Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 2

Besprechung in den Übungsgruppen am 28. Oktober 2019

1. ***Hausaufgabe:*** **Differentialgleichungen**

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit den zugehörigen Anfangsbedingungen durch Separation der Variablen und evtl. Variation der Konstanten,

a) $y'(x) = y^2(x) \cosh(x) \qquad \text{mit} \qquad y(0) = 4,$

b) $y'(x) = \sin(x)\cos(x) - y(x)\sin(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 0.$

Hierbei bezeichnet der Strich die Ableitung $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

2. ***Hausaufgabe:*** **Start einer Rakete**

Beim Start einer Rakete wird diese durch den Rückstoß des von ihr ausgestoßenen Materials beschleunigt. Dabei nimmt die Masse m der Rakete kontinuierlich ab. Nehmen Sie im Folgenden an, dass die Rakete im homogenen Gravitationsfeld senkrecht nach oben beschleunigt wird und der Luftwiderstand vernachlässigbar ist. Im Bezugssystem der Rakete wird der verbrannte Treibstoff mit der konstanten Geschwindigkeit $-v_0 \leq 0$ nach unten ausgestoßen.

a) Mit welcher Geschwindigkeit wird der Treibstoff aus der Sicht eines auf der Erde ruhenden Beobachters ausgestoßen? Welche Kraft erfährt die Rakete somit aus der Sicht des ruhenden Beobachters? Berücksichtigen Sie sowohl den Rückstoß als auch den Einfluss der Gravitation. Bestimmen Sie hierzu den Impuls eines Treibstofftropfens der Masse Δm_T und leiten Sie daraus die Impulsänderung der Rakete Δp im Zeitinterval Δt ab. Bringen Sie außerdem die Masse des Tropfens mit der Massenänderung der Rakete Δm in Zusammenhang. Führen Sie anschließend die Grenzübergänge $\Delta p/\Delta t \to \dot{p}$ und $\Delta m/\Delta t \to \dot{m}$ durch.

b) Zeigen Sie, dass für die Rakete die folgende Bewegungsgleichung gilt,

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} v_0 = -g - \dot{v}(t),$$

wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit der Rakete aus Sicht des ruhenden Beobachters und g der Betrag der Erdbeschleunigung ist.

c) Bestimmen Sie $v(t)$ für den Fall, dass die Rakete bei $t = 0$ aus dem Stand startet und zu Beginn die Masse m_0 hat.

d) Nehmen Sie nun an, dass die Rakete ihren Treibstoff mit einer konstanten Rate μ ausstößt. Wie schnell ist die Rakete, wenn ihr Treibstoff der Masse $m_\mathrm{T} < m_0$ aufgebraucht ist? Wie hoch ist sie in dieser Zeit gestiegen? Drücken Sie hierfür die zeitabhängige Masse der Rakete $m(t)$ sowie den Zeitpunkt t_e, zu dem der Treibstoff aufgebraucht ist, über die Ausstoßrate aus.*

e) Wie schnell wird eine Rakete, die ihr gesamtes Gewicht als Treibstoff abstoßen kann? Ist das Ergebnis physikalisch sinnvoll? Woran liegt das?

**Hinweis:* Lösen Sie das auftretende Integral der Form $\int \mathrm{d}x\, \ln(1 - cx)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$, indem Sie eine Eins einschieben, dann einmal partiell integrieren und anschließend geschickt substituieren.

f) Ist der Treibstoff aufgebraucht, wird die Rakete nicht weiter nach oben beschleunigt, gehorcht jedoch nach wie vor ihrer Trägheit. Wie hoch steigt die Rakete ab dem Zeitpunkt, zu dem ihr Treibstoff aufgebraucht ist?

g) Bei einer Wasserrakete (bestehend aus einer PET-Flasche, die durch Druckluft und Wasser angetrieben wird) können etwa vier Fünftel des Anfangsgewichts als Treibstoff verwendet werden, und die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers ist ungefähr $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Gehen Sie davon aus, dass die Rakete das Wasser innerhalb einer halben Sekunde nach dem Start mit einer konstanten Rate ausstößt. Wie hoch und wie schnell ist die Rakete nach der ersten halben Sekunde? Wie hoch steigt die Rakete insgesamt, bevor sie auf den Boden zurückfällt? Trauen Sie diesem Ergebnis?

