Modulformen 1 – Übungsgruppe 03. November 2021

Wintersemester 2021/22

A: Besprechung 1.Übungszettel

Aufgabe 1

(a) Falsch, denn es gilt $\mathrm{DV}(-1, 0, \frac{1}{3}, 1) = 2 \neq 2 - 2i = \mathrm{DV}(0, i, 2i, 1)$ (↯ Proposition 1.12).

(b) Wahr. Zunächst gilt $c \neq 0$, da sonst $\varphi(\infty) = \infty = \varphi(z_2)$ mit $z_2 \neq \infty$ (↯ φ bijektiv). Dann ist

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & , z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & , z = z_2 \overset{!}{=} -\frac{d}{c} \end{cases}$$

die gesuchte Möbiustransformation. Es folgt $d = -cz_2$ und wegen $0 = \varphi(z_1)$ zudem $b = -az_1$. Die gewünschte Form von φ resultiert mit $\tilde{c} := \frac{a}{c} \neq 0$ aus der Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} a & -az_1 \\ b & -cz_2 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Wahr, denn es gilt φ ist bijektiv mit Umkehrabbildung φ^{-1} (Proposition 1.3) und φ, φ^{-1} sind meromorph und damit stetig als Möbiustransformationen auf $\bar{\mathbb{C}}$ (Beispiel 5.35).

Aufgabe 2

(a) Die Rückrichtung ist unmittelbar klar. Die Aussage $\varphi_M(z) = \varphi_N(z)$ für alle $z \in \bar{\mathbb{C}}$ ist wegen $\varphi_{MN} = \varphi_M \circ \varphi_N$ und $\varphi_{I_2} = \mathrm{id}$ äquivalent zu $\varphi_{N^{-1}M}(z) = z$. OE ist daher $N = I_2$ und die Behauptung folgt aus der Fixpunktgleichung $cz^2 + (d-a)z - b = 0$.

(b) Aussage (i) folgt unmittelbar aus (ii). Die Inklusion $\mathfrak{M} \subseteq \mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ ist ebenfalls klar. Sei also $f \in \mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$. Dann ist $f = \frac{P}{Q}$ rational (Korollar 8.5) mit teilerfremden Polynomen P, Q und $d := \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. Dann nimmt f jeden Wert aus $\bar{\mathbb{C}}$ genau d-mal an (Satz 3.3 †) und wegen Bijektivität hat der Quotient die Form $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Man folgert leicht per Kontraposition, dass $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gelten muss.

Aufgabe 3

(a) Wegen $A\langle z \rangle = z$ folgt aus $A\langle B\langle z \rangle \rangle = B\langle A\langle z \rangle \rangle$, dass $B\langle z \rangle = z$ ein Fixpunkt der Möbiustransformation unter A ist. Ist w ein anderer Fixpunkt der Möbiustransformation unter B ist, so gilt dies auch für $A\langle w \rangle$. Für die drei Fixpunkte $z, w, A\langle w \rangle$ folgt letztlich $z = w = A\langle w \rangle$ und damit die Behauptung.

(b) Der parabolische Fall wurde in (a) gezeigt. Andernfalls ist $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ zu der Matrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ konjugiert, wobei $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gerade die Eigenwerte von A sind. Ihre Eigenräume sind eindimensional. Wegen $AB = BA$ ist Bv_i Eigenvektor von A zu λ_i, falls v_i Eigenvektor von A zu λ_i für $i \in \{1, 2\}$ ist. Es ergibt sich, dass v_i Eigenvektor von B ist und dann folgt die Aussage mit: $z \in \mathbb{C}$ Fixpunkt unter $\varphi_A \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} v \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist Eigenvektor von $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

---

† © Vorlesungsausarbeitung zum WS 2002/03 von Prof. Dr. Klaus Fritzsche

B: Algebra - Grundkenntnisse

Definition: [Linksnebenklasse, Index]
Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe und $x \in G$. Dann heißt $xU := \{xu \mid u \in U\}$ die Linksnebenklasse bzgl. U. Es gilt ${}^{G}/_{U} := \{xU \mid x \in G\}$ und die Mächtigkeit $|{}^{G}/_{U}|$ heißt Index $[G : U]$. Der Satz von Lagrange liefert die Beziehung $|G| = |U| \cdot [G : U]$.

