Aufgabe 28

(i)→(ii) Ist f bijektiv, so kann zur Abbildung $\Phi\colon \operatorname{Hom}_R(L,M) \to \operatorname{Hom}_R(L,N), g \mapsto f\circ g$ einfach die Umkehrabbildung $\Phi^{-1}\colon \operatorname{Hom}_R(L,N) \to \operatorname{Hom}_R(L,M), g \mapsto f^{-1}\circ g$ angegeben werden. Die Wohldefiniertheit ist trivial und es gilt

$$\Phi \circ \Phi^{-1}(g) = \Phi(f^{-1}(g)) = f(f^{-1}(g)) = g$$

und

$$\Phi^{-1} \circ \Phi(g) = \Phi^{-1}(f(g)) = f^{-1}(f(g)) = f.$$

(ii)→(i) Wir bezeichnen die Abbildung wieder mit Φ. Setzen wir $L = N$, so erhalten wir eine bijektive Abbildung $\Phi\colon \operatorname{Hom}_R(N,M) \to \operatorname{Hom}_R(N,N)$. Daher $\exists g \in \operatorname{Hom}_R(N,M)\colon f\circ g = \mathrm{id}_N$. Also muss $\operatorname{im} f = N$ sein, sonst wäre $N = \operatorname{im}\operatorname{id} = \operatorname{im}(f\circ g) \subset \operatorname{im} f \subsetneq N$↯. Für $L = M$ erhalten wir eine bijektive Abbildung $\Psi\colon \operatorname{Hom}_R(M,M) \to \operatorname{Hom}_R(M,N)$. Angenommen, $\ker f$ wäre $\neq 0$. Da $\ker f$ ein Untermodul von M ist, können wir nun g definieren als eine beliebige lineare Abbildung (nicht die Nullabbildung) von M nach $\ker f$ komponiert mit der kanonischen Inklusion $\iota\colon \ker f \to M$. Dann ist $\operatorname{im} g = \ker f$ und damit ist $f \circ g \equiv 0$, obwohl $g \neq 0$ ist. Das widerspricht der Injektivität von Ψ. Also muss $\ker f = \{0\}$ sein. Insgesamt folgern wir also, dass f bijektiv und damit ein R-Modulisomorphismus sein muss.

Aufgabe 29

(a) Behauptung: $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$.

Beweis. Sei $a\otimes b \in \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann ist $a = 2\cdot\frac{1}{2}a$ und damit $a\otimes b = \frac{1}{2}a \otimes 2b = \frac{1}{2}a\otimes 0 = 0$. Angewendet für alle $a\otimes b \in \mathbb{Q}\otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ folgt die Behauptung. □

(b) Behauptung: $2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{\cong}{=} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Nach Vorlesung ist $2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{\cong}{=} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} 2\mathbb{Z} \overset{\cong}{=} 2\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}2\mathbb{Z}) \overset{\cong}{=} 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ Damit gilt

$$\#\{2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\} = \#\{0 + 4/Z, 2 + 4\mathbb{Z}\} = 2 = \#\{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\},$$

wir können also einen offensichtlich einen Isomorphismus zwischen beiden Mengen angeben. Damit folgt die Behauptung. □

(c) Behauptung: $2\otimes 1 = 0$ in $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, aber $2\otimes 1 \neq 0$ in $2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Beweis. Es gilt: $2\otimes\overline{1} = (2\cdot 1)\otimes\overline{1} = 1\otimes(2\cdot\overline{1}) = 1\cdot\overline{0} = 0$. Angenommen, es wäre $2\otimes 1 = 0$ in $2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann können wir ein beliebiges $a\otimes b \in 2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wählen. Da jedes Element in $2\mathbb{Z}$ Vielfaches von 2 ist, gibt es ein $c\in\mathbb{Z}$, sodass gilt $a\otimes b = c(2\otimes b)$. Nun machen wir eine Fallunterscheidung, ist $b = 0$, so ist offensichtlich $a\otimes b = 0$, ist $b = 1$, so ist nach unserer Annahme $a\otimes b = c(2\otimes 1) = c\cdot 0 = 0$. Also wäre bereits $2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu Aufgabe (b). □

Aufgabe 30

Seien R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul.

(a) Behauptung: Es existiert ein eindeutiger surjektiver R-Modulhomomorphismus

$$f : I\otimes_R M \longrightarrow IM$$

mit $f(a\otimes m) = am$ für $a \in I$ und $m \in M$.

Beweis. Wir definieren uns eine bilineare Abbildung $\varphi : I \times M \longrightarrow IM, (a, m) \longmapsto am$. Mit der universellen Eigenschaft (UT) existiert genau ein R-Modulhomomorphismus $f : I \otimes_R M \longrightarrow IM$ mit $f \circ \tau = \varphi$. Für ein $a \in I$ und ein $m \in M$ folgt somit: $f(a \otimes m) = f(\tau(a, m)) = \varphi(a, m) = am$. Weiter gilt für ein beliebiges $m \in IM$: Es existieren $a_i \in I, m_i \in M$ sodass

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(a_i \otimes m_i) \end{aligned}$$

Nun ist f ein R-Modulhomomorphismus, also gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(a_i \otimes m_i) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes m_i\right) \\ &= f(z) \end{aligned}$$

für ein $z \in I \otimes_R M$.

□

(b) Behauptung: f aus Teil (a) ist im Allgeminen nicht injektiv.

Beweis. Seien $R = \mathbb{Z}, I = 2\mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$f : 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0,$$

jedoch mit Aufgabe 29 (b) gilt $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \overset{\cong}{\equiv} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0$, also ist f nicht injektiv. □

Aufgabe 31

(a) Wegen $w, v \neq 0$ sei O.B.d.A. $v_i \neq 0$ und $w_j \neq 0$. Sei dann A die Matrix mit $A_{ij} = 1$ und sonst nur Nulleinträgen. Wir definieren $\beta \colon V \times V \to K, (v, w) \mapsto v^T \cdot A \cdot w$. Sei $v'^T := v^T \cdot A$. Dann gilt $v'_j = v_i$ und $v'_i = 0\ \forall i \neq j$. Multiplizieren wir nun $v'^T \cdot w = \sum_{\nu=1}^{\dim V} v'_\nu \cdot w_\nu = v'_j \cdot w_j = v_i \cdot w_j$. Also gilt $\beta(v, w) = v^T \cdot A \cdot w = v_i \cdot w_j \neq 0$ nach Voraussetzung. Da K ein K-Modul ist, gibt es nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts genau einen Modulhomomorphismus $f \colon V \otimes V \to K$ mit $f(v \otimes w) = \beta(v, w) \neq 0$. Da f linear ist, wäre $f(0) = 0$, also ist $v \otimes w \neq 0$.

(b) Sei l ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ und m ein Eigenvektor von g zum Eigenwert μ. Dann gilt

$$(f \otimes g)(l \otimes m) = f(l) \otimes g(m) = (\lambda l) \otimes (\mu m) = \lambda\mu(l \otimes m).$$

Also ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von $f \otimes g$ zum Eigenvektor $l \otimes m$.

(c) Wir wählen dieselben Bezeichnungen wie in der b. Es gilt

$$[(f \otimes \mathrm{id}_V) + (\mathrm{id}_V \otimes g)](l \otimes m) = f(l) \otimes m + l \otimes g(m) = (\lambda l) \otimes m + l \otimes (\mu m) = (\lambda + \mu)(l \otimes m).$$

Also ist $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von $[(f \otimes \mathrm{id}_V) + (\mathrm{id}_V \otimes g)]$ zum Eigenvektor $l \otimes m$.