Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 8
Abgabe: *Freitag, 11.06.2021, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Tor 1:0). **(6 Punkte)**
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $d, e \in \mathbb{N}$ Teiler von n. Ferner sei $i \in \mathbb{N}_0$.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$. *Hinweis:* Verwenden Sie Blatt 6, Aufgabe 1.

Aufgabe 2 (Tor 2:0). **(6 Punkte)**
Vermöge des Morphismus von $\mathbb{C}$-Algebren $\mathbb{C}[X,Y] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C}$, der durch $X \mapsto 0$ und $Y \mapsto 0$ gegeben ist, wird $\mathbb{C}$ zu einem $\mathbb{C}[X,Y]$-Modul. Zeigen Sie:

(a) Zeigen Sie, dass die Folge

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}[X,Y] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}[X,Y]^2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}[X,Y] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}[X,Y]$-Modul ist, wobei $\alpha(1) = (X, -Y)$ und $\beta(f,g) = Yf + Xg$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

(c) Gibt es eine kürzere projektive Auflösung von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}[X,Y]$-Modul?

Aufgabe 3 (Injektive Auflösungen). **(6 Punkte)**
Sei $n \in \mathbb{N}$. Nach Blatt 6, Aufgabe 1 ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist injektiv als Modul über sich selbst. Zeigen Sie, dass für einen Primteiler p von n eine undendliche periodische Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \dots$$

von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul existiert.

Aufgabe 4 (Offene und abgeschlossene Immersionen[1]). **(6 Punkte)**
Eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, wenn sie eine stetige Umkehrabbildung hat.[2] Sei A ein kommutativer Ring mit Eins.

(a) Sei $f \in A$. Zeigen Sie, dass die zu dem Lokalisierungshomomorphismus $\phi\colon A \to A_f$ assoziierte Abbildung $\phi^*\colon \operatorname{Spec}(A_f) \to \operatorname{Spec}(A)$ der Spektren einen Homöomorphismus von $\operatorname{Spec}(A_f)$ auf die basisoffene Teilmenge $D(f)$ induziert.

(b) Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die zur Projektion $\pi\colon A \to A/\mathfrak{a}$ assoziierte Abbildung $\pi^*\colon \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \operatorname{Spec}(A)$ der Spektren einen Homöomorphismus von $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a})$ auf $V(\mathfrak{a})$ induziert.

---

[1] Diese Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.
[2] D.h. ein Homöomorphismus ist ein Isomorphismus in der Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen.