# Lineare Algebra 2 — Lösung zu Übungsblatt 11

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

*Abgabe:* Do 16.07.2020 um 9:15 Uhr

**40. Aufgabe:** *(1,5+1,5+1,5+1,5 Punkte, Quotientenkörper)* In dieser Aufgabe sollen Teile der Beweise von Satz 11.1 und Satz 11.3 ausgearbeitet werden. Seien dazu $R$ ein nullteilerfreier Ring und $M$ ein $R$-Modul.

(a) Man zeige, dass auf der Menge $R \times (R \setminus \{0\})$ durch $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) :\Leftrightarrow r_1 s_2 = r_2 s_1$ eine Äquivalenzrelation definiert wird.

(b) Sei $Q(R) := (R \times (R \setminus \{0\}))/\sim$ mit der Äquivalenzrelation $\sim$ aus (a). Wir schreiben $\frac{r}{s}$ für die Äquivalenzklasse von $(r, s)$ in $Q(R)$. Man zeige, dass die Operationen

$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} := \frac{r_1 s_2 + r_2 s_1}{s_1 s_2} \quad \text{und} \quad \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} := \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$

auf $Q(R)$ wohldefiniert sind.

(c) Man zeige, dass auf der Menge $M \times (R \setminus \{0\})$ durch

$$(x_1, r_1) \sim (x_2, r_2) :\Leftrightarrow \text{es existiert } s \in R \setminus \{0\} \text{ mit } s r_1 x_2 = s r_2 x_1$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird.

(d) Man zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass auf der Menge $M \times (R \setminus \{0\})$ durch

$$(x_1, r_1) \sim (x_2, r_2) :\Leftrightarrow r_1 x_2 = r_2 x_1$$

im Allgemeinen *keine* Äquivalenzrelation definiert wird.

**Lösung:**

(a) Die Relation $\sim$ ist offenbar reflexiv und symmetrisch, es bleibt somit nur noch die Transitivität zu zeigen. Seien dazu $(r_1, s_1), (r_2, s_2), (r_3, s_3) \in R \times (R \setminus \{0\})$ mit $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2)$ (1) und $(r_2, s_2) \sim (r_3, s_3)$ (2). Wir erhalten zusammen mit der Kommutativität von $R$

$$r_1 s_3 s_2 \overset{R \text{ komm}}{=} s_3 r_1 s_2 \overset{(1)}{=} s_3 r_2 s_1 \overset{R \text{ komm}}{=} r_2 s_3 s_1 \overset{(2)}{=} r_3 s_2 s_1 \overset{R \text{ komm}}{=} r_3 s_1 s_2.$$

Da $s_2 \neq 0$ sowie $R$ nullteilerfrei ist folgt daraus $r_1 s_3 = r_3 s_1$ und damit $(r_1, s_1) \sim (r_3, s_3)$.

(b) Seien $\frac{r_1}{s_1}, \frac{r_2}{s_2} \in Q(R)$. Da $R$ nullteilerfrei ist gilt $s_1 s_2 \neq 0$, offensichtlich liegen also $\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2}$ und $\frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2}$ wieder in $Q(R)$. Um die Wohldefiniertheit zu zeigen müssen wir die Vertreterunabhängigkeit dieser Operationen nachweisen. Seien dazu $\frac{r_1'}{s_1'}, \frac{r_2'}{s_2'} \in Q(R)$ weitere Vertreter der obigen Elemente, dh. es gilt

$$r_1 s_1' = r_1' s_1 \quad \text{und} \quad r_2 s_2' = r_2' s_2.$$

Wir erhalten die Gleichungen

$$(r_1' s_2' + r_2' s_1') s_1 s_2 = \underbrace{r_1' s_1}_{= r_1 s_1'} s_2' s_2 + \underbrace{r_2' s_2}_{= r_2 s_2'} s_1' s_1 = r_1 s_1' s_2' s_2 + r_2 s_2' s_1' s_1 = (r_1 s_2 + r_2 s_1) s_1' s_2', \tag{1}$$

$$r_1'r_2's_1s_2 = \underbrace{r_1's_1}_{=r_1s_1'}\underbrace{r_2's_2}_{=r_2s_2'} = r_1r_2s_1's_2'. \tag{2}$$

Dies liefert direkt die Vertreterunabhängigkeit:

$$\frac{r_1'}{s_1'} + \frac{r_2'}{s_2'} = \frac{r_1's_2' + r_2's_1'}{s_1's_2'} \overset{(1)}{=} \frac{r_1s_2 + r_2s_1}{s_1s_2} = \frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2},$$

$$\frac{r_1'}{s_1'} \cdot \frac{r_2'}{s_2'} = \frac{r_1'r_2'}{s_1's_2'} \overset{(2)}{=} \frac{r_1r_2}{s_1s_2} = \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2}.$$