3. Präsenzaufgabe: Freier Fall mit Reibung

Ein zur Zeit $t = 0$ ruhender Wassertropfen falle aus einer Höhe von $600\,\mathrm{m}$ zur Erde. Die Beschleunigung sei durch die exponentielle Abhängigkeit $\ddot{r}(t) = -g\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ mit $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ und $\gamma = 1\,\mathrm{s^{-1}}$ gegeben.

a) Wie lautet die Lösung $r(t)$ für die gegebenen Anfangsbedingungen?

b) Berechnen Sie die Fallzeit des Tropfens und seine Aufprallgeschwindigkeit.

4. Verständnisfragen

a) Warum werden Bewegungen in der Mechanik und anderen Gebieten der Physik durch Differentialgleichungen beschrieben?

b) Beschreiben Sie das Verfahren, Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen zu lösen.

c) Für welche Arten von Problemen ist es eine gute Näherung, die Gravitationskraft der Erde durch eine konstante Beschleunigung zu beschreiben?

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 2: Lösungen

1. ***Hausaufgabe:*** **Differentialgleichungen**

a) Die zu lösende Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 \cosh(x)$$

ist homogen. Trennung der Variablen und anschließende Integration führt auf

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{d}x \, \cosh(x) + C,$$

wobei C eine Integrationskonstante ist, die aus der Anfangsbedingung bestimmt werden muss. Die beiden Integrale können leicht ausgeführt werden und ergeben

$$-\frac{1}{y} = \sinh(x) + C \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = -\frac{1}{\sinh(x) + C},$$

Aus $y(0) = 4$ ergibt sich für C

$$4 = -\frac{1}{\sinh(0) + C} = -\frac{1}{C} \qquad \Rightarrow \qquad C = -\frac{1}{4},$$

sodass

$$y(x) = -\frac{1}{\sinh(x) - 1/4} = \frac{4}{1 - 4\sinh(x)}.$$

b) Die zu lösende Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(x)\cos(x) - y(x)\sin(x) \tag{I}$$

ist inhomogen. Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y(x)\sin(x)\,.$$

Trennung der Variablen und anschließende Integration führt auf

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \mathrm{d}x \, \sin(x) + C_1,$$

wobei C_1 wieder eine Integrationskonstante ist. Die beiden Integrale ergeben

$$\ln(y) = \cos(x) + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad y(x) = \mathrm{e}^{\cos(x) + C_1} = C_2\,\mathrm{e}^{\cos(x)}, \tag{II}$$

wobei $C_2 = \mathrm{e}^{C_1}$ eine neue Bezeichnung für die Integrationskonstante ist. Die inhomogene Gleichung (I) wird nun im Folgenden mit Hilfe der Variation der Konstanten C_2 gelöst. Hierfür wird $C_2 \to C_2(x)$ angesetzt, sodass sich aus (II)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^{\cos(x)} - C_2 \sin(x)\,\mathrm{e}^{\cos(x)} \overset{!}{=} \sin(x)\cos(x) - C_2\,\mathrm{e}^{\cos(x)}\sin(x)$$

ergibt, wobei im letzten Schritt das Ergebnis mit (I) zusammen mit (II) gleichgesetzt wurde. Dies ergibt somit eine Differentialgleichung für $C_2(x)$,

$$\frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^{\cos(x)} = \sin(x)\cos(x) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-\cos(x)}\sin(x)\cos(x)\,.$$

Integration führt auf

$$C_2(x) = \int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\cos(x)}\sin(x)\cos(x) + C_3,$$

wobei C_3 wieder eine Integrationskonstante ist. Das Integral kann durch die Substitution $z = \cos(x)$ mit $\mathrm{d}z = -\sin(x)\ \mathrm{d}x$ und anschließende partielle Integration gelöst werden, denn dann gilt

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\cos(x)}\sin(x)\cos(x) &= -\int \mathrm{d}z\, z\,\mathrm{e}^{-z} = z\,\mathrm{e}^{-z} - \int \mathrm{d}z\,\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^{-z}(z+1)\\ &= \mathrm{e}^{-\cos(x)}\left[\cos(x)+1\right].\end{aligned}$$

