# Algebra II
# Sommersemester 2021

**Prof. Dr. Alexander Schmidt**

# Teil 1 – Kommutative Algebra

## 1 Ringe und Ideale

Sei $A$ ein kommutativer Ring (wie immer mit 1) und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Die Projektion $\phi : A \to A/\mathfrak{a}$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus. Wir erinnern an den folgenden Satz:

**Satz 1.1** (Algebra I, Satz 2.5)**.** *Die Zuordnung $\mathfrak{b} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{b})$ induziert eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Ideale in $A/\mathfrak{a}$ und der Menge der Ideale in $A$, die $\mathfrak{a}$ umfassen.*

*Beweisskizze.* Man prüft nacheinander folgendes nach:
• $\phi^{-1}(\mathfrak{b})$ ist ein Ideal in $A$.
• $\phi^{-1}(\mathfrak{b}) \supset \phi^{-1}(0) = \mathfrak{a}$.
• $\phi^{-1}(\mathfrak{b}_1) = \phi^{-1}(\mathfrak{b}_2) \Rightarrow \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$ (da $\phi$ surjektiv).
• Ist $\mathfrak{c} \subset A$ ein Ideal mit $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{a}$, so gilt $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{c})) = \mathfrak{c}$. □

**Erinnerung 1.2.** • $x \equiv y \bmod \mathfrak{a}$ bedeutet $x - y \in \mathfrak{a}$.
• $x \in A$ heißt **Nullteiler**, wenn ein $y \in A$, $y \neq 0$, mit $xy = 0$ existiert.
• $A$ heißt **nullteilerfrei**, wenn $A$ nicht der Nullring und $0 \in A$ der einzige Nullteiler ist.
• $x \in A$ heißt **Einheit**, wenn ein $y \in A$ mit $xy = 1$ existiert. Die Menge $A^\times$ der Einheiten von $A$ ist eine Gruppe unter Multiplikation.

**Beispiel 1.3.** $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$.

Die Vielfachen $ax$ eines Elements $x \in A$ bilden ein **Hauptideal**. Bezeichnung $(x)$ oder auch $Ax$. Das **Nullideal** $(0)$ wird auch einfach mit $0$ bezeichnet. Es gilt $(1) = A$ und $(x) = A \Leftrightarrow x \in A^\times$.

**Erinnerung 1.4.** • $\mathfrak{p} \subset A$ heißt **Primideal**, wenn $\mathfrak{p} \neq (1)$ und es gilt $xy \in \mathfrak{p} \Rightarrow (x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p})$.
• $\mathfrak{p} \subset A$ ist Primideal $\Longleftrightarrow A/\mathfrak{p}$ ist nullteilerfrei.
• $\mathfrak{m} \subset A$ heißt **Maximalideal** wenn $\mathfrak{m} \neq (1)$ und es kein Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{m} \subsetneqq \mathfrak{a} \subsetneqq (1)$ gibt.
• $\mathfrak{m} \subset A$ ist Maximalideal $\Longleftrightarrow A/\mathfrak{m}$ ist Körper.
• Jedes Maximalideal ist ein Primideal.
• $f : A \to B$ Ringhomomorphismus, $\mathfrak{q} \subset B$ Primideal $\Rightarrow f^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ ist ein Primideal.

**Satz 1.5.** *Jeder Ring $A \neq 0$ besitzt ein Maximalideal.*

*Beweis.* Sei $\Sigma$ die Menge der Ideale $\neq (1)$ in $A$. Wegen $A \neq 0$ gilt $(0) \subsetneqq (1)$ und damit $\Sigma \neq \varnothing$. Wir ordnen $\Sigma$ durch die Inklusion, d.h. $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.
Sei nun $(\mathfrak{a}_\alpha)$ eine Kette in $\Sigma$. Für $\alpha, \beta$ haben wir $\mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}_\beta$ oder $\mathfrak{a}_\beta \subset \mathfrak{a}_\alpha$. Setze $\mathfrak{a} = \bigcup\limits_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$. Dann ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal: $a \in A$, $x \in \mathfrak{a} \Rightarrow ax \in \mathfrak{a}$ weil $x \in \mathfrak{a}_\alpha$ für ein $\alpha$ und deshalb $ax \in \mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}$. Es sei nun $x \in \mathfrak{a}_\alpha$, $y \in \mathfrak{a}_\beta$. Gilt $\mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}_\beta$ so folgt $x + y \in \mathfrak{a}_\beta \subset \mathfrak{a}$, ansonsten gilt $\mathfrak{a}_\beta \subset \mathfrak{a}_\alpha$ und $x + y \in \mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}$.

Es gilt $\mathfrak{a} \in \Sigma$ wegen $1 \notin \mathfrak{a} = \bigcup \mathfrak{a}_\alpha$ und $\mathfrak{a}$ ist obere Schranke für die Kette $(\mathfrak{a}_\alpha)$.
Zorn's Lemma $\Rightarrow \Sigma$ besitzt (mindestens) ein maximales Element. □

**Korollar 1.6.** *Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ist in einem Maximalideal enthalten.*

*Beweis.* Nach Satz 1.5 besitzt $0 \neq A/\mathfrak{a}$ mindestens ein Maximalideal. Nach Satz 1.1 erhalten wir ein Maximalideal in $A$ welches $\mathfrak{a}$ umfasst. □

**Korollar 1.7.** *Jede Nicheinheit ist in einem Maximalideal enthalten.*

*Beweis.* Ist $x$ Nichteinheit, so gilt $Ax \subsetneqq A$. Nach Korollar 1.6 ist $Ax$ und somit auch $x$ in einem Maximalideal enthalten. □

**Definition 1.8.** $A$ heißt **lokal**, wenn es genau ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$ gibt. Der Körper $k = A/\mathfrak{m}$ heißt der **Restklassenkörper** von $A$.

