1 Aufgabe

Die n-te Zahl der Fibonacci-Folge wird rekursiv durch

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{für } n \geq 3$$

mit den Anfangswerten

$$F_1 = F_2 = 1$$

definiert. Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion

(a) $1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k = F_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Beweis.
Induktionsanfang: $n = 2$: $1 + \sum_{k=1}^{1} F_k = 1 + F_1 = F_2$

Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gelte $1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k = F_{n+1}$

Induktionsschluss: $n \to n+1$: $1 + \sum_{k=1}^{n} F_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k + F_n = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$ □

(b) $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + 1, \quad n \in \mathbb{N}, n$ gerade

Beweis.
Induktionsanfang: $n = 2$: $F_1 F_3 = 1 \cdot 2 = 1^2 + 1 = F_2^2 + 1$
Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, n gerade, gelte $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + 1$
Induktionsschluss: $n \to n+2$:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n+3} &= (F_{n+2} - F_n)(F_{n+2} + F_{n+1}) \\
&= F_{n+2}^2 + F_{n+2}F_{n+1} - F_{n+2}F_n - F_{n+1}F_n \\
&= F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_n - F_{n+2}F_n - F_{n+1}F_n \\
&= F_{n+2}^2 + F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} - F_{n+2}F_n \\
&\overset{I.A.}{=} F_{n+2}^2 + F_{n+1}F_n + F_nF_n + 1 - F_{n+2}F_n \\
&= F_{n+2}^2 + 1 + F_n(F_{n+1} + F_n - F_{n+2}) \\
&= F_{n+2}^2 + 1
\end{aligned}$$

□

(c) $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2, \quad n \in \mathbb{N}$

Beweis.
Induktionsanfang: $n = 1$: $F_3 = 2 = 1^2 + 1^2 = F_2^2 + F_1^2$
$F_5 = 5 = 2^2 + 1^2 = F_3^2 + F_2^2$
Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, gelte $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$ und

$F_{2n+3} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2$
Induktionsschluss: $n \to n+1$: $F_{2n+3} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2$ folgt direkt aus der Induktionsannahme.

$$\begin{aligned}
F_{2n+5} &= F_{2n+4} + F_{2n+3} \\
&= F_{2n+3} + F_{2n+3} + F_{2n+2} \\
&= F_{2n+3} + F_{2n+3} + F_{2n+3} - F_{2n+1} \\
&\overset{I.A.}{=} 3(F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2) - F_{n+1}^2 - F_n^2 \\
&= 2F_{n+2}^2 + (F_{n+1} + F_n)^2 + 2F_{n+1}^2 - F_n^2 \\
&= 2F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}F_n + 2F_{n+1}^2 + F_n^2 - F_n^2 \\
&= 2F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 + 2F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\
&= F_{n+2}^2 + F_{n+2}^2 + 2F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+1}^2 \\
&= F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2
\end{aligned}$$

□

2 Aufgabe

Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Achtung, geht nicht ab $k = 0$)

Beweis.
Induktionsanfang: $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = 1^2$

Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, gelte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Induktionsschluss: $n \to n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n} +(2(n+1) - 1 \overset{I.A.}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

□

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis. Laut dem binomischen Lehrsatz gilt: $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ □

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1-k}{k(k+1)}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\end{aligned}$$

Dies ist eine Teleskopsumme und daher

$$= 1-\frac{1}{n+1}$$

□

(d) $\binom{l+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{l}\binom{m}{k} \quad \forall k,l\in\mathbb{N}: k\leq l$

Beweis.
Induktionsanfang: $l=1$:

$$\binom{2}{k+1} = \binom{2}{2} = 1 = \binom{1}{1} = \sum_{m=k}^{1}\binom{m}{k}$$

Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $l\in\mathbb{N}$ gilt

$$\binom{l+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{l}\binom{m}{k} \quad \forall k\in\mathbb{N}: k\leq l$$

Induktionsschluss: $l\to l+1$:

$$\begin{aligned}\binom{l+2}{k+1} &= \begin{cases}1=\binom{l+1}{l+1}=\sum_{m=k}^{l+1}\binom{m}{k} & k=l+1 \quad \checkmark\\ \binom{l+1}{k}+\binom{l+1}{k+1} & k\leq l\end{cases}\\ &\overset{I.A.}{=} \binom{l+1}{k}+\sum_{m=k}^{l}\binom{m}{k}\\ &= \sum_{m=k}^{l+1}\binom{m}{k}\end{aligned}$$

□

3 Aufgabe

Gegeben die Buchstaben a, b formen wir „Worte“ W wie folgt:

$$W_1 \coloneqq a, \quad W_2 \coloneqq b, \quad W_{n+1} \coloneqq W_n W_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Das heißt es gilt beispielsweise

$$W_3 = ba, \quad W_4 = bab$$

Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion:

(a) W_n besteht aus F_n Buchstaben, $n \in \mathbb{N}$. ($F_n = n$-te Fibonacci-Zahl)

Def. 1. Wir bezeichnen mit $L(W_n)$ die Länge des Wortes W_n.

