

Aufgabe	1.1	1.2	1.3	Z1.1	Σ
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 1

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
 Denis Brazke

denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 1.1 (Maßerweiterung)

5 Punkte

Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Wir definieren

$$\mathcal{A}_\mu := \{A \subset X : \text{Es existiert } B \in \mathcal{A} \text{ und eine } \mu\text{-Nullmenge } C \in \mathcal{A} : A \triangle B \subset C\}. \quad (1.1)$$

Weiterhin definieren wir $\bar{\mu}: \mathcal{A}_\mu \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\bar{\mu}(A) = \mu(B), \quad \text{mit } A \triangle B \subset C \text{ aus (1.1)}. \quad (1.2)$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{A}_μ eine σ -Algebra auf X ist, und dass $\bar{\mu}$ ein Maß ist.

Tipp: Um die Wohldefiniertheit von $\bar{\mu}$ zu zeigen, betrachten Sie zu zwei Zerlegungen $A \triangle B \subset C$ und $A \triangle B' \subset C'$ die Menge $B \triangle B'$ und nutzen Sie die algebraischen Eigenschaften der symmetrischen Differenz.

Aufgabe 1.2 (Maßproblem)

5 Punkte

Sei $X := [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu: \mathcal{P}(X) \rightarrow \{0, 1\}$ existiert, so dass $\nu(A) = 0$ für alle endlichen Mengen $A \subset X$.
- Wir definieren

$$\mathcal{A} := \{A \subset X : A \text{ ist höchstens abzählbar, oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}. \quad (2.1)$$

Weiterhin definieren wir die Abbildung $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ höchstens abzählbar ist,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Zeigen Sie, dass \mathcal{A} eine σ -Algebra ist, und dass μ ein Maß auf \mathcal{A} definiert.

- Wieso widerspricht b) nicht a)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Tipp: Zu a): Nutzen Sie die Intervallschachtelung.

Aufgabe 1.3 (π - und Dynkinsystem)

5 Punkte

Sei X eine Menge und sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Dynkinsystem, d.h.

- $\emptyset, X \in \mathcal{D}$,
- $A \in \mathcal{D} \implies A^c \in \mathcal{D}$,
- $A_i \in \mathcal{D}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$.

Sei weiterhin $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}$ ein π -System, d.h. $\mathcal{K} \neq \emptyset$ und $A \cap B \in \mathcal{K}$ für alle $A, B \in \mathcal{K}$.

- Zeigen Sie, dass \mathcal{D} eine σ -Algebra ist, falls \mathcal{D} zusätzlich ein π -System ist.

b) Sei $\mathcal{D}_0 := \delta(\mathcal{K})$ und $D \in \mathcal{D}_0$. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{H}(D) := \{F \in \mathcal{D}_0 : F \cap D \in \mathcal{D}_0\}. \quad (3.1)$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}(D)$ ein Dynkin-System ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}(D) = \mathcal{D}_0$ für alle $D \in \mathcal{D}_0$.

d) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{D}$.

Tipp: Zu c): Betrachten Sie zuerst $\mathcal{H}(K)$ für $K \in \mathcal{K}$ und schließen Sie daraus, dass $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}(D)$ für alle $D \in \mathcal{D}_0$.

Zusatzaufgabe 1.1 (Liminf und Limsup für Mengen)

3 Punkte

Sei X eine Menge und sei $A_k \subset X$ eine Folge.

a) Zeigen Sie, dass

$$A_* := \liminf_{k \rightarrow \infty} A_k = \{x \in X : x \in A_k \text{ für alle bis auf endlich viele } k \in \mathbb{N}\}, \quad (4.1)$$

$$A^* := \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k = \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\}. \quad (4.2)$$

b) Sei $A \subset X$ eine Menge. Wir definieren die charakteristische Funktion (oder Indikatorfunktion)

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.3)$$

Zeigen Sie, dass

$$\chi_{A_*} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \chi_{A_k}, \quad \chi_{A^*} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \chi_{A_k}. \quad (4.4)$$

c) Sei $X = [0, 1)$. Zerlegen Sie das Intervall $[0, 1)$ nacheinander in $m = 1, 2, 3, \dots$ gleich lange Intervalle $[\frac{n-1}{m}, \frac{n}{m})$ für $1 \leq n \leq m$ und nummerieren Sie die entstandenen Intervalle A_k fortlaufend durch, so dass

$$A_1 = [0, 1), \quad A_2 = [0, \frac{1}{2}), \quad A_3 = [\frac{1}{2}, 1), \quad (4.5)$$

$$A_4 = [0, \frac{1}{3}), \quad A_5 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \quad \dots \quad (4.6)$$

Bestimmen Sie A_* und A^* . Begründen Sie Ihre Antwort.