Aufgabe 11.1

Wir ändern das Koordinatensystem derart, dass der Ursprung nach p verschoben wird. Eine Koordinatentranslation ändert nichts an $\operatorname{dist}(x, y)$.

$$\frac{1}{r} \sup\{\operatorname{dist}(x, p + T_p M) : x \in M \cap B_r(p)\} \to \frac{1}{r} \sup\{\operatorname{dist}(x, 0 + T_0 M) : x \in M \cap B_r(0)\}$$

Wähle gemäß Satz 5.2(iii) eine offene Umgebung Ω von $0 \in M$ (nach der Koordinatentranslation), eine offene Umgebung $U \in \mathbb{R}^m$ und ein $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ derart, dass $\operatorname{rg} D\varphi(u) = k \forall u \in U$ und $\varphi U \to M \cap \Omega$ ein Homöomorphismus ist. O.b.d.A. können wir $\varphi(0) = 0$ fordern. Nun gilt nach Satz 5.6 $T_0 M = \operatorname{im} D\varphi(0)$. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \sup\{\operatorname{dist}(x, T_0 M) : x \in M \cap B_r(0)\} &= \frac{1}{r} \sup\{\operatorname{dist}(x, \operatorname{im} D\varphi(0)) : x \in M, |x| < r\} \\ &= \frac{1}{r} \sup\{\inf_{y \in \mathbb{R}^n} |x - D\varphi(0)y| : x \in M, |x| < r\}.\end{aligned}$$

Wegen $\varphi(x) - \varphi(0) = D\varphi(0)x + o(|x|)$ folgern wir weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r} \sup\{\inf_{y \in \mathbb{R}^n} |x - \varphi(y) - \varphi(0) - o(|x|)| : x \in M, |x| < r\} \\ &\leq \frac{1}{r} \sup\{|x - \varphi(\varphi^{-1}(x)) - 0 - o(|x|)| : x \in M, |x| < r\} \\ &\leq \frac{1}{r} \sup\{o(|x|) : x \in M, |x| < r\} \\ &\leq \frac{1}{r} o(r) \\ &\xrightarrow{r \searrow 0} 0 \end{aligned}$$

nach Definition von $o(r)$.

Aufgabe 11.2

(a) Behauptung $\varphi\colon U \to M;\ x \mapsto (x, g(x))$ ist eine Parametrisierung gemäß Satz 5.2(iii).

Beweis. Nach Definition des Graphen ist $M = \operatorname{im} \varphi$. Wegen $(x, g(x)) = (y, g(y)) \implies x = y$ handelt es sich um eine bijektive Abbildung. Stetigkeit und Differenzierbarkeit folgen sofort aus Stetigkeit und Differenzierbarkeit von g auf U. Für die Umkehrabbildung, die ja nur noch eine Projektionsabbildung ist, sind beide Eigenschaften trivial. Es gilt weiter

$$D\varphi(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1 \\ \partial_1 g & \cdots & & \partial_n g \end{pmatrix} = (\mathbb{1}_n | \nabla g(p))^T$$

Wegen $\operatorname{rg} \mathbb{1}_n = n$ und $\operatorname{rg} D\varphi \leq n$ folgt $\operatorname{rg} D\varphi = n$. Damit sind alle Eigenschaften einer Karte nachgewiesen. □

Für $p = \varphi(x) = (x, g(x))$ folgern wir mit Satz 5.6

$$\begin{aligned} T_p(M) &= \operatorname{im} D\varphi(x) \\ &= \{D\varphi(x) \cdot a : a \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \nabla g \cdot a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^n \right\}. \end{aligned}$$

Natürlich könnte man für den Normalraum jetzt einfach das orthogonale Komplement berechnen. Schöner ist es aber, wenn man die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto x_{n+1} - g(x_1, \ldots, x_n)$ betrachtet. Diese ist offensichtlich differenzierbar und es gilt $M = f^{-1}(\{0\})$ sowie $\nabla f = \begin{pmatrix} -\nabla g \\ 1 \end{pmatrix}$. Offensichtlich ist damit $\operatorname{rg} Df = 1$ und f genügt den Forderungen von Satz 5.2. Mit Satz 5.6(ii) folgern wir dann

$$N_p(M) = \operatorname{span}\langle \begin{pmatrix} -\nabla g \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Ergänze v zu einer Orthogonalbasis $(v, v^{(2)}, \ldots v^{(n)}$. Bilde dann die $n \times n$-Matrix $V = (v|v^{(2)}| \ldots v^{(n)})$, deren Spalten gerade den Basisvektoren entsprechen. Da es sich um eine Orthogonalbasis handelt, erhalten wir als Produkt eine Diagonalmatrix.