Beweis.
Induktionsanfang: $n = 2$: $L(W_1) = L(a) = 1 = F_1$. $L(W_2) = L(b) = 1 = F_2$
Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in N$ sei $L(W_{n-1}) = F_{n-1}$ und $L(W_n) = F_n$.
Induktionsschluss: $n \to n+1$: Aus der Induktionsannahme folgt unmittelbar $L(W_n) = F_n$.
$L(W_{n+1}) = L(W_{n+1}) = L(W_n W_{n-1}) = L(W_n) + L(W_{n-1}) \overset{I.A.}{=} F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ □

(b) Die Buchstabenkombination aa ist kein Bestandteil des Wortes W_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Def. 2. $*$ bezeichne eine Abfolge von as und bs beliebiger Reihenfolge und Länge (auch Länge 0 ist zugelassen).

Lemma 1. *Alle W_{2n} beginnen und enden mit b.*

Beweis.
Induktionsanfang: $n = 1$: $W_2 = b$
Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ sei $W_{2n} = b * b$.
Induktionsschluss: $n \to n+1$. $W_{2n+2} = W_{2n+1} W_{2n} = W_{2n} W 2n - 1 W_{2n} = b * b W_{2n-1} b * b = b * b$. □

Nun zeigen wir die eigentliche Behauptung.

Beweis.
Induktionsanfang: $n = 2$: aa ist offensichtlich weder in W_1 noch in W_2 enthalten
Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte, dass aa weder in W_{n-1} noch in W_n enthalten ist.
Induktionsschluss: $n \to n+1$: Dass aa nicht in W_n enthalten ist, folgt sofort aus der Induktionsannahme. $W_{n+1} = W_n W_{n-1}$. Weder W_n noch W_{n-1} enthalten aa. Die einzige Möglichkeit, so dass aa in $W_n W_{n-1}$ vorkommen kann, ist dass der letzte Buchstabe von W_n und der erste Buchstabe von W_{n-1} gleich a sind. Entweder n oder $n-1$ sind aber gerade und fangen nicht nur mit b an, sondern hören auch auf b auf. Also folgt, dass entweder der letzte Buchstabe von W_n oder der erste Buchstabe von W_{n-1} gleich b sind, W_{n+1} enthält aa daher nicht. □

4 Aufgabe

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Anzahl $A(n)$ aller $k-$Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ mit
$(*) \quad 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n$
gegeben ist durch

$$A(n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Formal ausgedrückt, ist also zu zeigen, dass

$$\binom{n+k-1}{k} = \left| \left\{ (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k \middle| 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n \right\} \right|$$

Def. 3. $B(n,k) := \left| \left\{ (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k \middle| 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n \right\} \right|$

Lemma 2.

$$\sum_{l=1}^{l=n} \binom{l+k-1}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$

Beweis.
Induktionsanfang: $n = 1$: $\sum_{l=1}^{l=1} \binom{l+k-1}{k} = \binom{k}{k} = \binom{1+k}{k+1} = \binom{n+k}{k+1}$
Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $\sum_{l=1}^{l=n} \binom{l+k-1}{k} = \binom{n+k}{k+1}$
Induktionsschluss: $n \to n+1$:

$$\sum_{l=1}^{l=n+1} \binom{l+k-1}{k} = \sum_{l=1}^{l=n} \binom{l+k-1}{k} + \binom{n+k}{k} \overset{I.A.}{=} \binom{n+k}{k+1} + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$$

□

Z.Z.: $B(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$

Beweis.
Induktionsanfang: $k = 1$: Es gibt nur ein Element in unserem Tupel, dieses kann folglich $n = \binom{n}{1} = \binom{n+k-1}{k}$ Werte annehmen.
Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ sei $\forall n \in \mathbb{N} : B(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$
Induktionsschluss: $k \to k+1$: Setzt man $a_{k+1} = n$, so gibt es $A(n,k)$ Möglichkeiten, die restlichen a_i $(1 \leq i \leq k)$ zu wählen. Setzt man $a_{k+1} = n-1$, so gibt es $B(n-1,k)$ Möglichkeiten, die restlichen a_i $(1 \leq i \leq k)$ zu wählen. Allgemein gilt: Setzt man $a_{k+1} = l \in \mathbb{N}$ mit $l \leq n$, so gibt es $B(l,k)$ Möglichkeiten, die restlichen a_i $(1 \leq i \leq k)$ zu wählen. Da für zwei verschiedene l a_k ebenfalls verschieden ist, überschneiden sich keine dieser Möglichkeiten, es gilt:

$$B(n,k+1) = B(n,k) + B(n-1,k) + \dots + B(1,k) = \sum_{l=1}^{l=n} B(l,k) = \sum_{l=1}^{l=n} \binom{l+k-1}{k} \overset{Lemma}{=} \binom{n+k}{k+1}$$

□