Übungen zu Funktionentheorie 1 Musterlösung Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 7

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 12. Juni

Bearbeiten Sie vier Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert. Sei D eine offene nichtleere wegzusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

27. Aufgabe: Seien f und g holomorphe Funktionen auf D. Dann gilt für jeden geschlossene stetige und stückweise differenzierbare Kurve $\gamma : [0,1] \to D$ die Formel der partiellen Integration:

$$\oint_\gamma f(z)g'(z) \mathrm{d}\, z = -\oint_\gamma f'(z)g(z) \mathrm{d}\, z \ .$$

Lösung: Nach Produktregel gilt $(fg)' = f'g + fg'$. Damit gilt

$$\oint_\gamma f(z)g'(z) \mathrm{d}\, z + \oint_\gamma f'(z)g(z) \mathrm{d}\, z = \oint_\gamma (fg)' \ \mathrm{d}z = 0 \ .$$

Im letzten Schritt verwenden wir, dass das geschlossene Wegintegral über eine Funktion mit Stammfunktion immer Null ist. Im Detail sieht das so aus: Sei h eine beliebige holomorphe Funktion, zum Beispiel $h = fg$. Dann gilt

$$\oint_\gamma h' \ \mathrm{d}z = \int_0^1 h'(\gamma(t))\gamma'(t) \ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(\gamma(t)) \ \mathrm{d}t = h(\gamma(1)) - h(\gamma(0)) = 0 \ .$$

28. Aufgabe: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion. Zeigen Sie: $\exp \circ f$ ist kein Polynom.

Lösung: Angenommen, $\exp \circ f$ wäre ein Polynom. Dann hat es entweder eine Nullstelle oder ist konstant nach Fundamentalsatz der Algebra. Bekanntlich hat exp keine Nullstellen, also ist $\exp \circ f$ konstant. Damit ist $0 = (\exp \circ f)' = (\exp \circ f) \cdot f'$, also $f' = 0$. Nach Aufgabe 16 ist f konstant, weil $\mathbb{C}$ wegzusamenhängend ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

29. Aufgabe: Sei $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetiger Körper-Automorphismus. Zeigen Sie: σ ist die Identität oder die komplexe Konjugation.

Lösung: Körperautomorphismen fixieren immer den Primkörper, also den von 1 erzeugten kleinsten Unterkörper. Weil $\mathbb{C}$ Charakteristik Null hat, ist der Primkörper hier der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Da σ stetig ist, folgt $\sigma(x) = x$ für alle reellen $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist also $\sigma(x + iy) = \sigma(x) + \sigma(i)\sigma(y) = x + \sigma(i)y$ für reelle $x, y \in \mathbb{R}$. Damit ist σ eindeutig bestimmt durch den Wert von $\sigma(i)$. Aber $\sigma(i)^2 = \sigma(i^2) = \sigma(-1) = -1$, also ist $\sigma(i)$ eine Nullstelle des Polynoms $Z^2 + 1$. Damit folgt $\sigma(i) \in \{\pm i\}$. Für positives Vorzeichen ist σ die Identität, für negatives Vorzeichen die Konjugation.

Anmerkung zum Primkörper: Nach Definition gilt $\sigma(1) = 1$ und $\sigma(0) = 0$. Da σ additiv ist folgt durch vollständige Induktion $\sigma(n) = n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Für jede ganze Zahl $m \neq 0$ gilt $m \cdot \sigma(\frac{n}{m}) = \sigma(m) \cdot \sigma(\frac{n}{m}) = \sigma(\frac{mn}{m}) = \sigma(n) = n$, also $\sigma(\frac{n}{m}) = \frac{n}{m}$. Damit ist σ die Identität auf $\mathbb{Q}$.

30. Aufgabe: Sei $R > 0$ und $a \in D$ sodass der offene Ball $B_R(a)$ in D enthalten ist. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie für beliebiges $0 < r < R$ die Mittelwertformel

$$f(a) = \int_0^1 f(a + re^{2\pi i t})\mathrm{d}t \ .$$

Lösung: Sei $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t} \in D$ für $t \in [0, 1]$. Dann besagt die Cauchy-Integralformel

$$\begin{aligned} f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, \mathrm{d}z &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - a}\gamma'(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(a + re^{2\pi i t})}{a + re^{2\pi i t} - a} re^{2\pi i t} 2\pi i\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{f(a + re^{2\pi i t})}{re^{2\pi i t}} re^{2\pi i t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 f(a + re^{2\pi i t})\, \mathrm{d}t \ . \end{aligned}$$

31. Aufgabe: Bearbeiten Sie eine der verbleibenden nummerierten Aufgaben von Blatt 6.