Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 6

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 8. Juni 2020
Bitte schicken Sie maximal 3 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. Erhaltungsgröße beim Kepler-Problem

Die Lagrange-Funktion des Kepler-Problems ist durch

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + \frac{k}{r}$$

gegeben, wobei $r \equiv |\vec{x}|$ und k eine positive Konstante ist.

a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}^2}{\mathrm{d}t} = -2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

gilt, wobei $\vec{p}$ der zu $\vec{x}$ konjugierte Impuls ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{r} = m\dot{r}$$

gilt.

c) Betrachten Sie die infinitesimale räumliche Verschiebung

$$\delta x_i^{(j)} = \frac{1}{2}\left[2p_i x_j - x_i p_j - \delta_{ij}\,(\vec{x}\cdot\vec{p})\right]\delta a, \tag{I}$$

wobei δa konstant ist, die Indizes i und j mit $1 \leq i, j \leq 3$ die i-te bzw. j-te Komponente bezeichnen und δ_{ij} das Kronecker-Delta ist. Wie lautet die zugehörige Transformation $\delta\dot{x}_i^{(j)} = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,\delta x_i^{(j)}$?

d) Zeigen Sie, dass die Änderung der Lagrange-Funktion

$$\delta L^{(j)} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\,\delta x_i^{(j)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\,\delta\dot{x}_i^{(j)}\right)$$

aufgrund der Transformation (I) durch die totale Zeitableitung einer Funktion $\delta f(x_j)$ gegeben ist. Machen Sie dabei Gebrauch von den Lagrange-Gleichungen 2. Art sowie den Relationen bzw. Ergebnissen aus den Aufgabenteilen a) bis c), und zeigen Sie, dass $\delta f(x_j) = -mVx_j\,\delta a$ ist.*

e) Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die zu (I) gehörige Erhaltungsgröße. Zeigen Sie damit, dass die vektorielle Größe

$$\vec{A} = \vec{p}\times\vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{x}$$

mit dem Drehimpuls $\vec{L} \equiv \vec{x}\times\vec{p}$ erhalten ist.† Diese ist als *Laplace-Runge-Lenz-Vektor* bekannt. Dieser konstante Vektor zeigt in Richtung des Perihels der Bahn und belegt damit, dass das Perihel ortsfest ist.

---

* *Hinweis:* Benutzen Sie auch das Euler-Theorem für homogene Funktionen, $x\,\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = k\,f(x)$, wenn $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$.

† *Hinweis:* Hier ist es nützlich zu verwenden, dass $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

2. *Zwillingsparadoxon*

Am Neujahrstag des Jahres 2200 startet die Astronautin Alice von der Erde und fliegt mit konstanten 60 % der Lichtgeschwindigkeit zur nächsten interstellaren Raumstation, welche genau 3 Lichtjahre (gemessen im Ruhesystem der Erde) von der Erde entfernt ist. Nachdem die Astronautin die Raumstation erreicht hat, kehrt sie sofort um und fliegt mit derselben Geschwindigkeit zurück zur Erde. Sie erreicht diese am Neujahrstag des Jahres 2210 (der Erdzeit). Die Astronautin hat einen Zwillingsbruder Bob, der auf der Erde verblieben ist.

a) Um wie viele Jahre ist Alice während der Reise gealtert?[‡]

b) Jedes Jahr schickt Bob von der Erde aus ein Lichtsignal zu Alice und umgekehrt, wobei Alice und Bob die Dauer eines Jahres jeweils in ihren eigenen Inertialsystemen bestimmen. Zeichnen Sie Raum-Zeit-Diagramme für beide Fälle, und geben Sie an, wie viele Jahre jeweils zwischen den Signalen für den empfangenden Zwilling vergehen.

c) Worin besteht also die Auflösung des vermeintlichen Paradoxons, dass die Zwillinge den jeweils anderen langsamer altern sehen sollten?

