1b) Für $M \in \Gamma_0(N)$ gilt $M = \begin{pmatrix} a & b \\ cN & d \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow g(\ell M\langle z\rangle) = g\left(\ell \cdot \frac{az+b}{cNz+d}\right) = g\left(\frac{a\ell z + b\ell}{c\frac{N}{\ell}\cdot \ell z + d}\right) = g(M'\langle \ell z\rangle) \quad \text{für } M' = \begin{pmatrix} a & b\ell \\ c\frac{N}{\ell} & d \end{pmatrix},$$

$\det M' = ad - b\ell c\frac{N}{\ell} = 1$

$$\Rightarrow M' \in SL_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow g(\ell M\langle z\rangle) = g(M'\langle \ell z\rangle) = \left(c\tfrac{N}{\ell}\cdot \ell z + d\right)^{-k} \cdot g(\ell z) = (cNz+d)^{-k} g(\ell z)$$

$\square$

1c) Es gilt für $M \in \Gamma_0(2)$: $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 2c & d \end{pmatrix}$.

$$\Rightarrow G_2(2M\langle z\rangle) = G_2\left(\frac{2az+2b}{2cz+d}\right) = G_2(M'\langle 2z\rangle) \text{ mit } M' = \begin{pmatrix} a & 2b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det M' = ad-2bc = \det M = 1$$

$$\overset{\det M' = 1}{=} (2cz+d)^2 G_2(2z) - \pi i c(2cz+d)$$

$$\Rightarrow E_2(M\langle z\rangle) = G_2(M\langle z\rangle) - 2G_2(2M\langle z\rangle)$$

$$= (2cz+d)^2 G_2(z) - \pi i 2c(2cz+d) - 2(2cz+d)^2 G_2(2z) + 2\pi i c(2cz+d)$$

$$= (2cz+d)^2 \left(G_2(z) - 2G_2(2z)\right) = (2cz+d)^2 E_2(z)$$

1d)

MF Blatt 6

Joshua Hughes, Ariadit Miftari

a) Sei $f: H \to \mathbb{C}$ Modulform bzgl $Sl_2(\mathbb{Z})$ von Gewicht k

ohne Nst in H

zz $\exists\, d \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{C}$ sodass $f = c \cdot \Delta^d$

Bew

f muss Valenzformel genügen.

$ord(f, z) = 0$ für $z \in H$

$$\Rightarrow \frac{k}{12} = \underset{\mathbb{N}}{\underset{\wedge}{ord(f, \infty)}}$$

$\Rightarrow \exists\, d \in \mathbb{N}: \quad k = d \cdot 12$

$\Rightarrow f \in M_{d \cdot 12}$

und es gilt: $\Delta^d \in M_{d \cdot 12}$

Def $g := f / \Delta$

$\Rightarrow$ g hat keine Nst in H und

da f gleiche Ordnung in $z = \infty$ wie Δ hat

g keinen Pol in ∞

$\Rightarrow g \in M_0 \Rightarrow g \equiv c$

$\Rightarrow f = c \cdot \Delta^d$

b) ZZ: $\forall a \in H \; \exists \; f \in M_{12}$ mit $f(a) = 0, f \not\equiv 0$

Bew

$\Delta : H \to \mathbb{C}$ ist ganze Modulform von Gewicht 12

Def

$g := \Delta(z) - \Delta(a)$ mit $a \in H$

Es gilt $g \in M_{12}$, da $\Delta \in M_{12}$

$\operatorname{ord}(g, a) = 1$ und wegen der Valenzformel

gilt $\operatorname{ord}(g, z) = 0$ mit $z \neq a$

c)

ZZ: $\forall h \in V_k$ gilt $h = f/g$ mit $g \in M_k, f \in M_{\tilde{k}}$

Bew

Nach Struktursatz wissen wir

$$V_k = \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{k/2}}$$

wobei $\mathbb{C}(j) = \left\{ \frac{P(j)}{Q(j)} \mid P, Q \text{ Polynome} \right\}$ und $j(z) = \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$

Für h gilt also:

$$h = \frac{\tilde{P}(j)}{\tilde{Q}(j)} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{k/2}}$$

Sei $n := \max(\deg \tilde{P}, \deg \tilde{Q})$ $\Rightarrow$ $\tilde{P}(j) \cdot \Delta^n$, $\tilde{Q}(j) \cdot \Delta^n$ holom. Modulform

$$\Rightarrow h = \frac{\tilde{P}(j) \cdot \Delta^n \cdot E_4^k}{\tilde{Q}(j) \cdot \Delta^n \; E_6^{k/2}}$$

$\square$

$\boxed{\text{Aufgabe 3}}$

Angenommen $\{P_{1,k}, P_{2,k}, \dots, P_{d,k}\}$ mit $d = \dim_{\mathbb{C}}(S_k)$ ist kein Erzeugendensystem von S_k. Analog wie in Korollar 3.17 schlussfolgern wir, dass eine Spitzenform $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) q^n \in S_k \setminus \{0\}$ existieren muss mit $\langle g \mid P_{n,k} \rangle = 0 \quad \forall 1 \le n \le d$.

