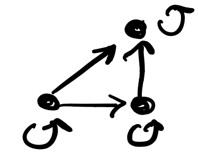
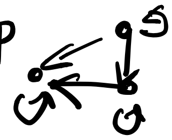
Kategorien: **Objekte** $X, Y, \dots, A, B, \dots$

Morphismen f, g, φ, $\varphi \in \mathrm{Mor}(X,Y)$

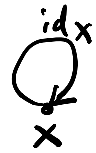
$X \xrightarrow{\varphi} Y$ übliche Schreibweise

$\overset{\bullet}{X} \xrightarrow{\varphi} \overset{\bullet}{Y}$ Grapheninterpretation

$\mathcal{C}$ 

$\mathcal{C}^{opp}$ 

Kategorie vec_k, ab, set, top ...



- $id_X \in \mathrm{Mor}(X,X)$
- $\varphi \in \mathrm{Mor}(X,Y)$, $\psi \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$ $\exists\, \psi \circ \varphi \in \mathrm{Mor}(X,Y)$

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "\psi"] & \\ X \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi\circ\varphi"'] & & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z) &\longrightarrow \mathrm{Mor}(X,Z) \\ (\varphi, \psi) &\longmapsto \psi \circ \varphi \end{aligned}$$

- $id_X \circ \varphi = \varphi \circ id_Y = \varphi$
- $(\varphi \circ \psi) \circ \lambda = \varphi \circ (\psi \circ \lambda)$

Funktor:

$$\begin{aligned} F: \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ X &\longmapsto F(X) \\ (X \xrightarrow[\varphi]{} Y) &\longmapsto F(X) \xrightarrow[F(\varphi)]{} F(Y) \end{aligned}$$

geforderd wird:

$$\left.\begin{aligned} &① \quad F(id_X) = id_{F(X)} \\ &② \quad F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi) \end{aligned}\right\} \text{kovariante Funktor}$$

Beispiel: $vec_k \longrightarrow set$

$$\begin{array}{ccc} V & & V \\ f \downarrow & & f \downarrow \\ W & & W \end{array}$$

Bemerkung: Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, dann auch $\mathcal{C}^{opp}$ mit $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{opp}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, aber $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^{opp}}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,X)$

__kontravarianter Funktor:__ von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$

$$F(X) \xleftarrow{F(\varphi)} F(Y) \quad \text{für } \varphi \in Mor(X,Y)$$

und $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$.

ist dasselbe wie ein Funktor von $\mathcal{C}^{opp}$ nach $\mathcal{D}$.

__Beispiel:__ $vec_k \xrightarrow{F} vec_k$ mit $F(X) = X^*$ (Dualraum).

__Beispiel:__ $Ob(I) = \{0,1,2,3,\dots\}$ $\quad Mor(i,j) = \begin{cases} \rightarrow & \text{falls } j \geq i \\ \emptyset & \text{falls } j < i \end{cases}$

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \bullet$ $\quad \mathbb{N}$ $\quad \lim_{n\to\infty} A_n$

Eine Kategorie I mit $i,j \in I$ $\exists u,v$ $\quad i \xrightarrow{u} k$, $j \xrightarrow{v} k$ $\quad i \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} j \xrightarrow{w} k$ $\quad w \circ u = w \circ v$ heißt Indexkategorie

Appendix (direkte Limiten)

Sei I eine Indexkategorie. Wir nehmen an daß für je zwei Objekte $i, j \in I$ ein geeignetes Objekt $k \in I$ existiert mit Morphismen $i \to k$ und $j \to k$; weiterhin soll für je zwei Morphismen $u, v \in Mor(i,j)$ ein Morphismus $w : j \to k$ existieren mit $w \circ u = w \circ v$. Einen kovarianten Funktor $I \to Ab$ nennt man dann ein gerichtetes System $(A_i, \phi_{i\to j}, i,j \in I, i \to j \in Mor(i,j))$ abelscher Gruppen. Eine Teilmenge $J \subset I$ heißt kofinal, falls $\forall i \in I$ ein Morphismus $i \to j$ existiert mit $j \in J$.

