**Übungen zu Funktionentheorie 1** Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 12 Musterlösung

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 17. Juli

Dieser Zettel wird mit Maximalpunktzahl 16 gewertet. Sie können jedoch mehr Punkte erreichen. Überzählige Punkte zählen dann als Bonuspunkte.
Sei $D$ ein Gebiet und $z_0 \in D$.

**50. Aufgabe:** (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol in $z_0$ der Ordnung $\leq N$. Zeigen Sie

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \left( (\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{N-1} (z-z_0)^N f(z) \right) .$$

(b) Seien $p, q \in \mathcal{O}(D)$ holomorphe Funktion auf $D$ und sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ definiert für alle $z \in D$ mit $q(z) \neq 0$. Wenn $z_0 \in D$ eine einfache Nullstelle von $q$ ist dann gilt $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$.

**Lösung:** Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$, sonst parametrisieren wir um. Wir verwenden die Laurent-Entwicklung für $z \in D_{0,R}(0)$

$$f(z) = \sum_{\nu=-N}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

Da die Laurententwicklung im Kreisring $D_{0,R}(0)$ kompakt konvergiert, können wir gliedweise differenzieren und erhalten

$$(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{N-1} z^N f(z) = \sum_{\nu=-1}^{\infty} a_\nu \frac{(\nu+N)!}{(\nu+1)!} z^{\nu+N-(N-1)}$$

Die Terme mit $-N \leq \nu \leq -2$ verschwinden, da die Ableitung einer konstanten Funktion Null ergibt. Der Grenzwert $z \to 0$ vertauscht mit der Reihe wegen kompakter Konvergenz. Wir erhalten

$$\lim_{z\to 0} (\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{N-1} z^N f(z) = \sum_{\nu=-N}^{\infty} a_\nu \frac{(\nu+N)!}{(\nu+1)!} \lim_{z\to 0} z^{\nu+1}$$

Jeder Summand mit $\nu > -1$ verschwindet im Limes. Es verbleibt

$$\lim_{z\to 0} (\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{N-1} z^N f(z) = a_{-1} \frac{(N-1)!}{0!} \lim_{z\to 0} 1 = a_{-1}(N-1)! = \mathrm{Res}_{z_0}(f) \cdot (N-1)!$$

Nach Definition ist $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = a_{-1}$. Teilt man beide Seiten durch $(N-1)!$, so erhält man die Aussage.
b) Da $q$ in $z_0$ nur eine einfache Nullstelle hat, ist $q'(z_0) \neq 0$. Die zu zeigende Formel ist somit wohldefiniert. Insbesondere ist in einer Umgebung von $z_0$ der Differenzenquotient $\frac{q(z)-q(z_0)}{z-z_0}$ invertierbar. Die Funktion $\frac{1}{q}$ hat nur einen einfachen Pol, damit hat $f$ höchtens einen einfachen Pol. Wir können also die Formel aus (a) mit $N = 1$ anwenden:

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z\to z_0} p(z) \frac{(z-z_0)}{q(z)} = \left( \lim_{z\to z_0} p(z) \right) \underbrace{\left( \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)}{q(z)-q(z_0)} \right)}_{=1/q'(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} .$$

**51. Aufgabe:** (2+2=4 Punkte) Berechnen Sie für zwei der folgenden drei Funktionen das Residuum von

(a) $f(z) = z^{-2}(\exp(z+1) - \exp(2z+1))$ in $z_0 = 0$ ,

(b) $g(z) = (\cos(z/2))^{-2}$ in $z_0 = \pi$ ,

(c) $h(z) = \frac{\exp(z^2)}{\sin^2(z)}$ in $z_0 = 0$ .

Hinweis: Wenn Sie Aufgabe 50 verwenden, sollten Sie zeigen, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

**Lösung:** Quotienten holomorpher Funktionen sind meromorphe Funktionen, insbesondere sind alle Singularitäten hebbar oder Pole. Wir können also die Formel aus Aufgabe 50(a) anwenden. Achtung: Die Formel aus 50b) können wir in keinem unserer Fälle verwenden, da sie nur gilt, wenn der Nenner $q$ höchstens eine einfache Nullstelle hat.

