Algebraische Zahlentheorie II
Sommersemester 2022

Dr. Katharina Hübner
basierend auf Alexander Schmidts AZT2-Skript von 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Kohomologie endlicher Gruppen

Im ganzen Kapitel sei G stets eine endliche Gruppe.

1.1 Tate-Kohomologiegruppen

Lemma 1.1. *Ist G eine endliche Gruppe, so ist jeder induzierte Modul koinduziert und jeder koinduzierte Modul induziert. Insbesondere sind koinduzierte Moduln homologisch trivial und induzierte Moduln kohomologisch trivial.*

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Koind}_G A & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_G A \\ \| & & \| \\ \mathrm{Abb}(G, A) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] \otimes A \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{g \in G} g \otimes x(g^{-1}) \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von G-Moduln. □

Die Normabbildung $N_G : A \to A$, $a \mapsto \sum_{g \in G} a$ induziert eine Abbildung $\bar{N}_G : A_G \to A^G$.

Definition. Die Gruppen

$$\hat{H}_0(G,A) = \ker(\bar{N}_G) \subset H_0(G,A)$$

und $\hat{H}^0(G,A) = H^0(G,A)/\mathrm{im}(\bar{N}_G)$ heißen die **modifizierten (Ko)Homologiegruppen** in Dimension 0.

Lemma 1.2. *Für einen (ko)induzierten Modul A gilt*

$$\hat{H}_0(G,A) = 0 = \hat{H}^0(G,A),$$

d.h. $\bar{N}_G : A_G \to A^G$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $A = \mathbb{Z}[G] \otimes B$ mit einer abelschen Gruppe B. Jedes Element in $x \in \mathbb{Z}[G] \otimes B$ hat eine eindeutige Darstellung der Form $x = \sum_{g \in G} g \otimes x_g$. Für $x \in A^G$ folgt, dass alle x_g gleich sind, und somit gilt $x = N_G(1 \otimes x_1)$. Dies zeigt $\hat{H}^0(G,A) = 0$.

Aus $N_G(x) = 0$ folgt $\sum x_g = 0$, also $x = \sum_{g \in G}(g-1)(1 \otimes x_g)$, und somit $\hat{H}_0(G,A) = 0$. □

Für eine *endlich erzeugte freie* abelsche Gruppe C setzen wir $C^+ = \mathrm{Hom}(C,\mathbb{Z})$. Ist C ein G-Modul, so auch C^+ und es gilt: $C \xrightarrow{\sim} C^{++}$.
Für eine abelsche Gruppe A haben wir Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} C \otimes A & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(C^+, A),\ c \otimes a \longmapsto (f \longmapsto f(c) \cdot a) \\ C^+ \otimes A & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}(C, A),\ f \otimes a \longmapsto (c \longmapsto f(c) \cdot a). \end{array}$$

Nun sei C ein endlich erzeugter projektiver G-Modul, insbesondere ist C endlich erzeugt und frei als abelsche Gruppe. Dann ist C direkter Summand in $\mathrm{Ind}_G C$ und somit nach Lemma 1.28 in Kapitel 3.2 für jeden G-Modul A der Modul $\mathrm{Hom}(C,A)$ direkter Summand in einem (ko)induzierten Modul. Nach 1.2 erhalten wir somit Isomorphismen

$$(C^+ \otimes A)_G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(C,A)_G \underset{\sim}{\xrightarrow{\bar{N}_G}} \mathrm{Hom}(C,A)^G. \qquad (*)$$

Sei nun $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ eine Auflösung von $\mathbb{Z}$ durch endlich erzeugte projektive G-Moduln. Dann ist $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon^+} P_\bullet^+$ eine Auflösung durch kohomologisch triviale Moduln (Lemma 1.28 in Kapitel 3.2). Für $n \le -1$ setzen wir $P_n := (P_{-n-1})^+$ und kleben die Komplexe zu einem exakten Komplex

$$\longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon^+ \circ \varepsilon} P_{-1} \longrightarrow P_{-2} \longrightarrow \dots$$

zusammen.