3. *Kanonische Transformationen*

In Erweiterung zu der bekannten erzeugenden Funktion $\Phi \equiv \Phi_1(q_1, \ldots, q_f, Q_1, \ldots, Q_f, t)$ aus der Vorlesung lassen sich drei weitere Typen von erzeugenden Funktionen finden,

$$\Phi_2(q_1, \ldots, q_f, P_1, \ldots, P_f, t) = \Phi_1 - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i} Q_i,$$

$$\Phi_3(p_1, \ldots, p_f, Q_1, \ldots, Q_f, t) = \Phi_1 - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} q_i,$$

$$\Phi_4(p_1, \ldots, p_f, P_1, \ldots, P_f, t) = \Phi_1 - \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} q_i + \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i} Q_i \right).$$

a) Zeigen Sie für den Fall von Φ_3, dass durch Kenntnis der erzeugenden Funktion, der Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ und der Impulse $p_1, \ldots, p_f$ sowohl die Transformation auf neue gestrichene Koordinaten $Q_1, \ldots, Q_f$ und Impulse $P_1, \ldots, P_f$ als auch die transformierte Hamilton-Funktion K vollständig bestimmt sind. Betrachten Sie hierfür die Differentiale von Φ_1 und Φ_3, und benutzen Sie die in der Vorlesung gezeigten Eigenschaften von Φ_1 sowie die der transformierten Hamilton-Funktion.

b) Zeigen Sie analog zur Vorgehensweise im Skript, dass Φ_3 tatsächlich eine kanonische Transformation vermittelt.

4. *Poisson-Klammern beim Drehimpuls*

Die Poisson-Klammer wurde in der Vorlesung definiert als

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

wobei $f(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$ und $g(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$ zwei beliebige Funktionen sind, die von den f verallgemeinerten Koordinaten q_i und deren konjugierten Impulsen p_i abhängen.

[‡] *Hinweis:* Die Beschleunigungs- und Bremsphasen des Raumschiffes sowie die Bewegung der Erde um die Sonne sollen vernachlässigt werden.

a) Berechnen Sie die elementaren Poisson-Klammern $\{q_i, q_j\}$, $\{p_i, p_j\}$ und $\{q_i, p_j\}$, wobei es sich nun und im Folgenden bei q_i und p_i mit $1 \leq i, j \leq 3$ um *kartesische* Koordinaten und deren konjugierte Impulse handelt.

b) Zeigen Sie, dass für den Drehimpuls $L_i = \varepsilon_{ijk} q_j p_k$ die folgenden Relationen gelten,

$$\{L_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \qquad \{L_i, q_j\} = \varepsilon_{ijk} q_k, \qquad \{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \qquad \{L_i, \vec{L}^2\} = 0.$$

Hierbei ist ε_{ijk} das Levi-Civita-Symbol.

c) Ein Teilchen sei durch die Hamilton-Funktion $H = T(p_1, p_2, p_3) + V(q_1, q_2, q_3)$ beschrieben. Berechnen Sie die totale Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + \{\vec{L}, H\}.$$

Wann ist $\vec{L}$ also eine Erhaltungsgröße?

5. *Verständnisfragen*

a) Geben Sie in eigenen Worten die Aussagen der Noether-Theoreme wieder.

b) Beschreiben Sie die wichtigsten Ideen hinter der Herleitung der Lorentz-Transformation. Auf welche Weise behebt diese Transformation den Widerspruch zwischen klassischer Mechanik und Elektrodynamik?

c) Was bedeutet die Transformation eines mechanischen Systems „auf Ruhe“? Warum und mit welcher erzeugenden Funktion ist sie überhaupt möglich?

d) Was besagt das Liouville-Theorem?

Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg — Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Sommersemester 2020 — Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 6: Lösungen

1. *Erhaltungsgröße beim Kepler-Problem*

a) Die Energieerhaltung besagt, dass

$$\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) = \text{const.}$$

ist. Die Zeitableitung dieser Gleichung besagt demnach, dass

$$\frac{1}{2m}\frac{\mathrm{d}\vec{p}^2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$$

gilt. Auflösen nach $\mathrm{d}\vec{p}^2/\mathrm{d}t$ liefert schließlich

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}^2}{\mathrm{d}t} = -2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}.$$

b) Die Behauptung kann wie folgt gezeigt werden,

$$\begin{aligned}\frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{r} &= \frac{x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3}{r} = \frac{m\,(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3)}{r} = \frac{m}{2r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = \frac{m}{2r}\frac{\mathrm{d}r^2}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{m}{2r}\cdot 2r\dot{r} = m\dot{r}.\end{aligned}$$

c) Die zugehörige Transformation $\delta\dot{x}_i^{(j)}$ ist durch

$$\delta\dot{x}_i^{(j)} = \frac{1}{2}\left[2\dot{p}_ix_j + 2p_i\dot{x}_j - \dot{x}_ip_j - x_i\dot{p}_j - \delta_{ij}\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{p} + \vec{x}\cdot\dot{\vec{p}}\right)\right]\delta a$$

gegeben.

d) Im Folgenden benutzt man, dass

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i} = p_i \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right) = \dot{p}_i$$

ist, sodass

$$\delta L^{(j)} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\,\delta x_i^{(j)} + \frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\,\delta\dot{x}_i^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{3}\left(\dot{p}_i\,\delta x_i^{(j)} + p_i\,\delta\dot{x}_i^{(j)}\right)$$

gilt. Einsetzen von $\delta x_i^{(j)}$ und $\delta\dot{x}_i^{(j)}$ ergibt

$$\begin{aligned}\delta L^{(j)} = \frac{\delta a}{2}\sum_{i=1}^{3}&\Big\{\dot{p}_i\left[2p_ix_j - x_ip_j - \delta_{ij}\,(\vec{x}\cdot\vec{p})\right]\\ &+p_i\left[2\dot{p}_ix_j + 2p_i\dot{x}_j - \dot{x}_ip_j - x_i\dot{p}_j - \delta_{ij}\left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{p} + \vec{x}\cdot\dot{\vec{p}}\right)\right]\Big\}.\end{aligned}$$

Ausführen der Summation ergibt

$$\begin{aligned}\delta L^{(j)} = \Big[&2\left(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{p}\right)x_j - \left(\dot{\vec{p}}\cdot\vec{x}\right)p_j - (\vec{x}\cdot\vec{p})\,\dot{p}_j\\ &+ 2\left(\vec{p}\cdot\dot{\vec{p}}\right)x_j + 2\vec{p}^2\dot{x}_j - \left(\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}}\right)p_j - (\vec{p}\cdot\vec{x})\,\dot{p}_j - \left(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{p}\right)p_j - \left(\vec{x}\cdot\dot{\vec{p}}\right)p_j\Big]\,\frac{\delta a}{2}.\end{aligned}$$

Zusammenfassen von Termen führt zu

$$\delta L^{(j)} = \left[\vec{p}^{\,2}\dot{x}_j + 2\left(\vec{p}\cdot\dot{\vec{p}}\right)x_j - \left(\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}}\right)p_j - (\vec{x}\cdot\vec{p})\,\dot{p}_j - \left(\vec{x}\cdot\dot{\vec{p}}\right)p_j\right]\delta a.$$

Ausnutzen von

$$\left(\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}}\right)p_j = m\left(\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}}\right)\dot{x}_j = (\vec{p}\cdot\vec{p})\,\dot{x}_j = \vec{p}^{\,2}\dot{x}_j$$

führt zu

$$\delta L^{(j)} = \left[2\left(\vec{p}\cdot\dot{\vec{p}}\right)x_j - (\vec{x}\cdot\vec{p})\,\dot{p}_j - \left(\vec{x}\cdot\dot{\vec{p}}\right)p_j\right]\delta a.$$

