=== Zusammenfassungen der Vorlesung PTP1 ===

== 1. Woche ==

– Zur Einführung haben wir besprochen, welche Ziele theoretische Physik überhaupt verfolgt (eine wachsende Zahl von Phänomenen auf eine schrumpfende Zahl zunehmend abstrakter Konzepte zurückzuführen), dann haben wir die Newton'schen Axiome eingeführt. Dabei kam es mir vor allem darauf an zu betonen, dass die Entitäten der klassischen Mechanik (Körper, Kräfte, Raum und Zeit) zusammen mit den Axiomen ein Fundament der Mechanik legen, das bei einer anderen Wahl der Begriffe und Axiome auch völlig anders aussehen könnte.

– Weiterhin habe ich betont, dass das erste und das zweite Newton'sche Axiom aufeinander bezogen und notwendig sind. Das erste legt fest, welche Art der Bewegung als natürlich oder grundlegend angesehen wird (in Newtons Fall die rein inertiale Trägheitsbewegung), und diese Festlegung könnte ebenfalls ganz anders aussehen – wenn man die freie Fallbewegung als natürlich oder grundlegend ansieht, kommt man geradewegs in die allgemeine Relativitätstheorie. Das zweite stellt dann fest, dass Abweichungen von dieser natürlichen Bewegung durch Kräfte verursacht werden und quantifiziert diesen Zusammenhang.

– Danach haben wir Differentialgleichungen besprochen: zuerst Kategorien von Differentialgleichungen (gewöhnlich – partiell; linear; homogen – inhomogen), dann anhand von Beispielen (radioaktiver Zerfall, Fallbewegungen) Lösungsmethoden eingeführt (Variablentrennung, Variation der Konstanten) und besprochen, dass erst die Angabe von Anfangsbedingungen die Lösungen vervollständigt.

== 2. Woche ==

Wir haben uns mit drei Themen befasst: (1) Wann sind Differentialgleichungen eindeutig lösbar? (2) Was sind lineare, inhomogene Differentialgleichungen und wie löst man sie? (3) Was sind Vektoren?

– Das Lipschitz-Kriterium besagt, dass Differentialgleichungen erster Ordnung (y' = f(x,y)) genau dann eindeutig lösbar sind, wenn ihre Sekantensteigung |delta f/delta y| endlich ist und ein Anfangswert für die gesuchte Funktion vorgegeben ist. Eine Differentialgleichung n. Ordnung kann auf ein System aus n Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückgeführt werden.

– Lineare Differentialgleichungen n. Ordnung sind solche, deren Koeffizientenfunktionen nicht von der gesuchten Funktion und ihren Ableitungen abhängen. Zu ihrer Lösung braucht man ein Fundamentalsystem aus n linear unabhängigen Lösungsfunktionen der homogenen und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Die n Koeffizienten der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt.

– Vektoren sind allgemein alle mathematischen Objekte, die man skalieren und addieren kann. Das wird durch die Vektorraumaxiome festgelegt, in die auch die Definitionen von Gruppen und Körpern eingehen.

== 3. Woche ==

– Wir haben zunächst Vektorräume mit ihrer abstrakten mathematischen Definition eingeführt: Alle Größen, die skaliert und addiert werden können, sind Vektoren. Dabei haben wir auch die Begriffe Gruppe und Körper benötigt. Wir haben jeweils ein anschauliches (dreidimensionaler euklidischer Raum) und ein abstraktes Beispiel (Funktionenraum, Polynome) besprochen.

– Daraufhin haben wir das Skalar- und das Vektorprodukt definiert, dabei die Einstein'sche Summenkonvention, das Kronecker- und das Levi-Civita-Symbol eingeführt und die wichtigsten Eigenschaften der beiden Produkte besprochen.

– Damit konnten wir dann Impuls, Drehmoment und Drehimpuls einführen. Bei der Einführung der Energie habe ich betont, warum wir zunächst auf eine Dimension zurückfallen müssen: weil in drei Dimensionen der Integrationsweg für die potentielle Energie nicht eindeutig ist und wir erst klären müssen, wann dieses Integral wegunabhängig ist.

