Algebraische Zahlentheorie II
Sommersemester 2022

Dr. Katharina Hübner
basierend auf Alexander Schmidts AZT2-Skript von 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Gruppenkohomologie

1.1 Diskrete G-Moduln

Sei G eine proendliche Gruppe. Mit G^{abst} bezeichnen wir die unterliegende Gruppe, d.h. das Bild von G unter dem Vergissfunktor:

$$\text{(topologische Gruppen)} \to \text{(Gruppen)}.$$

Definition. Ein abstrakter G-Modul ist ein G^{abst}-Modul.

Satz 1.1. *Sei G eine proendliche Gruppe und A ein abstrakter G-Modul. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent*

(i) *die G-Wirkung*

$$G \times A \longrightarrow A, \ (g, a) \longmapsto ga,$$

ist stetig bzgl. der diskreten Topologie auf A.

(ii) *Für jedes* $a \in A$ *ist* $G_a := \{g \in G, ga = a\}$ *offen in* G.
(iii) $A = \bigcup_{U \subset G} A^U$*, wobei* U *die offenen Normalteiler von* G *durchläuft.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $a \in A$ beliebig und wir bezeichnen die G-Wirkung mit

$$m : G \times A \longrightarrow A.$$

Dann sind die Teilmengen

$$m^{-1}(a),\ G \times \{a\} \subseteq G \times A$$

offen, also auch ihr Durchschnitt

$$\{(g, a) \mid g \in G,\ ga = a\}.$$

Die Projektion $p_1 : G \times A \to G$ ist offen, daher ist

$$G_a = \{g \in G \mid ga = a\} \subset G$$

offen.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wegen $e \in G_a$ folgt die Existenz eines offenen Normalteiler $U_a \subset G$ mit $U \subset G_a$ und somit $a \in A^{U_a}$. Daher $A = \bigcup_U A^U$.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $(g, a) \in G \times A$. Es existiert ein offener Normalteiler $U \subset G$ mit $a \in A^U$. Daher gilt

$$m(gU \times \{a\}) = ga,$$

d.h. $gU \times \{a\}$ ist eine offene Umgebung von (g, a) in $m^{-1}(ga)$. Daher ist m stetig. □

Definition. Ein diskreter G-Modul A ist ein G^{abst}-Modul A, der den äquivalenten Bedingungen von 1.1 genügt. Wir bezeichnen die Kategorie der diskreten G-Moduln mit (automatisch stetigen) G-Homomorphismen mit G-Mod.

Bemerkung. G-Mod ist eine abelsche Kategorie.

Definition. Für einen abstrakten G-Modul A heißt der Modul

$$A^\delta := \bigcup_{\substack{U \subset G \\ \text{offen}}} A^U \subset A$$

der assoziierte diskrete G-Modul.

Lemma 1.2. *Der Funktor*

$$\begin{array}{rcl} \bullet^\delta : G^{\text{abst}}\text{-}Mod & \longrightarrow & G\text{-}Mod \\ A & \longmapsto & A^\delta \end{array}$$

ist rechtsadjungiert zur Inklusion

$$G\text{-}Mod \hookrightarrow G^{\text{abst}}\text{-}Mod$$

$\bullet^\delta$ *ist linksexakt und überführt Injektive in Injektive*

Beweis. Sei $A \in G$-Mod, $B \in G^{\text{abst}}$-Mod. und $f : A \to B$ ein G-Homomorphismus. Für $a \in A$ sei $U \subset G$ ein offener Normalteiler mit $a \in A^U$. Dann gilt für $u \in U$:

$$u \cdot f(a) = f(ua) = f(a)$$

also $f(a) \in B^U$. Daher gilt

$$\mathrm{im}(f) \subset B^\delta \subset B.$$

Dies zeigt die Funktoradjunktion und nach Satz 1.3 (ii) in Kapitel 2 die Linksexaktheit von δ. Da die Inklusion G-Mod $\hookrightarrow G^{\text{abst}}$-Mod exakt ist, überführt $\bullet^\delta$ Injektive in Injektive nach Satz 1.3 (iii) in Kapitel 2. □

Korollar 1.3. *G-Mod hat genügend viele Injektive.*

Beweis. Für $A \in G$-Mod existiert ein injektives Objekt $I \in G^{\text{abst}}$-Mod und eine Inklusion $A \hookrightarrow I$. Nach 1.3 erhalten wir eine Inklusion $A = A^\delta \hookrightarrow I^\delta$ in das injektive Objekt $I^\delta \in G$-Mod. □

Beispiele diskreter Moduln.
Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung mit Gruppe $G = \mathrm{Gal}(L|K)$.
• jedes $x \in L$ liegt bereits in einer endlich galoisschen Zwischenerweiterung $L'|K$. Daher gilt $gx = x$ für alle g in $G(L|L') \subset G(L|K)$. Daher sind L^+ und $L^\times$ diskrete G-Moduln.
• Ist K ein lokaler Körper, so ist

$$\mathcal{O}_L = \{x \in L \mid |x| \le 1\}$$

ein diskreter G-Modul. Analog:

$$\begin{aligned} U_L &= \{x \in L \mid |x| = 1\} \\ U_L^{(1)} &= \{x \in U_L \mid |x-1| < 1\} \end{aligned}$$

• Ist K ein globaler Körper, so sind $\mathcal{O}_L$ und $E_L = \mathcal{O}_L^\times$ diskrete G-Moduln.

1.2 Kohomologie

Wir behandeln die Fälle G (abstrakte) Gruppe und G proendliche Gruppe parallel.
Wörterbuch im proendlichen Fall
G-Modul = diskreter G-Modul
Untergruppe = abgeschlossene Untergruppe
Untergruppe von endlichem Index = abgeschlossene Untergruppe von endlichem Index (= offene Untergruppe)
Abbildung = stetige Abbildung.

Wir betrachten den linksexakten Funktor

$$\begin{array}{rcll} \bullet^G : G\text{-Mod} & \longrightarrow & \mathcal{A}b & \\ A & \longmapsto & A^G & = \{a \in A \mid ga = a \quad \forall\, g \in G\} \\ & & & = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A) \end{array}$$

Da G-Mod genügend viele Injektive hat, ist die folgende Definition sinnvoll.

Definition. Sei A ein G-Modul

$$H^i(G, A) := R^i(\bullet^G)(A).$$

Wegen $A^G = \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, A)$ gilt

$$H^i(G, A) = \mathrm{Ext}^i_G(\mathbb{Z}, A).$$

Bemerkung. • Ist G proendlich, so hat G-Mod im allgemeinen nicht genügend viele Projektive, so dass man keine Homologie hat und auch Ext nicht durch eine projektive Auflösung im ersten Argument berechnen kann.

• Für $G = \{1\}$ gilt

$$G\text{-Mod} = \mathcal{A}b = \mathbb{Z}\text{-Mod}$$

und

$$H^i(\{1\}, A) = \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) = 0$$

für $i \geq 1$, weil $\mathbb{Z}$ ein projektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist.

