UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 25. Januar 2022

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE I
ÜBUNGSAUFGABEN 12

DEADLINE: Do. 3. Feb. 2022, 15:00. Dies ist das letzte zulassungsrelevante Aufgabenblatt.

1. Zeigen Sie, dass sich das in der Vorlesung konstruierte Kreuzprodukt

$$\times : C_p(X) \times C_q(Y) \longrightarrow C_{p+q}(X \times Y)$$

natürlich bezüglich stetiger Abbildungen verhält, d.h. für stetige Abbildungen $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ mit Produktabbildung $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$, $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$, gilt die Formel

$$(f \times g)_\#(a \times b) = f_\#(a) \times g_\#(b)$$

für singuläre Ketten $a \in C_p(X)$, $b \in C_q(Y)$.

2. Sei G eine Gruppe. Die *Kommutatorgruppe* $[G, G]$ ist die von allen Elementen der Form $ghg^{-1}h^{-1}$ erzeugte Untergruppe. Da $[G, G] \subset G$ ein Normalteiler ist, ist der Quotient $G/[G, G]$ wieder eine Gruppe, die *Abelisierung* von G. Sei X ein wegzusammenhängender Raum und $G = \pi_1(X)$ die Fundamentalgruppe. Definieren Sie einen Homomorphismus

$$h : G \longrightarrow H_1(X),\ h([f]) = f_*(1),$$

(die sog. *Hurewicz-Abbildung*) wobei $f : S^1 \to X$ eine Schleife in X ist und f_* die induzierte Abbildung $f_* : \mathbb{Z} = H_1(S^1) \to H_1(X)$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass h einen Isomorphismus

$$\overline{h} : G/[G, G] \xrightarrow{\cong} H_1(X)$$

induziert.

3. Für einen topologischen Raum X bezeichne $S(X)$ die Suspension von X. Finden Sie einen Isomorphismus

$$\widetilde{H}_i(S(X)) \cong \widetilde{H}_{i-1}(X).$$

Hinweis: Verwenden Sie das Ausschneidungsaxiom (nebst anderen Axiomen) um zu zeigen, dass $\widetilde{H}_*(S(X)) \cong H_*(C(X), X)$ ist, wobei $C(X)$ den Kegel über X bezeichnet. Betrachten Sie dann die lange exakte Homologiesequenz des Paares $(C(X), X)$.

4. Gegeben seien endlich erzeugte abelsche Gruppen $G_0, \ldots, G_n$ mit $G_0 \neq 0$ frei und G_n frei. Konstruieren Sie einen Raum X mit $H_i^{\text{zell}}(X) \cong G_i$ für $i = 0, \ldots, n$.