Definition: [Normalteiler]
Eine Untergruppe $N \subseteq G$ zur Gruppe G heißt Normalteiler in G, wenn gilt: $\forall x \in G : xN = Nx$.

Definition: [Operation, Bahn, Stabilisator]
Sei S eine Menge und $m : G \times S \to S$ eine Abbildung.

- m heißt Operation von G auf S, wenn für alle $s \in S$ gilt: $(MN, s) = (M, (N, s))$ und $(e, s) = s$ für das neutrale Element $e \in G$.
- Die Menge $Gs := \{x \circ s \mid x \in G\}$ heißt Bahn, $G_s := \{x \in G \mid x \circ s = s\}$ heißt Stabilisator von $s \in S$ unter der Operation m von G auf S.

Definition: [Ideal]
Sei R ein Ring. Dann heißt $I \subseteq R$ Ideal, falls I eine Untergruppe von $(R, +)$ ist und $RI \subseteq I$.

Satz: [Restklassenring]
Sei R ein Ring und I ein Ideal. Definiere ${}^{R}/_{I} := \{x + I \mid x \in R\}$ und $\varphi : R \to {}^{R}/_{I}, x \mapsto x + I$. Dann ist ${}^{R}/_{I}$ ein Ring und φ ein Ringhomomorphismus mit $\ker(\varphi) = I$.

Satz: [Chinesischer Restsatz]
Für teilerfremde ganze Zahlen a, b gibt es einen Ringisomorphismus ${}^{\mathbb{Z}}/_{ab\mathbb{Z}} \cong {}^{\mathbb{Z}}/_{a\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}/_{b\mathbb{Z}}$.

Definition: [Einheit]
Sei R ein Ring. Das Element $r \in R$ heißt Einheit gdw. es ein $s \in R$ gibt mit $rs = 1$. Wir schreiben dann $r \in R^* := \{r \in R \mid r \text{ Einheit}\}$.

C: Anwendungen auf die Funktionentheorie

$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\bar{\Gamma} = {}^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}/_{\pm\,\mathrm{id}}$, $\Gamma_\infty = \{\pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ und $\Gamma(N) = \{M \in \Gamma \mid M \equiv I_2 \mod N\}$

Satz: [Gruppenoperationen]
Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ bzw. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert via Möbiustransformationen $(M, z) \mapsto \varphi_M(z)$ transitiv auf $\bar{\mathbb{C}}$ bzw. der oberen Halbebene $\mathbb{H}$.

Satz: [Erzeuger von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$]
Die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird von den Matrizen $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt.

Definition: [Standard-Fundamentalbereich]
Die Menge $\mathcal{F} := \left\{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1 \text{ und } |\operatorname{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\right\}$ ist der Standard-Fundamentalbereich für die Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$.

Satz: [Hauptkongruenzuntergruppe]
Die Hauptkongruenzuntergruppe $\Gamma(N)$ ist ein Normalteiler in Γ.

Satz: [${}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$]
Es gilt

$$({}^{\mathbb{Z}}/_{NZ})^* \cong \prod_{p|N} ({}^{\mathbb{Z}}/_{N_p\mathbb{Z}})^* \text{ und } \mathrm{SL}_2\left({}^{\mathbb{Z}}/_{N\mathbb{Z}}\right) \cong \prod_{p|N} \mathrm{SL}_2\left({}^{\mathbb{Z}}/_{N_p\mathbb{Z}}\right),$$

wobei $N = \prod_p N_p$ Zerlegung von N in Primzahlpotenzen N_p sei (folgt aus chinesischem Restsatz).