Definition. Sei $A \in G$-Mod. $\mathrm{Koind}_G A = \mathrm{Abb}\ (G, A)$ mit Gruppenstruktur

$$(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g)$$

und G-Modulstruktur

$$(gf)(h) = gf(g^{-1}h)$$

heißt der **koinduzierte Modul von** A.

Bemerkung. Ist G proendlich und A diskret, so ist $\mathrm{Koind}_G A$ wieder ein diskreter G-Modul.

Wir erhalten einen Funktor

$$\mathrm{Koind}_G : G\text{-Mod} \longrightarrow G\text{-Mod}.$$

Definition. Ein G-Modul B heißt **koinduziert**, wenn $B \cong \mathrm{Koind}_G A$ für ein $A \in G$-Mod.

Sei nun $H \subset G$ eine Untergruppe und $A \in H$-Mod.

Definition.

$$\begin{aligned}\mathrm{Koind}_G^H(A) &= \mathrm{Abb}_H(G,A)\\ &= \{f : G \longrightarrow A,\ f(hg) = hf(g) \quad \forall\, h \in H\}\end{aligned}$$

Gruppenstruktur: $f_1 + f_2(g) = f_1(g) + f_2(g)$,
G-Wirkung: $(gf)(g') = f(g'g)$.

Lemma 1.4. *Für $A \in G$-Mod ist $\mathrm{Koind}_G^H \mathrm{Res}_H^G A$ isomorph zum G-Modul $Abb(G/H, A)$ mit Gruppenstruktur*

$$(f_1 + f_2)(gH) = f_2(gH) + f_2(gH),$$

G-Wirkung

$$(gf)(g'H) = gf(g^{-1}g'H).$$

Insbesondere gilt für $H = \{1\}$

$$Koind_G^{\{1\}} \mathrm{Res}_{\{1\}}^G A \cong \ Koind_G A.$$

Beweis. Der Isomorphismus

$$\varphi : \mathrm{Koind}_G^H \mathrm{Res}_H^G A \longrightarrow \mathrm{Abb}(G/H, A)$$

ist gegeben durch $\varphi(f)(gH) = gf(g^{-1})$. □

Lemma 1.5. *Wir haben eine Adjunktion:*

$$\mathrm{Res}_H^G \dashv Koind_G^H.$$

Beweis. Wir definieren

$$\varphi : \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_G(A, \mathrm{Koind}_G^H B)$$

durch

$$\varphi(f)(a) = (g \mapsto f(ga)) \in \mathrm{Koind}_G^H B.$$

Nachprüfen dass $\varphi(f)$ ein G-Homomorphismus ist

$$\begin{array}{rcl} [\varphi(f)(ga)]\,(g') & = & f(g'ga)\\ \|? & & \\ [g\varphi(f)(a)]\,(g') & = & \varphi(f)(a)(g'g) = f(g'ga)\end{array}$$

Rückabbildung

$$\psi : \mathrm{Hom}_G(A, \mathrm{Koind}_G^H B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G A, B)$$

$\psi(f)(a) = f(a)(e)$. □

Korollar 1.6. Koind_G^H *ist exakt und überführt Injektive in Injektive.*

Beweis. Die Exaktheit kann man schnell explizit nachrechnen. Da die Linksadjungierte Res_H^G exakt ist, werden Injektive in Injektive überführt. □

Satz 1.7. *(Shapiro-Lemma).*

$$H^i(G, Koind_G^H A) = H^i(H, A) \quad \forall\, i \geq 0.$$

Beweis. Sei $A \to I^\bullet$ eine Auflösung durch H-Injektive. Dann gilt

$$\begin{aligned} H^i(H, A) &= H^i(I^{\bullet H}) = H^i(\mathrm{Hom}_H(\mathbb{Z}, I^\bullet)) \\ &= H^i(\mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}, \mathrm{Koind}_G^H I^\bullet) = H^i((\mathrm{Koind}_G^H I^\bullet)^G). \end{aligned}$$

Nun ist nach 1.6

$$\mathrm{Koind}_G^H A \to \mathrm{Koind}_G^H I^\bullet$$

eine Auflösung durch G-Injektive. □

Definition. Ein G-Modul A heißt **kohomologisch trivial**, wenn

$$H^i(H, A) = 0 \quad \forall\, i \geq 1 \quad \forall\, H \subseteq G.$$

Bemerkung. Ist G eine abstrakte Gruppe, so überführt Res_H^G Injektive in Injektive (Frobenius-Reziprozität, Satz 1.14 in Kapitel 3.1). Daher sind in diesem Fall Injektive kohomologisch trivial. Das gilt auch für proendliche Gruppen (siehe unten).

Lemma 1.8. *Sei G eine proendliche Gruppe und seien $H_1 \subseteq H_2$ abgeschlossene Untergruppen. Dann hat die Projektion topologischer Räume*

$$H_1 \backslash G \twoheadrightarrow H_2 \backslash G$$

einen stetigen Schnitt s. Ist $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so existiert ein Homöomorphismus $G \cong H \backslash G \times H$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Lemma 1.9. *Ein koinduzierter G-Modul ist auch koinduzierter H-Modul für alle $H \subseteq G$.*

Beweis. $\mathrm{Koind}_G A = \mathrm{Abb}(G, A)$ nur als H-Modul betrachtet:

$$(hf)(g) = h \cdot f(h^{-1}g).$$

Sei nun $s : H \setminus G \to G$ ein stetiger Schnitt und $S = s(H \setminus G)$, also $G \cong H \times S$ als topologischer Raum. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(G, A) = \mathrm{Abb}(H \times S, A) &= \mathrm{Abb}(H, \mathrm{Abb}(S, A)) \\ f &\longmapsto [h \longmapsto (s \longmapsto f(h \cdot s))]\,. \end{aligned}$$

Versehen wir $\mathrm{Abb}(S, A)$ mit der H-Modulstruktur $(h\varphi)(s) = h \cdot \varphi(s)$, so erhalten wir einen Isomorphismus von H-Moduln

$$\mathrm{Koind}_G A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Koind}_H \ \mathrm{Abb}(S, A).$$

□

Satz 1.10.
(i) *Koinduzierte Moduln sind kohomologisch trivial.*
(ii) *Injektive Moduln sind kohomologisch trivial.*

Beweis. (i) Nach 1.9 gilt zu zeigen

$$H^i(G, \mathrm{Koind}_G A) = 0 \quad \forall\, i \geq 1.$$

Dies folgt aus

$$\mathrm{Koind}_G A \cong \mathrm{Koind}_G^{\{1\}} \mathrm{Res}_{\{1\}}^G A$$

und

$$0 = H^i(\{1\}, \mathrm{Res}_{\{1\}}^G A) = H^i(G, \mathrm{Koind}_G^{\{1\}} \mathrm{Res}_{\{1\}}^G A)$$

für $i \geq 1$.
(ii) Sei I injektiv. Wir haben eine Inklusion

$$i : I \longrightarrow \mathrm{Koind}_G I, \ x \longmapsto (g \longmapsto x \quad \forall\, g \in G).$$

