

A 2 T II Zettel 2

42) a) Sei $m := \text{ord}(g)$. $g^n = 1 \Rightarrow m | n$.

Nach Def von \hat{g} gilt dann
 $e_m(a_n) = a_m \Rightarrow a_n \equiv a_m \pmod{m}$

$\Rightarrow g^a = g^{a_n} = g^{a_m}$, da $g^m = 1$.

b) $(ab)_n = a_n \cdot b_n$ $m := \text{ord}(g)$

$\text{ord}(g^{a_n}) \mid \text{ord}(g) = m$

$\Rightarrow b_{\text{ord}(g^{a_n})} \equiv b_n \pmod{\text{ord}(g^{a_n})}$

$\Rightarrow (g^{a_n})^{b_{\text{ord}(g^{a_n})}} = (g^{a_n})^{b_n}$

$(g^a)^b = (g^{a_n})^{b_{\text{ord}(g^{a_n})}} = (g^{a_n})^{b_n} = g^{a_n \cdot b_n} = g^{ab} \quad \checkmark$

$g^a \cdot g^b = g^{a_n} \cdot g^{b_n} = g^{a_n + b_n} = g^{(a+b)_n} \quad \checkmark$

c) $g^a \cdot g^b = g^{a_{\text{ord}(g)}} \cdot g^{b_{\text{ord}(g)}}$

$\text{ord}(g^b) = \text{hgl}(\text{ord}(g), \text{ord}(g))$

$\Rightarrow a_{\text{ord}(g)} \equiv a_{\text{ord}(g^b)} \pmod{\text{ord}(g)}$

$a_{\text{ord}(g)} \equiv a_{\text{ord}(g^b)} \pmod{\text{ord}(g)}$

$(g^b)^a = (g^b)^{a_{\text{ord}(g^b)}} = g^{a_{\text{ord}(g^b)}} \cdot g^{b_{\text{ord}(g^b)}} = g^{a_{\text{ord}(g)}} \cdot g^{b_{\text{ord}(g)}} = g^a \cdot g^b \quad \checkmark$

3) a) Sei H eine offene UGn von G . unvollständig

Angenommen, H enthält keines der g^i , dann G/H abg und
 $g^i \in G \setminus H \quad \forall i \Rightarrow G/H \supseteq \{g^i | i \in \mathbb{N}\} \subseteq G \Rightarrow H = \emptyset$.

$\Rightarrow \exists n: g^n \in H$. Alle offenen UGns sind auch abgeschlossen, d.h.

$$H \supseteq \overline{\langle g^n \rangle} = \overline{\{g^n, g^{2n}, \dots\}}$$

$$g^{n+m} \in g^n \cdot \overline{\langle g^n \rangle} \Rightarrow g^i \in \bigcup_{r=0}^{n-1} g^r \overline{\langle g^n \rangle} \quad \forall i$$

als end. Vereinigung
abg. Mengen

$$\Rightarrow \bigcup_{r=0}^{n-1} g^r \overline{\langle g^n \rangle} = G$$

$$\Rightarrow (G : \overline{\langle g^n \rangle}) \leq n$$

$$\Rightarrow (G : H) \leq n$$

Idee: $(G : H) \leq n \Leftrightarrow g^n \in H$ mit n minimal



H offen in G



$$\exists m: g^m \in H \Rightarrow (G : H) \leq m,$$

also $n \leq m$



$$\overline{\langle g^n \rangle} = G^n ? \quad G^n \text{ ist UGn}^{\checkmark} \text{ oder offen? } G^n \text{ abg?}$$

Es gilt $g^n \in G^n$, also $\langle g^n \rangle \subseteq G^n$, $G^n \text{ abg} \xRightarrow{\quad} \overline{\langle g^n \rangle} \subseteq G^n$

$G^n \text{ abg} \Rightarrow$

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} g^i G^n = G \quad \text{disjunkt?}$$

erst $h^i = g^i$ für $i < n$ ok

sonstfalls: $(G : G^n) \leq n$ falls G^n abg.

