Aufgabe 7.1

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{-x}{x^2+y^2} = \frac{-1\cdot(x^2+y^2)+x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Es gilt daher

$$\int_{(0,1)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x \overset{y\neq 0,\mathscr{L}(\{0,1\})=0}{=} \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{1+y^2}$$

Wegen $y\in(0,1) \implies y\neq 0$ folgern wir

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{(0,1)} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\arctan(y) = \frac{1}{1+y^2}$ erhalten wir mit $\mathscr{L}(\{0,1\})=0$

$$-\int_{(0,1)} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = -\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = -\arctan(y)\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{\pi}{4}$$

und mithilfe völlig analoger Überlegungen sowie der Identität

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

erhalten wir

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Die beiden Integrale sind offensichtlich verschieden. Eine der Voraussetzungen des Satzes von Fubini muss daher verletzt sein. Es gilt (analog zu oben und unter Benutzung von $y\neq 0$)

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)} \left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\,\mathrm{d}x &= \int_{(0,y)} -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{(0,y)} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^y - \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_y^1 \\
&= \frac{y}{2y^2} + 0 - \frac{1}{1+y^2} + \frac{y}{2y^2} \\
&= -\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{y}.
\end{aligned}$$

Wegen $\int_{(0,1)} \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}$ genügt es zu zeigen, dass $\int_{(0,1)} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \not< \infty$. Dann ist nämlich

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} |g(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \not< \infty,$$

was aber eine Voraussetzung des Satzes von Fubini verletzt. Dies gelingt mittels einer Approximation durch einfache Funktionen, $\forall n \in \mathbb{N}$ sei f_n gegeben durch

$$f_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \chi_{[\frac{1}{k+1},k)}(x) \cdot k \leq \frac{1}{x} \qquad \forall x \in (0,1).$$

Da f_n eine einfache Funktion ist, erhalten wir definitionsgemäß

$$\int_{(0,1)} f_n \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \mu([1/(k+1),1/k)) \cdot k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-k}{k(k+1)} \cdot k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Wegen $f_n \leq \frac{1}{x}$ folgt $\forall n \in \mathbb{N}\colon$: $\int_{(0,1)} f_n \,\mathrm{d}x \leq \int_{(0,1)} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$ und damit im Limes $n \to \infty$

$$\int_{(0,1)} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \geq \lim_{n\to\infty} \int_{(0,1)} f_n \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}.$$

Damit folgt das gewünschte Ergebnis aus der Divergenz der harmonischen Reihe.

Aufgabe 7.2

(a) Behauptung $\Phi(U) = M \coloneqq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}_{>0} \cup \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis. Sei $(a,b,c) \in M$. Es gilt $c = \sqrt{r^2-1} \Leftrightarrow \sqrt{c^2+1} = r$. Also gibt es für jedes $c \in (0,\infty)$ genau eine Möglichkeit, $r \in (1,\infty)$ zu wählen. Umgekehrt gilt für jedes $r \in (1,\infty)\colon c = \sqrt{r^2-1} \in (0,\infty)$. Seien zunächst $a, b \neq 0$. Dann gilt $a = rt\cos(s) \Leftrightarrow t = \frac{a}{r\cdot\cos(s)}$. Wegen $t, r > 0$ muss das Vorzeichen von a und $\cos(s)$ gleich sein,

$$\begin{cases} \cos(s) > 0 \Leftrightarrow s \in (-\pi/2, \pi/2) & |a > 0 \\ \cos(s) < 0 \Leftrightarrow s \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi) & |a < 0 \end{cases},$$

dann gilt auch $t \in (0,\infty)$. Schließlich gilt $a = rt\cos(s),\ b = rt\sin(s) \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \tan(s)$. Wegen $\tan((-\pi,-\pi/2)) = \tan(0,\pi/2) = \mathbb{R}_{>0}$, $\tan((-\pi/2,0)) = \tan((\pi/2,\pi)) = \mathbb{R}_{<0}$, weil der Tangens auf diesen Intervallen injektiv ist und wegen $\frac{b}{a} \in R_{>0} \cup R_{<0}$ existiert stets genau ein s mit den Eigenschaften

$$\tan(s) = \frac{b}{a}, \qquad \begin{cases} s \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2) & |a > 0 \\ s \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi) & |a < 0 \end{cases}.$$