Weil I injektiv ist, hat i einen Schnitt. Also ist I direkter Summand in einem kohomologisch trivialen Modul und daher selbst kohomologisch trivial. □

1.3 Der Kohomologische Standardkomplex

Sei $A \in G$-Mod. Wir setzen:

$$X^n(G, A) = \mathrm{Abb}(G^{n+1}, A)$$

mit der G-Modulstruktur

$$(g\varphi)(g_0, \ldots, g_n) = g\varphi(g^{-1}g_0, \ldots, g^{-1}g_n).$$

Bemerkung.

$$X^0(G, A) = \mathrm{Koind}_G A \quad \text{und} \quad \begin{aligned} X^n(G, A) &= \mathrm{Abb}(G, \mathrm{Abb}(G^n, A) \\ &= \mathrm{Koind}_G X^{n-1}(G, A). \end{aligned}$$

Daher sind alle $X^i(G, A)$ kohomologisch trivial. Die Projektionen $p_i : G^n \to G^{n-1}$, $i = 0, \ldots, n$, induzieren Abbildungen

$$\delta_i : X^{n-1} \longrightarrow X^n \quad i = 0, \ldots, n.$$

Wir setzen

$$d = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \delta_i : X^{n-1} \longrightarrow X^n.$$

Lemma 1.11. *$d \circ d = 0$ und der Komplex $X^\bullet = X^\bullet(G, A)$ ist eine Auflösung von A durch kohomologisch triviale G-Moduln.*

Beweis. Analog wie bei der homologischen Standardauflösung. $\square$

Korollar 1.12. *Sei*

$$C^\bullet(G, A) = X^\bullet(G, A)^G.$$

Dann gilt

$$H^i(G, A) = H^i(C^\bullet(G, A)) \quad \forall i.$$

Definition. Eine **Derivation** $D : G \to A$ ist eine Abbildung, so dass

$$D(gh) = D(g) + g \cdot D(h) \quad \forall\, g, h \in G$$

gilt. Durch $(D_1 + D_2)(g) = D_1(g) + D_2(g)$ wird die Menge der Derivationen von G mit Werten in A zu einer abelschen Gruppe $\mathrm{Der}(G, A)$.

Bemerkung. Ist A ein trivialer G-Modul, so gilt $\mathrm{Der}(G, A) = \mathrm{Hom}(G, A)$.

Beispiel. Für jedes $a \in A$ ist

$$D_a : G \longrightarrow A,\ g \longmapsto ga - a,$$

eine Derivation wegen

$$gha - a = ga - a + g(ha - a).$$

Solche Derivationen heißen **innere Derivationen** und bilden die Untergruppe $\mathrm{IDer}(G, A) \subseteq \mathrm{Der}(G, A)$.

Bemerkung. Ist A ein trivialer G-Modul, so gilt $\mathrm{IDer}(G, A) = 0$.

Satz 1.13. *Es gibt einen Isomorphismus*

$$H^1(G, A) \cong \mathrm{Der}(G, A)/\mathrm{IDer}(G, A).$$

Für einen trivialen Modul A gilt

$$H^1(G, A) \cong \mathrm{Hom}(G, A).$$

Insbesondere gilt für eine proendliche Gruppe G:

$$G^{\mathrm{ab}} \cong H^1(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\vee.$$

Bemerkung. Das Symbol $(-)^\vee$ im obigen Satz bezeichnet das *Pontrjagindual.* Dieses ist für eine lokal kompakte abelsche Gruppe H definiert als

$$H^\vee := \mathrm{Hom}(H, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

mit der kompakt-offen-Topologie. Es überführt kompakte Gruppen in diskrete und andersherum. Die *Pontrjagindualität* sagt aus, dass die natürliche Abbildung ins Doppeldual

$$H \longrightarrow H^{\vee\vee}$$

ein Isomorphismus ist, es handelt sich also tatsächlich um eine Dualität. Für endliche Gruppen lässt sich dies elementar nachprüfen, im Allgemeinen ist diese Aussage aber schwieriger zu beweisen. Für die Aussage in Satz 1.13 ist noch anzumerken, dass für eine proendliche Gruppe $G = \varprojlim_i G_i$ (mit endlichen Gruppen G_i) gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) =& \mathrm{Hom}(\varprojlim_i G_i, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \\ =& \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Beweis. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{cccc} X^0(G,A)^G = & C^0(G,A) & \xrightarrow[\varphi \mapsto \varphi(1)]{\sim} & A \\ & d^1 \downarrow & & \downarrow \partial^1 \\ & C^1(G,A) & \xrightarrow[\varphi \mapsto (g \mapsto \varphi(e,g))]{\sim} & \mathrm{Abb}(G,A) \\ & d^2 \downarrow & & \downarrow \partial^2 \\ & C^2(G,A) & \xrightarrow[\varphi \mapsto ((g_1,g_2) \mapsto \varphi(e,g_1,g_1g_2))]{\sim} & \mathrm{Abb}(G^2,A), \end{array}$$

wobei ∂^1 und ∂^2 so gewählt sind, dass das Diagramm kommutiert.
Behauptung: (i) $\partial^1(a) = (g \mapsto ga - a)$
(ii) $\partial^2(x) = ((g_1, g_2) \mapsto g_1 x(g_2) - x(g_1 g_2) + x(g_1))$

Stupides Nachrechnen:

(i) Sei $a \in A$. Das Urbild in $C^0(G, A)$ ist die Kokette

$$\varphi_a = (g \mapsto ga) \in C^0(G, A).$$

Probe: $\varphi_a(g) = ga$ liegt in $C^0(G, A)$ wegen

$$\begin{aligned}(g'\varphi_a)(g) &= g'\varphi_a(g'^{-1}g) = g'^{-1}g'ga = ga. \\ d^1(\varphi_a)(g_0, g_1) &= g_1 a - g_0 a.\end{aligned}$$

Dies bildet sich in $\mathrm{Abb}(G, A)$ ab auf

$$g \longmapsto ga - ea = ga - a.$$

(ii) Sei $x : G \to A \in \mathrm{Abb}(G, A)$. Das Urbild in $C^1(G, A)$ ist

$$\varphi_x : G \times G \longrightarrow A,\ (g_0, g_1) \longmapsto g_0 \cdot x(g_0^{-1} g_1)$$

Probe:

$$\begin{aligned}(g \cdot \varphi_x)(g_0, g_1) &= g\varphi_x(g^{-1}g_0, g^{-1}g_1) \\ &= g(g^{-1}g_0) \cdot x(g^{-1}g_0)^{-1}g^{-1}q_1) = g_0 \cdot x(g_0^{-1}g_1)\end{aligned}$$

also $\varphi_x \in C^1(G, A)$.

