Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 6

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 8. Juni 2020
Bitte schicken Sie maximal 3 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Erhaltungsgröße beim Kepler-Problem*

Die Lagrange-Funktion des Kepler-Problems ist durch

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + \frac{k}{r}$$

gegeben, wobei $r \equiv |\vec{x}|$ und k eine positive Konstante ist.

a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}^{\,2}}{\mathrm{d}t} = -2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

gilt, wobei $\vec{p}$ der zu $\vec{x}$ konjugierte Impuls ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$\frac{\vec{x}\cdot\vec{p}}{r} = m\dot{r}$$

gilt.

c) Betrachten Sie die infinitesimale räumliche Verschiebung

$$\delta x_i^{(j)} = \frac{1}{2}\left[2p_i x_j - x_i p_j - \delta_{ij}\left(\vec{x}\cdot\vec{p}\right)\right]\delta a, \tag{I}$$

wobei δa konstant ist, die Indizes i und j mit $1 \le i, j \le 3$ die i-te bzw. j-te Komponente bezeichnen und δ_{ij} das Kronecker-Delta ist. Wie lautet die zugehörige Transformation $\delta\dot{x}_i^{(j)} = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,\delta x_i^{(j)}$?

d) Zeigen Sie, dass die Änderung der Lagrange-Funktion

$$\delta L^{(j)} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\,\delta x_i^{(j)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\,\delta\dot{x}_i^{(j)}\right)$$

aufgrund der Transformation (I) durch die totale Zeitableitung einer Funktion $\delta f(x_j)$ gegeben ist. Machen Sie dabei Gebrauch von den Lagrange-Gleichungen 2. Art sowie den Relationen bzw. Ergebnissen aus den Aufgabenteilen a) bis c), und zeigen Sie, dass $\delta f(x_j) = -mVx_j\,\delta a$ ist.*

e) Bestimmen Sie mit Hilfe des Noether-Theorems die zu (I) gehörige Erhaltungsgröße. Zeigen Sie damit, dass die vektorielle Größe

$$\vec{A} = \vec{p}\times\vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{x}$$

mit dem Drehimpuls $\vec{L} \equiv \vec{x}\times\vec{p}$ erhalten ist.† Diese ist als *Laplace-Runge-Lenz-Vektor* bekannt. Dieser konstante Vektor zeigt in Richtung des Perihels der Bahn und belegt damit, dass das Perihel ortsfest ist.

---

* *Hinweis:* Benutzen Sie auch das Euler-Theorem für homogene Funktionen, $x\,\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = k\,f(x)$, wenn $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$.

† *Hinweis:* Hier ist es nützlich zu verwenden, dass $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

2. *Zwillingsparadoxon*

Am Neujahrstag des Jahres 2200 startet die Astronautin Alice von der Erde und fliegt mit konstanten 60 % der Lichtgeschwindigkeit zur nächsten interstellaren Raumstation, welche genau 3 Lichtjahre (gemessen im Ruhesystem der Erde) von der Erde entfernt ist. Nachdem die Astronautin die Raumstation erreicht hat, kehrt sie sofort um und fliegt mit derselben Geschwindigkeit zurück zur Erde. Sie erreicht diese am Neujahrstag des Jahres 2210 (der Erdzeit). Die Astronautin hat einen Zwillingsbruder Bob, der auf der Erde verblieben ist.

a) Um wie viele Jahre ist Alice während der Reise gealtert?‡

b) Jedes Jahr schickt Bob von der Erde aus ein Lichtsignal zu Alice und umgekehrt, wobei Alice und Bob die Dauer eines Jahres jeweils in ihren eigenen Inertialsystemen bestimmen. Zeichnen Sie Raum-Zeit-Diagramme für beide Fälle, und geben Sie an, wie viele Jahre jeweils zwischen den Signalen für den empfangenden Zwilling vergehen.

c) Worin besteht also die Auflösung des vermeintlichen Paradoxons, dass die Zwillinge den jeweils anderen langsamer altern sehen sollten?

3. *Kanonische Transformationen*

In Erweiterung zu der bekannten erzeugenden Funktion $\Phi \equiv \Phi_1(q_1, \ldots, q_f, Q_1, \ldots, Q_f, t)$ aus der Vorlesung lassen sich drei weitere Typen von erzeugenden Funktionen finden,

$$\Phi_2(q_1, \ldots, q_f, P_1, \ldots, P_f, t) = \Phi_1 - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i} Q_i,$$

$$\Phi_3(p_1, \ldots, p_f, Q_1, \ldots, Q_f, t) = \Phi_1 - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} q_i,$$

$$\Phi_4(p_1, \ldots, p_f, P_1, \ldots, P_f, t) = \Phi_1 - \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} q_i + \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i} Q_i \right).$$

a) Zeigen Sie für den Fall von Φ_3, dass durch Kenntnis der erzeugenden Funktion, der Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ und der Impulse $p_1, \ldots, p_f$ sowohl die Transformation auf neue gestrichene Koordinaten $Q_1, \ldots, Q_f$ und Impulse $P_1, \ldots, P_f$ als auch die transformierte Hamilton-Funktion K vollständig bestimmt sind. Betrachten Sie hierfür die Differentiale von Φ_1 und Φ_3, und benutzen Sie die in der Vorlesung gezeigten Eigenschaften von Φ_1 sowie die der transformierten Hamilton-Funktion.

b) Zeigen Sie analog zur Vorgehensweise im Skript, dass Φ_3 tatsächlich eine kanonische Transformation vermittelt.

4. *Poisson-Klammern beim Drehimpuls*

Die Poisson-Klammer wurde in der Vorlesung definiert als

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right),$$

wobei $f(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$ und $g(q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f, t)$ zwei beliebige Funktionen sind, die von den f verallgemeinerten Koordinaten q_i und deren konjugierten Impulsen p_i abhängen.

‡*Hinweis:* Die Beschleunigungs- und Bremsphasen des Raumschiffes sowie die Bewegung der Erde um die Sonne sollen vernachlässigt werden.

a) Berechnen Sie die elementaren Poisson-Klammern $\{q_i, q_j\}$, $\{p_i, p_j\}$ und $\{q_i, p_j\}$, wobei es sich nun und im Folgenden bei q_i und p_i mit $1 \leq i, j \leq 3$ um *kartesische* Koordinaten und deren konjugierte Impulse handelt.

b) Zeigen Sie, dass für den Drehimpuls $L_i = \varepsilon_{ijk} q_j p_k$ die folgenden Relationen gelten,

$$\{L_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \qquad \{L_i, q_j\} = \varepsilon_{ijk} q_k, \qquad \{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k, \qquad \{L_i, \vec{L}^2\} = 0.$$

Hierbei ist ε_{ijk} das Levi-Civita-Symbol.

c) Ein Teilchen sei durch die Hamilton-Funktion $H = T(p_1, p_2, p_3) + V(q_1, q_2, q_3)$ beschrieben. Berechnen Sie die totale Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} + \{\vec{L}, H\}.$$

Wann ist $\vec{L}$ also eine Erhaltungsgröße?

5. *Verständnisfragen*

a) Geben Sie in eigenen Worten die Aussagen der Noether-Theoreme wieder.

b) Beschreiben Sie die wichtigsten Ideen hinter der Herleitung der Lorentz-Transformation. Auf welche Weise behebt diese Transformation den Widerspruch zwischen klassischer Mechanik und Elektrodynamik?

c) Was bedeutet die Transformation eines mechanischen Systems „auf Ruhe“? Warum und mit welcher erzeugenden Funktion ist sie überhaupt möglich?

d) Was besagt das Liouville-Theorem?