**Satz 1.9.** *Es sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximalideal.*

(i) $(A \smallsetminus \mathfrak{m}) \subset A^\times \Rightarrow A$ *ist lokal.*
(ii) $1 + \mathfrak{m} \subset A^\times \Rightarrow A$ *ist lokal.*

*Beweis.* (i) Sei $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein Ideal. Dann gilt $\mathfrak{a} \cap A^\times = \varnothing$, also $\mathfrak{a} \cap (A \smallsetminus \mathfrak{m}) = \varnothing$, d.h. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. Daher ist $\mathfrak{m}$ das einzige Maximalideal. (ii) Für $x \in A$ ist $Ax + \mathfrak{m}$ ein Ideal. Aus $x \notin \mathfrak{m}$ folgt $Ax + \mathfrak{m} \supsetneqq \mathfrak{m}$, also $Ax + \mathfrak{m} = (1)$. Daher existieren $a \in A$, $y \in \mathfrak{m}$ mit $ax + y = 1$, also $ax = 1 - y \in 1 + \mathfrak{m} \subset A^\times$. Aus $ax \in A^\times$ folgt $x \in A^\times$. Wir erhalten $(A \smallsetminus \mathfrak{m}) \subset A^\times$, also $A$ lokal nach (i). □

**Definition 1.10.** Sei $A$ ein kommutativer Ring. $x \in A$ heißt **nilpotent**, wenn $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Nilpotente Elemente sind Nullteiler, die Umkehrung ist i.A. falsch.

**Satz 1.11.** *Die Menge $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$ aller nilpotenten Elemente in $A$ ist ein Ideal. Der Faktorring $A/\mathfrak{N}$ hat keine nilpotenten Elemente $\neq 0$.*

*Beweis.* $x \in \mathfrak{N}$, $a \in A \Rightarrow ax \in \mathfrak{N}$ (klar). Seien $x, y \in \mathfrak{N}$, $x^n = 0 = y^m$. Dann gilt $(x+y)^{n+m-1} = 0$ (binomische Formel) also $x + y \in \mathfrak{N}$. Daher ist $\mathfrak{N}$ ein Ideal. Sei nun $x \in A$ und $\bar{x} \in A/\mathfrak{N}$ nilpotent. Dann gilt $\bar{x}^n = 0$ in $A/\mathfrak{N}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also $x^n \in \mathfrak{N}$, und somit $x^{nm} = 0$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}$. □

**Definition 1.12.** Das Ideal $\mathfrak{N}$ aller nilpotenten Elemente heißt das **Nilradikal**.

**Satz 1.13.** *Das Nilradikal von $A$ ist der Durchschnitt aller Primideale.*

*Beweis.* Sei $\mathfrak{N}'$ der Durchschnitt aller Primideale. Sei $x \in \mathfrak{N}$, also $x^n = 0$ für ein $n$. Dann gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p} : x^n \in \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$. Dies zeigt $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$.
Angenommen es gäbe ein $x \in \mathfrak{N}' \smallsetminus \mathfrak{N}$. Sei $\Sigma$ die Menge aller Ideale $\mathfrak{a} \subset A$ mit

$$x^n \notin \mathfrak{a} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $0 \in \Sigma$ ist $\Sigma$ nichtleer. Wir ordnen $\Sigma$ durch Inklusion. Nach Zorns Lemma existiert ein maximales Element $\mathfrak{p} \in \Sigma$.

Behauptung: $\mathfrak{p}$ ist Primideal.

Beweis der Behauptung. Seien $s, t \notin \mathfrak{p}$. Dann gilt $\mathfrak{p} \subsetneqq As + \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \subsetneqq At + \mathfrak{p}$, also $As + \mathfrak{p}$, $At + \mathfrak{p} \notin \Sigma$. Nach Definition von $\Sigma$ existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in As + \mathfrak{p}$, $x^m \in At + \mathfrak{p}$. Dies impliziert $x^{n+m} \in Ast + \mathfrak{p}$, also $Ast + \mathfrak{p} \notin \Sigma$. Aus $st \in \mathfrak{p}$ würde $\mathfrak{p} = Ast + \mathfrak{p} \in \Sigma$ folgen, also $st \notin \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist Primideal. Dies zeigt die Behauptung.

Wegen $\mathfrak{p} \in \Sigma$ gilt $x \notin \mathfrak{p}$. Also $x \notin \mathfrak{N}'$. Widerspruch. □

## Operationen auf Idealen

Sei $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ eine nicht notwendig endliche Familie von Idealen. Dann sind

$$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i := \{\sum_{i \in I} \alpha_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a}_i \text{ und } \alpha_i = 0 \text{ f.f.a. } i\}$$

Ideale in $A$. Ist $I = \{1, \ldots, n\}$ endlich, haben wir das Produkt

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i = \{\sum_{\text{endl.}} x_1 x_2 \cdots x_n \quad | \quad x_i \in \mathfrak{a}_i\}$$

**Bemerkung 1.14.** Durchschnitt, Summe und Produkt sind assoziativ und kommutativ. Desweiteren gilt $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

**Notation:** $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a} \cdots \mathfrak{a}$ ($n$ Faktoren).

**Lemma 1.15.** (i) $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ *falls* $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ *oder* $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{c}$.

(ii) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

*Beweis.* (i) OE sei $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. Für ein Element $b + c \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, $c \in \mathfrak{c}$ gilt $b \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und daher $c \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$. Gilt umgekehrt $b \in \mathfrak{b}$, $c \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$, so gilt $b + c \in \mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.
(ii) folgt durch Einsetzen der Definitionen. □

Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ heißen **relativ prim**, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$. Für relativ prime Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ nach Lemma 1.15(ii).

Nun seien $A_1, \ldots, A_n$ Ringe. Ihr Produkt $A = \prod_{i=1}^n A_i$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ist ein Ring mit Einselement $(1, \ldots, 1)$. Die Projektionen $A \to A_i$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ sind Ringhomomorphismen.

*Warnung:* Die Inklusionen $A_i \hookrightarrow A$, $x_i \mapsto (0, \ldots, x_i, \ldots 0)$ sind keine Ringhomomorphismen!

Nun sei $A$ ein Ring und $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale in $A$. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i, \\ x &\longmapsto (x + \mathfrak{a}_1, \ldots, x + \mathfrak{a}_n). \end{aligned}$$

**Lemma 1.16** (Verallgemeinerter Chinesischer Restsatz)**.** (i) *Sind für $i \neq j$ die Ideale $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{a}_j$ relativ prim, so gilt*

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i.$$

(ii) $\phi$ *surjektiv* $\iff \mathfrak{a}_i$ *und* $\mathfrak{a}_j$ *sind relativ prim für alle* $i \neq j$.

(iii) $\phi$ *injektiv* $\iff \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = 0$.