Nun gilt

$$\begin{aligned}(d^2\varphi_x)((g_0, g_1, g_2)) &= \varphi_x(g_1, g_2) - \varphi_x(g_0, g_2) + \varphi_x(g_0, g_2) \\ &= g_1 x(g_1^{-1}g_2) - g_0 x(g_0^{-1}g_2) + g_0 x(g_0^{-1}g_1).\end{aligned}$$

Dies bildet sich in $\mathrm{Abb}(G^2, A)$ ab auf

$$\begin{aligned}(g_1, g_2) &\longmapsto d^2\varphi_x(e, g_1, g_1g_2) \\ &= g_1 x(g_2) - x(g_1, g_2) + x(g_1)\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$H^1(G, A) = H(A \xrightarrow{\partial^1} \mathrm{Abb}(G, A) \xrightarrow{\partial^2} \mathrm{Abb}(G^2, A))$$

Nun gilt

$$\partial^2 x = 0 \Longleftrightarrow x(g_1g_2) = g_1 x(g_2) + x(g_1) \quad \forall\, g_1, g_2 \in G$$

Daher $\ker \partial^2 = \mathrm{Der}(G, A)$ und $\mathrm{im}\partial^1 = \mathrm{IDer}(G, A)$. □

1.4 Funktorialität

Ein **kompatibles Paar** $(\varphi, f) : (G, A) \to (G', A')$ besteht aus:

- Gruppen G, G',
- ein G-Modul A, ein G'-Modul A',
- ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G' \to G$,
- ein Homomorphismus abelscher Gruppen: $f : A \to A'$.

so dass für $g' \in G'$, $a \in A$ gilt

$$f(\varphi(g')a) = g' f(a). \tag{$*$}$$

Ein kompatibles Paar induziert Komplexhomomorphismen

$$(\varphi, f) : X^\bullet(G, A) \longrightarrow X^\bullet(G', A')$$

durch

$$(\varphi, f)(x)(g_0', \ldots, g_n') = f(x(\varphi(g_0', \ldots, g_n'))$$

und wegen $(*)$:

$$C^\bullet(G,A) \longrightarrow C^\bullet(G',A').$$

Nimmt man Kohomologie erhält man natürliche Abbildung

$$H^i(G,A) \longrightarrow H^i(G',A') \quad \forall\, i \geq 0.$$

1. Beispiel: res^G_H
Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe und A ein G-Modul. Das kompatible Paar $(G,A) \to (H,A)$ induziert die Abbildung

$$res^G_U : H^i(G,A) \longrightarrow H^i(U,A)$$

2. Beispiel: Die Inflation
Sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Dann ist A^H in natürlicher Weise ein G/H-Modul. Das kompatible Paar

$$(G/H, A^H) \longrightarrow (G,A)(\text{ durch } \; G \twoheadrightarrow G/H,\; A^H \hookrightarrow A)$$

induziert die **Inflationsabbildung**

$$\inf^{G/H}_G : H^i(G/H, A^H) \longrightarrow H^i(G,A) \quad \forall\, i$$

Satz 1.14. *Sei $H \lhd G$ ein Normalteiler und A ein G-Modul. Dann ist die Folge*

$$0 \longrightarrow H^1(G/H, A^H) \xrightarrow{\inf} H^1(G,A) \xrightarrow{res} H^1(H,A)$$

exakt.

Beweis. Wir nutzen den Isomorphismus

$$H^1(G,A) = \mathrm{Der}(G,A)/\mathrm{IDer}(G,A).$$

1) Injektivität von inf.
Sei $D : G/H \to A^H$ eine Derivation so dass $\inf D : G \twoheadrightarrow G/H \xrightarrow{D} A^H \subset A$ inner ist, d.h. es existiert $a \in A$ mit $\inf D(g) = ga - a$ für alle $g \in G$.
Zu zeigen D ist inner. Genügt zu zeigen $a \in A^H$. Nun gilt per Konstruktion

$$(\inf D)(h) = D(e) \in A^H \subset A$$

für alle $h \in H$. Nach Definition einer Derivation gilt

$$D(e) = D(ee) = e \cdot D(e) + D(e) = D(e) + D(e) \text{ also } D(e) = 0.$$

Also gilt

$$\inf D(h) = 0 \quad \forall\, h \in H.$$

Folglich
$$ha - a = 0 \quad \rightsquigarrow \quad a \in A^H.$$
2) $res \circ \inf = 0$.
Ist $D : G/H \to A^H$ eine Derivation, so ist
$$res \circ \inf D : H \to G \to G/H \to A^H \subset A$$
die Nullabbildung wegen $res \circ \inf D(h) = D(e) = 0$.

3) Exaktheit bei $H^1(G, A)$.
Sei $D : G \to A$ eine Derivation so dass
$$resD : H \hookrightarrow G \to A$$
inner ist, d.h. es existiert
$$a \in A : D(h) = ha - a \quad \forall\, h \in H.$$
Zu zeigen es existiert
$$D' \in \mathrm{Der}(G/H, A^H) \text{ und } b \in A \text{ mit } D = \inf D' + D_a.$$
Wir setzen $b = a$.

Die Gleichung
$$\begin{aligned}(D - D_a)(gh) &= gD(h) + D(g) - gha + a \\ &= g(ha - a) + D(g) - gha + a = (D - D_a)(g)\end{aligned}$$
zeigt, dass $D' = D - D_a$ nur von der Restklasse $\mathrm{mod} H$ abhängt. Außerdem nimmt wegen
$$hD'(g) = hD'g(g) + D'(h) = D'(hg) = D'(gg^{-1}hg) = D'(g)$$
D' Werte in A^H an. Daher gilt
$$D - D_a = \inf(D').$$
□

Satz 1.15. *Sei $H \subseteq G$ ein Normalteiler, A ein G-Modul und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, so dass*
$$H^i(H, A) = 0$$
für $1 \leq i \leq n - 1$. Dann ist die Folge
$$0 \longrightarrow H^n(G/H, A^H) \xrightarrow{\inf} H^n(G, A) \xrightarrow{\text{res}} H^n(H, A)$$
exakt.

Beweis. Per Induktion nach n. $n = 1$ ist 1.14.
Sei $n \geq 2$. Wir betrachten die kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \mathrm{Koind}_G A \longrightarrow A' \longrightarrow 0.$$

Die lange exakte Folge

$$H^i(G, \mathrm{Koind}_G A) \longrightarrow H^i(G, A') \longrightarrow H^{i+1}(G, A)$$
$$\longrightarrow H^{i+1}(G, \mathrm{Koind}_G A) \longrightarrow \cdots$$

zeigt

$$H^i(G, A') \xrightarrow{\sim} H^{i+1}(G, A) \text{ für } i \geq 1.$$

Analog

$$H^i(H, A) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}(H, A').$$

Also insbesondere $H^i(H, A') = 0$ für $i = 1, \ldots, n-2$.

