Aufgabe 2

Es gilt

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{b-u}\right)=\frac{1}{b}\left(\frac{b-u}{u(b-u)}+\frac{u}{u(b-u)}\right)=\frac{b}{b}\frac{1}{u(b-u)}$$

Wir benutzen Separation der Variablen

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{u(b-u)}&=a\mathrm{d}t\\ \left(\frac{1}{u}+\frac{1}{b-u}\right)\mathrm{d}u&=ab\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Durch Integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned}\ln u-\ln(b-u)&=c\cdot abt\\ \frac{u}{b-u}&=C\cdot e^{abt}\\ u&=(b-u)C\cdot e^{abt}\\ u(1+Ce^{abt})&=C\cdot e^{abt}\\ u&=C\cdot\frac{be^{abt}}{1+Ce^{abt}}\end{aligned}$$

Wir setzen die Anfangsbedingung ein und erhalten aus der zweiten Zeile

$$\begin{aligned}\frac{u_0}{b-u_0}&=C\cdot e^{ab\cdot 0}=C\\ u&=\frac{u_0}{b-u_0}\cdot\frac{be^{abt}}{1+\frac{u_0}{b-u_0}e^{abt}}\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Wir lösen zunächst die homogene Gleichung

$$y'=-2y$$

Separation der Variablen und Integration ergibt

$$y=C\cdot e^{-2x}$$

Durch Variation der Konstanten erhalten wir

$$\begin{aligned}C'(x)e^{-2x}-2C(x)e^{-2x}&=-2C(x)e^{-2x}+x\\ C'(x)&=xe^{2x}\end{aligned}$$

Wir lösen das Integral für $C(x)$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} te^{2t} &= \frac{1}{2}te^{2t}\Big|_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{2x} \\
&= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \\
&= \frac{(2x-1)}{4}e^{2x}
\end{aligned}$$

und erhalten als allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{(2x-1)}{4} + C \cdot e^{-2x}$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt sich

$$0 = -\frac{1}{4} + C \implies C = \frac{1}{4}$$

(b) Wir lösen zunächst die homogene Gleichung

$$y' + y\sin(x) = 0$$

Separation der Variablen und Integration ergibt

$$\begin{aligned}
\ln(y) &= \cos(x) \\
y &= C \cdot e^{\cos(x)}
\end{aligned}$$

Durch Variation der Konstanten erhalten wir

$$\begin{aligned}
-C(x)\sin(x)e^{\cos(x)} + \sin(x)C(x)e^{\cos(x)} + C'(x) \cdot e^{\cos(x)} &= \sin(2x) \\
C'(x) &= \sin(2x)e^{-\cos(x)}
\end{aligned}$$

Wir lösen das Integral für $C(x)$

$$\int \sin(2t)e^{-\cos(t)}\mathrm{d}t = \int 2\sin(t)\cos(t)e^{-\cos(t)}\mathrm{d}t$$

Substitution $u = \cos(x)$, $\mathrm{d}u = -\sin(x)$

$$\begin{aligned}
&= -\int 2ue^{-u}\mathrm{d}u \\
&= (2u+2)e^{-u}
\end{aligned}$$

Resubstitution ergibt

$$= (2\cos(x)+2)e^{-\cos(x)}$$

und erhalten als allgemeine Lösung

$$y = (2\cos(x)+2) + C \cdot e^{\cos(x)}.$$

(c) Wir lösen zunächst die homogene Gleichung

$$y' = y$$

Durch Hinschauen sieht man

$$y = C(x) \cdot e^x$$

Durch Variation der Konstanten erhalten wir

$$\begin{aligned} C'(x)e^x + C(x)e^x &= C(x)e^x + \cos(x) \\ C'(x) &= \cos(x)e^{-x} \end{aligned}$$

Wir lösen das Integral für $C(x)$

$$\begin{aligned} \int_0^x \cos(t)e^{-t}\mathrm{d}t &= -\sin(t)e^{-t}\Big|_0^x - \int_0^x \sin(t)e^{-t}\mathrm{d}t \\ &= -\sin(x)e^{-x} - \left[-\cos(t)e^{-t}\right]_0^x - \int_0^x \cos(t)e^{-t}\mathrm{d}t \\ 2\int_0^x \cos(t)e^{-t}\mathrm{d}t &= -\sin(x)e^{-x} + \cos(x)e^{-x} \\ \int_0^x \cos(t)e^{-t}\mathrm{d}t &= \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2} e^{-x} \end{aligned}$$

und erhalten als allgemeine Lösung

$$y = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2} + C \cdot e^x$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt sich

$$y_0 = \frac{1}{2} + C \implies C = y_0 - \frac{1}{2}$$

und damit

$$y = \frac{\cos(x) - \sin(x)}{2} + \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) \cdot e^x$$