Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Darauf operiert $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und insbesondere die Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ durch Möbius-Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \langle \tau \rangle = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \, .$$

Sei $[\Lambda, k]$ der Vektorraum der Modulformen vom Gewicht k zur Kongruenzgruppe $\Lambda \subseteq \Gamma$. Die Variable τ ist immer auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ definiert. Die besten vier Aufgaben werden gewertet. Sollpunktzahl 16 Punkte, weitere Punkte zählen als Bonus.

29. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie ein explizites Vertretersystem für die Quotientengruppe $\overline{\Gamma}/\overline{\Gamma}[3]$.

(b) Skizzieren Sie einen Fundamentalbereich zu $\Gamma[3]$.

(c) Bestimmen Sie die Spitzen zu $\Gamma[3]$ und ihre Breite.

Lösung: Für den Körper mit drei Elementen schreiben wir $\mathbb{F}_3 = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

(a) Es gibt es eine exakte Sequenz $1 \to \overline{\Gamma}[3] \to \overline{\Gamma} \to \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_3) \to 0$. Die gesuchte Quotientengruppe ist also isomorph zu $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\{\pm I_2\}$, hat also $(3^2-1)(3^2-3)/(2^2) = 12$ Elemente. Durch systematisches Aufzählen kann man diese alle explizit angeben. Wir schreiben $\mathbb{F}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{-1}\}$ Die Elemente von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_3)$ sind also

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{-1} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{-1} & \overline{1} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{-1} \\ \overline{0} & \overline{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{1} \\ \overline{0} & \overline{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{0} \\ \overline{-1} & \overline{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{-1} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{-1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{-1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{-1} \\ \overline{1} & \overline{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{-1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{-1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{-1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{-1} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{-1} & \overline{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{1} \\ \overline{-1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{-1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{-1} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{-1} \\ \overline{-1} & \overline{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{-1} & \overline{-1} \\ \overline{-1} & \overline{1} \end{pmatrix} \, .
\end{gathered}$$

Modulo $\pm E_2$ entspricht die erste Zeile der zweiten, die dritte der vierten und die fünfte der sechsten. Der Quotient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_3)$ wird also repräsentiert von der ersten, dritten und fünften Zeile. Man nimmt jetzt die offensichtlichen Urbilder im Ring der ganzzahligen Matrizen $\mathrm{Mat}(2,\mathbb{Z})$, indem man einfach den Querstrich weglässt. Diese haben aber nicht notwendig Determinante Eins über $\mathbb{Z}$. Für die erste und dritte Zeile tritt dieses Problem nicht auf, bei der fünften aber hätte man immer Determinante -2. Man löst dieses Problem, indem man in der fünften Zeile den Eintrag $\overline{-1}$ durch $\overline{2}$ ersetzt. Man erhält ein gesuchtes Vertretersystem von $\overline{\Gamma}/\overline{\Gamma}[3]$ durch

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix},$$

Mit anderen Worten, das sind die Matrizen

$$E_2, T, T^{-1}, -T^{-1}ST^{-1}, TST, S, ST, ST^{-1}, TS, T^{-1}S, T^{-1}ST, TST^{-1}\ .$$

(b) Ein möglicher Fundamentalbereich ist dann $\mathcal{F}_3 = \bigcup_{M\in\overline{\Gamma}/\overline{\Gamma}[3]} M\mathcal{F}$. Hierbei durchläuft M z.B. die obigen Vertreter. Es ist also eine Vereinigung von 12 Fundamentalbereichen. (Skizze bitte selbst machen.) Die Grafik in Kapitel VI.1 im Buch "Funktionentheorie" von Freitag und Busam ist hier hilfreich, sie zeigt zehn der zwölf Teilbereiche.

(c) Die Spitzen erhält man, indem man die obigen zwölf Matrizen auf $i\infty$ anwendet. Γ operiert transitiv auf den Spitzen. Die Spitze $i\infty$ wird fixiert von T und T^{-1}, also gibt es $12/\#\langle T\rangle =$ 4 Spitzen. Explizit sind diese gegeben durch $i\infty$, $0 = S\langle i\infty\rangle$ und $1 = TS\langle i\infty\rangle$, und $-1 = T^{-1}S\langle i\infty\rangle$.

Jede Spitze hat Breite drei. Für $i\infty$ folgt das, weil $T^3 \in \Gamma[3]$, aber keine kleinere Potenz von T. Die anderen Spitzen kann man nach $i\infty$ konjuguieren. Da Hauptkongruenzgruppen Normalteiler sind, bleiben sie beim Konjugieren erhalten und daher ändert sich die Breite der Spitzen nicht.