Desweiteren gilt

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{Koind}_G A)^H & \cong & (\mathrm{Koind}_G^{\{1\}} A)^H = \mathrm{Abb}_H(G, A^{\mathrm{tr}}) \\ & = & \mathrm{Abb}(G/H, A^{\mathrm{tr}}) = \mathrm{Koind}_{G/H}^{\{1\}}, A^{\mathrm{tr}}. \end{array}$$

Also ist $(\mathrm{Koind}_G A)^H$ ein kohomologisch trivialer G/H-Modul. Wegen $H^1(H, A) = 0$ ist die Folge

$$0 \longrightarrow A^H \longrightarrow (\mathrm{Koind}_G A)^H \longrightarrow A'^H \longrightarrow 0$$

exakt. Wir erhalten

$$H^i(G/H, A'^H) = H^{i+1}(G/H, A^H) \quad \forall\, i \geq 1.$$

Zusammen ergibt dies ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow H^n(G/H, A^H) & \xrightarrow{\mathrm{inf}} & H^n(G, A) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & H^n(H, A) \\ \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\ 0 \longrightarrow H^{n+1}(G/H, A'^H) & \xrightarrow{\mathrm{inf}} & H^{n-1}(G, A') & \longrightarrow & H^{n-1}(H, A). \end{array}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist die untere Zeile exakt, also auch die obere. $\square$

1.5 Die Korestriktion

Sei $U \subseteq G$ eine Untergruppe von endlichem Index. Wir haben die Norm-Abbildung

$$\begin{array}{rcl} N : M^U & \longrightarrow & M^G \\ m & \longmapsto & \sum\limits_{S \in G/U} sm \end{array}$$

Angewendet auf eine kohomologisch triviale Auflösung $A \to I$ gibt dies die Abbildung

$$cor_G^U : H^i(U, A) \longrightarrow H^i(G, A), \quad i \geq 0.$$

Beispiel. Sei $L|K$ eine (evtl. unendliche) Galoiserweiterung mit Gruppe G und sei $U \subset G$ eine offene Untergruppe. Setze $K' = L^U$.

$$\text{auf } H^0\text{-Niveau} \begin{cases} \bullet \quad A = L^+ : cor = \mathrm{Spur}_{K'|K} K'^+ \longrightarrow K^+ \\ \bullet \quad A = L^\times : cor = \mathrm{Norm}_{K'|K} : K'^\times \longrightarrow K^\times \end{cases}$$

Analog wie bei Homologie erhalten wir

Lemma 1.16.

$$cor_G^U \circ res_U^G = (G : U).$$

Korollar 1.17. *Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und A ein G-Modul, so dass die n-Multiplikation $A \xrightarrow{\cdot n} A$ ein Isomorphismus ist. Dann gilt*

$$H^i(G, A) = 0 \quad \forall i \geq 1.$$

4. Konjugation

Sei $H \subset G$ eine Untergruppe, A ein G-Modul und B ein H-Untermodul von A. Für $g \in G$ ist $gB = \{gb \mid g \in G\}$ eine Untergruppe und ein $H^g = gHg^{-1}$-Modul. Das Paar

$$\begin{array}{ccc} H^g \longrightarrow H & & B \longrightarrow gB \\ h \longmapsto g^{-1}hg & , & b \longmapsto gb \end{array}$$

ist ein kompatibles Paar (von Isomorphismen). Wir erhalten Isomorphismen

$$g_* : H^n(H, B) \xrightarrow{\sim} H^n(H^g, gB) \quad \forall\, n.$$

Diese heißen **Konjugationsabbildungen**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Es gilt} \quad e_* = \mathrm{id} \quad \text{und} \\ (g_1 g_2)_* = (g_1)_* \circ (g_2)_* \end{array}\right\} \quad (*)$$

Nun nehmen wir an:

$H \lhd G$, also $H^g = H$ und $B = A$, also $gB = A$ und erhalten die Abbildung

$$g_* : H^n(H, A) \to H^n(H, A)$$

für alle $g \in G$, $n \geq 0$. Wegen $(*)$ wird $H^n(H, A)$ durch

$$\begin{array}{rcl} G \times H^n(H, A) & \longrightarrow & H^n(H, A) \\ (g, x) & \longmapsto & g_*(x) \end{array}$$

zum G-Modul.

Satz 1.18. *Sei A ein G-Modul und $H \subset G$ ein Normalteiler. Dann ist für jedes $h \in H$ die Abbildung*

$$h_* : H^n(H, A) \longrightarrow H^n(H, A)$$

die Identität. Mit anderen Worten: Die G-Wirkung auf $H^n(H, A)$ faktorisiert über G/H, d.h. $H^n(H, A)$ ist ein G/H-Modul.

Beweis. Auf $H^0(H, A) = A^H$ ist h_* trivialerweise die Identität. Der allgemeine Fall folgt durch Anwendung auf eine kohomologisch triviale Auflösung $A \to I^\bullet$ aus dem Spezialfall H^0. $\square$

1.6 Das Cup-Produkt

Seien A, B G-Moduln. Die natürliche Abbildung

$$A^G \times B^G \longrightarrow (A \otimes B)^G \quad , \quad (a,b) \longmapsto a \otimes b,$$

setzt sich auf die höheren Kohomologiegruppen fort.

Sei $C^\bullet(G,A) = X^\bullet(G,A)^G$. Wir betrachten für $p, q \geq 0$ die Abbildung

$$C^p(G,A) \times C^q(G,B) \xrightarrow{\cup} C^{p+q}(G, A \otimes B)$$

die durch $a \cup b(g_0, \ldots, g_{p+q}) = a(g_0, \ldots, g_p) \otimes b(g_p, \ldots, g_{p+q})$ gegeben ist.

Satz 1.19. *Für das Differential ∂ in den verschiedenen Standardkomplexen gilt*

$$\partial(a \cup b) = (\partial a) \cup b + (-1)^p (a \cup \partial b).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \partial(a \cup b)(g_0, \ldots, g_{p+q+1}) \\
= & \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i (a \cup b)(g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{p+q+1}) \\
= & \sum_{i=0}^{p} (-1)^i a(g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{p+1}) \otimes b(g_{p+1}, \ldots, g_{p+q+1}) \\
+ & \sum_{i=p+1}^{p+q+1} (-1)^i a(g_0, \ldots, g_p) \otimes b(g_p, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{p+q+1})
\end{aligned}$$

Desweiteren

$$\begin{aligned}
& (\partial a \cup b)(g_0, \ldots, g_{p+q+1}) \\
= & \partial a(g_0, \ldots, g_{p+1}) \otimes b(g_{p+1}, \ldots, g_{p+q+1}) \\
= & \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i a(g_0, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{p+1}) \otimes b(g_{p+1}, \ldots, g_{p+q+1})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& (a \cup \partial b)(g_0, \ldots, g_{p+q+1}) \\
& = a(g_0, \ldots, g_p) \otimes \partial b(g_p, \ldots, g_{p+q+1}) \\
& = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i a(g_0, \ldots, g_p) \otimes b(g_p, \ldots, \hat{g}_{p+i}, \ldots, q_{p+q+1}) \\
& = (-1)^p \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i a(g_0, \ldots, g_p) \otimes b(g_p, \ldots, \widehat{g_i}, \ldots, g_{p+q+1}).
\end{aligned}$$

