die Addition ist also sogar gleichmäßig stetig. Analog gilt zu gegebenen $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$ und $\varepsilon > 0$ für $\tilde{\alpha} \in \mathbb{K}$, $\tilde{v} \in V$ mit

$$\|\tilde{v} - v\|, |\tilde{\alpha} - \alpha| < \delta = \frac{\varepsilon}{2(1 + |\alpha| + \|v\|)} \wedge \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} :$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\alpha}\tilde{v} - \alpha v\| &= \|(\tilde{\alpha}\tilde{v} - \tilde{\alpha}v) + (\tilde{\alpha}v - \alpha v)\| \\
&\leq \|\tilde{\alpha}(\tilde{v} - v)\| + \|(\tilde{\alpha} - \alpha)v\| \\
&= |\tilde{\alpha} - \alpha + \alpha|\|\tilde{v} - v\| + |\tilde{\alpha} - \alpha|\|v\| \\
&< (\delta + |\alpha|)\delta + \delta\|v\| \;<\; \delta^2 + \delta(1 + |\alpha| + \|v\|) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Die Aussage dieses Lemmas bedeutet schlicht, dass V unter der von der Norm erzeugten Topologie ein topologischer Vektorraum ist.
Wir erinnern auch noch an die Definition abgeschlossener Mengen. In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt eine Teilmenge $A \subset X$ abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X \backslash A$ offen ist. In metrischen Räumen und erst recht in normierten Vektorräumen haben wir eine oft deutlich leichter zu überprüfende Bedingung. Dazu müssen wir noch die Konzepte konvergenter Folgen wiederholen, die wir bereits angedeutet haben.

Definition 1.11. *Eine Folge $(v_n)_n$ in einem metrischen Raum (V, d) heißt Cauchyfolge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass $d(v_n, v_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Die Folge $(v_n)_n$ heißt konvergent, falls ein $v \in V$ derart existiert, dass $\lim_{n\to\infty} d(v, v_n) = 0$ gilt. In diesem Fall heißt v der*[a] *Grenzwert der Folge, und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ oder $v_n \to v$ für $n \to \infty$.*

[a]Wir erinnern uns, dass eine Folge in einem metrischen Raum höchstens einen Grenzwert haben kann.

An dieser Stelle ist eine kleine Warnung angebracht. Haben wir auf einer gegebenen Menge verschiedene Metriken, so muss die Konvergenz bezüglich einer Metrik keineswegs die bezüglich der anderen implizieren. Wir hatten bereits festgestellt: Sollten zwei Metriken (bzw. im Fall normierter linearer Räume zwei Normen) für genau die gleichen Folgen Konvergenz (gegen die gleichen Grenzwerte) liefern, so bedeutet das, dass sie die gleiche Topologie erzeugen, also äquivalent sind. Diese Aussage formulieren wir nochmal in anderer Form als ein Lemma, das ebenfalls nur der Wiederholung dient.

Lemma 1.12. *Eine Teilmenge $A \subset V$ eines metrischen Raums (V, d) ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(v_n)_n$ in A der Grenzwert $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ ebenfalls in A liegt.*

Das liefert auch eine geeignete Definition des Abschlusses von Teilmengen metrischer Räume.

Definition 1.13. *Ist $M \subset V$ Teilmenge des metrischen Raums (V, d), so bezeichnen wir den Abschluss $\bar{M}$ von M (in (V, d)) als die Menge aller Grenzwerte von Folgen in M:*

$$\bar{M} = \{v \in V : \lim_{n\to\infty} v_n = v \;\; \text{für eine Folge } (v_n)_n \text{ mit } v_n \in M \text{ für alle } n\}.$$

Selbstverständlich ist $\bar{M}$ damit abgeschlossen[5], und es gilt $M \subset \bar{M}$ (man betrachte konstante Folgen). Genauer ist $\bar{M}$ die nach Mengeninklusion kleinste abgeschlossene Teilmenge von V, die M enthält[6]:

$$\bar{M} = \bigcap_{M \subset A \subset V, A \text{ abgeschl.}} A.$$

[5]Machen Sie sich das klar. Benutzen Sie, dass Sie für jede Folge $(v_n)_n$ in $\bar{M}$, die gegen ein $v \in V$ konvergiert, zu jedem n eine Folge in M finden, die ihrerseits gegen v_n konvergiert. Aus je einem Element jeder dieser Folgen generieren Sie eine Folge in M, die gegen v konvergiert.

[6]Unsere Definition stimmt also mit der Definition des Abschlusses für allgemeine topologische Räume überein.

Eine weitere nützliche Charakterisierung des Abschlusses nähert sich dem Problem über kleine Abstände. Der Abschluss einer Menge ist die Menge aller Berührungsspunkte von M. Das sind all jene Punkte, für die jede (ε-)Umgebung mindestens einen Punkt aus M enthält.

Lemma 1.14. *Der Abschluss $\bar{M}$ einer Teilmenge $M \subset V$ eines metrischen Raums (V, d) ist durch*

$$\bar{M} = \{v \in V : \text{ Für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } w \in M \text{ mit } d(v, w) < \varepsilon.\}$$

gegeben.

Beweis. Übungsblatt 0 □

Auch hier haben wir wieder gute Nachrichten mit Blick auf normierte Vektorräume.

Lemma 1.15. *(i) Sind U ein Untervektorraum eines Vektorraums V und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so ist auch $\bar{U}$ ein Untervektorraum von V.*
(ii) In einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ gilt für alle $v \in V$ und $\varepsilon > 0$:

$$\bar{B}_\varepsilon(v) = \overline{B_\varepsilon(v)}.$$

Beweis. Übung (man überprüfe für (i), dass $\bar{U}$ unter den Vektorraumoperationen abgeschlossen ist). □

Bemerkung. *Eine beliebige Menge M mit mindestens zwei Elementen, versehen mit der diskreten Metrik, zeigt sofort, dass Aussage (ii) in allgemeinen metrischen Räumen nicht gelten muss.*

1.2 Vollständigkeit und Kompaktheit

Dank der Dreiecksungleichung ist natürlich jede konvergente Folge in einem metrischen Raum eine Cauchyfolge. Wir hatten auch schon eine Bezeichnung für jene metrischen Räume eingeführt, in denen die Umkehrung gilt.

Definition 1.16. *Ein metrischer Raum (V, d) heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in V (gegen einen in V liegenden Grenzwert) konvergiert.*
Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.

Beispiel 2. *Sie überzeugen sich schnell, dass $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ unter allen p-Normen $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$, zu Banachräumen werden. Kraft Isomorphie ist dann jeder endlichdimensionale normierte $\mathbb{K}$-Vektorraum ein Banachraum.*

Mit der durch $d(x, y) = |x - y|$ gegebenen Metrik ist der Raum $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen hingegen nicht vollständig. Denken Sie etwa an die durch $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ gegebene Cauchyfolge. Das erklärt auch, warum wir nur $\mathbb{R}$- und $\mathbb{C}$-Vektorräume betrachten. Über nicht vollständigen Körpern würde es uns schwer fallen, vollständige Vektorräume zu finden.

Beispiel 3. *Erfreulicherweise sind die Räume $\ell_p^{\mathbb{K}}$ unter ihren natürlichen Normen $\|\cdot\|_p$ ($p \in [1,\infty]$) wie ihre endlichdimensionalen Geschwister auch Banachräume. Wir zeigen das hier für den Fall $p = \infty$, der Fall $p \in [1,\infty)$ ist eine (konzeptionell nicht schwierige, aber für $p > 1$ recht rechenintensive) Übung.*
Angenommen, wir hätten eine $\|\cdot\|_\infty$-Cauchyfolge $(v^{(k)})_k$ beschränkter Folgen. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir also ein k_0 derart, dass für alle $k, l \geq k_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$|v_n^{(k)} - v_n^{(l)}| \leq \|v^{(k)} - v^{(l)}\| < \varepsilon$$

gilt. Zu festem n ist damit $(v_n^{(k)})_k$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$, die einen Grenzwert v_n hat. Die Folge $v = (v_n)_n$ dieser Grenzwerte ist dann beschränkt und erfüllt $\|v^{(k)} - v\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. Ist nämlich k_0 zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wie oben gewählt, so gilt für $k \geq k_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_n^{(k)} - v_n| = \lim_{l\to\infty} \underbrace{|v_n^{(k)} - v_n^{(l)}|}_{<\varepsilon \text{ f. } l\geq k_0} \leq \varepsilon.$$

Das gilt für alle n:

$$\|v^{(k)} - v\|_\infty = \sup_n |v_n^{(k)} - v_n| \leq \varepsilon \qquad \text{für } k \geq k_0.$$

Allgemeiner sind die Räume $L_p(\mathbb{R}^n)$ (oder noch allgemeiner $L_p(\mu)$) der zur $p$ten Potenz integrierbaren ($p \in [1,\infty)$) bzw. wesentlich beschränkten ($p = \infty$) (Äquivalenzklassen von) Funktionen ebenfalls Banachräume. Das haben wir in der Maßtheorie gezeigt (siehe Theorem **??**), also wird es hier nur erwähnt. Wieder sind die Folgenräume nur Spezialfälle, die sich für das Zählmaß über der Grundmenge $\mathbb{N}$ als "Integrationsgebiet" ergeben.