*Beweis.* (i) $n = 2$ schon bekannt nach Lemma 1.15(ii). $n \geq 3$ per Induktion. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ paarweise relativ prime Ideale und $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i$. Wegen $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_n = (1)$ für $i = 1, \ldots, n-1$, finden wir Elemente $x_i \in \mathfrak{a}_i$, $y_i \in \mathfrak{a}_n$ mit $x_i + y_i = 1$. Es gilt $\prod_{i=1}^{n-1} x_i = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - y_i) \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}_n$. Daher gilt $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_n = (1)$ und

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_n = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i.$$

(ii): $\Rightarrow$. Wir zeigen $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = (1)$ falls $i \neq j$. Ohne Einschränkung sei $i = 1$, $j = 2$. Es existiert ein $x \in A$ mit $\phi(x) = (1, 0, \dots, 0)$, also $x \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}_1$, $x \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}_2$, so dass

$$1 = (1 - x) + x \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$$

(ii): $\Leftarrow$. Es genügt zu zeigen, dass für alle $i$ das Element $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 an $i$-ter Stelle) in $\mathrm{im}(\phi)$ liegt. Ohne Einschränkung sei $i = 1$. Wegen $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_i = (1)$ für $i \geq 2$ haben wir Elemente $u_i \in \mathfrak{a}_1$, $v_i \in \mathfrak{a}_i$ mit $u_i + v_i = 1$. Setze $x = \prod_{i=2}^{n} v_i$. Dann gilt $x \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}_i$ für $i \geq 2$ und $x = \prod_{i=2}^{n}(1 - u_i) \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}_1$. Daher gilt $\phi(x) = (1, 0, \dots, 0)$.

(iii) Dies ist klar wegen $\ker(\phi) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$. □

Die Vereinigung $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ zweier Ideale ist i.A. kein Ideal.

**Satz 1.17** (Primvermeidung)**.** (i) *Es seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ Primideale und $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Dann gilt bereits $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ für ein $i$.*

(ii) *Es seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ Ideale und $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$. Dann gilt $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_i$ für ein $i$. Aus $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ für ein $i$.*

**Bemerkung 1.18.** Eine Umformulierung von (i) ist: Ist $\mathfrak{a}$ in keinem der Primideale $\mathfrak{p}_i$ enthalten, so existiert ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $a \notin \mathfrak{p}_i$ für alle $i$. Daher kommt der Name „Primvermeidung“.

*Beweis von Satz 1.17.* Wir zeigen (i) per Induktion nach $n$ in der Form

$$\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n \Longrightarrow \mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$$

Die Aussage ist trivial für $n = 1$. Sei $n > 1$ und die Aussage richtig für $n - 1$. Dann existiert für jedes $i = 1, \dots, n$ ein $x_i \in \mathfrak{a}$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ für alle $j \neq i$. Gilt $x_i \notin \mathfrak{p}_i$ für ein $i$, so sind wir fertig. Im anderen Fall gilt $x_i \in \mathfrak{p}_i$ für alle $i$. Für

$$y = \sum_{i=1}^{n} x_1, \dots, x_{i-1} x_{i+1} x_{i+2} \dots x_n$$

gilt dann $y \in \mathfrak{a}$ und $y \notin \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$, also $\mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$.

(ii) Wir nehmen an, dass $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}_i$ für alle $i$. Dann existieren Elemente $x_i \in \mathfrak{a}_i$, $x_i \notin \mathfrak{p}$ und wir erhalten

$$x_1 \cdots x_n \in \prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subset \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$$

aber $x_1 \cdots x_n \notin \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{p}$ prim. Also folgt $\mathfrak{p} \not\supset \bigcap\limits_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$.

Gilt schließlich $\mathfrak{p} = \bigcap\limits_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$, so haben wir gerade gesehen: $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_{i_0}$ für ein $i_0$. Aus $\mathfrak{a}_{i_0} \subset \mathfrak{p} = \bigcap\limits_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i_0}$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_{i_0}$. □

**Definition 1.19.** Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ setzt man

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\}.$$

Dies ist ein Ideal in $A$. Das Ideal

$$\mathrm{Ann}(\mathfrak{b}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0 : \mathfrak{b} = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} = 0\}$$

heißt der **Annullator** von $\mathfrak{b}$. Für $x \in A$ schreiben wir $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}((x))$. Für die Menge $D$ der Nullteiler von $A$ gilt nach Definition:

$$D = \bigcup_{x \neq 0} \mathrm{Ann}(x).$$

**Beispiel 1.20.** Sei $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (m)$, $\mathfrak{b} = (n)$. Dann ist $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ das durch $\frac{m}{\mathrm{ggT}(m,n)}$ erzeugte Hauptideal.

**Lemma 1.21.** *Es gilt*

(i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$.
(ii) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.
(iii) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = \mathfrak{a} : (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b}$.
(iv) $(\bigcap\limits_i \mathfrak{a}_i) : \mathfrak{b} = \bigcap\limits_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$.
(v) $\mathfrak{a} : (\sum \mathfrak{b}_i) = \bigcap\limits_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

**Definition 1.22.** Das **Radikal** $r(\mathfrak{a})$ eines Ideals $\mathfrak{a}$ ist definiert durch

$$r(\mathfrak{a}) := \{x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Ist $\phi : A \to A/\mathfrak{a}$ die natürliche Projektion, so gilt

$$r(\mathfrak{a}) = \phi^{-1}(\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})).$$

Daher ist $r(\mathfrak{a})$ ein Ideal.

**Lemma 1.23.** *Es gilt*

(i) $r(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{a}$.
(ii) $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$.
(iii) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$.
(iv) $r(\mathfrak{a}) = (1) \Longleftrightarrow \mathfrak{a} = (1)$.
(v) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$.
(vi) *Für ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *gilt* $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

**Satz 1.24.** *Das **Radikal** $r(\mathfrak{a})$ ist der Durchschnitt aller $\mathfrak{a}$ umfassenden Primideale.*

*Beweis.* Sei $\phi : A \to A/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion. Dann gilt

$$r(\mathfrak{a}) = \phi^{-1}(\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})) = \phi^{-1}(\bigcap_{\mathfrak{p} \subset A/\mathfrak{a}} \mathfrak{p}) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subset A \\ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}.$$ □

**Satz 1.25.** *Für die Menge $D$ der Nullteiler von $A$ gilt*

$$D = \bigcup_{x \neq 0} r(\mathrm{Ann}(x)).$$

*Beweis.* Für eine Teilmenge(!) $E \subset A$ definieren wir $r(E)$ wie für Ideale. Dann ist $r(E)$ wieder eine Teilmenge und man sieht leicht $r(\bigcup_i E_i) = \bigcup_i r(E_i)$. Für ein Element $x \in r(D)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $x^n$ Nullteiler ist. Dann ist aber auch schon $x$ Nullteiler. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} D = r(D) &= r(\bigcup_{x \neq 0} (\mathrm{Ann}(x)) \\ &= \bigcup_{x \neq 0} r(\mathrm{Ann}(x)). \end{aligned}$$

□

**Beispiel 1.26.** Sei $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (m)$ und $p_1, \ldots, p_n$ seien die (verschiedenen) Primteiler von $m$. Dann gilt $r(\mathfrak{a}) = (p_1 \cdots p_n)$.