Definition. Für einen G-Modul A setzt man

$$\hat{X}^\bullet(G,A) = \mathrm{Hom}(P_\bullet, A) \text{ und } \hat{C}^\bullet(G,A) = \hat{X}^\bullet(G,A)^G$$

und definiert die n**-te Tate-Kohomologiegruppe** ($n \in \mathbb{Z}$) durch

$$\hat{H}^n(G,A) = H^n(\hat{C}^\bullet(G,A)).$$

Satz 1.3. *Es gilt*

$$\hat{H}^n(G,A) = \begin{cases} H^n(G,A) & \textit{für} \quad n \geq 1 \\ \hat{H}^0(G,A) & \qquad n = 0 \\ \hat{H}_0(G,A) & \qquad n = -1 \\ H_{-n-1}(G,A) & \qquad n \leq -2. \end{cases}$$

Beweis. Für $n \geq 1$ gilt

$$H^n(\hat{C}(G,A)) = H^n(C^\bullet(G,A)) = H^n(G,A).$$

Für $n \leq -2$ gilt unter Benutzung von $(*)$

$$\begin{aligned} \hat{H}^n(\hat{C}(G,A)) &= H^{n+1}(\mathrm{Hom}(P_\bullet^+, A)^G) \cong H_{-n-1}((P_\bullet \otimes A)_G) \\ &= H_{-n-1}(G,A). \end{aligned}$$

Nun schauen wir die Mitte an:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}(P_{-2},A)^G & \to & \mathrm{Hom}(P_{-1},A)^G & \stackrel{(\varepsilon^+\circ\varepsilon)^*}{\to} & \mathrm{Hom}(P_0,A)^G & \to & \mathrm{Hom}(P_1,A)^G \\ \| \wr & & \| \wr & \nearrow \varphi & & & \\ (P_1 \otimes A)_G & \to & (P_0 \otimes A)_G & & . & & \end{array}$$

Nach Konstruktion der vertikalen Isomorphismen kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}(P_{-1},A)^G & \stackrel{(\varepsilon^+)^*}{\to} & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},A)^G & \stackrel{\varepsilon^*}{\to} & \mathrm{Hom}(P_0,A)^G \\ \| \wr & & \| \wr & & \\ (P_0 \otimes A)_G & \stackrel{\varepsilon_*}{\to} & (\mathbb{Z} \otimes A)_G & . & \end{array}$$

Daher faktorisiert φ in der Form

$$(P_0 \otimes A)_G \stackrel{\varepsilon_*}{\to} (\mathbb{Z} \otimes A)_G = A_G \stackrel{\bar{N}_G}{\to} A^G = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},A)^G \stackrel{\varepsilon^*}{\to} \mathrm{Hom}(P_0,A)^G$$

und wir erhalten $\hat{H}^{-1}(G,A) = \ker(\bar{N}_G) = \hat{H}_0(G,A)$ und $\hat{H}^0(G,A) = \mathrm{coker}(\bar{N}_G)$. □

Korollar 1.4. *Sei A ein (ko)induzierter G-Modul. Dann gilt*

$$\hat{H}^n(G,A) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Satz 1.5. *Sei $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine exakte Folge von G-Moduln. Dann existiert eine natürliche exakte Folge*

$$\cdots \longrightarrow \hat{H}^i(G, A') \longrightarrow \hat{H}^i(G, A) \longrightarrow \hat{H}^i(G, A'') \longrightarrow \cdots .$$

Beweis. Die $\hat{X}^n(G, -)$ sind direkte Summanden in induzierten G-Moduln, insbesondere gilt $H^1(G, \hat{X}^n(G, A')) = 0$. Daher erhalten wir aus den kurzen exakten Folgen

$$0 \to \hat{X}^n(G, A') \to \hat{X}^n(G, A) \to \hat{X}^n(G, A'') \to 0$$

die exakte Folge von Komplexen.

$$0 \to \hat{C}^\bullet(G, A') \to \hat{C}^\bullet(G, A) \to \hat{C}^\bullet(G, A'') \to 0.$$

Die assoziierte lange exakte Kohomologiefolge zeigt das gewünschte. $\square$

Definiert man wie vorher für einen G-Modul A induktiv für $i \geq 0$:

$$A_0 = A, \quad A_{i+1} = \operatorname{coker}(A_i \to \operatorname{Koind}_G A_i),$$

