

Skript zur Vorlesung Gewöhnliche
Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra

2. März 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Einleitende Beispiele	2
1.2	Mathematische Grundlagen	4
1.3	Grundbegriffe der Dynamik	8
2	Existenz- und Eindeutigkeitssätze	12
2.1	Konstruktion von Lösungen	14
2.1.1	Methode der Trennung der Variablen	14
2.1.2	Methode der Variation der Konstanten	15
2.1.3	Fortsetzbarkeit von Lösungen	16
2.1.4	Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern	19
2.1.5	Der Existenzsatz von Peano	22
2.1.6	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	26
2.1.7	Inhomogene lineare Differentialgleichungen	31
2.1.8	Lineare Iterationen mit konstanten Koeffizienten	31
2.2	Stabilität linearer Systeme	32
3	Lokales Verhalten dynamischer Systeme	34
3.1	Verhalten nahe stationärer Punkte	35
3.1.1	Der Satz von Hartman und Grobman	35
3.1.2	Invariante Mannigfaltigkeiten	44
3.1.3	Eine Anwendung stabiler Mannigfaltigkeiten	48
3.1.4	Zentrumsmannigfaltigkeit	50
3.2	Verzweigung von Fixpunkten	54
3.2.1	Transkritische Verzweigung	57
3.2.2	Pitchfork Verzweigung	58
3.3	Verzweigung von Fixpunkten bei Iterationen	60
3.3.1	Sattel-Knoten-Verzweigung	60
3.3.2	Periodenverdopplung oder Flip-Verzweigung	61
3.4	Zweidimensionale Zentrumsräume	61
3.4.1	Hopf-Verzweigung	61
3.5	Lyapunov-Stabilität	62
3.6	Verhalten nahe periodischer Orbits	64
3.6.1	Die Poincaré Abbildung	64
3.7	Differentialgleichungen mit periodischer Zeitabhängigkeit	66
3.8	Periodische lineare Systeme und Floquet-Theorie	68

4 Ebene dynamische Systeme	70
4.1 Der Satz von Poincaré-Bendixon	70
4.1.1 Anwendungen	72

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einleitende Beispiele

Ein dynamisches System beschreibt die zeitliche Entwicklung eines Systems bei gegebenem Anfangszustand.

Beispiele:

1. Mechanische Systeme, z.B. Bewegung von Planeten
2. Chemische Systeme, z.B. Reaktionsverläufe
3. biologische Systeme, z.B. Wachstum von Populationen
4. Ökonomische Systeme, z.B. Entwicklung von Angebot und Nachfrage

Zu Beispiel 1

Newtons Gesetz: Die Beschleunigung eines Massenpunktes $x(t) \in \mathbb{R}^3$ der Masse m ist proportional der ausgeübten Kraft F :

$$m\ddot{x}(t) = F.$$

Wie entwickelt sich $x(t)$ bei gegebenem Anfangszustand $x(0), \dot{x}(0)$?

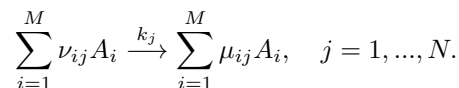
- Bei konstanter Kraft $F = (0, 0, -g)$ kann dies explizit gelöst werden
- Betrachtet man die Gravitationskraft zwischen N Körpern $x_i \in \mathbb{R}^3$ durch

$$m_i \ddot{x}_i(t) = - \sum_{j \neq i} \gamma m_i m_j \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|^3},$$

so kann dieses Problem für $N > 2$ nicht mehr explizit gelöst werden. Dies führt zu natürlichen Fragen wie "Gibt es immer Lösungen?", "Kann ein Zusammenstoß $x_i(t) = x_j(t)$ geschehen?", "Gibt es periodische Lösungen?", oder "Ist das Verhalten chaotisch?"

Zu Beispiel 2

Chemische Reaktionsnetzwerke. Sei x_i die Konzentration der Spezies $A_i, i = 1, \dots, M$, dann gilt für die stöchiometrischen Koeffizienten μ_{ij}, ν_{ij} die Reaktion



Das Massenwirkungsgesetz ergibt die Differentialgleichung

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^N (\mu_{ij} - \nu_{ij}) K_j \prod_{i=1}^M x_i^{\nu_{ij}}.$$

Natürliche Fragen in diesem Zusammenhang wären "Gibt es einen Gleichgewichtspunkt und ist er stabil?", und "Wie hängt das Langzeitverhalten von den Parametern ab?"

Zu Beispiel 3

Das klassische *Räuber-Beute-Modell* (Lotka-Volterra).

Sei $x(t)$ die Anzahl der Beutetiere und $y(t)$ die Anzahl der Räuber.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax - Bxy = (A - By)x \\ \dot{y} = Cxy - Dy = (Cx - D)y \end{cases}$$

Kann eine Population beliebig wachsen oder aussterben? Gibt es ein stabiles Gleichgewicht oder periodisches Verhalten?

Mann kann auch ein Modell mit diskreter Zeit betrachten (jährliche Beobachtung der Population) und erhält die Iteration

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (A - By_n)x_n \\ y_{n+1} = y_n + (Cx_n - D)y_n. \end{cases}$$

Viele numerische Verfahren beruhen auf Iterationen einer Abbildung, z.B. das Newton Verfahren, zum Auffinden von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Hilfe von der Iteration

$$x_n = x_{n-1} - (Df)^{-1}(x_n)f(x_n).$$

In Abhängigkeit vom Anfangswert x_0 kann x_n gegen verschiedene Fixpunkte konvergieren.

Eine weitere Anwendung ist die *symbolische Dynamik*. Sei

$$M = \{0, 1, \dots, N\}^{\mathbb{N}} = \{s \mid s = (s_1, s_2, \dots), s_i \in \{0, 1, \dots, N\}\}$$

die Menge aller Folgen mit $s_i \in \{0, 1, \dots, N\}$. Sei $f: M \rightarrow M, f(s)_i = s_{i+1}$ definiert die sogenannte *Shift Dynamik*. Eine Verallgemeinerung sind sogenannte *celluläre Automaten*. Hier hängt $(f(s)_i)_i$ nur von den endlich vielen $s_j, j = i - d, \dots, i + d$ ab. Eine 2-dimensionale Variante ist das *Game of Life*.

1.2 Mathematische Grundlagen

Zunächst werden einige Definitionen und Sätze zusammengetragen und verallgemeinert.

Definition 1.1. Eine Metrik auf einer Menge M ist eine Abbildung $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ mit

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in M$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in M$

Eine Metrik definiert eine *Topologie* auf M . Eine Topologie definiert, welche Mengen als offen gelten und welche nicht. Steht eine Metrik zur Verfügung, kann man diese benutzen um eine intuitive Topologie zu definieren. So heißt eine Menge $O \subset M$ offen, genau dann, wenn $\forall x \in M \exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subset O$. Hierbei ist

$$B_\delta(x) = \{y \in M \mid d(x, y) < \delta\},$$

also eine Kugel mit Radius δ um x ist. Mit dieser Topologie heißt (M, d) metrischer Raum. Die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$, üblicherweise geschrieben als $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, bedeutet also, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Definition 1.2. Seien $(M_1, d_1), (M_2, d_2)$ zwei metrische Räume und sei $f : M_1 \rightarrow M_2$ eine Funktion. f nennt man stetig in einem Punkt $x \in M_1$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Dazu äquivalent ist: Für alle offenen Mengen $O \subset M_2$ ist $f^{-1}(O) = \{x \in M_1 \mid f(x) \in O\} \subset M_1$ offen.

Wie im \mathbb{R}^n gilt, dass eine Teilmenge eines metrischen Raums genau dann überdeckungskompakt ist, wenn sie folgenkompakt ist.

Definition 1.3. Eine Norm auf einem reellen oder komplexen Vektorraum X ist eine Abbildung $|\cdot| : X \rightarrow [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften

1. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|\lambda x| = |\lambda| |x| \quad \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
3. $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in X$

Jede Norm definiert eine Metrik, indem man

$$d(x, y) := |x - y|$$

setzt. Damit wird $(X, |\cdot|)$ zu einem normierten Vektorraum, falls $(x, y) \mapsto x + y$ und $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ stetige Abbildungen sind. Zwei Normen $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ auf einem Vektorraum X heißen äquivalent, falls es Konstanten $0 < c < C$ gibt, sodass

$$c |x|_1 \leq |x|_2 \leq C |x|_1 \quad \forall x \in X.$$

Äquivalente Normen liefern dieselbe Topologie.

Definition 1.4. Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchyfolge konvergiert nennt man vollständig.

Beispiel 1 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ sind mit jeder Norm Banachräume (vollständige, normierte Vektorräume), weil auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ alle Normen zueinander äquivalent sind. Für $p \geq 1$ definiert

$$|x|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

die sogenannte p -Norm. Für $p = \infty$ definieren wir

$$|x|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Beispiel 2 Für eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sei $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ der Vektorraum der stetigen Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$|f|_{C^0(K, \mathbb{R}^n)} := \sup_{x \in K} |f(x)|_{\mathbb{R}^n}$$

definiert eine Norm. Beachte, dass äquivalente Normen auf \mathbb{R}^n äquivalente Normen auf $C^0(K, \mathbb{R}^n)$ liefern.

Beispiel 3 $C^k(K, \mathbb{R}^n)$ ist die Menge aller k -mal stetig differenzierbaren Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die natürliche Norm auf diesem Raum bildet

$$|f|_{C^k(K, \mathbb{R}^n)} := \sup_{0 \leq i_1 + \dots + i_n \leq k} |\partial_{x_1}^{i_1} \dots \partial_{x_n}^{i_n} f|_{C^0(K, \mathbb{R}^n)}.$$

Die Supremumsnorm allein kann auf dem Raum $C^k(K, \mathbb{R}^n)$ unendlich groß sein, weswegen sie keine Norm auf diesem Raum darstellt.

Beispiel 4 Für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$BC(\Omega, \mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n) \mid \sup_{x \in \Omega} |f(x)|_{\mathbb{R}^n} < \infty \right\}$$

der Raum der beschränkten, stetigen Funktionen. Auf diesem Raum definiert

$$|f|_{BC(\Omega, \mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|_{\mathbb{R}^n}$$

eine Norm, sodass $(BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), |\cdot|_{BC})$ ein Banachraum ist.

Beispiel 5 Seien $(X, |\cdot|_X), (Y, |\cdot|_Y)$ zwei normierte Vektorräume und sei

$$L(X, Y) := \{K: X \rightarrow Y \mid K \text{ linear und stetig}\}.$$

Für $K \in L(X, Y)$ definiert man die induzierte Operatornorm durch

$$\|K\|_{L(X, Y)} = \sup_{0 \neq x \in X} \frac{|Kx|_Y}{|x|_X} = \sup_{|x|_X=1} |Kx|_Y.$$

Es gilt, dass $K \in L(X, Y)$ genau dann ist, wenn $\|K\|_{L(X, Y)} < \infty$. $L(X, Y)$ bildet einen normierten Vektorraum. Ist Y ein Banachraum, so ist es auch $L(X, Y)$. Seien X, Y, Z normierte Vektorräume und seien $H \in L(Y, Z), K \in L(X, Y)$, dann gilt $HK \in L(X, Z)$ und $\|HK\|_{L(X, Z)} \leq \|H\|_{L(Y, Z)} \|K\|_{L(X, Y)}$. Ist $X = Y = Z$ ein Banachraum, dann spricht man von einer Banachalgebra.

Sei X ein reeller Banachraum und $K \in L(X, X)$ mit $\|K\|_{L(X, X)} < R$. Weiter sei

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

eine in $(-R, R)$ konvergente Potenzreihe. Dann konvergiert $\sum_{i=0}^{\infty} a_i K^i$ in $L(X, Y)$, z.B.

$$(I - K)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} K^i \quad \text{falls } \|K\|_{L(X, Y)} < 1$$

oder

$$e^K = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K^i}{i!} \quad \forall K \in L(X, Y).$$

Fassen wir eine reelle $n \times m$ Matrix als eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf, dann bezeichnen wir die induzierte Operatornorm

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^m} \frac{|Ax|_{\mathbb{R}^n}}{|x|_{\mathbb{R}^m}} = \sup_{|x|_{\mathbb{R}^m} = 1} |Ax|_{\mathbb{R}^n}$$

als induzierte Matrixnorm von A . Es gilt immer $\|A\| < \infty$.

Definition 1.5. Seien X, Y normierte Vektorräume. Eine Abbildung $F : X \rightarrow Y$ heißt differenzierbar in einem Punkt $x \in X$, falls es eine stetige, lineare Abbildung $K \in L(X, Y)$ gibt, sodass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|_X} |F(x+h) - F(x) - Kh|_Y = 0.$$

Die lineare Abbildung K ist dann die Ableitung von F in x . Wir bezeichnen die Ableitung meistens mit $DF(x) := K$.

In Banachräumen gelten die folgenden drei wichtigen Sätze mit genau denselben Beweisen, wie aus der Analysis im \mathbb{R}^n bekannt.

Satz 1.6. Sei $(X, |\cdot|)$ ein Banachraum, $A \subset X$ abgeschlossen und $F : A \rightarrow A$ eine Kontraktion, d.h. es gibt ein $0\theta < 1$ mit

$$|F(x) - F(y)| \leq \theta |x - y| \quad \forall x, y \in A.$$

Dann hat F einen eindeutigen Fixpunkt $\bar{x} \in A$. Weiter gilt

$$|\bar{x} - F^m(x_0)| \leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} |x_0 - F(x_0)| \quad \forall x_0 \in A.$$

Beweis. Wähle $x_0 \in A$ und definiere $x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq \sum_{i=m+1}^n |F^i(x_0) - F^{i-1}(x_0)| \leq \sum_{i=m+1}^n \theta^{i-1} |F(x_0) - x_0| \\ &= \frac{\theta^m - \theta^n}{1 - \theta} |F(x_0) - x_0|. \end{aligned}$$

Daher ist x_n eine Cauchyfolge und konvergent gegen ein \bar{x} , da X ein Banachraum ist. Da A abgeschlossen ist gilt $\bar{x} \in A$. Weil F stetig ist folgt auch $x_{n+1} = F(x_n) \rightarrow F(\bar{x}) = \bar{x}$. Weiter folgt im Limes, dass

$$|\bar{x} - F^m(x_0)| \leq \frac{\theta^m}{1 - \theta} |x_0 - F(x_0)|.$$

Seien x, y also zwei Fixpunkte von F , dann gilt

$$|x - y| = |F(x) - F(y)| \leq \theta |x - y|$$

woraus $x = y$ folgt. \square

Lemma 1.7. Seien X, Y Banachräume und Sei $U \subset X$ offen und konvex. Falls $F : U \rightarrow Y$ differenzierbar ist und falls $\sup_{x \in U} \|DF(x)\| \leq M$ gilt, dann folgt

$$|F(a) - F(b)| \leq M |a - b|.$$

Insbesondere ist F eine Kontraktion wenn $M < 1$.

Beweis. Für $a, b \in U, t \in [0, 1]$ definiere

$$g(t) := F(ta + (1 - t)b).$$

Es gilt

$$g'(t) = DF(ta + (1 - t)b)(a - b).$$

Für $n \geq N(\varepsilon)$ und $0 \leq k < n$ gilt

$$\begin{aligned} \left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| &\leq \left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) - g'\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right| + \left| g'\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n} \right| \\ &\leq (\varepsilon + M) \frac{a - b}{n} \end{aligned}$$

Summation über k ergibt

$$|F(a) - F(b)| \leq (M + \varepsilon) |a - b|.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich das Lemma. \square

Satz 1.8. Seien X, Y, Z Banachräume und sei $f : X \times Y \rightarrow Z$ stetig differenzierbar. Falls in einem Punkt $(x_0, y_0) \in X \times Y$ gilt $D_y f(x_0, y_0) \in L(X, Y)$ ein linearer Isomorphismus ist, dann existieren Umgebungen U von x_0 und V von y_0 , sodass es eine eindeutige, stetig differenzierbare Funktion $g : U \rightarrow V$ gibt mit

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0),$$

d.h. man kann lokal nach y auflösen.

Satz 1.9. Seien X, Y Banachräume und sei $f : X \rightarrow Y$ stetig differenzierbar. Falls $Df(x_0) : X \rightarrow Y$ ein linearer Isomorphismus ist, dann existieren offene Umgebungen U von x_0 und V von $f(x_0)$ sodass $f|_U : U \rightarrow V$ invertierbar ist und f^{-1} stetig differenzierbar ist. Es gilt

$$Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1} \quad \forall x \in U$$

und

$$|(I - f)^{-1}(y_1) - (I - f)^{-1}(y_2)| \leq \frac{1}{1 - \theta} |y_1 - y_2|.$$

1.3 Grundbegriffe der Dynamik

Sei M eine Menge, der möglichen Zustände eines Systems. Der Zustand zu einem Zeitpunkt t hängt dabei nur von dem Zustand zum Zeitpunkt $s < t$ und $t - s$ ab.

Bei endlich dimensionalen dynamischen Systemen ist der Zustandsraum meist eine Teilmenge des \mathbb{R}^n . Bei unendlich dimensionalen Systemen ist M meist Teilmenge eines Funktionenraums. Man unterscheidet zwischen kontinuierlichen und diskreten dynamischen Systemen, je nachdem ob die Zeitmessung kontinuierlich oder diskret erfolgt.

Definition 1.10. Sei (M, d) ein metrischer Raum, genannt Zustandsraum oder Phasenraum.

1. Ein kontinuierliches dynamisches System (oder Halbfluss) ist eine stetige Abbildung $\phi : \mathbb{R}^+ \times M \rightarrow M$, wobei für alle $x \in M$ und $t, s \geq 0$ die sogenannte Halbgruppeneigenschaft gelte

$$\begin{aligned}\phi(0, x) &= x \\ \phi(t + s, x) &= \phi(t, \phi(s, x))\end{aligned}$$

2. Ist $\phi(t, x) \forall t \in \mathbb{R}$ definiert, dann heißt ϕ invertierbares kontinuierliches System. Eine andere Schreibweise für $t \in \mathbb{R}^+$ bzw. $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\phi_t : M &\rightarrow M, \quad \phi_t(x) = \phi(t, x) \\ \phi_0 &= I, \quad \phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}\end{aligned}$$

3. Ein diskretes dynamisches System ist eine Menge von stetigen Abbildungen

$$\phi_n : M \rightarrow M, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \phi_0 = id_M, \quad \phi_n \circ \phi_m = \phi_{m+n}$$

4. Ist ϕ_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ definiert, dann heißt ϕ_n invertierbares diskretes dynamisches System. Andere Schreibweise mit $f := \phi_1$:

$$\phi_n = f^n = f \circ f^{n-1} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ mal}}$$

d.h. ϕ_n ist die n -te iterierte von f .

Bemerkung: Für invertierbare Systeme folgt aus der Halbgruppeneigenschaft sofort

$$\phi_{-t} = \phi_t^{-1} \text{ bzw. } \phi_{-n} = \phi_n^{-1}.$$

Oft ist $\phi(t, x)$ nur für $t \in I_x = (T_-(x), T_+(x)) \subset \mathbb{R}$ mit $T_-(x) < 0 < T_+(x)$ definiert.

Definition 1.11. Ein lokales kontinuierliches dynamisches System oder ein lokaler Fluss auf einem metrischen Raum (M, d) ist eine stetige Abbildung $\phi : W \rightarrow M$, wobei

$$W := \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times M,$$

offen ist und folgendes gelte

$$\begin{aligned} I_{\phi(t,x)} &= I_x - t, \\ \phi(0, x) &= x, \\ \phi(t, \phi(s, x)) &= \phi(t + s, x) \quad \forall x \in M, s, s + t \in I_x \end{aligned}$$

Falls $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $\phi \in C^k(W, M)$, $k \geq 1$, dann heißt ϕ k -fach differenzierbares dynamisches System. Es genügt, dass M eine differenzierbare Struktur besitzt, z.B. eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Lemma 1.12. Die Abbildung $T_+ : M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto T_+(x)$ ist unterhalbstetig und $T_-(x)$ ist oberhalbstetig.

Beweis. Zu zeigen ist

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists y \in B_\delta(x) \Rightarrow T_+(y) \geq T_+(x) - \varepsilon.$$

Sei $T_+(x) > t > T_+(x) - \varepsilon$. Da W offen ist, gibt es ein δ mit $\{t\} \times B_\delta(x) \subset W$, d.h. $T_+(y) > t > T_+(x) - \varepsilon$ für alle $y \in B_\delta(x)$. \square

Definition 1.13. Sei $\phi(t, x)$ ein lokales dynamisches System auf W . Für ein $x \in M$ heißt die Abbildung $t \mapsto \phi(t, x), t \in I_x$ die Trajektorie durch x . Das Bild der Trajektorie heißt Orbit von x ($\gamma(x)$).

$$\begin{aligned} \gamma_+(x) &= \phi((0, T_+(x)), x) \quad \text{heißt Vorwärtsorbit von } x \\ \gamma_-(x) &= \phi((T_-(x), 0), x) \quad \text{heißt Rückwärtsorbit von } x. \end{aligned}$$

Definition 1.14. Sei ϕ ein lokaler Fluss.

1. Falls $\gamma(x) = \{x\}$, dann heißt x Fixpunkt (oder singulärer, stationärer oder Gleichgewichtspunkt) von ϕ . Andernfalls heißt x regulärer Punkt.
2. $x \in M$ heißt periodischer Punkt, falls x kein Fixpunkt ist und $x \in \gamma_+(x)$.

$$P := \inf \{t > 0 \mid \phi(t, x) = x\}$$

heißt minimale Periode von x . Da ϕ stetig ist, folgt $\phi(0, x) = x$. x ist genau dann ein periodischer Punkt, wenn $\gamma_-(x) = \gamma_+(x)$ gilt.

3. Eine Menge $U \subset M$ heißt positiv (negativ) invariant, falls aus $x \in U$ stets $\gamma_+(x) \subset U$ ($\gamma_-(x) \subset U$) folgt. U heißt invariant, falls für U beides gilt.

Satz 1.15. Vereinigungen, Durchschnitte und der Abschluss positiver (negativer) invarianter Mengen sind positiv (negativ) invariant.

Beweis. Die Aussage ist klar für Vereinigungen und Durchschnitte. Sei $x \in \bar{U}$, d.h. es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset U$ mit $x_n \rightarrow x$. Sei U positiv invariant und $t \in I_x$. Da W offen ist, gilt für $n \geq N : t \in I_{x_n}$ und da ϕ stetig ist und U positiv invariant, gilt

$$\phi(t, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t, x_n) \in \bar{U}.$$

\square

Ebenfalls von Interesse ist das Langzeitverhalten von Orbits.

Definition 1.16. Für $x \in M$ heißen die Mengen

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \{y \in M \mid \exists t_n \rightarrow \infty, (t_n, x) \in W, \phi(t_n, x) \rightarrow y\}, \\ \alpha(x) &= \{y \in M \mid \exists t_n \rightarrow -\infty, (t_n, x) \in W, \phi(t_n, x) \rightarrow y\}\end{aligned}$$

Omega- und Alpha-Limesmenge von x .

Bemerkung:

1. Falls $T_+(x) < \infty$ gilt, so ist $\omega(x) = \emptyset$.
2. Aus $y \in \gamma(x)$ folgt $\omega(y) = \omega(x)$.

Satz 1.17. Es gilt

i)

$$\begin{aligned}\omega(x) &= \bigcap_{\rho \geq 0} \overline{\{\phi(t, x) \mid t \geq \rho\}} \\ \alpha(x) &= \bigcap_{\rho \leq 0} \overline{\{\phi(t, x) \mid t \leq \rho\}}\end{aligned}$$

ii) $\omega(x), \alpha(x)$ sind abgeschlossen in M .

iii) $\omega(x), \alpha(x)$ sind invariant.

Beweis. i) Übung

ii) folgt aus i).

iii) Aus $y \in \omega(x)$ folgt $\phi(t_n, x) \rightarrow y$ für eine Folge $t_n \rightarrow \infty$. Da ϕ stetig ist, folgt für alle $t \in \mathbb{R}$ und hinreichend großes n :

$$\phi(t + t_n, x) = \phi(t, \phi(t_n, x)) \rightarrow \phi(t, y),$$

d.h. $\omega(x)$ ist invariant.

□

Beispiele:

1. Die quadratische Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f(x) = a(x - 1)x$ für $0 < a \leq 4$.

Falls $0 < a \leq 1$ gilt, dann folgt $0 \leq f(x) \leq x \quad \forall x \in [0, 1]$, d.h. $f^n(x)$ ist nicht wachsend beschränkt. Daher gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^* \in [0, 1]$. Da f stetig ist gilt auch $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = f(x^*)$ und es folgt $x^* = 0$. Da dies der einzige Fixpunkt von f ist folgt $\omega(x) = \{0\}$.

Falls $1 < a \leq 4$ existiert genau ein weiterer Fixpunkt, nämlich $p = 1 - \frac{1}{a}$. Sei zunächst $1 < a \leq 2$, dann gilt $f([0, p]) = [0, p]$ und $p \geq f(x) \geq x$ für $x \in (0, p]$. Da $f'(x) > 0$ und $x \geq f(x)$ auf $(0, p]$ gilt $x \leq f(x) \leq f(p) = p$. Daraus folgt, dass $f^n(x)$ konvergiert für $x \in (0, p]$. Weiter gilt $f([1 - p, 1)) \subset [0, p]$ und $f^n(x) \rightarrow p$ für $x \in [1 - p, 1)$. Zudem ist $f([p, 1 - p]) \subset [p, \frac{p}{n}] \subset [p, 1 - p]$ und $|f'(x)| \leq a|1 - 2p| = |2 - a| < 1$. Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz gilt $f^n(x) \rightarrow p$ für $x \in [p, 1 - p]$. Insgesamt gilt $\omega(x) = p$ für $x \in (0, 1)$. Dies gilt auch für $2 \leq a \leq 3$, siehe

Devaney¹ oder Hasselblat². Für $p < 3$ verliert auch p seine Stabilität. Da keine weiteren Fixpunkte auftreten muss die Dynamik komplizierter werden.

2. $\dot{x} = x$, $\phi(t, x) = e^t x$. Für alle x gilt $\alpha(x) = \{0\}$. Für $x \neq 0$ gilt $\omega(x) = \emptyset$ und $\omega(0) = \{0\}$.

Das folgende Lemma gibt ein wichtiges Kriterium für $\omega(x) \neq \emptyset$.

Lemma 1.18. *Sei ϕ ein lokales, kontinuierliches dynamisches System. Falls $T_+(x) = \infty$ und falls $\gamma_+(x)$ kompakt ist, dann gilt*

i) $\omega(x) \neq \emptyset$

ii) $\omega(x)$ ist kompakt

iii) $\omega(x)$ ist zusammenhängend

Analoge Aussagen gelten für $\alpha(x)$.

Beweis. Zu i) Es gibt $t_n \rightarrow \infty$ mit $t_n \in I_x$. Da $\overline{\gamma_+(x)}$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge t_{n_i} und ein $y \in M$ mit $\phi(t_{n_i}, x) \rightarrow y$. Daher folgt $y \in \omega(x)$.