Beispiel 4. *Mit $c_{00}^{\mathbb{K}}$ bezeichnen wir den Raum der abbrechenden Folgen in $\mathbb{K}$:*

$$c_{00}^{\mathbb{K}} := \left\{ (a_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \text{ es existiert ein } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n = 0 \text{ für alle } n > n_0 \right\}.$$

Da alle abbrechenden Folgen beschränkt sind und Summen sowie Vielfache abbrechender Folgen abbrechen, handelt es sich um einen linearen Unterraum von $\ell_\infty^{\mathbb{K}}$. Versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist c_{00} aber keineswegs abgeschlossen. Wir finden nämlich eine Cauchyfolge $(v^{(k)})_k$, die wir folgendermaßen definieren:

$$v_n^{(k)} := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } n \leq k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h., das $k$te Folgeglied ist jene Zahlenfolge, deren erste k Einträge $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}$ sind, gefolgt von Nullen. Dass es sich bei $(v^{(k)})$ um eine Cauchyfolge handelt sehen wir schnell. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$ ist. Dann stimmen $(v^{(k)})$ und $(v^{(l)})$ für $k, l \geq k_0$ bis zum $(k \wedge l)$ten Folgeglied überein. Ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k > l \geq k_0$, so ist also

$$\|v^{(k)} - v^{(l)}\|_\infty = \left| \frac{1}{l+1} - 0 \right| \leq \frac{1}{k_0 + 1} < \varepsilon.$$

Nun überzeugen wir uns aber, dass

$$v = (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \qquad v_n = \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

die einzig mögliche Grenzfolge ist. Nehmen wir an, es gäbe eine andere Grenzfolge $w = (w_n)_n$*, so wäre* $w_N \neq v_N = \frac{1}{N}$ *für ein* $N \in \mathbb{N}$*. Zu* $\varepsilon = \frac{1}{2}|w_N - \frac{1}{N}|$ *gälte dann für alle* $k \geq N$*:*

$$v_N^{(k)} = \frac{1}{N}, \quad \text{also: } \|v^{(k)} - w\|_\infty \geq \left|\frac{1}{N} - w_N\right| = 2\varepsilon > \varepsilon,$$

also kann w *unmöglich Grenzwert der Folge* $(v^{(k)})_k$ *sein. Die Grenzfolge* v *bricht aber keineswegs ab, gehört also nicht zu* c_{00}*.*

Auch hier gibt es wieder Analoga für Funktionen auf allgemeineren Grundmengen:

Beispiel 5. *Der Raum* $V := C([a, b]; \mathbb{R})$ *der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem kompakten Intervall* $[a, b]$ *ist ein Vektorraum, und für alle* $f \in V$ *ist (sogar das Regel-)Integral*

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| \,\mathrm{d}t$$

wohldefiniert. Sie rechnen schnell nach, dass es sich bei $\|\cdot\|_1$ *um eine Norm auf* V *handelt. Für die Definitheit ist wesentlich, dass wir nur stetige Funktionen als Integranden betrachten – das relevante Argument werden wir unten noch einmal sehen. Der normierte Vektorraum* $(V, \|\cdot\|_1)$ *ist nicht vollständig, also kein Banachraum. Das klassische Beispiel für eine Cauchyfolge ohne (stetige) Grenzfunktion liefert der Fall* $[a, b] = [0, 2]$*,*

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n & \text{für } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{für } 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

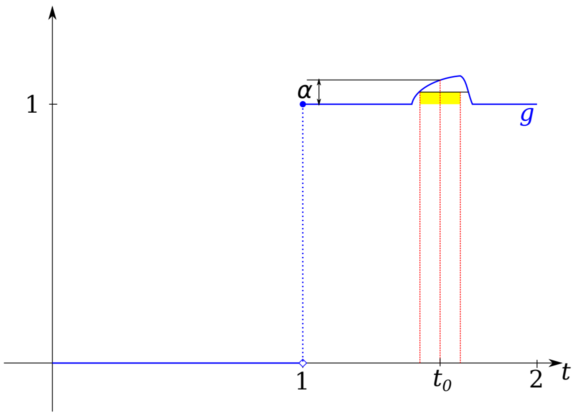
für die

$$\|f_n - f_k\|_1 = \int_0^1 |t^n - t^k| \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n \wedge k) + 1}$$

gilt. Als Grenzfunktion drängt sich $f = \mathbf{1}_{[1,2]}$ *auf, schließlich handelt es sich dabei um den punktweisen Grenzwert der* f_n*, und es gilt:*

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

jedoch ist f *keineswegs stetig.*
Tatsächlich kann die Folge $(f_n)_n$ *keinen stetigen Grenzwert haben. Wäre nämlich* g *eine solche stetige Grenzfunktion, die auf* $[1, 2]$ *von* 1 *verschieden ist, so gäbe es ein* $t_0 \in [1, 2]$ *mit* $g(t_0) := 1 + \alpha$ *für ein* $\alpha \neq 0$*. Dann existiert wegen der Stetigkeit ein* $\delta > 0$ *derart, dass* $|g(t) - 1| > \frac{|\alpha|}{2}$ *auf* $[1, 2] \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ *gilt.*



Wir können dabei δ so klein wählen, dass mindestens eines der Teilintervalle $(t_0 - \delta, t_0]$, $[t_0, t_0 + \delta)$ ganz in $[1, 2]$ liegt. Dann wäre aber z.B. im Fall $(t_0 - \delta, t_0] \subset [1, 2]$

$$\|f_n - g\|_1 = \int_0^2 |f_n(t) - g(t)|\, \mathrm{d}t \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0} |1 - g(t)|\, \mathrm{d}t \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0} \frac{|\alpha|}{2}\, \mathrm{d}t = \frac{|\alpha|}{2}\delta.$$

Das kriegen wir beim besten Willen nicht kleiner als etwa $\varepsilon = \frac{|\alpha|}{4}\delta$, also gilt bezüglich $\|\cdot\|_1$ nicht $f_n \to g$. Der Fall, g sei auf $[0, 1)$ nicht identisch Null wird analog behandelt[7]. Wir werden also keinen stetigen Grenzwert finden.
In einer Übungsaufgabe werden Sie sich überzeugen, dass V unter der durch

$$\|f\|_\infty := \sup_{0 \leq t \leq 2} |f(t)|$$

sehr wohl ein Banachraum ist[8]. Schließlich ist die Konvergenz bezüglich dieser Norm (wohlgemerkt bei kompaktem $[a, b]$) die gleichmäßige Konvergenz, und gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen sind stetig.

Notation. Den Raum $C(M; \mathbb{K})$ der stetigen Funktionen von einem kompakten metrischen Raum[9] (M, d), versehen mit der Maximumsnorm

$$\|v\|_\infty = \sup_{x \in M} |v(x)|$$

bezeichnen wir als $C^0(M; \mathbb{K})$. Das passt im reellen Fall in eine ganze Familie von Räumen $C^k(M; \mathbb{R})$ der auf kompaktem $M \subset \mathbb{R}^n$ $k$mal stetig differenzierbaren Funktionen, versehen mit der Norm

$$\|v\|_{C^k} = \sum_{|a| \leq k} \|D^a v\|_\infty,$$

[7] Wir müssen dann δ so klein wählen, dass $t_0 + \delta =: s < 1$ gilt, damit $f_n(t) \leq s^n$ für $t < t_0 + \delta$ gilt.

[8] Diese Norm kennen wir von den Räumen $L_\infty(\mu)$ der (Äquivalenzklassen von) wesentlich beschränkten messbaren Funktionen. Wir stellen also fest, dass V ein abgeschlossener Unterraum des Raums $L_\infty(\lambda^1|_{[a,b]})$, versehen mit der Norm $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$, ist.

[9] Die Definition sollten Sie schon kennen, wir werden sie aber gleich nochmal wiederholen.

bei denen die Summation über alle Multiindizes $a = (a_1, \ldots, a_n)$ der Länge $|a| = a_1 + \ldots + a_n \leq k$ läuft. Wir summieren also einfach die Maximumsnormen aller Ableitungen von v der Ordnungen $0, 1, \ldots, k$ auf. Die so definierten Räume $C^k(M; \mathbb{R})$ sind auch Banachräume.