(a) Da $z^2 f(z) = \exp(z+1) - \exp(2z+1)$ offensichtlich holomorph fortsetzbar ist in die Singularität bei $z = 0$, ist die Polordnung $\leq 2$. Wir verwenden die Formel aus 50a) mit $N = 2$.

$$\operatorname{Res}_0(f) = \lim_{z\to 0} \tfrac{1}{1!}(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0}(e^{z+1} - e^{2z+1})'$$
$$= \lim_{z\to 0}(e^{z+1} - 2e^{2z+1}) = e^{0+1} - 2e^{2\cdot 0+1} = e - 2e = -e \ .$$

(b) Wir definieren $g_2(z) = (\sin(z/2))^{-2}$, dann gilt $g(z) = g_2(z-\pi)$, also $\operatorname{Res}_\pi(g) = \operatorname{Res}_0(g_2)$. Die Sinus-Funktion ist ungerade, ihr Quadrat also gerade, daraus folgt $g_2(z) = g_2(-z)$. Sei $g_2(z) = \sum_{\nu\geq 0} a_\nu z^\nu$ die Laurent-Entwicklung um Null. Mit dem selben Argument wie in c) verschwinden die Laurentkoeffizienten $a_\nu$ zu ungeraden $\nu$. Also ist $\operatorname{Res}_\pi(g) = \operatorname{Res}_0(g_2) = 0$.
**Alternatives Argument:** Verwendet man die Integralformel für Laurent-Koeffizienten (Skript S. 54), so folgt für jedes $0 < \rho < 2\pi$

$$\operatorname{Res}_0(g_2) = \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|} \frac{g_2(z)}{(\zeta - 0)^{-1+1}}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=\rho} g_2(z)\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^1 g_2(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

für $\gamma(t) = \rho\exp(2\pi i t)$ für $0 \leq t \leq 1$. Dieselbe Formel gilt, wenn wir den Weg $\gamma$ durch $-\gamma$ ersetzen und wir erhalten daher

$$\operatorname{Res}_0(g_2) = \int_0^1 g_2(-\gamma(t))(-\gamma(t))'\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 g_2(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = -\operatorname{Res}_0(g_2) \ .$$

Also ist $\operatorname{Res}_\pi(g) = \operatorname{Res}_0(g_2) = 0$.
**Allgemeiner gilt:** Für eine gerade Funktion verschwinden für die Entwicklung um Null alle Laurentkoeffizienten mit ungeradem Index, insbesondere der zum Index $-1$. Das zeigt man wie in im folgenden Teil (c).

(c) Man rechnet nach, dass $h(z) = h(-z)$, also ist $h$ eine gerade Funktion. Sei $h(z) = \sum_{\nu\geq -N} a_\nu z^\nu$ die Laurent-Entwicklung von $h$, dann ist

$$0 = h(z) - h(-z) = \sum_{\nu\geq -N} a_\nu(1 - (-1)^\nu)z^\nu \ .$$

Weil Laurentkoeffizienten eindeutig sind, gilt $a_\nu(1-(-1)^\nu) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{Z}$. Für alle ungeraden $\nu$ bedeutet das $a_\nu = 0$. Also ist $\operatorname{Res}_0(h) = a_{-1} = 0$.

**52. Aufgabe:** (2+1+1=4 Punkte) Sei $f: D \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

(a) $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.

(b) die Umkehrfunktion $f^{-1}: f(D) \to D$ ist holomorph.

(c) Ist $D = \mathbb{C}$, dann ist $f$ ein Polynom vom Grad $\deg(f) = 1$.

Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis des Satzes von der Gebietstreue.