30. Aufgabe: (2+2+2+2=8 Punkte) Für ein ganzes $N \geq 2$ sei $\omega_{(a,b)} = \frac{a}{N}\tau + \frac{b}{N} \in \frac{1}{N}W$ ein N-Teilungspunkt des Gitters $W = \mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$, der nicht selbst im Gitter liegt. Hier sind $0 \leq a, b < N$ ganze Zahlen. Wir dürfen annehmen dass $\mathrm{ggT}(a,b,N) = 1$, das bedeutet $(a,b) \in \mathcal{S}_N$. Für ein ganzes $k \geq 3$ definiere die Eisensteinreihe

$$G_{(a,b)}(\tau) = \sum_{\gamma\in W} (\omega_{(a,b)} + \gamma)^{-k}\ .$$

(a) Zeigen Sie für ungerades k und $N = 2$, dass $G_{(a,b)}(\tau)$ konstant Null ist.

Im Folgenden nehmen wir an k ist gerade oder $N > 3$. Zeigen Sie:

(b) $G_{(a,b)} \in [\Gamma[N], k]$ ist eine Modulform vom Gewicht k zur Kongruenzgruppe $\Gamma[N]$.

(c) Der Grenzwert $\lim\limits_{\tau\to i\infty} G_{(a,b)}(\tau)$ ist gleich Null genau dann wenn $a \neq 0$.

(d) Zeigen Sie, dass $G_{(a,b)}$ in genau einer Spitze nicht verschwindet.

Lösung: Sei $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ beliebig, dann gilt

$$\boxed{(G_{(a,b)}|_k M)(\tau) = G_{(a,b)M}(\tau)}$$

wegen folgender Rechnung analog zum Lemma in §9.9 im Skript

$$\begin{aligned}
(G_{(a,b)}|_k M)(\tau) &= (\gamma\tau+\delta)^{-k} G_{(a,b)}(M\langle\tau\rangle) \\
&= (\gamma\tau+\delta)^{-k} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (\frac{1}{N}(aM\langle\tau\rangle + b) + m + nM\langle\tau\rangle)^{-k} \\
&= (\gamma\tau+\delta)^{-k} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (\frac{1}{N}(a\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} + b) + m + n\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\tau)^{-k} \\
&= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (\frac{1}{N}((a\alpha+b\gamma)\tau + (a\beta+b\delta)) + (m\delta+n\beta+m\gamma\tau+n\alpha\tau))^{-k} = G_{(a,b)M}(\tau)\ .
\end{aligned}$$

Die Kongruenzgruppe $\Gamma[N]$ operiert trivial auf $\frac{1}{N}W$ modulo W nach Aufgabe 28, also ist $(a,b)M \equiv (a,b) \pmod W$ für $M \in \Gamma[N]$.

(a) Für $N = 2$ verwendet man die geboxte Formel mit $M = -E_2 \in \Gamma(2)$, dann erhält man

$$G_{(a,b)}(\tau) = (-1)^k G_{(a,b)}(\tau)\ .$$

Da k ungerade ist, folgt $G_{(a,b)} = 0$.

(b) Aus der geboxten Formel folgt $G_{(a,b)}|_k M = G_{(a,b)}$. Man zeigt wie bei gewöhnlichen Eisensteinreihen, dass $G_{(a,b)}$ absolut kompakt konvergiert für $k \geq 3$ und dass diese Funktion für $\tau \to \infty$ beschränkt bleibt. Also ist $G_{(a,b)}$ eine Modulform zu $\Gamma(N)$.

(c) Wir benutzen

$$\begin{aligned}
G_{(a,b)}(\tau) &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (\frac{1}{N}(a\tau+b) + m + n\tau)^{-k} \\
&= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2, n\neq 0} (\tfrac{1}{N}(a\tau+b) + m + n\tau)^{-k} + \sum_{m\in\mathbb{Z}} (\tfrac{1}{N}(a\tau+b) + m)^{-k}\ .
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz (Lebesgue) geht die linke Summe gegen Null für $\tau \to i\infty$. [Voraussetzungen prüfen!] Wenn $a \neq 0$, dann geht nach dem gleichen Argument auch in der rechten Summe jeder Summand gegen Null, alsos auch die Summe. Wenn $a = 0$, dann ist die rechte Summe unabhängig von τ und man erhält man die Reihe

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} (\frac{b}{N} + m)^{-k}$$

und es bleibt zu zeigen, dass deren Grenzwert nicht Null ist. Beachte, dass $N > 2$ oder k ungerade. Für gerade k ist die Aussage klar wegen Monotonie. Für ungerade $k \geq 3$ kann man die Reihe umordnen zu

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(bN+m)^{-k} + (bN-(m+1))^{-k}]\ .$$

Man beachte $(0,b) \in \mathcal{S}_N$, also ist $\frac{b}{N} \neq \frac{1}{2}$. Daher ist jeder Summand negativ (falls $\frac{b}{N} > \frac{1}{2}$) oder positiv (falls $\frac{b}{N} < \frac{1}{2}$). Der Grenzwert ist also ungleich Null wegen Monotonie.