Wir merken uns: Der gleiche Vektorraum V kann unter manchen Normen ein Banachraum, unter anderen aber unvollständig sein.
Folgenden Zusammenhang zwischen abgeschlossenen Mengen und Vollständigkeit kennen wir auch schon: abgeschlossene Teilräume vollständiger Räume sind vollständig.

Lemma 1.17. *Eine Teilmenge $M \subset V$ eines vollständigen metrischen Raums (V, d) ist genau dann abgeschlossen, wenn $(M, d|_{M \times M})$ ebenfalls vollständig ist.*

Beweis. Übungsblatt 0 □

Das folgende Beispiel beantwortet bereits eine unserer Fragen vom Anfang: Sind lineare Unterräume eines normierten Vektorraums stets abgeschlossen?

Beispiel 6. *Wir folgern, dass c_{00} ein nicht abgeschlossener Teilraum von $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ist. Im Rahmen einer Übungsaufgabe überzeugen Sie sich, dass der Abschluss von c_{00} in ℓ_∞ der Raum c_0 der Nullfolgen ist.*

In Erinnerung an die rationalen Zahlen hatten wir den Begriff dichter Teilmengen metrischer Räume eingeführt. Auch diesen wiederholen wir hier.

Definition 1.18. *Eine Teilmenge $M \subset V$ eines (nicht notwendigerweise vollständigen) metrischen Raums (V, d) heißt dicht in V, wenn $\bar{M} = V$ gilt.*

Beispiel 7. *Im Rahmen unseres Standardbeispiels folgt, dass c_{00} in ℓ_∞ nicht dicht liegen kann, da der Abschluss c_0 von c_{00} ein echter Teilraum von ℓ_∞ ist. Das hätten wir natürlich auch einfacher haben können. Versuchen Sie etwa mal, eine $\|\cdot\|_\infty$-Cauchyfolge in c_{00} zu finden, deren Grenzwert $\mathbb{1}_{l_\infty}$ (die nur aus Einsen bestehende Folge) ist.*

Dichte Teilmengen können wir dank Lemma 1.14 alternativ auch folgendermaßen charaktisieren.

Korollar 1.19. *Eine Teilmenge $M \subset V$ eines metrischen Raums (V, d) ist genau dann dicht, wenn zu jedem $v \in V$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $w \in M$ mit $d(v, w) < \varepsilon$ existiert.*

Mit anderen Worten: Ist $M \in V$ dicht, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$V \subset \bigcup_{w \in M} B_\varepsilon(w).$$

Beispiel 8. *Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß*[10] *besagt, dass der (Vektor-)Raum der Polynome auf $[a, b]$ dicht im Raum $C^0([a, b]; \mathbb{R})$ liegt, dass wir also stetige*

[10] siehe etwa Satz I.2.11 bei Werner (2018)

Funktionen auf kompakten Intervallen beliebig genau gleichmäßig durch Polynome approximieren können: Zu stetigem $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom p derart, dass

$$\|f - p\|_\infty = \sup_{a \le t \le b} |f(t) - p(t)| < \varepsilon$$

gilt.

Wir werden in Kürze auf dichte Teilmengen zurück kommen, wenn wir separable Räume betrachten.
Nun stellt sich noch die Frage, ob wir aus einem nicht vollständigen metrischen Raum (V,d) stets durch Hinzunahme weiterer Elemente einen vollständigen machen können, in dem V dann dicht liegt. Bei den rationalen Zahlen hat das ja ganz gut funktioniert; das Ergebnis waren die reellen Zahlen. Sofern der gegebene Raum Teilraum eines vollständigen Raums ist, lösen wir das Problem einfach gemäß Lemma 1.17 durch Abschluss. Wie sieht es nun aber aus, wenn wir (noch) gar keinen Raum haben, dessen Teilraum V ist?

Satz 1.20. *Zu jedem metrischen Raum (V,d) existiert ein vollständiger Raum $(\tilde{V},\tilde{d})$ derart, dass V eine (bzgl. $\tilde{d}$) dichte Teilmenge von $\bar{V}$ ist und*

$$\text{für alle } v,w \in V \qquad \tilde{d}(v,w) = d(v,w)$$

gilt.

Beweis. Auf der Menge $\mathcal{C}_d$ aller Cauchyfolgen in (V,d) definieren wir die Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$(v_n)_n \sim (w_n)_n \;:\Longleftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, n_0 : d(v_n, w_n) < \varepsilon \text{ für } n \ge n_0.$$

Zwei Cauchyfolgen sind also äquivalent, wenn ihre Glieder für hinreichend große n beliebig nah beieinander liegen. Überzeugen Sie sich, dass es sich bei $\sim$ tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt, und dass wir für äquivalente Folgen $(v_n)_n \sim (w_n)_n$ zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sogar ein n_1 derart finden, dass $d(v_m, w_l) < \varepsilon$ für beliebige $k, n \ge n_1$ gilt.

Nun bezeichnen wir mit $\tilde{V} = \mathcal{C}_d/_\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in V und konstruieren $\tilde{d}$ wie folgt. Für zwei Cauchyfolgen $(v_n)_n$ und $(w_n)_n$ definieren wir

$$\hat{d}((v_n)_n, (w_n)_n) := \lim_{n \to \infty} d(v_n, w_n).$$

Das ist wohldefiniert, weil $\alpha_n := d(v_n, w_n)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ definiert, die selbstverständlich einen Grenzwert hat. Weiter stellen wir fest, dass dieser Pseudoabstand[11] nach Konstruktion genau dann verschwindet, wenn beide Folgen zur gleichen Äquivalenzklasse gehören, und dass dann wegen der Dreiecksungleichung für andere Repräsentanten $(x_n)_n \sim (v_n)_n$ und $(y_n)_n \sim (w_n)_n$ stets

$$\hat{d}((x_n)_n, (y_n)_n) = \hat{d}((v_n)_n, (w_n)_n)$$

[11] Überzeugen Sie sich, dass $\hat{d}$ nicht negativ und symmetrisch ist und die Dreiecksungleichung erfüllt.

gilt. Es ergibt also Sinn,

$$\tilde{d}\big([(v_n)_n],[(w_n)_n]\big) := \hat{d}((v_n)_n,(w_n)_n)$$

für die durch $(v_n)_n$ bzw. $(w_n)_n$ repräsentierten Äquivalenzklassen zu definieren.

Hat eine Cauchyfolge $(v_n)_n$ nun einen Grenzwert $v \in V$, so ist v auch Grenzwert einer jeden Cauchyfolge $(w_n)_n \sim (v_n)_n$:

$$d(w_n,v) \leq d(w_n,v_n) + d(v_n,v) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

wenn $(w_n)_n \sim (v_n)_n$ und $v_n \to v$. Ferner gibt es zu jedem $v \in V$ die durch $v_n = v$ gegebene konstante Cauchyfolge, die trivialerweise gegen v konvergiert. Indem wir v also mit der Äquivalenzklasse dieser konstanten Folge identifizieren, erhalten wir $V \subset \tilde{V}$ und

$$\tilde{d}(v,w) = \hat{d}((v_n = v)_n,(w_n = w)_n) = \lim_{n\to\infty} d(v,w) = d(v,w).$$

Wir haben noch zu zeigen, dass V dicht in $\tilde{V}$ liegt. Dazu sei $(v_n)_n$ Repräsentant einer beliebigen Äquivalenzklasse. Zu $\varepsilon > 0$ finden wir n_0 derart, dass $d(v_n,v_k) < \varepsilon$ für $n,k \geq n_0$ gilt. Dann betrachten wir die konstante Folge $w_n = w := v_{n_0}$ für alle n. Diese repräsentiert (per Identifikation von w mit $[(w_n)_n]$) ein Element in $V \subset \tilde{V}$, für das

$$\tilde{d}(w,[(v_n)_n]) = \hat{d}((w_n)_n,(v_n)_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{d(v_{n_0},v_n)}_{<\varepsilon \text{ f. } n\geq n_0} \leq \varepsilon$$

gilt. □

Wir interessieren uns nun für kompakte Teilmengen metrischer Räume. Dazu definieren zwei Arten von Kompaktheit, die zunächst wenig miteinander zu tun zu haben scheinen.