In der zu beweisenden Formel

$$\partial(a \cup b) = \partial a \cup b + (-1)^p (a \cup \partial b)$$

bleibt stehen:

$$\begin{aligned}
0 \quad = \quad & (-1)^{p+1} a(g_0, \ldots, g_p) \otimes b(g_{p+1}, \ldots, g_{p+q+1}) \\
& + (-1)^p a(g_0, \ldots, g_p) \otimes b(g_{p+1}, \ldots, g_{p+q+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Wir erhalten somit Abbildungen

$$\begin{aligned}
Z^p(G,A)\times Z^q(G,B) &\xrightarrow{\cup} Z^{p+q}(G,A\otimes B),\\
B^p(G,A)\times Z^q(G,B) &\xrightarrow{\cup} B^{p+q}(G,A\otimes B),\\
Z^p(G,A)\times B^q(G,B) &\xrightarrow{\cup} Z^{p+q}(G,A\otimes B).
\end{aligned}$$

Definition. Die induzierte Abbildung

$$H^p(G,A)\times H^q(G,B)\xrightarrow{\cup} H^{p+q}(G,A\otimes B)$$

heißt das **Cup-Produkt**.

Bemerkungen. 1.) Ist $A\times B\to C$ eine bilineare Paarung, so wird ein Homomorphismus. $A\otimes B\to C$ induziert und wir erhalten eine Abbildung

$$H^p(G,A)\times H^q(G,B)\longrightarrow H^{p+q}(G,A\otimes B)\longrightarrow H^{p+q}(G,C)$$

die auch Cup-Produkt genannt wird.
2.) Man kann das Cup-Produkt abstrakt charakterisieren durch:
– auf H^0 ist es die natürliche Abbildung $A^G\times B^G\to(A\otimes B)^G$
– es gelten die Eigenschaften, die wir gleich nachweisen werden.

Lemma 1.20. *Für Homomorphismen $A\to A'$, $B\to B'$ ist das induzierte Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc}
H^p(G,A) & \times & H^q(G,B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G,A\otimes B)\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
H^p(G,A') & \times & H^q(G,B') & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G,A'\otimes B)
\end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Direkt aus der Definitionen. □

Satz 1.21. (i) *Seien $0\to A'\to A\to A''\to 0$ und $0\to C'\to C\to C''\to 0$ exakte Folgen von G-Moduln. Sei B ein weiterer G-Modul und sei $A\times B\to C$ eine bilineare Paarung, die Paarungen $A'\times B\to C'$ und $A''\times B\to C$ induziert. Dann ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc}
H^p(G,A'') & \times & H^q(G,B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G,C'')\\
\downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{id} & & \downarrow{\scriptstyle\delta}\\
H^{p+1}(G,A') & \times & H^q(G,B) & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q+1}(G,C')
\end{array}$$

kommutativ, d.h. $\delta(a''\cup\beta)=\delta a''\cup\beta$.
(ii) *Seien $0\to B'\to B\to B''\to 0$ und $0\to C'\to C\to C''\to 0$ exakte Folgen von G-Moduln und sei $A\times B\to C$ eine Paarung, die Paarungen $A\times B'\to C'$ und $A\times B''\to C''$ induziert. Dann kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc}
H^p(G,A) & \times & H^q(G,B'') & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G,C'')\\
\downarrow{id} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle(-1)^p\delta}\\
H^p(G,A) & \times & H^{q+1}(G,B'') & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q+1}(G,C'),
\end{array}$$

d.h. $(-1)^p\delta(\alpha\cup\beta'')=\alpha\cup\delta\beta''$.

Beweis. Wir zeigen (ii): Sei $\alpha = \overline{a}$, $a \in Z^p(G, A)$, $\beta'' = \overline{b''}$, $b'' \in Z^q(G, B'')$. Sei $b \in C^q(G, B)$ ein Urbild von b''. Wir identifizieren B' mit seinem Bild in B. Dann wird nach Definition $\delta\beta''$ durch den Kozyklus $\partial b \in Z^{q+1}(G, B')$ repräsentiert und $\delta(\alpha \cup \beta'')$ durch $\partial(a \cup b) \in Z^{p+q+1}(G, C)$. Wegen $\partial a = 0$ erhalten wir nach 1.19

$$\begin{aligned} \partial(a \cup b) &= (\partial a) \cup b + (-1)^p (a \cup \partial b) \\ &= (-1)^p (a \cup \partial b). \end{aligned}$$

Übergang zu Kohomologie gibt

$$\delta(\alpha \cup \beta'') = (-1)^p \delta\alpha \cup \beta''.$$

□

Wir machen die Identifikationen

$$(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C) \quad \text{ und } A \otimes B \cong B \otimes A.$$

Satz 1.22. *Das Cup-Produkt ist assoziativ und graduiert-kommutativ, d.h. für $\alpha \in H^p(G, A)$, $\beta \in H^q(G, B)$, $\gamma \in H^r(G, C)$ gilt*

$$(\alpha \cup \beta) \cup \gamma = \alpha \cup (\beta \cup \gamma) \quad \textit{ und } \alpha \cup \beta = (-1)^{pq} (\beta \cup \alpha).$$

Beweis. Seien a, b, c Kozyklen, die α, β, γ repräsentieren. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (a \cup b) \cup c(g_0, \dots, g_{p+q+r}) \\ = \; & a \cup b(g_0, \dots, g_{p+q}) \otimes c(g_{p+q}, \dots, g_{p+q+r}) \\ = \; & a(g_0, \dots, g_p) \otimes b(g_p, \dots, g_{p+q}) \otimes c(g_{p+q}, \dots, g_{p+q+r}) \\ = \; & a(g_0, \dots, g_p) \otimes (b \cup c)(g_p, \dots, g_{p+q+r}) \\ = \; & a \cup (b \cup c)(g_0, \dots, g_{p+q+r}). \end{aligned}$$

Übergang zur Kohomologie zeigt die Assoziativität.

Die graduierte Kommutativität ist auf Kozykelniveau schwierig einzusehen. Für $p = q = 0$ gilt offensichtlich $\alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha$.

Wir beschränken uns im Beweis für allgemeine p, q auf den Fall, dass G proendlich ist. Wir nutzen, dass für beliebige diskrete G-Moduln A, B die Abbildung

$$(\mathrm{Koind}_G A) \otimes B \to \mathrm{Koind}_G(A \otimes B), \; f \otimes b \mapsto [g \mapsto f(g) \otimes b]$$

ein Isomorphismus von G Moduln ist. Das sieht man für endliches G wegen

$$\mathrm{Koind}_G A = \mathrm{Abb}(G, A) = \bigoplus_G A,$$

und weil Tensorprodukt und direkte Summe kommutieren. Für beliebiges G folgt die Aussage per Limesübergang aus der Aussage für G/U für beliebige offene Normalteiler U von G.

