Übungen zu Funktionentheorie 1 Musterlösung Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 5
Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 29. Mai

Jede Aufgabe ist vier Punkte wert. Sei D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

19. Aufgabe: Seien α, β stetige, stückweise differenzierbare Abbildungen $[0,1] \to D$. Diese sind *homotop mit festen Randpunkten*, wenn es ein stetiges $H : [0,1]^2 \to D$ gibt mit $H(0,t) = \alpha(t)$ und $H(1,t) = \beta(t)$ und $H(s,0) = \alpha(0) = \beta(0)$ und $H(s,1) = \alpha(1) = \beta(1)$ für alle $0 \leq s,t \leq 1$. Zeigen Sie für jede in D holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$

$$\int_\alpha f(z)\mathrm{d}z = \int_\beta f(z)\mathrm{d}z \ .$$

Lösung: Der Fall, wo α, β und H differenzierbar sind, steht bei D. Salamon: "Funktionentheorie" in Lemma 3.12 auf Seite 43, mit einem sehr eleganten Beweis. Da wir nur voraussetzen, dass H stetig ist, müssen wir härter arbeiten.

Lemma (Lebesgue). Sei K ein kompakter metrischer Raum mit einer Überdeckung $K = \bigcup_{i\in I} U_i$ durch offene Teilmengen $U_i \subseteq K$ mit einer Indexmenge I. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ sodass jede Teilmenge mit Durchmesser $< \epsilon$ in einer der Teilmengen U_i enthalten ist.

Beweis. Da K kompakt ist, können wir annehmen, dass die Überdeckung endlich ist und aus $n = \#I$ offenen Teilmengen besteht. Obda gilt $U_i \neq K$ für alle $i \in I$. Das Komplement $V_i = K \setminus U_i$ von U_i ist abgeschlossen in K und daher kompakt. Insbesondere ist die Abstandsfunktion $x \mapsto d(x, V_i) = \min_{y\in V_i} d(x,y)$ stetig (Dreiecksungleichung) und genau dann Null, wenn $x \in V_i$. Die Funktion

$$g : K \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad , \quad g(x) := \frac{1}{n}\sum_{i\in I} d(x, V_i)$$

ist stetig auf dem Kompaktum K und nimmt daher ihr Minimum $g(x_0) = \delta$ in einem $x_0 \in K$ an. Wäre x_0 in allen V_i enthalten, dann wäre x_0 nicht in $K = \bigcup_{i\in I} U_i$, was ein Widerspruch ist. Also ist $\delta > 0$. Sei nun $A \subseteq K$ eine Teilmenge mit Durchmesser $< \delta$, dann gilt für beliebig gewähltes $a \in A$ die Eigenschaft $A \subseteq B_\delta(a)$. Weil $g(a) \geq \delta$ nach Konstruktion, so gibt es mindestens ein $i_0 \in I$ mit $d(a, V_{i_0}) \geq \delta$. Damit ist $A \subseteq B_\delta(a) \subseteq U_{i_0}$. QED

Beweis der Aufgabe:
Schritt 1: Wir beweisen die Aussage für den Fall, dass D sternförmig ist. Definiere den Weg

$$\gamma : [0,2] \to U \quad , \quad \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & 0 \leq 1 \ , \\ \beta(2-t) & 1 < t \leq 2 \ . \end{cases}$$

Nach Cauchy-Integralsatz ist

$$0 = \oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\alpha f(z)\mathrm{d}z - \int_\beta f(z)\mathrm{d}z \ .$$

Schritt 2: Sei ab jetzt D beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Für $I := [0,1]$ ist das Bild $\Gamma := H(I^2)$ kompakt. Da D offen ist, gibt es für jeden Punkt $x \in \Gamma$ ein $r = r(a)$, sodass der Ball $B_{r(a)}(a)$

vollständig in D enthalten ist. Damit bildet $U_a = H^{-1}(B_{r(a)})(a)$ eine offene Überdeckung von I^2. Sei $\delta > 0$ die Lebesguezahl zu dieser Überdeckung. Fixiere eine natürliche Zahl $n > 2/\delta$ so groß dass für beliebige $t, t' \in I$ gilt

$$|t - t'| < 1/n \implies |\alpha(t) - \alpha(t')| < \delta \text{ und } |\beta(t) - \beta(t')| < \delta \ .$$

Das ist möglich weil α und β gleichmäßig stetig sind.

Schritt 3: Für je zwei Punkte $u, v \in \mathbb{C}$ definieren wir uv als den linearen Weg $t \mapsto vt + u(1-t)$ und $\int_a^b f(z)\mathrm{d}z$ als das zugehörige Wegintegral, wenn dieser Weg in D liegt. Definiere für ganzzahlige $0 \leq j, k \leq n$ den Punkt

$$z_{j,k} = H(j/n, k/n) \in \Gamma \ .$$

Nach dem obigen Lemma von Lebesgue liegen die vier Punkte $z_{j,k}$, $z_{j+1,k}$, $z_{j,k+1}$, $z_{j+1,k+1}$ alle in der sternförmigen (sogar konvexen) Kugel $B_{r(a)}(a)$ für ein geeignetes $a \in \Gamma$. Die linearen Verbindungsstrecken zwischen diesen Punkten liegen also auch alle in $B_{r(a)}(a)$. Nach Schritt 1 verschwindet damit das Integral über den geschlossenen Streckenzug entlang dieser vier Punkte:

$$\int_{z_{j,k}}^{z_{j+1,k}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{z_{j+1,k}}^{z_{j+1,k+1}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{z_{j+1,k+1}}^{z_{j,k+1}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{z_{j,k+1}}^{z_{j,k}} f(z)\mathrm{d}z = 0 \ .$$