Definition 1.21. (1) *Ein metrischer Raum (V,d) heißt überdeckungskompakt, wenn jede offenen Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ von V eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{\alpha_1},\ldots,U_{\alpha_n}\}$ enthält.*

(2) *Ein metrischer Raum (V,d) heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in V eine in V konvergente Teilfolge enthält.*

Nach Teil (1) muss also jede, nicht notwendigerweise abzählbare, Familie offener Mengen, die ganz V ausfüllen, eine endliche Teilfamilie enthalten, die schon genügt, um V auszufüllen. Teil (2) besagt, dass V folgenkompakt ist, wenn jede Folge $(v_n)_n$ in V eine Teilfolge $(v_{n_k})_k$ enthält, die gegen ein Element von V konvergiert.
Die Definitionen ergeben auch in allgemeinen topologischen Räumen Sinn, allerdings haben metrische Räume die erfreuliche Eigenschaft, dass beide übereinstimmen.

Theorem 1.22. *Für einen metrischen Raum (V, d) sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) (V, d) *ist überdeckungskompakt.*

(ii) (V, d) *ist folgenkompakt.*

(iii) (V, d) *ist vollständig und zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existieren endlich viele* $v_1, \ldots, v_n$ *derart, dass*

$$V \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(v_j)$$

gilt.

Beweis. $(i) \implies (ii)$. Hat die Folge $(v_n)_n$ keine konvergente Teilfolge (d.h., kein $v \in V$ ist Grenzwert einer Teilfolge), so finden wir zu jedem $v \in V$ ein $\varepsilon_v > 0$ derart, dass $U_v := B_{\varepsilon_v}(v)$ höchstens endlich viele der v_n enthält (genauer enthält U_v nur v_n für endlich viele n). Die U_v bilden eine offene Überdeckung von V, denn jedes $v \in V$ liegt mindestens in seinem persönlichen U_v. Wäre V also kompakt, so genügten endlich viele der U_v, um V zu überdecken. In jedem dieser endlich vielen U_v liegen aber nur endlich viele der v_n im Widerspruch dazu, dass alle (unendlich vielen) v_n in V liegen.

$(ii) \implies (iii)$. Angenommen, die Überdeckungsbedingung in (iii) wäre verletzt, wir hätten also ein $\varepsilon > 0$, für das wir V nicht mit endlich vielen ε-Kugeln überdecken können. Dann wählen wir $v_1 \in V$ beliebig und finden wegen $B_\varepsilon(v_1) \subsetneq V$ ein v_2 mit $d(v_1, v_2) \geq \varepsilon$. Induktiv finden wir so stets ein

$$v_{n+1} \in V \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_\varepsilon(v_k),$$

das von allen bisher gefundenen v_k mindesten den Abstand ε hat. Wir haben also eine Folge $(v_n)_n$ konstruiert, für die $d(v_k, v_n) \geq \varepsilon$ für alle n gilt. Das gilt natürlich auch für jede Teilfolge, also kann keine Teilfolge von $(v_n)_n$ eine Cauchyfolge sein, geschweige denn konvergieren.
Die Vollständigkeit folgt einfach daraus, dass nach (ii) insbesondere jede Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge besitzt, dann aber notwendigerweise (gegen den Grenzwert dieser Teilfolge) selbst konvergiert.

$(iii) \implies (i)$. Angenommen $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ sei eine Überdeckung von V, die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Zu $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $\varepsilon_k = 2^{-k}$ und finden nach (iii) jeweils $v_1^k, \ldots, v_{n(k)}^k$ derart, dass

$$V = \bigcup_{j=1}^{n(k)} B_{2^{-k}}(v_j^k)$$

gilt. Im ersten Schritt kann mindestens eines der $B_{2^{-1}}(v_j^1)$ nicht von endlich vielen der U_α überdeckt werden, ohne Beschränkung der Allgemeinheit möge dies das mit $j = 1$ sein.

Im zweiten Schritt können wir diese Kugel $B_1 = B_{2^{-1}}(v_1^1)$ als

$$B_1 = \bigcup_{j=1}^{n(2)} \left(B_1 \cap B_{2^{-2}}(v_j^2)\right)$$

darstellen. Da aber unendlich viele U_α benötigt werden um B_1 zu überdecken, brauchen wir auch für mindestens einen der $n(2)$ Durchschnitte unendlich viele U_α. Wir nehmen wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, es sei der mit $j = 1$ und setzen $B_2 := B_{2^{-2}}(v_1^2)$: $B_1 \cap B_2$ kann nicht von endlich vielen U_α überdeckt werden
Im dritten Schritt stellen wir dann analog fest, dass $B_1 \cap B_2 \cap B_3$ nicht von endlich vielen U_α überdeckt werden kann, wobei $B_3 = B_{2^{-3}(v_1^3)}$ ist. Wir erhalten so eine Folge $(w_k)_k$, gegeben durch $w_k := v_1^k$, derart, dass

$$\bigcap_{k=1}^{m} B_{2^{-k}}(w_k)$$

für kein m von endlich vielen der U_α überdeckt werden kann. Da nun also für alle k die Folgeglieder w_k und w_{k+1} insbesondere in $B_k \cup B_{k+1}$ mit $B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset$ liegen, gilt

$$d(w_k, w_{k+1}) \leq 2^{-k}2 = 2^{-k+1},$$

also gilt für $l > m$:

$$d(w_m, w_l) \leq \sum_{k=m}^{l-1} d(w_k, w_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{l-1} 2^{-k+1} \leq \sum_{k=m-1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}} = 2^{-m+1}.$$

Also ist $(w_n)_n$ eine Cauchyfolge, die wegen der Vollständigkeit von V gegen ein $w \in V$ konvergiert.

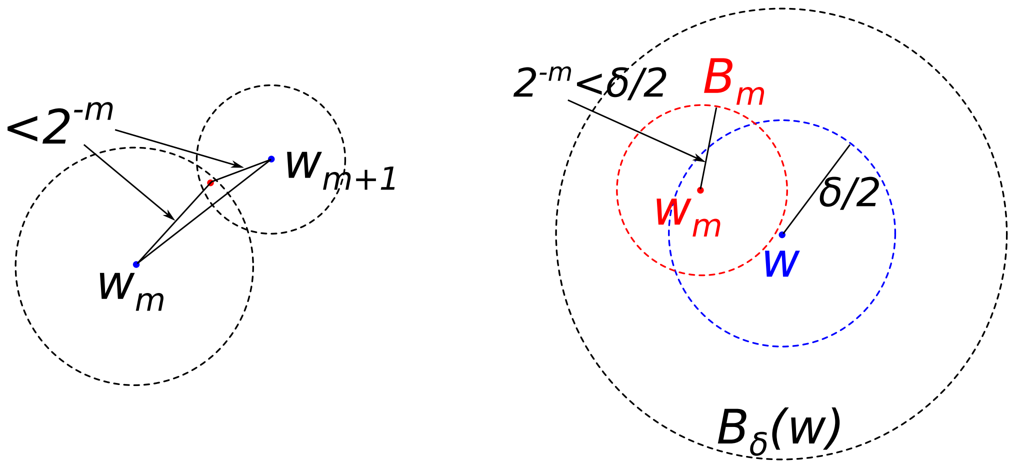


Illustration des Abstands $d(w_m, w_{m+1})$ via Dreiecksungleichung (links) und der Überdeckung aller B_m, $m \geq n$, durch $B_\delta(w)$ (rechts).

Dieses liegt in mindestens einem der U_α, sagen wir $w \in U_{\alpha_0}$, und da U_{α_0} offen ist, finden wir ein $\delta > 0$ derart, dass $B_\delta(w) \subset U_{\alpha_0}$ gilt. Wählen wir nun n so, dass
1. $d(w_m, w) < \frac{\delta}{2}$ für alle $m \geq n$ (möglich wegen der Konvergenz) und
2. $2^{-n} < \frac{\delta}{2}$
gelten, so liegen alle B_m, $m \geq n$, in $B_\delta(w) \subset U_{\alpha_0}$, werden also vom einzelnen U_{α_0} überdeckt:

$$u \in B_m \implies d(u, w) \leq \underbrace{d(u, w_m)}_{<2^{-m} \leq 2^{-n}} + d(w_m, w) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Insbesondere gilt also

$$B_1 \cap \cdots \cap B_n \subset B_n \subset U_{\alpha_0}$$

im Widerspruch zu Konstruktion der B_j. □

Die Äquivalenz von (i) und (ii) ermuntert uns zu folgender Definition.

Definition 1.23. *Eine Teilmenge $M \subset V$ eines metrischen Raums (V, d) heißt kompakt, wenn sie (als Teilraum $(M, d|_{M \times M})$) die Aussagen von Theorem 1.22 erfüllt.*

Wir werden also im folgenden bei Teilmengen metrischer Räume und insbesondere normierter Vektorräume nur noch von kompakten Mengen sprechen, beachten aber, dass in allgemeineren topologischen Räumen Überdeckungs- und Folgenkompaktheit sehr wohl verschiedenen Bedingungen sein können[12]. In den meisten Texten, vor allem im Englischen, wird Überdeckungskompaktheit als Definition der Kompaktheit genutzt. Der Begriff der Überdeckungskompaktheit wird dann oft gar nicht separat eingeführt.

