Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

6. Übungsblatt - Lösungsskizzen

Aufgabe 21 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten, 4 = 2 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Sei $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cdot \mid B) : \mathcal{A} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}(A \mid B)\end{aligned}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\mathbb{P}(A \mid \cdot)$ für ein $A \in \mathcal{A}$ kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

Lösung 21. (a) Wir überprüfen die drei definierenden Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes:

(i) Es gilt $\mathbb{P}(\Omega \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \overset{B \subseteq \Omega}{=} \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

(ii) **Nichtnegativität:** Es gilt für $A \in \mathcal{A}$:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq 0$$

da $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ (und $\mathbb{P}(B) > 0$ nach Voraussetzung).

(iii) **σ-Additivität:** Seien $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i \mid B\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\biguplus_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\ &\overset{\mathbb{P}\text{ W'maß}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \mid B).\end{aligned}$$

(b) Sei $\Omega = \{a, b\}$ für zwei Elemente $a \neq b$ und $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Wir betrachten die Gleichverteilung $\mathbb{P}$ auf Ω, d.h. $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(\{b\}) = \frac{1}{2}$. Sei dann $A = \{a\}$. Es gilt

$$\mathbb{P}(A \mid \Omega) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

Damit ist $\mathbb{P}(A \mid \cdot)$ kein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Aufgabe 22 (Formel von Bayes und der totalen W'keit, 4 = 2 + 2 Punkte).

In London regnet es an einem Tag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Die Wettervorhersage stimmt in $\frac{2}{3}$ aller Fälle$^{(*)}$. Wenn Regen vorhergesagt ist, nimmt Mr. Pickwick einen Schirm mit; ist kein Regen vorhergesagt, macht er dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$.

(a) Es regnet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr. Pickwick keinen Schirm dabei?

(b) Es regnet nicht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Mr. Pickwick seinen Schirm dabei?

***Bemerkung zu* $(*)$*: Das bedeutet: wenn es regnet, stimmt die Vorhersage mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$, und wenn es nicht regnet, stimmt die Vorhersage mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.*
***Hinweis:** Definieren Sie zunächst R, V, S als die Ereignisse, dass es regnet, dass die Wettervorhersage stimmt, und dass Mr. Pickwick seinen Schirm mitnimmt. Drücken Sie dann die gesuchten Wahrscheinlichkeiten als bedingte Wahrscheinlichkeiten mit R, V, S aus. Es kann hilfreich sein, zur Übersicht ein Baumdiagramm mit den bekannten Wahrscheinlichkeiten anzufertigen.*

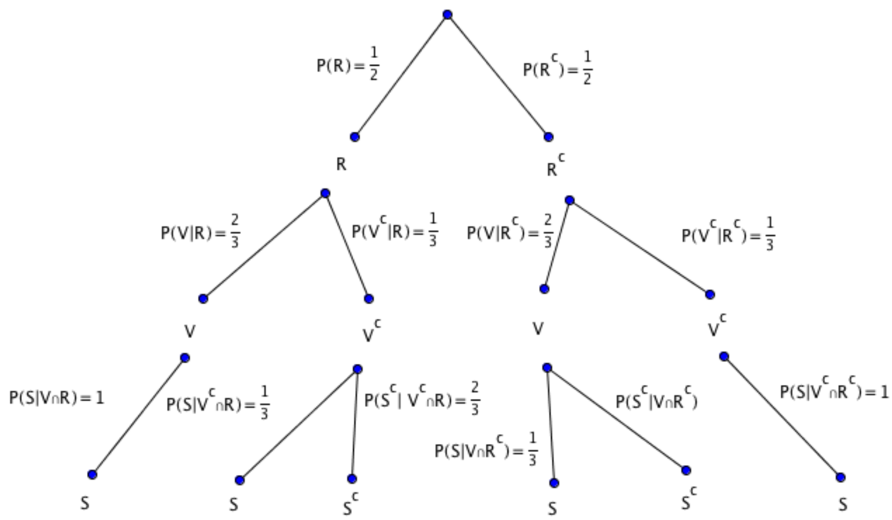
Lösung 22.
Wir definieren drei Ereignisse

$$\begin{aligned} R &= \text{In London regnet es an einem Tag.} \\ V &= \text{Die Wettervorhersage stimmt.} \\ S &= \text{Mr. Pickwick nimmt seinen Schirm mit.} \end{aligned}$$