Schritt 4: Wir summieren diese Ausdrücke über j und k und kürzen $\int_u^v f(z)\mathrm{d}z + \int_v^u f(z)\mathrm{d}z = 0$, dann bleibt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{z_{j,0}}^{z_{j+1,0}} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{z_{j+1,n}}^{z_{j,n}} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_{0,k+1}}^{z_{0,k}} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_{n,k}}^{z_{n,k+1}} f(z)\mathrm{d}z = 0 \ .$$

Für alle j gilt $z_{j,0} = H(j/n, 0) = \alpha(0)$ und $z_{j,n} = H(j/n, n) = \alpha(1)$. Damit sind die ersten beiden Summen gleich Null. Wir betrachten jetzt die dritte Summe. Nach Wahl von n liegt der Wegabschnitt $\alpha_k(t) := \alpha((t+k)n)$ von $z_{0,k} = \alpha(\frac{k}{n})$ nach $z_{0,k+1} = \alpha(\frac{k+1}{n})$ vollständig in einer konvexen Kugel in D. Schritt 1 liefert

$$-\int_{\alpha_k} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_{0,k+1}}^{z_{0,k}} f(z)\mathrm{d}z \ .$$

Mit dem gleichen Argument folgt

$$\int_{\beta_k} f(z)\mathrm{d}z = \int_{z_{n,k}}^{z_{n,k+1}} f(z)\mathrm{d}z$$

und wir erhalten

$$0 = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\beta_k} f(z)\mathrm{d}z - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_k} f(z)\mathrm{d}z\right) = \int_{\beta} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\alpha} f(z)\mathrm{d}z \ .$$

QED

20. Aufgabe: Sei $f: D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\zeta \in D$ fest. Zeigen Sie: Die Funktion

$$g: D \to \mathbb{C} \quad , \quad g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} & z \neq \zeta \ , \\ f'(\zeta) & z = \zeta \ , \end{cases}$$

ist holomorph. Hinweis: Riemannscher Hebbarkeitssatz.

Lösung: Wir verwenden Kriterium E7 (Potenzreihenentwicklung). Die Funktion g ist holomorph in $\{z \in D \mid z \neq \xi\} = D \setminus \{\xi\}$, weil Verkettungen holomorpher Funktionen holomorph sind. Damit lässt sich g um jeden Punkt $z \in D \setminus \{\xi\}$ in eine Potenzreihe entwickeln. Für den Punkt ξ gilt $\lim_{z\to\xi} g(z) = f'(\xi) = g(\xi)$, also ist g zumindest stetig in ξ. Es bleibt zu zeigen, dass sich g in einer hinreichend kleinen Umgebung von ξ als Potenzreihe entwickeln lässt. Nach Annahme ist f holomorph, also gibt es eine Umgebung U von ξ in der

$$P_f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(z-\xi)^n$$

gegen $f(z)$ konvergiert. Nun gilt für $z \in U \setminus \{\xi\}$

$$g(z) = \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(z-\xi)^{n-1} \ .$$

Insbesondere konvergiert die Potenzreihe

$$P_g(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)(z-\xi)^m$$

für $z \in U \setminus \{\xi\}$ gegen $g(z)$. Setzen wir nun $z = \xi$ in die Potenzreihe ein, so verschwinden alle Terme mit $m > 0$, insbesondere konvergiert die Reihe aus trivialen Gründen. Für den verbleibenden Term bei $m = 0$ benutzen wir die Konvention $0^0 = 1$ und erhalten

$$P_g(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\xi)(\xi-\xi)^m = \frac{1}{(0+1)!} f^{(0+1)}(\xi)(\xi-\xi)^0 = f^{(1)}(\xi) = f'(\xi) = g(\xi) \ .$$

Insgesamt konvergiert die Potenzreihe $P_g(z)$ in U gegen $g(z)$. In allen anderen Punkten $z \neq \xi$ ist klar, dass g sich lokal in eine Potenzreihe entwickeln lässt, weil g holomorph ist auf $U \setminus \{\xi\}$. Somit ist g holomorph nach $E7 \Rightarrow E1$. **Bemerkung:** Die Aufgabe war ursprünglich anders gedacht.

21. Aufgabe: Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \sqrt{2}$. Zeigen Sie $f(0) \in \mathbb{R}$. Hinweis: Cauchy-Integralformel.

Lösung: Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = \sqrt{2}\exp(2\pi i t)$. Nach Cauchy-Integralformel ist

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-0} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)} \gamma'(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 f(\gamma(t)) \mathrm{d}t \ .$$

Der Integrand ist rein reell, also ist auch das Integral reell.

22. Aufgabe: Sei $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit komplexen a_n, die in einer offenen Kreisscheibe $U \subseteq \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $P(z)$ in U holomorph ist mit holomorpher Ableitung

$$P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \ .$$

Hinweis: Gleichmäßige Konvergenz. Hier sei $0^0 = 1$.

Das ist ein Standard-Argument. Siehe zum Beispiel Satz 1.5.2 auf Seite 7 in Folkmar Bornemann: Funktionentheorie.