Bemerkung. *Unabhängig davon, dass wir uns sehr für kompakte Teilmengen von Banachräumen interessieren werden, liefern kompakte metrische Räume die Grundlage für eine große Klasse von Banachräumen. Ist nämlich (M, d) ein kompakter metrischer Raum, so wissen wir, dass stetige reellwertige Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ Minimum und Maximum annehmen, und dass der Raum $C(M; \mathbb{K})$ der stetigen Funktionen von M nach $\mathbb{K}$, versehen mit der Maximumsnorm*

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in M} |f(x)|$$

ein Banachraum ist. Das ist eine Verallgemeinerung des zweiten Teils von Beispiel 5.

Bedingung (iii) in Theorem 1.22 erinnert uns an den Satz von Heine-Borel, der uns sagte, dass die kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ genau jene sind, die abgeschlossen und beschränkt sind. Nun ergibt das Konzept der Beschränktheit in allgemeinen metrischen Räumen nur wenig topologischen Sinn, da wir zur Metrik d auf V durch

$$\tilde{d}(v, w) = 1 \wedge d(v, w)$$

[12] Aussage (iii) ergibt in allgemeinen topologischen Räumen ohne Metrik gar keinen Sinn.

eine Metrik finden, welche die gleiche Topologie (also die gleichen konvergenten Folgen und die gleichen kompakten Mengen) erzeugt[13] und bezüglich der alle Mengen beschränkt sind.

Definition 1.24. *Eine Teilmenge M eines metrischen Raums (V, d) heißt total beschränkt (auch: präkompakt), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $v_1, \ldots, v_n \in M$ derart existieren, dass*

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(v_j)$$

gilt.
M heißt relativ kompakt, wenn $\bar{M}$ kompakt ist.

Bemerkung. *Oft wird auch der Begriff der relativen Folgenkompaktheit benutzt. Eine Menge $M \subset V$ heißt relativ folgenkompakt, wenn jede Folge $(v_n)_n$ in M eine in V konvergente Teilfolge besitzt. Überzeugen Sie sich, dass relativ folgenkompakt und relativ kompakt für Teilmengen metrischer Räume äquivalente Eigenschaften sind.*

Das Theorem besagte also in Analogie zum Satz von Heine-Borel, dass Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums (z.B. eines Banachraums) genau dann kompakt sind, wenn sie abgeschlossen und total beschränkt sind. Insbesondere gilt, da aus totaler Beschränktheit stets Beschränktheit folgt, eine Richtung des Satzes von Heine-Borel weiterhin: Kompakte Teilmengen metrischer Räume sind abgeschlossen und beschränkt. Wir fassen das zusammen.

Korollar 1.25. *Eine Teilmenge $M \subset V$ eines vollständigen metrischen Raums (V, d) ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und total beschränkt ist.*
Insbesondere sind kompakte Teilmengen metrischer Räume abgeschlossen und beschränkt.

Für allgemeine topologische Räume ist selbst der erste Teil der zweiten Aussage nicht immer wahr. Versehen wir etwa die Menge $X = \{0, 1\}$ mit der Klumpentopologie $\{\emptyset, X\}$, so ist die Teilmenge $\{0\}$ offensichtlich kompakt (endliche Teilmengen topologischer Räume sind immer kompakt), jedoch nicht abgeschlossen (das sind nur $\emptyset$ und X).
Die zweite Aussage des Korollars ist besonders für normierte Vektorräume interessant, bei denen die geforderte Homogenität der Norm die künstliche Beschränkung unbeschränkter Mengen verhindert. Überlegen Sie sich, dass in *vollständigen* metrischen Räumen relative Kompaktheit und Präkompaktheit äquivalent sind.
Dass wir uns im allgemeinen auch bei normierten Vektorräumen nicht auf Beschränktheit und Abgeschlossenheit berufen dürfen um Kompaktheit zu zeigen, zeigt folgendes Beispiel.

Beispiel 9. *In ℓ_p betrachten wir die kanonischen Einheitsvektoren $b^{(n)}$, gegeben durch*

$$b_k^{(n)} = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[13] Überzeugen Sie sich davon!

Diese haben die Normen $\|b^{(n)}\|_p = 1$*, liegen also in der abgeschlossenen (und beschränkten) Einheitskugel* $D = \bar{B}_1(0)$*. Allerdings ist für* $n \neq m$

$$\|b^{(n)} - b^{(m)}\|_p = 2^{\frac{1}{p}},$$

also kann keine Teilfolge eine Cauchyfolge sein, geschweige denn gegen ein $v \in D$ *konvergieren. Also ist die abgeschlossene Einheitskugel in* ℓ_p *nicht (folgen-)kompakt.*

Tatsächlich ist die abgeschlossene Einheitskugel in einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum genau dann kompakt, wenn der Raum endlichdimensional ist.
Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns noch mit besonderen Banachräumen, in denen wir nicht nur Längen, sondern auch Winkel messen können. Die Grundlage dafür ist eine Verallgemeinerung des euklidischen Skalarprodukts.

KAPITEL 2

Hilberträume und die Sätze von Riesz

2.1 Skalarprodukte und Hilberträume

Definition 2.1. *Eine Abbildung $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt*

1. *Semiskalarprodukt, falls für alle $u, v, w \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$*

$$\begin{aligned} &\langle u|\alpha v + w\rangle = \alpha\langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle && \textit{(Linearität im zweiten Argument)} \\ &\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle^* && \textit{(konjugiert symmetrisch)} \\ &\langle v|v\rangle \geq 0 && \textit{(positiv semidefinit)} \end{aligned}$$

   gilt[a].

2. *Gilt zusätzlich $\langle v|v\rangle = 0 \implies v = 0$, so ist $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt.*

3. *Ein mit einem Skalarprodukt versehener Vektorraum V heißt Prähilbertraum oder unitärer Raum.*

[a] Dabei steht der Asterisk für die komplexe Konjugation. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann dieser natürlich entfallen.

Bemerkung. *Der Begriff des unitären Raums wird oft für komplexe Prähilberträume reserviert.*
Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ können keine komplexen Werte auftreten. Die ersten beiden Bedinungen sagen dann einfach, dass es sich bei $\langle \cdot | \cdot \rangle$ um eine symmetrische Bilinearform handelt. Im komplexen Fall spricht man von einer konjugiert symmetrischen Sesquilinearform.
Sie rechnen sofort nach, dass daraus sofort die konjugierte Linearität im ersten Argument folgt:

$$\langle \alpha u + v|w\rangle = \alpha^*\langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle \qquad \text{für } u, v, w \in V,\ \alpha \in \mathbb{K}.$$

Ebenso leicht überzeugen Sie sich, dass $\langle 0_V|v\rangle = 0 = \langle v|0_V\rangle$ für alle $v \in V$ gelten muss.

Ein Skalarprodukt erhalten wir dann, wenn diese Form auch noch positiv definit ist.

Als kleine Warnung sei hier noch angemerkt, dass in manchen Texten die Linearität im ersten Argument gefordert wird. Dann ist $\langle\cdot|\cdot\rangle$ natürlich im zweiten Argument konjugiert linear. Diese Konvention tritt besonders gern bei der in der Quantenmechanik beliebten Bracket-Notation auf.

Lemma 2.2 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** *In einem Prähilbertraum $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ gilt für alle $v, w \in V$*

$$|\langle v|w\rangle|^2 \leq \langle v|v\rangle\,\langle w|w\rangle.$$

Beweis. Dank der Symmetriebedingung hat $\langle w|v\rangle$ den Betrag $|\langle v|w\rangle|$, also finden wir ein $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| = 1$ derart, dass $\langle w|v\rangle = \alpha|\langle v|w\rangle|$ ist. Dann rechnen wir für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - \lambda\alpha w|v - \lambda\alpha w\rangle \\ &= \langle v|v\rangle - \lambda\alpha^* \underbrace{\langle w|v\rangle}_{=\alpha|\langle v|w\rangle|} - \lambda\alpha \underbrace{\langle v|w\rangle}_{=(\alpha|\langle v|w\rangle|)^*} + \lambda^2 \underbrace{\alpha^*\alpha}_{=1}\langle w|w\rangle \\ &= \langle v|v\rangle - 2\lambda|\langle v|w\rangle| + \lambda^2\langle w|w\rangle. \end{aligned}$$

Das so definierte quadratische Polynom in λ hat also höchstens eine reelle Wurzel, muss also eine nicht positive Diskriminante

$$D = (2|\langle v|w\rangle|)^2 - 4\langle v|v\rangle\langle w|w\rangle \leq 0$$

haben. Das ergibt aber genau die gesuchte Ungleichung. □

Bewaffnet mit dieser Ungleichung können wir aus (Semi-)Skalarprodukten sofort (Halb-)Normen machen.