**Satz 1.27.** $r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}) = (1) \Longrightarrow \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$.

*Beweis.* $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})) = r((1)) = (1)$, also $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$. □

## Erweiterung und Kontraktion

Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.

**Definition 1.28.** (i) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ nennt man

$$\mathfrak{a}^e := Bf(\mathfrak{a}) = \{\sum_{\text{endl.}} b_i f(a_i) \mid b_i \in B,\ a_i \in \mathfrak{a}\}$$

die **Erweiterung** von $\mathfrak{a}$ auf $B$.
(ii) Für ein Ideal $\mathfrak{b} \subset B$ heißt

$$\mathfrak{b}^c := f^{-1}(\mathfrak{b})$$

die **Kontraktion** von $\mathfrak{b}$ auf $A$.

**Bemerkungen 1.29.** • Wir können $f$ in der Form

$$A \overset{p}{\twoheadrightarrow} f(A) \overset{i}{\hookrightarrow} B$$

faktorisieren. Die Situation für $p$ ist einfach nach Satz 1.1, $i$ ist kompliziert.
• Ist $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal, so auch $\mathfrak{q}^c \subset A$.
• Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so muss $\mathfrak{p}^e \subset B$ nicht unbedingt ein Primideal sein.

**Beispiel 1.30.** Wir betrachten $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\,i\,]$.
Frage: Welche Primideale aus $\mathbb{Z}$ „bleiben" Primideale in $\mathbb{Z}[\,i\,]$? Da $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}[\,i\,]$ euklidisch, also faktoriell sind (siehe Algebra I), stellt sich die Frage: Welche Primzahlen bleiben als Elemente in $\mathbb{Z}[\,i\,]$ irreduzibel? Wir brauchen die folgende zahlentheoretische Aussage.

**Satz von Lagrange:** *Eine Primzahl $p$ ist genau dann als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, wenn* $p \not\equiv 3 \bmod 4$.

Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Aus $p = (x+iy)\cdot(x'+iy')$ folgt $p^2 = N(x+iy)\cdot N(x'+iy')$. Sind beides keine Einheiten, so folgt

$$p = N(x+iy) = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2.$$

Also: $p \equiv 3 \bmod 4 \Rightarrow p$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[\,i\,]$.

Für $p = 2$ gilt $2 = (1+i)(1-i) = -i(1+i)^2$. In Idealen: $(2)^e = (1+i)^2$.
Sei nun $p \equiv 1 \bmod 4$ und $x, y \in \mathbb{N}$ mit $p = x^2 + y^2$. Dann gilt

$$p = (x+iy)(x-iy).$$

In Idealen $(p)^e = (x+iy)\cdot(x-iy)$. Wegen $N(x+iy) = p$ ist $x+iy$ irreduzibel. Jetzt kann man noch nachrechnen, dass $(x+iy) \not\sim (x-iy)$ und erhält:

**Zerlegungsgesetz in $\mathbb{Z}[\,\boldsymbol{i}\,]$**

$$(p)^e = \begin{cases} \text{Primideal, wenn} & p \equiv 3 \bmod 4, \\ \text{Produkt zweier verschiedener PI, wenn} & p \equiv 1 \bmod 4, \\ \text{Quadrat eines Primideals, wenn} & p = 2. \end{cases}$$

Im Allgemeinen haben wir die folgenden Aussagen. Es sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{b} \subset B$ Ideale.

**Satz 1.31.** (i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}$, $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}^{ce}$.

(ii) $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$, $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$

(iii) *Sei $C$ die Menge der Ideale in $A$ die Kontraktionen von Idealen aus $B$ sind und $E$ die Menge der Ideale in $B$ die Erweiterungen von Idealen in $A$ sind. Dann gilt*

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}, \\ E & = & \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}. \end{array}$$

*Wir haben Bijektionen*

$$C \underset{\mathfrak{b}^c \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{b}}{\overset{\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e}{\rightleftarrows}} E\,.$$

*Beweis.* (i) folgt durch Einsetzen der Definitionen.
(ii): Nach (i) erhalten wir

$$\begin{array}{l} \mathfrak{b}^c \subset (\mathfrak{b}^c)^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} \quad \text{und} \\ \mathfrak{b}^c \supset (\mathfrak{b}^{ce})^c = \mathfrak{b}^{cec}. \end{array}$$

Die andere Aussage zeigt man analog.
(iii): Für $\mathfrak{a} \in C$ gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c$ für ein $\mathfrak{b}$. Also $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{a}$.
Analog: $\mathfrak{b} \in E$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^e$ für $\mathfrak{a} \subset A$ und $\mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{a}^{ece} = \mathfrak{a}^e = \mathfrak{b}$.
Die Bijektion folgt. □

**Lemma 1.32.** *Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset A$, $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subset B$. Dann gilt*

$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supset \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c$,
$(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e \subset \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c$,
$(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e = \mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e$, $(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c \supset \mathfrak{b}_1^c\mathfrak{b}_2^c$,
$(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e \subset (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e)$, $(\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subset (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c)$,
$r(\mathfrak{a})^e \subset r(\mathfrak{a}^e), r(\mathfrak{b})^c = r(\mathfrak{b}^c)$.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

# 2 Moduln

Sei $R$ ein Ring, unitär aber hier noch nicht notwendig kommutativ und seien $M$ und $N$ $R$-(Links-)Moduln. Die Menge der $R$-Modulhomomorphismen von $M$ nach $N$ wird mit $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ bezeichnet und wird zur abelschen Gruppe durch

$$(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m).$$

Ist $R = A$ kommutativ, so wird $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ zum $A$-Modul durch

$$(a\varphi)(m) = a(\varphi(m)).$$

**Lemma 2.1.** *Die natürliche Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_R(R, M) \to M, \ \varphi \mapsto \varphi(1),$$

*ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen. Ist $R = A$ kommutativ, so ist sie ein Isomorphismus von $A$-Moduln.*

*Beweis.* Injektivität. $\varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi(r) = r\varphi(1) = 0$ für alle $r \in R$.
Surjektivität: Sei $m \in M$ beliebig. Definiere $\varphi : R \to M$ durch $\varphi(r) = rm$. Dann bildet sich $\varphi$ auf $m$ ab. □

**Operationen auf Untermoduln.**

Sei $M$ ein $R$-Modul und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untermoduln. Dann ist $\bigcap\limits_{i\in I} M_i$ ein Untermodul, sowie

$$\sum_{i\in I} M_i = \{\sum_i m_i \mid m_i \in M_i, \ m_i = 0 \text{ für fast alle } i\}.$$

Dies ist der kleinste Untermodul in $M$, der alle $M_i$ enthält.