In der Aufgabenstellung sind uns Wahrscheinlichkeiten gegeben. Dabei ist zu beachten:

- "Wettervorhersage stimmt in 2/3 aller Fälle" bedeutet: Wettervorhersage stimmt mit Wahrscheinlichkeit 2/3, wenn es regnet; und Wettervorhersage stimmt mit Wahrscheinlichkeit 2/3, wenn es nicht regnet.
- "Wenn Regen vorhergesagt ist, nimmt Mr. Pickwick einen Schirm mit" bedeutet: Egal ob es regnet oder nicht, wenn Regen vorhergesagt ist, nimmt Mr. Pickwick seinen Schirm mit.

Damit ergibt sich folgender Baum:



Sei nun $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $R, S, V \in \mathcal{A}$ und $\mathbb{P}$ so, dass die Wahrscheinlichkeiten wie oben gelten.

(a) Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass Mr. Pickwick seinen Schirm nicht mitnimmt, gegeben dass es regnet:

$$\mathbb{P}(S^c|R) = \frac{\mathbb{P}(S^c \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9},$$

wobei

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S^c \cap R) &= \mathbb{P}(S^c \cap V \cap R) + \mathbb{P}(S^c \cap V^c \cap R) \\
&= \mathbb{P}(S^c | V \cap R) \cdot \mathbb{P}(V \cap R) + \mathbb{P}(S^c | V^c \cap R) \cdot \mathbb{P}(V^c \cap R) \\
&= \mathbb{P}(S^c | V \cap R) \cdot \mathbb{P}(V|R) \cdot \mathbb{P}(R) + \mathbb{P}(S^c | V^c \cap R) \cdot \mathbb{P}(V^c|R) \cdot \mathbb{P}(R) \\
&= 0 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass Mr. Pickwick seinen Schirm mitnimmt, gegeben dass es nicht regnet, ist

$$\mathbb{P}(S|R^c) = \frac{\mathbb{P}(S \cap R^c)}{\mathbb{P}(R^c)} = \frac{\frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{9},$$

wobei

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S \cap R^c) &= \mathbb{P}(S \cap V \cap R^c) + \mathbb{P}(S \cap V^c \cap R^c) \\
&= \mathbb{P}(S | V \cap R^c) \cdot \mathbb{P}(V \cap R^c) + \mathbb{P}(S | V^c \cap R^c) \cdot \mathbb{P}(V^c \cap R^c) \\
&= \mathbb{P}(S | V \cap R^c) \cdot \mathbb{P}(V|R^c) \cdot \mathbb{P}(R^c) + \mathbb{P}(S | V^c \cap R^c) \cdot \mathbb{P}(V^c|R^c) \cdot \mathbb{P}(R^c) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 23 (Stochastische Unabhängigkeit, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $A, B, C \in \mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $\emptyset$ und Ω von jedem Ereignis A stochastisch unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie: Sind A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig, so sind sowohl $A \cap B$ und C als auch $A \cup B$ und C jeweils stochastisch unabhängig.