und induktiv für $i \leq 0$: $A_0 = A$

$$A_i = \ker(\operatorname{Ind}_G A_{i+1} \longrightarrow A_{i+1})$$

so erhält man **Dimensionsverschiebung:**

$$\hat{H}^n(G, A_i) = \hat{H}^{n+i}(G, A) \quad \forall\, n, i \in \mathbb{Z}.$$

Nun betrachten wir den Fall, dass $P_\bullet$ der homologische Standardkomplex $X_\bullet$ ist, d.h. $X_n = \mathbb{Z}[G^{n+1}]$ mit den vorher definierten Differentialen. Sei für $(g_0, \ldots, g_n) \in G^{n+1}$ das Element $\varphi_{g_0,\ldots,g_n} \in \mathbb{Z}[G^{n+1}]^+$ gegeben durch

$$\varphi_{g_0,\ldots,g_n}(\sigma_0, \ldots, \sigma_n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (g_0, \ldots, g_n) = (\sigma_0, \ldots, \sigma_n) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann bilden die $\varphi_{g_0,\ldots,g_n}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{Z}[G^{n+1}]^+$. Wir erhalten einen G-Modulisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}[G^{n+1}]^+ & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}[G^{n+1}], \\ \varphi_{g_0,\ldots,g_n} & \longmapsto & (g_0^{-1}, \ldots, g_n^{-1}). \end{array}$$

Bezüglich dieses Isomorphismus erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[G^{n+1}]^+ & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}[G^{n+1}] \\ \uparrow \partial^+ & & \uparrow \Delta \\ \mathbb{Z}[G^n]^+ & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}[G^n], \end{array}$$

wobei

$$\Delta(g_0, \ldots, g_{n-1}) = \sum_{\tau \in G} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (g_0, \ldots, \tau, \ldots, g_{n-1})$$

gilt. Wir rechnen das nach:

$$\begin{aligned}
\partial^+\varphi_{g_0,\ldots,g_{n-1}}(\sigma_o,\ldots,\sigma_n) &= \varphi_{g_0,\ldots,g_{n-1}}(\partial(\sigma_0,\ldots,\sigma_n)) \\
&= \varphi_{g_0,\ldots,g_{n-1}}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\sigma_0,\ldots,\hat{\sigma}_i,\ldots,\sigma_n)\right). \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{\tau\in G}\varphi_{g_0,\ldots,\tau,\ldots,g_{n-1}}(\sigma_0,\ldots,\sigma_n).
\end{aligned}$$

Explizite Rechnungen in der „Mitte“ ergeben dann die folgende alternative Definition von Tate-Kohomologie.

Definition. Der Komplex $\hat{X}_\bullet$ mit

$$\hat{X}_n = \mathbb{Z}[G^{n+1}] \quad \text{für} \quad n \geq 0$$

und

$$\hat{X}_n = \mathbb{Z}[G^{-n}] \quad \text{für} \quad n \leq -1$$

mit den Differentialen:
$n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\partial_n(g_0,\ldots,g_n) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,\ldots,\hat{g}_i,\ldots,g_n) \\
\partial_{-n}(g_0,\ldots,g_{n-1}) &= \sum_{\tau\in G}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(g_0,\ldots,\tau,\ldots,g_{n-1})
\end{aligned}$$

und ∂_0:

$$\begin{array}{ccc}
X_0 & \longrightarrow & X_{-1} \\
\| & & \| \\
\mathbb{Z}[G] & & \mathbb{Z}[G]
\end{array}$$

ist die Abbildung, die jedes $g \in G$ auf $\sum_{\tau\in G}\tau \in \mathbb{Z}[G]$ abbildet, heißt die **vollständige Standardauflösung** von $\mathbb{Z}$. Es gilt

$$\hat{H}^n(G,A) = H^n(\mathrm{Hom}(X_\bullet, A)^G).$$

1.2 Res, Kores und Cup-Produkt

Sei $H \subset G$ eine Untergruppe und A ein G-Modul. Für $n \leq -2$, $n \geq 1$ haben wir die Abbildung

$$res : \hat{H}^n(G,A) \longrightarrow \hat{H}^n(H,A).$$

Für $n = 0$ ist $res : H^0(G,A) \to H^0(H,A)$ die natürliche Inklusion $A^G \hookrightarrow A^H$. Für $a \in A$ gilt $\sum_{g\in G} ga = \sum_s \sum_{h\in H} h \cdot sa$ wobei s ein Vertretersystem von $H \backslash G$ durchläuft. Daher gilt $N_G(A) \subset N_H(A)$ und res faktorisiert zu einer Abbildung

$$res : \hat{H}^0(G,A) \longrightarrow \hat{H}^0(H,A).$$

Analog: $res : H_0(G,A) \to H_0(H,A)$ ist definiert durch $a \mapsto \sum_{s\in H\backslash G} sa$.

