Galois- und Fundamentalgruppen

Seminar Zahlentheorie im Sommersemester 2022

Marius Leonhardt, Tim Holzschuh

Viele Facetten eines mathematischen Objekts kommen erst durch das Studium seiner Symmetrien ans Licht. Ein prominentes Beispiel aus der Algebra ist die *Galoisgruppe* eines separablen Polynoms, die die Symmetrien seiner Nullstellen kodiert und ein unschätzbares Hilfsmittel beim Studium algebraischer Gleichungen ist. Ist K ein Körper und $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ seine absolute Galoisgruppe, so lässt sich der Hauptsatz der Galoistheorie ausdrücken als eine Kategorienäquivalenz

$$\{L \mid L/K \text{ endlich separabel}\} \longleftrightarrow \{M \mid M \text{ endliche Menge mit transitiver } G_K\text{-Wirkung}\},$$
$$L \longmapsto G_K/G_L = \mathrm{Hom}_K(L, \overline{K}).$$

Im ganz anderen Kontext der Algebraischen Topologie ist die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X,x)$ eines topologischen Raumes X definiert als die Menge aller in x startenden Schleifen in X (modulo Homotopie) mit Hintereinanderdurchlaufen als Verknüpfung. Anschaulich misst sie die Anzahl und Art der Löcher von X. Beispielsweise ist die Fundamentalgruppe der Kreislinie S^1 isomorph zu $\mathbb{Z}$: die Zahl $n \in \mathbb{N}$ entspricht dem n-fachen Umlaufen des Kreises. Für "schöne" topologische Räume ist $\pi_1(X,x)$ isomorph zur Gruppe der Decktransformationen der universellen Überlagerung von X. Daraus ergibt sich die Korrespondenz

$$\{Y \mid Y \to X \text{ Überlagerung}\} \longleftrightarrow \{M \mid M \text{ Menge mit } \pi_1(X,x)\text{-Wirkung}\},$$
$$(f\colon Y \to X) \longmapsto f^{-1}(x).$$

Video (Universität Hannover) zu Überlagerungen der S^1.

Die obigen zwei Szenarien stammen aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik, weisen aber augenscheinliche Ähnlichkeiten auf: Zum einen "weiß" die Galois-/Fundamentalgruppe mehr über den Körper/topologischen Raum, als man ihr mit Blick auf die Definition zutraut. Zum anderen sind die rechten Seiten obiger Kategorienäquivalenzen verblüffend ähnlich. Woran liegt diese seltsame Analogie? Gibt es vielleicht einen Mechanismus, der beide Phänomene erklären kann?

Im Seminar werden wir sehen, dass dies tatsächlich der Fall ist! Mehr noch, wir werden einen Formalismus entwickeln, der es uns gestatten wird, auch anderen mathematischen Objekten eine Symmetriegruppe zuzuordnen. Im Fall von Ringen heißt die so gebaute Gruppe die *étale Fundamentalgruppe*. Gewissermaßen interpoliert diese zwischen den beiden obigen Beispielen und spielt in der modernen Algebraischen/Arithmetischen Geometrie eine wichtige Rolle.

Das Seminar richtet sich an all diejenigen, die Spaß am Entwickeln abstrakter Konzepte in kategorieller Sprache haben, sich dabei aber an konkreten Beispielen entlanghangeln, die gerne eine Verbindung von Algebra und Geometrie sehen oder sich in der Arithmetischen Geometrie vertiefen möchten.

Vorkenntnisse: (essentiell) Algebra 1+2; (optional) Algebraische Zahlentheorie 1, Algebraische Geometrie 1, Algebraische Topologie 1; (sehr großer Bonus) Étale Kohomologie

Zeit und Ort: (voraussichtlich) Donnerstags, 14:15-15:45 Uhr, Mathematikon

Vorbesprechung und Vortragsvergabe: Donnerstag, 17.02.2022, 13:30 Uhr in SR6

Kontakt: mleonhardt@mathi.uni-heidelberg.de, tholzschuh@mathi.uni-heidelberg.de

Literatur: Unsere Hauptquelle ist [Len08], das Wort "Schema" wird im Seminar aber kaum vorkommen. Gelegentlich benutzen wir auch Grothendiecks [SGA1].