– Am Beispiel des harmonischen Oszillators haben wir schließlich noch Umkehrpunkte der Bewegung und die Schwingungsdauer besprochen. Dabei habe ich erwähnt, dass die Invarianz der klassischen Mechanik bereits aus der Tatsache folgt, dass die Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit sind und in diesem Beispiel bewirkt, dass die Bewegung vom Umkehrpunkt 1 zum Umkehrpunkt 2 genauso lange dauern muss wie zurück.

== 4. Woche ==

– Wir haben zunächst besprochen, wie Teilchenbahnen oder Trajektorien im dreidimensionalen Raum beschrieben werden können. Dazu haben wir mit dem Tangential-, dem Haupt- und dem Binormalenvektor ein Koordinatensystem eingeführt, das sich längs der Trajektorie bewegt und zudem die Begriffe Bogenlänge und Krümmungsradius eingeführt. Wir haben dabei gesehen, dass die Beschleunigung eine Komponente in Richtung des Tangential- und eine in Richtung des Hauptnormalenvektors hat.

– Um zu definieren, wie man im dreidimensionalen Raum über Vektorfelder integrieren kann, haben wir Kurvenintegrale eingeführt: Man legt die Kurve fest, parametrisiert sie geeignet, bestimmt ihre Ableitung nach dem Parameter, multipliziert diese Ableitung mit dem Vektorfeld und integriert über den Parameter.

– Schließlich haben wir die partielle Ableitung eingeführt, mit ihrer Hilfe den Gradienten bzw. Nabla-Operator, und mit diesem dann die Divergenz und die Rotation von Vektorfeldern.

– Am Ende konnten wir den Energiesatz in drei Dimensionen neu formulieren. Er gilt für solche Kraftfelder, die sie als (negative) Gradienten einer potentiellen Energie schreiben lassen.

== 5. Woche ==

– Erstes Ziel war, diejenigen Matrizen als Elemente einer Gruppe zu identifizieren, die Basistransformationen darstellen. Zu diesem Zweck haben wir
— eine Matrixmultiplikation eingeführt und gesehen, dass diese assoziativ, aber nicht kommutativ ist;
— die Einheitsmatrix als neutrales Element identifiziert und
— die Inversion regulärer Matrizen definiert. Auf dem Weg dorthin haben wir auch die Transposition und die Determinante eingeführt und besprochen, dass Determinanten mit Volumina identifiziert werden können. Das erste Ergebnis war, dass die regulären, quadratischen Matrizen eine Gruppe bilden, die allgemeine lineare Gruppe GL(N).

– Nächstes Ziel war, diejenigen Elemente der GL(N) zu identifizieren, die orthonormale Basen auf orthonormale Basen abbilden. Das sind die orthonormalen Transformationen, deren Determinante den Betrag eins hat und die dadurch gekennzeichnet sind, dass ihre Transponierten gleich ihren Inversen sind. Die orthonormalen Transformationen bilden die Gruppe O(N). Die eigentlichen orthonormalen Transformationen haben die Determinante +1 und bilden die Untergruppe SO(N). Wie wir an Beispielen gesehen haben, können sie anschaulich als Drehungen aufgefasst werden.

– Schließlich haben wir die Invarianz der Bewegungsgleichungen unter Drehungen untersucht und gezeigt, dass der Drehimpuls kein polarer, sondern ein axialer Vektor ist, d.h. dass er sich wie $\vec L \mapsto \det R R\vec L$ transformiert statt wie $\vec x \mapsto R\vec x$.

== 6. Woche ==

Diese Woche standen (die Antworten auf) zwei Fragen auf dem Programm: Welche Kräfte sind konservativ? und: Unter welchen Voraussetzungen gelten Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltung in Systemen aus vielen Massenpunkten?

Wir haben die folgenden Antworten besprochen und begründet:

– Eine konservative Kraft ist eine solche, für die eine potentielle Energie angegeben werden kann, sodass die Kraft der (negative) Gradient der potentiellen Energie ist. Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist die Aussage dazu äquivalent, dass die Rotation der Kraft verschwindet.

– Der Schwerpunkt eines Systems aus vielen Massenpunkten bewegt sich allein unter dem Einfluss einer äußeren Kraft. Wenn die Kräfte zwischen den Massenpunkten längs der Verbindungslinie zwischen den Massenpunkten wirken, ändert sich der Gesamtdrehimpuls des Systems allein aufgrund eines äußeren Drehmoments. Die Energie des Systems ist erhalten, wenn alle inneren und äußeren Kräfte Potentialkräfte sind.

