Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 9

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: Do 02.07.2020 um 9:15 Uhr

32. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Polynome mit speziellen Nullstellen)* Seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

(a) Man zeige, dass $\sqrt{2}$ ein Eigenwert von A und $\sqrt{3}$ ein Eigenwert von B ist.

(b) Man bestimme $C := A \otimes E_2 + E_2 \otimes B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$.

(c) Man berechne $\chi_C^{\mathrm{char}} \in \mathbb{R}[t]$ und folgere aus Aufgabe 31 (c), dass $\chi_C^{\mathrm{char}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$.

33. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Tensorprodukte und Dualräume)* Seien K ein Körper und V ein (nicht notwendig endlich-dimensionaler) K-Vektorraum. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$V^{\otimes n} := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ mal}} \quad \text{und} \quad (V^*)^{\otimes n} := \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{n \text{ mal}}.$$

Man zeige:

(a) Seien $f_1, \ldots, f_n \in V^*$. Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi_{f_1,\ldots,f_n} \colon V^{\otimes n} \to K$ mit

$$\varphi_{f_1,\ldots,f_n}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) \quad \text{für } x_1, \ldots, x_n \in V.$$

(b) Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\Phi_n \colon (V^*)^{\otimes n} \to (V^{\otimes n})^*$ mit

$$\Phi_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \varphi_{f_1,\ldots,f_n} \quad \text{für } f_1, \ldots, f_n \in V^*.$$

(c) Sei $n = 2$ und V endlich-dimensional. Dann ist Φ_2 ein Isomorphismus (von K-Vektorräumen).

34. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Erzeugendensysteme von äußeren Potenzen)* Seien R ein Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul.

(a) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(x_1, \ldots, x_m)$ ein Erzeugendensystem von M. Man zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ die Familie

$$(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m}$$

ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^n M$ ist.

(b) Sei nun $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $I = (2, 1 + \sqrt{-5}) \subseteq R$. Man zeige, dass $\bigwedge^2 I = 0$ ist.

35. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Äußere Potenzen und Tensorprodukte)* Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Man zeige:

(a) Es gibt einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $f \colon \bigwedge^2 M \to M \otimes_R M$ mit

$$f(a \wedge b) = a \otimes b - b \otimes a \quad \text{für } a, b \in M.$$

(b) Ist M endlich erzeugt und frei, so ist die Abbildung f aus (a) injektiv.
Hinweis: Man verwende Aufgabe 34 (a).

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.