Satz 2.3. *Auf jedem Prähilbertraum $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ist durch*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v|v\rangle}, \qquad v \in V$$

eine Norm definiert.

Beweis. Die Wohldefiniertheit und positive Definitheit der Norm sind sofort klar.
Für die Homogenität rechnen wir in einer Zeile

$$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle\alpha v|\alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^*\alpha\langle v|v\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2\|v\|^2}.$$

Und schließlich ergibt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v|v\rangle + \underbrace{\langle v|w\rangle + \langle w|v\rangle}_{=2\mathrm{Re}\langle v|w\rangle} + \langle w|w\rangle \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v|w\rangle| + \|w\|^2 \\ \text{(C.-S.)} \quad &\leq \|v\|^2 + 2\sqrt{\langle v|v\rangle\langle w|w\rangle} + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel und beachten, dass alle Terme an den Enden der Ungleichungskette nicht negativ sind, steht die Dreiecksungleichung schon da. □

Beispiel 10. *Der $\mathbb{K}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt*

$$\langle v|w\rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k^* w_k$$

ist uns schon hinlänglich bekannt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ können wir die wirkungslose komplexe Konjugation einfach ignorieren.
Wie so oft können wir dieses Beispiel auf Folgenräume erweitern. Auf $\ell_2^{\mathbb{K}}$ ist durch

$$\langle v|w\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^* w_k$$

ein Skalarprodukt gegeben. Die Sesquilinearität und konjugierte Symmetrie sind anhand der Rechenregeln für (absolut konvergente Reihen) klar.
Wegen $v_k^* v_k = |v_k|^2$ folgt auch die positive Semidefinitheit.
Ist $\langle v|v\rangle = 0$, so müssen alle Summanden $|v_k|^2 = 0$ sein, wir haben es also mit der trivialen Folge 0_{ℓ_2} zu tun.
Wir müssen noch zeigen, dass $\langle v|w\rangle$ tatsächlich durch eine absolut konvergente Reihe gegeben und damit wohldefiniert ist. Das ist aber gerade die Hölderungleichung (siehe Lemma **??***) für das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.*
Die von den hier angegebenen Skalarprodukten erzeugten Normen sind genau die bereits bekannten $\|\cdot\|_2$-Normen.

Beispiel 11. *Für allgemeinere Maßräume erhalten wir völlig analog zu ℓ_2 auf $\mathcal{L}_2(\mu;\mathbb{K})$ das Semiskalarprodukt*

$$\langle f|g\rangle = \int_\Omega f^* g \,\mathrm{d}\mu,$$

das auf dem Restklassenraum $L_2(\mu;\mathbb{K})$ zum Skalarprodukt wird, durch das auch hier die bereits bekannte Norm $\|\cdot\|_2$ induziert wird.

All diese Räume hatten wir als Banachräume identifiziert. Das motiviert folgende Definition.

Definition 2.4. *Ein unitärer Raum $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ heißt Hilbertraum, wenn er unter der durch das Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist.*

Im Rahmen einer Übungsaufgabe rechnen Sie noch folgende Gleichungen nach:

Lemma 2.5 (Polarisierungsidentitäten)**.** *In einem Prähilbertraum $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ gilt mit der durch das Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|$ für alle $v, w \in V$*

$$\begin{aligned}
&(i)\ \langle v|w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right) && (\mathbb{K} = \mathbb{R})\\
&(ii)\ \langle v|w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \imath\|v+\imath w\|^2 + \imath\|v-\imath w\|^2\right) && (\mathbb{K} = \mathbb{C})
\end{aligned}$$

Beweis. Auf der rechten Seite beginnend nachrechnen (Übung). □

Die Polarisierungsidentitäten stellen sicher, dass eine gegebene Norm nicht durch verschiedene Skalarprodukte induziert werden kann. Umgekehrt stellt sich aber die Frage, ob jeder Norm ein Skalarprodukt zugrunde liegt, das durch die jeweilige Polarisierungsidentität gegeben ist. Die Antwort ist negativ, aber wir können ein Kriterium angeben.

Satz 2.6 (Jordan-von Neumann)**.** *Die Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum wird genau dann durch ein Skalarprodukt induziert, wenn für alle $v, w \in V$ die Parallelogrammgleichung*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \tag{2.1}$$

gilt. In diesem Fall ist das Skalarprodukt durch die Polarisierungsidentitäten eindeutig bestimmt.

Beweis. Von der Gültigkeit der Parallelogrammgleichung in einem unitären Raum überzeugen Sie sich durch Nachrechnen. Dabei hilft die Skizze eines ganz elementar im euklidischen $\mathbb{R}^2$ von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms.
Die Umkehrung zeigen wir für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, müssen also zeigen, dass die durch

$$\langle v|w\rangle \;=\; \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right)$$

definierte Abbildung $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt ist. Der rechnerisch etwas aufwendige Teil ist die Linearität.
(I) Für $x_1, x_2, y \in V$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\|x_1+x_2+y\|^2 \;&=\; \frac{1}{2}\left(\|(x_1+y)+x_2)\|^2 + \|(x_2+y)+x_1\|^2\right) \\
&\quad \text{(2.1) mit } v = x_2, w = x_1+y \text{ bzw. } v = x_2+y, w = x_1 \\
&=\; \frac{1}{2}\left(2\|x_1+y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1-x_2+y\|^2\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(2\|x_2+y\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|-x_1+x_2+y\|^2\right) \\
&=\; \|x_1+y\|^2 + \|x_2+y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\|x_1-x_2+y\|^2 + \|-x_1+x_2+y\|^2\right)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

und durch Ersetzen von y durch $-y$ analog

$$\begin{aligned}
\|x_1+x_2-y\|^2 \;&=\; \|x_1-y\|^2 + \|x_2-y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\|x_1-x_2-y\|^2 + \|-x_1+x_2-y\|^2\right)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Das nutzen wir zum Nachrechnen der Additivität (im ersten Argument):

$$\begin{aligned}
\langle x_1 + x_2 \mid y\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x_1+x_2+y\|^2 - \|x_1+x_2-y\|^2\right)\\
\text{(via (2.2))} \quad &= \frac{1}{4}\Bigg[\|x_1+y\|^2 + \|x_2+y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(\|x_1-x_2+y\|^2 + \|-x_1+x_2+y\|^2\right)\Bigg]\\
\text{(via (2.3))} \quad &\quad - \frac{1}{4}\Bigg[\|x_1-y\|^2 + \|x_2-y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\\
&\qquad - \frac{1}{2}\left(\|x_1-x_2-y\|^2 + \|-x_1+x_2-y\|^2\right)\Bigg]\\
&= \frac{1}{4}\left(\|x_1+y\|^2 - \|x_1-y\|^2\right) + \frac{1}{4}\left(\|x_2+y\|^2 - \|x_2-y\|^2\right)\\
&= \langle x_1|y\rangle + \langle x_2|y\rangle.
\end{aligned}$$

(II) Für den Rest der Linearität (im reellen Fall entfällt der Teil mit der komplexen Konjugation) zeigen wir zunächst für $\alpha = 0$:

$$\langle 0v|w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|w\|^2 - \|w\|^2\right) = 0\langle v|w\rangle$$

und für $\alpha = 2$ ($\alpha = 1$ ist trivial):

$$\langle 2v|w\rangle = \langle v+v|w\rangle = \langle v|w\rangle + \langle v|w\rangle = 2\langle v|w\rangle,$$

und dann induktiv $\langle \alpha v|w\rangle = \alpha\langle v|w\rangle$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Für nicht negative rationale Zahlen $\alpha = \frac{k}{m}$, $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$m\langle \alpha v|w\rangle = \langle m\alpha v|w\rangle = \langle kv|w\rangle = k\langle v|w\rangle,$$

was nach Teilen durch m die Aussage für $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ ergibt. Zu den negativen rationalen Zahlen α kommen wir dann via

$$0 = \langle 0_V|w\rangle = \langle \alpha v + (-\alpha v)|w\rangle = \langle \alpha v|w\rangle + \underbrace{\langle -\alpha v|w\rangle}_{-\alpha\langle v|w\rangle}.$$

Wegen der Stetigkeit der Normen (und damit auch von $\langle\cdot|\cdot\rangle$ nach der Definition) folgt daraus $\langle \alpha v|w\rangle = \alpha\langle v|w\rangle$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$.

(III) Für die positive Definitheit rechnen wir nach

$$\langle v|v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|2v\|^2 - \|0\|^2\right) = \|v\|^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $v = 0$.