Da $\mathrm{d}\vec{p}^{\,2}/\mathrm{d}t = 2\vec{p}\cdot\dot{\vec{p}}$ und $\dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}V$ ist, gilt

$$\delta L^{(j)} = \left[\frac{\mathrm{d}\vec{p}^{\,2}}{\mathrm{d}t}x_j + (\vec{x}\cdot\vec{p})\,\frac{\partial V}{\partial x_j} + \left(\vec{x}\cdot\vec{\nabla}V\right)p_j\right]\delta a.$$

Da nun

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}^{\,2}}{\mathrm{d}t} = -2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{x_j}{r} \quad \text{und} \quad \vec{x}\cdot\vec{\nabla}V = r\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -V$$

ist, gilt also

$$\delta L^{(j)} = \left[-2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}x_j + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{r}\right)x_j - Vp_j\right]\delta a.$$

Ausnutzen von

$$\frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{r} = m\dot{r} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\dot{r}$$

ergibt schließlich

$$\delta L^{(j)} = \left[-2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}x_j + m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}x_j - Vp_j\right]\delta a = \left[-m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}x_j - mV\dot{x}_j\right]\delta a = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-mVx_j\,\delta a\right),$$

sodass $\delta f(x_j) = -mVx_j\,\delta a$ ist.

e) Nach dem Noether-Theorem ist die Größe

$$C_j = \sum_{i=1}^{3} p_i\,\delta x_i^{(j)} - H\,\delta t - \delta f(x_j)$$

eine Erhaltungsgröße. Da im vorliegenden Fall $\delta t = 0$ ist, gilt nach Einsetzen von $\delta x_i^{(j)}$ und $\delta f(x_j)$, dass

$$C_j = \frac{\delta a}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i\left[2p_ix_j - x_ip_j - \delta_{ij}\,(\vec{x}\cdot\vec{p})\right] + mVx_j\,\delta a$$

ist. Ausführen der Summation führt zu

$$C_j = \left[\vec{p}^{\,2}x_j - \frac{1}{2}\,(\vec{p}\cdot\vec{x})\,p_j - \frac{1}{2}\,(\vec{x}\cdot\vec{p})\,p_j + mVx_j\right]\delta a.$$

Zusammenfassen von Termen und Einsetzen von $V = -k/r$ führt schließlich auf

$$C_j = \left[x_j\vec{p}^{\,2} - p_j\,(\vec{p}\cdot\vec{x}) - \frac{mk}{r}x_j\right]\delta a = \left[\vec{p}\times(\vec{x}\times\vec{p}) - \frac{mk}{r}\vec{x}\right]_j\delta a,$$

wobei bei der letzten Umformung benutzt wurde, dass $\vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$. Mit $\vec{x}\times\vec{p} = \vec{L}$ ist der Term mit eckigen Klammern ganz rechts die j-te Komponente des *Laplace-Runge-Lenz-Vektors* $\vec{A}$, der erhalten sein muss, wenn die einzelnen Komponenten des Vektors C_j erhalten sind.

2. *Zwillingsparadoxon*

a) Die Erde wird im Folgenden als ungestrichenes Inertialsystem betrachtet. Zwischen dem ungestrichenen und dem gestrichenen mitbewegten Inertialsystem auf dem ersten Teil der Reise von Alice zur Raumstation gilt gemäß Lorentz-Transformation mit $\beta \equiv v/c$, $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$ und $x_0 = ct$, dass

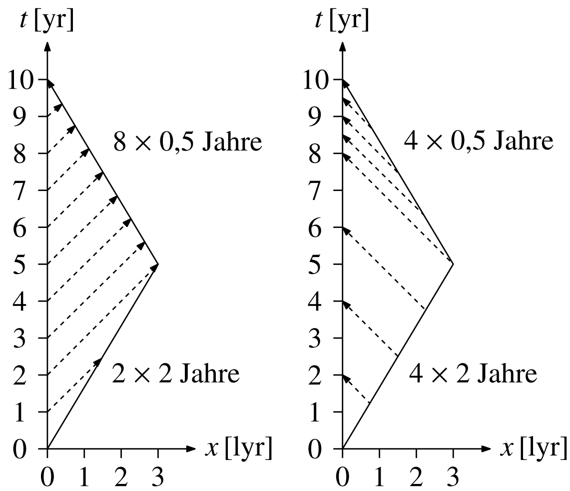
$$x_0 = \gamma\,(x_0' + \beta x_3') = \gamma x_0' \qquad \Rightarrow \qquad t' = \frac{t}{\gamma}$$