Zu ii) Seien $y_n \in \omega(x)$, dann gibt es $t_n > n$ mit

$$d(\phi(t_n, x), y_n) \leq \frac{1}{n}$$

und eine Teilfolge t_{n_i} und $y \in M$ mit $\phi(t_{n_i}, x) \rightarrow y$. Daraus folgt $y_{n_i} \rightarrow y \in \omega(x)$.

Zu iii) Angenommen $\omega(x)$ wäre nicht zusammenhängend, dann gäbe es nicht leere, disjunkte, offene Menge $O_1, O_2 \subset M$ mit $\omega(x) \subset O_1 \cup O_2$ und $\omega(x) \not\subset O_i, i = 1, 2$. Es gibt $t_n \rightarrow \infty, t_{n+1} > t_n$ mit $\phi(t_{2n-1}, x) \in O_1, \phi(t_{2n}, x) \in O_2$. Da $\gamma(x)$ zusammenhängend ist, gibt es $s_n \in (t_{2n-1}, t_{2n})$ mit $\phi(s_n, x) \in M \setminus (O_1 \cup O_2)$. Da $\overline{\gamma_+(x)}$ kompakt ist, gibt es eine Teilfolge s_{n_i} und $y \in M$ mit $\phi(s_{n_i}, x) \rightarrow y \in \omega(x) \subset O_1 \cup O_2$. Es gilt aber $y \in M \setminus (O_1 \cup O_2)$ da diese Menge abgeschlossen ist. □

Bemerkung:

1. i) und ii) gelten auch für diskrete dynamische Systeme, iii) dagegen nicht.
2. Ein periodischer Orbit der kein Fixpunkt ist ist seine eigene ω -Limesmenge und damit nicht zusammenhängend.

Definition 1.19. *Seien x_1, x_2 zwei Fixpunkte eines dynamischen Systems ϕ auf M . Ein Orbit $\gamma(x)$ heißt heterokliner Orbit falls $\alpha(x)$ und $\omega(x)$ zwei verschiedene Fixpunkte von ϕ sind. $\gamma(x)$ heißt homokliner Orbit, falls $\alpha(x) = \omega(x)$ genau ein Fixpunkt ist und $\gamma(x) \neq \{x\}$ gilt.*

¹Devaney, R., An introduction to chaotic dynamical systems, Addison-Wesley, 1989

²Hasselblat, B. Katoh, AB., A first course in dynamics: with a panorama of recent development, Cambridge Univ. Press, 2003

Kapitel 2

Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Sei $X = C(I, \mathbb{R}^n)$ mit $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$. X ist ein vollständiger normierter Vektorraum, d.h. ein Banachraum, mit der Norm

$$\|y\|_C = \sup_{t \in I} |y(t)|.$$

Wir wollen den Banach'schen Fixpunktsatz auf eine Abbildung K anwenden und benötigen dazu eine abgeschlossene Menge \tilde{X} von X , sodass $K(\tilde{X}) \subset \tilde{X}$ eine Kontraktion ist. Dazu ist es notwendig, dass $f(t, y)$ lokal Lipschitz stetig bzgl. y und gleichmäßig in t ist, d.h. es gebe für jede kompakte Teilmenge V von U eine Konstante $L(V)$, sodass für alle $(t, y) \in V$ gilt

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L(V) |y_1 - y_2|.$$

Satz 2.1 (Picard-Lindelöf). *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ und $(t_0, x) \in U$. Falls $f(t, y)$ lokal Lipschitz stetig bzgl. y ist, gleichmäßig in t , dann existiert eine eindeutige, lokale, stetig differenzierbare Lösung von*

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y), \quad y(t_0) = x.$$

Beweis. Wähle $\tilde{\varepsilon} > 0$ und $\delta > 0$ sodass $V = [t_0 - \tilde{\varepsilon}, t_0 + \tilde{\varepsilon}] \times \overline{B_\delta(x)}$. Sei $M := \sup_{(t,y) \in V} |f(t, y)|$ und sei $L(V)$ die Lipschitzkonstante von f auf V . Definiere $0 < \varepsilon < \min \left\{ \tilde{\varepsilon}, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{L(V)} \right\}$, $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ und $\tilde{X} = \{y \in C^0(I, \mathbb{R}^n) \mid \|y - x\|_C \leq \delta\}$. Dann gilt für $t \in I, y \in \tilde{X}$

$$|K(y)(t) - x| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y(s))| \, ds \leq |t - t_0| \max_{(t,y) \in V} |f(t, y)| \leq \varepsilon M \leq \delta.$$

Es folgt $K(\tilde{X}) \subset \tilde{X}$. Es bleibt zu zeigen, dass K auf \tilde{X} eine Kontraktion ist.

$$\begin{aligned} |K(y_1)(t) - K(y_2)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| \, ds \leq L(V) |t - t_0| |y_1 - y_2| \\ &\leq \varepsilon L(V) |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Daher ist K eine Kontraktion und hat einen eindeutigen Fixpunkt. \square

Für die konstante Funktion x konvergiert $K^n(x)$ gegen die Lösung der DGL.

Beispiel:

$$\dot{y}(t) = Ay(t), \quad y(0) = x.$$

A sei eine reelle $n \times n$ -Matrix. Es gilt für $|t| < \varepsilon(x)$

$$\begin{aligned} K(x)(t) &= x + \int_0^t Ax \, dt = (I + tA)x \\ K^m(x)(t) &= \sum_{i=0}^m \frac{(tA)^i}{i!} x \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tA)^i}{i!} x \end{aligned}$$

Tatsächlich konvergiert die Reihe für alle $t \in \mathbb{R}$, da die Exponentialreihe auf ganz \mathbb{R} konvergiert und $\|A\| < \infty$ gilt. Die Reihe kann gliedweise nach t differenziert werden, daher stellt sie die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}$ dar. *Bemerkungen:*

1. Falls f nur stetig ist, gibt es auch eine lokale Lösung, die aber im Allgemeinen nicht eindeutig sein muss. Hier sei als ein mögliches Beispiel

$$y'(t) = \sqrt{y(t)}, \quad y(0) = 0$$

genannt, welches als Lösung hat

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t^* \\ \frac{1}{4}(t - t^*)^2, & t > t^* \end{cases}$$

2. Betrachte

$$y'(t) = (y(t))^2, \quad y(0) = x.$$

Die Lösung

$$y(t) = \frac{x}{1 - tx}$$

existiert für $x > 0$ nur auf $(-\infty, \frac{1}{x})$ und für $x < 0$ nur auf $(\frac{1}{x}, \infty)$, d.h. die Lösung ist nicht global existent.

3. Ein nicht autonomes System

$$\dot{x} = f(t, x)$$

in \mathbb{R}^n kann immer zu einem autonomen System in \mathbb{R}^{n+1} durch hinzufügen von $x_{n+1}(t) := t$ bzw. $\dot{x}_{n+1} = 1$ gemacht werden.

4. Ein System m -ter Ordnung für $y(t) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} y^{(m)}(t) &= f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(m-1)}(t)) \\ y(t_0) &= x_0, \dot{y}(t_0) = x_1, \dots, y^{(m-1)}(t_0) = x_{m-1} \end{aligned}$$

lässt sich als System 1-ter Ordnung schreiben, indem man $z_i(t) = y^{(i)}, i = 0, \dots, m-1$ setzt und dann erhält

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= z_{i+1}(t), \quad i = 0, \dots, m-1 \\ \dot{z}_{m-1}(t) &= f(t, z_0(t), \dots, z_{m-1}(t)) \\ z_i(t_0) &= x_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

2.1 Konstruktion von Lösungen

Wir betrachten als erstes ein einfaches Beispiel, bei dem wir die Lösung direkt raten können

$$\dot{y}(t) = ry(t), \quad y(0) = x.$$

Der Ansatz ist $y(t) = ce^{rt}$. Dank des Startwerts $y(0) = x$ können wir die Konstante c bestimmen, da gelten muss $y(0) = ce^0 = c = x$. Also erhalten wir als Lösung $y(t) = xe^{rt}$.

Geometrische Interpretation:

Eine skalare Gleichung

$$\dot{y}(t) = f(t, y)$$

bestimmt ein Richtungsfeld, das heißt in jedem Punkt $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ wird durch $\dot{y} = f(t, y)$ eine Steigung gegeben. Gesucht sind differenzierbare Funktionen $y(t)$ deren Graph $G(y) = \{(t, y(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ in jedem Punkt die vorgegebene Steigung hat. In einfachen Fällen kann man aus ihrem Richtungsfeld die möglichen Lösungen ansehen.

2.1.1 Methode der Trennung der Variablen

Wir betrachten die separable DGL

$$y'(t) = a(t)g(y(t)).$$

Sei y eine Lösung dazu. Für den Fall $g \neq 0$ gilt dann

$$\int_{t_0}^t \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

Mithilfe der Substitution $z := y(s)$ ergibt sich aus dem Transformationssatz

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(z)} dz = \int_{t_0}^t a(s) ds.$$

Löst man diese Gleichung nun nach $y(t)$ auf, so erhält man eine explizite Darstellung der Lösung.

Beispiel: Wir wollen auf die DGL

$$y'(t) = y^2, \quad y(0) = y_0.$$

den oben beschriebenen Lösungsweg anwenden. Nachdem wir integriert und substituiert haben erhalten wir

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{z^2} dz = \int_{t_0}^t dt.$$

Löst man nun die Integrale, so erhalten wir

$$t - t_0 = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)}.$$

Auflösen nach $y(t)$ ergibt die Lösungsdarstellung

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0(t - t_0)}.$$

2.1.2 Methode der Variation der Konstanten

Wir betrachten die DGL

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad t \in I = [t_0, t_0 + \tau] \subset \mathbb{R},$$

mit $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die zugehörige *homogene* DGL hat eine Lösung der Form

$$y(t) = C \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Sei nun $x(t)$ eine Lösung mit $c = 1$. Zur Bestimmung einer Lösung der inhomogenen DGL wird c als Funktion von t angesetzt, also

$$y(t) := c(t)x(t).$$

Ableiten ergibt dann

$$\begin{aligned} y'(t) &= c'(t)x(t) + c(t)x'(t) = c'(t) \underbrace{\exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right)}_{=b(t)} + \underbrace{c(t)a(t)x(t)}_{=a(t)y(t)} \\ &= a(t)y(t) + b(t) \end{aligned}$$

Daher nennt man diese Methode die Variation der Konstanten. Wegen $c'(t)x(t) = b(t)$ bekommen wir

$$c(t) = \int_{t_0}^t \exp \left(- \int_{t_0}^{\tau} a(s) ds \right) b(\tau) d\tau + r$$

mit einer freien Konstante $r \in \mathbb{R}$. Somit ergibt sich für die Lösung

$$y(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right) \int_{t_0}^t \exp \left(- \int_{t_0}^{\tau} a(s) ds \right) b(\tau) d\tau + r \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

Nun muss die Konstante so gewählt werden, dass die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ erfüllt ist, was bedeutet, dass $r = y_0$ gewählt werden muss und man erhält als Lösung

$$y(t) = \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right) \left[y_0 + \int_{t_0}^t \exp \left(- \int_{t_0}^{\tau} a(s) ds \right) b(\tau) d\tau \right].$$

Beispiel:

$$y'(t) = ay(t) + b(t), \quad y(0) = y_0,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist dann gegeben durch

$$y(t) = y_0 e^{at} + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b(\tau) d\tau.$$

2.1.3 Fortsetzbarkeit von Lösungen

Lemma 2.2. Sei $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-stetig und seien y_1, y_2 Lösungen von der DGL

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (\text{DGL})$$

dann gilt

$$i) \quad y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \in I := I_1 \cap I_2$$

ii)

$$y(t) := \begin{cases} y_1(t), & t \in I_1 \\ y_2(t), & t \in I_2 \end{cases}$$

definiert die eindeutige Lösung auf $I_1 \cup I_2$.

Beweis. Sei $I = (T_-, T_+)$. y_1, y_2 stimmen auf einem Zeitintervall um die Startzeit herum überein, wegen der lokal eindeutigen Lösbarkeit. Sei (t_-, t_+) das maximale Intervall, auf dem y_1 und y_2 übereinstimmen. Angenommen es gälte $t_+ < T_+$. Wegen der Stetigkeit der Lösungen gilt dann auch $y_1(t_+) = y_2(t_+)$. Die DGL mit der Anfangsbedingung $\tilde{y}(t_0) = y_1(t_+)$ ist ebenfalls lokal eindeutig lösbar. Diese Lösung \tilde{y} muss mit y_1 und y_2 in einer Umgebung von t_+ übereinstimmen, d.h. t_+ war nicht maximal. Ein analoges Vorgehen funktioniert für T_- . \square

Korollar 2.3. Sei $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-stetig, dann existiert eine eindeutige Lösung auf einem maximalen Intervall $(T_-(t_0, x), T_+(t_0, x))$, die sogenannte maximale Lösung.

Beweis. Nach obigem Lemma ist die Vereinigung aller Intervalle auf denen eine Lösung existiert das maximale Existenzintervall einer eindeutigen Lösung. \square

Lemma 2.4. Sei $f \in C(U, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-stetig und sei $y(t)$ die Lösung von (DGL) auf (t_-, t_+) , dann existiert eine Fortsetzung auf ein Intervall $(t_-, t_+ + \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ genau dann, wenn es eine Folge $t_k \in (t_-, t_+)$ gibt, sodass

$$(t_k, y(t_k)) \rightarrow (t_+, y) \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Beweis. " \Leftarrow " Sei (2.1) erfüllt. Behauptung:

$$\lim_{t \rightarrow t_+} y(t) = y \quad (2.2)$$

Es existiert ein $\delta > 0$ sodass

$$V := [t_+ - \delta, t_+] \times \overline{B_\delta(y)} \subset U.$$

und $M := \sup_{(t,x) \in V} |f(t,x)| < \infty$. Wir können $t_{n+1} > t_n$ annehmen. Für $\tau_m \rightarrow t_+$ existiert $n(m) \rightarrow \infty$ sodass $\tau_m \in [t_{n(m)}, t_{n(m)+1})$ gilt. Außerdem ist

$$|y(\tau_m) - y(t_{n(m)})| \leq \int_{t_{n(m)}}^{\tau_m} |f(s, y(s))| \, ds \leq M |\tau_m - t_{n(m)}|$$

und somit

$$|y(\tau_m) - y| \leq M |\tau_m - t_{n(m)}| + |y(t_{n(m)}) - y| \rightarrow 0$$

für $m \rightarrow \infty$. Dies zeigt die Behauptung. Da $(t_+, y) \in U$ ist gibt es eine lokale Lösung $z(t)$ auf $(t_+ - \varepsilon, t_+ + \varepsilon)$ mit Anfangswert $(t_+) = y$. Definiere

$$w(t) = \begin{cases} y(t), & t \in (t_-, t_+) \\ z(t), & t \in [t_+, t_+ + \varepsilon) \end{cases}$$

Nach der Behauptung ist $w(t)$ stetig und die rechtsseitige und linksseitige Ableitung in $t = t_+$ stimmen wegen der (DGL) überein. Damit ist $w(t)$ die gesuchte Fortsetzung.

" \Rightarrow " Ist klar. □

Korollar 2.5. Sei $y(t)$ eine Lösung auf $[t_0, t_+)$ mit $t_+ < \infty$. Sei K ein Kompaktum derart, dass $[t_0, t_+] \times K \subset U$ mit $y(t) \in K \, \forall t \in [t_0, t_+)$, dann gibt es eine Fortsetzung auf $[t_0, t_+ + \varepsilon]$. Falls es für alle $t_+ > t_0$ ein solche kompakte Menge $K(t_0)$ gibt, dann existiert die Lösung auf $[t_0, \infty)$.

Beweis. Wähle $t_n \rightarrow t_+$ für $n \rightarrow \infty$. Betrachte die dazugehörige Bildfolge $y(t_n)$. Wegen der Kompaktheit von K gibt es eine Teilfolge sodass $y(t_{n_i})$ gegen ein $y \in K$ konvergiert. Nach vorigem Lemma folgt die Aussage. □

Bemerkung: In Anwendungen muss man also sogenannte *a priori Abschätzungen* für eine Lösung zeigen um globale Existenz zu erhalten.

Dazu ist das folgende Lemma oft sehr nützlich

Lemma 2.6 (Gronwall). Seien $\psi, a, b \in C([t_1, t_2], \mathbb{R})$ mit $b(t) \geq 0$. Es gelte

$$\psi(t) \leq a(t) + \int_{t_1}^t b(s)\psi(s) \, ds, \quad t \in [t_1, t_2],$$

dann folgt

$$\psi(t) \leq a(t) + \int_{t_1}^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(\tau) \, d\tau} \, ds, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Falls zusätzlich $a(t)$ nicht fallend ist, dann gilt

$$\psi(t) \leq a(t)e^{\int_{t_1}^t b(s) \, ds}, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Beweis. Definiere

$$\phi(t) := \int_{t_1}^t b(s)\psi(s) \, ds,$$

dann gilt

$$\psi'(t) = b(t)\psi(t) \leq a(t)b(t) + b(t)\phi(t).$$

Also können wir

$$\frac{d}{dt} \left(\phi(t) e^{-\int_{t_1}^t b(s) \, ds} \right) = (\phi'(t) - b(t)\phi(t)) e^{-\int_{t_1}^t b(s) \, ds} \leq a(t)b(t) e^{-\int_{t_1}^t b(s) \, ds}$$

erhalten. Integration beider Seiten über (t_1, t) liefert

$$\phi(t) e^{-\int_{t_1}^t b(s) \, ds} \leq \int_{t_1}^t a(s)b(s) e^{-\int_{t_1}^s b(\tau) \, d\tau} \, ds$$

und damit nach Multiplikation mit dem Exponentialausdruck

$$\psi(t) \leq a(t) + \phi(t) \leq a(t) + \int_{t_1}^t a(s)b(s) e^{\int_s^t b(\tau) \, d\tau} \, ds.$$

Fordert man zusätzlich noch, dass $a(t)$ nicht fallend ist, dann folgt

$$\psi(t) \leq a(t) + a(t) \int_{t_1}^t b(s) e^{\int_s^t b(\tau) \, d\tau} \, ds = a(t) \left(1 - \int_{t_1}^t \frac{d}{ds} e^{\int_s^t b(\tau) \, d\tau} \, ds \right) = a(t) e^{\int_{t_1}^t b(s) \, ds}.$$

□

Eine wichtige Anwendung des Lemmas von Gronwall ist

Satz 2.7 (Globale Existenz bei linearem Wachstum). *Für $-\infty \leq T_1 < t_0 < T_2 \leq \infty$ sei $f \in C((T_1, T_2), \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-stetig. Es gebe nicht negative Funktionen $\alpha, \beta \in C((T_1, T_2), \mathbb{R}^n)$ sodass*

$$|f(t, y)| \leq \alpha(t) + \beta(t) |y|, \quad T_1 < t < T_2, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

dann existiert für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Lösung von

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = x$$

auf (T_1, T_2) . Insbesondere existiert die Lösung des linearen Systems

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t)$$

global, falls $A(t) \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ und $b \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ gilt.

Beweis. Nehme an für ein $x \in \mathbb{R}^n$ wäre $T_+(x) < T_2$, dann gibt es eine Konstante $C = C(T_+(x))$ sodass für $t_0 \leq t \leq T_+(x)$ $|\alpha(t)| \leq C$ und $|\beta(t)| \leq C$ gilt. Mithilfe von Integration folgt

$$|y(t)| \leq |x| + C \int_{t_0}^t 1 + |y(s)| \, ds, \quad t_0 \leq t < T_+(x).$$

Setze im Lemma von Gronwall $y(t) = 1 + |y(t)|$, $a(t) = 1 + |x|$, $b(t) = C$ und erhalte

$$\psi(t) \leq e^{C(t-t_0)}(1 + |x|).$$

bzw.

$$|y(t)| \leq e^{C(t-t_0)}(1 + |x|) - 1.$$

Das bedeutet $y(t)$ bleibt für $t \in (0, T_+(x))$ beschränkt und kann daher fortgesetzt werden. Damit folgt $T_+(x) = T_2$.

Analog erhält man $T_-(x) = T_1$. □

2.1.4 Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern

Ein Anfangswertproblem ist *wohl gestellt*, falls die Lösung auf jedem kompakten Zeitintervall stetig von den Anfangswerten abhängt.

Satz 2.8. Seien $f_1, f_2 \in C(U, \mathbb{R})$ lokal Lipschitz-stetig, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen mit $(t_0, x_1), (t_0, x_2) \in U$. Seien $y_i(t)$ Lösungen von

$$\dot{y}_i(t) = f_i(t, y_i), \quad y_i(t_0) = x_i$$

auf dem maximalen Zeitintervall I_i . Sei $t \in [t_1, t_2] = \bar{I} \subset I_1 \cap I_2$ und $(t, y_i(t)) \in V$ mit kompaktem V und $\bar{V} \subset U$, dann gilt

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |x_1 - x_2| e^{L|t-t_0|} + \frac{M}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1),$$

wobei $L(U)$ die Lipschitzkonstante von f_1 auf \bar{V} ist und $M := \sup_{(t,y) \in \bar{V}} |f_1(t, y) - f_2(t, y)|$. Damit hängt die Lösung lokal Lipschitz-stetig von den Anfangswerten und der rechten Seite ab.

Beweis. Benutze die Integraldarstellung für $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_2(t)| &\leq |x_1 - x_2| + \int_{t_0}^t |f_1(s, y_1(s)) - f_2(s, y_2(s))| \, ds \\ &\leq |x_1 - x_2| + \int_{t_0}^t |f_1(s, y_1(s)) - f_1(s, y_2(s))| \, ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t |f_1(s, y_2(s)) - f_2(s, y_2(s))| \, ds \\ &\leq |x_1 - x_2| + \int_{t_0}^t L |y_1(s) - y_2(s)| + M \, ds \end{aligned}$$

Setze in Gronwalls Lemma $\psi(t) = L |y_1(t) - y_2(t)| + M$, so gilt

$$\psi(t) \leq |x_1 - x_2| + M + L \int_{t_0}^t \psi(s) \, ds$$

und somit ergibt sich

$$\psi(t) \leq (L |x_1 - x_2| + M) e^{L|t-t_0|}.$$

Durch Äquivalenzumformung erhält man

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \frac{\psi(t)}{L} - \frac{M}{L} = \left(|x_1 - x_2| + \frac{M}{L} \right) e^{L|t-t_0|} - \frac{M}{L}.$$

Somit gilt die Aussage für $t \geq t_0$. Der Fall $t < t_0$ folgt analog. \square

Später benötigen wir auch die differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten. Sei also $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Sei $\phi(t, x)$ die lokale Lösung zum Anfangswert x , d.h.

$$\partial_t \phi(t, x) = f(t, \phi(t, x)).$$

Wir nehmen zunächst an, dass $\phi(t, x)$ auch bzgl. x differenzierbar sei. Dann ist sowohl $f(t, \phi(t, x))$ als auch $\partial_t \phi(t, x)$ nach x differenzierbar. Daher kann man die Differentialgleichung nach x differenzieren. Die Ableitung $A(t, x) := D_x \phi(t, x)$ erfüllt

$$\partial_t A(t, x) = D_y f(t, \phi(t, x)) A(t, x).$$

Wegen $\phi(t_0, x) = x$ gilt $A(t_0, x) = I$. Dieses System von $n \times n$ Gleichungen heißt *erste Variation* der (DGL). Beachte, dass die rechte Seite linear ist, also insbesondere Lipschitz-stetig ist. Damit hat das System der ersten Variation eine eindeutige lokale Lösung $A(t, x)$ die nach Satz 2.7 so lange existiert wie $\phi(t, x)$. $A(t, x)$ erfüllt die zugehörige Integralgleichung

$$A(t, x) = I + \int_{t_0}^t D_y f(s, \phi(s, x)) A(s, x) \, ds.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $A(t, x)$ tatsächlich die Ableitung von $\phi(t, x)$ nach x ist.

Satz 2.9. Sei $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, dann existiert für alle $(t_0, x) \in U$ eine offene Menge $I \times B \subset U$ mit $(t_0, x) \in I \times B$ sodass $\phi \in C^1(I \times B)$.

Beweis. Sei $t \geq t_0$ und sei $(t, x_0) \in U$ im Definitionsbereich von ϕ . Es gibt $\delta > 0$ sodass für $I := [t_0, t + \delta]$, $B := \overline{B_\delta(x_0)}$, $\phi \in C(I \times B, \mathbb{R}^n)$. Nach Satz 2.8 ist $\phi(t, x)$ Lipschitz-stetig bzgl. x . Aus (DGL) folgt dann $\partial_t \phi(t, x) \in C(I \times B, \mathbb{R}^n)$. Es bleibt zu zeigen, dass $A(t, x) = D_x \phi(t, x_0)$ gilt. Definiere dazu für $x \in B$

$$\psi(t, x) = \phi(t, x) - \phi(t, x_0) - A(t, x_0)(x - x_0).$$

Zu zeigen ist also

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\psi(t, x)}{|x - x_0|}.$$

Die Integraldarstellung für ϕ bzw. A liefert

$$\begin{aligned}\psi(t, x) &= \int_{t_0}^t f(s, \phi(s, x)) - f(s, \phi(s, x_0)) - D_y f(s, \phi(s, x_0)) A(s, x_0)(x - x_0) \, ds \\ &= \int_{t_0}^t D_y f(s, \phi(s, x_0)) (\phi(s, x) - \phi(s, x_0) - A(s, x_0)(x - x_0)) \\ &\quad + R(s, x, x_0) \, ds\end{aligned}$$

mit $R(s, x, x_0) = o(|\phi(s, x) - \phi(s, x_0)|) = o(|x - x_0|)$, da ϕ Lipschitz-stetig ist. Wir erhalten

$$|\psi(t, x)| \leq \bar{R}(x, x_0) + M \int_{t_0}^t |\psi(s, x)| \, ds,$$

mit $\bar{R}(x, x_0) := \max_{s \in I} |R(s, x, x_0)|$ und $M := \max_{(s, x) \in I \times \bar{B}} \|Df(s, x)\|$. Gronwalls Lemma ergibt dann

$$|\psi(t, x)| \leq \bar{R}(x, x_0) e^{M(t-t_0)} = o(|x - x_0|).$$

Damit gilt $D_x \phi(t, x) = A(t, x)$. Die (DGL) für $A(t, x)$ zeigt, dass $A(t, x)$ stetig ist. Insgesamt folgt $\phi \in C^1(I \times B, \mathbb{R}^n)$. \square

Ein analoger Satz gilt, falls $f(t, x, \lambda)$ von einem Parameter λ abhängt.