Nun machen wir Dimensionsverschiebung: Für einen G-Modul A setzen wir induktiv:

$$A_0 = A,\ A_{i+1} = \mathrm{coker}(A_i \to \mathrm{Koind}_G A_i).$$

Dann haben wir eine Surjektion:

$$H^0(G, A_n) \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} H^1(G, A_{n-1})$$

und Isomorphismen:

$$H^1(G, A_{n-1}) \underset{\delta}{\overset{\sim}{\to}} H^2(G, A_{n-2}) \underset{\delta}{\overset{\sim}{\to}} \dots \underset{\delta}{\overset{\sim}{\to}} H^n(G, A_0).$$

Die Komposition δ^n dieser n Randabbildungen ist eine Surjektion $H^0(G, A_n) \overset{\delta^n}{\twoheadrightarrow} H^n(G, A)$. Wegen $\mathrm{Koind}_G A) \otimes B \cong \mathrm{Koind}_G(A \otimes B)$ haben wir

$$A_1 \otimes B \cong (A \otimes B)_1 \cong A \otimes B_1.$$

Nach 1.21 ((i) p mal und (ii) q mal angewendet) erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(G, A_p) & \times & H^0(G, B_q) & \overset{\cup}{\longrightarrow} & H^0(G, A_p \otimes B_q) = H^0(G(A \otimes B_q)_p) \\
\delta^p \downarrow & & \mathrm{id} \downarrow & & \swarrow \delta^p \\
H^p(G, A) & \times & H^0(G, B_q) & \overset{\cup}{\longrightarrow} & H^p(G, A \otimes B_q) = H^p(G, (A \otimes B)_q) \\
\mathrm{id} \downarrow & & \delta^q \downarrow & & \swarrow (-1)^{pq}\delta^q \\
H^p(G, A) & \times & H^q(G, B) & \overset{\cup}{\longrightarrow} & H^{p+q}(G, A \otimes B).
\end{array}$$

andersherum:

$$\begin{array}{ccccc}
H^0(G, B_q) & \times & H^0(G, A_p) & \overset{\cup}{\longrightarrow} & H^0(G, B_q \otimes A_p) = H^0(G(B_q \otimes A)_p) \\
\mathrm{id} \downarrow & & \delta^p \downarrow & & \swarrow \delta^p \\
H^0(G, B_q) & \times & H^p(G, A) & \overset{\cup}{\longrightarrow} & H^p(G, B_q \otimes A) = H^p(G, (B \otimes A)_q) \\
\delta^q \downarrow & & \mathrm{id} \downarrow & & \swarrow \delta^q \\
H^p(G, B) & \times & H^q(G, A) & \overset{\cup}{\longrightarrow} & H^{p+q}(G, A \otimes B).
\end{array}$$

Weil das Cup-Produkt auf H^0-Niveau kommutiert, erhalten wir das behauptete Vorzeichen. □

Seien A, B diskrete G-Moduln und sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt
(a) G endlich; oder
(b) A ist endlich erzeugt als abelsche Gruppe.

Dann ist $\mathrm{Hom}(A, B)$ mit der G-Wirkung $(g\varphi)(a) = g \cdot \varphi(g^{-1}a)$ ein diskreter G-Modul.

Wir betrachten die Paarung

$$\mathrm{Hom}(A, B) \times A \longrightarrow B, \quad (\varphi, a) \longmapsto \varphi(a).$$

Diese induziert das Cup-Produkt

$$H^p(G, \mathrm{Hom}(A, B)) \times H^q(G, A) \longrightarrow H^{p+q}(G, B)$$

Satz 1.23. *Es sei*

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{j} A'' \longrightarrow 0$$

eine exakte Folge von G-Moduln und B ein G-Modul, so dass

(i) *G endlich, oder A endlich erzeugte abelsche Gruppe, und*

(ii) *Die Folge*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A'', B) \xrightarrow{\widehat{\gamma}} \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\widehat{i}} \mathrm{Hom}(A', B) \longrightarrow 0$$

ist exakt.

Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
H^p(G, \mathrm{Hom}(A', B)) & \times & H^q(G, A') & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G, B) \\
{\scriptstyle \delta}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle (-1)^{p+1}} \\
H^{p+1}(G, \mathrm{Hom}(A'', B)) & \times & H^{q-1}(G, A'') & \xrightarrow{\cup} & H^{p+q}(G, B)
\end{array}$$

kommutativ, d.h.

$$(\delta\hat{\alpha}) \cup \alpha + (-1)^p(\hat{\alpha} \cup \delta\alpha) = 0$$

für

$$\hat{\alpha} \in H^p(G, \mathrm{Hom}(A', B)), \quad \alpha \in H^{q-1}(G, A'').$$

Beweis. Seien $\hat{a}' \in Z^p(G, \mathrm{Hom}(A', B))$ und $a'' \in Z^{q-1}(G, A'')$ repräsentierende Kozykel von $\hat{a}$ und α. Seien $\hat{a} \in C^p(G, \mathrm{Hom}(A, B))$ und $a \in C^{q-1}(G, A)$ Urbilder. Dann existieren $\hat{a}'' \in C^{p+1}(G, \mathrm{Hom}(A'', B))$ und $a' \in C^q(G, A')$ mit $\hat{j}\hat{a}'' = \partial\hat{a}$ und $ia' = \partial a$. Diagramm (G weglassen)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^p(\mathrm{Hom}(A'', B)) & \xrightarrow{\hat{j}} & C^p(\mathrm{Hom}(A, B)) & \xrightarrow{\hat{i}} & C^p(\mathrm{Hom}(A', B)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \hat{a} & \longmapsto & \hat{a}' & & \\
 & & {\scriptstyle \partial}\downarrow & & {\scriptstyle \partial}\downarrow & & \downarrow \quad {\scriptstyle \partial}\downarrow & & \\
 & & \hat{a}'' & \longmapsto & \bullet & & 0 & & \\
0 & \longrightarrow & C^{p+1}(\mathrm{Hom}(A'', B)) & \xrightarrow{\hat{j}} & C^{p+1}(\mathrm{Hom}(A, B)) & \longrightarrow & C^{p+1}(\mathrm{Hom}(A', B)) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

und analog

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^{q-1}(A') & \xrightarrow{i} & C^{q-1}(A) & \xrightarrow{j} & C^{q-1}(A'') & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & a & \longmapsto & a'' & & \\
 & & {\scriptstyle \partial}\downarrow & & {\scriptstyle \partial}\downarrow \quad \downarrow & & \downarrow \quad {\scriptstyle \partial}\downarrow & & \\
 & & a' & \longmapsto & \bullet & & 0 & & \\
0 & \longrightarrow & C^q(A') & \xrightarrow{i} & C^q(A) & \xrightarrow{j} & C^q(A'') & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Dann ist $\delta\hat{\alpha}$ durch $\hat{a}''$ und $\delta\alpha$ durch a' repräsentiert.