$C_2(x)$ ist somit gegeben durch

$$C_2(x) = \mathrm{e}^{-\cos(x)}\left[\cos(x)+1\right] + C_3.$$

Eingesetzt in (II) ergibt dies

$$y(x) = \left\{\mathrm{e}^{-\cos(x)}\left[\cos(x)+1\right] + C_3\right\}\mathrm{e}^{\cos(x)} = C_3\,\mathrm{e}^{\cos(x)} + \cos(x) + 1.$$

Aus $y(0) = 0$ ergibt sich für C_3

$$0 = C_3\,\mathrm{e}^{\cos(0)} + \cos(0) + 1 = C_3\,\mathrm{e}\, + 2 \qquad \Rightarrow \qquad C_3 = -\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Somit ist

$$y(x) = -\frac{2}{\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{\cos(x)} + \cos(x) + 1 = 1 + \cos(x) - 2\,\mathrm{e}^{\cos(x)-1}\,.$$

2. ***Hausaufgabe:*** **Start einer Rakete**

a) Aus der Sicht des ruhenden Beobachters wird der Treibstoff mit der Geschwindigkeit $v(t) - v_0$ ausgestoßen. Die Kräfte, die die Rakete erfährt, sind die Gravitationskraft $F_\mathrm{G} = -mg$ und die Rückstoßkraft F_R des ausgestoßenen Treibstoffs. Wird ein Treibstofftropfen der Masse Δm_T ausgestoßen, so hat dieser aus der Sicht des ruhenden Beobachters den Impuls $\Delta p_\mathrm{T} = \Delta m_\mathrm{T}\,[v(t) - v_0]$. Damit ändert sich der Impuls der Rakete zu

$$\Delta p = -\Delta p_\mathrm{T} = -\Delta m_\mathrm{T}\,(v - v_0) = \Delta m\,(v - v_0)\,,$$

wobei im ersten Schritt verwendet wurde, dass die Impulsänderung der Rakete gerade das Negative des Impulses des Treibstoff ist. Im zweiten Schritt wurde verwendet, dass die Rakete gerade um die Masse des ausgestoßenen Treibstoffs leichter wird. Somit gilt

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\,(v - v_0) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{p} = \dot{m}\,(v - v_0)\,.$$

Die Impulsänderung ist nun gerade die Rückstoßkraft

$$F_\mathrm{R} = \dot{m}\,(v - v_0)\,,$$

sodass sich für die Gesamtkraft

$$F = F_\mathrm{G} + F_\mathrm{R} = -mg + \dot{m}\,(v - v_0)$$

ergibt.

b) Die Bewegungsgleichung kann mit Hilfe des zweiten Newton'schen Axioms gefunden werden, wobei darauf geachtet werden muss, dass die Masse zeitabhängig ist,

$$\dot{p} = F \qquad \Rightarrow \qquad \dot{m}v + m\dot{v} = -mg + \dot{m}\,(v - v_0)\,,$$

was nach einer Umformung die Gleichung

$$\frac{\dot{m}}{m} v_0 = -g - \dot{v}$$

vom Aufgabenblatt ergibt.

c) Trennung der Variablen und Integration der Differentialgleichung führt zu

$$v_0 \int \frac{\mathrm{d}m}{m} = -g \int \mathrm{d}t - \int \mathrm{d}v + C,$$

wobei C eine Integrationskonstante ist. Die Integrale können elemetar integriert werden, sodass

$$v_0 \ln(m) = -gt - v + C \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = -v_0 \ln[m(t)] - gt + C.$$

Die Integrationskonstante C wird wie folgt durch die Anfangsbedingungen $v(0) = 0$ und $m(0) = m_0$ festgelegt,

$$0 = -v_0 \ln(m_0) + C \qquad \Rightarrow \qquad C = v_0 \ln(m_0)\,.$$

Somit ist

$$v(t) = -v_0 \ln[m(t)] - gt + v_0 \ln(m_0) = -v_0 \ln\left[\frac{m(t)}{m_0}\right] - gt.$$

d) Stößt die Rakete ihren Treibstoff mit der konstanten Rate μ aus, ist ihre Masse zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$m(t) = m_0 - \mu t.$$

Der Treibstoff der Masse m_T ist dann zum Teitpunkt

$$t_\mathrm{e} = \frac{m_\mathrm{T}}{\mu}$$

aufgebraucht. Zu diesem Zeitpunkt hat die Rakete die Geschwindigkeit

$$v(t_\mathrm{e}) = -v_0 \ln\left(1 - \frac{\mu t_\mathrm{e}}{m_0}\right) - g t_\mathrm{e} = -v_0 \ln\left(1 - \frac{m_\mathrm{T}}{m_0}\right) - g\frac{m_\mathrm{T}}{\mu}. \tag{III}$$