Satz 2.10. *Seien $U \subset \mathbb{R}^{n+1}, \Lambda \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C^1(U \times \Lambda)$. Für alle $(t_0, x, \lambda) \in U \times \Lambda$ gibt es eine offene Menge $I \times B \times \Lambda_0 \subset U \times \Lambda$ die (t_0, x_0, λ_0) enthält sodass $\phi \in C^1(I \times B \times \Lambda_0)$.*

Beweis. Betrachte das System

$$y'(t) = f(t, y, \lambda), \quad \lambda'(t) = 0$$

und wende darauf den Satz 2.9 an. \square

Bemerkung: $A(t, x, \lambda) = D_\lambda \phi(t, x, \lambda)$ erfüllt

$$\partial_t A(t, x, \lambda) = d_\lambda f(t, \phi(t, x, \lambda), \lambda) A(t, x, \lambda) + D_\lambda f(t, \phi(t, x, \lambda), \lambda).$$

Durch Induktion gelten die beiden Sätze für $f \in C^k$ und $\phi \in C^k, k \geq 1$ anstatt C^1 .

Zusammengefasst haben wir für autonome Differentialgleichungen gezeigt

Satz 2.11. *Sei $\in C(U, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-stetig, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\phi(t, x)$ die Lösung des autonomen Systems*

$$y'(t) = f(y(t)), \quad y(0) = x$$

auf dem maximalen Existenzintervall $I_x = (T_-(x), T_+(x))$. Dann definiert $\phi(t, x)$ das zu der (DGL) gehörende (stetig) lokale dynamische System auf $W = \bigcup_{x \in U} I_x \times \{x\}$. Falls $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ mit $k \geq 1$ gilt, dann folgt $\phi \in C^k(W, \mathbb{R}^n)$.

2.1.5 Der Existenzsatz von Peano

Wir wollen zeigen, dass wenn $f(x, y)$ in einem Gebiet U stetig ist, so geht durch jeden Punkt $(\xi, \eta) \in U$ mindestens eine Lösung der (DGL). Jede Lösung lässt sich nach rechts und links bis zum Rande von D fortsetzen.

Definition 2.12 (Gleichgradig Stetigkeit). *Eine Menge $M = \{f, g, \dots\}$ von Funktionen, welche alle im Intervall $a \leq x \leq b$ stetig sind heißt gleichgradig stetig in einem Punkt x , wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in M \forall x' \in [a, b] : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Das Wesentliche an dieser Definition ist also, dass man für alle Funktionen aus M mit ein und demselben δ auskommt.

Beispiel: M sei die Menge aller Funktionen, welche in U einer Lipschitz-Bedingung mit einheitlicher Lipschitzkonstante genügen, d.h.

$$\exists L > 0 \forall f \in M \forall x, y \in U : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Die Menge ist gleichgradig stetig, denn hier kann man offenbar $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$ wählen. Ein weiteres Beispiel ist die folgende Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, & x \in (\frac{1}{n}, \infty) \end{cases}$$

Lemma 2.13. *Ist die Folge $f_n(x)$ in einem Punkt $U \subset [a, b]$ gleichgradig stetig und konvergiert sie für alle $x \in A$, wobei $A \subset U$ eine in U dichte Punktmenge ist, so konvergiert sie für alle $x \in U$ gleichmäßig. Ihr Limes $f(x)$ ist also wieder eine stetige Funktion in U .*

Bemerkung: Dabei nennt man die Punktmenge A dicht in U , wenn jedes Teilintervall von U mindestens einen Punkt von A enthält.

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so bestimmt, dass (2.3) für alle Funktionen f_n , $n \geq 1$ gilt. Nun wird das Intervall U in p abgeschlossene Intervalle U_1, \dots, U_p zerlegt, wobei die Länge jedes U_i kleiner als δ sein soll. Zu jedem U_i existiert ein $x_i \in U_i \cap A$. Ferner gibt es nach Voraussetzung ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sodass

$$|f_m(x_i) - f_n(x_i)| < \varepsilon \text{ für } m, n \geq 0 \text{ und } i = 1, \dots, p.$$

Nun sei x ein beliebiger Punkt aus U , es sei etwa $x \in U_q$, $q \in 1, \dots, p$. Wegen $|x - x_q| < \delta$ und (2.3) folgt

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_m(x_q)| + |f_m(x_q) - f_n(x_q)| + |f_n(x_q) - f_n(x)| < 3\varepsilon.$$

für $m, n \geq 0$. Also konvergiert f_n gleichmäßig in U . \square

Satz 2.14 (Arzela-Ascoli). *Jede in $U = [a, b]$ gleichgradig stetige Folge von Funktionen $f_n(x)$ mit $|f_n(x)| \leq C$ für $x \in U$, $n \geq 1$ enthält eine in U gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

Beweis. Es Sei $A = x_1, x_2, \dots$ eine abzählbare, in U dichte Punktmenge. Die Zahlenfolge $a_n = f_n(x_1)$ ist beschränkt, sie besitzt also eine konvergente Teilfolge f_{1n} , welche für $x = x_1$ konvergiert. Während die Zahlenfolge $(f_n(x_1))$ also konvergent ist, wird die Folge $(f_{1n}(x_2))$ im Allgemeinen nicht konvergent sein. Jedoch ist sie beschränkt und besitzt damit eine konvergente Teilfolge. Das heißt die Funktionenfolge (f_{1n}) hat eine Teilfolge, wir benennen sie (f_{2n}) , die an der Stelle $x = x_2$ konvergiert. In dieser Weise fahren wir fort. Die Folge (f_{2n}) ist beschränkt und eine passend gewählte Teilfolge wird an der Stelle $x = x_3$ konvergieren. Diese Teilfolge benennen wir mit (f_{3n}) . Durch Wiederholung dieses Prozesses erhält man eine Reihe von Folgen

$$\begin{aligned} f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, \dots & \text{ konvergiert für } x = x_1 \\ f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, \dots & \text{ konvergiert für } x = x_2 \\ f_{31}, f_{32}, f_{33}, f_{34}, \dots & \text{ konvergiert für } x = x_3 \\ & \vdots \end{aligned}$$

Die k -te Zeile stellt die Teilfolge der $(k-1)$ ten Zeile dar. Sie konvergiert für $x = x_1, \dots, x_k$. Daraus ergibt sich, dass die Teilfolge

$$f_{11}, f_{22}, f_{33}, f_{44}, \dots$$

für alle $x = x_k$, d.h. $x \in A$ konvergent ist. Dies ist der zentrale Gedanke des Beweises! Sie ist nämlich, jedenfalls von ihrem k ten Glied an, eine Teilfolge der k -ten Zeile. Die gleichmäßige Konvergenz dieser Diagonalfolge ergibt sich nun aus dem Lemma. \square

Satz 2.15 (Peano). *Die Funktion $f(t, y)$ sei stetig auf dem $(n+1)$ -dimensionalen Zylinder*

$$D := \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq \alpha, \|y - x\| \leq \beta\}.$$

Dann existiert eine Lösung $u(t)$ des Anfangswertproblems (AWP)

$$y'(t) = f(t, y), \quad y(0) = x$$

auf dem Intervall $I := [t_0 - T, t_0 + T]$, wobei $T = \min \alpha, \frac{\beta}{M}$ und $M := \max_{(t,x) \in D} \|f(t, x)\|$.

Beweis. Zum Beweis konstruieren wir mit Hilfe einer Differenzenmethode eine Folge von stückweise linearen Funktionen, welche eine Teilfolge besitzt, die (gleichmäßig) gegen eine Lösung des AWP konvergiert. OBdA genügt es Halbintervall $I = [t_0, t_0 + T]$ zu betrachten. Zu einem Schrittweitenparameter $h > 0$ wird eine äquidistante Unterteilung des Intervalls I gewählt

$$t_0 < \dots < t_n < \dots < t_N = t_0 + T, \quad h = t_n - t_{n-1}.$$

Ausgehend von $u_0^h := u_0$ erzeugt dann das sogenannte *Euler'sche Polygonzugverfahren* Werte für u_n^h durch die sukzessive Vorschrift

$$u_n^h = u_{n-1}^h + hf(t_{n-1}, u_{n-1}^h), \quad n \geq 1.$$

Diese diskreten Funktionswerte werden linear interpoliert zu einer stetigen Funktion

$$u_n^h(t) := u_{n-1}^h + (t - t_{n-1})f(t_{n-1}, u_{n-1}^h).$$

Schritt 1 Wir zeigen zunächst, dass diese Konstruktion durchführbar ist, d.h. $\text{Graph}(u^h) \subset D$. Sei $(t, u^h(t)) \in D$ für $t_0 \leq t \leq t_{k-1}$. Offenbar ist

$$(u^h(t))' = f(t_{k-1}, u_{k-1}^h), \quad t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Nach Konstruktion gilt dann für $t \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\begin{aligned} u^h(t) - u_0 &= u^h(t) - u_{k-1}^h + \sum_{i=1}^{k-1} u_i^h - u_{i-1}^h \\ &= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^h) + h \sum_{i=1}^{k-1} f(t_{i-1}, u_{i-1}^h) \end{aligned}$$

Und folglich

$$\|u^h(t) - u_0\| \leq (t - t_{k-1})M + (t_{k-1} - t_0)M = (t - t_0)M.$$

Also ist $(t, u^h(t)) \in D$ für $0 \leq t \leq t_k$. Durch Induktion folgt $\text{Graph}(u^h) \subset D$.

Schritt 2 Wir zeigen als nächstes, dass die Funktionenfamilie $u^h_{h>0}$ gleichgradig stetig ist. Seien dazu $t, t' \in I, t' \leq t$ beliebig mit $t \in [t_{k-1}, t_k], t' \in [t_{j-1}, t_j]$ für gewisse $t_j \leq t_k$. Im Fall $t, t' \in [t_{k-1}, t_k]$ ist

$$\begin{aligned} u^h(t) - u^h(t') &= u_{k-1}^h + (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^h) \\ &\quad - u_{k-1}^h - (t' - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^h) \\ &= (t - t')f(t_{k-1}, u_{k-1}^h) \end{aligned}$$

und somit

$$\|u^h(t) - u^h(t')\| \leq M |t - t'|.$$

Im Fall $t_j < t_k$ ist

$$\begin{aligned} u^h(t) - u^h(t') &= u^h(t) - u_{k-1}^h + \sum_{i=j}^{k-1} (u_i^h - u_{i-1}^h) + u_{j-1}^h - u^h(t') \\ &= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^h) + h \sum_{i=j}^{k-1} f(t_{i-1}, u_{i-1}^h) \\ &\quad + (t_{j-1} - t')f(t_{j-1}, u_{j-1}^h) \\ &= (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^h) + h \sum_{i=j+1}^{k-1} f(t_{i-1}, u_{i-1}^h) \\ &\quad + (h + t_{j-1} - t')f(t_{j-1}, u_{j-1}^h) \end{aligned}$$

und folglich

$$\|u^h(t) - u^h(t')\| \leq M((t - t_{k-1}) + (t_{k-1} - t_j) + (t_j - t')) \leq M |t - t'|.$$

Also ist $u^h_{h>0}$ gleichgradig stetig. Ferner sind die Funktionen u^h wegen der gemeinsamen Anfangsstelle $u^h(t_0) = u_0$ auch gleichmäßig beschränkt

$$\|u^h(t)\| \leq \|u^h(t) - u_0\| + \|u_0\| \leq MT + \|u_0\|, \quad t \in (t_0, t_0 + T].$$

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert dann eine Nullfolge $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und eine stetige Funktion u auf I sodass

$$\max_{t \in I} \|u^{h_i}(t) - u(t)\| \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Offenbar ist damit auch $\text{Graph}(u) \subset D$.

Schritt 3 Es bleibt zu zeigen, dass die Limesfunktion u der Integralgleichung genügt. Für $t \in [t_{k-1}, t_k] \subset I$ setzen wir $u^i(t) := u^{h_i}(t)$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} u^i(t) &= u_{k-1}^i + (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^i) \\ &= u_{k-2}^i + (t_{k-1} - t_{k-2})f(t_{k-2}, u_{k-2}^i) + (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^i) \\ &\vdots \\ &= u_0 + \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1})f(t_{j-1}, u_{j-1}^i) + (t - t_{k-1})f(t_{k-1}, u_{k-1}^i) \\ &= u_0 + \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t_{j-1}, u_{j-1}^i) \, ds + \int_{t_{k-1}}^t f(t_{k-1}, u_{k-1}^i) \, ds \\ &= u_0 + \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t_{j-1}, u_{j-1}^i) - f(s, u^i(s)) \, ds \\ &\quad + \int_{t_k}^t f(t_{k-1}, u_{k-1}^i) - f(s, u^i(s)) \, ds + \int_{t_0}^t f(s, u^i(s)) \, ds \end{aligned}$$

Auf der kompakten Menge D ist die Menge der Funktionen $f(t, x)$ auch gleichmäßig stetig. Ferner sind die Funktionen der Folge $(u^i)_{i \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig. Zu beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein δ_ε , sodass für $|t - t'| < \delta_\varepsilon$ gilt

$$\|u^i(t) - u^i(t')\| \leq \varepsilon' \leq \varepsilon$$

und weiter für $|t - t'| < \delta_\varepsilon, \|x - x'\| < \varepsilon'$

$$\|f(t, x) - f(t', x')\| < \varepsilon,$$

für hinreichend großes $i \geq i_\varepsilon$, d.h. hinreichend kleines h_i folgt damit

$$\max_{s \in [t_{k-1}, t_k]} \|f(t_{k-1}, u^i(t_{k-1})) - f(s, u^i(s))\| \leq \varepsilon.$$

Dies ergibt

$$\left| u^i(t) - u_0 - \int_{t_0}^t f(s, u^i(s)) \, ds \right| \leq \varepsilon |t - t_0|.$$

Die gleichmäßige Konvergenz $u^i \rightarrow u$ auf I impliziert auch die gleichmäßige Konvergenz

$$f(\cdot, u^i(\cdot)) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} f(\cdot, u(\cdot)).$$

Für hinreichend großes $i \geq i_\varepsilon$ erhält man nun

$$\left| u(t) - u_0 - \int_{t_0}^t f(s, u(s)) \, ds \right| \leq \varepsilon |t - t_0|.$$

Wegen der beliebigen Wahl von ε folgt, dass die Limesfunktion u die Integralgleichung löst.

□

2.1.6 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten das lineare System

$$y(t) = Ay(t), \quad y(0) = x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{lin. DGL})$$

wobei a eine reelle $(n \times n)$ -Matrix ist. Wir wissen, dass eine eindeutige, globale Lösung existiert durch

$$y(t) = e^{tA}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k x.$$

Bemerkung: Wenn y eine Lösung dann ist die lineare Transformation Uy ebenfalls eine von dem transformierten Problem.

Lemma 2.16. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, U invertierbar. Eine Kurve $y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist genau dann eine Lösung von $y' = Ay$, wenn $\tilde{y} = U^{-1}y : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine Lösung von $\tilde{y}' = U^{-1}AU\tilde{y}$.*

Zunächst zeigen wir einige Eigenschaften der Exponentialfunktion für Matrizen.

Satz 2.17. *Es gelten folgende Eigenschaften*

- i) $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$
- ii) Falls U eine invertierbare $(n \times n)$ -Matrix ist, dann gilt $U^{-1}e^AU = e^{U^{-1}AU}$
- iii) Falls $AB = BA$ gilt, so folgt $e^{A+B} = e^Ae^B$. Im Allgemeinen jedoch gilt $e^{A+B} \neq e^Ae^B$

Beweis. Zu i) Folgt aus der Halbgruppeneigenschaft des Flusses

Zu ii) Folgt direkt aus der Reihendarstellung

Zu iii) Sei $c(t) := e^{tA+B} - e^{tA}e^{tB}$ dann gilt

$$\frac{d}{dt}c(t) = e^{tA+B}A - e^{tA}Ae^{tB} = e^{tA+B}A - e^{tA}e^{tB}A.$$

Aus der Eindeutigkeit und $c(0) = 0$ folgt $c(1) = 0$.

□

Zur expliziten Berechnung von e^{tA} benötigen wir noch ein paar Begriffe aus der linearen Algebra.

Definition 2.18. Für eine komplexe Matrix A sei

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda I) \text{ ist nicht invertierbar}\}$$

das Spektrum und

$$r(A) = \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Für $\lambda \in \sigma(A)$ ist die algebraische Vielfachheit $a(\lambda)$ die Ordnung der Nullstellen λ des charakteristischen Polynoms. Die geometrische Vielfachheit $g(\lambda) = \dim(\text{Kern}(A - \lambda))$.

$$\tilde{E}(\lambda) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda)^{a(\lambda)} z = 0 \right\}$$

heißt verallgemeinerter Eigenraum von $\lambda \in \sigma(A)$. Für eine reelle Matrix ist

$$E(\lambda) = \Re(\tilde{E}(\lambda)) \oplus \Im(\tilde{E}(\lambda))$$

der verallgemeinerte Eigenraum.

Sei A eine komplexe Matrix, dann gibt es eine invertierbare Matrix U , sodass $U^{-1}AU$ eine Jordan'sche Normalform besitzt:

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_l \end{pmatrix}.$$

Jeder Jordanblock J_j ist eine $(k_j \times k_j)$ -Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda \in \sigma(A)$ und es gilt

$$e^{tA} = U \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_l} \end{pmatrix} U^{-1}.$$

Damit genügt es einen Jordanblock $J = \lambda I + N \in \mathbb{C}^{k \times k}$ zu betrachten. Es folgt mit $N^k = 0$

$$e^{tJ} = e^{t\lambda I} e^{tN} = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} (tN)^j = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Sei nun A reell. Betrachte die komplexe Normalform und sei $\lambda \in \sigma(A)$. Falls $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, dann sind auch die zugehörigen Jordanblöcke reell. Für $\lambda \notin \mathbb{R}$ betrachte einen Jordanblock $J = \lambda I + N$ der komplexen Dimension k . Es gibt also linear unabhängige Vektoren $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}^n$ mit $(A - \lambda)z_{j+1} = z_j, j = 1, \dots, k-1$ und

$(A - \lambda)z_1 = 0$. Für $\lambda = \mu + i\nu, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und $z_j = x_j + iy_j, x_j, y_j \in \mathbb{R}$ gilt dann für $j = 1, \dots, k-1$

$$\begin{aligned} Ax_{j+1} &= \mu x_{j+1} - \nu y_{j+1} + x_j, \\ Ay_{j+1} &= \nu x_{j+1} - \mu y_{j+1} + y_j, \\ Ax_1 &= \mu x_1 - \nu y_1, \\ Ay_1 &= \nu x_1 - \mu y_1. \end{aligned}$$

Das heißt, dass der zugehörige Jordanblock die Form

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} R & I_2 & & \\ & \ddots & & \\ & & I_2 & \\ & & & R \end{pmatrix}$$

mit

$$R = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir

$$e^{t\tilde{J}} = e^{t\mu} \begin{pmatrix} R_{t\nu} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{t\nu} & \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & tI_2 & \frac{t^2}{2}I_2 & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}I_2 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & & I_2 & tI_2 \\ & & & & I_2 \end{pmatrix},$$

mit

$$R_{t\nu} = \begin{pmatrix} \cos(t\nu) & -\sin(t\nu) \\ \sin(t\nu) & \cos(t\nu) \end{pmatrix}.$$

Satz 2.19. Für eine komplexe Matrix A gilt

- i) $r(A) \leq \|A\|$ für jede Matrixnorm
- ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Matrixnorm $\|\cdot\|_\varepsilon$, sodass $\|A\|_\varepsilon \leq r(A) + \varepsilon$
- iii) $\det(e^A) = e^{\text{Spur}(A)}$. Insbesondere ist $\det(e^A) \neq 0$.

Beweis. Zu i) ist trivial

Zu ii) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{C}^n und sei $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_l)$ die Jordanform von $A = U^{-1}JU$. Der Jordanblock $J_k = \lambda I + N$ habe die Dimension d_k . Definiere $Q_\delta = \text{diag}(Q_{\delta_1}, \dots, Q_{\delta_l})$ mit $Q_{\delta_k} = \text{diag}(1, \delta_k, \dots, \delta_k^{d_k})$ und sei $J_\delta = Q_\delta^{-1}JQ_\delta = \text{diag}(J_{\delta_1}, \dots, J_{\delta_l})$, wobei $J_{\delta_k} = \lambda I + \delta N$ ist. Definiere $|z|_\delta = \|(UQ_\delta)^{-1}z\|$ und erhalte

$$\|A\|_\delta = \sup_{z \neq 0} \frac{\|(UQ_\delta)^{-1}Az\|}{\|(UQ_\delta)^{-1}z\|} = \sup_{z \neq 0} \frac{\|(UQ_\delta)^{-1}AUQ_\delta z\|}{\|z\|} = \sup_{z \neq 0} \frac{\|J_\delta z\|}{\|z\|} \leq r(A) + k\delta$$

k hängt nur von der Dimension n ab. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$

Zu iii) folgt aus der Jordan'schen Normalform.

□

Definition 2.20. Die invarianten Teilräume

$$E^+(A) = \bigoplus_{\Re(\lambda) < 0} E(\lambda), E^-(A) = \bigoplus_{\Re(\lambda) > 0} E(\lambda), E^0(A) = \bigoplus_{\Re(\lambda) = 0} E(\lambda)$$

heißten stabiler, instabiler bzw. Zentrums-Eigenraum von A . Falls $E^0 = 0$ gilt, heißt A eine hyperbolische Matrix.

Satz 2.21. Sei A eine reelle $(n \times n)$ -Matrix.

i) Falls $0 > \gamma > \max \{ \Re(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A), \Re(\lambda) < 0 \}$ gilt, dann existiert C_γ so dass

$$|e^{tA}x| \leq C_\gamma e^{t\gamma} |x|, \quad t \geq 0, x \in E^+(A).$$

ii) Falls $0 \leq \gamma < \min \{ \Re(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A), \Re(\lambda) > 0 \}$ gilt, dann existiert $C_\gamma > 0$ sodass

$$|e^{tA}x| \leq C_\gamma e^{t\gamma} |x|, \quad t \leq 0, x \in E^-(A).$$

iii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $C_\varepsilon > 0$, sodass

$$|e^{tA}| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|t|} |x|, \quad t \in \mathbb{R}, x \in E^0(A).$$

Beweis. Zu i): Es genügt dies für jeden Jordanblock $J = \lambda I + N$ mit $\Re(\lambda) < 0$ zu zeigen. Aus der Darstellung von e^{tJ} folgt

$$|e^{tJ}x| \leq e^{t\Re(\lambda)} |x| |p(t)|.$$

für ein Polynom $p(t)$. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $K_\varepsilon > 0$, sodass $|p(t)| \leq K_\varepsilon e^{\varepsilon t}$ für alle $t \geq 0$. Zusammengenommen bedeutet das, dass

$$|e^{t\gamma}x| \leq K_\varepsilon e^{(\Re(\lambda) + \varepsilon)t} |x|.$$

Dies zeigt i). ii) und iii) folgen analog. □

Satz 2.22. Die Menge der hyperbolischen Matrizen ist

i) offen

ii) dicht in $\mathbb{R}^{n \times n}$

Man sagt, dass Hyperbolizität einer Matrix eine generische Eigenschaft ist.

Beweis. Zu i) Sei A eine hyperbolische Matrix, d.h. $(A - i\lambda I)$ ist invertierbar für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Also gilt

$$A + B - i\lambda = (A - i\lambda I)(I - (A - i\lambda I)^{-1}B)$$

ist invertierbar falls $\|(A - i\lambda I)^{-1}B\| < 1$. Dies gilt falls

$$\|B\| < \|(A - i\lambda I)^{-1}\|^{-1} \quad (*)$$

Sei $\|B\| < \|A\|$. Falls $|\lambda| \geq 2\|A\|$ gilt, folgt $\|\frac{A}{i\lambda}\| < \frac{1}{2}$ und

$$i\lambda(A - i\lambda I)^{-1} = \left(\frac{A}{i\lambda} - I \right)^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{i\lambda} \right)^k.$$

Diese Reihe konvergiert.

$$|\lambda| \|(A - i\lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}}$$

womit

$$\|(A - i\lambda I)^{-1}\|^{-1} \geq |\lambda| - \|A\| \geq \|A\| > \|B\|.$$

Das heißt, (*) gilt für $|\lambda| \geq 2\|A\|$

Für $\|B\| < \|A\|$ und $\|B\| < \min_{|\lambda| \leq 2\|A\|} \|(A - i\lambda I)^{-1}\|^{-1}$ ist also $A + B$ hyperbolisch.

Zu ii) Sei A nicht hyperbolisch, dann gilt $\sigma(A + \varepsilon I) = \{\varepsilon\} + \sigma(A)$, d.h. $A + \varepsilon I$ ist hyperbolisch für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Dies zeigt die Dichtheit. \square

Beispiele: Falls $n = 1$ ist, dann gilt $y(t) = e^{tA}x$. Für $A < 0$ ist $\omega(x) = 0, \alpha(x) = \emptyset$. Für $A > 0$ ist $\omega(x) = \emptyset, \alpha(x) = 0$.

Sei $n = 2$ und sei A in Jordanform.

1. $\sigma(A) = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_i \in \mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

- (a) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ergibt dann für $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0)$ und $y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0)$ eine Senke. Sei $y_1(0) \neq 1$ und eliminiere t

$$y_2(t) = \left(\frac{y_1(t)}{y_1(0)} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} y_2(0)$$

sind Potenzfunktionen.

- (b) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ (Sattel, instabil).

$$y_2(t) = \left(\frac{y_1(t)}{y_1(0)} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

sind Hyperbeln.

- (c) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (Quelle), instabil)

2. $\sigma(A) = \{\mu \pm i\nu\}, \nu \neq 0$,

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}, e^{tA} = e^{t\mu} \begin{pmatrix} \cos(t\nu) & -\sin(t\nu) \\ \sin(t\nu) & \cos(t\nu) \end{pmatrix}$$

- (a) $\mu < 0$: stabiler Sattelpunkt

- (b) $\mu > 0$: instabiler Sattelpunkt

- (c) $\mu = 0$: Zentrumspunkt

$\nu > 0$: positiver Uhrzeigersinn

$\nu < 0$: negativer Uhrzeigersinn

3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $a(\lambda) = 2$, $g(\lambda) = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = e^{t\lambda} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) $\lambda < 0$: Senke, stabil

(b) $\lambda > 0$: Quelle, instabil

$$y_1(t) = e^{\lambda t}(y_1(0) + ty_2(0)), \quad y_2(t) = e^{\lambda t}y_2(0),$$

$$y_1(t) = y_2(t) \left(\frac{y_1(0)}{y_2(0)} y_2(t) + \frac{1}{\lambda} \Im \left(\frac{y_2(t)}{y_2(0)} \right) \right).$$

2.1.7 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten für $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ das System

$$y'(t) = Ay(t) + g(t), \quad y(0) = x.$$

Die Lösung existiert global. Mit Variation der Konstanten erhält man $y(t) = e^{tA}z(t)$, wobei gilt

$$\begin{cases} e^{tA}z'(t) + Ae^{tA}z(t) = Ae^{tA}z(t) + g(t), \\ e^{t_0A}z(t_0) = x \end{cases}$$

mit

$$\begin{cases} z'(t) = e^{-tA}g(t) \\ z(t_0) = e^{t_0A}x \end{cases}$$

wodurch wir für $z(t)$ erhalten

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-sA}g(s) \, ds.$$

Insgesamt erhalten wir also die sogenannte Variation der Konstanten Formel

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}x + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}g(s) \, ds.$$

Bemerkung: Dies ist auch eine Integralgleichung für $y(t)$ die äquivalent ist zur (DGL), wobei die exponentiellen Faktoren Vorteile bei Abschätzungen bringen.