Folglich gilt
$$(\delta\hat{\alpha}) \cup \alpha + (-1)^p(\hat{\alpha} \cup \delta\alpha) = 0,$$
da diese Klasse durch die Kokette
$$\begin{array}{rcl} \hat{a}'' \cup a'' + (-1)^p(\hat{a}' \cup a') & = & \hat{a}'' \cup ja + (-1)^p(\hat{i}\hat{a} \cup a') \\ & = & \hat{j}\hat{a}'' \cup a + (-1)^p(\hat{a} \cup ia') \\ & = & \partial\hat{a} \cup a + (-1)^p(\hat{a} \cup \partial a) \\ & = & \partial(\hat{a} \cup a) \end{array}$$
repräsentiert wird, die ein Korand ist. □

Bemerkung. Sei k ein Körper (mit trivialer G-Wirkung). Dann ist $H^*(G,k)$ ein graduiert-kommutativer Ring und $H^{2*}(G,k)$ ein kommutativer graduierter Ring. $\mathrm{Proj}(H^{2*}(G,k))$ ist die assoziierte Kohomologie-Varietät über k.

1.7 Proendliche Gruppen – Reduktion auf endliche Gruppen

Satz 1.24. *Sei G eine proendliche Gruppe und A ein diskreter G-Modul. Dann existiert ein natürlicher Isomorphismus*
$$\varinjlim_{U} H^n(G/U, A^U) \xrightarrow{\sim} H^n(G,A),$$
wobei U die offenen Normalteiler in G durchläuft.

Konstruktion der Abbildung: Für offene Normalteiler $V \triangleleft U \triangleleft G$ haben wir die Inflationsabbildung
$$H^n(G/U, A^U) \longrightarrow H^n(G/V, A^V) \longrightarrow H^n(G,A)$$
Die Gruppen $H^n(G/U, A^U)$ bilden ein direktes System und wir erhalten die Abbildung im Satz nach der Universaleigenschaft des direkten Limes.

Beweis von 1.24. Es ist bereits die natürliche Abbildung
$$\varinjlim_{U} C^\bullet(G/U, A^U) \longrightarrow C^\bullet(G,A)$$
ein Isomorphismus von Komplexen. Die Injektivität ist klar. Sei $x : G^{n+1} \to A$ eine n-Kokette. Da A diskret ist, ist x lokal konstant auf G^{n+1}. Daher existiert ein offener Normalteiler $U_0 \subset G$ so dass x konstant auf den Nebenklassen von U_0^{n+1} in G^{n+1} ist. D.h. x faktorisiert in der Form $x : G^{n+1} \twoheadrightarrow (G/U_0)^{n+1} \to A$.
Behauptung: $\mathrm{im}(x) \subset A^{U_0}$.

Grund: Für $u_0 \in U_0$ gilt

$$\begin{array}{ccl} (u_0x)(g_0,\ldots,g_n) & = & u_0 \cdot x(u_0^{-1}g_0,\ldots,u_0^{-1}g_n) \\ \| & = & u_0x(g_0,\ldots,g_n) \\ x(g_0,\ldots,g_n) & & \end{array}$$

Daher liegt x schon im Bild von $C^n(G/U_0, A^U) \to C^n(G,A)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \varinjlim_{U} H^n(G/U, A^U) & \cong H^n\left(\varinjlim_{U} C^\bullet(G/U, A^U)\right) \\ & = H^n(C^\bullet(G,A)) = H^n(G,A). \end{aligned}$$

□

Korollar 1.25. *Sei G eine proendliche Gruppe und A ein diskreter G-Modul. Dann sind für $n \geq 1$ die Gruppen $H^n(G,A)$ Torsionsgruppen.*

Beweis. Für jeden offenen Normalteiler $U \subset G$ ist nach 1.16

$$cor_G^U \circ res_U^G = (G:U).$$

Daher faktorisiert die $(G:U)$-Multiplikation

$$\begin{array}{ccccc} H^n(G/U, A^U) & \xrightarrow{res} & H^n(\{1\}, A^U) & \xrightarrow{cor} & H^n(G/U, A^U) \\ & & \| & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

über 0, d.h. $(G:U)H^n(G/U, A^U) = 0$.

Insbesondere ist $H^n(G/U, A^U)$ eine Torsionsgruppe und nach 1.24 auch $H^n(G,A)$.

□

Korollar 1.26. *Ist A eindeutig teilbar, so gilt*

$$H^n(G,A) = 0 \quad \forall\, n \geq 1$$

Beweis. $H^n(G,A)$ ist eine eindeutig teilbare Torsionsgruppe. □

Notation: Sei A ein diskreter G-Torsionsmodul. Wir sagen $(\#G, \#A) = 1$ wenn für jedes $a \in A$, und jeden offenen Normalteiler $U \subset G$ gilt: $((G,U), \mathrm{ord}(a)) = 1$.

Korollar 1.27. *Gilt $(\#G, \#A) = 1$, so folgt*

$$H^n(G,A) = 0 \quad \forall\, n \geq 1.$$

Beweis. Für jedes $U \subset G$ ist die $(G:U)$-Multiplikation auf A^U ein Isomorphismus

$$\begin{array}{ll} \Longrightarrow & H^n(G/U, A^U) = 0 \quad \forall\, U, \\ \Longrightarrow & H^n(G,A) = 0. \end{array}$$

□

1.8 Abstrakte Gruppen – Beziehung zwischen Homologie und Kohomologie

Sei G eine abstrakte Gruppe.

Lemma 1.28. *Sei B eine abelsche Gruppe. Dann überführt der Funktor*

$$\mathrm{Hom}(-, B) : G - Mod \longrightarrow G - Mod.$$

induzierte in koinduzierte Moduln.

Beweis. Sei A eine abelsche Gruppe. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}_G A, B) & = & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G] \otimes A, B) \\ & = & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[G], \mathrm{Hom}(A, B)) \\ & = & \mathrm{Koind}_G \mathrm{Hom}(A, B). \end{array}$$

□

Erinnerung: $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine teilbare, d.h. injektive abelsche Gruppe, daher ist der Funktor

$$\begin{array}{rcl} * : G - \mathrm{Mod} & \longrightarrow & G - \mathrm{Mod} \\ A & \longmapsto & \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

exakt.

Satz 1.29.

$$H_n(G, A)^* \cong H^n(G, A^*).$$

Beweis. Sei $P_\bullet \to A$ eine Auflösung durch induzierte Moduln. Dann ist $A^* \to (P_\bullet)^*$ eine Auflösung durch koinduzierte. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} H_n(G, A)^* & = & \mathrm{Hom}(H_n(G, A), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ & = & \mathrm{Hom}(H_n(P_{\bullet_G}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ & = & H^n(\mathrm{Hom}(P_{\bullet_G}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ & = & H^n(\mathrm{Hom}(P_\bullet, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^G) \\ & = & H^n(G, A^*). \end{array}$$

□