(c) Auch diese Relation ist offenbar reflexiv und symmetrisch, wir zeigen im folgenden noch die Transitivität. Seien dazu $(x_1,r_1),(x_2,r_2),(x_3,r_3) \in M \times (R \setminus \{0\})$ mit $(x_1,r_1) \sim (x_2,r_2)$ und $(x_2,r_2) \sim (x_3,r_3)$, dh. es existieren $s,s' \in R \setminus \{0\}$ sodass

$$sr_1x_2 = sr_2x_1 \quad \text{und} \quad s'r_2x_3 = s'r_3x_2.$$

Damit gilt unter Ausnutzung der Kommutativität von $R$

$$\underbrace{ss'r_2}_{\in R\setminus\{0\}} r_1x_3 = sr_1\underbrace{s'r_2x_3}_{=s'r_3x_2} = s'r_3\underbrace{sr_1x_2}_{=sr_2x_1} = ss'r_2r_3x_1,$$

es ist also auch $(x_1,r_1) \sim (x_3,r_3)$.

(d) Betrachte $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als $R = \mathbb{Z}$-Modul. Es gilt $(\bar{1},2) \sim (\bar{0},2)$ und $(\bar{0},2) \sim (\bar{1},1)$, aber wegen

$$1 \cdot \bar{1} = \bar{1} \neq \bar{0} = 2 \cdot \bar{1}$$

ist $(\bar{1},2) \nsim (\bar{1},1)$ und daher $\sim$ nicht transitiv.

**41. Aufgabe:** *(3+3 Punkte, Torsionsmoduln und der Annulator)*

(a) Seien $R$ ein nullteilerfreier Ring und $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) $M$ ist ein Torsions-$R$-Modul.

  (ii) Es gilt $\operatorname{Ann}(M) \neq (0)$.

(b) Seien nun $R = \mathbb{Z}$ und $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Man zeige, dass $M$ ein Torsions-$R$-Modul ist, und dass $\operatorname{Ann}(M) = (0)$ gilt.

**Lösung:**

(a) Sei $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ ein ES von $M$.

(i)⇒(ii): Da $M$ ein Torsions-$R$-Modul ist, existieren $a_1,\dots,a_n \in R \setminus \{0\}$ sodass $a_ix_i = 0$ für alle $i = 1,\dots,n$ gilt. Für ein beliebiges Element $x = \sum \lambda_ix_i \in M$ gilt daher

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right)x = \sum \left(\prod_{j=1, j\neq i} a_j\right)\lambda_i \underbrace{a_ix_i}_{=0} = 0.$$

Da $R$ nullteilerfrei ist daher $0 \neq \prod_{i=1}^n a_i \in \operatorname{Ann}(M) \neq (0)$.

(ii)⇒(i): Sei $0 \neq a \in \operatorname{Ann}(M) = \{r \in R \mid rm = 0 \text{ für alle } m \in M\}$. Dann ist jedes Element $x \in M$ wegen $ax = 0$ ein Torsionselement und deshalb $T(M) = M$.

(b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ und $r \in \mathbb{N}$, so dass $x_n = 0$ für alle $n > r$. Dann ist offenbar

$$2^r \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^r \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0,$$

also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Torsionselement und damit $M$ ein Torsions-$\mathbb{Z}$-Modul. Wir betrachten für $i \in \mathbb{N}$ die Elemente $e_i \in M$, mit $(e_i)_n \equiv 0 \pmod{2^n}$ für $n \neq i$ und $(e_i)_i \equiv 1 \pmod{2^i}$. Für ein $a \in \operatorname{Ann}(M)$ gilt dann insbesondere

$$a \cdot e_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \implies a \cdot 1 \pmod{2^i} \equiv 0 \pmod{2^i} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Wir erhalten also

$$2^i \mid a \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

es muss also bereits $a = 0$ sein.

**42. Aufgabe:** *(2+2+2 Punkte, Länge, Rang und Torsion)* Sei $M$ der $\mathbb{R}[t]$-Modul $\mathbb{R}[t]/(t^2)$.

(a) Man bestimme alle Torsionselemente in $M$ sowie den Rang von $M$.

(b) Via der natürlichen Inklusion $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[t]$ (als konstante Polynome) betrachten wir $M$ als $\mathbb{R}$-Modul. Man bestimme alle Torsionselemente von $M$ als $\mathbb{R}$-Modul sowie den Rang von $M$ als $\mathbb{R}$-Modul.

(c) Man bestimme die Länge $\ell(M)$ von $M$ sowie alle Kompositionsfaktoren von $M$ (als $\mathbb{R}[t]$-Modul).
**Hinweis:** Man erinnere sich an Bemerkung 6.7.