$$V^T V = \operatorname{diag}(v^T v, (v^{(2)})^T v^{(2)}, \ldots, (v^{(n)})^T v^{(n)}) = \operatorname{diag}(|v|^2, |v^{(2)}|^2, \ldots, |v^{(n)}|^2)$$

Mit

$$D = \operatorname{diag}(|v|^{-2}, |v^{(2)}|^{-2}, \ldots, |v^{(n)}|^{-2})$$

erhalten wir $V^T V D = \mathbb{1}_n$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{1}_n + vv^T) &= \det(V^T(\mathbb{1}_n + vv^T)VD) \\ &= \det(V^T \mathbb{1}_n VD + (V^T v)(v^T V)D) \end{aligned}$$

Aufgrund der Orthogonalität gilt $V^T v = (v^T v, 0, \ldots, 0)^T$

$$\begin{aligned} &= \det(\mathbb{1}_n + (v^T v, 0, \ldots, 0)^T \cdot (v^T v, 0, \ldots, 0) \cdot D) \\ &= \det(\operatorname{diag}(1, \ldots, 1) + \operatorname{diag}(|v|^4, 0, \ldots, 0) \cdot \operatorname{diag}(|v|^{-2}, \ldots)) \\ &= \det(\operatorname{diag}(1 + |v|^2, 1, \ldots, 1)) \\ &= 1 + |v|^2 \end{aligned}$$

Wir erhalten daher

$$\det(D^t\varphi(x) D\varphi(x)) = \det(\mathbb{1}_n + \nabla g(x) \cdot (\nabla g(x))^T) = 1 + |\nabla g(x)|^2.$$

Wir haben bereits in Teilaufgabe (a) bewiesen, dass durch φ eine Karte gegeben ist. Nach Definition 5.13 ist daher

$$\begin{aligned} \int_M f \,\mathrm{d}\mathscr{H}^n &= \int_U f(\varphi(x)) \sqrt{\det(D^t\varphi(x) D\varphi(x))} \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n(x) \\ &= \int_U f(x, g(x)) \sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2} \,\mathrm{d}\mathscr{L}^n . \end{aligned}$$

(c) Wir erhalten nach der Formel aus Teilaufgabe (b)

$$\begin{aligned}\int_M F\cdot\nu \,\mathrm{d}\mathscr{H}^2 &= \int_U F(x,g(x))\cdot\begin{pmatrix}-\partial_1 g(x)\\ -\partial_2 g(x)\\ 1\end{pmatrix}\cdot\frac{\sqrt{1+|\nabla g(x)|^2}}{\sqrt{1+|\nabla g(x)|^2}}\,\mathrm{d}\mathscr{L}^2(x)\\ &= \int_U -x_1\frac{\partial 3(1-x_1^2-x_2^2)}{\partial x_1}\,\mathrm{d}\mathscr{L}^2(x)\\ &= \int_U 6x_1^2\,\mathrm{d}\mathscr{L}^2(x)\end{aligned}$$

Wir verwenden ebene Polarkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned}&= 6\cdot\int_0^1\int_0^{2\pi}(r\sin(\varphi))^2 r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &= 6\cdot\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)\end{aligned}$$

Aufgrund der Periodizität gilt $\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. Nutzen wir nun noch $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1$, so ergibt sich $\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi = \pi$.

$$\begin{aligned}&= 6\frac{1}{4}\cdot\pi\\ &= \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 11.3