Ist $\mathfrak{a} \subset R$ ein (Links)Ideal und $M$ ein $R$-(Links)Modul, so definiert man den Untermodul $\mathfrak{a}M \subset M$ durch

$$\mathfrak{a}M = \{\sum_{\text{endl.}} a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{a}, \ m_i \in M\}.$$

Sind $N, P$ Untermoduln in $M$, so setzt man

$$(N : P) = \{r \in R \mid rP \subset N\}.$$

$(N : P)$ ist ein (Links)Ideal in $R$. Gilt $P \subset N$, so ist $(N : P) = R$.

Spezialfall:

**Definition 2.2.**

$$\mathrm{Ann}(M) = (0 : M) = \{r \in R \mid rm = 0 \quad \forall\, m \in M\}$$

heißt der **Annullator** von $M$. Es heißt $M$ **treuer** $R$-Modul, wenn $\mathrm{Ann}(M) = 0$ gilt.

**Bemerkung 2.3.** Sei $R = A$ kommutativ. Ist $M$ ein $A$-Modul und $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}(M)$ ein Ideal, so können wir $M$ als $A/\mathfrak{a}$-Modul auffassen: setze $(a+\mathfrak{a})m = am$. Wegen $\mathfrak{a}M = 0$ ist die Definition repräsentantenunabhängig. Als $A/\mathrm{Ann}(M)$-Modul ist $M$ treu.

**Lemma 2.4.** *Es seien $N, P \subset M$ Untermoduln. Dann gilt*

(i) $\operatorname{Ann}(N+P) = \operatorname{Ann}(N) \cap \operatorname{Ann}(P)$.
(ii) $(N:P) = \operatorname{Ann}((N+P)/N)$.

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

Ist $M$ ein freier $A$-Modul vom Rang $n$, so gibt es nach Wahl einer Basis einen Isomorphismus $M \cong A^n$ und einen Isomorphismus

$$\operatorname{End}_A(M) \cong \operatorname{Mat}_{n,n}(A).$$

Für eine $n \times n$-Matrix $M$ über $A$ haben wir die **Adjunkte** $M^{ad}$

$$M^{ad} = (y_{ij}) \in \operatorname{Mat}_{n,n}(A)$$

mit $y_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{j,i})$, wobei $M_{j,i}$ aus $M$ durch Streichen der $j$-ten Zeile und $i$-ten Spalte entsteht.

**Satz 2.5.** *(Cramersche Regel) Es gilt*

$$M^{ad} \cdot M = M \cdot M^{ad} = \operatorname{diag}(\det(M), \ldots, \det(M)).$$

*Beweis.* Siehe LA I, 4.36. □

**Satz 2.6.** *Sei $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $\phi \in \operatorname{End}_A(M)$ mit $\phi(M) \subset \mathfrak{a}M$. Dann genügt $\phi$ einer Gleichung*

$$\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

*mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$.*

*Beweis.* Seien $x_1, \ldots, x_n$ Erzeuger von $M$. Für jedes

$$x \in \mathfrak{a}M = \{\sum_{\text{endl.}} \alpha_i y_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a},\ y_i \in M\}$$

finden wir (stelle $y_i$ als Linearkombination von $x_1, \ldots, x_n$ dar) eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ a_i \in \mathfrak{a}.$$

Somit gilt für $i = 1, \ldots, n$:

$$\phi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad \text{mit gewissen } a_{ij} \in \mathfrak{a}.$$

Es folgt $\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij}\phi - a_{ij})(x_j) = 0$, wobei $\delta_{ij} =$ Kronecker-$\delta$.

Wir betrachten nun den von $\phi$ über $A$ in $\mathrm{End}_A(M)$ erzeugten Teilring

$$A[\phi] = \{\sum_{\text{endl.}} a_i\phi^i\} \subset \mathrm{End}_A(M),$$

(Konvention: $\phi^0 = \mathrm{id}_M$). Es ist $A[\phi]$ ist kommutativer Ring mit 1 und

$$X := (\delta_{ij}\phi - a_{ij})_{ij}$$

ist eine $n\times n$-Matrix mit Werten in $A[\phi]$. Nach Satz 2.5 erhalten wir

$$X^{ad} \cdot X = \mathrm{diag}(\det(X)).$$

Durch die Regel $(\sum a_i\phi^i)(x) = \sum a_i\phi^i(x)$ wird $M$ in natürlicher Weise zu einem $A[\phi]$-Modul. Es gilt

$$X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \quad \text{und daher nach Cramer } \mathrm{diag}(\det(X)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Weil nun aber die $x_i$ den $A$-Modul $M$ erzeugen, folgt $\det(X)\cdot x = 0$ für alle $x \in M$, d.h. $\det(X) = 0 \in A[\phi] \subset \mathrm{End}_A(M)$. Nach der Leibniz-Formel entwickelt, gilt nun

$$\det(X) = \det\left((\delta_{ij}\phi - a_{ij})_{ij}\right) = \phi^n + \alpha_{n-1}\phi^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

mit gewissen $\alpha_i \in \mathfrak{a}$. □

**Korollar 2.7.** *Sei $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul und $\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $a \in A$, $a \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$, mit $aM = 0$.*

*Beweis.* Wir benutzen Satz 2.6 mit $\phi = \mathrm{id}_M$ und erhalten $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ mit

$$x + a_{n-1}x + \cdots + a_0x = 0 \quad \text{für alle } x \in M.$$

Setze $a = 1 + a_{n-1} + \cdots + a_0$. □

**Satz 2.8.** *(Nakayamas Lemma) Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul. Dann folgt aus $\mathfrak{m}M = M$, dass $M = 0$.*

*Beweis.* Nach Korollar 2.7 existiert ein $a \in A$, $a \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$, mit $aM = 0$. Wegen $a - 1 \in \mathfrak{m}$ folgt $a \in A^\times$. Es folgt $M = 1 \cdot M = a^{-1}aM = a^{-1}0 = 0$. □

