Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I
6. Übungsblatt

Abgabe bis zum 28.11.19, 9:15 Uhr

Aufgabe 1 ($3 \cdot 2$ Punkte)**.** Bestimmen Sie Basen folgender Untervektorräume:

(a) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid x_1 - x_2 = 0\}$.

(b) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n \mid 2x_1 + x_2 = 0\}$.

(c) $\ker \partial$, wobei für einen beliebigen Körper K die Abbildung $\partial\colon \operatorname{Abb}(\{0, \ldots, n+1\}, K) \to \operatorname{Abb}(\{0, \ldots, n\}, K)$ wie auf Blatt 5 durch

$$\partial(f)(i) = (i+1) \cdot f(i+1)$$

definiert ist.

Aufgabe 2 ($4{\cdot}1,5$ Punkte)**.** Es sei K ein Körper und V_1, V_2 Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Wir betrachten die Abbildung $\varphi\colon V_1 \to (V_1 + V_2)/V_2$ definiert durch

$$\varphi\colon v_1 \longmapsto v_1 + V_2.$$

Zeigen Sie:

(a) φ ist linear.

(b) φ ist surjektiv.

(c) $\ker \varphi = V_1 \cap V_2$.

(d) $V_1/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1 + V_2)/V_2$.

Aufgabe 3 ($1+1+4$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit Basis $(v_i)_{i \in I}$. Sei ferner $J \subset I$ eine Teilmenge, $U = \operatorname{Lin}((v_j)_{j \in J})$ und $W = \operatorname{Lin}((v_i)_{i \in I \smallsetminus J})$. Zeigen Sie:

(a) $U + W = V$.

(b) $U \cap W = \{0\}$.

(c) $(v_i + U)_{i \in I \smallsetminus J}$ ist eine Basis von V/U.

Aufgabe 4 ($1+2+3$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit Basis $(v_i)_{i \in I}$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $i \in I$ existiert genau ein $v_i^* \in V^*$ derart, dass

$$v_i^*(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

(b) Die Familie $(v_i^*)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.

(c) Ist I nicht endlich, so ist $(v_i^*)_{i \in I}$ keine Basis von V^*.