**Übungen zu Funktionentheorie 1** Musterlösung Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 2

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 8. Mai

---

Jede Aufgabe ist vier Punkte wert. Wir schreiben $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit einem Symbol $\infty$.

**6. Aufgabe:** Den *projektiven Raum* $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ kann man definieren als Menge der eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^2$, also

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C} \cdot v \mid 0 \neq v \in \mathbb{C}^2\} .$$

Die Gruppe $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ operiert auf $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ durch $M(\mathbb{C} \cdot v) := \mathbb{C} \cdot Mv$ für $M \in G$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine eindeutige Bijektion $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sodass $\varphi(z) = \mathbb{C} \cdot \left(\begin{smallmatrix} z \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ für $z \in \mathbb{C}$.

(b) Es gilt $M\varphi(z) = \varphi(M\langle z\rangle)$ für alle $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ und alle $M \in G$.

**Lösungskizze:** a) Setze $\varphi(\infty) := \mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ . Die Umkehrabbildung ist $\varphi^{-1}(\mathbb{C} \cdot v) = v_1/v_2$, falls $v_2 \neq 0$ und $\varphi^{-1}(\mathbb{C} \cdot v) = \infty$ falls $v_2 = 0$. Eindeutigkeit folgt, weil $\varphi$ auf allen bis auf einem Element festgelegt ist. b) Hier unterscheidet man die Fälle $z \in \mathbb{C}$ und $z = \infty$. In beiden Fällen kann man die Aussage einfach nachrechnen.

**7. Aufgabe:** Eine Matrix $H \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ heißt *hermitesch* falls $\overline{H} = H'$.

(a) Zeigen Sie, dass jede hermitesche Matrix $H$ eine reelle Determinante hat.

(b) Jede hermitesche Matrix $H$ mit $\det(H) < 0$ definiert einen *verallgemeinerten Kreis*

$$\{\mathbb{C} \cdot v \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid \overline{v}' H v = 0\} .$$

Zeigen Sie, dass zwei hermitesche Matrizen $H_1$ und $H_2$ mit negativer Determinante genau dann denselben Kreis definieren, wenn $H_1 = \mu H_2$ mit $\mu \in \mathbb{R}^\times$.

**Bemerkung**: Wenn $\det(H) > 0$ positiv wäre, dann wäre der “Kreis” die leere Menge.
**Lösung:** a) Es gilt $\det(H) = \det(H') = \det(\overline{H}) = \overline{\det(H)}$, also $\det(H) \in \mathbb{R}$.
b) Sei $H_i = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_j & z_j \\ \overline{z_j} & \beta_j \end{smallmatrix}\right)$ für $j = 1, 2$ mit reellen $\alpha_j, \beta_j$ und komplexen $z_j$. Die Kreisgleichung $\overline{v}' H v = 0$ für $v \in \mathbb{C}^2$ lautet ausgeschrieben

$$\alpha_j \|v_1\|^2 + \beta_j \|v_2\|^2 + \mathrm{Re}(v_1 \overline{v_2} z_j) = 0 .$$

Möbius-Transformationen operieren transitiv auf den Kreisen. Wir können also annehmen, dass $H_1$ und $H_2$ beide den Kreis $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ beschreiben. [Wenn das nicht so ist, ersetzen wir $H_1$ und $H_2$ durch $M\langle H_1\rangle = \overline{M}' H_1 M$ und $\overline{M}' H_2 M$ für geeignetes $M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$. Beachte dass die Konstante $\mu$ mit $M$ vertauscht.] Der Kreis $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist im projektiven Raum gegeben durch $\{\mathbb{C} \cdot v \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid 0 \neq v \in \mathbb{R}^2\}$ nach Aufgabe 6. Im Kreis sind $\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ enthalten, also sind $\alpha_j = 0$ und $\beta_j = 0$ für $j = 0, 1$. Weiterhin gilt $\mathrm{Re}(v_1 \overline{v_2} z_j) = 0$ für alle $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$. Also ist $z_j \in i\mathbb{R}$ rein imaginär für $j = 1, 2$. Damit ist $H_1$ ein reelles Vielfaches von $H_2$.

**8. Aufgabe:** Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ der Einheitskreis und seien $z_0, w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ feste Punkte mit $z_0, w_0 \notin S^1$. Zeigen Sie: Es gibt $M \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ mit $M\left\langle S^1 \right\rangle = S^1$ und $M\langle w_0\rangle = z_0$.
Hinweis: Lösen Sie die entsprechende Aufgabe für den Kreis $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ anstelle von $S^1$. Benutzen Sie dann die Cayley-Transformation.

**Lösung**: Wir konstruieren $N \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ mit $N\langle \mathbb{R} \cup \{\infty\}\rangle = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $N\langle w_0'\rangle = \langle z_0'\rangle$ für $w_0' = C\langle w_0\rangle$ und $z_0' = C\langle z_0\rangle$ mit der Cayley-Transformation $C = \left(\begin{smallmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{smallmatrix}\right)$.
Die erste Bedingung $N\langle \mathbb{R} \cup \{\infty\}\rangle = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wird erfüllt von allen $N \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Setze jetzt

$$N = \begin{pmatrix} \mathrm{Im}(z_0') & \mathrm{Re}(z_0') \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Im}(w_0') & \mathrm{Re}(w_0') \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{und} \quad M = C^{-1} N C\ .$$

**9. Aufgabe:** Seien $z_n \to z$ und $w_n \to w$ konvergente Folgen komplexer Zahlen. Zeigen Sie: Die Folge $z_n w_n$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $zw$.
Hinweis: Zerlegen Sie in Real- und Imaginärteil und verwenden Sie die entsprechende Aussage aus der reellen Analysis.

**Lösung:** Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn Real- und Imaginärteil konvergieren. Wir setzen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ und entsprechend für die Folgen. Nach Annahme konvergieren die reellen Folgen $u_n \to u$, $v_n \to v$, $x_n \to x$ und $y_n \to y$. Nach den bekannten Sätzen der reellen Analysis ist die reelle Addition und Multiplikation stetig, also konvergieren $\mathrm{Re}(z_n w_n) = (x_n u_n - y_n v_n)$ gegen $xu - yv = \mathrm{Re}(zw)$ und $\mathrm{Im}(z_n w_n) = (x_n v_n + y_n u_n)$ gegen $xv + yu = \mathrm{Im}(zw)$. Insbesondere konvergiert $z_n w_n$ gegen $zw$.