2.1.8 Lineare Iterationen mit konstanten Koeffizienten

Betrachte die lineare Iteration in \mathbb{R}^n

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_0 = x, \quad k \in \mathbb{N}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es gilt $x_k = A^k x$.

Bemerkung: Hier entscheiden die Eigenwerte mit Betrag größer oder kleiner als 1 über das Langzeitverhalten. Wir bekommen die folgende Zerlegung in invariante stabile, instabile und Zentrumsunterräume.

$$\mathbb{R}^n = F^+(A) \oplus F^-(A) \oplus F^0(A)$$

$$F^+(A) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ |\lambda| < 1}} \tilde{E}(\lambda), \quad F^-(A) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ |\lambda| > 1}} \tilde{E}(\lambda), \quad F^0(A) = \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma(A) \\ |\lambda| = 1}} \tilde{E}(\lambda)$$

Satz 2.23. Für $\max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A), |\lambda| < 1\} < \gamma < 1$ existiert C_γ sodass

$$|A^k x| \leq C_\gamma \gamma^k |x|, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in F^+.$$

Sei A invertierbar. Für $\min\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A), |\lambda| > 1\} > \gamma > 1$ existiert ein C_γ sodass

$$|A^{-k} x| \leq C_\gamma \gamma^{-k} |x|, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in F^-$$

Sei A invertierbar. Für $\gamma > 1$ existiert C_γ sodass

$$|A^k x| \leq C_\gamma \gamma^{|k|} |x| \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in F^0.$$

Für die inhomogene Iteration $x_{k+1} = Ax_k + g_k$ bekommt man induktiv

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} g_j.$$

2.2 Stabilität linearer Systeme

Definition 2.24. Sei $x \in M$ ein Fixpunkt eines kontinuierlichen dynamischen Systems (ϕ, M) .

$$W^+(x_0) = \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), x_0) = 0 \right\}$$

heißt stabile Menge von x_0 .

Für eine offene Umgebung $U \subset M$ von x_0 heißt $W_{lok}^+(x_0) = W^+(x_0) \cap U$ lokale stabile Menge von x_0 .

$$W^-(x_0) = \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi(t, x), x_0) = 0 \right\}$$

heißt instabile Menge von x_0 . Für eine offene Umgebung $U \subset M$ von x_0 heißt $W_{lok}^-(x_0) = W^-(x_0) \cap U$ lokale instabile Menge von x_0 .

Analog definiert man die Mengen für Fixpunkte diskreter Systeme.

Definition 2.25. Sei $x_0 \in M$ ein Fixpunkt eines kontinuierlichen dynamischen Systems (ϕ, M) . x_0 heißt lokal stabil, falls es für jede offene Umgebung von x_0 eine offene Umgebung $V \subset U$ gibt, sodass $\phi(t, V) \subset U$ für alle $t \geq 0$ (insbesondere existiert $\phi(t, x)$ für alle $t \geq 0$ und $x \in V$).

x_0 heißt asymptotisch stabil, falls x_0 lokal stabil ist und falls es eine offene Umgebung U von x_0 gibt, sodass für alle $x \in U$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, x), x_0) = 0.$$

Analog definiert man diese Begriffe für diskrete Systeme.

Bemerkung: Es genügt für U und V Kugeln $B_\varepsilon(x_0)$ und $V_\delta(x_0)$ zu betrachten.

Beispiel: Betrachte als $M = \mathcal{S}^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R} \bmod (2\pi)\}$. Dazu betrachte ebenfalls

$$\dot{\theta} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$\theta : 0 = 0 \bmod (2\pi)$ ist der einzige Fixpunkt und es gilt $\theta(t) > 0$ für jede andere Lösung. Daraus folgt, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0 \bmod (2\pi),$$

aber $\theta_0 = 0 \bmod (2\pi)$ ist nicht lokal stabil. Das bedeutet, dass die Bedingung der lokalen Stabilität in der Definition der asymptotischen Stabilität nicht weggelassen werden kann.

Im linearen Fall haben wir also folgendes gezeigt

Satz 2.26. Für $y' = Ay$ gilt $E^\pm(A) \subset W^\pm(0)$ und $E^\pm = W^\pm(0)$, falls $E^0(A) = \{0\}$. Die 0 ist asymptotisch stabil genau dann, wenn $\Re(\sigma(A)) \subset (-\infty, 0)$. 0 ist instabil, falls $\Re(\sigma(A)) \not\subset (-\infty, 0]$.

Für $y_{n+1} = Ay_n$ gilt $F^\pm(A) \subset W^\pm(0)$ und $F^\pm(A) = W^\pm(0)$, falls $E^0(A) = \{0\}$. 0 ist asymptotisch stabil genau dann, wenn $\sigma(A) \subset B_1(0)$. 0 ist instabil, falls $\Re(\sigma(A)) \not\subset \overline{B_1(0)}$.

Kapitel 3

Lokales Verhalten dynamischer Systeme

Definition 3.1. Zwei kontinuierliche dynamische Systeme $\phi_t^i : M^i \rightarrow M^i$, $i = 1, 2$ heißen topologisch konjugiert, falls es einen Homoömorphismus $\psi : M^1 \rightarrow M^2$ gibt, sodass

$$\psi \circ \phi_t^1 = \phi_t^2 \circ \psi$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Analoges gelte für diskrete Systeme.

Zwei lokal kontinuierliche dynamische Systeme ψ_t^i , $i = 1, 2$ heißen lokal um $x_i \in M^i$ topologisch konjugiert, falls es offene Umgebungen U^i von x_i und einen Homoömorphismus $\psi : U^1 \rightarrow U^2$ gibt, sodass $\psi(x_1) = x_2$ und

$$(\psi \circ \phi_t^1)(x) = (\phi_t^2 \circ \psi)(x)$$

für $x \in U^1$ und $\phi_t^1(x) \in U^1$ gilt. Falls $\psi \in C^k$ ist, dann heißen ϕ^1 und ϕ^2 (lokal) C^k -konjugiert.

Beispiele:

1. Jede offene Kreisscheibe (mit positivem Radius) ist homoömorph zu jedem offenen Quadrat (mit positiver Kantenlänge) in der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2
2. $(0, 1)$ ist homoömorph zu \mathbb{R}

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

3. Die Bedingungen der Stetigkeit von f^{-1} ist unerlässlich.

$$f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathcal{S}^1, x \mapsto (\cos(x), \sin(x))$$

ist stetig und bijektiv, aber kein Homoömorphismus.

Bemerkung:

1. Die Definition für diskrete Systeme ist analog

2. Die Konjugation ψ bildet Orbits von ϕ^1 bijektiv auf die Orbits von ϕ^2 ab. Die beiden Systeme sind bis auf eine C^k Koordinatentransformation gleich.

Satz 3.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ und nehme $f(y_0) \neq 0$ für ein $y_0 \in U$ an, d.h. y_0 ist ein regulärer Punkt. Sei $\phi(t, x)$ der zu $y' = f(y)$ gehörende lokale Fluss und sei $\psi(t, x) = \psi_t(x)$ der Fluss von $z'(t) = (1, 0, \dots, 0)$. Dann sind ϕ und ψ lokal C^1 -konjugiert.

Beweis. OBdA sei $y_0 = 0$. Nach einer linearen Transformation kann man $f(0) = (1, 0, \dots, 0)$ annehmen. Weiter gilt $\psi(t, x) = (t + x_1, x_2, \dots, x_n)$. Es gibt $\delta > 0$ sodass für $x \in B_\delta(0)$ mit $\overline{B_\delta(0)} \subset U$ die Abbildung h durch

$$h(x_1, \dots, x_n) = \phi(x_1, (0, x_2, \dots, x_n))$$

definiert ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(t, h(x)) &= \phi(t, \phi(x_1, (0, x_2, \dots, x_n))) = \phi(t + x_1, (0, x_2, \dots, x_n)) \\ &= h(t + x_1, x_2, \dots, x_n) = h(\phi(x_1, (0, x_2, \dots, x_n))) = h(\psi(t, x)). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass h ein lokaler Diffeomorphismus ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} h(x_1, \dots, x_n) &= f(\phi(x_1, (0, x_2, \dots, x_n))) \\ \partial_{x_1} h(0, \dots, 0) &= f(0) = (1, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Für $2 \leq i \leq n$ gilt

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} h(x_1, \dots, x_n) &= \partial_{x_i} \phi(x_1, (0, x_2, \dots, x_n)) \\ \partial_{x_i} h(0, \dots, 0) &= (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-Stelle}}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

da $D_x \phi(0, 0) = I$. Dann gilt $D_x h(0) = I$ und nach dem Satz über die inverse Funktion ist h ein lokaler Diffeomorphismus. \square

Bemerkung: Es gibt keinen analogen Satz für Iterationen.

3.1 Verhalten nahe stationärer Punkte

3.1.1 Der Satz von Hartman und Grobman

Ziel: Wir wollen in der Nähe eines Fixpunktes eine lokale Konjugation zu einem System finden. Man erwartet, dass die Terme höherer Ordnung als linear das lokale Verhalten nur wenig stört. Die betrachten wir erst für Iterationen. OBdA nehmen wir an $\bar{y} = 0$. Die Iteration lässt sich dann lokal schreiben als

$$y_{n+1} = Ay_n + f(y_n),$$

wobei $f(y)$ klein relativ zu Ay sein soll. Außerdem gelte $f(0) = 0$ und $Df(0) = 0$. Wir wollen eine Konjugation zu dem linearen System

$$z_{n+1} = Az_n$$

finden.

Gegenbeispiel: (um zu zeigen, dass das im Allgemeinen nicht möglich ist) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachte

$$y_{n+1} = \alpha y_n + y_n^2, \quad y_n \in \mathbb{R}.$$

Angenommen, es gäbe um 0 eine lokale Konjugation zu $z_{n+1} = \alpha z_n$, d.h.

$$\alpha \psi(x) + \psi(x)^2 = \psi(\alpha x).$$

Für $\alpha = 1$ folgt $\psi(x) \equiv 0$. Für $\alpha = -1$ folgt $\psi(x)^2 = \psi(x) + \psi(-x)$ und $\psi(x) = \pm \psi(-x)$. Falls $\psi(x) = \psi(-x)$ gilt, so folgt $\psi(x) \in \{0, 2\}$. Für $\alpha = 0$ folgt $\psi(x)^2 = \psi(0)$ und ψ ist konstant, d.h. für $|\alpha| = 1$ und $\alpha = 0$ gibt es keine Konjugation.

Wir werden zeigen, dass es in allen anderen Fällen eine topologische Konjugation gibt.

Bemerkung: Die analoge Bedingung im \mathbb{R}^n ist, dass $A := Df(0)$ invertierbar ist und keinen Eigenwert vom Betrag 1 hat. Wir nehmen also $F^0(A) = \{0\}$ an. Dann gilt $\mathbb{R}^n = F^+(A) \oplus F^-(A)$, wobei $F^+(A)$ der kontrahierende und $F^-(A)$ der expandierende Unterraum von A ist. Wir zerlegen jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eindeutig in $x = x^+ + x^-$, $x^\pm \in F^\pm(A)$ ist. Sei $A_\pm : F^\pm(A) \rightarrow F^\pm(A)$ die Einschränkung von A auf F^\pm . Nach Satz 2.19 gibt es Normen $\|\cdot\|_\pm$ auf $F^\pm(A)$, sodass $\alpha := \max\{\|A_+\|, \|A_-\|\} < 1$. Auf \mathbb{R}^n sei die Norm $|x| = \max\{|x_+|, |x_-|\}$ definiert. Wir benötigen eine globale Version des Satzes über inverse Funktionen.

Satz 3.3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Falls

$$\theta := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|A^{-1}Df(x)\| < 1$$

gilt, dann ist $A + f$ auf \mathbb{R}^n invertierbar. $(A + f)^{-1}$ hat die Form $A^{-1} + \tilde{f}$ mit $\tilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|D\tilde{f}(y)A\| \leq \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

Beweis. Für ein festes $y \in \mathbb{R}^n$ definiere für $x \in \mathbb{R}^n$

$$k(x) = A^{-1}y - A^{-1}f(x).$$

Man sieht leicht ein, dass

$$|k(x_1) - k(x_2)| \leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \|A^{-1}Df(z)\| |x_1 - x_2| \leq \theta |x_1 - x_2|.$$

Daher hat k nach Lemma 1.7 einen eindeutigen Fixpunkt und $A + f$ ist invertierbar. Wegen $\theta < 1$ ist $I + A^{-1}Df(x)$ invertierbar, denn die Neumannreihe konvergiert

$$(I + A^{-1}Df(x))^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-A^{-1}Df(x))^j,$$

d.h. $A + Df = A(I + A^{-1}Df)$ ist invertierbar. Der Satz über die lokale Inverse zeigt insbesondere, dass $(A + f)^{-1}$ k -mal stetig differenzierbar ist. Daher folgt

$$\tilde{f} = (A + f)^{-1} - A^{-1} = ((I + A^{-1}f)^{-1} - I) A^{-1} \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

und

$$D\tilde{f}A = (I + A^{-1}Df)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} (-A^{-1}Df)^j$$

wodurch dann gilt

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|D\tilde{f}(y)A\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|A^{-1}Df(x)\| = \frac{\theta}{1 - \theta}.$$

□

Zunächst beweisen wir einen globalen Satz, falls die Nichtlinearität global "klein" ist.

Satz 3.4 (Hartman-Grobman für globale Abbildungen). *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar ohne Eigenwerte auf dem Einheitskreis. Die Normen auf $F^{\pm}(A)$ seien wie oben bereits definiert, sodass $\alpha := \max \left\{ \|A - \cdot\|_+, \|A^{-1}\|_- \right\} < 1$. Seien $f, g \in BC^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und sei*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|Df(x)\| < \min \left\{ 1 - \alpha, \|A^{-1}\|^{-1} \right\}, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|Dg(x)\| < \min \left\{ 1 - \alpha, \|A^{-1}\|^{-1} \right\},$$

dann gibt es eine eindeutige, stetige, invertierbare Abbildung $\psi(x) = x + h(x)$ mit $h \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sodass

$$\psi \circ (A + f) = (A + g) \circ \psi. \quad (*)$$

Falls $f(0) = g(0) = 0$ gilt, so gilt $\psi(0) = 0$.

Beweis. Fasse die Matrix A als die lineare Abbildung Ax auf, dann ist $(*)$ äquivalent zu $(I * h) \circ (A + f) = (A + g) \circ (I + h)$, bzw.

$$lh := h \circ (A + f) - A \circ h = g \circ (I + h) - f.$$

L ist ein linearer Operator von $BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ in sich. Falls L invertierbar ist, ergibt sich eine äquivalente Fixpunktgleichung für h . Sei $L = S - A$ mit dem linearen Operator $Sh := h \circ (A + f)$. Nach Voraussetzung gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|A^{-1}Df(x)\| \leq \|A^{-1}\| \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|Df(x)\| < 1$$

und $A + f$ ist nach 3.3 invertierbar. Daher ist S invertierbar und es gilt offensichtlich $\|S\| = \|S^{-1}\| = 1$. Zerlege nun $BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = BC(\mathbb{R}^n, F_+) \oplus BC(\mathbb{R}^n, F_-)$ und $A = A_+ \oplus A_-$, $L = L_+ \oplus L_-$, $S = S_+ \oplus S_-$. Es gilt $L_+ = S_+(I - S_+^{-1}A_+)$ und $L_- = -A_-(I - A_-^{-1}S_-)$. Wegen $\|S_+^{-1}A_+\| \leq \alpha < 1$ und $\|A_- - -^{-1}S_-\| \leq \alpha < 1$

konvergieren die Neumannreihen

$$\begin{aligned}
(I - S_+^{-1}A_+)^{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty} (S_+^{-1}A_+)^j \\
(I - A_-^{-1}S_-)^{-1} &= \sum_{j=0}^{\infty} (A_-^{-1}S_-)^j \\
\|(I - S_+^{-1}A_+)^{-1}\|_+ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|S_+^{-1}A_+\|_+^j \leq \frac{1}{1-\alpha} \\
\|(I - A_-^{-1}S_-)^{-1}\|_- &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A_-^{-1}S_-\|_-^j \leq \frac{1}{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Daher sind L_{\pm} und damit L invertierbar und es gilt $\|L_+^{-1}\|_+ \leq \frac{1}{1-\alpha}$, $\|L_-^{-1}\|_- \leq \frac{1}{1-\alpha}$, $\|L^{-1}\| \leq \max\left\{\|L_+^{-1}\|_+, \|L_-^{-1}\|_-\right\} \leq \frac{1}{1-\alpha}$.

Definiere nun den Operator von $BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ in sich durch

$$K(h) = L^{-1}(g \circ (I + h) - f).$$

Es gilt mit $\theta < 1$

$$\|K(h_1) - K(h_2)\| \leq \frac{1}{1-\alpha} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|Df(x)\| \|h_1 - h_2\| \leq \theta \|h_1 - h_2\|,$$

das heißt, dass K einen eindeutigen Fixpunkt $h \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ hat. $\psi = I + h$ erfüllt dann (*). Es bleibt zu zeigen, dass ψ invertierbar ist. Vertausche dazu f und g in (*) und erhalte eine eindeutige, stetige Abbildung ϕ mit $\phi - I \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\phi \circ (A + g) = (A + f) \circ \phi$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi \circ (A + g) &= \psi \circ (A + f) \circ \phi = (A + g) \circ \psi \circ \phi, \\
\phi \circ \psi \circ (A + f) &= \phi \circ (A + g) \circ \psi = (A + f) \circ \phi \circ \psi.
\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit im Fall $f = g$ folgt dann $\psi \circ \phi = I$ und $\phi \circ \psi = I$, d.h. $\psi^{-1} = \phi$ existiert.

Sei $f(0) = 0 = g(0)$. Dann gibt es ein $\tilde{\psi}$ mit $\tilde{\psi} \circ (A + f) = A \circ \tilde{\psi}$ und ein $\tilde{\phi}$ mit $(A + g) \circ \tilde{\phi} = \tilde{\phi} \circ A$. Dann folgt

$$\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi} \circ (A + f) = \tilde{\phi} \circ A \circ \tilde{\psi} = (A + g) \circ \tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$$

und $\psi = \tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}$ wegen der Eindeutigkeit von ψ . Aus

$$\tilde{\phi}^{-1}(0) = \tilde{\phi}^{-1}((A + g)(0)) = A\tilde{\phi}^{-1}(0)$$

folgt $\tilde{\phi}^{-1}(0) = 0$ und $\phi(0) = 0$, da 1 kein Eigenwert von A ist. Weiter ist

$$\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}((A + f)(0)) = A\tilde{\psi}(0)$$

und somit $\tilde{\psi}(0) = 0$. Insgesamt ist $\psi(0) = 0$. □

Durch lokalisieren erhalten wir den folgenden Satz

Satz 3.5 (Hartman-Grobman für lokale Abbildungen). *Sei $f(x) = Ax + g(x)$ mit $g \in L^1(B_r(0), \mathbb{R}^n)$, $g(0) = 0$ und $Dg(0) = 0$. Sei A invertierbar ohne Eigenwerte auf dem Einheitskreis, dann ist $f(x)$ lokal topologisch zu $Df(0)$ konjugiert.*

Beweis. Wähle eine sogenannte Abschneidefunktion $\rho \in C^1([0, \infty), \mathbb{R})$ mit Träger in $[0, 2]$, d.h. $\rho(s) = 1$ für $s \in [0, 1]$, $0 \leq \rho(s) \leq 1$ für $s \in [1, 2]$ und $\rho(s) = 0$ für $s \geq 2$. Sei $C = \sup_{s>0} |\rho'(s)|$. Für $\varepsilon > 0$ gibt es $0 < \delta < \frac{r}{2}$, sodass

$$\sup_{|x| \leq 2\delta} |Dg(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sup_{|x| < 2\delta} |g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}\delta$$

gilt. Definiere dann

$$g_\delta(x) = \begin{cases} \rho\left(\frac{|x|}{\delta}\right)g(x), & |x| \leq 2\delta < r \\ 0, & |x| \geq 2\delta \end{cases}$$

und $f_\delta := A + g_\delta$. Dann folgt für $x \in B_{2\delta}(0)$

$$|Dg_\delta(x)| \leq \frac{1}{\delta} \left| \rho' \left(\frac{|x|}{\delta} \right) \right| |g(x)| + \rho \left(\frac{|x|}{\delta} \right) |Dg(x)| \leq \frac{C}{\delta} \frac{\varepsilon \delta}{2C} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für $x \in B_\delta(0)$ gilt $g_\delta(x) = g(x)$ und für $|x| > 2\delta$ gilt $g_\delta(x) = 0$. Dies zeigt die Voraussetzungen an g_δ in 3.4, falls ε und damit δ hinreichend klein sind. Damit gibt es einen globalen Homoömorphimus $\psi_\delta \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\psi_\delta(0) = 0$, sodass $A\psi_\delta(x) = \psi_\delta(Ax + g_\delta(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Für $x \in B_\delta(0)$ folgt $A\psi_\delta(x) = \psi_\delta(Ax + g(x))$. \square

Bemerkung:

1. Es ist ein häufig verwendetes Verfahren zuerst ein globales Problem unter restriktiven Bedingungen zu lösen und dann zu lokalisieren.
2. Die lokale Konjugation ψ_δ hängt von ρ und δ ab und ist damit nicht eindeutig.

Satz 3.6 (Hartman-Grobman für Flüsse (global)). *Für $g \in BC^1(U, \mathbb{R}^n)$ betrachte die (DGL)*

$$y'(t) = Ay(t) + g(y(t)), \quad y(0) = x$$

mit dem globalen Fluss $\phi_t(x)$. Sei $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, d.h. A ist hyperbolisch, dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass es für $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|Dg(x)\| < \delta$ einen Homoömorphimus $\psi = I + h$ mit $h \in BC(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gibt, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\psi \circ e^{tA} = \phi_t \circ \psi.$$

Beweis. Da g beschränkt ist, wächst $Ay + g(y)$ linear und $\phi_t(x)$ ist global definiert. Wir wollen den globalen Satz für Iterationen auf $\phi_1(x)$ und $D_x \phi_1(0) = E^A$ anwenden. e^A ist invertierbar ohne Eigenwerte auf dem Einheitskreis. Definiere $G(x)$ durch $\phi_1(x) = e^A x + G(x)$. Zu zeigen ist, dass $DG(x)$ klein ist. Um präziser zu sein, für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|DG(x)\| < \delta$. $D_x \phi_t(x)$ erfüllt das lineare System

$$\partial_t D_x \phi_t(x) = A D_x \phi_t(x) + Dg(\phi_t(x)) D_x \phi_t(x), \quad D_x \phi_0(x) = I,$$

bzw. die Integralgleichung

$$D_x \phi_t(x) = e^{tA} + \int_0^t e^{(t-s)A} Dg(\phi_s(x)) D_x \phi_s(x) \, ds.$$

Nach Gronwall's Lemma gibt es $C > 0$ sodass $\|D_x \phi_s(x)\| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq s \leq 1$ und $0 < \delta \leq \delta_0$. Weiter folgt aus der Integralgleichung

$$\|D_x \phi_1(x) - e^A\| = \left\| \int_0^1 e^{(1-s)A} Dg(\phi_s(x)) D_x \phi_s(x) \, ds \right\| \leq \delta C \int_0^1 \|e^{(1-s)A}\| \, ds \leq \varepsilon,$$

falls δ hinreichend klein gewählt wird.

Nach Satz 3.4 gibt es einen eindeutigen Homoöomorphismus der Form $\psi = I + h$ mit $h \in BC^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, sodass $\psi \circ e^A = \phi_1 \circ \psi$ gilt. Für ein festes $t \in \mathbb{R}$ sei $\psi_t := \phi_t \circ \psi \circ e^{-tA}$. Es gilt

$$\psi_t \circ e^A = \phi_t \circ \psi \circ e^{(1-t)A} = \phi_{t+1} \circ \psi \circ e^{-tA} = \phi_1 \circ \psi_t.$$

Wir wollen zeigen, dass $\psi_t = \psi$. Dies folgt aus der Eindeutigkeit von ψ , falls $\psi_t - I$ beschränkt ist.

$$\psi_t - I = \phi_t \circ (I + h) \circ e^{-tA} - I = (\phi_t - e^{tA})e^{-tA} + \phi_t \circ h \circ e^{-tA}.$$

Der erste Term ist beschränkt, da für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\phi_t(x) - e^{tA}x| = \left| \int_0^t e^{(t-s)A} g(\phi_s(x)) \, ds \right| \leq \sup_{s \in [0, t]} \|e^{sA}\| \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |g(y)| < \infty$$

gilt. Der zweite Term ist beschränkt, da h beschränkt ist. Damit ist $\psi_t - I$ beschränkt und wegen der Eindeutigkeit in Satz 3.4 folgt $\psi_t = \psi$, d.h. $\psi \circ e^{tA} = \phi_t \circ \psi$. \square

Definition 3.7. Als Phasenraum bezeichnet man den Raum, der durch die Variablen des Systems aufgespannt wird.

Bemerkung: Das Richtungsfeld gibt den Verlauf der Trajektorien an. Der exakte Verlauf der Trajektorie ist für ein System

$$\begin{cases} u' = f(u, v) \\ v' = g(u, v) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\frac{du}{dv} = \frac{f(u, v)}{g(u, v)}.$$

Beispiel:

$$\begin{cases} u' = u \\ v' = -uv. \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{dv}{du} = -v$ und $v(u) = ce^{-u}$. Durch jeden Punkt (u, v) geht also eine eindeutige Kurve.

