Aufgabe 1

(a) Bekanntlich ist in Kugelkoordinaten

$$\vec{x} = R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

und daher bei konstantem Radius

$$\dot{\vec{x}} = \left(R \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}\cos(\vartheta)\cos(\varphi) - \dot{\varphi}\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \dot{\vartheta}\cos(\vartheta)\sin(\varphi) + \dot{\varphi}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\dot{\vartheta}\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \right),$$

woraus wir

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}^2 &= R^2 \left[\dot{\vartheta}^2\cos^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) + \dot{\vartheta}^2\cos^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) + \dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + \dot{\vartheta}^2\sin^2(\vartheta)\right] \\ &= R^2 \left[\dot{\vartheta}^2\cos^2(\vartheta) + \dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta) + \dot{\vartheta}^2\sin^2(\vartheta)\right] \\ &= R^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta)\right) \end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung ist $\dot{\varphi} = \omega$

$$= R^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2(\vartheta)\right)$$

Nun gilt

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - m \cdot g \cdot x_3 = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2(\vartheta)\right) - mgR\cos(\vartheta)$$

(b) Da es sich hier um ein konservatives System mit holonom-skleronomen Zwangsbedingungen handelt, ist

$$H = E = T + V = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2\sin^2(\vartheta)\right) + mgR\cos(\vartheta).$$

(c) Aus b sieht man sofort, dass H der Gesamtenergie entspricht und da $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, folgt daraus sofort die Energieerhaltung.

(d) Der kanonisch konjugierte Impuls ist

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mR^2\dot{\vartheta}.$$

Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta}$$

und

$$-\dot{p}_\vartheta = \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2}mR^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) - mgR\sin(\vartheta)$$

(e) Setzt man den kanonisch konjugierten Impuls in die zweite der kanonischen Gleichungen ein, so erhält man

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} mR^2\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2}mR^2 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) - mgR\sin(\vartheta).$$

Mit $\dot{\vartheta} = 0$ folgt daraus

$$\frac{1}{2}mR^2 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) - mgR\sin(\vartheta) = 0.$$

Für $\vartheta = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ ist diese Bedingung erfüllt. Sonst teilen wir durch $mR\sin(\vartheta)$ und erhalten

$$R\cos(\vartheta) = 2g.$$

Aufgabe 2

(a) $L = T - V = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2$, $H = T + V = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$.

(b) Die kanonischen Gleichungen sind

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

und

$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q},$$

wobei p durch

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

gegeben ist. Wir können H damit auch schreiben als $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$. Nun gilt:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -m\omega^2 q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot y$$

Diese Gleichung wird gelöst durch $\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}_0$ mit $A = m\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m^2} \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$. Wir stellen fest

$$A^2 = m\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m^2} \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot m\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m^2} \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = m^2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\omega^2}{m^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega^2}{m^2} \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot E_2.$$

Es gilt also

$$
\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^{2n}}{(2n)!} \\
&= A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-\omega^2 \cdot E_2)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-\omega^2 \cdot E_2)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{\omega} A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} + E_2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{\omega} A \cdot \sin(\omega t) + E_2 \cos(\omega t) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) \\ m\omega \cos(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$