Ist nun $a = 0$, so folgt wegen $rt > 0$ sofort $\cos(s) = 0 \Leftrightarrow s \in \{\pm\pi/s\}$. Insbesondere ist also $\sin(s) = \pm 1$. Daher erhalten wir $b = rt\sin(s) = \pm rt \Leftrightarrow t = \pm\frac{b}{r}$. Wegen $r, t > 0$ muss daher $\operatorname{sgn}(b) = \operatorname{sgn}(\sin(s)) = \operatorname{sgn}(s)$ gelten. Damit ist s und folglich auch t eindeutig bestimmt. Ist $b = 0$, so folgt wegen $rt > 0$ sofort $\sin(s) = 0 \Leftrightarrow s = 0$. Insbesondere ist also $\cos(s) = 1$. Daher erhalten wir $a = rt\cos(s) = rt \Leftrightarrow t = \frac{a}{r}$. Allerdings muss $t, r > 0$ gelten. Daher existiert nur für $a > 0$ ein $t \in (0,\infty)$, sodass $\Phi(r,s,t) = (a,0,c)$. Unter dieser Voraussetzung ist (r,s,t) aber eindeutig bestimmt. Wir haben also sogar noch mehr gezeigt als nötig: Für jedes Tripel $(a,b,c) \in M$ existiert genau ein Tripel $(r,s,t) \in U$ mit $\Phi(r,s,t) = (a,b,c)$. Damit ist $\Phi\colon U \to M$ bijektiv. $\square$

Behauptung: $\det D\Phi = -\frac{tr^3}{\sqrt{r^2-1}}$.

Beweis.

$$\begin{aligned}\det D\Phi &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial s} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial t} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} t\cos(s) & t\sin(s) & \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} \\ -rt\sin(s) & rt\cos(s) & 0 \\ r\cos(t) & r\sin(s) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} \cdot t \cdot r^2 \cdot (-\sin^2(s) - \cos^2(s)) \\ &= -\frac{tr^3}{\sqrt{r^2-1}}\end{aligned}$$

□

(b) Alle partiellen Ableitungen sind stetig auf U, sodass Φ differenzierbar ist. Wir hatten bereits oben bewiesen, dass Φ bijektiv ist. Nun genügt es zu zeigen, dass $0 \notin \det D\Phi(U)$. Das ist aber wegen $\det D\Phi = -\frac{tr^3}{\sqrt{r^2-1}}$ offensichtlich.

(c) Behauptung: $N := (1, \sqrt{5}] \times (-\pi, \pi) \times [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}] = \Phi^{-1}(H)$. Sei $(r, s, t) \in U$ mit $\Phi(r, s, t) \in H$. Aus $x_3 \in [0, 2]$ erhalten wir sofort $r \in (1, \sqrt{5}]$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(1 + x_3^2) \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2(1 + x_3^2) \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}(1 + \sqrt{r^2-1}^2) \leq r^2t^2(\sin^2(s) + \cos^2(s)) \leq 2(1 + \sqrt{r^2-1}^2) \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{2}r^2 \leq r^2t^2 \leq 2r^2 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \leq t \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Daher erhalten wir $\Phi^{-1}(H) \subset N$. Sei $(r, s, t) \in N$. Dann sind beide Bedingungen erfüllt (siehe Äquivalenzumformungen im ersten Teil). Es folgt $\Phi^{-1}(H) = N$.

(d) Es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(s)\,\mathrm{d}s = \sin(s)\cos(s)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(s)\,\mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(s)\,\mathrm{d}s$$

Zusammen mit

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}s = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(s) + \cos^2(s)\,\mathrm{d}s = 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(s)$$

erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(s) = \pi$$

Nun wenden wir uns der eigentlichen Aufgabe zu. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^3(H \setminus \Phi(N)) &= \mathscr{L}^3(\{x_3 \in [0,2] \setminus (0,2], \frac{1}{2}(1+x_3^2) \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2(1+x_3^2)\})\\ &= \mathscr{L}^3(\{x_3 = 0, \frac{1}{2} \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2\})\end{aligned}$$

Sei $A \coloneqq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{1}{2} \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$

$$\begin{aligned}&= \mathscr{L}^3(\{0\} \times A)\\ &= \mathscr{L}(\{0\}) \cdot \mathscr{L}^2(A)\\ &= 0\end{aligned}$$

$f(x_1, x_2, x_3) \coloneqq x_1^2 x_3$ ist als stetige Funktion auf dem Kompaktum H integrierbar. Da das Lebesgue-Integral invariant unter Unterschieden auf Lebesgue-Nullmengen ist, gilt

$$\int_H f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\Phi(N)} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(!)}{=} \int_N f(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}x\,,$$

wobei (!) aus dem Transformationssatz folgt, da es sich bei Φ um einen C^1-Diffeomorphismus handelt.