Beispiel: (Lotka-Volterra/ Räuber-Beute-Modell) Betrachte das System

$$\begin{aligned} u' &= au - buv = f(u, v), & \text{Größe der Beutepopulation} \\ v' &= cuv - dv = g(u, v). & \text{Größe der Räuberpopulation} \end{aligned}$$

Als erstes bestimmen wir die Fixpunkte dieses Systems, das bedeutet, wir suchen die Nullstellen der rechten Seite.

$$\begin{cases} f(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \\ g(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{u}(a - b\bar{v}) = 0 \\ \bar{v}(c\bar{u} - d) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\bar{u}, \bar{v}) = (0, 0), \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$$

Mit Hilfe der Fixpunkte können wir die Stabilität analysieren, indem wir die Jacobimatrix an den jeweiligen Fixpunkten ausrechnen. Die Jacobimatrix ist gegeben durch

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} a - bv & -bu \\ cv & -d + cu \end{pmatrix},$$

womit sich dann für die Fixpunkte $(0, 0)$ und $(\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$ folgendes ergibt

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}.$$

Die dazugehörigen Eigenwerte sind natürlich a und $-d$, weswegen wir einen Sattelpunkt erhalten. Im zweiten Fall erhalten wir

$$J\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = \sqrt{adi}$ und $\lambda_2 = -\sqrt{adi}$. In diesem Fall liefert die Linearisierung also keine Antwort auf die Frage nach der Stabilität. Wir stellen daher die folgende Betrachtung an, das sogenannte erste Integral

$$\frac{dv}{du} = \frac{v}{u} \frac{cu - d}{a - bv}.$$

Integriert man nun geeignet, so erhält man

$$\begin{aligned} \int \frac{a - bv}{v} dv &= \int \frac{cu - d}{u} du, \\ \Leftrightarrow \int \frac{a}{v} - b dv &= \int c - \frac{d}{u} du, \\ \Leftrightarrow a \ln(v) - bv &= cu - d \ln(u) + C, \\ \Leftrightarrow v^a e^{-bv} e^{-cu} u^d &= \tilde{C}, \end{aligned}$$

das heißt, dass $F(u, v) = v^a e^{-bv} e^{-cu} u^d$ entlang der Trajektorien konstant ist. Die Lösungen sind also periodisch. Für Oszillationen mit Periode T gilt

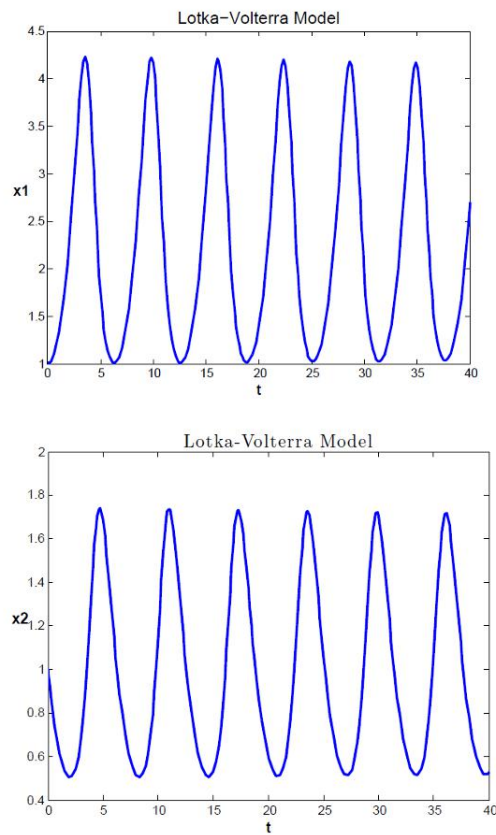
$$\frac{u'}{u} = a - bv \Rightarrow \ln\left(\frac{u(T)}{u_0}\right) = aT - b \int_0^T v(s) ds.$$

Es gilt aufgrund der Periodizität $\ln\left(\frac{u(T)}{u_0}\right) = 0$. Daher ist

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{T} \int_0^T v(s) ds,$$

letzteres ist die mittlere v_{mitt} Amplitude der Oszillation in v -Richtung. Auf dieselbe Weise erhält man die mittlere u -Amplitude $u_{\text{mitt}} = \frac{d}{c}$. Die Positivität der Lösung erhält man dadurch, dass man beobachtet, dass falls $u = 0$ ist, auch $u' = 0$ gilt. Gleiches gilt für v . Also kann die Nulllinie nicht überkreuzt werden. Wir erhalten also für nichtnegative Anfangsdaten $u_0, v_0 \geq 0$ auch nichtnegative Lösungen $u, v \geq 0$. Abbildung 3.2 hingegen zeigt das zugehörige Phasenporträt. Wir betrachten noch den Fall, dass sich die linearen

Abbildung 3.1: Oszillation von u und v (hier als x_1 und x_2 bezeichnet)

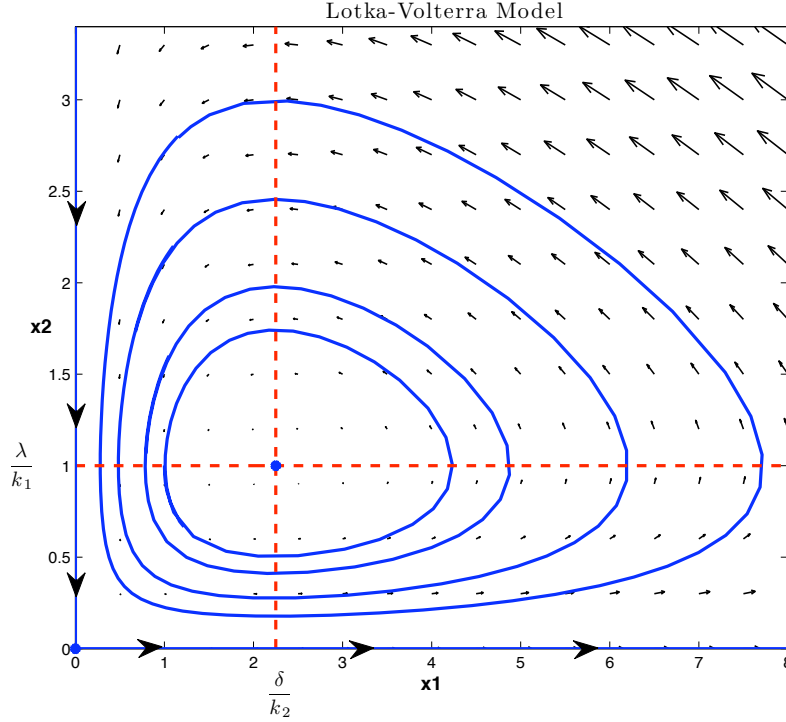


Teile unterscheiden. Wir benötigen dazu das

Lemma 3.8. *Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix mit $\Re(\sigma(A)) \subset (-\infty, 0)$, dann gibt es eine Matrixnorm $\|\cdot\|_A$ und eine Konstante $a > 0$, sodass*

$$\|e^{tA}\|_A \leq e^{-ta} \|x\|_A, \quad \forall t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

Abbildung 3.2: Phasenporträt vom Lotka-Volterra-System



Satz 3.9. Sei ϕ_t der lokale Fluss von $y' = f(y)$ und $\tilde{\phi}_t$ der von $z' = g(z)$. Hierbei seien $f, g \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $f(0) = g(0) = 0$ und seien $A = Df(0), B = Dg(0)$ hyperbolisch. Dann sind ϕ_t und $\tilde{\phi}_t$ lokal um 0 konjugiert genau dann, wenn $\dim(E^+(A)) = \dim(E^+(B))$ und $\dim(E^-(A)) = \dim(E^-(B))$.

Beweis. Nach Satz 3.6 genügt es dies für $\phi_t = e^{tA}$ und $\psi_t = e^{tB}$ zu zeigen. Nach geeigneter linearer Transformation kann man $E^\pm(A) = E^\pm(B)$ annehmen. Betrachte zunächst $E^+(A) = E^+(B)$ (für den anderen Fall betrachte $-A$ und $-B$), d.h. oBdA sei $E^+(A) = E^+(B) = \mathbb{R}^n$. Nach Lemma 3.8 gibt es eine Norm $\|\cdot\|_A$ und eine Konstante $a > 0$, sodass

$$\|e^{tA}x\|_A \leq e^{-ta} \|x\|_A, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0.$$

Ersetzt man x durch $e^{-tA}x$ und t durch $-t$, so erhält man

$$\|e^{tA}x\|_A \geq e^{-ta} \|x\|_A, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \leq 0.$$

Daher folgt für $x \neq 0$ und $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e^{tA}x\|_A &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left(\|e^{(t+s)A}x\|_A - \|e^{tA}x\|_A \right) \\ &\leq \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (e^{-sa} - 1) \|e^{tA}x\|_A = -a \|e^{tA}x\|_A. \end{aligned}$$

Daher gibt es für $\|x\|_A \geq 1$ ein eindeutiges $\tau_A(x) \leq 0$ mit $\|e^{\tau_A(x)A}x\|_A = 1$. Für $\|x\|_A = 1$ gilt $\tau_A(x) = 0$. Der Satz über implizite Funktionen zeigt, dass τ_A eine

C^1 -Funktion ist. Es gilt

$$\tau(e^{tA}x) = \tau(x) - \tau.$$

Definiere für $\|x\|_A = 1$

$$h_{AB}(x) = \frac{x}{\|x\|_B}.$$

h_{AB} ist stetig und stetig invertierbar, denn $h_{AB}^{-1} = h_{AB}$. Definiere man für $x \neq 0$

$$\psi(x) = e^{-\tau_A(x)B} h_{AB}(e^{\tau_A(x)A} x).$$

Wegen $\tau_B(\psi(x)) = \tau_A(x)$ folgt für $x \neq 0$

$$\psi^{-1}(x) = e^{-\tau_B(x)A} h_{AB}(e^{\tau_B(x)B} x).$$

ψ, ψ^{-1} sind stetig. Aus $\lim_{x \rightarrow 0} \tau_A(x) = -\infty$ folgt

$$|\psi(x)| \leq c \|e^{\tau_A(x)B}\| \rightarrow 0, \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Mit $\psi(0) = 0$ wird h zu einem Homoöomorphismus des \mathbb{R}^n . Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \psi(e^{tA}x) &= e^{(t-\tau_A(x))B} h_{AB}(e^{(\tau_A(x)-t)A} e^{tA}x) = e^{tB} e^{-\tau_A(x)B} h_{AB}(e^{\tau_A(x)A}x) \\ &= e^{tB} \psi(x). \end{aligned}$$

Umgekehrt bildet jede Konjugation $E^\pm(B)$ ab, d.h. deren Dimensionen stimmen überein. \square

Bemerkung: Es gilt $\psi(x) = -\psi(-x)$, d.h. ψ ist ungerade.

Der analoge Satz für Iterationen lautet

Satz 3.10. *Seien $f, g \in C^1(B_\delta(0), \mathbb{R}^n)$, $f(0) = g(0) = 0$. Seien $A = Df(0)$, $B = Dg(0)$ hyperbolisch und invertierbar, dann sind f und g lokal um 0 topologisch konjugiert genau dann, wenn $\dim(F^+(A)) = \dim(F^+(B))$, $\dim(F^-(A)) = \dim(F^-(B))$ und $\det(A_+) \det(B_+) > 0$, $\det(A_-) \det(B_-) > 0$.*

Korollar 3.11 (Linearisierte Stabilität für Flüsse). *Betrachte $y'(t) = f(y)$, $f \in C^1(B_\delta(x_0), \mathbb{R}^n)$ mit $f(x_0) = 0$. Falls $\Re(\sigma(Df(x_0))) \not\subset (-\infty, 0]$ gilt, dann ist x_0 instabil.*

Falls $\Re(\sigma(Df(x_0))) \subset (-\infty, 0]$ und falls ein Eigenwert den Realteil 0 hat, kann man die Stabilität nicht aus der Linearisierung ablesen und es entscheiden die Terme höherer Ordnung.

Bemerkung: Analoges gilt für Iterationen.

3.1.2 Invariante Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten das System

$$y'(t) = f(y(t))$$

in \mathbb{R}^n für $f \in C^1(B_\delta(0), \mathbb{R}^n)$ mit $f(0) = 0$. Wir wollen zeigen, dass die lokalen stabilen und instabilen Mengen $W_{lok}^\pm(0)$ für einen hyperbolischen Fixpunkt tatsächlich glatte Mannigfaltigkeiten sind, die im Nullpunkt tangential an $E^\pm(Df(0))$ sind. Wir benötigen dazu folgendes

Lemma 3.12. Seien X, Y Banachräume und sei $K \in C^k(X \times Y, X)$ und sei für $0 < \theta < 1$

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leq \theta |x_1 - x_2|_X.$$

Für den eindeutigen Fixpunkt $h(y)$ gilt $h \in C^k(Y, X)$.

Beweis. Da K eine Kontraktion bzgl x ist, folgt $\|D_x K(x, y)\| \leq \theta < 1$ und $I_X - D_x K(x, y)$ ist invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist

$$x - K(x, y) = 0$$

lokal eindeutig lösbar durch $x = h(y)$ und es gilt $h \in C^k(X, Y)$. □

Zunächst zeigen wir wieder einen globalen Satz und lokalisieren dann später. Die invarianten Mannigfaltigkeit wird als Graph über dem zugehörigen Eigenraum der Linearisierung konstruiert.

Satz 3.13 (globale invariante Mannigfaltigkeit für Flüsse). *Nach einer linearen Koordinatentransformation habe die Differentialgleichung die Form*

$$\begin{cases} x' = Ax + F(x, y) \\ y' = By + G(x, y) \end{cases}$$

wobei $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^l$, $\Re(\sigma(A)) \subset (-\infty, a)$, $\Re(\sigma(B)) \subset (b, \infty)$ und $a < b$. Seien $F \in C^1(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R}^k)$, $G \in C^1(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R}^l)$, $F(0, 0) = 0$, $G(0, 0) = 0$, $DF(0, 0) = 0$, $DG(0, 0) = 0$ und sei

$$\sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+l}} \|DF(x, y)\| < \delta, \quad \sup_{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+l}} \|DG(x, y)\| < \delta.$$

Dann gibt es $\delta > 0$, sodass eine eindeutige Funktion $\psi \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ mit folgenden Eigenschaften existiert

1.

$$W := \text{Graph}(\psi) = \{(x, \psi(x)) \mid x \in \mathbb{R}^k\}$$

ist eine positiv invariante C^1 -Mannigfaltigkeit

2. Es gilt $\psi(0) = 0$ und $D\psi(0) = 0$, d.h. W ist tangential an $\mathbb{R}^k \times \{0\}$.

3.

$$W = \{(x(0), y(0)) \mid \exists c > 0 \forall t \geq 0: |x(t)| + |y(t)| \leq ce^{ta}(|x(0)| + |y(0)|)\}$$

4. ψ und damit W hängen nicht von der Wahl von $a < b$ ab.

Beweis. Analog zu Satz 2.18 gibt es $\varepsilon > 0$ und $c > 0$, sodass

$$\begin{aligned} |e^{tA}x| &\leq ce^{(a-\varepsilon)t}|x|, \quad x \in \mathbb{R}^k, t \geq 0 \\ |e^{tB}y| &\leq ce^{bt}|y|, \quad y \in \mathbb{R}^l, t \leq 0 \end{aligned}$$

gilt. Definiere den Banachraum

$$X_a^k := \left\{ x \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^k) \mid \sup_{t \geq 0} |e^{-at}x(t)| < \infty \right\}$$

mit der Norm $|x|_a = \sup_{t \geq 0} |e^{-at}x(t)|$. Angenommen $(x(t), y(t))$ sei eine Lösung in $X_a \times X_a$. Die Variation der Konstanten ergibt für $T > 0$

$$y(T) = e^{(T-t)B}y(t) + \int_t^T e^{(T-s)B}G(x(s), y(s)) \, ds$$

bzw.

$$y(t) = e^{(t-T)B}y(T) - \int_t^T e^{(t-s)B}G(x(s), y(s)) \, ds \quad (*)$$

Für $T \rightarrow \infty$ gilt

$$\left| e^{(t-T)B}y(T) \right| \leq C_\varepsilon e^{b(t-T)} |y(T)| \leq C e^{b(t-T)+aT} |y|_a \rightarrow 0$$

Aus den Voraussetzungen für G folgt

$$|G(x(s), y(s))| \leq \delta (|x(s)| + |y(s)|) \leq \delta e^{sa} (|x|_a + |y|_a)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_t^T \left| e^{(t-s)B}G(x(s), y(s)) \right| \, ds &\leq \delta C \int_t^T e^{b(t-s)} e^{as} \, ds (|x|_a + |y|_a) \\ &= \frac{\delta C}{b-a} e^{bt} \left(e^{-(b-a)t} - e^{-(b-a)T} \right) \rightarrow \frac{\delta C}{b-a} e^{at} \end{aligned}$$

Daher kann man in (*) zum Limes $T \rightarrow \infty$ übergehen

$$y(t) = - \int_t^\infty e^{(t-s)B}G(x(s), y(s)) \, ds.$$

Für die x -Gleichung gilt

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}F(x(s), y(s)) \, ds,$$

das heißt, bei gegebenem Anfangswert x_0 ist die eindeutige Lösung der (DGL) $(x(t), y(t)) \in X_a \times X_a$, falls sie existiert, ein Fixpunkt des folgenden Operators

$$K(x, y)(t) = \left(e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}F(x(s), y(s)) \, ds, - \int_t^\infty e^{(t-s)B}G(x(s), y(s)) \, ds \right).$$

Es bleibt zu zeigen, dass K den Raum $X_a^k \times X_a^l$ in sich abbildet und eine Kontraktion ist.

$$\begin{aligned} |K_1(x, y)(t)| e^{-ta} &\leq e^{-ta} \left(C e^{t(a-\varepsilon)} |x_0| + C \delta \int_0^t e^{(t-s)(a-\varepsilon)} e^{sa} \, ds (|x|_a + |y|_a) \right) \\ &\leq C |x_0| + C \delta e^{-t\varepsilon} \int_0^t e^{s\varepsilon} \, ds (|x|_a + |y|_a) \\ &\leq C |x_0| + \frac{C \delta}{\varepsilon} (|x|_a + |y|_a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|K_2(x, y)(t)| e^{-ta} &\leq e^{-ta} C \delta \int_t^\infty e^{(t-s)b} e^{sa} ds (|x|_a + |y|_a) \\
&\leq e^{-t(a-b-\varepsilon)} C \delta \int_t^\infty e^{-(b-a)s} ds (|x|_a + |y|_a) \\
&\leq \frac{C \delta}{b-a} (|x|_a + |y|_a),
\end{aligned}$$

das heißt, es gilt $K = (K_1, K_2)$ bildet $X_a \times X_a$ in sich ab. Genauso folgt

$$\begin{aligned}
|K_1(x_1, y_1)(t) - K_1(x_2, y_2)(t)| e^{-ta} &\leq \frac{C \delta}{\varepsilon} (|x_1 - x_2|_a + |y_1 - y_2|_a) \\
|K_2(x_1, y_1)(t) - K_2(x_2, y_2)(t)| e^{-ta} &\leq \frac{C \delta}{b-a} (|x_1 - x_2|_a + |y_1 - y_2|_a).
\end{aligned}$$

Falls $\delta < \frac{1}{2C} \min \{\varepsilon, b-a\}$ gilt, dann ist K eine Kontraktion und hat einen eindeutigen Fixpunkt $(x^*(t, x_0), y^*(t, y_0))$. Man zeigt leicht, dass K bzgl. x, y, x_0 stetig differenzierbar ist. Nach obigem Lemma gilt $(x^*(t, x_0), y^*(t, x_0)) \in C^1(\mathbb{R}^k, X_a^k \times X_a^l)$. Definiere $\psi \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ wie folgt

$$\psi(x_0) = y^*(0, x_0) = - \int_0^\infty e^{-sB} G(x^*(s, x_0), y^*(s, x_0)) ds$$

und $W = \{(x_0, \psi(x_0)) \mid x_0 \in \mathbb{R}^k\}$. Sei $\psi(x_0) = y_0$ und sei $(x(t), y(t)) \in X_a \times X_a$ der zugehörige Fixpunkt von K , dann gilt auch für $s > 0$, $(x(t+s), y(t+s)) \in X_a \times X_a$. Daraus folgt $\psi(x(s)) = y(s)$ und W ist positiv invariant. $\psi(0) = 0$ ist klar. Differenziere $\psi(x_0)$ nach x_0 und setze $x_0 = 0$. Dies zeigt, dass $D\psi(0) = 0$, da $DG(0, 0) = 0$ gilt. 3) folgt aus der Konstruktion von K und ψ . Nach 3) folgt aus $a_1 < a_2 < b$ sofort $W_{a_1} \subset W_{a_2}$. Die Dimensionen von W_{a_i} sind beide gleich k . Daher stimmen W_{a_i} und ψ_{a_i} überein. Die Unabhängigkeit von $a < b$ folgt sofort aus 3). \square

Bemerkung:

1. Für $(F, G) \in C^m(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R}^{k+l})$ zeigt man, dass der Operator K j -mal stetig differenzierbar bezüglich $x, y \in X_a \times X_a$ und bezüglich x_0 ist, falls $A_j < B$ und $j \leq m$ gilt. Daraus folgt
 - (a) $\psi \in C^m(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$, falls $A \leq 0$.
 - (b) $\psi \in C^j(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l)$ mit $j < \min \{m+1, \frac{B}{A}\}$, falls $0 < A < B$.
2. Die invariante Mannigfaltigkeit hängt differenzierbar von Parametern ab, falls dies für A, B, F, G gilt solange die Spektrallücke erhalten bleibt.

Durch Zeitumkehr und Vertauschen von x und y in Satz 3.13 folgt

Korollar 3.14. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.13 gibt es eine eindeutige Funktion $\psi \in C^1(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k)$ mit folgenden Eigenschaften*

1. $W := \text{Graph}(\psi) = \{(x, y) \mid x = \psi(y)\}$ ist eine negativ invariante C^1 -Mannigfaltigkeit.

2. Es gilt $\psi(0) = 0$ und $D\psi(0) = 0$, d.h. W ist tangential zu $\{0\} \times \mathbb{R}^l$.
3. $W = \{(x(0), y(0)) \mid \exists c > 0 \forall t \leq 0 : |x(t)| + |y(t)| \leq ce^{-tb}(|x(0)| + |y(0)|)\}$.
4. ψ hängt nicht von der Wahl von $a < b$ ab.

Definition 3.15. Eine Menge W heißt lokal um x_0 positiv invariant, falls es eine offene Umgebung von x_0 gibt, sodass für alle $t \geq 0$ folgendes gilt

$$\phi_t(W \cap U) \cap U \subset W.$$

Entsprechendes gelte für lokal negativ invariante, bzw. lokal invariante Mengen und für Iterationen.

Durch Lokalisieren erhält man aus Satz 3.13 lokal positiv invariante Mannigfaltigkeiten, die tangential an $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ sind. Beachte, dass durch das Lokalisieren unter Umständen die Eindeutigkeit verloren geht. Durch spezielle Wahl von $a < b$ erhält man die sogenannten stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten.

Satz 3.16 (lokal stabile und instabile Mannigfaltigkeiten für Flüsse). *Betrachte $y' = f(y)$, $f \in C^1(B_\delta(0), \mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$, $Df(0) = A$, dann gilt*

1. Es gibt eine eindeutige positiv invariante, lokale C^1 -Mannigfaltigkeit W_{lok}^+ der Dimension $\dim(E^+(A))$ mit $0 \in W_{lok}^+$ und W_{lok}^+ ist tangential an $E^+(A)$. Lösungen mit Anfangswerten in W_{lok}^+ fallen exponentiell in positiver Zeit.
2. Es gibt eine eindeutige negativ invariante, lokale C^1 -Mannigfaltigkeit W_{lok}^- der Dimension $\dim(E^-(A))$ mit $0 \in W_{lok}^-$ und W_{lok}^- ist tangential an $E^-(A)$. Lösungen mit Anfangswerten in W_{lok}^- fallen exponentiell in negativer Zeit.
3. Falls A hyperbolisch ist, stimmen W_{lok}^\pm mit den lokal (in)stabilen Mengen überein.

Beweis. Im Fall von 1. wende die lokalisierte Version des Satzes 3.13 mit $0 > b > a > \max\{\Re(\lambda) < 0 \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ an und erhalte eine lokal positiv invariante Mannigfaltigkeit W_{lok}^+ in einer Umgebung von x_0 . Da $a < 0$ ist, fallen Lösungen in W_{lok}^+ exponentiell. Daher bleiben sie in einer Umgebung U von 0 in der das Abschneiden die Nichtlinearität nicht verändert. Damit hängt W_{lok}^+ nicht von der Lokalisierung ab und ist damit eindeutig und positiv invariant.

Im Fall 2. wende die lokalisierte Form von Korollar 3.14 mit $0 < a < b < \min\{\Re(\lambda) > 0 \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ an.

Für 3. kann man, da man im hyperbolischen Fall ist, $a = 0$ in 1. wählen und W_{lok}^+ besteht aus allen in positiver Zeit beschränkten Lösungen, d.h. W_{lok}^+ stimmt mit der lokalen, stabilen Menge überein. Analog ist die lokal instabile Menge gleich W_{lok}^- . \square

3.1.3 Eine Anwendung stabiler Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten eine Reaktions-Diffusions-Gleichung

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{f(u(t, x))}_{\text{Reaktion}}.$$

Wir wollen sogenannte *traveling waves* finden. Eine traveling wave Lösung dieser Gleichung ist eine spezielle Lösung der Form $u(t, x) = u(x + tc)$, wobei $c \in \mathbb{R}$ die konstante Geschwindigkeit der traveling wave ist und $u(-\infty) = u_-$, $u(\infty) = u_+$ mit $f(u_{\pm}) = 0$ gelten soll. u erfüllt die DGL

$$cu' = u'' + f(u).$$

Bemerkung: Der einfachste Spezialfall ist die Kolmogorov-Petrovsky-Pisuncov (KPP) Gleichung (1937) mit $f(u) = u(1-u)$. Wir betrachten $cu' = u'' + u(1-u)$ und bekommen so ein System 1.Ordnung

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = cv - u(1-u), \end{cases}$$

Wir suchen einen heteroklinen Orbit, der die beiden Fixpunkte $(u_-, v_-) = (0, 0)$ und $(u_+, v_+) = (1, 0)$ verbindet. Außerdem wollen wir, dass $u \geq 0$ gilt, da u eine Konzentration beschreibt.

Behauptung: c muss positiv sein.

Wir multiplizieren die Gleichung für v mit v und integrieren über \mathbb{R} und erhalten so

$$c \int_{-\infty}^{\infty} v(s)^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} u'(s)u(s)(1-u(s)) ds = \int_0^1 u(1-u) du > 0.$$

Also folgt $c > 0$.

Wir linearisieren um den Fixpunkt (u_-, v_-) .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - 1}$. $\Re(\lambda_i) > 0$ und $(0, 0)$ ist eine Quelle. Für $0 < c < 2$ sind die Eigenwerte komplex und jede gegen $(0, 0)$ konvergierende Lösung läuft in Spiralen für $t \rightarrow \infty$ um $(0, 0)$. Insbesondere hat sie auch negative Werte. Dies war aber ausgeschlossen. Daher betrachten wir nur $c \geq 2$.

Die Linearisierung in $(1, 0)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{\pm} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + 1}$, d.h. $(1, 0)$ ist ein Sattelpunkt. Die beiden Eigenvektoren sind $(1, \lambda_{\pm})$. Die stabile Mannigfaltigkeit hat also im Fixpunkt $(0, 1)$ die Richtung $(1, \lambda_-)$ mit $\lambda_- < 0$.

Wir wollen den linken Teil der stabilen Mannigfaltigkeit $(u_*(t), v_*(t))$ für negatives t zurückverfolgen. Definiere dazu das Dreiecksgebiet

$$D := \left\{ (u, v) \mid 0 \leq v \leq \frac{c}{2}, u \leq \frac{c}{2} \right\}.$$

Behauptung: D ist negativ invariant.

Beweis. Wir zeigen, dass das Vektorfeld auf ∂D nicht ins Innere von D zeigt, d.h. $(u, v)' \cdot n \geq 0$, wenn n ein äußerer Normalenvektor in $(u, v) \in \partial D$ ist.

Für $v = 0$ gilt $n = (0, -1)$ und $(u', v') \cdot n = u(1 - u) \geq 0$.