ist, wenn $x_3' = 0$ gewählt wird. Mit $\beta = 0{,}6$ gilt somit

$$t' = \sqrt{1-0{,}6^2}\cdot 5\,\mathrm{yr} = \sqrt{0{,}64}\cdot 5\,\mathrm{yr} = 0{,}8\cdot 5\,\mathrm{yr} = 4\,\mathrm{yr}.$$

Gleiches gilt für die Rückreise, d.h. aus der Sicht von Alice ist sie selbst insgesamt 8 Jahre unterwegs, obwohl in der Zwischenzeit auf der Erde bereits 10 Jahre vergangen sind.

b) Von den folgenden beiden Raumzeitdiagrammen zeigt das linke Lichtsignale, die im Abstand von einem Jahr von Bob auf der Erde zu Alice im Raumschiff gesendet werden, während das rechte Lichtsignale zeigt, die im Abstand von einem Jahr von Alice zu Bob gesendet werden.



Alice empfängt erst 2 Signale im Abstand von 2 Jahren und dann 8 Signale im Abstand von einem halben Jahr, also insgesamt 10 Signale.

Bob empfängt jedoch erst 4 Signale im Abstand von 2 Jahren und dann nochmal 4 Signale im Abstand von einem halben Jahr, also insgesamt 8 Signale.

c) Während Bob auf der Erde die ganze Zeit Teil desselben Inertialsystems ist, wechselt Alice im Raumschiff ihr Inertialsystem, wenn sie bei der Raumstation umkehrt. Es werden also nicht über den gesamten Zeitraum von Alices Reise dieselben Inertialsysteme miteinander verglichen.

3. *Kanonische Transformationen*

a) Im Folgenden gilt die Einstein'sche Summenkonvention, d.h. es wird über doppelt auftretende Indizes summiert. Laut Vorlesung gilt für die erzeugende Funktion Φ_1 und die transformierte Hamilton-Funktion

$$p_i = \frac{\partial\Phi_1}{\partial q_i}, \qquad P_i = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial Q_i} \quad \text{und} \quad K = H + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}. \tag{I}$$

Das Differential von Φ_1 ist demnach durch

$$\mathrm{d}\Phi_1 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i + \frac{\partial\Phi_1}{\partial Q_i}\,\mathrm{d}Q_i + \frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}t = p_i\,\mathrm{d}q_i - P_i\,\mathrm{d}Q_i + (K-H)\;\mathrm{d}t \tag{II}$$

gegeben. Φ_3 ist durch

$$\Phi_3 = \Phi_1 - \frac{\partial\Phi_1}{\partial q_i}q_i = \Phi_1 - p_i q_i$$

gegeben, wobei im letzten Schritt (I) verwendet wurde. Demnach ist das Differential von Φ_3 durch

$$\mathrm{d}\Phi_3 = \mathrm{d}\Phi_1 - q_i\,\mathrm{d}p_i - p_i\,\mathrm{d}q_i$$

gegeben. Einsetzen von (II) ergibt

$$\mathrm{d}\Phi_3 = p_i\,\mathrm{d}q_i - P_i\,\mathrm{d}Q_i + (K-H)\,\mathrm{d}t - q_i\,\mathrm{d}p_i - p_i\,\mathrm{d}q_i = -P_i\,\mathrm{d}Q_i - q_i\,\mathrm{d}p_i + (K-H)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{(III)}$$

woraus ersichtlich wird, dass Φ_3 eine Funktion der Q_i und der p_i ist. Vergleicht man dieses Ergebnis mit

$$\mathrm{d}\Phi_3 = \frac{\partial\Phi_3}{\partial Q_i}\,\mathrm{d}Q_i + \frac{\partial\Phi_3}{\partial p_i}\,\mathrm{d}p_i + \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}\,\mathrm{d}t,$$

so ergibt sich

$$P_i = -\frac{\partial\Phi_3}{\partial Q_i}, \qquad q_i = -\frac{\partial\Phi_3}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad K = H + \frac{\partial\Phi_3}{\partial t}.$$