(d) Wegen der geboxten Formel gilt für $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$

$$(\gamma\tau + \delta)^{-k} G_{(a,b)}(M \langle \tau \rangle) = G_{(a,b)M}(\tau) \ .$$

Wir nehmen daher ObdA an dass $a = 0$ und werden zeigen, dass die Eisensteinreihe in allen Spitzen verschwindet außer $i\infty$. In der Tat, für die Spitze $i\infty$ haben wir die Aussage in c) gezeigt, also sei jetzt $s \in \mathbb{Q}$ eine beliebige Spitze die nicht äquivalent ist zu $i\infty$. Fixiere ein $M \in \Gamma$ sodass $M \langle i\infty \rangle = s$ und setze $(a', b') = (a, b)M$. Dann ist s äquivalent zu $i\infty$ genau dann, wenn M ein Produkt ist einer rechten obere Dreiecksmatrix mit einer aus $\Gamma(N)$. Nach unserer Annahme ist das nicht der Fall, also ist der linke untere Matrixeintrag γ kein Vielfaches von N. Daraus folgt $a' = \gamma b \neq 0 \pmod N$ weil b teilerfremd ist zu N. [Wenn die Bedingung $0 < a' < N$ nicht erfüllt ist, wählen wir einen anderen Vertreter der Spitze.] Nach Definition von "verschwinden in s" bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{\tau \to i\infty} (G_{(a,b)})|_k M)(\tau) = \lim_{\tau \to i\infty} G_{(a',b')}(\tau)$$

verschwindet. Aber das folgt aus c) da $a' \neq 0$.

31. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei Λ eine Kongruenzgruppe. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}(\Lambda) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} [\Lambda, k]$ bildet mit der punktweisen Multiplikation einen Ring. Die Spitzenformen $\mathcal{A}_0(\Lambda) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} [\Lambda, k]_0$ bilden ein Ideal in diesem Ring.

(b) Sei $\Lambda = \Gamma[N]$ und $(M_i)_i$ ein Vertretersystem der Quotientengruppe $\Gamma/\Gamma[N]$. Die Norm definiert einen multiplikativen Homomorphismus

$$\mathcal{N} : \mathcal{A}(\Gamma[N]) \to \mathcal{A}(\Gamma) \quad , \quad f \mapsto \mathcal{N}(f) = \prod_i (f \mid_k M_i) \ .$$

Lösung:

(a) Es genügt zu zeigen, dass das Produkt zweier Modulformen f und g vom Gewicht k_1 bzw. k_2 zur Gruppe Λ wieder eine Modulform vom Gewicht $k_1 + k_2$ zu Λ ist.

- Produkte holomorpher Funktionen sind holomorph.
- Beschränktheit für $z \to \infty$ bleibt für Produkte erhalten. Wenn $|f(z)| \leq C_1$ und $|g(z)| \leq C_2$ für genügend große $\mathrm{Im}(z)$, dann gilt auch $|fg(z)| \leq C_1 C_2$ für diese z.
- Für $M \in \Lambda$ gilt $f(M \langle M \rangle z) g(M \langle z \rangle) = (cz + d)^{k_1} f(z)(cz + d)^{k_2} g(z) = (cz + d)^{k_1 + k_2} (fg)(z)$.

(b) **Die Aufgabe war falsch gestellt. Hier sollte das Gewicht fixiert werden, also die Norm nur auf Modulformen von festem Gewicht k angewandt werden.**
Sei $n = \#\Gamma/\Gamma(N)$. Es ist zu zeigen, dass für eine Modulform $f \in [\Gamma(N), k]$ die Norm $\mathcal{N}(f) \in [\Gamma, kn]$ eine Modulform zu Γ vom Gewicht nk ist. Schritt 1: Weil $\Gamma[N]$ ein Normalteiler ist, ist jeder Faktor $f \mid_k M_i$ von $\mathcal{N}(f)$ eine Modulform zu $\Gamma(N)$ mit Gewicht k ist. In der Tat: Sei $\gamma \in \Gamma(N)$ beliebig. Dann ist Dass $\mathcal{N}(f)$ holomorph ist, ist klar. Beschränktheit in den Spitzen bedeutet, dass $f \mid_k M$ für alle $M \in \Gamma$ für $\tau \to i\infty$ beschränkt ist. Insbesondere gilt das auch für $f \mid_k M_i M$. Sei nun $\gamma \in \Gamma(N)$ beliebig, dann gilt