Wegen
$$\sum_{h\in H} h\left(\sum_s sa\right) = \sum_{g\in G} ga$$
induziert *res* eine Abbildung
$$res : \hat{H}^{-1}(G,A) \longrightarrow \hat{H}^{-1}(H,A).$$

Satz 1.6. *res ist ein Homomorphismus von δ-Funktoren d.h. für jede exakte Folge $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ von G-Moduln und alle $n \in \mathbb{Z}$ kommutiert das Diagramm*
$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^n(G,A'') & \xrightarrow{\delta} & \hat{H}^{n+1}(G,A') \\ {\scriptstyle res}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle res} \\ \hat{H}^n(H,A'') & \xrightarrow{\delta} & \hat{H}^{n+1}(H,A'). \end{array}$$

Beweis. Für $n \neq -1$ klar. $n = -1$ Übungsaufgabe. □

Analog setzt sich die Abbildung
$$cor : \hat{H}^n(H,A) \to \hat{H}^n(H,A),$$
die bereits für $n \leq -2$, $n \geq 1$ definiert, ist auf alle $n \in \mathbb{Z}$ fort und es gilt

Satz 1.7. *cor ist ein Homomorphismus von δ-Funktoren.*

Satz 1.8. *Es gilt*
$$cor_G^H \cdot res_H^G = (G:H).$$

Seien A, B G-Moduln. Die natürliche Abbildung
$$A^G \times B^G \longrightarrow (A \otimes B)^G$$
setzt sich fort zu
$$\hat{H}^0(G,A) \times \hat{H}^0(G,B) \longrightarrow \hat{H}^0(G,A\otimes B).$$
Wir definieren (entsprechend Satz 1.21 in Kapitel 3.2) das Cup-Produkt
$$\hat{H}^p(G,A) \times \hat{H}^q(G,B) \longrightarrow \hat{H}^{p+q}(G,A\otimes B)$$
durch das kommutative Diagramm
$$\begin{array}{ccccc} \hat{H}^p(G,A) & \times & \hat{H}^q(G,B) & \xrightarrow{\cup} & \hat{H}^{p+q}(G,A\otimes B) \\ \wr\vert & & \wr\vert & & \vert\wr\, {\scriptstyle (-1)^{pq}} \\ \hat{H}^0(G,A_p) & \times & \hat{H}^0(G,B_q) & \xrightarrow{\cup} & \hat{H}^{p+q}(G,A_p\otimes B_q). \end{array}$$

Beachte

$$\begin{aligned}\hat{H}^{p+q}(G, A\otimes B) &\cong \hat{H}^p(G,(A\otimes B)_q)\cong \hat{H}^p(G, A\otimes B_q)\\ &\cong \hat{H}^0(G,(A\otimes B_q)_p)\cong \hat{H}^0(G, A_p\otimes B_q).\end{aligned}$$

Man kann auch explizite Formeln für das Cup-Produkt auf dem vollständigen Standardkomplex geben.

Schließlich passen auch das homologische und das kohomologische Shapiro-Lemma zusammen, d.h. es gilt

Satz 1.9. *Sei $H \subset G$ eine Untergruppe und A ein H-Modul. Dann gilt*

$$\hat{H}^n(H, A) \cong \hat{H}^n(G, \mathrm{Ind}_G^H A)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Lassen wir weg. □

1.3 Kohomologie der zyklischen Gruppen

Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung n und $\sigma \in G$ ein Erzeuger. Setze

$$\begin{aligned}N_G A &= \mathrm{im}(N_G : A \to A),\\ {}_{N_G}A &= \ker(N_G : A \longrightarrow A).\end{aligned}$$

Dann gilt nach Definition:

$$\hat{H}^0(G, A) = A^G/N_G A,\ \hat{H}^{-1}(G, A) = {}_{N_G}A/I_G A.$$

Wegen

$$\sigma^i - 1 = (\sigma - 1)(\sigma^{i-1} + \cdots + 1)$$

gilt $I_G A = (\sigma - 1)\cdot A$.