Die dritte Gleichung zeigt, dass die neue Hamilton-Funktion vollständig durch die Kenntnis von Φ_3 festgelegt ist. Sind nun die $q_1, \ldots, q_f$, die $p_1, \ldots, p_f$ und Φ_3 vorgegeben, so kann man

$$q_i = -\frac{\partial\Phi_3}{\partial p_i} = q_i(Q_1, \ldots, Q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$$

nach den Q_i auflösen und erhält damit die erste Hälfte der Transformationsgleichungen

$$Q_i = Q_i(q_1, \ldots, q_f, p_i, \ldots, p_f, t).$$

Einsetzen in

$$P_i = -\frac{\partial\Phi_3}{\partial Q_i} = P_i(Q_1, \ldots, Q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$$

ergibt dann schließlich

$$P_i = P_i(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t).$$

Dies alles setzt natürlich voraus, dass die erzeugende Funktion Φ_3 alle notwendigen Voraussetzungen bzgl. der Differenzierbarkeit und Invertierbarkeit erfüllt.

b) Aus (III) ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} = -P_i\dot{Q}_i - q_i\dot{p}_i + K - H = -P_i\dot{Q}_i + \dot{q}_i p_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q_i p_i) + K - H.$$

Umgestellt nach $\dot{q}_i p_i$ ergibt dies

$$\dot{q}_i p_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_3 + q_i p_i) + P_i\dot{Q}_i + H - K. \qquad \text{(IV)}$$

Die Wirkung ist durch

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,L = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,(p_i\dot{q}_i - H)$$

gegeben. Einsetzen von (IV) ergibt

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_3 + q_i p_i) + P_i\dot{Q}_i + H - K - H\right] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(P_i\dot{Q}_i - K\right) + (\Phi_3 + q_i p_i)\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Die Wirkung in den neuen Koordinaten unterscheidet sich also nur durch eine Konstante, die bei der Variation verschwindet. Somit vermittelt Φ_3 also tatsächlich eine kanonische Transformation.

4. Poisson-Klammern beim Drehimpuls

a) Hier und im Folgenden wird wieder die Einstein'sche Summenkonvention verwendet. Die Poisson-Klammer $\{q_i, q_j\}$ ist durch

$$\{q_i, q_j\} = \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{ik} \cdot 0 - 0 \cdot \delta_{jk} = 0$$

gegeben. Die Poisson-Klammer $\{p_i, p_j\}$ ist durch

$$\{p_i, p_j\} = \frac{\partial p_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} = 0 \cdot \delta_{jk} - \delta_{ik} \cdot 0 = 0$$

gegeben. Die Poisson-Klammer $\{q_i, p_j\}$ ist durch

$$\{q_i, p_j\} = \frac{\partial q_i}{\partial q_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \delta_{ik}\delta_{jk} - 0 \cdot 0 = \delta_{ij}$$

gegeben.

b) Die Poisson-Klammer $\{L_i, p_j\}$ ist durch

$$\{L_i, p_j\} = \{\varepsilon_{i\ell k} q_\ell p_k, p_j\} = \varepsilon_{i\ell k}\{q_\ell p_k, p_j\} = \varepsilon_{i\ell k}\Big(q_\ell\{p_k, p_j\} + \{q_\ell, p_j\}p_k\Big) = \varepsilon_{i\ell k}\delta_{\ell j} p_k = \varepsilon_{ijk} p_k.$$

