Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 2
Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 20. November

Fixiere ein Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$. Sie können bei jeder Aufgabe die Ergebnisse der vorherigen nutzen, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben.
Sie können 16 Punkte + 3 Bonuspunkte erreichen.

6. Aufgabe: (2+2+1+2+1+2=10 Punkte)

(a) Sei M eine abzählbare Menge und sei $a_m \in \mathbb{C}$ für jedes $m \in M$. Wähle eine beliebige Abzählung, also eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N}_0 \to M$. Wir nennen die Reihe $\sum_{m\in M} a_m$ absolut konvergent, falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}|$ konvergiert, und definieren dann

$$\sum_{m\in M} a_m := \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} \ .$$

Zeigen Sie: Die Definition von absoluter Konvergenz und der Wert der Reihe hängen nicht ab von der Wahl von φ.

(b) Fixiere die Grundmasche $\mathcal{F} = \{s\omega_1 + t\omega_2 \mid 0 \le s,t \le 1\}$ des Gitters Γ mit Volumen $v = \mathrm{vol}(\mathcal{F})$ und Durchmesser $\delta = \max\{|z-w| \mid z,w \in \mathcal{F}\}$. Für reelles $r > 0$ sei

$$A_r(\Gamma) := \#\{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| \le r\} \ .$$

Zeigen Sie für $r > \delta$ die Ungleichungen $\pi(r-\delta)^2 \le v \cdot A_r(\Gamma) \le \pi(r+\delta)^2$.

(c) Es gibt ein reelles $C > 0$ sodass $A_{n+1}(\Gamma) - A_n(\Gamma) \le C \cdot n$ für alle ganzen $n \ge 1$.

(d) Für festes reelles $\alpha > 2$ und ganze $n \ge 1$ gilt

$$S_n := \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ n<|\gamma|\le n+1}} |\gamma|^{-\alpha} < Cn^{1-\alpha} \ .$$

(e) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ konvergiert. Hinweis: Integralkriterium.

(f) Folgern Sie aus (a) und (e): Für ganze $k \ge 3$ konvergiert die Reihe $G_k = \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma} \gamma^{-k}$ absolut. Sie ist Null für ungerade k.

7. Aufgabe: (2+1+1+1 = 5 Punkte)

(a) Sei $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma$ ein Kompaktum. Dann gibt es eine reelle Konstante $C > 0$ sodass für $0 \neq \gamma \in \Gamma$ und $z \in K$ gilt:

$$\left| \frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right| \leq C \cdot |\gamma|^{-3} \ .$$

(b) Die folgende Reihe ist kompakt absolut konvergent für $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ und definiert eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$:

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \gamma \in \Gamma} \left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right] \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 6.

(c) p' ist eine elliptische Funktion zu Γ mit dreifachen Polstellen in jedem $\gamma \in \Gamma$ und nirgendwo sonst. Hinweis: Hauptsatz von Weierstraß über normale Konvergenz.

(d) p ist elliptisch und identisch zur Weierstraß-$\wp$-Funktion aus der Vorlesung. Hinweis: Aufgabe 5 angewandt auf p' und $\wp'$.

8. Aufgabe: (1+1+2=4 Punkte) Sei $f(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2}$. Zeigen Sie:

(a) Die meromorphe Funktion f hat in Null eine hebbare Singularität.

(b) Für $k \geq 1$ ist die k-te Ableitung von f in einer Umgebung von Null

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k (k+1)! \sum_{0 \neq \gamma \in \Gamma} \frac{1}{(z-\gamma)^{k+2}} \ .$$

Hinweis: Hauptsatz von Weierstraß über normale Konvergenz und Aufgabe 7.

(c) $\wp$ lässt sich um Null als Laurent-Reihe entwickeln:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2} \cdot z^{2k}$$

mit Konvergenzbereich $0 < |z| < \min\limits_{0 \neq \gamma \in \Gamma} |\gamma|$ und G_k wie in Aufgabe 6.