Satz 1.10. *Sei G eine endliche zyklische Gruppe. Dann ist $\hat{H}^2(G, \mathbb{Z})$ zyklisch von der gleichen Ordnung wie G. Sei $\chi \in H^2(G, \mathbb{Z})$ ein Erzeuger. Dann induziert das Cup-Produkt*

$$\chi \cup - : \hat{H}^n(G, A) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{n+2}(G, A)$$

Isomorphismen für alle $n \in \mathbb{Z}$ und jeden G-Modul A. Insbesondere gilt:

$$\hat{H}^{2n}(G, A) \cong \hat{H}^0(G, A)$$

und

$$\hat{H}^{2n-1}(G, A) \cong \hat{H}^{-1}(G, A)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $\langle\sigma\rangle = G$ und $N = \#G$. Wir betrachten die exakte Folge

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\cdot(\sigma-1)} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

wobei ε die Augmentation $\Sigma\, a_i\sigma^i \mapsto \Sigma\, a_i$ und

$$\mu(a) = a(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{N-1})$$

ist. Wir erhalten (aufbrechen in zwei kurze exakte Folgen) einen Isomorphismus

$$\delta^2 : \hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^2(G, \mathbb{Z}).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}/N_G\mathbb{Z} \\ &= \mathbb{Z}/(1 + \cdots + \sigma^{N-1})\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \end{aligned}$$

erhalten wir die erste Aussage. Außerdem ist jeder Erzeuger χ von der Form

$$\chi = \delta^2(m), \quad m \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times.$$

Da alle Objekte in $(*)$ $\mathbb{Z}$-frei sind, bleibt $(*)$ nach Tensorieren mit jedem G-Modul A exakt. Daher erhalten wir für jedes A einen Isomorphismus

$$\delta^2 : \hat{H}^n(G, A) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{n+2}(G, A),$$

der in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \hat{H}^n(G, A) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\cdot m"] & \hat{H}^n(G, A) \arrow[d, "\chi\cup"'] \\ \hat{H}^n(G, A) \arrow[r, "\sim", "\delta^2"'] & \hat{H}^{n+2}(G, A) \end{tikzcd}$$

passt.

Um zu zeigen, dass $\chi \cup -$ ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $\cdot m$ ein Isomorphismus ist. Dies folgt aus $m \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ und weil $\hat{H}^n(G, A)$ ein $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-Modul ist. □

Bemerkung. Nach Wahl eines Erzeugers σ von G werden wir stets den Isomorphismus $\delta^2(1) \cup - \; : \; \hat{H}^n(G, A) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{n+2}(G, A)$ als „kanonische" Identifikation verwenden.

Korollar 1.11. *Sei G endlich zyklisch. Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Folge von G-Moduln, so erhalten wir ein exaktes Hexagon*

$$\begin{tikzcd} & \hat{H}^0(G, A) \arrow[r] & \hat{H}^0(G, B) \arrow[dr] & \\ \hat{H}^{-1}(G, C) \arrow[ur] & & & \hat{H}^0(G, C) \arrow[dl] \\ & \hat{H}^{-1}(G, B) \arrow[ul] & \hat{H}^{-1}(G, A). \arrow[l] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Alle Abbildungen sind die offensichtlichen, bis auf $\hat{H}^0(G,C) \to \hat{H}^{-1}(G,A)$. Dies ist die Komposition von $\hat{H}^0(G,C) \xrightarrow{\delta} \hat{H}^1(G,A)$ mit dem Inversen des Isomorphismus

$$\delta^2(1) \cup - : \hat{H}^{-1}(G,A) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^1(G,A)$$

aus 1.10. Dieser hängt von der Wahl eines Erzeugers σ von G ab, ist aber kanonisch im Modul. Daher kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \hat{H}^{-1}(G,A) & \longrightarrow & \hat{H}^{-1}(G,B) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \hat{H}^1(G,A) & \longrightarrow & \hat{H}^1(G,B) \end{array}$$

was die Exaktheit des Hexagons auch bei $\hat{H}^0(G,C)$ zeigt. $\square$

Definition. Ist sowohl $\hat{H}^0(G,A)$ als auch $\hat{H}^{-1}(G,A)$ endlich, so heißt

$$h(G,A) := \frac{\#\hat{H}^0(G,A)}{\#\hat{H}^1(G,A)}$$

der **Herbrand-Index** von A.

