Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 11

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 28. Juni - 02. Juli 2021
Bitte geben Sie maximal 2 Aufgaben per Übungsgruppensystem zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!
Nutzen Sie dazu den Link `https://uebungen.physik.uni-heidelberg.de/h/1291`

1. *Verständnisfragen*

a) Fassen Sie die wesentliche Idee der Störungstheorie zusammen, insbesondere auch im Hinblick auf die verschiedenen Bilder der Quantenmechanik.

b) Überlegen Sie sich selbst Situationen, in denen Störungstheorie angebracht sein könnte. Wie können Sie abschätzen, ob Störungstheorie sinnvoll ist?

c) Welche wichtigen Annahmen gehen in die zeitabhängige Störungstheorie und in Fermis goldene Regel ein?

2. *Eichinvarianz*

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, ist der Hamilton-Operator für ein Teilchen der Masse m und der Ladung q im elektromagnetischen Feld gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\hat{x})\right]^2 + q\Phi(\hat{x}),$$

wobei $\vec{A}$ und Φ die Potentiale für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind.

Zeigen Sie, dass die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung ihre Form behält, wenn man eine Eichtransformation der Potentiale,

$$\begin{aligned} \vec{A} \;&\rightarrow\; \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\Lambda, \\ \Phi \;&\rightarrow\; \Phi' = \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

mit einer beliebigen Funktion $\Lambda(\vec{x}, t)$ und gleichzeitig eine lokale Phasentransformation der Ortswellenfunktion

$$\psi(\vec{x}, t) \;\rightarrow\; \psi'(\vec{x}, t) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}q}{\hbar c}\Lambda(\vec{x}, t)\right]\psi(\vec{x}, t)$$

durchführt.

3. *Zeitunabhängiges Magnetfeld*

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit einer Punktladung in einem homogenen und stationären Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}$ beschäftigen, wobei $\vec{e}$ ein Einheitsvektor ist.

a) Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Komponenten des kinetischen Impulses

$$\hat{\pi} = \hat{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\hat{x})$$

nicht kommutieren.

b) Betrachten Sie das System im Heisenberg-Bild. Wie lauten die Bewegungsgleichungen für den Orts- und Impulsoperator?

c) Lösen Sie die in b) hergeleiteten Bewegungsgleichungen und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

4. Zeitabhängiges Magnetfeld

Die Bewegung eines Elektrons mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem zeitabhängigen Magnetfeld $\vec{B}(t)$ wird durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{g}{2}\mu_{\mathrm{B}}\hat{\vec{\sigma}} \cdot \vec{B}(t)$$

beschrieben, wobei $g \approx 2$ der Landé-Faktor ist, $\mu_{\mathrm{B}} = e\hbar/(2m_{\mathrm{e}}c)$ das Bohr'sche Magneton und $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^{\mathrm{T}}$ der Vektor der Pauli-Matrizen.

a) Berechnen Sie für den Fall eines statischen und räumlich konstanten Magnetfeldes $\vec{B}_0 = B_0\,\vec{e}_z$ die Energie-Eigenwerte E_α und E_β und die zugehörigen Eigenzustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$. Wie sieht die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung für dieses System aus?

b) Nun werde zusätzlich zu $\vec{B}_0$ ein weiteres Magnetfeld $\vec{B}_1(t) = B_1\left[\cos(\omega t)\,\vec{e}_x + \sin(\omega t)\,\vec{e}_y\right]$ angelegt. Eine allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung kann wieder aus einer Überlagerung der Zustände $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ gewonnen werden. Wie sehen die Bewegungsgleichungen der Koeffizienten aus?
Hinweis: Verwenden Sie das Ergebnis aus a) und variieren Sie die Konstanten. Spalten Sie außerdem den obigen Hamilton-Operator in zwei Teile auf, $\hat{H} \equiv \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, wobei $\hat{H}_0$ von $\vec{B}_0$ herrührt und $\hat{H}_1$ von $\vec{B}_1$.

c) Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\alpha\rangle$. Außerdem sei ω so gewählt, dass das System in Resonanz ist, d.h. $\omega = g\mu_{\mathrm{B}}B_0/\hbar$. Lösen Sie für diesen Fall die Bewegungsgleichungen der Koeffizienten. Zu welchen Zeiten befindet sich das System dann mit Sicherheit im Zustand $|\beta\rangle$?