Aufgabe 22

(a) Aus Aufgabe 17 kennen wir bereits: $c_1(A) = c_2(A) = 1, c_3(A) = t-2, c_4(A) = (t+1)(8t-2)^2$. Die Weierstrassteiler sind $h_1 = t-2, h_2 = t+1, h_3 = (t-2)^2$. Wir erhalten

$$A \approx B_{h_1,h_2,h_3} \approx \begin{pmatrix} J(2,1) & & \\ & J(2,2) & \\ & & J(-1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 0 & \\ & 1 & 2 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Aus Aufgabe 20 kennen wir bereits die Weierstrassteiler: $h_1 = t+1, h_2 = t, h_3 = t+1, h_4 = t^2, h_5 = (t+1)^3$. Wir erhalten

$$A \approx B_{h_1,h_2,h_3,h_4} \approx \begin{pmatrix} J(0,1) & & & & \\ & J(0,2) & & & \\ & & J(-1,1) & & \\ & & & J(-1,1) & \\ & & & & J(-1,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 0 & 0 & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & -1 & 0 \\ & & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 23

(a) Da M/IM ein R-Modul ist, ist M/IM eine abelsche Gruppe. Es genügt also, die Verträglichkeit der skalaren Multiplikation zu überprüfen. Seien also $a, b \in R$ und $x, y \in M$, sodass also $\overline{a}, \overline{b} \in R/I$ und $\overline{x}, \overline{y} \in M/IM$.

(1) $(\overline{a} + \overline{b})\overline{x} = \overline{(a+b)}\overline{x} = \overline{(a+b)x} \overset{M\ R-\text{Modul}}{=} \overline{ax+bx} = \overline{ax} + \overline{bx} = \overline{a} \cdot \overline{x} + \overline{b} \cdot \overline{x}$

(2) $\overline{a}(\overline{x} + \overline{y}) = \overline{a}\overline{(x+y)} = \overline{a(x+y)} \overset{M\ R-\text{Modul}}{=} = \overline{ax+ay} = \overline{ax} + \overline{ay} = \overline{a} \cdot \overline{x} + \overline{a} \cdot \overline{y}$

(3) $(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{x} = \overline{(ab)} \cdot \overline{x} = \overline{(ab)x} \overset{M\ R-\text{Modul}}{=} \overline{a(bx)} = \overline{a} \cdot \overline{(bx)} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{x})$

(4) $\overline{1} \cdot \overline{x} = \overline{1 \cdot x} \overset{M\ R-\text{Modul}}{=} \overline{x}$

(b) Sei $x = \sum_{i=1}^n a_i m_i \in IM$ mit $a_i \in I$, $m_i \in M$. Dann gilt

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i m_i\right) \overset{\varphi \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^n a_i \varphi(m_i) = \sum_{i=1}^n a_i (\underbrace{y_{1,i}}_{\in R}, \dots, \underbrace{y_{n,i}}_{\in R}) = \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i y_{1,i}}_{\in I}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i y_{n,i}}_{\in I}\right) \in I^n$$

Also ist $\varphi(IM) \subset I^n$ und daher $\varphi|_{Im} \colon IM \to I^n$ wohldefiniert. Es genügt also zu zeigen, dass $\varphi^{-1}|_{I^n} \colon I^n \to IM$ wohldefiniert ist. Sei also $y = (y_1, \dots, y_n) \in I^n$.

$$\varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n e_i y_i\right) \overset{\varphi^{-1} \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{y_i}_{\in I} \underbrace{\varphi^{-1}(e_i)}_{\in M} \in IM$$

Also ist $\varphi|_{I^n}$ eine wohldefinierte Umkehrabbildung und daher $\varphi|_{IM}$ bijektiv. Außerdem ist $\varphi|_{IM}$ als Einschränkung eines Homomorphismus immer noch ein Homomorphismus. Nun betrachten wir die lineare Abbildung $f \colon M \to R^n \to R^n/I^n, m \mapsto (\pi \circ \varphi)(m)$. Da φ und π surjektiv sind, ist auch $f = \pi \circ \varphi$ surjektiv und daher $\operatorname{im} f = R^n/I^n$. Für den Kern von f erhalten wir

$$\ker f = \{m \in M | \pi(\varphi(m)) = 0\} = \{m \in M | \varphi(m) \in I^n\} \overset{\varphi|_{IM} IM \to I^n \text{ Iso.}}{=} \{m \in M | m \in IM\} = IM.$$

Nach dem Homomorphiesatz induziert f also einen Isomorphismus $M/IM \overset{\sim}{=} R^n/I^n$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} R^n/I^n &= \{r + I^n | r \in R^n\} \\ &= \{\{r + i | i \in I^n\} | r \in R^n\} \\ &= \{\{(r_1 + i_1, \dots, r_n + i_n) | i_1, \dots, i_n \in I\} | r_1, \dots, r_n \in R^n\} \\ &= \{(r_1 + I, \dots, r_n + I) | r_1, \dots, r_n \in R\} \\ &= \{r + I | r \in R\}^n \\ &= (R/I)^n. \end{aligned}$$

Aufgabe 24

Es gilt $\frac{1}{2}(t^2+1) + (-\frac{t}{2} + \frac{1}{2})(t+1) = 1$. Daher ist $(1) \subset (t^2+1, t+1)$ und wegen $(1) = Q[t]$ ist $t^2+1,\ t+1$ ein Erzeugendensystem. Außerdem ist es minimal, da es kein $a \in Q[t]$ gibt mit $a \cdot (t^2+1) = 1$ oder $a \cdot (t+1) = 1$. Also lässt sich die 1 nicht mehr darstellen, sobald man eines der beiden Elemente des Erzeugendensystems entfernt. Daher ist es minimal. Es ist aber wegen $-(t+1)(t^2+1) + (t^2+1)(t+1) = 0$ nicht linear unabhängig und daher keine Basis.