Sei σ ein Erzeuger von G und $D = \sigma - 1 : A \to A$. Dann gilt $D \circ N_G = 0 = N_G \circ D$ und

$$\begin{array}{rcl} \hat{H}^0(G,A) & = & \ker(D)/\mathrm{im}(N_G) \\ \hat{H}^{-1}(G,A) & = & \ker(N_G)/\mathrm{im}(D) \end{array}$$

Satz 1.12. *Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine exakte Folge von G-Moduln. Dann gilt*

$$h(G,B) = h(G,A) \cdot h(G,C)$$

in dem Sinne: Sind zwei der Indizes definiert, so auch der dritte und Gleichheit gilt.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Hexagon in 1.11. $\square$

Satz 1.13. *Ist A endlich, so gilt*

$$h(G,A) = 1.$$

Beweis. Der Homomorphiesatz liefert

$$\#\ker(D) \cdot \#\mathrm{im}(D) = \#A = \#\ker(N_G) \cdot \#\mathrm{im}(N_G).$$

Dies zeigt

$$\frac{\#\hat{H}^0(G,A)}{\#\hat{H}^1(G,A)} = 1$$

$\square$

1.4 Kohomologische Trivialität

Erinnerung.

Definition. Ein G-Modul A heißt **kohomologisch trivial**, wenn $H^n(H, A) = 0$ für alle $n \geq 1$, $H \subseteq G$.

Ist A eine Torsionsgruppe, und p eine Primzahl, so bezeichnet $A(p)$ den p-primären Anteil. Es gilt $A \cong \bigoplus_p A(p)$.

Satz 1.14. *Sei A ein G-Modul und G_p eine p-Sylowgruppe von G. Dann ist für alle $n \in \mathbb{Z}$*

$$res : \hat{H}^n(G, A)(p) \longrightarrow \hat{H}^n(G_p, A)$$

injektiv und

$$cor : \hat{H}^n(G_p, A) \longrightarrow \hat{H}^n(G, A)(p)$$

surjektiv.

Beweis. Es gilt $cor \circ res = (G : G_p)$ und dies ist eine natürliche Zahl prim zu p. Daher ist

$$cor \circ res : \hat{H}^n(G, A)(p) \longrightarrow \hat{H}^n(G, A)(p)$$

ein Isomorphismus. □

Korollar 1.15.
(i) *Gilt $\hat{H}^n(G_p, A) = 0$ für alle Primzahlen p dann gilt $\hat{H}^n(G, A) = 0$.*
(ii) *Ein G-Modul A ist genau dann kohomologisch trivial, wenn er ein kohomologisch trivialer G_p-Modul für jedes p ist.*

Beweis. (i) Nach 1.14 haben wir eine Injektion

$$\hat{H}^n(G, A) \to \bigoplus_p \hat{H}^n(G_p, A).$$

Daher gilt

$$\hat{H}^n(G_p, A) = 0 \quad \forall\, p \Longrightarrow \hat{H}^n(G, A) = 0.$$

(ii) Aus (i) folgt A kohomologisch trivialer G_p-Modul $\forall\, p \Longrightarrow A$ kohomologisch trivialer G-Modul.

Die andere Richtung ist trivial, weil eine Untergruppe von G_p auch eine Untergruppe von G ist. □

Satz 1.16. *Sei G eine p-Gruppe und sei A ein p-primärer G-Modul.*

(i) *Gilt $H_0(G, A) = 0$ oder $H^0(G, A) = 0$, so folgt $A = 0$.*
(ii) *Gilt $pA = 0$ und $\hat{H}^n(G, A) = 0$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, dann ist A induziert.*

Beweis. Jedes $a \in A$ erzeugt einen endlichen G-Untermodul von A. Daher können wir im Beweis der Implikation $H^0(G,A) = 0 \Longrightarrow A = 0$ annehmen, dass A endlich ist. Das Komplement $A \smallsetminus A^G$ ist disjunkte Vereinigung von nichttrivialen G-Bahnen Ga, $a \in A \smallsetminus A^G$. Es gilt: $\#Ga = \#(G/G_a)$, wobei G_a die Standgruppe von a ist. Daher gilt

$$p \mid \#Ga \quad \forall\, a \in A \smallsetminus A^G.$$

Daher gilt $p \mid \#(A \smallsetminus A^G)$. Gilt nun $A^G = 0$ so folgt $\#A \equiv 1 \bmod p$. Da $\#A$ eine p-Potenz ist, folgt $\#A = 1$.

Ist $H_0(G,A) = 0$, so folgt $0 = H_0(G,A)^* = H^0(G,A^*)$. Also $A^* = 0 \Longrightarrow A = 0$. Dies zeigt (i).