b) wir setzen aus a) voraus, dass G^n eine offene Untergruppe ist, also abs. abgeschlossen

$$\Rightarrow g^n \in \bigcup_{a=1}^i g^a G^i \quad \forall n \Rightarrow G = \langle g \rangle \subset \bigcup_{a=1}^i g^a G^i \subset G$$

$$\Rightarrow \bigcup_{a=1}^i g^a G^i = G$$

nur dass $G = \varinjlim G/G^i$. Dann wollen wir

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$$

$$G = \varinjlim G/G^i$$

Wir erhalten $\ell: \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \rightarrow G/G^i$

$$a \mapsto g^a G^i$$

Da $g^{a+i} G^i = g^a G^i$, Außerdem ist ℓ surjektiv, da

$$G = \bigcup_{a=1}^i g^a G^i$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \rightarrow G/G^i \rightarrow 0 \text{ exakt}$$

\varprojlim exakt
 \Rightarrow

$$\hat{\mathbb{Z}} \rightarrow G \rightarrow 0 \text{ exakt}$$



4 a)

Wir bezeichnen die Abbildung mit φ

$$\varphi: \mathcal{C}_p(\{*\}, Y)^{\text{ko}} \rightarrow Y, f \mapsto f(*)$$

Bem: $\{*\} \subset \mathbb{R}$ kompakt:

Betrachte eine beliebige offene Überdeckung von $\{*\}$.
Diese besteht höchstens aus $\{*\}$ und besitzt damit eine
endliche Teilüberdeckung. ✓

Inbesondere ist also $\mathcal{C}(\{*\}, U)$ offen $\forall U$

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(U) &= \{ f \in \mathcal{C}_p(\{*\}, Y)^{\text{ko}} : f(\{*\}) \subseteq U \} \\ &= \mathcal{C}(\{*\}, U) \text{ offen in } \text{ko-Topologie.} \end{aligned}$$

Da die k.o-Topologie die GröÙte Topologie ist, sodass alle
 $\mathcal{C}(\{*\}, U)$ offen sind, genügt es zu zeigen, dass $\varphi(\mathcal{C}(\{*\}, U))$ offen
ist $\forall U \subseteq Y$ offen.

$$\varphi(\mathcal{C}(\{*\}, U)) = \{ f(*) \mid f \in \mathcal{C}(\{*\}, U) \} = U, \text{ weil}$$

jede Abbildung aus $\{*\}$ heraus geht.

Also ist φ stetig und offen und damit ein Homöomorphismus.

(b) Wir bezeichnen die Auswertungsabbildung mit φ .

$$\text{Es gilt } \varphi^{-1}(U) = \bigcup_{\substack{Y \\ U \text{ offen}}} \{ (f, x) \in \mathcal{C}_p(X, Y)^{\text{ko}} \times X : f(x) \in U \}$$

$$= \bigcup_{\substack{(f, x) \in \mathcal{C}_p(X, Y)^{\text{ko}} \times X \\ f(x) \in U}} \mathcal{C}(K_{f, x}, U) \times K_{f, x} \quad \begin{array}{l} \text{mit } K_{f, x} \subseteq \varphi^{-1}(U), \\ K_{f, x} \text{ offen} \end{array}$$

$(h_{f,x}, u) \times h_{f,x}$ ist als Produkt offener Mengen dar,
somit auch die Vereinigung $\Rightarrow \varphi^{-1}(u)$ offen.

$$c) \forall x, y \in Y \Rightarrow \exists U_x, U_y :$$

$$U_x \cap U_y = \emptyset$$

$$f \neq g \in \text{Map}(X, Y)$$

$$\text{z.z.: } \exists f \in U, g \in V : U \cap V = \emptyset$$

$$\begin{array}{ccc} \exists x \in X : & f(x) & \neq g(x) \\ & \cap & \cap \\ & U & \cap & V \\ & \cap & \cap \\ & Y & & \end{array} = \emptyset$$

$$C(fx, u) \cap C(gx, v) = \emptyset$$

aber $\{x\}$ ist kompakt (da jede offene Überdeckung
eine Menge enthält, die x enthält. Diese ist dann die
endliche Teilüberdeckung)

und U bzw. V sind offen, sodass nach Definition
der KO -Topologie auch $C(fx, u)$ und $C(gx, v)$
offen sein müssen.

Es gilt $f \in C(fx, u)$ (da $f(x) \in u$)
und $g \in C(gx, v)$ (da $g(x) \in v$),

sodass wir damit zwei disjunkte Umgebungen gefunden haben.

□