Aufgabe 25

(a) Wir zeigen zunächst: $I = (a)$, also I Hauptideal $\Leftrightarrow$ a ist ein Erzeugendensystem von I als R-Modul.

Beweis. $I = (a) \Leftrightarrow \forall x \in I\colon \exists r \in R\colon x \cdot x = r \cdot a$. Dann ist aber a definitionsgemäß ein Erzeugendensystem von I als R-Modul. □

Nun beweisen wir (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Beweis. Es gilt $I = (a)$, wobei a kein Nullteiler ist. Also ist a ein Erzeugendensystem von I als R-Modul. Gilt nun $a \cdot r = 0$ für ein beliebiges $r \in R$, so muss r, weil a kein Nullteiler ist, bereits 0 sein, woraus wir die lineare Unabhängigkeit erhalten. Also ist a eine Basis von I und I ist frei. □

Schließlich zeigen wir auch (ii) $\Longrightarrow$ (i).

Beweis. Sei also I frei als R-Modul. Angenommen, eine Basis von I enthält mindestens zwei Elemente a, b. Dann ist $r \cdot a + s \cdot b = 0$ für $0 \neq r = -b \in R,\ 0 \neq s = a \in R$ erfüllt, was aber der linearen Unabhängigkeit einer Basis widerspricht. Also hat jede Basis von I genau ein Element a, da auch $I \neq 0$. Angenommen, a wäre ein Nullteiler. Dann gibt es definitionsgemäß ein $r \in$ mit $r \cdot a = 0$, was ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von a darstellt. Also darf a kein Nullteiler sein. □

(b) Behauptung: $(2, 1+\sqrt{-3})$ ist kein Hauptideal.

Beweis. Sei A die Menge aller Teiler von 2. Dann ist A eine Teilmenge der Teilermenge (lol) von 4, also $A \subset \{\pm 1, \pm 2, \pm(1+\sqrt{-3}), \pm(1-\sqrt{-3}), \pm 4\}$. Wie bereits in Aufgabe 10 gezeigt, gilt aber $\pm(1 \pm \sqrt{-3}) \nmid 2$ und wegen 10 und $\delta(2) < \delta(4)$ auch $4 \nmid 2$. Also ist $A = \{\pm 1, \pm 2\}$. Analog gilt für die Menge B aller Teiler von $1+\sqrt{-3}$: $B = \{\pm 1, \pm(1+\sqrt{-3})\}$. Wir nehmen an, es gäbe ein $a \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ mit $(2, 1+\sqrt{-3}) = (a)$. Dann muss a ein Teiler von 2 und $1+\sqrt{-3}$ sein und daher $a \in (A \cap B) = \{\pm 1\}$. Es müsste also $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ geben mit

$$1 = (a + b\sqrt{-3}) \cdot 2 + (c + d\sqrt{-3}) \cdot (1 + \sqrt{-3})$$

Anwenden von δ auf beiden Seiten erhält die Gleichheit

$$\begin{aligned} \delta(1) &= \delta\left(2a + 2b\sqrt{-3} + c + c\sqrt{-3} + d\sqrt{-3} - 3d\right) \\ 1 &= \delta\left(2a + c - 3d + (2b + c + d)\sqrt{-3}\right) \\ 1 &= (2a + c - 3d)^2 + 3(2b + c + d)^2 \end{aligned}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{Z} \implies (2b + c + d) = 0$

$$1 = (2a + c - 3d)^2 0 \qquad\qquad = 2b + c + d$$

Wir ziehen die linke Gleichung von der rechten ab und erhalten

$$1 = 2a - 2b - 4d$$
$$1 = 2(a - b - 2d)$$

Da $a-b-2d$ in $\mathbb{Z}$ liegt, muss das doppelte eine gerade Zahl, also insbesondere $\neq 1$ sein. Das ist ein Widerspruch, also ist $(2, 1 + \sqrt{-3})$ kein Hauptideal $\square$

Nach Aufgabenteil (a) ist $(2, 1 + \sqrt{-3})$ damit auch nicht frei.

(c) Wähle $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, $M = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ und $N = (2, 1 + \sqrt{-3})$. Ein Ring als Ideal über sich selbst ist stets frei (Bsp. 6.16b). Wegen Teilaufgabe (b) ist N nicht frei. Außerdem ist $(2, 1+\sqrt{-3})$ nach Beispiel 6.5b ein $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$-Untermodul von $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.