Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 9

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 29. Juni 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Maxwell-Verteilung*

Die Maxwell-Verteilung beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen der Masse m eines idealen Gases mit der Temperatur T bei einer Geschwindigkeit zwischen $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^\top$ und $\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v} = (v_x + \mathrm{d}v_x, v_y + \mathrm{d}v_y, v_z + \mathrm{d}v_z)^\top$ zu finden, und ist durch

$$f(\vec{v})\,\mathrm{d}^3v = \left(\frac{m}{2\pi k_\mathrm{B} T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\vec{v}^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) \mathrm{d}^3v$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $f(v)$ des Geschwindigkeitsbetrags $v = |\vec{v}|$.

b) Berechnen Sie den wahrscheinlichsten und den mittleren Geschwindigkeitsbetrag, v_max bzw. $\langle v\rangle$, sowie die Streuung $\sigma_v^2 \equiv \langle v^2\rangle - \langle v\rangle^2$. *

2. *Abstand zum nächsten Nachbarn*

Sei $n = N/V$ die Anzahldichte gleichverteilter Punkte in einem Volumen im sog. *thermodynamischen Grenzfall* mit $N \to \infty$ und $V \to \infty$ derart, dass $n = \text{const.}$ bleibt. Die Wahrscheinlichkeit, den nächsten Nachbarn eines gegebenen Punktes im Abstand zwischen r und $r + \mathrm{d}r$ zu finden, sei durch $p(r)\,\mathrm{d}r$ ausgedrückt.

a) Begründen Sie, warum $p(r)$ der Gleichung

$$p(r)\,\mathrm{d}r = 4\pi r^2 n\,\mathrm{d}r\left[1 - \int_0^r \mathrm{d}r'\,p(r')\right]$$

genügen muss.

b) Benutzen Sie den Ansatz

$$p(r) \equiv 4\pi r^2 n\,\bar{p}(r),$$

um aus der vorherigen Gleichung durch Differentiation eine Gleichung für die noch zu bestimmende Funktion $\bar{p}(r)$ zu gewinnen, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann. Bestimmen Sie die auftretende Integrationskonstante über die Normierungsbedingung.

c) Finden Sie einen Ausdruck für den mittleren Abstand $\langle r\rangle$ zwischen zwei Punkten mit Hilfe der Gammafunktion

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}t\,t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,.$$

---

* *Hinweis:* Überlegen Sie sich, wie Sie mit Hilfe von geeigneten Ableitungen Integrale der Form $\int_0^\infty \mathrm{d}x\,x^n\,\mathrm{e}^{-ax^2}$ für $n \geq 2$ und $a > 0$ auf die elementareren Gauß-Integrale $\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-ax^2}$ und $\int_0^\infty \mathrm{d}x\,x\,\mathrm{e}^{-ax^2}$ zurückführen können, deren Ergebnisse sich einfacher berechnen lassen.

3. *Binomial- und Poisson-Verteilung*

Zeigen Sie, daß die Binomialverteilung

$$W_N(n) = \binom{N}{n} p^n \, (1-p)^{N-n}$$

für $p \ll 1$ und $N \gg n$ in die Poisson-Verteilung

$$\tilde{W}_{\bar{n}}(n) = \frac{\bar{n}^n}{n!} \, \mathrm{e}^{-\bar{n}} \qquad \text{mit} \qquad \bar{n} = Np$$

übergeht. Überprüfen Sie die korrekte Normierung und zeigen Sie, dass der Mittelwert mit dem Parameter $\bar{n}$ übereinstimmt. Berechnen Sie außerdem die Varianz $\sigma^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$.

4. *Verständnisfragen*

a) Fassen Sie den 1. und den 2. Hauptsatz der Thermodynamik mit eigenen Worten zusammen.

b) Erklären Sie mit eigenen Worten, warum der Fermi-Druck auftritt und warum er vollständig temperaturunabhängig wird.

c) Fassen Sie die Axiome von Kolmogorow zusammen und erklären Sie den Bayes'schen Satz.