Die Symmetrie ist dank der Homogenität der Norm auch leicht nachzurechnen

$$\langle w|v\rangle = \frac{1}{4}\big(\|w+v\|^2 - \| \underbrace{w-v}_{=-(v-w)} \|^2\big) = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|\right) = \langle v|w\rangle.$$

Zusammen haben wir also gezeigt, dass es sich um ein Skalarprodukt handelt.
Im komplexen Fall werden die Rechnungen deutlich länger, aber im Prinzip ganz ähnlich.
$\square$

ANHANG A

Das Lebesgue-Integral

In diesem Anhang sammeln wir ohne jegliche Beweise einige Aussagen aus der Maßtheorie, die wir für unsere Betrachtungen benötigen.

Definition A.1. *Eine σ-Algebra über einer nicht leeren Menge Ω ist ein System $\mathcal{F}$ von Teilmengen von Ω derart, dass*

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$ *($A^c = \Omega \setminus A$ ist das Komplement von A)*
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}$.

Die zu $\mathcal{F}$ gehörenden Mengen nennen wir messbare Mengen, das Paar $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt messbarer Raum.

Lemma A.2 (und Definition)**.** *Ist $\mathcal{E}$ eine beliebige Familie von Teilmengen von Ω, so existiert eine kleinste σ-Algebra*

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{F}\ \sigma\text{-Algebra}, \mathcal{E} \subset \mathcal{F}} \mathcal{F},$$

die $\mathcal{E}$ enthält. Diese wird als von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet.

Die auf dem $\mathbb{R}^n$ vom System der offenen Menge erzeugte σ-Algebra heißt Borelsche σ-Algebra und wird als $\mathcal{B}_n$ bezeichnet[1]. Sie wird auch von der Familie aller halboffenen Quader

$$(a, b] = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n], \qquad a = (a_1, \dots, a_n)^T, b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

[1] Allgemeiner heißt für jeden topologischen Raum die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra Borelsche σ-Algebra.

erzeugt.

Definition A.3. *Ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ über der Menge Ω ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \to \infty$ derart, dass*

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ *für beliebige paarweise disjunkte $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$.*

Zusammen heißt $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dann ein Maßraum.

Satz A.4 (und Definition)**.** *Auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ existiert genau ein Maß β^n, das für alle Quader $(a, b]$ mit $a \leq b$*

$$\beta^n((a,b]) = \mathrm{vol}_n((a,b]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

erfüllt.

Allgemeiner wird jedes Maß μ auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ über einem topologischen Raum X als Borelmaß bezeichnet. Ein solches heißt regulär, wenn alle kompakten Mengen endliches Maß haben und für alle $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ kompakt}\} = \inf\{\mu(U) : U \supset A \text{ offen}\} \tag{A.1}$$

gilt, also jede messbare Menge bezüglich μ beliebig gut von innen durch kompakte und von außen durch offene Mengen approximiert werden kann.

Satz A.5. *Das Maß β^n aus Satz A.4 ist ein reguläres Borelmaß über dem mit seiner (euklidischen) Standardtopologie versehenen $\mathbb{R}^n$.*

Definition A.6. *In einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt $N \in \mathcal{F}$ eine (μ-)Nullmenge, wenn $\mu(N) = 0$ ist. Der Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt vollständig, wenn alle Teilmengen von Nullmengen messbar sind (also zu $\mathcal{F}$ gehören):*

$$B \subset N \in \mathcal{F},\ \mu(N) = 0 \quad \Longrightarrow \quad B \in \mathcal{F}.$$

Satz A.7 (und Definition)**.** *Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, so ist durch*

$$\tilde{\mathcal{F}} := \{A \cup B : A \in \mathcal{F},\ B \subset N \text{ für eine Nullmenge } N \in \mathcal{F}\}$$

eine σ-Algebra über Ω gegeben, auf der durch

$$\tilde{\mu}(A \cup B) = \mu(A), \qquad \text{falls } A \in \mathcal{F}, B \subset N \text{ für eine Nullmenge } N$$

ein Maß definiert ist[a]. Für $A \in \mathcal{F}$ gilt $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$, und der vollständige Maßraum $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu})$ heißt die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

[a] dessen Definition wohlgemerkt nicht von der Wahl von A und B abhängt. Ist nämlich für ein $A' \in \mathcal{F}$ und ein $B' \subset N'$ mit einer Nullmenge N' $A \cup B = A' \cup B'$, so gilt $\mu(A) = \mu(A')$.

Satz A.8 (und Definition)**.** *Der Maßraum* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta^n)$ *ist nicht vollständig. Seine Vervollständigung bezeichnen wir mit* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda^n)$ *und nennen* λ^n *das n-dimensionale Lebesgue-Maß. Die Elemente von* $\mathfrak{M}_n$ *heißen* <u>*(Lebesgue-)messbare*</u> *Teilmengen des* $\mathbb{R}^n$*.*

Bislang haben wir nur das Konzept des Volumens von Quadern auf beliebige messbare Mengen erweitert. Da Quader aber eine wesentliche Rolle bei der Definition des Riemannintegrals spielten, sollte uns das bei der Definition eines allgemeineren Integralbegriffs helfen. Dazu brauchen wir zunächst Funktionen, über deren Integral wir uns Gedanken machen können.

Definition A.9. *Sind* $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega', \mathcal{F}')$ *messbare Räume, so nennen wir die Abbildung* $f : \Omega \to \Omega'$ <u>*$(\mathcal{F}$-$\mathcal{F}'$-)messbar*</u>*, falls* $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ *für alle* $A' \in \mathcal{F}'$ *gilt.*

Wir befassen uns vor allem mit reell- oder komplexwertigen Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ und wählen dabei auf dem Urbildraum die Lebesguesche σ-Algebra $\mathfrak{M}_n$ und auf dem Bildraum die Borelsche. Dabei wollen unseren Funktionen aber auch erlauben, unendliche Werte anzunehmen. Solche Funktionen $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}(= \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$ bezeichnen wir als numerische Funktione. Dabei versehen wir $\bar{\mathbb{R}}$ mit der aus Mengen der Form $A, A \cup \{\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{-\infty, \infty\}$ bestehenden σ-Algebra $\bar{\mathcal{B}}_1$.

Definition A.10. *Eine Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *heißt messbar, wenn sie* $\mathfrak{M}_n$-$\mathcal{B}_1$*-messbar ist.*
Eine numerische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ *heißt messbar, wenn sie* $\mathfrak{M}_n$-$\bar{\mathcal{B}}_1$*-messbar ist.*

Nicht nur für auf dem $\mathbb{R}^n$, sondern für auf allgemeinen messbaren Räumen definierte (numerische) Funktionen gilt:

Lemma A.11. *Eine (numerische) Funktion* f *auf einem messbaren Raum* $(\Omega, \mathcal{F})$ *ist genau dann* ($\mathcal{F}$-$\mathcal{B}_1$- *bzw.* $\mathcal{F}$-$\bar{\mathcal{B}}_1$-)*messbar, wenn für alle* $c \in \mathbb{R}$

$$\{f \le c\} = \{x \in \Omega : f(x) \le c\} \in \mathcal{F}$$

gilt.

Die messbaren reellwertigen Funktionen bilden einen Vektorraum:

Lemma A.12. *Sind* $f_1, f_2, \dots$ *messbare reellwertige Funktionen auf* $(\Omega, \mathcal{F})$*, so sind auch*

- $\alpha f + g$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}$
- $|f|$, f^+, f^- *(wobei* $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^- = \max\{-f(x), 0\}$*)*
- $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$
- $\limsup_{k\to\infty} f_k$, $\liminf_{k\to\infty} f_k$

(jeweils punktweise verstanden) messbare (numerische) Funktionen.

Insbesondere sind also punktweise Grenzwerte (sofern existent) messbarer Funktionen wieder messbar. Das nutzen wir zur Definition des Integrals aus.

Definition A.13. *Als Treppenfunktion bezeichnen wir eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die nur endlich viele Werte annimmt:*

$$f = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{1}_{A_k}, \qquad A_1, \dots, A_N \in \mathcal{F},\ c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}.$$

Das Integral einer Treppenfunktion $f = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{1}_{A_k}$ über Ω bezüglich μ ist als

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{N} c_k \mu(A_k)$$

definiert[a]*, falls $\mu(A_k) < \infty$ für alle $k = 1, \dots, N$ gilt. In diesem Fall heißt f (μ-)integrierbar.*

[a] Dabei ist $\mathbf{1}_A$ die Indikatorfunktion der Menge A, also $\mathbf{1}_A(x) = 1$ für $x \in A$ und $\mathbf{1}_A(x) = 0$ für $x \notin A$. Der Wert des Integrals hängt nicht von der konkreten Darstellung der Treppenfunktion f ab.