gegeben. Die Poisson-Klammer $\{L_i, q_j\}$ ist durch

$$\begin{aligned}\{L_i, q_j\} &= \{\varepsilon_{i\ell k} q_\ell p_k, q_j\} = \varepsilon_{i\ell k}\{q_\ell p_k, q_j\} = \varepsilon_{i\ell k}\Big(q_\ell\{p_k, q_j\} + \{q_\ell, q_j\}p_k\Big) = -\varepsilon_{i\ell k} q_\ell \delta_{kj} = -\varepsilon_{i\ell j} q_\ell \\ &= \varepsilon_{ij\ell} q_\ell = \varepsilon_{ijk} q_k\end{aligned}$$

gegeben. Die Poisson-Klammer $\{L_i, L_j\}$ ist durch

$$\begin{aligned}\{L_i, L_j\} &= \{\varepsilon_{i\ell k} q_\ell p_k, L_j\} = \varepsilon_{i\ell k}\{q_\ell p_k, L_j\} = \varepsilon_{i\ell k}\Big(q_\ell\{p_k, L_j\} + \{q_\ell, L_j\}p_k\Big) \\ &= \varepsilon_{i\ell k}\Big(-q_\ell \varepsilon_{jkn} p_n - \varepsilon_{j\ell m} q_m p_k\Big) = -\varepsilon_{k\ell i}\varepsilon_{kjn} q_\ell p_n - \varepsilon_{\ell ik}\varepsilon_{\ell jm} q_m p_k \\ &= -\Big(\delta_{\ell j}\delta_{in} - \delta_{\ell n}\delta_{ij}\Big) q_\ell p_n - \Big(\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kj}\Big) q_m p_k = -q_j p_i \underbrace{+ \delta_{ij} q_\ell p_\ell - \delta_{ij} q_k p_k}_{=\ 0\ (k \to \ell)} + q_i p_j \\ &= q_i p_j - q_j p_i = \varepsilon_{ijk} L_k\end{aligned}$$

gegeben. Der letzte Schritt ergibt sich, ausgehend von der Relation $L_i = \varepsilon_{ijk} q_j p_k$, wie folgt,

$$\varepsilon_{i\ell m} L_i = \varepsilon_{\ell mi} L_i = \varepsilon_{i\ell m}\varepsilon_{ijk} q_j p_k = \Big(\delta_{\ell j}\delta_{mk} - \delta_{\ell k}\delta_{mj}\Big) q_j p_k = q_\ell p_m - q_m p_\ell.$$

Umbenennung der Indizes $\ell \to i$, $m \to j$ und $i \to k$ führt zum behaupteten Ergebnis.
Die Poisson-Klammer $\{L_i, \vec{L}^2\}$ ist durch

$$\begin{aligned}\{L_i, \vec{L}^2\} &= \{L_i, L_j L_j\} = -\{L_j L_j, L_i\} = -L_j\{L_j, L_i\} - \{L_j, L_i\}L_j = L_j\{L_i, L_j\} + \{L_i, L_j\}L_j \\ &= L_j \varepsilon_{ijk} L_k + \varepsilon_{ijk} L_k L_j = 0\end{aligned}$$

gegeben, da der antisymmetrische Tensor ε_{ijk} mit dem symmetrischen Ausdruck $L_j L_k$ multipliziert wird, sodass beide Terme gleich null sind.

c) Da der Drehimpuls nur über die q_i und die p_i von der Zeit abhängt, ist $\partial\vec{L}/\partial t = 0$ und somit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \{\vec{L}, H\}.$$