– Außerdem haben wir den Stokes'schen Satz besprochen und motiviert.

== 7. Woche ==

Diese Woche standen zwei Themen auf dem Programm: die Transformation auf krummlinig-orthogonale Koordinaten und das Keplerproblem.

– Krummlinig-orthogonale Koordinaten sind dann nützlich, wenn die Koordinatenebenen der kartesischen Koordinaten der Symmetrie eines betrachteten Problems nicht angemessen sind. Als Beispiele haben wir in der Vorlesung Zylinder- und Kugelkoordinaten besprochen und bei der Behandlung des Kepler-Problems ebene Polarkoordinaten verwendet. Transformationsformeln für den infinitesimalen Abstand und den Nabla-Operator wurden allgemein hergeleitet und auf Zylinder- und Kugelkoordinaten spezialisiert.

– Entscheidend für das Kepler-Problem (Bewegung im Zentralkraftfeld mit potentieller Energie proportional zu 1/r) sind zwei Feststellungen:

— Der Drehimpuls ist erhalten (weil kein Drehmoment auftritt) und legt damit eine Bahnebene fest, auf die die Bewegung eingeschränkt ist. Aus der Drehimpulserhaltung folgt direkt das 2. Kepler'sche Gesetz (die Verbindungslinie Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen).

— Wegen der Drehimpulserhaltung ist von den beiden Koordinaten (r, phi) nur noch eine frei (nämlich r), für die aus der Energieerhaltung eine eindimensionale Bewegungsgleichung folgt. Diese Bewegungsgleichung enthält das abstoßende Zentrifugalpotential, das die Drehimpulserhaltung sicherstellt.

– Die Bewegungsgleichung für die eine verbleibende Koordinate r ist besonders leicht zu lösen, wenn man sie auf den reziproken Radius u = 1/r transformiert. Die Lösung zeigt, dass die Bahnkurven Kegelschnitte sind, also Kreise, Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln. Damit ist das 1. Kepler'sche Gesetz bewiesen (die Planetenbahnen bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht).

– Das 3. Kepler'sche Gesetz (die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Bahnhalbachsen) folgt dann direkt daraus, dass man das 2. Kepler'sche Gesetz auf Ellipsenbahnen anwendet.

== 8. Woche ==

Diese Woche standen Stöße und Streuung auf dem Programm. Die wichtigsten Themen und Ergebnisse dabei waren:

– Bei elastischen Stößen bleiben im Schwerpunktsystem die Beträge der Geschwindigkeiten der stoßenden Teilchen gleich. Von dort aus betrachtet, werden beide Teilchen auch unter demselben Winkel gestreut. Diese beiden Aussagen folgen allein aus der Energie- und der Impulserhaltung.

– Die Transformation des Streuwinkels in ein Laborsystem haben wir anhand des Beispiels besprochen, in dem das Targetteilchen anfänglich im Laborsystem ruht. So lange die Projektilmasse kleiner als die Targetmasse ist, ist Rückstreuung möglich; anderenfalls nicht. Sind beide Massen gleich, ist der Streuwinkel im Laborsystem gerade der halbe Streuwinkel im Schwerpunktsystem.

– Der mittlere Energieübertrag vom Projektil auf das Target ist dann am größten, wenn beide Massen gleich sind – falls die Streuwinkel über die Kugel gleichverteilt sind.

– Für die bisherigen Aussagen bauchte die Art der Wechselwirkung zwischen den Teilchen nicht festgelegt zu werden. Für eine Wechselwirkung mit 1/r-Potential haben wir dann aus der Lösung des Kepler-Problems für positive Energie den Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Streuwinkel hergeleitet und dafür den differentiellen (Rutherford'schen) Streuquerschnitt hergeleitet.

– Schließlich haben wir Skalierungseigenschaften mechanischer Systeme unter der Annahme betrachtet, dass die potentielle Energie eine homogene Funktion ist. Weiterhin haben wir unter derselben Annahme den Virialsatz für gebundene Bahnen betrachtet. Beide Ergebnisse gelten allgemein und bieten daher mächtige Methoden zur Analyse mechanischer Systeme an.