$$(f \mid M_i) \mid_k \gamma = f \mid_k (M_i \gamma) = f \mid_k M_i \gamma M_i^{-1}) M_i = f \mid_k M_i$$

weil $M_i \gamma M_i^{-1} \in \Gamma(N)$. Damit ist $f\,|_k\, M_i \in [\Gamma(N), k]$ eine Modulform zu $\Gamma(N)$. Nach (a) ist die Norm also eine wohldefinierte Abbildung von $[\Gamma(N), k]$ nach $[\Gamma(N), kn]$. Schritt 2: Sei nun $\gamma \in \Gamma$ beliebig. Da $\Gamma[N]$ ein Normalteiler ist, gilt $M_i\gamma = \gamma_i M_{j(i)}$ für gewisse $\gamma_i in \Gamma[N]$ und eine Bijektion $j : I \to I$ der Indizes $i \in I$. In der Tat, $x \mapsto x\gamma$ definiert eine Bijektion von Γ nach Γ. Damit muss auch j eine Bijektion sein, weil sonst die Umkehrabbildung nicht mehr alle Nebenklassen trifft. Setze $g := \mathcal{N}(f)$, dann ist klar, dass g holomorph ist und beschränkt in den Spitzen. Außerdem gilt

$$g\,|_{nk}\,\gamma = \prod_i (f\,|_k\, M_i)\,|_k\,\gamma = \prod_i (f\,|_k\,(M_i\gamma) = \prod_i (f\,|_k\,(\gamma_i M_{j(i)}) = \prod_i f\,|_k\, M_{j(i)} = g\ ,$$

daher ist g eine Spitzenform zum Gewicht nk.

32. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Seien $f, g \in [\Lambda, k]$ Modulformen vom Gewicht k zu einer Kongruenzgruppe $\Lambda \subseteq \Gamma$. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $i : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\ ,\ z \mapsto f(z)\overline{g(z)}y^k$ ist invariant unter Möbius-Transformationen im Sinne von $i(z) = i(M\langle z\rangle)$ für $z \in \mathbb{H}$ und $M \in \Lambda$.

(b) Sei $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich zu Λ. Wenn f oder g eine Spitzenform ist, dann konvergiert das Integral

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2}\ .$$

(c) Dies definiert ein sesquilineares Skalarprodukt auf dem Raum $[\Lambda, k]_0$ der Spitzenformen, welches unabhängig von der Wahl des Fundamentalbereichs $\mathcal{F}$ ist.

Hier gilt wie üblich $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

Das sind Standard-Aussagen zum Petersson-Skalarprodukt, gut dokumentiert in der Literatur. Siehe z.B. Koecher-Krieg: “Modulformen” KApitel IV, Abschnitt 3.2-3.3.

33. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Für ganzes $N \geq 3$ sei $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}$ ein Charakter mit $\chi(-1) = 1$. Sei $\wp$ die Weierstraß-Funktion zum Gitter $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$. Für $(a, b) \in \mathcal{S}_N$ sei $e_{a,b}(\tau) = \wp(\omega_{(a,b)})$ mit dem N-Teilungspunkt $\omega_{(a,b)} = \frac{a}{N}\tau + \frac{b}{N}$ und definiere damit

$$f^\chi_{(a,b)}(\tau) = \frac{1}{2N^2} \sum_{\mu\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \chi(\mu)e_{(\mu a,\mu b)}\ .$$

(a) Zeigen Sie für alle $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ und $\nu \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$:

$$f^\chi_{(\nu a,\nu b)} f(M\langle\tau\rangle) = \chi(\nu)^{-1}(\gamma\tau + \delta)^2 f^\chi_{(a,b)M}(\tau)\ .$$

(b) Sei F^χ der Vektorraum aufgespannt von allen $f^\chi_{(a,b)}$. Zeigen Sie: $F^\chi \cap F^{\chi'} = \{0\}$ für $\chi \neq \chi'$.

(c) Für den trivialen Charakter $\chi = 1$ gilt $\dim(F^1) \geq N \prod_{p|N}(1 + p^{-1}) - 1$.

Hinweis: Siehe Skript Abschnitt 9.12.

34. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ ein Dirichlet-Charakter, durch Null fortgesetzt zu einer Abbildung $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Die zugehörige Dirichlet-Reihe ist

$$L(s, \chi) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \ .$$

Zeigen Sie:

(a) Die Dirichletreihe konvergiert kompakt absolut im Gebiet $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

(b) Es gilt die Produktentwicklung $L(s, \chi) = \prod_{\mathrm{ggT}(p,N)=1} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$. Dabei läuft das Produkt über alle Primzahlen die teilerfremd sind zu N.

Hinweis zu a): Integralkriterium.

Frohe Weihnachten!