Für die i-te Komponente des Drehimpulses gilt also

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t} &= \{L_i, H\} = \frac{1}{2m}\{L_i, p_j p_j\} + \{L_i, V(\vec{q})\} = \frac{1}{2m}\Big(p_j\{L_i, p_j\} + \{L_i, p_j\}p_j\Big) + \varepsilon_{ijk}\{q_j p_k, V(\vec{q})\} \\
&= \frac{1}{2m}\underbrace{\Big(p_j\varepsilon_{ijk}p_k + \varepsilon_{ijk}p_k p_j\Big)}_{=0,\text{ da } \varepsilon_{ijk} \text{ antisym. und } p_j p_k \text{ sym.}} + \varepsilon_{ijk}\Big(q_j\{p_k, V(\vec{q})\} + \underbrace{\{q_j, V(\vec{q})\}}_{=0} p_k\Big) = \varepsilon_{ijk}q_j\{p_k, V(\vec{q})\} \\
&= \varepsilon_{ijk}q_j\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\ell}\frac{\partial V(\vec{q})}{\partial p_\ell} - \frac{\partial p_k}{\partial p_\ell}\frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_\ell}\right) = -\varepsilon_{ijk}q_j\delta_{k\ell}\frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_\ell} = -\varepsilon_{ijk}q_j\frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_k} = \varepsilon_{ijk}q_j F_k,
\end{aligned}$$

wobei F_k die k-te Komponente der Kraft $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{q})$ ist. Demnach ist

$$\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_{ijk}q_j F_k = \left(\vec{q}\times\vec{F}\right)_i \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$$

mit dem *Drehmoment* $\vec{M} \equiv \vec{q}\times\vec{F}$. Der Drehimpuls ist also eine Erhaltungsgröße, falls das Drehmoment $\vec{M}$ verschwindet.

5. *Verständnisfragen*

a) Die Noether-Theoreme besagen, dass, wenn sich die Wirkung der klassischen Mechanik unter einer infinitesimalen Koordinatentransformation nur um eine Konstante ändert, eine Erhaltungsgröße mit dieser Art von Symmetrie verbunden ist. Im Konkreten sind dies:
   (i) Die Homogenität der Zeit führt zur Energieerhaltung.
   (ii) Die Homogenität des Raumes führt zur Impulserhaltung.
   (iii) Die Isotropie des Raumes führt zur Drehimpulserhaltung.
   (iv) Die Invarianz gegenüber geradlinig-gleichförmigen Bewegungen führt dazu, dass der Schwerpunkt mehrerer Massen eine Trägheitsbewegung ausführt.

b) Der wichtigste Punkt hinter der Lorentz-Transformation ist die Erkenntnis aus der Elektrodynamik, dass die Lichtgeschwindigkeit c eine universelle Konstante ist, die nicht vom Bewegungszustand des Inertialsystems abhängt, in dem sie gemessen wird. Ausgehend davon wird eine lineare Transformation zwischen Inertialsystemen konstruiert, die bei sehr hohen Geschwindigkeiten nahe c die Galilei-Transformation ersetzt und sicherstellt, dass c bei der Addition von Geschwindigkeiten nicht überschritten wird, während sie für kleine Geschwindigkeiten in die Galilei-Transformation übergeht.

c) Kanonische Transformationen können verwendet werden, um die Bewegungsgleichungen möglichst einfach werden zu lassen. Es kann z.B. so transformiert werden, dass $K = 0$ wird und somit die Bewegungsgleichungen $\dot{Q}_i = \dot{P}_i = 0$ werden. Man nennt dies eine „Transformation auf Ruhe“. Sie ist möglich, wenn eine erzeugende Funktion Φ gefunden werden kann, die die Hamilton-Jacobi Gleichung $H + \partial\Phi/\partial t = 0$ erfüllt. Solch eine erzeugende Funktion kann jedoch immer gefunden werden, denn es kann gezeigt werden, dass diese durch

$$\Phi(q, Q, t) = \Phi_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, L\left(q(t'), \dot{q}(t'), t'\right)$$

gegeben ist, wobei L die Lagrange-Funktion und Φ_0 eine Konstante ist.

d) Für ein Ensemble von Systemen, deren Bahnen zu gegebenen Zeit einen Bereich des Phasenraums überdecken, besagt der Satz von Liouville, dass das Volumen des überdeckten Phasenraums im Laufe der Zeit konstant bleibt. Ist die assoziierte Phasenraumdichte $\rho(q, p, t)$, so bedeutet dies, dass

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial\rho}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

ist.