**Lösung:**

(a) *1. Behauptung:* $T(M) = M$.
Ist nämlich $x \in M = \mathbb{R}[t]/(t^2)$ ein beliebiges Element, etwa $x = \overline{f}$ für einen Vertreter $f \in \mathbb{R}[t]$, so hat man

$$t^2 \cdot x = \overline{t^2 \cdot f} = 0$$

in $M$. Folglich sind alle Elemente von $M$ Torsionselemente.

*2. Behauptung:* $\operatorname{Rang}_{\mathbb{R}[t]}(M) = 0$.
*Denn:* Nach Definition 11.8 ist $\operatorname{Rang}_{\mathbb{R}[t]} M = \dim_{\mathbb{R}(t)}(\mathbb{R}(t) \otimes_{\mathbb{R}[t]} M)$, wobei $\mathbb{R}(t)$ den Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$ bezeichnet.
Wir müssen also $\mathbb{R}(t) \otimes_{\mathbb{R}[t]} M = 0$ zeigen. Seien dazu $f \in \mathbb{R}(t)$ und $x \in M = \mathbb{R}[t]/(t^2)$. Dann folgt

$$f \otimes x = (\frac{1}{t^2} \cdot f) \otimes (t^2 \cdot x) = (\frac{1}{t^2} \cdot f) \otimes 0 = 0.$$

Da die reinen Tensoren ein ES des Tensorproduktes bilden, folgt damit die Behauptung. (Vgl. auch Aufgabe 29(a).)

*Alternativer Beweis:* Die Inklusion $(t^2) \subseteq \mathbb{R}[t]$ und die Restklassenabbildung $\mathbb{R}[t] \twoheadrightarrow \mathbb{R}[t]/(t^2)$ liefern eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (t^2) \longrightarrow \mathbb{R}[t] \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Nach Folgerung 11.13 gilt daher

$$\operatorname{Rang}_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{R}[t] = \operatorname{Rang}_{\mathbb{R}[t]}(t^2) + \operatorname{Rang}_{\mathbb{R}[t]} M.$$

Es ist $\operatorname{Rang}_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{R}[t] = 1$, und da das Ideal $(t^2)$ frei mit Basis $t^2$ ist (s. auch Aufgabe 25(a)), gilt auch $\operatorname{Rang}_{\mathbb{R}[t]}(t^2) = 1$. Damit folgt $\operatorname{Rang}_{\mathbb{R}[t]} M = 0$.

(b) *1. Behauptung:* Als $\mathbb{R}$-Modul gilt $T(M) = \{0\}$.
*Denn:* Als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist $M$ frei, und nach Bem. 11.16(b) ist $M$ somit torsionsfrei, d.h. die 0 ist das einzige Torsionselement.

*2. Behauptung:* $\mathrm{Rang}_{\mathbb{R}} M = \dim_{\mathbb{R}} M = 2$.
*Denn:* Zunächst ist das System $(1, t, t^2, \ldots)$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}[t]$, und das Ideal $(t^2)$ ist der von dem Teilsystem $(t^2, t^3, \ldots)$ erzeugte Untervektorraum, denn seine Elemente sind genau die Polynome der Form $\sum_{j=2}^{d} a_j t^j$ mit $d \geq 2$, $a_j \in \mathbb{R}$.
Folglich hat der Faktorring $M = \mathbb{R}[t]/(t^2)$, aufgefasst als Quotientenvektorraum über $\mathbb{R}$, die Basis $(\bar{1}, \bar{t})$.

(c) Wir betrachten $M$ wieder als $\mathbb{R}[t]$-Modul.
Die Untermoduln von $M = \mathbb{R}[t]/(t^2)$ korrespondieren nach Bem. 6.7 genau zu den Idealen von $\mathbb{R}[t]$, welche $(t^2)$ umfassen. Letztere korrespondieren zu den normierten Teilern von $t^2$ in dem Hauptidealring $\mathbb{R}[t]$, also zu den Elementen $t^2$, $t$ und 1. Folglich sind die Untermoduln von $M$ genau

$$0 = (\overline{t^2}) \subsetneq (\bar{t}) \subsetneq (\bar{1}) = M, \qquad (*)$$

welche eine Kette mit zwei echten Inklusionen bilden, also erhalten wir für die Länge

$$\ell(M) = 2.$$

Wegen Bem. 12.8 ist $(*)$ eine Kompositionsreihe von $M$, und offensichtlich die einzige. Die Kompositionsfaktoren von $M$ sind also genau

$$(\bar{t})/(\overline{t^2}) = (\bar{t}) \quad \text{und} \quad M/(\bar{t}).$$

Beide sind isomorph zu $\mathbb{R}$ als $\mathbb{R}[t]$-Moduln, denn es gilt

$$M/(\bar{t}) = (\mathbb{R}[t]/(t^2))/(\bar{t}) \cong \mathbb{R}[t]/(t) \cong \mathbb{R},$$

sowie wegen $(t) \cong \mathbb{R}[t]$

$$(\bar{t}) \cong (t)/(t^2) \overset{\text{Bem. 8.8}}{\cong} \mathbb{R}[t]/(t) \otimes_{\mathbb{R}[t]} (t) \cong \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}[t]} \mathbb{R}[t] \cong \mathbb{R}.$$

