Namen: ______________________

____

Aufgabe	8.1	8.2	8.3	Z8.1	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 8

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 8.1 **5 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $\phi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\phi(x) := \begin{cases} \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.1}$$

a) Zeigen Sie, dass $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

b) Sei $\varepsilon > 0$. Wir definieren $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch $\varphi := \frac{\phi}{\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}$ und definieren $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass $f * \varphi_\varepsilon \to f$ in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Hinweis: Zu b): Zeigen Sie zuerst

$$|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(x)} |f(x) - f(y)|\,\mathrm{d}y \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \varepsilon\}$ und $C > 0$ eine nur von φ und n abhängige Konstante bezeichnet.

Aufgabe 8.2 **5 Punkte**

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass $f_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert, so dass $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von der Faltungsapproximation.

Aufgabe 8.3 **5 Punkte**

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zu $h \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $f_h(x) := f(x+h)$. Zeigen Sie, dass $\|f - f_h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{h\to 0} 0$.

Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 8.2 und das Lemma von Hadamard.

Zusatzaufgabe 8.1 (Transformationssatz) **3 Punkte**

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2), \mathscr{L}^2)$. Sei $\mathbb{R}_+ := (0,\infty) \subset \mathbb{R}$. Sei $T\colon \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow T(\mathbb{R}_+^2)$ definiert durch

$$T(x,y) := \left(\frac{y^2}{x}, \frac{x^2}{y}\right) \qquad \text{für alle } x, y > 0.$$

a) Zeigen Sie, dass T ein C^1–Diffeomorphismus ist.

b) Seien $0 < a < b$ und $0 < p < q$. Wir definieren

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 : ax < y^2 < bx,\ py < x^2 < qy\}.$$

Zeigen Sie, dass M eine messbare Menge ist und bestimmen Sie $T(M)$.

c) Bestimmen Sie $\mathscr{L}^2(M)$.

Abgabe bis spätestens 21.01.2021, 14:00 Uhr in Moodle.