Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 6

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: **Fr** 12.06.2020 um 9:15 Uhr

22. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Die Jordansche Normalform)*

(a) Man bestimme die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -11 & -11 & -32 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Q})$$

aus Aufgabe 17.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ eine Matrix mit den Invariantenteilern

$$c_1(A) = \ldots = c_5(A) = 1,\ c_6(A) = t+1,\ c_7(A) = t^2 + t,\ c_8(A) = t^5 + 3t^4 + 3t^3 + t^2$$

wie in Aufgabe 20. Man bestimme die Jordansche Normalform von A.

Bemerkung: Die Ergebnisse aus Aufgabe 17 und Aufgabe 20 dürfen ohne erneuten Beweis verwendet werden.

23. Aufgabe: *(2+4 Punkte, Faktormoduln über Faktorringen)* Seien R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Dann ist nach Bemerkung 6.11 die Menge

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \mid a_i \in I, m_i \in M, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq M$$

ein R-Untermodul von M. Man zeige:

(a) Mit der natürlichen Addition und der skalaren Multiplikation $R/I \times M/IM \to M/IM$, $(\overline{a}, \overline{m}) \mapsto \overline{a} \cdot \overline{m} := \overline{a \cdot m}$ wird M/IM zu einem R/I-Modul.

Hinweis: Man verwende, dass M/IM ein R-Modul ist.

(b) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi\colon M \to R^n$ ein R-Modulisomorphismus, so ist $\varphi|_{IM}\colon IM \to I^n$ eine Bijektion und φ induziert einen R/I-Modulisomorphismus $\overline{\varphi}\colon M/IM \to (R/I)^n$.

Definition: Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von M. Dann heißt $(x_i)_{i\in I}$ *minimal*, wenn für jede echte Teilmenge $J \subsetneq I$ das System $(x_i)_{i\in J}$ kein Erzeugendensystem von M ist.

24. Aufgabe: *(4 Punkte, Minimale Erzeugendensysteme und Basen)* Man zeige, dass die Menge $S := \{t+1, t^2+1\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}[t]$ als $\mathbb{Q}[t]$-Modul, aber keine Basis ist.

25. Aufgabe: *(4+3+1 Punkte, Freie Moduln)* Man zeige:

(a) Sei R ein Ring und $I \neq 0$ ein Ideal in R. Dann sind äquivalent:

(i) I ist ein Hauptideal, welches von einem Nicht-Nullteiler erzeugt wird.

(ii) I ist frei als R-Modul.

(b) Das Ideal $(2, 1+\sqrt{-3})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist nicht frei als $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$-Modul.

Hinweis: Man erinnere sich an Aufgabe 10.

(c) Man gebe ein Beispiel eines Ringes R, eines freien R-Moduls M und eines R-Untermoduls N von M, sodass N nicht frei ist.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.