Aus dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_N f(\Phi(x))|\det D\Phi(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\sqrt{5}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} (rt\cos(s))^2 \sqrt{r^2-1} \left| -\frac{tr^3}{\sqrt{r^2-1}} \right| \mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r\\ &= \int_1^{\sqrt{5}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} r^5 t^3 \cos^2(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}r\\ &= \int_1^{\sqrt{5}} r^5\,\mathrm{d}r \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(s)\,\mathrm{d}s \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} t^3\,\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{\sqrt{5}^6}{6} - \frac{1^6}{6}\right) \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}^4}{4} - \frac{(\sqrt{2}/2)^4}{4}\right)\\ &= \frac{124}{6} \cdot \pi \cdot \frac{15}{16}\\ &= \frac{155}{8}\pi\end{aligned}$$

Aufgabe 7.3

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Anwenden des Transformationssatzes mit $\phi(x) = x + y$ ergibt wegen $\phi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ und $\det D\phi = 1$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Fubini

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \,\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \,\mathrm{d}x$$

Insbesondere ist das Ergebnis wegen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ endlich und damit $(f * g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Zusatzaufgabe 7.1

Offensichtlich ist V abgeschlossen. Damit ist das Komplement von V offen. Es folgt $V \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$\mathscr{L}^3(V) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_V \,\mathrm{d}x$$

Fubini

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\{x \in \mathbb{R}^2 :\, x_1^2 + x_2^2 \leq f(x_3)^2\}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}x_3 \\ &= \int_a^b \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_{f(x_3)}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}x_3 \end{aligned}$$

Transformationssatz für Polarkoordinaten (siehe Bsp. 4.15)

$$= \int_a^b \int_0^{f(x_3)} \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\phi \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}x_3$$

Fubini

$$\begin{aligned} &= \int_a^b 2\pi \int_0^{f(x_3)} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}x_3 \\ &= \int_a^b 2\pi \frac{f(x_3)^2}{2} \,\mathrm{d}x_3 \\ &= \pi \int_a^b f(x_3)^2 \,\mathrm{d}x_3 \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 7.2

(a) Sei $M = \bigcup_{z\in\mathbb{Z}}[z\pi + \frac{\pi}{6}, z\pi + \frac{5\pi}{6}]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| &\geq \sum_{z\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{2}\chi_{[z\pi+\frac{\pi}{6}, z\pi+\frac{5\pi}{6}]}(x)\\ &\geq \sum_{z\in\mathbb{N}} \frac{1}{|x|}\chi_{[z\pi+\frac{\pi}{6}, z\pi+\frac{5\pi}{6}]}(x)\\ &\geq \sum_{z\in\mathbb{N}} \frac{1}{z+1}\chi_{[z\pi+\frac{\pi}{6}, z\pi+\frac{5\pi}{6}]}(x)\end{aligned}$$

Daher erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \,\mathrm{d}r \;\geq \int_{\mathbb{R}} \sum_{z\in\mathbb{N}} \frac{1}{z+1}\chi_{[z\pi+\frac{\pi}{6}, z\pi+\frac{5\pi}{6}]}(x) = \sum_{z=1}^{\infty}\frac{1}{z+1}\cdot\frac{2\pi}{3}$$

Diese Reihe ist aber divergent, da die harmonische Reihe divergiert. Also ist $\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$ nicht Lebesgue-integrierbar.