(ii) Wegen $pA = 0$ ist A ein $\mathbb{F}_p[G]$-Modul. Sei $\Lambda = \mathbb{F}_p[G]$, I eine $\mathbb{F}_p$-Basis von A^G und $V = \bigoplus_I \Lambda$. Dann ist $\operatorname{Hom}(A,V)$ für jeden Modul A ein induzierter Modul, denn

$$\operatorname{Hom}(A,\Lambda) = \operatorname{Hom}(A,\mathbb{F}_p[G]) = \operatorname{Hom}(A,\mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G].$$

Daher besteht die exakte Folge

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(A/A^G,V) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A,V) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A^G,V) \longrightarrow 0$$

aus induzierten G-Moduln und folglich ist

$$\operatorname{Hom}_G(A,V) \longrightarrow \operatorname{Hom}_G(A^G,V) = \operatorname{Hom}(A^G,V^G)$$

surjektiv. Außerdem gilt $\Lambda^G = \mathbb{F}_p$, also $V^G = \bigoplus_I \mathbb{F}_p$. Daher gibt es einen Isomorphismus $A^G \cong V^G$ der sich wegen der Surjektivität zu einem G-Homomorphismus $j : A \to V$ ausdehnt. j ist injektiv wegen $\ker(j)^G = \ker(j|_{A^G}) = 0$ und (i). Nun setze $C = \operatorname{coker}(j)$. Wir erhalten eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow A^G \xrightarrow{\sim} V^G \longrightarrow C^G \longrightarrow H^1(G,A).$$

Daher gilt:

$$H^1(G,A) = 0 \Longrightarrow C^G = 0 \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow j \text{ ist Isomorphismus}$$

$$\Longrightarrow A \cong V = \bigoplus_I \mathbb{F}_p[G] = \operatorname{Ind}_G\left(\bigoplus_I \mathbb{F}_p\right).$$

Gilt nun $\hat{H}^n(G,A) = 0$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, so folgt $H^1(G,A_{n-1}) = \hat{H}^n(G,A) = 0$, und A_{n-1} ist induziert. Daraus folgt:

$$H^1(G,A) = \hat{H}^{2-n}(G,A_{n-1}) = 0.$$

Daher ist A induziert. □

Erinnerung: Ein G-Modul $A \neq 0$ heißt **einfach**, wenn es keinen G-Modul B, mit $0 \subsetneqq B \subsetneqq A$ gibt.

Lemma 1.17. *Ein einfacher G-Modul A ist endlich. Es gibt eine eindeutig bestimmte Primzahl p mit $pA = 0$.*

Beweis. Sei A einfach und $a \in A$, $a \neq 0$. Dann ist A als G-Modul durch a erzeugt, also ist A endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann existiert eine Primzahl p so dass die p-Multiplikation. $A \xrightarrow{\cdot p} A$ nicht surjektiv ist. Daher gilt $pA \subsetneqq A$, also $pA = 0$. Die Eindeutigkeit von p ist klar, da aus $qA = 0$ für ein $q \neq p$ folgen würde $A = 0$. □

Satz 1.18. *Sei G eine p-Gruppe. Dann ist jeder einfache p-primäre G-Modul A isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit trivialer G-Wirkung.*

Beweis. Nach 1.17 gilt $pA = 0$. Wegen $A \neq 0$ und A einfach folgt $A^G = A$ ($A^G = 0$ würde nach 1.16 $A = 0$ implizieren). Daher ist A ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum mit trivialer G-Wirkung. Da A einfach ist, folgt $\dim_{\mathbb{F}_p} A = 1$. □

Da jeder endliche G-Modul A eine Kompositionsreihe $0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n = A$ mit A_i/A_{i-1} einfach für $i = 1, \ldots, n$ besitzt (siehe Algebra-Vorlesung) erhalten wir

Korollar 1.19. *Ist G eine p-Gruppe, so hat jeder endliche p-primäre G-Modul A eine Kompositionsreihe in der die Graduierten isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit trivialer G-Wirkung sind.*

Satz 1.20. *Sei G eine endliche Gruppe und sei A ein G-Modul, so dass für jede Primzahl p ein $n_p \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\hat{H}^{n_p}(G_p, A) = 0 = \hat{H}^{n_p+1}(G_p, A)$$

existiert. Dann ist A kohomologisch trivial. Ist A $\mathbb{Z}$-frei, so ist A ein direkter Summand in einem freien $\mathbb{Z}[G]$-Modul.