Die Höhe der Rakete zum Zeitpunkt t erhält man durch Integration der Geschwindigkeit zu

$$h(t) = \int_0^t \mathrm{d}t'\, v(t') = -v_0 \int_0^t \mathrm{d}t'\; \ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0} t'\right) - g \int_0^t \mathrm{d}t'\, t'. \tag{IV}$$

Das erste Integral der Form $\int \mathrm{d}x\, \ln(1 - cx)$ kann wie folgt gelöst werden. Zuerst wird eine Eins eingeschoben und dann partiell integriert,

$$\int \mathrm{d}x\, \ln(1 - cx) = \int \mathrm{d}x\, 1 \cdot \ln(1 - cx) = x \ln(1 - cx) + \int \mathrm{d}x\, \frac{cx}{1 - cx}. \tag{V}$$

Das zweite Integral kann durch die Substitution $y = 1 - cx$ mit $\mathrm{d}y = -c\,\mathrm{d}x$ wie folgt gelöst werden,

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{cx}{1 - cx} = -\frac{1}{c} \int \mathrm{d}y\, \frac{1 - y}{y} = \frac{1}{c} \int \mathrm{d}y \left(1 - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{c}\,[y - \ln(y)] = \frac{1}{c} - x - \frac{\ln(1 - cx)}{c}.$$

Der konstante Term $1/c$ kann weggelassen werden, da dieser beim Ableiten verschwindet und somit denselben Status wie eine Integrationskonstante hat. Eingesetzt in (V) ergibt dies also

$$\int \mathrm{d}x \, \ln(1 - cx) = \left(x - \frac{1}{c}\right) \ln(1 - cx) - x.$$

Mit diesem Ergebnis und $c = \mu/m_0$ sowie der Anfangsbedingung $h(0) = 0$ ergibt (IV) also

$$h(t) = -v_0 \left[\left(t' - \frac{m_0}{\mu}\right) \ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0} t'\right) - t' \right]\Bigg|_0^t - \frac{g}{2} t'^2 \Big|_0^t = v_0 \left[\left(\frac{m_0}{\mu} - t\right) \ln\left(1 - \frac{\mu}{m_0} t\right) + t \right] - \frac{g}{2} t^2.$$

e) Besteht die Rakete nur aus Treibstoff, ist also $m_T = m_0$, dann geht der Logarithmus in (III) gegen $-\infty$. Die Rakete wird dann also unendlich schnell. Dies ist natürlich ein unphysikalisches Ergebnis, dass dadurch zustande kommt, dass die Masse der verbleibenden Rakete gegen Null geht. Dadurch bewirkt schon eine kleine Impulsänderung eine im Grenzfall unendliche Beschleunigung.

f) Die Rakete steigt solange weiter aufgrund ihrer Trägheit, bis

$$v(t_e) - g\,(t - t_e) \equiv v(t_e) - g\,\Delta t = 0$$

ist, was die Bedingung $\Delta t = v(t_e)/g$ liefert. In dieser Zeit legt die Rakete die Strecke

$$h'(\Delta t) = -\frac{g}{2}\,(\Delta t)^2 + v(t_e)\,\Delta t = -\frac{v^2(t_e)}{2g} + \frac{v^2(t_e)}{g} = \frac{v^2(t_e)}{2g}$$

zurück.

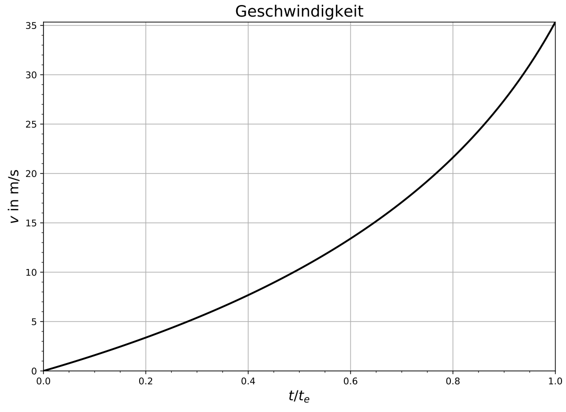
g) Für die Wasserrakete erhält man die folgenden Größen,