Organisatorisches

Ihr habt bis **Freitag, 11.03.2022** Zeit, euch zu entscheiden, am Seminar teilzunehmen. Wer am Samstag, 12.03.2022, 00:00 Uhr in Müsli für einen Vortrag eingetragen ist, zählt als zum Seminar angemeldet. Späteres Zurücktreten vom Vortrag wird mit Note 5,0 bewertet.

Jede*r Teilnehmende hält einen Vortrag (90 min). (Fast) alle Vorträge sind doppelt belegt; die beiden Vortragenden erstellen zu Ihrem Thema ein gemeinsames Handout (höchstens 2 A4 Seiten), auf dem die wichtigsten Definitionen und Ergebnisse zusammengefasst werden. Außerdem stellen sie zwei Übungsaufgaben, von denen sie eine in der Übungsstunde vorstellen. Die beiden Übungsstunden finden statt am **02.06.2022, 16-18 Uhr**, und am **28.07.2022, 14-16 Uhr**. In die Bewertung fließen Vortrag, Handout, Übungsaufgaben sowie die aktive Teilnahme am Seminar ein.

Wegen des großen Interesses findet das Seminar zeitgleich in zwei Gruppen (A und B) statt; selbiges gilt für die Übungsstunden. Die Zuteilung seht ihr in Müsli. Damit beide Gruppen gleich groß sind, kommt bitte nur zu den Vorträgen eurer Gruppe.

Vorträge

Vortrag 1: Unendliche Galoistheorie (21.04.2022, Stefan Kremer, Vincent Zahlen)

Quellen: [Len08, §2, bis 2.5, und 1.7-9], [Neu92, §IV.1(+2)]

Definition unendlicher Galois-Erweiterungen; Notwendigkeit der Modifikation des Hauptsatzes der Galoistheorie; Struktur der Galois-Gruppe als proendliche Gruppe; topologische Charakterisierung proendlicher Gruppen [Neu92, IV.2.8]; Definition der Krull-Topologie und Hauptsatz der Galoistheorie inklusive Beweis; Beispiel: absolute Galois-Gruppe endlicher Körper

Vortrag 2: Endliche separable K-Algebren (28.04.2022, Josua Kugler, Tunahan Suna)

Quellen: [Len08, §2, ab 2.6, und 1.2, 1.10]

Struktur endlicher Algebren über Körpern; Definition und Klassifikation endlicher separabler Algebren über Körpern; Definition von π-Mengen für eine proendliche Gruppe π (siehe auch [Len08, Exercise 1.19]); (Anti-)Kategorienäquivalenz zwischen endlichen separablen K-Algebren und endlichen G_K-Mengen

Vortrag 3: Galoiskategorien (05.05.2022, Matthis Scholz, Dominik Schweisgut)

Quellen: [Len08, §3, bis 3.5]

Definition von Galoiskategorien und Fundamentalfunktoren und aller damit verbundenen kategoriellen Begriffe (insbesondere Faserprodukte und Quotienten) inklusive Beispiele; ausführliche Diskussion der bisherigen Beispiele inklusive Beweis für die Kategorie der endlichen π-Mengen sowie die entgegengesetzte Kategorie der endlichen separablen K-Algebren; Definition der Automorphismengruppe des Fundamentalfunktors und ihrer Topologie und Aussage des Hauptsatzes (ohne Beweis)

Vortrag 4: Topologische Überlagerungen (12.05.2022, Arvid Holsmölle, Philipp Kusterer)

Quellen: [Len08, 3.7-3.10, und Intro], [LS15, §8], [Hat02, §1]

Definition der Fundamentalgruppe eines topologischen Raums; Beispiele; Definition von topologischen Überlagerungen; Hebungseigenschaft; universelle Überlagerung und Decktransformationen; endliche Überlagerungen: lokale Trivialität und Verifikation der Axiome einer Galoiskategorie

Vorträge 5 und 6: Beweis des Hauptsatzes (19.05.2022 und 02.06.2022, Jannis Heising, Robert Paus, Emanuel Roth, Tom Stalljohann)

Quellen: [Len08, §3, ab 3.11]; Vorschlag: Vortrag 5 bis 3.17, Vortrag 6 ab 3.18.