**43. Aufgabe:** *(2+2+2 Punkte, Länge von Moduln)* Seien $R$ ein Ring, $M$ und $N$ zwei $R$-Moduln und $\varphi\colon M \to N$ ein $R$-Modulhomomorphismus. Man zeige:

(a) Es gilt $\ell(\ker(\varphi)) + \ell(\mathrm{im}(\varphi)) = \ell(M)$.
**Hinweis:** Man verwende Folgerung 12.15.

(b) Ist $\ell(M) < \infty$, so gilt $\ell(L) < \ell(M)$ für jeden echten $R$-Untermodul $L \subsetneq M$.

(c) Ist $\ell(M) < \infty$ und $N = M$, so gilt

$$\varphi \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow \varphi \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow \varphi \text{ ist bijektiv.}$$

**Lösung:**

(a) Indem wir $\varphi$ als surjektiven Homomorphismus $M \twoheadrightarrow \mathrm{im}(\varphi)$ auf sein Bild betrachten, erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi) \longrightarrow M \longrightarrow \mathrm{im}(\varphi) \longrightarrow 0.$$

Folgerung 12.15 liefert damit $\ell(M) = \ell(\ker(\varphi)) + \ell(\mathrm{im}(\varphi))$.

(b) Sei $\ell(M) < \infty$ und $L \subsetneq M$ ein echter Untermodul. Für jede Kette

$$0 = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \ldots \subsetneq L_n = L$$

von Untermoduln von $L$ der Länge $n \geq 0$ ist

$$0 = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq \ldots \subsetneq L_n = L \subsetneq L_{n+1} := M$$

eine Kette von Untermoduln von $M$ der Länge $n + 1$. Für jede Kette von Untermoduln in $L$ existiert also eine längere Kette von Untermoduln in $M$. Daraus folgt

$$\ell(L) \leq \ell(M).$$

Wegen $\ell(M) < \infty$ erhalten wir insbesondere $\ell(L) < \infty$. Damit schließen wir

$$\begin{aligned}\ell(L) &= \sup\{n \mid n \geq 0 \text{ und } \exists \text{ Kette } 0 = L_0 \subsetneq \ldots \subsetneq L_n = L\} \\ &< \ell(L) + 1 = \sup\{n + 1 \mid n \geq 0 \text{ und } \exists \text{ Kette } 0 = L_0 \subsetneq \ldots \subsetneq L_n = L \subsetneq L_{n+1} = M\} \\ &\leq \ell(M).\end{aligned}$$

**Alternativ:** Wir wenden (a) an auf die kanonische Projektion $\varphi\colon M \to M/L$. Es ist $\ker(\varphi) = L$, also folgt

$$\ell(M) = \ell(L) + \ell(M/L).$$

Da $\ell(M) < \infty$ folgt $\ell(L) < \infty$ und $\ell(M/L) < \infty$. Da $L \subsetneq M$ ist $M/L \neq 0$ und somit $\ell(M/L) \geq 1$. Also erhalten wir $\ell(L) < \ell(L) + 1 \leq \ell(L) + \ell(M/L) = \ell(M)$.

(c) Sei $\ell(M) < \infty$ und $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$. Nach (a) gilt

$$\ell(M) = \ell(\ker(\varphi)) + \ell(\mathrm{im}(\varphi)). \tag{$*$}$$

Wir zeigen:

(i) $\varphi$ injektiv $\implies$ $\varphi$ bijektiv.

(ii) $\varphi$ surjektiv $\implies$ $\varphi$ bijektiv.

*Zu (i).* Ist $\varphi$ injektiv, so gilt $\ell(\ker(\varphi)) = 0$ und damit $\ell(\mathrm{im}(\varphi)) = \ell(M)$ wegen $(*)$. Nach (b) kann $\mathrm{im}(\varphi)$ dann kein echter Untermodul von $M$ sein, d.h. es folgt $\mathrm{im}(\varphi) = M$, es ist $\varphi$ also auch surjektiv und damit bijektiv.
*Zu (ii).* Ist $\varphi$ surjektiv, d.h. $\mathrm{im}(\varphi) = M$, so folgt aus $(*)$ direkt $\ell(\ker(\varphi)) = 0$ und damit $\ker(\varphi) = 0$. Also ist $\varphi$ auch injektiv und damit bijektiv.

---

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.