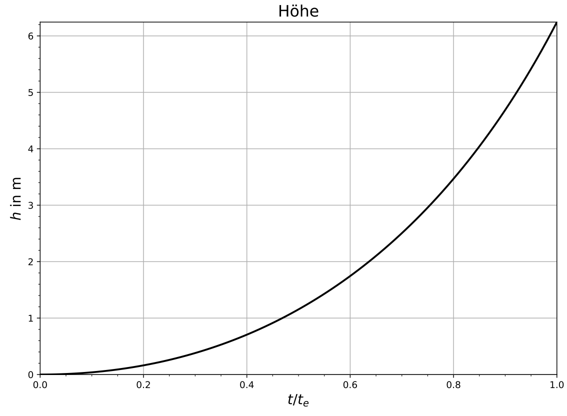
$$m_T = \frac{4}{5} m_0, \qquad v_0 = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{m_T}{t_e} = 2 m_T\,\mathrm{s^{-1}} = \frac{8}{5} m_0\,\mathrm{s^{-1}}.$$

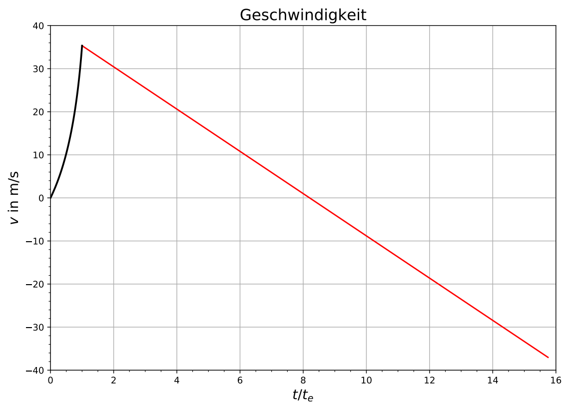
Somit ergibt sich

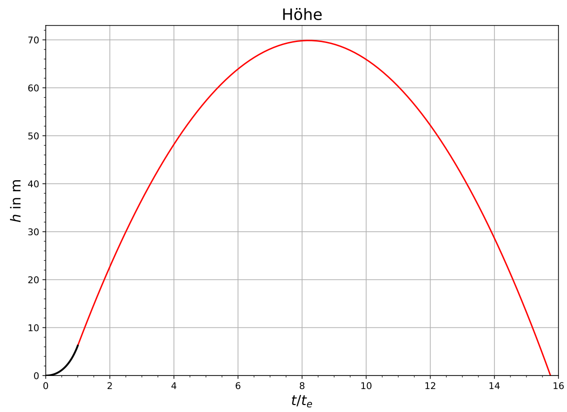
$$h(t_e) = 6{,}24\,\mathrm{m}, \qquad v(t_e) = 35{,}33\,\mathrm{m\,s^{-1}},$$
$$h_{ges} = h(t_e) + \frac{v^2(t_e)}{2g} = 6{,}24\,\mathrm{m} + 63{,}62\,\mathrm{m} = 69{,}86\,\mathrm{m}.$$

Erstaunlich an dieser Rechnung ist, dass die Rakete erst einige Meter hoch ist, wenn das Wasser vollständig ausgestoßen ist. Der Großteil der Höhe ist nur eine Konsequenz der Trägheit der Rakete. Eine reale Rakete würde nicht ganz so hoch kommen, da der Luftwiderstand bei einer Geschwindigkeit von $35\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 126\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ nicht mehr vernachlässigbar ist. (Der Luftwiderstand ist quadratisch von der Geschwindigkeit abhängig, sodass die Reibungskraft nicht mehr klein gegenüber den anderen Kräften ist.)