**Lösung:**

(a) Wir fixieren ein beliebiges $z_0 \in D$ und zeigen, dass $f'(z_0) \neq 0$. Wir nehmen dabei obda an, dass $z_0 = 0 = f(z_0)$, sonst ersetzen wir $D$ durch $D - z_0$ und $f$ durch $z \mapsto f(z + z_0) - f(z_0)$. Sei

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

die Taylorentwicklung von $f$. Angenommen, $f'(z_0) = a_1$ wäre Null, dann hat $f$ in Null eine Nullstelle der Ordnung $N \geq 2$, also $f = \sum_{\nu=N}^{\infty} a_\nu z^\nu = z^N h(z)$ für $h(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu+N} z^{\nu-N}$. Insbesondere ist $h(0) \neq 0$ und damit kann man in einer Umgebung von Null eine N-te Wurzel aus $h$ ziehen. Es gibt also eine holomorphe Funktion $g : B_\epsilon(0) \to \mathbb{C}$ mit $g(z)^N = h(z)$. Also ist $f(z) = (zg(z))^N$. Nach dem Satz von der Gebietstreue ist das Bild von $B_\epsilon$ unter $z \mapsto zg(z)$ offen, enthält also eine Umgebung von Null.

Also gibt es $z_1, z_2 \in B_\epsilon(0)$, sodass $z_1 g(z_1) = \exp(2\pi i/N) z_2 g(z_2)$. Daraus folgt $z_1 \neq z_2$, aber $f(z_1) = f(z_2)$. Das widerspricht der Injektivität von $f$.

(b) Das Bild $D_2 := f(D)$ ist nach dem Satz von der Gebietstreue wieder ein Gebiet und die Umkehrfunktion $f^{-1} : D_2 \to D$ ist wohldefiniert. Nach a) und dem Umkehrsatz aus Analysis ist $f^{-1}$ reell differenzierbar in $f(z)$ für alle $z \in D$, also ist $f^{-1}$ überall reell differenzierbar. Nach Kettenregel für reell differenzierbare Funktionen gilt

$$Df^{-1}(f(z_0) \circ Df(z) = D(f^{-1} \circ f)(z_0) = D(\mathrm{id})(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Da $f$ holomorph ist, besagen die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen, dass die Jacobi-Matrix $A = Df(z)$ die Bedingung $A_{11} = A_{22}$ und $A_{12} = -A_{21}$ erfüllt. Nach der Cramer'schen Regel erfüllt auch die Inverse $B = Df^{-1}(f(z_0)) = A^{-1}$ die Relationen $B_{11} = B_{22}$ und $B_{12} = -B_{21}$. Damit erfüllt $f^{-1}$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und ist also holomorph.

(c) Nach Aufgabe 45 von Blatt 10 ist $f$ ein Polynom vom Grad $\leq 1$. Der Grad kann nicht Null sein, sonst wäre $f$ konstant und damit nicht injektiv.

**53. Aufgabe:** (2+2+2+2=8 Punkte) Wir zeigen in mehreren Schritten die Gleichung

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi} \quad \overset{!}{=} \quad z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) =: G(z) \ . \tag{$*$}$$

(a) Zeigen Sie, dass $G(z)$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert und damit eine holomorphe Funktion darstellt.

(b) Vergleichen Sie die Ordnung der Nullstellen auf beiden Seiten und folgern Sie, dass es eine ganze holomorphe Funktion $h(z)$ gibt mit

$$H(z) := \frac{\sin(\pi z)}{\pi} = e^{h(z)} G(z) \ .$$

(c) Zeigen Sie $h' = 0$, indem Sie $\frac{H'}{H}$ für beide Seiten von $H$ berechnen. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 49.

(d) Folgern Sie die obige Produktformel, indem Sie die Konstante $c = e^{h(z)}$ explizit berechnen. Hinweis: Bestimmen Sie zum Beispiel den linearen Term der Taylorentwicklung von $H(z)$ in $z = 0$ auf beiden Seiten.