$\bullet_{i \in I} \longrightarrow \bullet_{j \in J}$

Sei $A_i, \phi_{i\to j}, i,j \in I$ ein derartiges gerichtetes System. $\boxed{A_j \ni a_j \sim a_i \in A_i}$ falls $\exists k, j \to k, i \to k$ mit $\boxed{\phi_{i\to k}(a_i) = \phi_{j\to k}(a_j)}$, definiert eine Äquivalenzrelation auf $\bigsqcup_{i\in I} A_i$. Weiterhin definiert

$$\lim_{\to} A_i = \lim_{i\in I} A_i = \bigsqcup_{i\in I} A_i / \sim$$

Äquivalenzklassen von $\bigsqcup_{i\in I} A_i$

den **direkten Limes** des gerichteten Systems.

I: $i \xrightarrow{f} j \in J$

$[a_i] = [a_j]$

$A_i \xrightarrow{\phi_f} A_j$, $\quad a_i \mapsto \phi_f(a_i) = a_j$

Bemerkung. Ist J eine **kofinale** Unterkategorie von I, dann gilt

$$\boxed{\lim_{j\in J} A_j = \lim_{i\in I} A_i}.$$

$A_i \xrightarrow{f} A_k \rightarrow A_r$, $A_j \xrightarrow{g} A_r$, $A_\ell \xrightarrow{h} A_r$, $\quad \phi_i = \phi_j$, $a = \ell$

Wir bemerken weiterhin

$I \longrightarrow Ab$

$i \longmapsto A_i$, $\quad u \downarrow \quad \downarrow \phi_u$, $\quad j \longmapsto A_j$

$a_i \in A_i \xrightarrow{\phi_u} A_k$, $\quad a_j \in A_j \xrightarrow{\phi_v} A_k$

$a_i \sim a_j$

__Beispiel:__ $0 \in A_i \sim 0 \in A_j$

$A_i \overset{\phi_u}{\underset{\phi_v}{\rightrightarrows}} A_j \xrightarrow{\phi_w} A_k$

$\phi_w \circ \phi_u = \phi_w \circ \phi_v$

$A_i \xrightarrow{f} A_r$, $\quad A_j \xrightarrow{g} A_r$, $\quad A_\ell \xrightarrow{h} A_r$, $\quad a = b = a$, $i \; j \; \ell$

gruppenstruktur:

Es soll $[a_i] + [a_j]$ erklärt werden in $\varinjlim A_i$

$a_i \in A_i$ $\quad a_i \sim a_l$

$a_j \in A_j$ $\quad \wr$ $\quad a_k \in A_k$

$\bar a_i$, A_k, $\bar a_j$, A_r, A_l, $\bar a_j'$, $\bar a_k$

obdA ist $a_i \rightsquigarrow \bar a_i$, $a_j \rightsquigarrow \bar a_j \in A_k$

$\bar a_i + \bar a_j \in A_k$, da A_k abelsche Gruppe ist.

$[a_i]+[a_j] \underset{Def.}{=} [\bar a_i + \bar a_j]$.

$A_i \to A_r$, $A_k \to A_r$, $A_l \to A_r$

$\bar a_i$, $\bar a_j = \bar a_k$

$\bar a_i + \bar a_j = \bar a_i + \bar a_k$

$i \xrightarrow{u} j$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "\phi_u"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & A_i' \arrow[d, "\phi_u'"] \\ A_j \arrow[r, "\psi_j"'] & A_j' \end{tikzcd}$$

ψ_i homos + Kompatibilität des Diagramms:

$\phi_u' \circ \psi_i = \psi_j \circ \phi_u$

a) $\lim_i A_i$ ist eine abelsche Gruppe. ✓

b) Ist $\psi_i : A_i \to A_i'$ eine kompatibles System von Gruppenhomomorphismen, dann indiziert dies einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \lim_i A_i \to \lim_i A_i'$ der direkten Limiten.