3. ***Präsenzaufgabe:* Freier Fall mit Reibung**

a) Einmalige Integration der Bewegungsgleichung ergibt

$$\dot{r}(t) = -g \int \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{-\gamma t} + C_1 = \frac{g}{\gamma}\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + C_1,$$

wobei C_1 eine Integrationskonstante ist. Die Anfangsbedingung $\dot{r}(0) = 0$ impliziert

$$0 = \frac{g}{\gamma}\,\mathrm{e}^{0} + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = -\frac{g}{\gamma},$$

sodass

$$\dot{r}(t) = \frac{g}{\gamma}\,(\mathrm{e}^{-\gamma t} - 1)\,.$$

Nochmalige Integration ergibt

$$r(t) = \frac{g}{\gamma} \int \mathrm{d}t\ (\mathrm{e}^{-\gamma t} - 1) = -\frac{g}{\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}\,\mathrm{e}^{-\gamma t} + t\right) + C_2,$$

wobei C_2 wieder eine Integrationskonstante ist. Die Anfangsbedingung $r(0) = r_0$, wobei r_0 die Anfangshöhe ist, impliziert

$$r_0 = -\frac{g}{\gamma^2} + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = r_0 + \frac{g}{\gamma^2},$$

sodass

$$r(t) = \frac{g}{\gamma^2}\,(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t}) - \frac{g}{\gamma} t + r_0.$$

b) Die Fallzeit t_F des Tropfens ergibt sich zu

$$r(t_F) = 0 = \frac{g}{\gamma^2}\,(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t_F}) - \frac{g}{\gamma} t_F + r_0.$$

Unter der Annahme $\mathrm{e}^{-\gamma t_F} \approx 0$ folgt somit

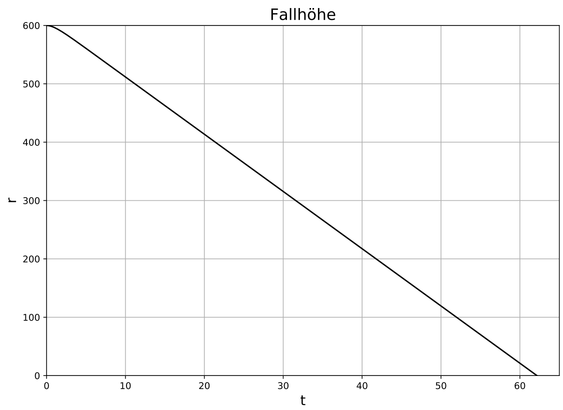
$$t_F \approx \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{g} r_0.$$

Einsetzen von $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\gamma = 1\,\mathrm{s^{-1}}$ und $r_0 = 600\,\mathrm{m}$ ergibt

$$t_F = 62{,}16\,\mathrm{s}.$$

Für seine Aufprallgeschwindigkeit v_F erhält man

$$v_F = \dot{r}(t_F) = \frac{g}{\gamma}\,(\mathrm{e}^{-\gamma t_F} - 1) \approx -\frac{g}{\gamma} = -9.81\,\mathrm{m\,s^{-1}} = -35{,}32\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$



4. Verständnisfragen

a) Laut Newton’s zweitem Axiom hat eine äußere Kraft eine Änderung des Impulses zur Folge. Somit ist (bei konstanter Masse) die Kraft proportional zur Beschleunigung, also der Änderung der Geschwindigkeit, welche wiederum die Änderung des Ortes darstellt. Also ist die Kraft somit proportional zur zweiten Ableitung des Ortes. Die Kraft selbst kann nun wieder vom Ort oder der Geschwindigkeit abhängen. Dies führt also zu Differentialgleichungen zweiter Ordnung im Ort. Die Tatsache, dass eine äußere Kraft eine Beschleunigung zur Folge hat, gilt natürlich auch in anderen Teilbereichen der Physik. Die Vorschrift *Kraft* = *Masse* × *Beschleunigung* gilt dann vielleicht nur noch in etwas abgewandelter Form, wie z.B. in der Speziellen Relativitätstheorie, wo die Masse geschwindigkeitsabhängig wird.

b) Das Verfahren der Variablentrennung ist bei Differentialgleichungen angebracht, die sich in die Form $g(y)\, y'(x) = f(x)$ bringen lassen, denn dann führt die Integration über x auf

$$\int \mathrm{d}x\, g(y)\, y'(x) = \int \mathrm{d}y\, g(y) = \int \mathrm{d}x\, f(x) + C,$$

woraus dann implizit die Funktion $y(x)$ bestimmt werden kann.

c) Wenn die Bewegung einer Punktmasse in Höhen stattfindet, die sehr klein gegenüber dem Erdradius sind, ist die Schwerkraft in sehr guter Näherung durch die konstante Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ gegeben, denn dann kann die Abnahme der Erdbeschleunigung mit zunehmender Höhe getrost vernachlässigt werden.