**Korollar 2.9.** *Es sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul und $N$ ein Untermodul von $M$. Dann folgt aus $M = \mathfrak{m}M + N$, dass $M = N$.*

*Beweis.* Es gilt $\mathfrak{m}(M/N) = (\mathfrak{m}M + N)/N$. Nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{m}(M/N) = M/N$, also $M/N = 0$ nach Satz 2.8. □

**Korollar 2.10.** *Es sei $(A,\mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, $k = A/\mathfrak{m}$ und $M$ ein endlich erzeugter $A$-Modul. Für Elemente $x_1,\dots,x_n \in M$ sind äquivalent:*

(i) *$x_1,\dots,x_n$ erzeugen $M$ als $A$-Modul.*

(ii) *Die Bilder $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n$ von $x_1,\dots,x_n$ in $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen den $k$-Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$.*

*Beweis.* Sei $N$ der durch $x_1,\dots,x_n$ in $M$ erzeugte Untermodul. Die Komposition $N \hookrightarrow M \to M/\mathfrak{m}M$ hat das Bild $(N+\mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M$. Daher gilt

$$\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n \text{ erzeugen } M/\mathfrak{m}M \iff N+\mathfrak{m}M = M \overset{2.9}{\iff} N = M. \qquad \square$$

# 3 Tensorprodukte

Es sei $A$ ein kommutativer Ring.

**Definition 3.1.** Seien $M,N,P$ $A$-Moduln. Eine Abbildung $f\colon M\times N \to P$ heißt ($A$-)**bilinear**, wenn

(1) für jedes $m \in M$ ist die Abbildung $N \to P$, $n \mapsto f(m,n)$ $A$-linear.
(2) für jedes $n \in N$ ist die Abbildung $M \to P$, $m \mapsto f(m,n)$ $A$-linear.

**Satz 3.2.** *Seien $A$-Moduln $M,N$ gegeben. Es gibt ein Paar $(T,g)$ bestehend aus einem $A$-Modul $T$ und einer bilinearen Abbildung $g\colon M\times N \to T$ mit folgender Universaleigenschaft:*

Zu jedem $A$-Modul $P$ und jeder bilinearen Abbildung $f\colon M\times N\to P$ existiert ein eindeutig bestimmter $A$-Modulhomomorphismus $h: T \to P$, so daß $f = h\circ g$ gilt.

*$(T,g)$ ist eindeutig bis auf kanonische Isomorphie.*

*Beweis.* Eindeutigkeit: Diese folgt in der üblichen Weise durch Ausnutzung der Universaleigenschaft.

Existenz: Sei $C = A^{(M\times N)} = \bigoplus_{M\times N} A$. Elemente von $C$ sind formale endliche $A$-Linearkombinationen von Elementen aus $M\times N$. (Man identifiziere ein Element $i \in M\times N$ mit dem Element in $C$, dessen $i$-te Komponente gleich 1 und alle anderen Komponenten gleich 0 sind). Wir betrachten den Untermodul $D$ von $C$ der durch alle Elemente der Form

$$\begin{array}{rcl}
(x+x',y) & - & (x,y)-(x',y)\\
(x,y+y') & - & (x,y)-(x,y')\\
a(x,y) & - & (ax,y)\\
a(x,y) & - & (x,ay)
\end{array}$$

erzeugt wird und setzen $T = C/D$. Wir bezeichnen das Bild von $1\cdot(x,y) \in C$ in $T$ mit $x \otimes y$. Dann ist $T$ durch Elemente der Form $x \otimes y$ erzeugt, und diese erfüllen:

$$\begin{aligned} (x+x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y, \\ x \otimes (y+y') &= x \otimes y + x \otimes y', \\ (ax) \otimes y &= x \otimes (ay) = a(x \otimes y). \end{aligned}$$

M.a.W.: Die Abbildung $g\colon M \times N \to T$, $(x,y) \mapsto x \otimes y$ ist bilinear.

Ist nun $f : M \times N \to P$ eine bilineare Abbildung, so erhalten wir wegen der universellen Eigenschaft der direkten Summe einen natürlichen Homomorphismus

$$\bar{f} : A^{(M \times N)} = C \to P$$

mit $\sum\limits_{\text{endl.}} a_i(x_i, y_i) \to \sum\limits_{\text{endl.}} a_i f(x_i, y_i)$. $\bar{f}$ verschwindet auf den Erzeugern von $D$ und daher auf ganz $D$. Daher induziert $\bar{f}$ einen wohldefinierten Homomorphismus $h : C/D = T \to P$ mit

$$h(x \otimes y) = \bar{f}((x,y)) = f(x,y).$$

Der Homomorphismus $h$ ist durch die Eigenschaft eindeutig auf einfachen Tensoren und damit insgesamt eindeutig bestimmt. □

**Bemerkungen 3.3.** 1) $T$ heißt das **Tensorprodukt** von $M$ und $N$. Schreibweise: $T = M \otimes_A N$ oder auch $T = M \otimes N$.
Gewöhnungsbedürftig: Die Elemente von $M \otimes N$ sind endliche Summen $\sum\limits_{\text{endl.}} x_i \otimes y_i$, die man nicht immer vereinfachen kann.
2) Für $x \in M$ gilt $x \otimes 0 = 0$ in $M \otimes N$ wegen $x \otimes 0 = x \otimes (0+0) = x \otimes 0 + x \otimes 0$. Also $x \otimes 0 = 0$.
3) Wir werden die Konstruktion des Tensorprodukts nicht mehr brauchen, nur die universelle Eigenschaft und, dass das Tensorprodukt von den einfachen Tensoren $x \otimes y$ erzeugt, wird, sowie die Rechenregeln.
4) Ist $(x_1, \ldots, x_m)$ ein Erzeugendensystem von $M$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Erzeugendensystem von $N$, so ist

$$(x_i \otimes y_j)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

ein Erzeugendensystem von $M \otimes N$. Insbesondere ist das Tensorprodukt endlich erzeugter $A$-Moduln wieder endlich erzeugt.

**Bemerkung 3.4.** Ist $R$ ein nicht-kommutativer Ring, so kann man das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ zwischen einem $R$-Rechtsmodul $M$ und einem $R$-Linksmodul $N$ definieren. Dieses ist (nur noch) eine abelsche Gruppe.

