Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2021/22

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. K. Hübner

Blatt 11
Abgabetermin: Freitag, 28.1.2022, 09:30 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte). Sei k ein Körper und T eine Unbestimmte. Wir setzen $U = \frac{1}{T}$ und

$$K = k(T) = k(U).$$

(a) Sei v die zu dem Primideal $(U) \subset k[U]$ gehörige Exponentialbewertung auf K. Zeigen Sie, dass v gerade die Gradbewertung v_∞ aus der Vorlesung ist, d. h. für $f, g \in k[T] \smallsetminus \{0\}$ gilt

$$v\left(\frac{f}{g}\right) = \deg_T g - \deg_T f.$$

(b) Sei $p \in k[U]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n mit $(p) \neq (U)$. Welchem Primideal in $k[T]$ entspricht die zu (p) gehörige Exponentialbewertung $v_{(p)}$?

Aufgabe 2 (6 Punkte). Sei K ein Körper, $v_1, \ldots, v_n$ diskrete Exponentialbewertungen. Zeigen Sie: Der Ring

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{v_i} \subset K$$

ist ein Hauptidealring mit endlich vielen Primidealen.

Hinweis. Benutzen Sie den schwachen Approximationssatz.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{Q}$ mit

$$|x-1|_2 < \frac{1}{3}, \quad |x-2|_3 < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |x-3|_\infty < 1.$$

Aufgabe 4 (8 Punkte). Es sei k ein Körper mit einer nicht-archimedischen Bewertung $|\ |$, und sei $K = k(T)$. Für $f = a_nT^n + \ldots + a_0 \in k[T]$ setzen wir

$$|f| \stackrel{\text{def}}{=} \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|).$$

Zeigen Sie, dass dies eine Bewertung auf K induziert, welche die auf k gegebene Bewertung fortsetzt.

Hinweis. Erinnern Sie sich an den Satz von Gauß aus der Algebra-Vorlesung.