(a) Es gilt $\mathbb{S}^{m-1} = f^{-1}(0)$ für $f=\sum_{i=1}^m x_i^2 - 1$. Der Normalraum $N_x(\mathbb{S}^{m-1})$ ist nach Satz 5.6(ii) gegegeben durch $\operatorname{span}(\nabla f(x)) = \operatorname{span}(2x) = \operatorname{span}(x)$. Daher gilt für die äußere Normale $\nu(x) = ax, a\in\mathbb{R}$ und $1 = |ax| = |a||x| = |a| \implies a=\pm 1$. Wegen $|x-tx| = (1-t)|x| = (1-t) < 1 \forall t\in(0,\epsilon)$ und weil $(x-t\nu(x)) = (x-tx)$ nicht im Innern der Einheitskugel $\{x\in\mathbb{R}^m | |x|\le 1\}$ liegen darf, erhalten wir $\nu(x) = x$ und damit $\nu = \mathrm{id}$.

(b) Mit dem Satz von Gauss folgt

$$\int_{\partial\Omega} x\cdot\nu(x)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{m-1} = \int_\Omega \operatorname{div} x\,\mathrm{d}\mathscr{L}^m(x) = \sum_{i=1}^m \partial_i x_i\int_\Omega \mathrm{d}\mathscr{L}^m(x) = m\mathscr{L}^m(\Omega)$$

Wegen $x \in \mathbb{S}^{m-1} \Leftrightarrow |x| = 1$ folgern wir daraus

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^{m-1}(\mathbb{S}^{m-1}) &= \int_{\mathbb{S}^{m-1}} 1 \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{m-1}(x) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{m-1}} |x|^2 \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{m-1}(x) \\
&= \int_{\mathbb{S}^{m-1}} x \cdot x \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{m-1}(x) \\
&= \int_{\partial B} x \cdot \nu(x) \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{m-1}(x) \\
&= m\mathscr{L}^m(B)
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{S}^2} x_1^4 \,\mathrm{d}\mathscr{H}^2(x) &= \int_{\mathbb{S}^2} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}\mathscr{H}^2(x) \\
&= \int_{\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}} \operatorname{div} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}\mathscr{L}^3(x)
\end{aligned}$$

Es gilt $\partial_1 x_1^3 = 3x_1^2$

$$= 3 \int_{\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}} x_1^2 \,\mathrm{d}\mathscr{L}^3(x)$$

Wir benutzen Kugelkoordinaten

$$= 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (r \sin(\varphi) \sin(\theta))^2 r^2 \sin(\theta) \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r$$

Wir wenden den Satz von Fubini an und folgern weiter

$$= 3 \int_0^1 r^4 \,\mathrm{d}r \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) \,\mathrm{d}\theta$$

Wie oben begründet gilt $\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi = \pi$

$$= \frac{3\pi}{5} \cdot \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) \,\mathrm{d}\theta$$

Mit partieller Integration folgt

$$= \frac{3\pi}{5} \cdot \left[- \sin^2(\varphi) \cos(\varphi) \right]_0^{\pi} + \frac{3\pi}{5} \int_0^{\pi} 2 \cos^2(\varphi) \sin(\varphi) \,\mathrm{d}\varphi$$

Wir substituieren $u = \cos(\varphi)$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{3\pi}{5} \cdot \int_{-1}^{1} 2u^2 \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{3\pi}{5} \left[\frac{2u^3}{3}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{4\pi}{5}
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 11.1

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \partial_\nu \varphi \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} &= \int_{\partial\Omega} \nabla\varphi \cdot \nu \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla\varphi) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} \operatorname{div} \Delta\varphi \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \varphi\partial_\nu \psi \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} &= \int_{\partial\Omega} \varphi\nabla\psi \cdot \nu \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi\nabla\psi) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\varphi \cdot \partial_i\psi) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \varphi \cdot \partial_i\partial_i\psi + \partial\varphi \cdot \partial\psi \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} \varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} \partial_i(\partial_i\psi) + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} \varphi\Delta\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \varphi\partial_\nu\psi - \psi\partial_\nu\varphi \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} &= \int_{\partial\Omega} \varphi\partial_\nu\psi \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} - \int_{\partial\Omega} \psi\partial_\nu\varphi \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1} \\
&\overset{\text{(b)}}{=} \int_{\Omega} \varphi\Delta\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega} \psi\Delta\varphi + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} \varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$