Für $u = 1$ gilt $n = (1, 0)$ und $(u', v') \cdot n = v \geq 0$.

Für $v = \frac{c}{2}u$ gilt $n = (-\frac{c}{2}, 1)$ und $(u', v') \cdot n = -\frac{c}{2}v + cv - u(1 - u) = \frac{c^2}{4}u - u(1 - u) \geq 0$, da $c \geq 2$.

Damit bleibt die stabile Mannigfaltigkeit für alle negativen Zeiten in D , da D kompakt und negativ invariant ist. In D gilt aber $u' = v \geq 0$, daher existiert $\lim_{s \rightarrow \infty} u_*(s) =: \bar{u}$. Es gilt $\bar{u} \in [0, 1]$, da die stabile Menge ins Innere von D zeigt und $u' \geq 0$. Auf kompakten, invarianten α -Limesmengen gilt also

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = cv - \bar{u}(1 - \bar{u}). \end{cases}$$

Dies hat nur für $v = 0, \bar{u} = 0$ eine global beschränkte Lösung. Daher ist die α -Limesmenge genau der Fixpunkt $(0, 0)$. Damit haben wir gezeigt, dass die KPP-Gleichung genau für alle $c \geq 2$ eine eindeutige monoton wachsende, positive traveling wave Lösung besitzt. Mit demselben Beweis gilt dies auch, falls $0 < f(u) \leq uf'(0)$ für $0 < u < 1$ und $f(0) = f(1) = 0, f'(1) < 0$ gilt. \square

3.1.4 Zentrumsmannigfaltigkeit

Wir wollen jetzt invariante Mannigfaltigkeiten konstruieren, die tangential an den Zentrumseigenraum liegen.

Definition 3.17. Betrachte $y' = f(y)$, $f \in C^1(B_\delta(x_0), \mathbb{R}^n)$, $f(x_0) = 0$. Eine *Zentrumsmannigfaltigkeit* ist eine lokal invariante Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim(E^0(Df(x_0)))$, die in x_0 tangential an $E^0(Df(x_0))$ ist.

Beispiel:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = y(t)^2 \end{cases}$$

$x(t), y(t) \in \mathbb{R}$. Es gilt $E^0(Df(0)) = \{0\} \times \mathbb{R}$ und

$$\left(x(t) e^{-\frac{1}{y(t)}} \right)' = (-x(t) + x(t)) e^{\frac{1}{y(t)}} = 0,$$

d.h. für alle $k \in \mathbb{R}$ beschreibt $x(t) = k e^{1/y(t)}$ eine invariante Mannigfaltigkeit. Wegen $\lim_{y \rightarrow 0^-} (e^{1/y})^{(j)} = 0$ definiert

$$\begin{aligned} W_k &= \{(\psi_k(y), y) \mid y < 0\}, \\ \psi_k(y) &= \begin{cases} k e^{\frac{1}{y}}, & y < 0 \\ 0, & y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Insbesondere ist sie nicht eindeutig und für $k \leq 0$ nicht analytisch, da die Taylorentwicklung um 0 für alle ψ_k gleich ist. Jedes W_k enthält die global beschränkte Lösung, nämlich $(x(t), y(t)) = (0, 0)$. Diese Eigenschaften werden wir allgemein zeigen. Nach einer linearen Transformation erhalten wir

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(x, y, z), & x \in \mathbb{R}^k, \\ y'(t) = By(t) + g(x, y, z), & y \in \mathbb{R}^l, \\ z'(t) = Cz(t) + h(x, y, z), & z \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Wir stellen fest, dass $\Re(\sigma(A)) \subset (-\infty, 0)$, $\sigma(B) \subset i\mathbb{R}$, $\Re(\sigma(C)) \subset (0, \infty)$, $(f, g, h) \in C^1(\mathbb{R}^{k+l+m}, \mathbb{R}^{k+l+m})$, $(f, g, h)(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $D(f, g, h)(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Es gelte außerdem

$$\sup_{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{k+l+m}} \|D(f, g, h)(x, y, z)\| < \delta.$$

Wähle im Satz 3.13 $0 < a = \varepsilon < b \leq \min \{\Re(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(C)\}$ und erhalte eine positiv invariante C^1 -Mannigfaltigkeit

$$W_1 = \{(x, y, \psi_1(x, y)) \mid x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^l\},$$

mit $\psi_1(0, 0) = 0$, $D\psi_1(0, 0) = 0$. Anfangswerte in W_1 ergeben genau die Lösung, die höchstens wie $e^{\varepsilon t}$ für $t \geq 0$ wachsen. Betrachte nun das auf W_1 reduzierte System

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(x, y, \psi_1(x, y)), & x \in \mathbb{R}^k, \\ y'(t) = By(t) + g(x, y, \psi_1(x, y)), & y \in \mathbb{R}^l. \end{cases}$$

Wende Korollar 3.14 auf $\max \{\Re(\lambda) \mid \lambda \in \sigma(A)\} < a < b = -\varepsilon < 0$ an. Dies ergibt eine negativ invariante C^1 -Mannigfaltigkeit

$$W_2 = \{(\psi_2(y), y) \mid y \in \mathbb{R}^l\},$$

mit $\psi_2(0) = 0$, $D\psi_2(0) = 0$. Anfangswerte in W_2 ergeben genau die Lösung, die höchstens wie $e^{-t\varepsilon}$ wachsen für $t \geq 0$. Wenn man x und z zu einer neuen Variablen x zusammenfasst, haben wir den folgenden Satz gezeigt

Satz 3.18. *Betrachte*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + f(x, y), & x \in \mathbb{R}^k, \\ y'(t) = By(t) + g(x, y), & y \in \mathbb{R}^l, \end{cases}$$

$(f, g) \in C^1(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R}^{k+l})$, $(f, g)(0, 0) = (0, 0)$, $D(f, g)(0, 0) = (0, 0)$, $\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^{k+l}} \|D(f, g)\| < \delta$, $\Re(\sigma(A)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, $\Re(\sigma(B)) \subset i\mathbb{R}$

i) Falls δ hinreichend klein ist, gibt es eine eindeutige globale C^r -Zentrumsmanigfaltigkeit W in 0, die als Graph einer Funktion $\psi \in C^r(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k)$ gegeben ist.

ii) W ist die Menge aller Lösungen $(x(t), y(t))$ für die

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |(x(t), y(t))| e^{-\varepsilon|t|} < \infty$$

für alle $0 < \varepsilon < \min \{|\Re(\lambda)| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ gilt.

iii) Falls (f, g) nur lokal definiert sind, gibt es eine lokale Zentrumsmanigfaltigkeit, die aber nicht eindeutig zu sein braucht.

iv) $\psi(y)$ erfüllt

$$D\psi(y)(By + g(\psi(y), y)) = A\psi(y) + f(\psi(y), y)$$

und $\psi(0) = 0$, $D\psi(0) = 0$. Hieraus kann man die Taylorentwicklung von ψ bestimmen.

v) Der Fluss auf W ist durch $y' = By + g(\psi(y), y)$ gegeben. Diese Gleichung heißt die reduzierte Gleichung.

Beispiel: Wir betrachten

$$\begin{cases} x' = -x + ay^2 \\ y' = xy \end{cases}$$

Wir können $x = \psi(y)$ wählen und sehen, dass

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(y)}{dy} \psi(y)y &= -\psi(y) + ay^2, \\ \Leftrightarrow \frac{d\psi(y)}{dy} &= \frac{-\psi(y) + ay^2}{\psi(y)y} \end{aligned}$$

Approximiere $\psi(y) = ay^2 + o(y^3)$. Die reduzierte Gleichung lautet

$$y' = y\psi(y) = ay^3 + o(y^3),$$

d.h. 0 ist lokal stabil, falls $a < 0$ und instabil, wenn $a > 0$. Falls $a = 0$ gilt muss man eine höhere Taylorentwicklung von $\psi(y)$ berechnen. Man sieht, dass man zur Bestimmung der Stabilität ψ nicht exakt kennen muss. Meist reicht die Taylorentwicklung bis zu einer endlichen Ordnung.

Satz 3.19 (Reduktionsprinzip). *Sei der Graph von ψ eine lokale C^1 -Zentrumsmannigfaltigkeit, dann gilt*

i) *Die Differentialgleichung ist zu folgendem entkoppelten System lokal topologisch konjugiert*

$$\begin{cases} u' = Au, \\ v' = Bv + g(\psi(v), v) \end{cases} \quad (*)$$

ii) *Die Flüsse auf verschiedenen lokalen C^1 -Zentrumsmannigfaltigkeiten sind lokal topologisch konjugiert.*

iii) *Sei $\sigma(A) \subset (-\infty, 0)$. Dann ist jeder Fixpunkt in einer Umgebung von 0 genau dann lokal stabil, asymptotisch stabil oder instabil, falls dies für die reduzierte Gleichung (*) gilt.*

Beweis. ii) und iii) folgt sofort aus i).

Zum Beweis von i) benötigen wir die Existenz positiv invarianter stabiler Blätterung. Betrachte dazu ein System für $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^n$ und

$$\begin{cases} x' = Ax + f(x, y), & x \in \mathbb{R}^k, \\ y' = By + g(x, y), & y \in \mathbb{R}^l, \end{cases}$$

mit $\Re(\sigma(A)) \subset (-\infty, 0]$, $\Re(\sigma(B)) \subset [0, \infty)$, $f, g \in C^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ seien wie in Satz 3.18. Sei $\phi_t(z)$ der globale Fluss. Beachte dies ist eine andere Aufspaltung als in Satz 3.18. Definiere

$$BC_\alpha^+ := \left\{ z \in C^0([0, \infty), \mathbb{R}^n) \mid |z|_+ := \sup_{t \geq 0} |z(t)| e^{\alpha t} < \infty \right\}$$

und für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$M^+(\xi) := \left\{ \tilde{\xi} \mid \phi_t(\tilde{\xi}) - \phi_t(\xi) \in BC_\alpha^+ \right\}.$$

□

Lemma 3.20 (stabile Blätterungen). 1. $M^+(0)$ ist eine stabile Mannigfaltigkeit.

2. $\xi \in M^+(\xi)$.

3. $\phi_s(M^+(\xi)) = M^+(\phi_s(\xi))$ für $s \geq 0$.

4. Aus $M^+(\xi_1) \cap M^+(\xi_2) \neq \emptyset$ folgt $M^+(\xi_1) = M^+(\xi_2)$.

5. $M^+(\xi)$ ist ein C^1 -Graph über \mathbb{R}^k , der stetig von ξ abhängt.

6. Sei W^{0-} die negativ invariante Mannigfaltigkeit über \mathbb{R}^l (W^{0-} heißt Zentrums instabile Mannigfaltigkeit), dann ist $M^+(\xi) \cap W^{0-}$ genau ein Punkt.

Beweis. 1. – 4. sind Folgerungen aus der Definition von $M^+(\xi)$ und 6. folgt sofort. Zum Beweis von 5. sei nur die zu lösende Fixpunktgleichung angegeben. Die Kontraktionseigenschaft folgt dann genauso wie im Beweis des Satzes 3.13. Seien $\phi_t(\xi) = (x(t), y(t))$ bzw. $\phi_t(\tilde{\xi}) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$. Dann gilt

$$\begin{cases} (\tilde{x} - x)' = A(\tilde{x} - x) + f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x, y), \\ (\tilde{y} - y)' = B(\tilde{y} - y) + g(\tilde{x}, \tilde{y}) - g(x, y). \end{cases}$$

Wegen $\tilde{\xi} \in M^+(\xi)$ folgt wie in Satz 3.13

$$\tilde{x}(t) = x(t) + e^{tA}(\tilde{x}(0) - x(0)) + \int_0^t e^{(t-s)A} (f(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) - f(x(s), y(s))) \, ds,$$

$$\tilde{y}(t) = y(t) - \int_t^\infty e^{(t-s)B} (g(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) - g(x(s), y(s))) \, ds$$

Die rechten Seiten definieren den Operator $K(\tilde{x}, \tilde{y})$. Man zeigt, dass K die Menge $BC_\alpha^+ + \{(x(t), y(t))\}$ in sich abbildet und für kleines δ eine Kontraktion ist, die C^k differenzierbar von $x(0)$ und stetig von ξ abhängt. Sei $(x^*(t, x(0), \xi), y^*(t, x(0), \xi))$ der Fixpunkt und sei $\psi(x(0), \xi) := y^*(0, x(0), \xi)$. Es folgt nach Konstruktion

$$M(\xi) = \{(x, \psi(x, \xi)) \mid x \in \mathbb{R}^k\}.$$

□

Beweisskizze von Satz 3.18. Sei ϕ_t der Fluss, der ursprünglichen Differentialgleichung, wobei f, g schon lokalisiert seien und sei $\tilde{\phi}_t$ der Fluss von $(*)$. Sei ξ der Anfangswert einer Lösung $(x(t), y(t))$ Zerlege $f \in \mathbb{R}^k$ in $f = f_+ + f_-$, $f_\pm \in E^\pm(A)$. Die x Komponente der Konjugation ist explizit durch

$$Im(\xi) = x(0) - \int_{-\infty}^0 e^{(t-s)A} f_-(x(s), y(s)) \, ds + \int_t^\infty e^{(t-s)A} f_+(x(s), y(s)) \, ds$$

gegeben. Zur Konstruktion der y Komponente sei $\gamma(\xi)$ der eindeutige Punkt in $M^+(\xi) \cap W^{0-}$ und sei $\phi_{t|W^{0-}}$ der Fluss auf der invarianten Mannigfaltigkeit W^{0-} . Analog gibt es für $\xi \in W^{0-}$ eine instabile Blätterung $M^-(\tilde{\xi})$. $M^-(\tilde{\xi})$ schneidet dann die Zentrumsmanigfaltigkeit in genau einem Punkt $\tilde{\gamma}(\tilde{\xi})$. Definiere $h_2(\xi)$ als die y -Komponente von $\tilde{\gamma}(\gamma(\xi))$ und $h := (h_1, h_2)$. h ist stetig und es gilt nach Konstruktion $h(\phi_t(\xi)) = \tilde{\phi}_t(h(\xi))$. Zur Konstruktion der inversen Abbildung geht man umgekehrt vor. □

Bemerkung:

1. *i)* zeigt, dass die wesentliche Dynamik auf einer lokalen Zentrumsmannigfaltigkeit stattfindet.
2. *ii)* zeigt, dass die Dynamik auf allen lokalen Zentrumsmannigfaltigkeiten gleich ist.
3. In vielen Fällen genügt es die Taylorentwicklung von $g(\psi(y), y)$ bis zu einer geeigneten endlichen Ordnung zu bestimmen um eine qualitative Aussage über die Stabilität zu erhalten.
4. Das Beispiel $y' = ye^{-\frac{1}{y^2}}$ zeigt aber, dass eine endliche Taylorentwicklung keine Entscheidung über die Stabilität liefern muss.

3.2 Verzweigung von Fixpunkten

Definition 3.21. Betrachte eine parameterabhängige Differentialgleichung $y' = f(y, \mu)$, $y \in B_\delta^n(y_0) \subset \mathbb{R}^n$, $\mu \in B_\delta^m(\mu_0) \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(B_\delta^n(y_0) \times B_\delta^m(\mu_0), \mathbb{R}^n)$ mit dem lokalen Fluss ϕ_t^μ . (μ_0, y_0) heißt ein Verzweigungspunkt, falls es in jeder Umgebung von μ_0 ein μ gibt, sodass ϕ_t^μ und $\phi_t^{\mu_0}$ nicht lokal um y_0 topologisch konjugiert sind.

Beispiel: Betrachte $x' = x^2 + \lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Die dazugehörigen stationären Punkte sind

$$\begin{cases} \bar{x} = \pm\sqrt{|\lambda|}, & \lambda < 0 \\ \bar{x} = 0, & \lambda = 0 \\ \text{keine}, & \lambda > 0 \end{cases}$$

Das assoziierte Anfangswertproblem mit $x(0) = 0$ lässt sich nicht durch Separation der Variablen lösen.

Für $\lambda < 0$ ergibt sich als Lösung

$$x(t) = -\sqrt{|\lambda|} \tanh\left(t\sqrt{|\lambda|}\right) = -\sqrt{|\lambda|} \frac{e^{t\sqrt{|\lambda|}} - e^{-t\sqrt{|\lambda|}}}{e^{t\sqrt{|\lambda|}} + e^{-t\sqrt{|\lambda|}}}.$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich $x(t) = 0$.

Für $\lambda > 0$ ergibt sich $x(t) = \sqrt{|\lambda|} \tan\left(t\sqrt{|\lambda|}\right)$.

Beispiel: Wir betrachten $y' = f(y, \mu)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$, $f(0, 0) = 0$, $D_y f(0, 0)$ sei hyperbolisch. Der Satz über impliziten Funktion liefert lokal eine eindeutige C^1 -Funktion $\gamma(\mu)$ mit $f(\gamma(\mu), \mu) = 0$. Die Menge der hyperbolischen Matrizen ist offen, das heißt, für keine μ ändert sich die stabilen und instabilen Dimensionen $\dim(E^\pm(D_y f(\gamma(\mu), \mu)))$ nicht. Die Flüsse sind dann für kleines μ lokal konjugiert und $\mu = 0$ ist kein Verzweigungspunkt. Daher ist es notwendig für eine Verzweigung an einem Fixpunkt, dass die Linearisierung in einem Verzweigungspunkt nicht hyperbolisch ist.

Sei nun y_0 kein hyperbolischer Fixpunkt für $\mu = \mu_0$. Man könnte nun das System für $\mu = \mu_0$ auf seine Zentrumsmannigfaltigkeit reduzieren. Dies hilft aber nicht um das Verhalten für $\mu \neq \mu_0$ zu untersuchen. Auch muss das System für $\mu \neq \mu_0$ nicht einmal einen Fixpunkt besitzen. Dies zeigt die Gleichung $y' = y^2 - \mu$ in \mathbb{R}^1 .

Daher betrachtet man in der Nähe eines Verzweigungspunktes $(y_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ das erweiterte System

$$\begin{cases} y' = f(y, \mu) \\ \mu' = 0 \end{cases}$$

mit $f(y_0, \mu_0) = 0$ und einer nicht hyperbolischen Linearisierung $A := D_y f(y_0, \mu_0)$. Die Dimension des Zentrumseigenraums $E^0(A)$ sei $k > 0$. Sei $y = x + z$ die Zerlegung mit $x \in E^0(A)$, $z \in E^+(A) \oplus E^-(A)$. Das erweiterte System hat dann eine $k + m$ dimensionale lokale Zentrumsmannigfaltigkeit, die als Graph einer Funktion $z = \psi(x, \mu)$ gegeben ist. Die reduzierte Gleichung lautet

$$x' = P_0(x + \psi(x, \mu), \mu), \quad \mu' = 0,$$

wobei P_0 die Projektion auf $E^0(A)$ ist. Dieses System beschreibt für alle μ in einer Umgebung von μ_0 alle kleinen globalen Lösungen des ursprünglichen Systems. Wenn man noch die Gleichung

$$z' = (I - P_0)f$$

hinzufigt, ist das System für (x, z, μ) lokal topologisch konjugiert zu dem ursprünglichen System. Diese Konjugation bildet μ auf sich ab. Daher sind die Flüsse für festes μ auch lokal topologisch konjugiert. Wir wollen zunächst den einfachsten Fall $k = 1$ und $m = 1$ in drei Variablen untersuchen. Der Eigenwert von A auf der imaginären Achse muss dann gleich 0 sein, da imaginäre Eigenwerte immer als konjugierte Paare auftreten. Die induzierte Gleichung für x ist dann eindimensional und einfach zu analysieren.

Sattel-Knoten Verzweigung

Der einfachste Fall eines nicht hyperbolischen Fixpunkts ist das Auftreten eines einzigen, einfachen Eigenwerts auf der imaginären Achse. Dies ist nur dann möglich, falls dieser Eigenwert gleich 0 ist. Zunächst betrachten wir folgenden Fall im \mathbb{R}^1 .

$$y'(t) = y(t)^2 - \mu$$

mit $y(t) \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\mu_0 = y_0 = 0$. Für $\mu = 0$ ist $\bar{y} = 0$ nicht hyperbolisch. Für $\mu < 0$ existiert kein Fixpunkt und für $\mu > 0$ existiert ein stabiler und instabiler Fixpunkt $\bar{\mu} = \bar{y}_{\pm}^2$, die durch einen heteroklinen Orbit verbunden sind, d.h. $(y_0, \mu_0) = (0, 0)$ ist ein Verzweigungspunkt. Daher kommt der Name der Verzweigung, da im 2-dimensionalen der eine Fixpunkt ein Knoten und der andere Fixpunkt ein Sattel sein muss.

Im Folgenden werden wir dies durch eine Reduktion auf die Zentrumsmannigfaltigkeit auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Wir nehmen für ein System im \mathbb{R}^n an, dass die Linearisierung im Fixpunkt 0 für $\mu = 0$ einen einfachen Eigenwert Null hat. Nach einer linearen Transformation hat das System dann die Form

$$\begin{cases} x' = Ax + a\mu + f(x, y, \mu), & x \in \mathbb{R}^{n-1} \\ y' = b\mu + g(x, y, \mu), & y \in \mathbb{R} \\ \mu' = 0, & \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (**)$$

Hierbei sind $f, g \in C^2$, $(f, g)(0, 0, 0) = (0, 0)$, $D(f, g)(0, 0, 0) = (0, 0)$. A ist eine hyperbolische $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrix, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b \in \mathbb{R}$. Beachte, dass man

jetzt auch bezüglich μ linear sein muss, da μ auch eine Variable ist. Wir nehmen $b \neq 0$ und $\partial_{yy}g(0,0) \neq 0$ an. Im obigen Beispiel ist $b = -1$ und $g(y, \mu) = y^2$. Die Linearisierung im Fixpunkt $(0, 0, 0)$ ist

$$\begin{pmatrix} A & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und hat den 2-dimensionalen Zentrumseigenraum $\{(0, y, \mu) \mid y, \mu \in \mathbb{R}^1\}$. Es gibt eine 2-dimensionale lokale C^2 -Zentrumsmanifoldigkeit $M = \text{Graph}(\psi(y, \mu))$. Der Fluss auf M ist durch das reduzierte System gegeben

$$\begin{cases} y' = b\mu + g(\psi(y, \mu), y, \mu) =: G(y, \mu), \\ \mu' = 0. \end{cases}$$

Wir suchen zunächst Fixpunkte für die reduzierte Gleichung in der Form $\mu = \gamma(y)$. Da $\partial_\mu G(0,0) = b \neq 0$ gilt, gibt es eine differenzierbare Funktion $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G(y, \gamma(y)) = 0, \gamma(0) = 0$. Es folgt

$$0 = \frac{d}{dy} G(y, \gamma(y)) = \partial_y G(y, \gamma(y)) + \partial_\mu G(y, \gamma(y)) \cdot \gamma'(y).$$

Für $y = 0$ folgt $b\gamma'(0) = 0$, d.h. $\gamma'(0) = 0$. Nochmaliges Differenzieren ergibt

$$\begin{aligned} \partial_{yy} G(y, \gamma(y)) + 2\partial_{y\mu} G(y, \gamma(y)) \cdot \gamma'(y) + \partial_{\mu\mu} G(y, \gamma(y)) \cdot (\gamma'(y))^2 \\ + \partial_\mu G(y, \gamma(y)) \cdot \gamma''(y) = 0 \end{aligned}$$

$\gamma''(0) = \frac{-\partial_{yy}g(0,0,0)}{b}$. Dies ist ungleich 0, da $\partial_{yy}g(0,0,0) \neq 0$ vorausgesetzt war. Dann gibt es genau zwei Fixpunkte $y_+ > 0 > y_-$ für $\mu > 0$ und keine für $\mu < 0$, falls $\gamma''(0) > 0$. Umgekehrt, falls $\gamma''(0) < 0$. Der erste Fall heißt *superkritische* und der zweite *subkritische Verzweigung*. y_+, y_- sind durch einen heteroklinen Orbit verbunden, da die reduzierte Gleichung für festes μ 1-dimensional ist. Zur Bestimmung der Stabilität von y_\pm berechnet man

$$\frac{d}{dy} \partial_y G(y, \gamma(y))|_{y=0} = -b\gamma''(0) = \partial_{yy}g(0,0) \neq 0.$$

Falls $\partial_{yy}g(0,0) > 0$ gilt, dann ist $\partial_y G(y, \gamma(y))$ positiv für $y > 0$ und negativ für $y < 0$, d.h. y_+ ist instabil in der Zentrumsmanifoldigkeit und y_- ist stabil. Andernfalls ist es umgekehrt. Falls $\Re(\sigma(A)) \subset (-\infty, 0)$ gelten die Stabilitätsaussagen auch für das volle System. Die Existenz des heteroklinen Orbits gilt ohne diese Einschränkung auch für das volle System. Wir können die Aussagen im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 3.22. *Für das System (**) gelte $(F, G) \in C^2(B_\delta(0) \times B_\delta(0), \mathbb{R}^{n-1})$ und $(f, g)(0, 0, 0) = (0, 0), D(f, g)(0, 0, 0) = (0, 0)$. Außerdem sei A hyperbolisch. Weiter gelte $b \neq 0$ und $\partial_{yy}g(0, 0, 0) \neq 0$. Falls $\frac{\partial_{yy}g(0,0,0)}{b} > 0$ gilt, dann existieren für $\mu > 0$ genau zwei Fixpunkte, die durch einen heteroklinen Orbit verbunden sind. Für $\mu < 0$ existieren keine Fixpunkte. Falls $\frac{\partial_{yy}g(0,0,0)}{b} < 0$ gilt, existieren für $\mu < 0$ genau zwei Fixpunkte, die durch einen heteroklinen Orbit verbunden sind und für $\mu > 0$ existieren keine Fixpunkte.*

3.2.1 Transkritische Verzweigung

Beispiel: Betrachte

$$y' = \mu y + y^2 =: f(\mu, y), \quad y \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Man sieht, dass $f(0, 0) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(\mu, y)|_{(0,0)} = \mu + 2y|_{(0,0)} = 0$. Die Fixpunkte sind $\bar{y} = 0$ oder $\bar{y} = -\mu$. Für $\mu \neq 0$ gibt es zwei Fixpunkte, die bei $\mu = 0$ im nicht hyperbolischen Fixpunkt $\bar{y} = 0$ zusammenfallen und ihre Stabilität austauschen.

Für $\mu < 0$ ist $\bar{y} = 0$ stabil und $\bar{y} = -\mu$ instabil.

Für $\mu > 0$ ist $\bar{y} = 0$ instabil und $\bar{y} = -\mu$ stabil.

Bemerkung: Die Anzahl der Fixpunkte ändert sich nicht durch den Parameter μ .