Für jeden kohomologisch trivialen Modul A gilt

$$\hat{H}^n(H, A) = 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \quad \forall\, H \subseteq G.$$

Beweis. Sei $0 \to R \to F \to A \to 0$ eine exakte Folge mit einem freien $\mathbb{Z}[G]$-Modul F.

Behauptung: Für jede Primzahl p ist R/pR ein induzierter G_p-Modul.

Beweis der Behauptung. F ist induzierter G_p-Modul. Aus

$$\hat{H}^{n_p}(G_p, A) = 0 = \hat{H}^{n_p+1}(G_p, A), \;\; \hat{H}^i(G_p, F) = 0 \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}$$

und der langen exakten Folge erhalten wir

$$\hat{H}^{n_p+1}(G_p, R) = 0 = \hat{H}^{n_p+2}(G_p, R). \tag{2}$$

Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot p} R \longrightarrow R/pR \longrightarrow 0 \tag{3}$$

gibt uns

$$\hat{H}^{n_p+1}(G_p, R/pR) = 0.$$

Nach 1.16 (ii) ist R/pR induziert. Dies zeigt die Behauptung.

Wir nehmen nun an, dass A $\mathbb{Z}$-frei ist. Dann ist $\operatorname{Ext}^1(A, A) = 0$ und Anwenden von $\operatorname{Hom}(A, -)$ auf die kurze exakte Folge $0 \to R \to F \to A$ liefert die kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, R) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, F) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, A) \longrightarrow 0.$$

Wäre $H^1(G, \operatorname{Hom}(A, R)) = 0$, so wäre $\operatorname{Hom}_G(A, F) \to \operatorname{Hom}_G(A, A)$ surjektiv und ein Urbild von id_A in $\operatorname{Hom}_G(A, F)$ realisiert A als direkten Summanden in F.

Daher genügt zu zeigen: $H^1(G, M) = 0$ für $M = \operatorname{Hom}(A, R)$. Aus (3) erhalten wir die exakte Folge

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot p} M \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, R/pR) \longrightarrow 0.$$

Daher ist $M/pM = \operatorname{Hom}(A, R/pR)$ ein induzierter G_p-Modul. Dies impliziert, dass

$$H^1(G_p, M) \xrightarrow{\cdot p} H^1(G_p, M)$$

ein Isomorphismus ist, also $H^1(G_p, M) = 0$ für alle p. Nach 1.15 (i) folgt $H^1(G, M) = 0$. Folglich ist A direkter Summand in F.

Nun sei A beliebig. Der erste Teil des Beweises angewendet auf den $\mathbb{Z}$-freien G-Modul R zeigt, dass R direkter Summand in einem freien $\mathbb{Z}[G]$-Modul ist. Daher ist R kohomologisch trivial und da F kohomologisch trivial ist, ist auch A kohomologisch trivial.

Sei nun A kohomologisch trivial. Dann ist nach dem eben bewiesenen R direkter Summand in einem freien. Daher gilt für jede Untergruppe H von G

$$\hat{H}^i(H, F) = 0 = \hat{H}^i(H, R) \quad \forall\, i$$

und deshalb $\hat{H}^i(H, A) = 0 \quad \forall\, i.$ □

Korollar 1.21. *Sei G eine endliche Gruppe und A, B G-Moduln. Ist A kohomologisch trivial und B teilbar, oder A $\mathbb{Z}$-frei und B kohomologisch trivial, so ist* $\operatorname{Hom}(A, B)$ *kohomologisch trivial.*

Beweis. Sei A kohomologisch trivial und B teilbar. Wir betrachten eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

mit einem freien G-Modul F. Da F und A kohomologisch trivial sind, gilt dies auch für R. Außerdem ist R $\mathbb{Z}$-frei, und folglich nach 1.20 direkter Summand in einem freien $\mathbb{Z}[G]$-Modul F'. Folglich ist $\mathrm{Hom}(R, B)$ direkter Summand im induzierten G-Modul $\mathrm{Hom}(F', B)$ und daher kohomologisch trivial. Da B teilbar ist, ist die Folge

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R, B) \longrightarrow 0$$

exakt und da die letzten beiden Moduln kohomologisch trivial sind, gilt dies auch für $\mathrm{Hom}(A, B)$. Der Fall dass A $\mathbb{Z}$-frei und B kohomologisch trivial ist wird analog behandelt. $\square$