Lemma A.14. *Ist f eine nicht negative, messbare, numerische Funktion auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda^n)$, so existiert eine (punktweise) monoton wachsende Folge $(f_k)_k$ von Treppenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert.*

Definition A.15. *Für eine nicht negative, messbare, numerische Funktion auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda^n)$ definieren wir das (Lebesgue-)Integral als*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda^n := \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \,\mathrm{d}\lambda^n,$$

wobei $(f_k)_k$ eine monoton gegen f konvergierende Folge integrierbarer Treppenfunktionen ist.

In der Regel schreiben wir $\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}x$ statt $\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda^n$, unsere Integrale sind also immer, sofern nicht anders gesagt, Lebesgue-Integrale. Wir bemerken, dass diese Definition nicht von der Wahl der konkreten Folge von Treppenfunktionen abhängt und dass das Integral durchaus den Wert ∞ annehmen kann.

Für allgemeine numerische Funktionen zerlegen wir f in $f^+ - f^-$ und definieren:

Definition A.16. *Für eine messbare numerische Funktion auf* $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda^n)$ *definieren wir*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, \mathrm{d}x,$$

falls mindestens eines der Integrale auf der rechten Seite endlich ist. Sind sogar beide dieser Integrale (und damit auch die linke Seite) endlich, so nennen wir f *(Lebesgue-)integrierbar (über* $\mathbb{R}^n$*).*
Für eine messbare Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *und eine messbare numerische Funktion* f *definieren wir*

$$\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}^n} f \mathbf{1}_{\Omega} \, \mathrm{d}x,$$

falls das Integral von $f\mathbf{1}_{\Omega}$ *im obigen Sinne existiert. Ist dieses Integral endlich, so nennen wir* f *integrierbar über* Ω.

Die Definition gilt auch für beliebige Maßräume, allerdings muss man dann schon für Treppenfunktionen den Wert ∞ für das Integral erlauben, da man im allgemeinen keine Folge *integrierbarer* Treppenfunktionen finden wird, die monoton gegen f konvergiert.

Wollen wir Aussagen über die Elemente eines Maßraums treffen, so erweist sich folgende Sprechweise oft als nützlich. Wir sagen, eine Eigenschaft gelte (μ-)fast überall auf Ω, wenn eine μ-Nullmenge N derart existiert, dass die fragliche Eigenschaft für alle $x \in \Omega \backslash N$ gilt.

Satz A.17 (und Definition)**.** *Die numerischen Funktionen* $f, g : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ *seien messbar. Dann gilt*

- f *ist genau dann integrierbar, wenn* $|f|$ *integrierbar ist, und es gilt die Dreiecksungleichung für Integrale:*
$$\left| \int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, \mathrm{d}\mu.$$
- *Monotonie: Gilt* $f \leq g$ *fast überall* $\implies$ $\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_{\Omega} g \, \mathrm{d}\mu$*, falls beide Integrale (in* $\bar{\mathbb{R}}$*) existieren.*
- *Sind* f *und* g *integrierbar, so ist auch* $\alpha f + g$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *integrierbar und* $\int_{\Omega} \alpha f + g \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{\Omega} g \, \mathrm{d}\mu$*. Die integrierbaren reellwertigen Funktionen bilden also einen (reellen) Vektorraum, den wir* $\mathcal{L}_1(\mu)$ *nennen, und das Integral ist eine lineare Abbildung* $\int_{\Omega} \cdot \, \mathrm{d}\mu : \mathcal{L}_1(\mu) \to \mathbb{R}$.
- *Gilt* $f = g$ *fast überall und existiert eines der Integrale* $\int_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu$ *oder* $\int_{\Omega} g \, \mathrm{d}\mu$*, so existieren beide Integrale und stimmen überein. Ferner gilt dann* $\int_{\Omega} |f - g| \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Die letzte Aussage erlaubt die Definition des Raums L_1.

Definition A.18. *Auf der Menge der messbaren numerischen Funktionen* $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ *definieren wir die Äquivalenzrelation* $\sim$ *durch*

$$f \sim g :\Longleftrightarrow f = g \text{ fast überall.}$$

Mit $L_1(\mathbb{R}^n)$ *bezeichnen wir den Raum all jener Äquivalenzklassen, die einen integrierbaren Repräsentanten enthalten. Analog definieren wir* $L_1(\Omega)$ *für messbare Mengen* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Wir bemerken, dass jede Äquivalenzklasse aus $L_1(\mathbb{R}^n)$ auch einen reellwertigen Repräsentanten $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ enthält. Oft werden wir die Äquivalenzklasse $[f] \in L_1(\mathbb{R}^n)$ kurz als f schreiben und von L_1-Funktionen sprechen. Analog erhalten wir auch die Räume $L_p(\mathbb{R}^n)$, oder allgemeiner $L_p(\mu)$, für $p \geq 1$. Die entsprechenden Definitionen sind

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ f : \Omega \to \bar{R} \ : \ f \text{ messbar} \ , \ \int |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

für $p \in [1, \infty)$ und

$$\mathcal{L}_\infty(\mu) = \left\{ f : \Omega \to \bar{R} \ : \ f \text{ messbar} \ , \ \exists C \geq 0 : |f(\omega)| \leq C \text{ für } \mu\text{-fast alle } \omega \in \Omega \right\}.$$

Dann fassen wir wieder alle fast überall übereinstimmenden Funktionen zu einer Äquivalenzklasse zusammen und erhalten die Räume L_p.
Aus der Definition haben wir sofort die Normen

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|f\|_\infty := \underbrace{\inf\{C > 0 : |f(\omega)| \leq C \text{ fast überall}\}}_{=:\operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|}$$

abgelesen.

Lemma A.19 (Hölder-Ungleichung)**.** *Sind* $p, p' \in (1, \infty)$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *oder* $p = 1$, $p' = \infty$, *so gilt für* $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_{p'}(\mu)$:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'},$$

insbesondere: $fg \in L_1(\mu)$.

Die Hölder-Ungleichung wird zum Beweis der Minkowski-Ungleichung benutzt.

Lemma A.20 (Minkowski-Ungleichung)**.** *Für* $f, g \in L_p(\mu)$, $p \in [1, \infty)$, *gilt*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Theorem A.21 (Vollständigkeitssatz von Riesz-Fischer)**.** *Die Räume* $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$ *sind Banachräume für* $p \in [1, \infty]$.

Satz A.22 (Ausschöpfungslemma)**.** *Im Maßraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *seien* $A, A_1, A_2, \ldots$ *messbare Mengen derart, dass*

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \qquad \textit{und} \qquad A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

gelten. Dann ist $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ *genau dann integrierbar über* A*, wenn* $f\mathbf{1}_{A_k}$ *für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *integrierbar ist und* $\lim_{k\to\infty} \int_{A_k} |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ *ist, und in diesem Fall gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Satz A.23 (parameterabhängige Integrale)**.** *Für den Maßraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *und die offene Menge* $U \subset \mathbb{R}^p$ *sei* $f : \Omega \times U \to \mathbb{R}$ *gegeben. Für* $\theta \in U$ *definieren wir* $f_\theta : \Omega \to \mathbb{R}$ *durch* $f_\theta(\omega) := f(\omega, \theta)$ *und nehmen* $f_\theta \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *für alle* $\theta \in U$ *an. Dann können wir* $g : U \to \mathbb{R}$ *durch*

$$g(\theta) := \int_\Omega f_\theta \,\mathrm{d}\mu$$

definieren. Wir nehmen ferner an, es existiere ein $h \in L^1(\mu)$ *mit* $|f(\omega, \theta)| \le h(\omega)$ *für alle* $\theta \in U$ *und fast alle* $\omega \in \Omega$*. Dann gilt:*

(i) Sind die Funktionen $\theta \mapsto f(\omega, \theta)$ *(von* U *nach* $\mathbb{R}$*) für alle* $\omega \in \Omega$ *stetig bei* $\theta^* \in U$*, so ist* g *stetig bei* θ^**.*

(ii) Sind die Funktionen $\theta \mapsto f(\omega, \theta)$ *für jedes* $\omega \in \Omega$ *stetig differenzierbar und existiert ein* $k \in L^1(\mu)$ *mit* $|\partial_{\theta_i} f(\omega, \theta)| \le k(\omega)$ *für alle* $\theta \in U$*, fast alle* $\omega \in \Omega$ *und alle* $i = 1, \ldots, p$*, so ist auch* g *stetig differenzierbar auf* U *und:*

$$\partial_{\theta_j} g(\theta) = \int_\Omega \partial_{\theta_j} f(\cdot, \theta) \,\mathrm{d}\mu \qquad \textit{für alle } \theta \in U,\ j = 1, \ldots, p.$$