Der allgemeine Fall im \mathbb{R}^n ist

$$y' = f(y, \mu), \quad y \in B_\delta^n(0) \subset \mathbb{R}^n, \mu \in B_\delta^1(0) \subset \mathbb{R},$$

mit $f \in C^1(B_\delta^n(0) \times B_\delta^1(0), \mathbb{R}^n)$. Wir nehmen an, dass es für alle kleinen p eine Kurve von Fixpunkten (Zweig) $\alpha \in C^2((-\delta, \delta), \mathbb{R}^n)$ gibt, sodass $f(\alpha(\mu), \mu) = 0$. Dann erfüllt $\tilde{y} = y - \alpha(\mu)$ die DGL

$$\tilde{y}' = f(\tilde{y} + \alpha(\mu), \mu) =: \tilde{f}(\tilde{y}, \mu).$$

Wir können also annehmen, dass $f(0, \mu) = 0$ für alle $\mu \in B_\delta^1(0)$. Für $\mu = 0$ sei 0 der einzige Eigenwert, der Jacobimatrix $Df(0, 0)$, der auf der imaginären Achse liegt und sei 0 ein einfacher Eigenwert. Nach einer linearen Transformation habe das System die Form

$$\begin{cases} x' = Ax + f(x, y, \mu), & x \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ y' = g(x, y, \mu), & y \in \mathbb{R}, \\ \mu' = 0, & \mu \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.1)$$

mit $f \in C^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^{n-1})$, $g \in C^2(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften $f(0, 0, \mu) = 0$, $g(0, 0, \mu) = 0$, $Df(0, 0, 0) = 0$, $Dg(0, 0, 0) = 0$ und A sei hyperbolisch. Wir nehmen zusätzlich noch an, dass

$$\partial_{yy}g(0, 0, 0) \neq 0, \quad \partial_{\mu y}g(0, 0, 0) \neq 0. \quad (3.2)$$

Dann gibt es, wie bei der Sattel-Knoten Verzweigung, eine zweidimensionale lokale Zentrumsmanigfaltigkeit

$$M = \{(\psi(y, \mu), y, \mu) \mid y \in B_\delta(0) \subset \mathbb{R}, \mu \in B_\delta(0) \subset \mathbb{R}\},$$

die alle kleinen globalen Lösungen enthält. Insbesondere muss $\psi(0, \mu) = 0$ gelten. Dazu gilt

$$y' = g(\psi(y, \mu), y, \mu) =: yh(y, \mu). \quad (3.3)$$

Aus der Definition von $h(y, \mu)$ ergibt sich

$$h(y, \mu) = \begin{cases} \frac{g(\psi(y, \mu), y, \mu)}{y}, & y \neq 0 \\ \partial_y g(0, 0, \mu), & y = 0 \end{cases}$$

insbesondere ist $h(y, \mu)$ stetig differenzierbar. Aus (3.3) sehen wir, dass $y = 0$ eine Kurve von Fixpunkten ist. Wir möchten eine zusätzliche Kurve von Fixpunkten haben, die durch $(y, \mu) = (0, 0)$ geht. Um eine solche Kurve zu bestimmen brauchen wir Bedingungen an die Ableitungen von $h(y, \mu)$, die wiederum durch Ableitungen von $g(x, y, \mu)$ dargestellt werden können. Wir haben

$$\begin{aligned} h(0, 0) &= \partial_y g(0, 0, 0) = 0, \\ \partial_y h(y, \mu)|_{(0,0)} &= \partial_{yy} g(0, 0, 0) \stackrel{(3.2)}{\neq} 0, \\ \partial_\mu h(y, \mu)|_{(0,0)} &= \partial_{\mu y} g(0, 0, 0) \stackrel{(3.2)}{\neq} 0. \end{aligned}$$

Da $\partial_\mu h(y, \mu) \neq 0$ wechselt die Stabilität von $y = 0$ in der Zentrumsmanigfaltigkeit bei $\mu = 0$. Außerdem gilt $h(0, \mu) = \partial_y g(0, 0, \mu) = 0$ und es gibt (lokal) eine eindeutige C^1 -Funktion $\gamma(y)$, sodass $h(y, \gamma(y)) = 0$. Diese existiert wegen des Satzes über implizite Funktionen. Wir wollen, dass $\gamma(y) \neq 0$, also wollen wir eine Kurve von Fixpunkten, die nicht identisch Null sind ($\bar{y} = 0$ haben wir bereits gefunden). Um eine Kurve $\gamma(y) \neq 0$ in einer Umgebung von der Null zu bestimmen benötigen wir die Bedingung

$$0 < \left| \frac{\partial}{\partial y} \gamma(y)|_{y=0} \right| < \infty.$$

Aus

$$0 = Dh(y, \gamma(y)) = \partial_y h(y, \gamma(y)) + \partial_\mu h(y, \gamma(y)) \gamma'(y)$$

erhalten wir

$$\gamma'(0) = -\frac{\partial_y h(0, 0)}{\partial_\mu h(0, 0)} = -\frac{\partial_{yy} g(0, 0, 0)}{\partial_{\mu y} g(0, 0, 0)} \stackrel{(3.2)}{\neq} 0.$$

Also, in einer Umgebung der Null gibt es genau einen weiteren Fixpunkt ungleich Null für alle $\mu \neq 0$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} Dg(\psi(y, \gamma(y)), y, \gamma(y)) &= \partial_x g(x, y, \mu) (\partial_y \psi(y, \gamma(y)) + \gamma'(y) \psi(y, \gamma(y))) \\ &\quad + \partial_y g(x, y, \mu) + \partial_\mu g(x, y, \mu) \gamma'(y), \\ D^2 g(\psi(y, \gamma(y)), y, \gamma(y))|_{y=0} &= \dots = -\partial_{yy} g(0, 0, 0), \end{aligned}$$

d.h. die Kurve $(y, \gamma(y))$ hat bei $y = 0$ den entgegengesetzten Stabilitätswechsel wie $(0, \mu)$. Weiter sind die beiden Punkte $\mu \neq 0$ durch einen heteroklinen Orbit verbunden.

Satz 3.23. *Betrachte das System (3.1) mit den dazugehörigen Voraussetzungen an die rechte Seite zusammen mit der Annahme (3.2), dann verzweigt bei $(x, y, \mu) = (0, 0, 0)$ genau eine Kurve von Fixpunkten $\gamma(\mu) \neq 0$. Für festes μ gibt es genau einen heteroklinen Orbit zwischen 0 und $\gamma(\mu)$. In der Zentrumsmanigfaltigkeit wechselt die Stabilität der beiden Zweige.*

3.2.2 Pitchfork Verzweigung

Beispiel: Betrachte

$$y' = f(y, \mu) = \mu y - y^3, \quad y \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Man sieht, dass $f(0,0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(y, \mu)|_{(0,0)} = 0$ (also ist $(0,0)$ ein nicht hyperbolischer Punkt). Außerdem sind $\bar{y} = 0$ und $\bar{y}^2 = \mu$ Fixpunkte. Das heißt, für $\mu < 0$ existiert genau ein Fixpunkt, nämlich $\bar{y} = 0$ und dieser ist stabil. Für $\mu = 0$ entstehen zwei neue Fixpunkte, die für $\mu \geq 0$ durch $\bar{y} = \pm\sqrt{\mu}$ gegeben sind. Mit $\frac{\partial f}{\partial y}(y, \mu) = \mu - 3y^2$ sieht man, dass für $\mu > 0$ der Punkt $(0, \mu)$ instabil wird und die Punkte $(\pm\sqrt{\mu}, \mu)$ Stabilität gewinnt.

Der allgemeine Fall im \mathbb{R}^n ist

$$y' = f(y, \mu), \quad y \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R},$$

wobei $f \in C^3(B_\delta^n(0) \times B_\delta^1(0), \mathbb{R}^n)$ mit $f(-y, \mu) = -f(y, \mu)$ und $f(0, \mu) = 0$ für alle $\mu \in B_\delta^1(0)$. Außerdem habe $D_y f(y, \mu)$ einen einfachen Eigenwert 0. Nach einer linearen Transformation erhält man das System

$$\begin{cases} x' = Ax + f(x, y, \mu), & x \in \mathbb{R}^{n-1}, \\ y' = g(x, y, \mu), & y \in \mathbb{R}, \\ \mu' = 0, & \mu \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.4)$$

mit $f, g \in C^3$ und

$$\begin{aligned} f(-x, -y, \mu) &= -f(x, y, \mu), \\ g(-x, -y, \mu) &= -g(x, y, \mu), \\ Df(0, 0, 0) &= Dg(0, 0, 0) = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

und A sei invertierbar. Es gelte zusätzlich

$$\begin{aligned} \partial_{y\mu} g(0, 0, 0) &\neq 0, \\ \partial_{yy} g(0, 0, 0) &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wie bei der transkritischen Verzweigung gibt es eine lokale zweidimensionale Zentrumsmannigfaltigkeit $x = \psi(y, \mu)$. Diese kann so gewählt werden, dass $\psi(-y, \mu) = -\psi(y, \mu)$. Insbesondere gilt $\psi(0, \mu) = 0$. Wir nehmen an, dass es eine Funktion h gibt, sodass

$$y' = g(\psi(y, \mu), y, \mu) = yh(y, \mu).$$

Wieder haben wir

$$h(y, \mu) = \begin{cases} \frac{g(\psi(y, \mu), y, \mu)}{y}, & y \neq 0, \\ \partial_y g(\psi(y, \mu), y, \mu), & y = 0. \end{cases}$$

Wir haben $h(0, 0) = 0$ und

$$\partial_\mu h(y, \mu)|_{(0,0)} = \partial_\mu \partial_y g(\psi(0, 0), 0, 0) \stackrel{(3.6)}{\neq} 0 \quad (3.7)$$

Mit dem Satz über implizite Funktionen finden wir genau eine C^1 -Kurve $\gamma(y)$, sodass $h(y, \gamma(y)) = 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= -\frac{\partial_y h(y, \mu)}{\partial_\mu h(y, \mu)|_{(0,0)}} = -\frac{\partial_{yy} g(0, 0, 0)}{\partial_{y\mu} g(0, 0, 0)} = 0, \\ \gamma''(0) &= -\frac{\partial_{yy} h(0, 0)}{\partial_\mu h(0, 0)} = -\frac{\partial_{yyy} g(0, 0, 0)}{\partial_{y\mu} g(0, 0, 0)} \neq 0. \end{aligned}$$

Abhängig vom Vorzeichen von $\gamma''(0)$ können wir die Richtung der Verzweigung bestimmen. Bei $\mu = 0$ findet ein Stabilitätswechsel des Fixpunktes $\bar{y} = 0$ statt. Die neuen Fixpunkte haben die entgegengesetzte Stabilität von $\bar{y} = 0$. Zwischen den neuen Fixpunkten und 0 existiert jeweils ein eindeutiger heterokliner Orbit.

3.3 Verzweigung von Fixpunkten bei Iterationen

Betrachte \mathbb{R}^n : $y_{n+1} = f(y_n, \mu)$ mit $f \in C^1(B_\delta^n(0) \times B_\delta^m(0), \mathbb{R}^n)$, $f(0, 0) = 0$. Falls $D_y f(0, 0)$ hyperbolisch ist, dann ist $D_y f(0, 0) - I$ invertierbar und es existiert lokal ein eindeutiger Zweig von hyperbolischen Fixpunkten $(\gamma(\mu), \mu)$ und es tritt keine Verzweigung auf.

Die Linearisierung in einem nicht hyperbolischen Fixpunkt habe einen 1-dimensionalen Zentrumsraum. Nach einer geeigneten linearen Transformation hat die Iteration der Form

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + f(x_k, y_k, \mu), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, \\ y_{k+1} &= By_k + g(x_k, y_k, \mu), \quad y_k \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Zur Reduktion auf eine Zentrumsmanigfaltigkeit fügt man die Gleichung $\mu_{k+1} = \mu_k$ hinzu. Eine Zentrumsmanigfaltigkeit erhält man in der Form $x_k = \psi(y_k, \mu)$ und ψ erfüllt

$$\psi(By + g(\psi(y, \mu), y, \mu)) = A\psi(y) + f(\psi(y, \mu), y, \mu),$$

mit $\psi(0) = 0$ und $D\psi(0, 0) = 0$. Auf der Zentrumsmanigfaltigkeit gilt

$$y_{k+1} = By_k + g(\psi(y_k, \mu), \mu).$$

Wir betrachten zunächst wieder den Fall eines eindimensionalen Zentrumsraums für $(y, \mu) = (0, 0)$. Dann gibt es genau einen einfachen reellen Eigenwert vom Betrag eins. Dieser muss dann entweder gleich 1 oder -1 sein.

3.3.1 Sattel-Knoten-Verzweigung

Sei 1 einziger Eigenwert vom Betrag eins und sei 1 einfach.

Beispiel in \mathbb{R}^1 :

$$y_{k+1} = f(y_k, \mu) = y_k + y_k^2 - \mu$$

mit $(y_\mu) = (0, 0)$ ist ein Verzweigungspunkt. $D_y f$ in dem Verzweigungspunkt ist gleich 1. Für $\mu < 0$ gibt es keine Fixpunkte und für $\mu > 0$ zwei $y_\pm = \sqrt{\mu}$. Es gilt $f'(y_\pm) = 1 \pm 2\sqrt{\mu}$. y_+ ist instabil, y_- ist lokal stabil ($0 < \mu < 1$).

Sei $0 < \mu < \frac{1}{4}$. Für $y \in (-y_+, y_+)$ gilt $y_- < f(y) < y$ und daher $f^k(y) \rightarrow y_-$. Für Systeme mit einem einfachen Eigenwert 1 für $\mu = 0$ gilt nach einer linearen Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + a\mu + f(x_k, y_k, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ y_{k+1} &= y_k + \alpha\mu + g(x_k, y_k, \mu), \quad y \in \mathbb{R}, \\ \mu_{k+1} &= \mu_k. \end{aligned}$$

Auf der Zentrumsmanigfaltigkeit gilt die Iteration

$$y_{k+1} = y_k + \alpha\mu + g(\psi(y_k, \mu), y_k, \mu) =: G(y_k, \mu).$$

Sei $\alpha \neq 0$ und $\partial_{yy}g(0, 0, 0) \neq 0$, dann gelten dieselben Aussagen wie im obigen Standardbeispiel. Man kann zeigen, dass es auf der Zentrumsmanigfaltigkeit eine Konjugation zu $y_{k+1} = y_k + \mu \pm y_k^2$ gibt.

3.3.2 Periodenverdopplung oder Flip-Verzweigung

Sei -1 einziger Eigenwert mit Betrag eins und sei -1 einfach. Dann ist $D_y f(0, 0) - I$ invertierbar und es existiert ein eindeutiger lokaler Zweig von Fixpunkten für kleines μ , d.h. die Anzahl der Fixpunkte ändert sich nicht. Durch eine Translation kann man erreichen, dass der Fixpunkt für alle μ gleich 0 ist, d.h. $f(0, \mu) = 0$ gilt.

Beispiel in \mathbb{R}^1 :

$$y_{k+1} = f(y_k) = -y_k(1 + \mu) + y_k^3.$$

$y = 0$ ist einziger Fixpunkt falls μ klein genug ist. Es gilt $\partial_y f(0, \mu) = -1 - \mu$. Daher ist 0 lokal stabil für $\mu < 0$ und instabil für $\mu > 0$. Für $\mu > 0$ gilt $f(\sqrt{\mu}) = -\sqrt{\mu}$ und $f(-\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$, d.h. f hat einen periodischen Orbit der Periode 2, bzw. f^2 hat zwei weitere Fixpunkte.

$$f^2(y, \mu) = -(1 + \mu)f(y, \mu) + f(y, \mu)^3 = (1 + \mu)^2 y - (1 + \mu)(2 + 2\mu + \mu^2)y^3 + O(y^5).$$

Für kleines μ folgt, dass $0, \sqrt{\mu}$ und $-\sqrt{\mu}$ alle Fixpunkte von f^2 sind.

$$\partial_y f^2(\pm\sqrt{\mu}, \mu) = \partial_y f(-\sqrt{\mu}, \mu) \partial_y f(-\sqrt{\mu}, \mu) = (-1 + 2\mu)^2 < 1,$$

falls $0 < \mu < 1$, d.h. y_{\pm} sind lokal stabile Fixpunkte für f^2 .

Aus $0 < |y| < \mu$ folgt $|y| < |f(y)| < \mu$ und aus $|y| > \mu$ folgt $|y| > |f(y)| > \mu$. Dies bedeutet für die Ω -Limesmenge $\Omega(y) = y_{\pm}, y \neq 0$. Für kleine μ sind $\{f^n(y) | n \in \mathbb{Z}\}$ mit $|y| \leq \sqrt{\mu}$ also alle global beschränkten Orbits. Sei nun

$$y_{k+1} = -y_k + g(\psi(x_k), y_k, \mu) =: G(y_k, \mu)$$

die reduzierte Gleichung auf der Zentrumsmanigfaltigkeit eines System mit einem einfachen Eigenwert -1 . Dasselbe qualitative Verhalten wie im Standardfall liegt unter folgenden Voraussetzungen vor:

$$\frac{1}{2}(\partial_{yy}G(0, 0))^2 + \frac{1}{3}\partial_{yyy}G(0, 0) \neq 0, \quad \partial_{y\mu}G(0, 0) \neq 0.$$

Man kann zeigen, dass in diesem Fall die Iteration auf der Zentrumsmanigfaltigkeit zum Standardfall lokal topologisch konjugiert ist.

3.4 Zweidimensionale Zentrumsräume

3.4.1 Hopf-Verzweigung

In einem kontinuierlichem System treten zweidimensionale Zentrumsräume auf, wenn ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte die imaginäre Achse kreuzen.

Beispiel:

$$y' = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} y - (y_1^2 + y_2^2)y$$

und in Polarkoordinaten $y = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, $r' = \mu r - r^3$, $\theta' = 1$.

Die Linearisierung in $y = 0$ hat die Eigenwerte $\mu \pm i$. Für $\mu \leq 0$ ist $r = 0$ stabil und für $\mu > 0$ instabil. Falls $\mu > 0$ gilt, dann existiert ein periodischer Orbit $r = \sqrt{\mu}$. Unter geeigneten Bedingungen lässt sich der n -dimensionale Fall zum Standardfall lokal topologisch konjugieren, falls man noch die Zeit reparametrisiert. Dies ist nötig damit die Periode konjugierter periodischer Orbits übereinstimmt. Im Allgemeinen hängt die Periode von μ ab. Dies ist eine wichtige Methode die Existenz periodischer Orbits zu zeigen.

3.5 Lyapunov-Stabilität

Falls die Linearisierung keine Aussage ermöglicht, kann die folgende Methode unter Umständen die Stabilität liefern. Außerdem dient diese Methode unter Umständen dem Auffinden von Ω -Limes Mengen. Wir betrachten das n -dimensionale System

$$\dot{y} = f(y).$$

Ziel ist es eine Funktion L zu finden, die entlang von Lösungen nicht anwächst. In mechanischen Systemen mit Reibung ist dies die Energie. In abgeschlossenen thermodynamischen Systemen ist dies die negative Energie. Im Allgemeinen ist es aber nicht einfach eine solche Funktion, falls sie existiert, explizit anzugeben. Falls L differenzierbar ist, dann ist $L(y(t))$ entlang einer Lösung $y(t)$ genau dann nicht wachsend, wenn

$$\frac{d}{dt}L(x(t)) = \nabla L(x(t)) \cdot f(x(t)) \leq 0$$

gilt.

Definition 3.24. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ lokal Lipschitz-stetig. Eine Lyapunovfunktion für $\dot{y} = f(y)$ ist eine Funktion $L \in C^1(U, [0, \infty))$ mit

$$\nabla L(x) \cdot f(x) \leq 0, \quad \text{für } x \in U.$$

Falls sogar

$$\nabla L(x) \cdot f(x) < 0$$

für alle x mit $f(x) \neq 0$ gilt, dann heißt L eine strikte Lyapunovfunktion, d.h. $L(y(t))$ fällt, falls $y(t)$ kein Fixpunkt ist.

Bemerkung: Die Existenz einer strikten Lyapunovfunktion schließt sogenanntes rekurrentes Verhalten aus: Falls $x \in \omega(x)$ gilt, dann folgt x ist ein Fixpunkt. Insbesondere gibt es dann keine periodischen Orbits, keine homoklinen Orbits und kein "Chaos".

Satz 3.25. Sei x_0 Fixpunkt.

- Falls es eine Lyapunovfunktion auf einer offenen Umgebung U von x_0 gibt mit $L(x_0) = 0$, $L(x) > 0$ für $x \neq x_0$, dann ist x_0 stabil.

- Falls es eine strikte Lyapunovfunktion auf einer offenen Umgebung U von x_0 gibt mit $L(x_0) = 0, L(x) > 0$ für $x \neq x_0$ und $L'(x) < 0$, dann ist x_0 asymptotisch stabil.

Beweis. Sei $\overline{B_\delta(x_0)} \subset U$. Wegen $L(x) > 0$ für $x \neq x_0$ gilt $m := \min_{x \in \partial B_\delta(x_0)} L(x) >$

0. Definiere

$$V := \{x \in B_\delta(x_0) \mid L(x) < m\}.$$

Da L nicht wächst, gilt $L(\phi(t, x)) \leq L(x) < m$ für $x \in V$ solange $\phi(t, x)$ existiert. Da $L(y) \geq m$ falls $|y| = \delta$ muss $\phi(t, x) \in B_\delta(x_0)$ gelten für alle $t \geq 0$. Damit ist x_0 stabil.

Sei $x \in V$. $\phi(t, x) \in B_\delta(x_0)$ existiert für alle $t \geq 0$ und $\omega(x)$ ist nicht leer. Sei $y \in \omega(x)$, dann existiert $t_n \rightarrow \infty$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = y$. Wegen der Monotonie von $L(\phi(t, x)) \geq 0$ existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} L(\phi(t, x)) =: l$ und es folgt $l = L(y)$. Angenommen, es wäre $L(y) > 0$, dann folgt $y \neq x_0$ und $L(\phi(t, y)) < L(y)$. Weiter folgt $L(y) = l = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\phi(t_n + t, x)) = L(\phi(t, y)) < L(y) = l$. Das bedeutet, es gilt $L(y) = 0$ und $y = x_0$ nach Voraussetzung, d.h. x_0 ist asymptotisch stabil. \square

Das Argument für den zweiten Teil des Beweises zeigt sogar folgende Verallgemeinerung und erlaubt oft die Bestimmung der ω -Limesmengen.

Satz 3.26 (Invarianzprinzip von LaSalle). *Sei $L \in C^1(U, [0, \infty))$ eine Lyapunovfunktion und sei $K \subset U$ eine kompakte, positiv invariante Menge, dann gilt für $x \in K$: L ist konstant auf $\omega(x)$. Insbesondere gilt für $y \in \omega(x)$*

$$\nabla L(y) \cdot f(y) = 0.$$

Beispiele:

1. *Newtons Gesetz für einen Massenpunkt in einem Potential mit Reibung:*
Sei $x \in \mathbb{R}^3$. Das Potential $V \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ erfülle $V(x) \geq 0, \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$. Für die Reibung gilt $\delta \geq 0$.

$$\ddot{x} = -\nabla_x V(x) - \delta \dot{x}$$

oder als System 1. Ordnung

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -\nabla_x V(x) - \delta y.$$

Die Energie des Systems ist

$$L(x, y) = \frac{1}{2} |y|^2 + V(x)$$

mit

$$\nabla_{x,y} L(x, y) \cdot f(x, y) = (\nabla_x V(x), y) \cdot (y, -\nabla_x V(x) - \delta y) = -\delta |y|^2 \leq 0.$$

L ist eine Lyapunovfunktion falls $\delta = 0$ gilt und eine strikte Lyapunovfunktion im Fall $\delta > 0$. Die Mengen $\{(x, y) \mid L(x, y) \leq L_0\}$ sind kompakt und positiv invariant, d.h. Lösungen existieren für alle $t \geq 0$. Sei $\delta > 0$.

Nach dem Satz von LaSalle 3.26 gilt $\omega((x_0, y_0)) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$, d.h. für Lösungen in $\omega(x_0, y_0)$ gilt

$$\dot{x} = 0, \dot{y} = 0 = -\nabla_x V(x),$$

d.h. x ist konstant und $\nabla V(x) = 0$ und $\omega(x_0, y_0)$ besteht nur aus Fixpunkten. Falls die Menge der kritischen Punkte von V diskret oder sogar endlich ist, dann besteht $\omega(x_0, y_0)$ aus genau einem Fixpunkt.

2. *Gradientensysteme:* Bei einem Gradientensystem ist die rechte Seite einer DGL Gradient einer Funktion (Potential) $V \in C^2(U, \mathbb{R})$:

$$\dot{y}(t) = -\nabla_y V(y(t)).$$

Für $L(y) := V(y)$ gilt dann

$$\frac{d}{dt} L(y(t)) = -|\nabla_y V(y(t))|^2 \leq 0,$$

d.h. L ist eine strikte Lyapunovfunktion. Gilt $U = \mathbb{R}^n, V(y) \geq 0$ und $\lim_{|y| \rightarrow \infty} V(y) = \infty$, dann sind alle Lösungen global. Sind zusätzlich die kritischen Punkte von V isoliert, dann konvergiert jede Lösung gegen einen Fixpunkt.

Definition 3.27. Falls für eine Funktion $L \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\nabla_x L(x) \cdot f(x) = 0, \quad x \in U,$$

dann heißt L ein erstes Integral der Differentialgleichung.

Die Mengen $M(L_0) = \{x \in U \mid L(x) = L_0\}$ sind dann invariant und das dynamische System auf $M(L_0)$ hat eine Dimension weniger.

3.6 Verhalten nahe periodischer Orbits

3.6.1 Die Poincaré Abbildung

Wir betrachten

$$y' = f(y)$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ versehen mit dem lokalen Fluss ϕ_t . Es gebe einen periodischen Orbit $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, der minimalen Periode $T_0 > 0$. Zur Untersuchung der Stabilität und möglicher Verzweigungen werden wir die sogenannte *Poincaré-Schnitt* und die zugehörige *Wiederkehrabbildung* (*Poincaréabbildung*) einführen. Wir wählen dann einen festen Punkt $x_0 \in \gamma$. Da x_0 kein Fixpunkt ist, gilt $f(x_0) \neq 0$. Definiere einen lokalen Poincaré-Schnitt als den affinen Raum senkrecht zu $f(x_0)$ durch den Punkt x_0 :

$$S := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (y - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten erwartet man, dass für $x \in S \cap B_\delta(x_0)$ der positive Orbit durch x wieder S schneidet, d.h.

$$G(t, x) := (\phi_t(x) - x) \cdot f(x) = 0,$$

für ein $t > 0$ gilt. Beachte, dass $\phi_t(x)$ für x nahe x_0 für $t \in [0, T + \varepsilon)$ definiert ist. Da f und damit $\phi_t(x)$ C^1 -Funktionensind gilt auch $G \in C^1([0, T + \varepsilon) \times S, \mathbb{R})$. Weiter ist $G(T_0, x_0) = 0$ und $\partial_t G(T_0, x_0) = |f(x_0)|^2 \neq 0$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es lokal eine eindeutige Funktion $T \in C^1(S \cap B_\delta(x_0))$ mit $G(T(x), x) = 0$ und $T(x_0) = T_0$.

Definition 3.28. Die differenzierbare Abbildung $P : S \cap B_\delta(x_0) \rightarrow S, P(x) = \phi_{T(x)}(x)$ heißt Poincaré Abbildung von γ im Punkt x_0 .