**Lösung:**

(a) Nach Definition ist zu zeigen, dass die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^2}{n^2}$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert. (Das ist hier äquivalent zu absolut und kompakt konvergent, weil $\mathbb{C}$ lokalkompakt ist.) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$, z.B. könnte $K$ kompakt sein. Dann gibt es eine Konstante $C$ mit $|z| \leq C$ für alle $z \in K$. Die Reihe über die inversen Quadrate konvergiert bekanntlich, also gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein natürliches $N_0$, sodass folgende Abschätzung für alle $N, M \geq N_0$ gilt:

$$|\sum_{n=N}^{M} \frac{z^2}{n^2}| \leq \sum_{n=N}^{M} |\frac{z^2}{n^2}| \leq C \sum_{n=N}^{M} |\frac{1}{n^2}| < \epsilon \ . \tag{0.1}$$

Nach Definition konvergiert $G$ absolut und kompakt. Nach dem Weierstraß-Kriterium ist $G$ eine holomorphe Funktion.

(b) Die Nullstellen des Sinus sind bekannt. Die linke Seite hat also einfache Nullstellen in $\mathbb{Z}$. Ein konvergentes Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Also gilt $G(z) = 0$ genau dann wenn $z = 0$ oder $z^2/n^2 = 1$. Mit anderen Worten, genau dann wenn $z \in \mathbb{Z}$. Die Ordnung der Nullstellen ist jeweils Eins, weil jeder Faktor im Produkt ein quadratisches Polynom mit zwei verschiedenen Nullstellen ist. Also ist der Quotient $z \mapsto \frac{H(z)}{G(z)}$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, deren Polordnung in jeder Singularität verschwindet. Sie lässt sich damit fortsetzen zu einer nullstellenfreien Funktion auf ganz $\mathbb{C}$. Wie wir gezeigt haben (im Skript auf Seite 42), gibt es dann eine ganze holomorphe Funktion $h$ mit $\exp(h(z)) = \frac{H(z)}{G(z)}$, weil $\mathbb{C}$ ein Elementargebiet ist.

(c) Die logarithmische Ableitung auf der linken Seite ist

$$\frac{H'(z)}{H(z)} = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)/\pi} = \pi \cot(\pi z) \ .$$

Die Ableitung von $G$ bestimmt man über die Produktregel und die kompakte Konvergenz wie folgt: Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ eine beschränkte Teilmenge, dann gibt es eine natürliche Zahl $N$ mit $|z| < N$ für alle $z \in K$. Jeder Faktor von mit $n > N$ liegt in der Kreisscheibe $B_1(1)$ um 1, also

$$G_N(z) = \prod_{n=N+1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = \exp( \sum_{n=N+1}^{\infty} \log(1 - \frac{z^2}{n^2}))$$

Man bestimmt die Ableitung über die Kettenregel

$$G_N'(z) = G_N(z) \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{-2z/n^2}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \ .$$

Jetzt wendet man die Produktregel für endliche Produkte auf $G(z) = z \prod_{n=1}^{N} (1 - \frac{z^2}{n^2}) G_N(z)$ an und erhält:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z/n^2}{1 - z^2/n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \ .$$

Nach Kettenregel und Quotientenregel gilt

$$h'(z) = \frac{(e^h)'}{e^h} = \frac{(H/G)'}{H/G} = \frac{H'}{H} - \frac{G'}{G} \ .$$

Das ist Null, wie wir in Aufgabe 49 gezeigt haben.

(d) Da $h'$ lokalkonstant ist und $\mathbb{C}$ zusammenhängend, ist $h$ konstant. Also ist auch $c = e^{h(z)}$ konstant. Es bleibt zu zeigen, dass $c \overset{!}{=} 1$. Die Ableitung von $H$ bei Null ist $H'(0) = \cos(\pi 0) = 1$. Die Ableitung von $cG$ bei Null ist

$$(cG)'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{cG(z) - cG(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} c \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = c \prod_{n=1}^{\infty} \lim_{z \to 0} (1 - \frac{z^2}{n^2}) = c \prod_{n=1}^{\infty} 1 = c \ .$$

Da wir in b) gezeigt haben, dass $H = cG$, müssen die Ableitungen auf beiden Seiten übereinstimmen. Daraus folgt $c = 1$ und damit gilt $H = G$, was zu zeigen war.