**Multitensorprodukt:** Sind $M_1, \ldots, M_n$ und $P$ $A$-Moduln, so nennen wir eine Abbildung

$$f\colon M_1 \times \cdots \times M_n \longrightarrow P$$

**multilinear**, wenn $f$ in jedem Argument linear ist. Ganz analog zeigt man die Existenz des Multi-Tensorprodukts $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$, das universell bezüglich multilinearer Abbildungen ist. Es wird durch Multitensoren $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$, $x_i \in M_i$, $i = 1, \ldots, n$, erzeugt.

**Lemma 3.5.** *Seien $M, N, P$ $A$-Moduln. Dann gibt es eindeutig bestimmte $A$-Modulisomorphismen*

(i) $M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$,
(ii) $(M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P)$,
(iii) $(M \oplus N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes P \oplus N \otimes P$,
(iv) $A \otimes M \xrightarrow{\sim} M$,

*so dass entsprechend gilt*

(a) $x \otimes y \longmapsto y \otimes x$,
(b) $(x \otimes y) \otimes z \longmapsto x \otimes (y \otimes z)$,
(c) $(x, y) \otimes z \longmapsto (x \otimes z, y \otimes z)$,
(d) $a \otimes x \longmapsto ax$.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit folgt dadurch, dass die Abbildungen auf den einfachen Tensoren vorgegeben sind, und diese das Tensorprodukt erzeugen.
(i) Betrachte die Komposition $\overline{\phi} : M \times N \xrightarrow{\text{Vert}} N \times M \xrightarrow{\text{kan}} N \otimes M$, also die Abbildung $\overline{\phi}\colon M \times N \to N \otimes M$, $(x, y) \mapsto y \otimes x$. Es ist $\overline{\phi}$ bilinear. Z.B.

$$\overline{\phi}(x_1 + x_2, y) = y \otimes (x_1 + x_2) = y \otimes x_1 + y \otimes x_2 = \overline{\phi}(x_1, y) + \overline{\phi}(x_2, y).$$

Dies zeigt die Existenz einer eindeutig bestimmten Abbildung $\phi\colon M \otimes N \to N \otimes M$ mit $\phi(m \otimes n) = n \otimes m$. Umgekehrt erhalten wir $\psi\colon N \otimes M \to M \otimes N$ mit $\psi(n \otimes m) = m \otimes n$. Schließlich gilt $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{M \otimes N}$, $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{N \otimes M}$ (weil diese Gleichheiten auf einfachen Tensoren stimmen.)
(ii) Betrachte die Abbildung

$$\overline{\phi}\colon M \times N \times P \longrightarrow (M \otimes N) \otimes P,\ (x, y, z) \longmapsto (x \otimes y) \otimes z.$$

Diese Abbildung ist trilinear und induziert so eine Abbildung

$$\phi\colon M \otimes N \otimes P \to (M \otimes N) \otimes P$$

mit $x \otimes y \otimes z \mapsto (x \otimes y) \otimes z$. Nun fixieren wir ein Element $z \in P$. Die Abbildung

$$\overline{f}_z\colon M \times N \longrightarrow M \otimes N \otimes P, \quad (x, y) \longmapsto x \otimes y \otimes z$$

ist bilinear und induziert eine Abbildung

$$f_z\colon M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes P$$

mit $f_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z$.

Nun betrachten wir $\overline{f}\colon (M \otimes N) \times P \to M \otimes N \otimes P$ mit $\overline{f}(t,z) = f_z(t)$ ein Homomorphismus. Desweiteren gilt für festes $t = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in M \otimes N$ dass:

$$\begin{aligned}
&\overline{f}(t, z_1 + z_2) = \\
&f_{z_1+z_2}(\sum x_i \otimes y_i) = \sum x_i \otimes y_i \otimes (z_1 + z_2) \\
&= \sum x_i \otimes y_i \otimes z_1 + \sum x_i \otimes y_i \otimes z_2 \\
&= f_{z_1}(\sum x_i \otimes y_i) + f_{z_2}(\sum x_i \otimes y_i) \\
&= \overline{f}(t, z_1) + \overline{f}(t, z_2).
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $\overline{f}(t, az) = a\overline{f}(t,z)$. Daher ist $\overline{f}$ bilinear und induziert einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f : (M \otimes N) \otimes P \to M \otimes N \otimes P$ mit $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes y \otimes z$. Wir erhalten $f \circ \phi = \mathrm{id}_{M \otimes N \otimes P}$ und $\phi \circ f = \mathrm{id}_{(M \otimes N) \otimes P}$, d.h. $\phi$ ist ein Isomorphismus $M \otimes N \otimes P \xrightarrow{\sim} (M \otimes N) \otimes P$. Analog konstruiert man einen Isomorphismus

$$\psi : M \otimes N \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P)$$

mit $\psi(x \otimes y \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$ und die Komposition

$$\psi \circ \phi^{-1} : (M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P)$$

ist ein Isomorphismus der $(x \otimes y) \otimes z$ auf $x \otimes (y \otimes z)$ abbildet.

(iii) Die Kompositionen

$$(M \oplus N) \times P \xrightarrow{((x,y),z) \mapsto (x,z)} M \times P \xrightarrow{kan} M \otimes P$$

$$(M \oplus N) \times P \xrightarrow{((x,y),z) \mapsto (y,z)} N \times P \xrightarrow{kan} N \otimes P$$

setzen sich zu einer Abbildung

$$\overline{\phi}(M \oplus N) \times P \to (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$$

mit $((x,y),z) \to x \otimes z + y \otimes z$ zusammen. Diese Abbildung ist linear in $M \oplus N$ und in $P$: Z.B. $\overline{\phi}((x_1,y_1) + (x_2,y_2), z) = (x_1 + x_2) \otimes z + (y_1 + y_2) \otimes z$
$= x_1 \otimes z + x_2 \otimes z + y_1 \otimes z + y_2 \otimes z = (x_1 \otimes z + y_1 \otimes z) + (x_2 \otimes z + y_2 \otimes z)$
$= \overline{\phi}((x_1,y_1),z) + \overline{\phi}((x_2,y_2),z)$
und wir erhalten einen Homomorphismus

$$\phi\colon (M \oplus N) \otimes P \longrightarrow (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$$

mit $\phi((x,y) \otimes z) = x \otimes z + y \otimes z$.
Umgekehrt betrachten wir $\overline{\psi}_1 : M \times P \to (M \oplus N) \otimes P$ mit $\overline{\psi}_1(x,z) = (x,0) \otimes z$ und erhalten $\psi_1\colon M \otimes P \to (M \oplus N) \otimes P$. Analog $\psi_2\colon N \otimes P \to (M \oplus N) \otimes P$.