(c) Ein Würfel, bei welchem die Augenzahlen von 1 bis 6 gleichwahrscheinlich sind, werde zweimal unabhängig voneinander geworfen. Wir definieren die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned}
A &= \text{"Die erste Augenzahl ist gerade"}, \\
B &= \text{"Die zweite Augenzahl ist gerade"}, \\
C &= \text{"Die Summe der Augenzahlen ist ungerade"}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Ereignisse A, B, C paarweise stochastisch unabhängig (d.h. immer zwei der Ereignisse sind stochastisch unabhängig), aber nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

Lösung 23. (a) Es ist für $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap \emptyset) &= \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(A) \cdot 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\emptyset), \\
\mathbb{P}(A \cap \Omega) &= \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot 1 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\Omega).
\end{aligned}$$

Damit sind die Definition von $A, \emptyset$ stoch. unabh. bzw. A, Ω stochastisch unabhängig nachgerechnet.

(b) Seien A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig. Damit sind auch A, B stochastisch unabhängig, und es gilt:

$$\mathbb{P}((A\cap B)\cap C) = \mathbb{P}(A\cap B\cap C) \overset{A,B,C \text{ stoch. unabh.}}{=} \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C) \overset{A,B \text{ stoch. unabh.}}{=} \mathbb{P}(A\cap B)\cdot\mathbb{P}(C).$$

Also sind $(A \cap B), C$ stochastisch unabhängig.
Für Teil 2 gibt es zwei Möglichkeiten:

- Sind A, B, C stochastisch unabhängig, so folgt mit Satz 14.04. aus der VL, dass auch A^c, B^c, C gemeinsam stochastisch unabhängig sind. Damit sind auch A^c, B^c stochastisch unabhängig und es gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cup B)^c \cap C) &= \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) = \mathbb{P}(A^c) \cdot \mathbb{P}(B^c) \cdot \mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(A^c \cap B^c) \cdot \mathbb{P}(C) = \mathbb{P}((A \cup B)^c) \cdot \mathbb{P}(C).\end{aligned}$$

  Damit sind $(A \cup B)^c, C$ stochastisch unabhängig. Wieder mit Lemma 14.04 aus VL folgt $(A \cup B), C$ stochastisch unabhängig.
- Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) &= \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &\overset{\text{stoch. unabh.}}{=} \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \\ &\overset{A,B \text{ stoch. unabh.}}{=} (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) \cdot \mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(A \cup B) \cdot \mathbb{P}(C).\end{aligned}$$

  Damit sind $(A \cup B), C$ stochastisch unabhängig.

(c) Wir modellieren einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ wie folgt:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 = \{(w_1, w_2) : w_i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ für } i = 1, 2\}, \qquad \mathcal{A} = 2^\Omega,$$

und $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung auf $\mathcal{A}$, damit ist jedes Ergebnis der beiden Würfelwürfe gleichwahrscheinlich. Damit wird der Unabhängigkeit der beiden Würfe Rechnung getragen.
Ein Element $(w_1, w_2) \in \Omega$ hat die Interpretation: "w_1 ist das Ergebnis des ersten Wurfs, w_2 das Ergebnis des zweiten Wurfs".
Nun gilt

$$\begin{aligned}A &= \{2, 4, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \#A = 18, \\ B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{2, 4, 6\}, \quad \#B = 18.\end{aligned}$$

und

$$C = (\{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5\}) \cup (\{1, 3, 5\} \times \{2, 4, 6\}), \quad \#C = 18.$$

Wir habe nun:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}^2) = \frac{9}{36} = \frac{18}{36} \cdot \frac{18}{36} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B),$$

woraus folgt, dass A, B stochastisch unabhängig sind (das ist im Grunde auch direkt aus der Aufgabenstellung zu entnehmen, in der gesagt wird, dass die beiden Würfe unabhängig voneinander ausgeführt werden). Weiter haben wir

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(\{2,4,6\} \times \{1,3,5\}) = \frac{9}{36} = \frac{18}{36} \cdot \frac{18}{36} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C),$$

woraus folgt, dass A, C stochastisch unabhängig sind. Analoges Vorgehen für B, C, die dann ebenfalls stochastisch unabhängig sind.
Allerdings gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C),$$

womit A, B, C nicht gemeinsam unabhängig sind.