Unterobjekte und zusammenhängende Objekte; Pro-Darstellbarkeit des Fundamentalfunktors; Galoisobjekte; alternative Beschreibung von π durch die "pro-universelle Überlagerung" (3.15); Kategorienäquivalenz mit π-Mengen; Beweis des Hauptsatzes; Funktorialität plus Beispiele

Vortrag 7: Unverzweigte Morphismen (09.06.2022, Sebastian Armbrust, Till Janke)

Quellen: [Len08, Exercise 6.6+7], [Vak17, §21.6]. Achtung: Dieser Vortrag folgt nicht der Hauptquelle [Len08]. Sprecht die Themenauswahl mit uns ab und meldet euch bei Fragen aller Art!

Geometrische Motivation: Differentielles Kriterium für Überlagerungen; algebraisches Hilfsmittel: Derivationen und Kähler-Differentialmodul; relative Kotangentialfolge und Basiswechsel; Definition von formal unverzweigt [Vak17, etwa §21 bis 21.2.9, §21.6]; Beispiel endliche K-Algebren; Zusammenhang mit Verzweigung in AZT; Definition étale Morphismen

Vortrag 8: Projektive separable A-Algebren (23.06.2022, Janne Frenz, Theresa Häberle)

Quellen: [Len08, §4, ab 4.7, §6, bis 6.9]

(Kurze) Wiederholung zu projektiven Moduln; Rang und Spur; endliche/treuflache/separable projektive A-Algebren; Charakterisierung étaler Morphismen durch projektive separable Algebren ([Len08, Lemma 6.5], [Len08, Proposition 6.9])

Vorträge 9 und 10: Endliche étale Morphismen (30.06.2022 und 07.07.2022, Nikolaus Betker, Jannek Bukold, Christian Merten, Nils Witt)

Quellen: [Len08, §5, ab 5.1]; Vorschlag: haltet beide Vorträge zusammen und teilt "Technik" und "Ergebnisse" gleichmäßig untereinander auf

Definition endlich étaler Überlagerungen; Affine und lokalfreie Morphismen; vollständig zerlegte Morphismen; Charakterisierung endlich étaler Morphismen mit Hilfe vollständig zerlegter Morphismen ([Len08, Theorem 5.10]); Endlich étale Überlagerungen bilden eine Galoiskategorie; Definition der étalen Fundamentalgruppe

Anmerkung: Da nicht alle Teilnehmer mit der Sprache der algebraischen Geometrie vertraut sind, sollte besonderer Wert darauf gelegt werden, alle Resultate auch möglichst "rein affin" zu formulieren — die meisten Beweise reduzieren sich so oder so auf diese Aussagen.

Vortrag 11: Étale Fundamentalgruppe normaler Schemata (14.07.2022, Tim Wagemann)

Quellen: [Len08, 6.12-6.17]

Definition normaler Schemata und Normalisierung; Charakterisierung endlicher Überlagerungen als unverzweigte Normalisierungen in Erweiterungen des Funktionenkörpers; algebraischer Teil des Beweises: projektive separable Algebren über normalen nullteilerfreien Ringen, Ganzabschluss eines lokalen normalen Ringes; geometrische Umformulierung; Beschreibung der étalen Fundamentalgruppe als Galoisgruppe; Beispiel: étale Fundamentalgruppe von $\mathbb{Z}$

Vortrag 12: Étale Fundamentalgruppe von Kurven (21.07.2022, Markus Zetto)

Quellen: [Len08, §6, 6.18 - 6.23], [Har77, §IV.2]

Berechnung der étalen Fundamentalgruppe von $\mathbb{P}^1_{\bar{K}}$ via Hurwitz' Theorem ([Har77, Example 2.5.3]); Bewertungen auf $K(t)$; Berechnung der étalen Fundamentalgruppe von $\mathbb{P}^1_K$ via Bewertungstheorie; Berechnung der étalen Fundamentalgruppe von $\mathbb{A}^1_K$

Literatur

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Len08] H.W. Lenstra. Galois theory of schemes. `https://websites.math.leidenuniv.nl/algebra/GSchemes.pdf`, 2008.

[LS15] Gerd Laures and Markus Szymik. *Grundkurs Topologie.* Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum, Berlin, revised edition, 2015.

[Neu92] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1).* Société Mathématique de France, Paris, 1. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61.

[Vak17] Ravi Vakil. Foundations of algebraic geometry. `http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf`, 2017.