Bemerkung:

1. Es gilt $P(x_0) = x_0$.
2. Im Allgemeinen ist weder γ noch der Fluss nahe γ explizit bekannt.
3. Poincaré Abbildungen zu verschiedenen Punkten $x_0 \in \gamma$ sind lokal C^1 -konjugiert.

Definition 3.29. Der periodische Orbit γ heißt (asymptotisch) lokal stabil, falls x_0 (asymptotisch) lokal stabiler Fixpunkt von P ist.

Es entscheiden also die Eigenwerte der Ableitung der Poincaré Abbildung im Fixpunkt x_0 über die Stabilität und Verzweigung von periodischen Lösungen. Durch eine Translation und eine Rotation kann man $x_0 = 0$ und $f(0) = (0, \dots, 0, f_n(0))$ mit $f_n(0) \neq 0$ erreichen. Mit der Zerlegung eines Vektors im \mathbb{R}^n in $x = (\tilde{x}, x_n)$ sieht die Poincaré Abbildung dann wie folgt aus

$$(P(\tilde{x}, 0) = \phi_{T(\tilde{x}, 0)}(\tilde{x}, 0).$$

Damit kann man die Ableitung von f berechnen.

Satz 3.30. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen $D_{\tilde{x}}P(\tilde{x})$ und $D_x\phi_t(0)$

$$\begin{pmatrix} D_{\tilde{x}}P(0) & 0 \\ -f_n(0)(\nabla_{\tilde{x}}T(0))^T & 1 \end{pmatrix} = D_x\phi_{T_0}(0). \quad (*)$$

Insbesondere ist 1 Eigenwert von $D_x\phi_{T_0}(0)$ mit Eigenvektor $f(0) = (0, \dots, 0, f_n(0)) \neq 0$ und das Spektrum von $D_{\tilde{x}}P(0)$ stimmt bis auf den Eigenwert mit dem von $D\phi_{T_0}(0)$ überein.

Beweis. Aus $\phi_{T_0}\phi_t(0) = \phi_t(0)$ folgt durch differenzieren nach t

$$D_x\phi_{T_0}(\phi_t(0))f(\phi_t(0)) = D_x\phi_{T_0}(\phi_t(0))\partial_t\phi_t(0) = \partial_t\phi_t(0) = f(\phi_t(0))$$

und für $t = 0$

$$D_x\phi_{T_0}(0)f(0) = f(0) = (0, \dots, f_n(0)).$$

Dies ergibt die letzte Spalte in . Differenzieren von

$$\begin{pmatrix} P(\tilde{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_{T(\tilde{x}, 0)}(\tilde{x}, 0)$$

nach $x_i, 1 \leq i \leq n-1$ ergibt

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \begin{pmatrix} P(\tilde{x}) \\ 0 \end{pmatrix} &= \partial_t \phi_{T(\tilde{x}, 0)}(\tilde{x}, 0) \partial_{x_i} T(\tilde{x}, 0) + \partial_{x_i} \phi_{T(\tilde{x}, 0)}(\tilde{x}, 0) \\ &= \phi_{T(\tilde{x}, 0)}(\tilde{x}, 0) \partial_{x_i} T(\tilde{x}, 0) + \partial_{x_i} \phi_{T(\tilde{x}, 0)}(\tilde{x}, 0) \end{aligned}$$

Aus der letzten Komponente erhält man mit $f_n(\phi_{T(\tilde{x},0)}(\tilde{x},0)) \neq 0$

$$\partial_{x_i} T(\tilde{x}, 0) = - \frac{\partial_{x_i} (\phi_{T(\tilde{x},0)}(\tilde{x}, 0))_n}{f_n(\phi_{T(\tilde{x},0)}(\tilde{x}, 0))}$$

und

$$\partial_{x_i} P(\tilde{x}) = - \frac{\partial_{x_i} (\phi_{T(\tilde{x},0)}(\tilde{x}, 0))_n}{f_n(\phi_{T(\tilde{x},0)}(\tilde{x}, 0))} \cdot \tilde{f} \left(\phi_{T(\tilde{x},0)}(\tilde{x}, 0) + \partial_{x_i} \tilde{\phi}_{T(\tilde{x},0)}(\tilde{x}, 0) \right).$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man Formeln für höhere Ableitungen gewinnen. Für $\tilde{x} = 0$ folgt mit $\tilde{f}(0) = 0$

$$\begin{aligned} -f_n(0) \nabla_{\tilde{x}} T(0) &= \nabla_{\tilde{x}} \phi_{T_0}(0)_n, \\ D_{\tilde{x}} P(0) &= D_{\tilde{x}} \tilde{\phi}_{T_0}(0). \end{aligned}$$

□

3.7 Differentialgleichungen mit periodischer Zeitabhängigkeit

Ein wichtiger Fall mit der global definierten Poincaré Abbildung sind nicht autonome Differentialgleichungen mit periodischer Zeitabhängigkeit, z.B. periodisch angeregte Schwingungen, Pendel oder Herzschlag. Betrachte dazu in \mathbb{R}^n

$$\begin{cases} y' &= f(t, y), \\ f(t, y) &= f(t + T, y). \end{cases}$$

Füge der Differentialgleichung $\theta' = 1$ hinzu und betrachte θ als Winkel in $S^1 = \mathbb{R} \bmod (T\mathbb{Z})$. Damit erhält man ein autonomes System auf dem Zylinder $\mathbb{R}^n \times S^1$. Ein globaler Poincaré-Schnitt ist durch $S := \mathbb{R}^n \times \{0\}$ gegeben und P ist die Zeit T Abbildung der ursprünglichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} P(x) &= y(T), \\ y'(t) &= f(y(t), t), \quad y(0) = x. \end{aligned}$$

Hierbei sei angenommen, dass alle Lösungen bis zur Zeit T existieren. Somit muss man den Definitionsbereich von P geeignet einschränken. $D_x \phi_t(0)$ ist die Lösung der ersten Variation der Differentialgleichung entlang der periodischen Lösung $y(t)$.

$$\begin{aligned} \partial_t D_x \phi_t(0) &= D_2 f(y(t), \phi_t(0)) D_x \phi_t(0), \\ D \phi_0(0) &= I. \end{aligned}$$

Zur weiteren Berechnung der Ableitung von P bzw. $\phi_t(x)$ benötigen wir einige Resultate über lineare Systeme mit periodischen Koeffizienten. Wir betrachten für $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$

$$\begin{cases} y'(t) &= A(t)y(t), \\ y(s) &= x. \end{cases}$$

Die Lösung existiert auf \mathbb{R} und hängt linear von x ab, d.h. es gibt eine Matrix $\Pi(t, s)$ mit

$$y(t) = \Pi(t, s)y(s).$$

Falls $A(t)$ konstant ist, dann ist $\Pi(t, s) = e^{(t-s)A}$. Im Allgemeinen existiert keine explizite Formel für $\Pi(t, s)$. $\Pi(t, s)$ erfüllt

$$\begin{cases} \partial_t \Pi(t, s) &= A(t)\Pi(t, s), \\ \Pi(s, s) &= I. \end{cases}$$

$\Pi(t, s)$ heißt Übergangsmatrix oder Hauptfundamentallösung. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt für alle $t, s, r \in \mathbb{R}$

$$\Pi(t, s) = \Pi(t, r)\Pi(r, s) \quad \text{und} \quad \Pi(s, s) = I.$$

Insbesondere gilt $\Pi(t, s)^{-1} = \Pi(s, t)$ und $\Pi(t, s) = \Pi(t, 0)\Pi(0, s) = \Pi(t, 0)\Pi(s, 0)^{-1}$, d.h. es genügt $\Pi(t, 0)$ für alle t zu kennen.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Pi(t, 0) &= A(t)\Pi(t, 0), \\ \Pi(0, 0) &= I. \end{cases}$$

Allgemeiner heißt $U(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Fundamentallösung, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$U'(t) = A(t)U(t)$$

und $\det u(t) \neq 0$. $w(t) := \det U(t)$ heißt *Wronski-Determinante* von $U(t)$. Es folgt

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (U(t)U(s)^{-1}) &= A(t)U(t)U(s)^{-1}, \\ U(t)U(s)^{-1} &= I \end{cases}$$

und wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist $\Pi(t, s) = U(t)U(s)^{-1}$.

Lemma 3.31.

$$w(t) = w(s) \exp \left(\int_s^t \text{Spur}(A(\tau)) d\tau \right).$$

Insbesondere genügt es $w(t) \neq 0$ für ein $t \in \mathbb{R}$ anzunehmen.

Beweis. Es gilt

$$U(t + \varepsilon) = U(t) + \varepsilon U'(t) + o(\varepsilon) = U(t) + \varepsilon A(t)U(t) + o(\varepsilon).$$

Also folgt daraus

$$\det(U(t + \varepsilon)) = \det(U(t)) \cdot \det(I + \varepsilon A(t) + o(\varepsilon)).$$

Seien e_i die Spalten von I und $A_i(t)$ die von $A(t)$. Da die Determinante multilinear ist, gilt

$$\begin{aligned} \det(I + \varepsilon A(t) + o(\varepsilon)) &= 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots, A_i(t), \dots, e_n) + o(\varepsilon) \\ &= 1 + \varepsilon \text{Spur}(A(t)) + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$\frac{d}{dt} \det(U(t)) = \text{Spur}(A(t)) \det(U(t)).$$

Obige Formel für $w(t) = \det(U(t))$ ist die eindeutige Lösung dieser Gleichung. \square

Für die inhomogene Gleichung

$$y'(t) = A(t)y(t) + g(t)$$

mit $A \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$, $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ gilt wieder eine Variation der Konstanten Formel:

$$y(t) = \Pi(t, s)y(s) + \int_s^t \Pi(t, \tau)g(\tau) d\tau,$$

denn beide Seiten stimmen für $t = s$ überein und es gilt

$$y'(t) = A(t)\Pi(t, s)x + \int_s^t A(t)\Pi(t, \tau)g(\tau) d\tau + \Pi(t, t)g(t) = A(t)y(t) + g(t).$$

3.8 Periodische lineare Systeme und Floquet-Theorie

Sei nun $A(t)$ periodisch mit der Periode $T > 0$. Ziel ist es das System

$$y' = A(t)y(t)$$

in eines mit konstanten Koeffizienten zu transformieren.

Lemma 3.32. *Es gilt*

$$\Pi(t + T, s + T) = \Pi(t, s).$$

Beweis.

$$\frac{d}{dt}\Pi(t + T, s + T) = A(t + T)\Pi(t + T, s + T) = A(t)\Pi(t + T, s + T)$$

und $\Pi(t + T, s + T) = I$. Daher erfüllt $\Pi(t + T, s + T)$ dieselbe Differentialgleichung wie $\Pi(t, s)$ mit demselben Anfangswert und beide müssen dementsprechend übereinstimmen. \square

Definition 3.33. *Die Matrix $M(s) := \Pi(s + T, s)$ heißt Monodromiematrix.*

Nach dem letzten Lemma ist $M(s)$ T -periodisch. Es gilt nach Lemma 3.31

$$\det(\Pi(t, s)) = \det(\Pi(s, s)) \exp\left(\int_s^t \text{Spur}(A(\tau)) d\tau\right) > 0$$

und für $t = s + T$ folgt

$$\det(M(s)) = \exp\left(\int_s^{s+T} \text{Spur}(A(\tau)) d\tau\right) > 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned} M(s_1) &= \Pi(s_1 + T, s_1) = \Pi(s_1 + T, s_2 + T)\Pi(s_2 + T, s_2) \cdot \Pi(s_1, s_2)^{-1} \\ &= \Pi(s_1, s_2) \cdot M(s_2)\Pi(s_1, s_2)^{-1} \end{aligned}$$

sind $M(s_1)$ und $M(s_2)$ konjugierte Matrizen und haben gleiches Spektrum. Wir benötigen den Logarithmus einer Matrix.

- Lemma 3.34** (Existenz des Logarithmus). 1. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$, dann gibt es eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A = e^B$. B ist nicht eindeutig. Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt, muss B nicht reell sein.
2. Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det A \neq 0$ gilt und jeder reelle Jordanblock zu einem negativen Eigenwert in gerader Anzahl auftritt, dann existiert eine reelle Matrix B mit $A = e^B$. Insbesondere gilt dies, falls A keine negativen Eigenwerte hat.
3. Falls A reell ist und $\det A \neq 0$ gilt, dann existiert eine reelle Matrix B mit $A^2 = e^B$.

Beweis. Zu 1. Es genügt für A Jordanform anzunehmen und nur einen Jordanblock $\lambda I + N \in \mathbb{C}^{k \times k}$ mit $\lambda \neq 0$ zu behandeln. Der Ansatz $B = \log(\lambda)I + c$ führt auf

$$e^c = I + \frac{N}{\lambda}.$$

Wegen $r(N) = 0$ gibt es eine Norm $\|\frac{N}{\lambda}\| < 1$ und die Reihe für den Logarithmus konvergiert.

$$c = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{-N}{\lambda} \right)^j = -\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \left(\frac{-N}{\lambda} \right)^j,$$

da $N^k = 0$ gilt. Damit ist

$$\log(\lambda)I - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \left(\frac{-N}{\lambda} \right)^j = \begin{pmatrix} \log(\lambda) & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{2\lambda^2} & \cdots & \frac{(-1)^k}{(k-1)\lambda^{k-1}} \\ & \log(\lambda) & \frac{1}{\lambda} & \cdots & \frac{(-1)^{k-1}}{(k-2)\lambda^{k-2}} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \log(\lambda) & \cdots & \log(\lambda) \end{pmatrix}$$

ein Logarithmus von $\lambda I + N$.

Zu 2. Der Beweis ist analog zu 1.. Wenn man die reelle Jordanform benutzt und

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \exp \begin{pmatrix} \log(r) & -\theta \\ \theta & \log(r) \end{pmatrix},$$

mit $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $\theta = \arctan(\frac{\beta}{\alpha})$ beachtet. Dies beinhaltet den Fall $\nu = 0, \mu < 0$.

Zu 3. Sei

$$U^1 A U = J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

die Jordan'sche Normalform von A , sodass $\sigma(J_1) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$ und $\sigma(J_2) \subset (-\infty, 0]$ gilt. Mit

$$K := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

gilt $KJ = JK$ und $\sigma(JK) \cap (-\infty, 0] = \emptyset$. Nach 2. gibt es eine reelle Matrix \tilde{B} mit $JK = e^{\tilde{B}}$. Für $B = 2U\tilde{B}U^{-1}$ folgt dann

$$e^B = Ue^{2\tilde{B}}U^{-1} = UJKJKU^{-1} = UJ^2U^{-1} = A^2.$$

□

Kapitel 4

Ebene dynamische Systeme

4.1 Der Satz von Poincaré-Bendixon

In zwei Dimensionen sind die Möglichkeiten für ω -Limesmengen stark eingeschränkt. Dies liegt im wesentlichen daran, dass sich verschiedene Orbits nicht schneiden können und ein geschlossener Orbit die Ebene in zwei Teile zerlegt.

Satz 4.1. *Sei U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$. Der lokale Fluss von $y' = f(y)$ sei ϕ_t . Für ein $x \in U$ sei $\overline{\gamma(x)}$ kompakt. Dann ist $\omega(x)$ ein Grenzzyklus, falls $\omega(x)$ keinen Fixpunkt enthält.*

Für diesen Satz benötigen wir den Jordan'schen Kurvensatz.

Satz 4.2. *Sei $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Homoömorphimus auf seinem Bild $\Gamma = \gamma(S^1)$. Dann besteht $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ aus zwei nicht leeren, disjunkten, zusammenhängenden offenen Mengen. Genau eine davon ist unbeschränkt.*

Wir wissen, dass $\omega(x)$ nicht leer, kompakt und zusammenhängend ist. Sei $z \in \omega(x)$. Es gilt $f(z) \neq 0$, da z kein Fixpunkt ist. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $f(y) \neq 0$, falls $|z - y| < \delta$ gilt. Definiere den lokalen Schnitt

$$S := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid (y - z) \cdot f(z) = 0, |y - z| < \delta\} = \left\{z + s \frac{f(z)^\perp}{|f(z)|}, |s| < \delta\right\}.$$

Lemma 4.3. *Sei $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$ und $x_i := \phi_{t_i}(x) = z + s_i \frac{f(z)^\perp}{|f(z)|} \in S$. Dann gilt eine der drei folgenden Alternativen*

1. $s_1 = s_2 = s_3$.
2. $s_1 < s_2 < s_3$.
3. $s_1 > s_2 > s_3$.

Beweis. Es genügt $\phi_t(x) \notin S$ für alle $t \neq t_i$ anzunehmen. Falls $s_1 = s_2$ gilt, dann ist $\phi_t(x)$ periodisch und es folgt $s_2 = s_3$.

Sei $s_2 > s_1$. Definiere die einfach geschlossene stetige Kurve γ durch

$$\{\phi_t(x) \mid t_1 \leq t \leq t_2\} \cup \tilde{S}$$

mit

$$\tilde{S} := \left\{ z + s \frac{f(z)^\perp}{|f(z)|} \mid s_1 \leq s \leq s_2 \right\}.$$

Nach dem Satz 4.2 gilt $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma = M_1 \cup M_2$, wobei M_i offene und zusammenhängende Mengen sind. Sei M_1 diejenige Menge, sodass f auf \tilde{S} ins Innere von M_1 zeigt. Dann ist M_1 positiv invariant und der Vorwärtsorbit $\gamma_+(x_1)$ von x_1 kann S nur für $s > s_2$ treffen, d.h. es gilt $s_3 > s_2$. Der Fall $s_2 < s_1$ geht analog. \square

Lemma 4.4. *Sei $y \in \omega(x) \cap S$*

i) Dann existieren $t_n < t_{n+1} \rightarrow \infty$ mit $S \ni \phi_{t_n}(x) \rightarrow y$.

ii) $\omega(x) \cap S$ besteht aus höchstens einem Fixpunkt.

Beweis. Zu i) Da $y \in \omega(x)$ gilt, gibt es $\tilde{t}_n < \tilde{t}_{n+1} \rightarrow \infty$ mit $x_n := \phi_{\tilde{t}_n}(x) \rightarrow y \in \omega(x) \cap S$. Definiere $G := B_\delta(z) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $(t, z) = (\phi_t(x) - z) \cdot f(z)$. Es gilt $G(z, 0) = 0$ und $\partial_t G(z, t)|_{t=0} = |f(z)|^2 \neq 0$. Daher gibt es eine eindeutige C^1 -Funktion $T : B_\delta(z) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T(z) = 0$ und $G(x, T(x)) = 0$. Da $y \in S$ gilt, folgt $T(y) = 0$ und $T(x_n) \rightarrow 0$. Daher gilt für $t_n = \tilde{t}_n + T(x_n) \rightarrow \infty$ und $S \ni \phi_{T(x_n)}(x_n) = \phi_{t_n}(x) \rightarrow y$. Durch eventuelles weglassen von Folgengliedern kann man erreichen, dass t_n monoton wächst.

Zu ii) Angenommen es gebe $y_1 \neq y_2, y_i \in S \cap \omega(x)$. Sei $\varepsilon > 0$ derart, dass $B_\varepsilon(y_1) \cap B_\varepsilon(y_2) = \emptyset$ gilt. Nach i) gibt es eine monotone Folge von $t_n \rightarrow \infty$ und $\tau_n \rightarrow \infty$ mit $S \ni \phi_{t_n}(x) \rightarrow y_1$ und $S \ni \phi_{\tau_n}(x) \rightarrow y_2$. Es gibt ein m mit $\phi_{t_m} \in B_\varepsilon(y_1)$ und ein n mit $\tau_n > t_m$ und $\phi_{\tau_n}(x) \in B_\varepsilon(y_2)$. Weiter gibt es ein l mit $t_l > \tau_n$ und $\phi_{t_l}(x) \in B_\varepsilon(y_1)$. Dies widerspricht aber der Monotonie der s_i in Lemma 4.3. \square

Lemma 4.5. *$\omega(x)$ enthält einen periodischen Orbit.*

Beweis. Sei $y \in \omega(x)$ und sei $z \in \omega(y) \subset \omega(x)$. Nach Lemma 4.4 i) existiert ein $y_n \in S \cap \gamma_+(y)$ mit $y_n \rightarrow z$. Aus Lemma 4.4 ii) folgt $y_n \in S \cap \gamma_+(y) \subset S \cap \omega(x) = \{z\}$, d.h. $y_n = z$ und $\gamma(y) \subset \omega(x)$ ist ein periodischer Orbit. \square

Lemma 4.6. *Falls $\omega(x)$ einen periodischen Orbit γ enthält, dann ist $\omega(x)$ dieser Orbit.*

Beweis. Angenommen es wäre $\omega(x) \setminus \gamma \neq \emptyset$. Es gilt

$$\gamma \subset \bigcup_{y \in \gamma} B_{\frac{1}{n}}(y) =: A_n$$

und $A_{n+2} \subset \overline{A_{n+1}} \subset A_n$. Falls $A_n \cap \omega(x) \setminus \gamma = \emptyset$ gilt, dann ist $A_{n+2} \cup \mathbb{R}^2 \setminus \overline{A_{n+1}}$ eine disjunkte offene Überdeckung von $\omega(x)$ und beide Mengen enthalten für $n \geq n_0$ Punkte aus $\omega(x)$, da $\omega(x) \setminus \gamma \neq \emptyset$ gilt. Dies widerspricht aber dem Zusammenhang von $\omega(x)$. \square

Daher gibt es eine Folge $y_n \in \Omega(x) \setminus \gamma$ deren Abstand zu Γ gegen null konvergiert. Da $\omega(x)$ kompakt und Γ abgeschlossen ist, gibt es eine Teilfolge, die gegen ein $z \in \Gamma$ konvergiert. Definiere einen lokalen Schnitt S zu z . Es gibt wieder ein

$T(y_n) \rightarrow 0$ mit $\phi_{T(y_n)}(x) \in S \cap \omega(x)$. Mit Lemma 4.4 ii) folgt $y_n = z \in \Gamma$ im Widerspruch zu $y_n \neq \Gamma$. Dies vervollständigt den Beweis von Satz 4.1.

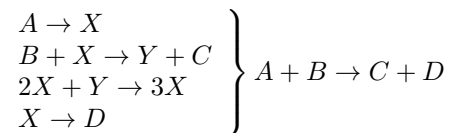
Bemerkung: Falls es nur endlich viele Fixpunkte gibt, dann kann man sogar zeigen, dass eine der drei Alternativen gilt

1. $\omega(x)$ ist ein Fixpunkt.
2. $\omega(x)$ ist ein periodischer Orbit.
3. $\omega(x)$ besteht aus Fixpunkten und heteroklinen und homoklinen Orbits. Die heteroklinen Orbits sind eindeutig.

4.1.1 Anwendungen

1. Es gebe eine positiv invariante Menge M , die keine Fixpunkte enthalte. Dann existiert ein periodischer Orbit in M .
2. Sei 0 einziger Fixpunkt und sei 0 ein instabiler Knoten oder Spiralfunkt. Es gebe eine positiv invariante kompakte Menge M mit $0 \in M$. Dann existiert ein periodischer Orbit in M .

Beispiel: (*Brüsselator Model von Prigogine 1977*) Ein einfaches Modell zur Beschreibung chemischer Oszillatoren. Es handelt sich um ein System von 4 hypothetischen Reaktionsgleichungen, die ein Modell bilden, das alle Phänomene von chemischen Oszillatoren (wie z.B. der Beloksov-Zhabotinsky-Reaktion) widerspiegeln.



Die Konzentration von A und B werden immer konstant gehalten und die Produkte C und D werden ständig abgeführt. Die Konzentrationen von X und Y reagieren auf kleine Störungen und erreichen schnell Oszillationen.

$$\begin{aligned} x' &= a - (b+1)x + x^2y, \\ y' &= bx - x^2y, \end{aligned}$$

mit $a, b > 0$.

Behauptung: Für $b > a^2 + 1$ existiert ein periodischer Orbit

Einziger Fixpunkt ist $\bar{x} = a, \bar{y} = \frac{a}{b}$. Die Linearisierung in $(a, \frac{a}{b})$ ergibt

$$\begin{pmatrix} -b-1+2\bar{x}\bar{y} & \bar{x}^2 \\ b-2\bar{x}\bar{y} & -\bar{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(b-1+a^2 \pm \sqrt{(b-1+a^2)^2 - 4a^2} \right).$$

Nach Voraussetzung gilt $\Re(\lambda_{\pm}) > 0$ und der Fixpunkt ist ein instabiler Knoten oder Spiralpunkt. Für $c > 0$ definiere

$$M := \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, y - x \leq c, y + x \leq c + 2a\}.$$

Die beiden Geraden schneiden sich im Punkt $(a, c + a)$. Wir zeigen, dass M positiv invariant ist. Für $y = 0, x > 0$ gilt $y' = bx > 0$ und für $x = 0$ gilt $x' = a > 0$. Für $x = y = 0$ gilt $y'' = bx' = ba > 0$. Für $y - x = c$ ist die äußere Normale $n = (-1, 1)$. Mit $y \geq c$ folgt

$$n \cdot (x', y') = -a + x + 2bx - x^2 y \leq -a + (2b - 1)x - 2x^2 c \leq -a + \frac{(2b - 1)^2}{c} < 0,$$

falls $c > \frac{(2b-1)^2}{a}$. Für $x + y = c + 2a$ gilt $x = c + 2a - y > 0$ und die äußere Normale $n = (1, 1)$ gilt $n \cdot (x', y') = a - x < 0$, d.h. M ist positiv invariant und enthält nur einen instabilen Fixpunkt. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 4.7. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ eine einfach zusammenhängende Menge. Betrachte $y' = f(y)$ mit $f \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$. Es gebe eine Funktion $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$ sodass

$$\operatorname{div}(\phi(y)f(y)) = \partial_{y_1}(\phi(y)f_1(y)) + \partial_{y_2}(\phi(y)f_2(y))$$

nicht negativ und nicht konstant null ist. Dann existiert kein periodischer Orbit.

Beweis. Angenommen es gebe einen periodischen Orbit Γ . Sei V die beschränkte Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Dann gilt nach dem Gauß'schen Integralsatz

$$0 \neq \int_V \operatorname{div}(\phi(y)f(y)) \, dy = \int_{\partial V} \phi(y)f(y) \cdot N(y) \, dS_y = 0,$$

wobei $N(y)$ die äußere Normale an ∂V ist. Hierbei wurde benutzt, dass $f(y)$ tangential an ∂V ist. \square

Der Fall $\phi = \pm 1$ heißt Bendixon-Kriterium.

Literaturverzeichnis

- [1] Guckenheimer, J., Holmes, P.: Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, Springer, 1983
- [2] Hirsch, Smale, Devaney, Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos, 2nd edition, Academic Press, 2004.
- [3] Walter W., Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer 2000
- [4] Hasselblatt, B., Katok, A. B. A first course in dynamics : with a panorama of recent developments, Cambridge University Press, 2003
- [5] Kuznetsov, Y. Elements of applied bifurcation theory, 3rd ed. Springer, 2004