(b) Es gilt $\forall \epsilon > 0\colon \forall x', x'' > \frac{1}{\epsilon}$

$$\int_{x'}^{x''} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \;\leq \frac{1}{x'}\int_{x'}^{x''} \sin(x)\,\mathrm{d}x \;\leq \frac{1}{x'}|\cos(x'') - \cos(x')| \leq \frac{2}{x'} \leq 2\epsilon.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium ist f uneigentlich Riemann-integrierbar.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{t}e^{-xt}\sin(x)\Big|_0^R + \int_0^R \frac{1}{t}e^{-xt}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{t}e^{-Rt}\sin(R) - \frac{1}{t^2}e^{-xt}\cos(x)\Big|_0^R - \int_0^R \frac{1}{t^2}e^{-xt}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ t^2\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x &= -te^{-Rt}\sin(R) - e^{-Rt}\cos(R) + 1 - \int_0^R e^{-xt}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ (1+t^2)\int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x &= -e^{-Rt}(t\sin(R) - \cos(R)) + 1\\ \int_0^R \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x &= -\frac{e^{-Rt}}{1+t^2}(t\sin(R) - \cos(R)) + \frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

Die Folge

$$f_n\colon (0,\infty)\to\mathbb{R}, \qquad f_n(t) := \int_0^{\frac{\pi}{2}+\pi\cdot n} \sin(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}x = -t\frac{e^{-(\pi/2+\pi\cdot n)t}}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}.$$

ist eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen mit $f_n \nearrow \frac{1}{1+t^2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^0 \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

Wir wenden den Transformationssatz für den C^1-Diffeomorphismus $x \mapsto -x$ an

$$\begin{aligned}
&= \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(-x)}{-x} \, \mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^R \sin(x) \int_0^{\infty} e^{-xt} \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Fubini

$$= 2 \cdot \lim_{R\to\infty} \int_0^{\infty} \int_0^R \sin(x) e^{-xt} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und unserer Folge f_n erhalten wir

$$= 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

Siehe Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \arctan(t) \Big|_0^{\infty} \\
&= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe 7.3

Es gilt

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^r(X,\mu)} &= \left(\int_X |f|^r \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_X |f^{r\theta} \cdot f^{r(1-\theta)}| \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

Hölder-Ungleichung, wegen $1 = \frac{r\theta}{p} + \frac{r(1-\theta)}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$ handelt es sich tatsächlich um duale Exponenten. Wegen $r, \theta, p, q > 0$ muss einer der beiden Exponenten im für die Hölder-UGl geforderten Intervall $[1, \infty)$ liegen.

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\left(\int_X |f^{r\theta}|^{\frac{p}{r\theta}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{r\theta}{p}} \cdot \left(\int_X |f^{r(1-\theta)}|^{\frac{q}{r(1-\theta)}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_X |f^{r\theta}|^{\frac{p}{r\theta}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{\theta}{p}} \cdot \left(\int_X |f^{r(1-\theta)}|^{\frac{q}{r(1-\theta)}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{(1-\theta)}{q}} \\
&= \|f\|^{\theta}_{L^p(X,\mu)} \|f\|^{1-\theta}_{L^q(X,\mu)}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt bereits $L^p(X, \mu) \cap L^q(X, \mu) \subset L^r(X, \mu)$.

Zusatzaufgabe 7.4

(a) Sei $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ eine beliebige nicht messbare Menge (existiert, da sonst das Maßproblem gelöst wäre). Wähle dann $f(x) = e^{-x^2} \cdot (2 \cdot \chi_A(x) - 1)$. Sei $x \in A$. Dann gilt $f(x) = e^{-x^2} \in (0, 1]$. Sei $x \notin A$. Dann gilt $f(x) = -e^{-x^2} \in [-1, 0)$. Also ist f nicht messbar wegen $f^{-1}([0, 1]) = A$. Allerdings ist $|f| = e^{-x^2}$ als stetige Funktion messbar.

(b) Die Funktion f aus Teilaufgabe a ist nicht messbar, also auch nicht integrierbar. Allerdings ist

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi},$$

$|f|$ ist also integrierbar, f aber nicht.

(c) $\Omega \coloneqq \{1\}$ ist messbar. Allerdings ist jede offene Menge $\Omega_k \subset \Omega$ bereits die leere Menge, $\Omega_k = \emptyset$. Insbesondere ist also die beliebige Vereinigung solcher Mengen wegen $\cup_k \Omega_k = \emptyset \neq \Omega$ nie gleich Ω.

(d) d

(e) e

(f) f