== 9. Woche ==

Die wesentlichen Themen in dieser Woche waren:

– Die Transformation der Geschwindigkeit aus einem rotierenden in ein inertiales Bezugssystem. Das wesentliche Ergebnis dabei war, dass sich die dabei auftretende Zeitableitung der Drehmatrix durch einen axialen Vektor darstellen lässt, den Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit.

– Die Trägheitskräfte, die in einem rotierenden Bezugssystem zusätzlich zu den Kräften auftreten, die in einem umgebenden Inertialsystem herrschen. Das sind insbesondere die Corioliskraft, die auf der Nordhalbkugel der Erde zu einer Rechtsabweichung führt, und die Zentrifugalkraft, die vom senkrechten Abstand zur Drehachse abhängt. Weitere Kräfte kommen durch eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit zustande.

– Das reduzierte Dreikörperproblem, in dem ein dritter Körper betrachtet wird, der sich im gemeinsamen Gravitationsfeld zweier Massen befindet, die sich gegenseitig umlaufen. Reduziert heißt dieses Problem, weil die Masse des dritten Körpers als sehr klein gegenüber den ersten beiden Massen vorausgesetzt und angenommen wird, dass der dritte Körper in der Bahnebene der anderen beiden Massen umläuft. In dem rotierenden Ruhesystem der beiden Massen tritt ein effektives Potential auf, das zusätzlich zu den beiden Gravitationspotentialen ein Zentrifugalpotential enthält. Dieses Potential hat fünf Gleichgewichtspunkte, die Lagrange-Punkte, von denen drei auf der Verbindungslinie der beiden Massen liegen (L1,2,3). Die beiden Lagrange-Punkte L4,5 bilden mit den beiden Massen ein gleichseitiges Dreieck.

== 10. Woche ==

In dieser letzten Woche vor Weihnachten haben wir uns mit starren Körpern befasst, also solchen Objekten, in denen viele Massenpunkte durch feste Lagebeziehungen zu einem Körper zusammengefasst sind. Die wichtigsten Inhalte waren:

– Wir haben zunächst den Begriff der Freiheitsgrade eingeführt und festgestellt, dass ein starrer Körper sechs Freiheitsgrade hat: drei der Translation (des Schwerpunkts) und drei der Rotation.

– Für die drei Freiheitsgrade der Rotation haben wir die Konstruktion der Euler-Winkel eingeführt. Wir haben dabei die Konvention verwendet, dass zunächst um die z-, dann um die neue x-, dann um die neue z-Achse gedreht wird, und die zugehörige Drehmatrix formuliert. Zusätzlich haben wir den Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit durch die Zeitableitung der Euler-Winkel ausgedrückt.

– Zur Vorbereitung der nächsten Schritte haben wir Tensoren als multilineare Abbildungen aus einem Vektorraum in den zugrundeliegenden Zahlenkörper besprochen. Tensoren zweiter Stufe sind durch Matrizen darstellbar. Damit verbunden waren die Definition des Tensorprodukts und der Spur eines Tensors sowie die Bestimmung des Verhaltens von Tensoren unter Koordinatentransformationen.

– Ausgehend von einem Überblick über Endomorphismen haben wir zunächst besprochen, was Eigenwerte und Eigenvektoren von Endomorphismen sind und wie sie aufgefunden werden können: die Eigenwerte sind die Lösungen des charakteristischen Polynoms; die zugehörigen Eigenvektoren können dann durch Lösen der Eigenwertgleichung in der Regel schnell aufgefunden werden. Dabei muss beachtet werden, dass die Eigenvektoren beliebig skalierbar sind, also auch normiert werden können.

– Wir haben uns dann der Frage zugewandt, wie Endomorphismen bzw. ihre darstellenden Matrizen in Diagonalform gebracht werden können. Das Ergebnis war, dass die Eigenwerte gleich den Diagonalelementen dieser Matrizen sind und dass die normierten Eigenvektoren die Zeilenvektoren der Drehmatrix sind.

– Schließlich haben wir noch die kinetische Energie eines sich drehenden starren Körpers berechnet, wobei wir auf den Begriff des Trägheitstensors kamen. Mit ihm setzen wir die Vorlesung im neuen Jahr fort.