Gewöhnliche Differentialgleichungen - Übungsblatt 7

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Christian Düll

Abgabe: 10. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 7.1 4 Punkte

Betrachten Sie die Systeme

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} X \qquad \text{und} \qquad Y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} Y$$

und finden Sie eine explizite topologische Konjugation zwischen ihnen.
Hinweis: Verwenden Sie die Übergangsmatrix zwischen den Matrizen.

Aufgabe 7.2 6 Punkte

Betrachten Sie für positive Parameter a, b mit $a \neq 1$, $a \neq b$, $b > 1$ das folgende System

$$\begin{cases} x' = & x(-x - y + 1), \\ y' = & y(-ax - y + b). \end{cases} \tag{1}$$

a) Finden Sie die Nullklinen[1] von (1) und bestimmen Sie alle biologisch relevanten Fixpunkte in Abhängigkeit von a und b, d.h. alle Fixpunkte $(\bar{x}, \bar{y})$ mit $\bar{x}, \bar{y} \geq 0$.

b) Linearisieren Sie das System (1) und untersuchen Sie die Stabilität der biologisch relevanten Fixpunkte in der Linearisierung.

c) Können Sie mit ihren Ergebnissen aus b) Rückschlüsse auf das Verhalten der Fixpunkte im ursprünglichen System ziehen? Skizzieren Sie zusätzlich die Phasendiagramme des linearisierten und des ursprünglichen Systems.

Aufgabe 7.3 6 Punkte

Wir betrachten das nichtlineare System

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 4x^3 \end{cases} . \tag{2}$$

a) Linearisieren Sie das System um seinen Gleichgewichtspunkt y^*, bestimmen Sie die linearen invarianten Eigenräume und skizzieren Sie das Phasendiagramm[1] des linearisierten Systems.

b) Folgern Sie, dass y^* ein nichtlinearer Sattelpunkt ist. Lösen Sie (2) explizit und finden Sie die stabile und die instabile Menge von y^*.

c) Finden Sie eine topologische Konjugation zwischen dem nicht-linearen System (2) und dem linearisierten System.
Hinweis: Häufig findet man eine solche Variablentransformation, indem man die stabile und die instabile Menge des nicht-linearen System auf die entsprechenden Eigenräume des linearisierten Systems abbildet.

d) Zeichnen Sie das Phasendiagramm von (2).

[1] Sollten Sie diese Woche nicht in der Vorlesung gewesen sein und möchten sich das Prinzip der Nullklinen und Phasendiagramme (auch Phasenportrait genannt) selbst aneignen, so empfehle ich den Wikipedia Artikel zu Nullklinen (`https://de.wikipedia.org/wiki/Nullkline`) für eine kurze Einführung.