$\psi([a_i]) = [\psi_i(a_i)]$ $\qquad \psi([a_i]+[a_j]) \overset{?}{=} \psi([a_i]) + \psi([a_j])$

ObdA $i=j$

c) Sind alle A_i Ringe, dann ist $\lim_i A_i$ ein Ring. Sind ψ_i wie oben sogar Ringhomorphismen, dann ist der Limes ψ ein Ringhomomorphismus.

d) Der direkte Limes ist ein **exakter Funktor**. Das heißt: Sind $A_i' \to A_i \to A_i''$ kompatible Systeme von exakten Sequenzen abelscher Gruppen. Dann induziert dies eine exakte Sequenz von direkten Limiten

$$\lim_i A_i' \xrightarrow{f} \lim_i A_i \xrightarrow{g} \lim_i A_i''.$$

in Ab $\quad \boxed{\mathrm{Kern}(g) \overset{!}{=} \mathrm{Bild}(f)}$

In Ab: $A_i' \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{g_i} A_i''$ nennt man exakt bei A_i, falls gilt $\boxed{\mathrm{Kern}(g_i) = \mathrm{Bild}(f_i)}$ für alle $i \in I$

$$\begin{tikzcd} A_i' \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\phi_u'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & A_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\phi_u"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & A_i'' \arrow[d, "\phi_u''"] \\ A_j' \arrow[r, "f_j"'] & A_j \arrow[r, "g_j"'] & A_j'' \end{tikzcd}$$

Beweis der letzten Aussage d): Gegeben $a \in \lim_i A_i$ – representiert durch $a_i \in A_i$ – im Kern. Das heißt, es existiert ein $j \in I$ mit $i \to j$ und $Bild(a_i) = 0$ in A_j''. Alle Objekte i, welche von j ausgehen (d.h. $j \to i$), definieren eine kofinale Teilkategorie J von I. Unter dem mittleren senkrechten Isomorphismus entspricht a der Äquivalenzklasse des Element $a_j := \phi_{i\to j(i)}(a_i)$ in $\lim_{j\in J} A_j$. Das Bild von a_j in A_j'' is Null. Daher ist a_j das Bild eines Elementes $a_j' \in A_j'$. Die Äquivalenzklasse a' von a_j' – geliftet auf die obere Zeile – bildet auf a ab.

für alle $i \xrightarrow{u} j$ Morphismen u von I.

Die Exaktheit des Limes Funktors folgt daher unmittelbar aus dem folgenden Diagramm

element im Kern von g

$$a = a_i/\sim \longmapsto 0 = [a_j']$$

$$\begin{array}{ccccc} lim_{i\in I} A_i' & \longrightarrow & \lim_{i\in I} A_i & \longrightarrow & \lim_{i\in I} A_i'' \\ \| & & \| & & \| \\ lim_{j\in J} A_j' & \longrightarrow & \lim_{j\in J} A_j & \longrightarrow & \lim_{j\in J} A_j'' \end{array}$$

$$a_j'/\sim \longmapsto a_j/\sim$$

offensichtlich gilt nach Annahme: $\mathrm{Kern}(g_i) \supseteq \mathrm{Bild}(f_i)$

d.h.: $g_i \circ f_i = 0 \quad \forall i \in I$

$\varinjlim$ ist ein Funktor.

$\boxed{g \circ f = 0}$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Kern}(g) \supseteq \mathrm{Bild}(f)}$

Zu zeigen: $\mathrm{Kern}(g) \subseteq \mathrm{Bild}(f)$

$\varinjlim$: Kat. der I gerichteten abelschen Gruppen $\to$ Ab

$(A_i, \ldots)_{i\in I} \longmapsto \varinjlim A_i$

$[a_j']$ $\qquad a = [a_i]$ $\qquad [0]$

$a_i \in A_i$ $\qquad g_i(a_i) \in A_i''$

$a_j' \longmapsto \bar a_i \in A_j \longrightarrow 0 \in A_j''$

$\bar a_j' \longmapsto \bar a_k \in A_k$

Im Limes gilt $f([a_j']) = a$

$$\begin{tikzcd} F'(i) \arrow[r] \arrow[d, "F'(u)"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & F(i) \arrow[r] \arrow[d, "F(u)"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & F''(i) \arrow[d, "F''(u)"] \\ F'(j) \arrow[r] & F(j) \arrow[r] & F''(j) \end{tikzcd}$$

in Ab

$\varinjlim F'(i) \to \varinjlim F(i) \to \varinjlim F''(i)$

$\underbrace{F: I \to Ab}_{\text{Objekte der Fkt}}$, $\quad F' \to F \to F''$, $\quad \varinjlim$ als Funktor von Funktor nach Ab hat.