$\Rightarrow \quad a_n(g) = 0 \quad \forall 1 \le n \le d$ und $a_0(g) = 0$ wegen $g \in S_k$.

Es gilt demnach $\operatorname{ord}(g, \infty) \ge d + 1 = \dim S_k + 1 = \dim M_k$.

Fallunterscheidung:

$k \not\equiv 2 \mod 12$: $\quad \operatorname{ord}(g,\infty) \ge \dim M_k = \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 > \frac{k}{12}$.

Für $g \neq 0$ gilt aber die Valenzformel, d.h. $\operatorname{ord}(g,\infty) \le \frac{k}{12}$ ↯

$k \equiv 2 \mod 12$:

Fallunterscheidung:

$\operatorname{ord}(g,\infty) = \dim M_k \Rightarrow \quad \operatorname{ord}(g,\infty) = \lfloor \frac{k}{12} \rfloor = \frac{k-2}{12}$

$$g \neq 0 \xRightarrow[\text{Formel}]{\text{Valenz-}} \operatorname{ord}(g,\infty) + \frac{1}{3}\operatorname{ord}(g,\rho) + \frac{1}{2}\operatorname{ord}(g,i) + \sum_{z \neq \rho, i} \operatorname{ord}(g,z) = \frac{k}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\operatorname{ord}(g,\rho) + \frac{1}{2}\operatorname{ord}(g,i) + \sum_{z \neq \rho, i} \operatorname{ord}(g,z) = \frac{k}{12} - \left(\frac{k-2}{12}\right) = \frac{1}{6}$$

Das ist unmöglich, da g holomorph und daher $\operatorname{ord}(g,z) \ge 0 \ \forall z$ ist.

$\operatorname{ord}(g,\infty) > \dim M_k \Rightarrow \operatorname{ord}(g,\infty) \ge \lfloor \frac{k}{12} \rfloor + 1 > \frac{k}{12}$

$g \neq 0 \xRightarrow{\text{Valenzformel}} \frac{k}{12} \ge \operatorname{ord}(g,\infty) > \frac{k}{12}$ ↯

Alle Fälle führen zum Widerspruch $\Rightarrow$ Annahme ist falsch $\square$

A4 $\Delta \in S_{12}$ mit $\Delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$

zz $\forall n \in \mathbb{N}$: $\tau(n) = 0 \overset{①}{\Leftrightarrow} P_{n,12} = 0 \overset{②}{\Leftrightarrow} g_n(n,12) = 0$

Bew:

- $\langle \Delta, P_{n,12} \rangle = a_n(\Delta)$, $\dim(S_{12}) = 1$, $S_{12} = \langle P_{n,12} \rangle$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- $P_{n,12} \in S_{12} \overset{A1}{\Rightarrow} P_{n,12} = c_n \cdot \Delta$

①

- $0 = \tau(n) = a_n(\Delta) = \langle \Delta, P_{n,12} \rangle = \langle \Delta, c_n \Delta \rangle = c_n \cdot \underbrace{\langle \Delta, \Delta \rangle}_{\neq 0,\ \text{da}\ \Delta \neq 0}$

  $\Rightarrow c_n = 0 \Rightarrow P_{n,12} = 0$

- $P_{n,12} = 0 \Rightarrow \langle \Delta, 0 \rangle = 0 = \tau(n)$

②

$g_n(n,12) = a_n(P_{n,12})$ da g_n Fourierkoeff. von $P_{n,12}$ und $P_{n,12} \in S_{12}$

$\Rightarrow g_n(n,12) = a_n(P_{n,12}) = \langle P_{n,12}, P_{n,12} \rangle$

- $g_n(n,12) = 0 \overset{\text{pos. def}}{\Rightarrow} P_{n,12} = 0$
- $P_{n,12} = 0 \Rightarrow g_n(n,12) = 0$