Aufgabe 24 (Infinite Monkey Theorem - Lemma von Borel-Cantelli, 4 Punkte).

"Ein Affe, der rein zufällig auf einer Computertastatur tippt,
wird irgendwann einmal auch Goethes Faust schreiben"

Formalisieren Sie diese Weisheit und geben Sie eine exakte mathematische Begründung mittels des Lemmas von Borel-Cantelli dafür, dass er dies mit Wahrscheinlichkeit Eins sogar unendlich oft tun wird (sofern er unendlich lange lebt).

Lösung 24.

Es sei S die Menge der Zeichen auf der Tastatur, $F := (f_i)_{i\in\{1,\dots,N\}} \subseteq S^N$ Goethes Faust und entsprechend $N \in \mathbb{N}$ die Länge des Texts von Goethes Faust.
Modellierungsidee: Wir wollen die Zeichenfolge, die der Affe tippt, als Folge von Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ definieren. Das i-te Zeichen der Zeichenfolge wird also durch $X_i \in S$ angegeben. Da der Affe rein zufällig tippt, hat der konkrete Wert eines zuvor getippten Zeichens keine Auswirkungen auf das nächste getippte Zeichen, daher müssen die X_i unabhängig sein. Außerdem haben alle X_i dieselbe Verteilung, jedes X_i nimmt alle Werte aus S mit gleicher Wahrscheinlichkeit an.
Formalisierung der Modellierung: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf welchem wir eine Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (S, 2^S)$ mit induzierten Verteilungen

$$\forall s \in S : \mathbb{P}(X_i = s) = \frac{1}{|S|}.$$

definieren können. Wir unterteilen nun die Zeichenfolge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in Blöcke der Länge N: Wir definieren den i-ten Block durch

$$Y_i := (X_{(i-1)\cdot N+1}, \dots, X_{i\cdot N}) \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Weil $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen ist und alle Y_i von verschiedenen X_i abhängen, ist auch $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen.

Daher sind die Ereignisse

$$A_i := \{Y_i = F\} \in \mathcal{A} \qquad \text{im } i\text{-ten Block steht Faust} \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

stochastisch unabhängig, und

$$\forall i \in \mathbb{N}: \quad \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(Y_i = F) = \mathbb{P}(X_{(i-1)\cdot N+1} = f_1, ..., X_{i\cdot N} = f_N) \overset{X_i \text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}(X_{(i-1)\cdot N+1} = f_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_{i\cdot N} = f_N) = \left(\frac{1}{|S|}\right)^N > 0.$$

Es gilt: $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{|S|^N} = \infty$. Mit Borel-Cantelli folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \quad \text{für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\}) \\ &= \mathbb{P}(Y_n = F \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

D.h. $\mathbb{P}$-f.s. tritt $Y_n = F$ unendlich oft ein, d.h. $\mathbb{P}$-f.s. schreibt der Affe Faust unendlich oft.

Anmerkung: In diesem einfachen Fall kann der Wahrscheinlichkeitsraum explizit angegeben werden: $\Omega = S^{\mathbb{N}}, \mathcal{A} = 2^{\Omega}$. Außerdem setze für $n \in \mathbb{N}, s \in S : A_{n,s} := \{y \in S^{\mathbb{N}} : y_n = s\} \in \mathcal{A}$ (Alle Zeichenfolgen, bei welchen das n-te Zeichen ein s ist). Dann wird $\mathbb{P}$ definiert durch $\mathbb{P}(A_{n,s}) = \frac{1}{|S|}$ (man muss noch über die Fortsetzung auf $\mathcal{A}$ nachdenken), und die Zufallsvariablen X_i sind die Projektionen $X_i : \Omega \to S, y \mapsto y_i$.
Mit Hilfe dieser Definitionen kann das Problem auch vollständig auf den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ verlagert werden, ohne Zufallsvariablen definieren zu müssen. Im Allgemeinen lässt sich der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum aber nicht einfach hinschreiben.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **21. Dezember 2020, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`