# Funktionalanalysis - Übungsblatt 10

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

**Abgabe:** 12. Januar 2024, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

**Aufgabe 10.1** 4 Punkte

Sei $V$ ein Hilbertraum und $F \in \mathcal{L}(V)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

$(i)$ $F$ ist unitär.

$(ii)$ $F$ ist isometrisch und surjektiv.

$(iii)$ $F$ ist ein isometrischer Isomorphismus.

**Aufgabe 10.2** 4 Punkte

[1+2+1 Punkte]

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$.

a) Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie

$$T = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad Tv \perp v \qquad \forall v \in H.$$

Sei nun $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein beliebiger $\mathbb{K}$-Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$.

b) Zeigen Sie, dass

$$\ker(T^*) = (\operatorname{im}(T))^\perp .$$

Folgern Sie, dass $(\operatorname{im}(T^*))^\perp = \ker(T)$ und $((\ker(T^*))^\perp = \overline{\operatorname{im}(T)}$.

c) Sei nun $\overline{\operatorname{im}(T - \lambda I)} \neq H$. Zeigen Sie, dass $\lambda^*$ ein Eigenwert von $T^*$ ist, also dass ein $0 \neq u \in H$ existiert mit

$$T^* u = \lambda^* u.$$

**Aufgabe 10.3** 4 Punkte

[2+1+1 Punkte]

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $T$ ist normal genau dann, wenn $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in H$. Folgern Sie, dass für normale Operatoren $T \in \mathcal{L}(H)$ gilt $\ker(T) = \ker(T^*)$.

(b) Der Operator $S = T^*T$ ist selbstadjungiert und $\ker(S) = \ker(S^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

(c) $T$ ist invertierbar genau dann, wenn $T$ von unten beschränkt ist (vgl. Aufgabe 8.2) und $\ker(T^*) = 0$. Folgern Sie, dass normale Operatoren $T \in \mathcal{L}(H)$ bereits invertierbar sind, wenn sie lediglich von unten beschränkt sind.

**Aufgabe 10.4** 4 Punkte

[1+2+1 Punkte]

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum, $V \subset H$ eine abgeschlossener Unterraum und $P \in \mathcal{L}(H)$.

(a) Nehmen Sie an, dass $P^2 = P$. Zeigen Sie, dass $\ker(P)$ und $\operatorname{im}(P)$ abgeschlossen sind.

(b) Beenden Sie den Beweis von Satz 4.16, d.h. sei $P$ die Projektion auf $V$. Zeigen Sie, dass $P$ selbstadjungiert ist und $P^2 = P$ erfüllt.

(c) Nehmen Sie an, dass $P^2 = P$. Zeigen Sie, dass $\|P\| \geq 1$ oder $P = 0$. Folgern Sie, dass für Projektionen stets gilt $\|P\| \in \{0, 1\}$.