Diese setzen sich zusammen zu einem Homomorphismus $\psi : (M\otimes P)\oplus(N\otimes P) \to (M \oplus N) \otimes P$ und wieder ist $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$, $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$.
(iv) $\overline{\phi} : A \times M \to M$, $\phi(a, x) = ax$ induziert $\phi$: $A \otimes M \to M$ wie gewünscht. Betrachten wir umgekehrt die zusammengesetzte Abbildung $\psi : M \to A \times M \mapsto A \otimes M$, $x \mapsto (1, x) \mapsto 1 \otimes x$, so gilt $\phi \circ \psi = \mathrm{id}$ und auch $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$ wegen $a \otimes x \mapsto ax \mapsto 1 \otimes ax = a \otimes x$. □

**Korollar 3.6.** *Es gilt*

$$A^m \otimes A^n \cong A^{mn}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} A^m \otimes A^n &= (\underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{m\text{-mal}}) \otimes (\underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{n\text{-mal}}) \\ &= \underbrace{(A \otimes A) \oplus \cdots \oplus (A \otimes A)}_{mn\text{-mal}} \\ &= A^{mn}. \end{aligned}$$

□

Das Tensorprodukt vertauscht nicht nur mit endlichen, sondern auch mit beliebigen direkten Summen

**Lemma 3.7.** *Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von $A$-Moduln und $N$ ein weiterer $A$-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \otimes N \cong \bigoplus_{i\in I} M_i \otimes N.$$

*Beweis.* Den Beweis lassen wir als Übungsaufgabe. □

**Korollar 3.8.** *Ist $M$ ein $A$-Modul und $I$ eine Indexmenge, so gilt*

$$(A^{(I)}) \otimes M \cong M^{(I)}.$$

*Beweis.* Nach 3.5(iv) gilt $A \otimes M \cong M$. Nach 3.7 folgt

$$(A^{(I)}) \otimes M = \Big(\bigoplus_{i\in I} A\Big) \otimes M \cong \bigoplus_{i\in I} A \otimes M \cong \bigoplus_{i\in I} M = M^{(I)}.$$ □

**Satz 3.9.** *Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $M$ ein $A$-Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\phi : A/\mathfrak{a} \otimes M \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{a}M$$

*mit* $(r + \mathfrak{a}) \otimes m \longmapsto rm + \mathfrak{a}M$.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst:
*Behauptung:* jedes Element in $A/\mathfrak{a} \otimes M$ ist von der Form $(1+\mathfrak{a}) \otimes m$ für ein $m \in M$.
*Beweis der Behauptung:* Es gilt

$$\sum (a_i + \mathfrak{a}) \otimes m_i = \sum a_i\big((1+\mathfrak{a}) \otimes m_i)\big) = (1+\mathfrak{a}) \otimes (\sum a_i m_i).$$

Nun betrachten wir die Abbildung $\bar{\phi} : A/\mathfrak{a} \times M \to M/\mathfrak{a}M$, $(a+\mathfrak{a}, m) \mapsto am + \mathfrak{a}M$. Diese ist bilinear und induziert die gesuchte Abbildung $\phi : A/\mathfrak{a} \otimes M \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{a}M$. Es bleibt zu zeigen, dass $\phi$ ein Isomorphismus ist.
Wegen $m + \mathfrak{a}M = \phi\big((1+\mathfrak{a}) \otimes m\big)$ ist $\phi$ surjektiv. Bleibt zu zeigen, dass $\phi$ injektiv ist. Sei $x \in \ker(\phi)$. Z.z: $x = 0 \in A/\mathfrak{a} \otimes M$. Nach der obigen Behauptung können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x = (1+\mathfrak{a}) \otimes m$ für ein $m \in M$ gilt. Es folgt $0 = \phi(x) = 1m + \mathfrak{a}M$. Hieraus folgt $m \in \mathfrak{a}M$, also $m = \sum a_i m_i$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$, $m_i \in M$. Es folgt

$$x = (1+\mathfrak{a}) \otimes m = (1+\mathfrak{a}) \otimes (\sum_i a_i m_i) =$$

$$= \sum_i (1+\mathfrak{a}) \otimes a_i m_i = \sum_i (a_i + \mathfrak{a}) \otimes m_i = \sum_i (0+\mathfrak{a}) \otimes m_i = \sum_i 0 = 0.$$

□

**Korollar 3.10.** *Sind* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ *Ideale, so gilt*

$$A/\mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b} \cong A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}).$$

*Beweis.* Man setzt $M = A/\mathfrak{b}$ in 3.9 und erhält

$$A/\mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b} \cong (A/\mathfrak{b})/\mathfrak{a}(A/\mathfrak{b}).$$

Nun gilt

$$\mathfrak{a}(A/\mathfrak{b}) = \{\sum_{\text{endl.}} a_i(r_i + \mathfrak{b}) \mid a_i \in \mathfrak{a},\ r_i \in A\} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}.$$

Es folgt

$$(A/\mathfrak{b})/\mathfrak{a}(A/\mathfrak{b}) = (A/\mathfrak{b})/((\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}) = A/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}).$$

□

### Funktorielles Verhalten

Seien $f\colon M_1 \to M_2$, $g\colon N_1 \to N_2$ $A$-Modulhomomorphismen. Dann gibt es eine wohldefinierte $A$-lineare Abbildung

$$f \otimes g\colon M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$$

mit $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$.

*Grund:* Die bilineare Abbildung $M_2 \times N_2 \to M_2 \otimes N_2$, $(x,y) \to x \otimes y$, induziert über $f$ und $g$ eine bilineare Abbildung $M_1 \times N_1 \to M_2 \otimes N_2$ mit $(x,y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$. Nach Universaleigenschaft existiert daher die Abbildung $M_1 \otimes N_1 \to M_2 \otimes N_2$ wie beschrieben.

**Lemma 3.11.** *Sind $f$ und $g$ surjektiv, so auch $f \otimes g$.*

*Beweis.* Sei $z = x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_n \otimes y_n \in M_2 \otimes N_2$ beliebig. Setze

$$\bar{z} = \bar{x}_1 \otimes \bar{y}_1 + \cdots + \bar{x}_n \otimes \bar{y}_n \in M_1 \otimes N_1$$

mit Urbildern $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ von $x_1, \ldots, x_n$ unter $f$ und $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ von $y_1, \ldots, y_n$ unter $g$. Dann gilt $(f \otimes g)(\bar{z}) = z$. □

**Warnung:** Sind $f$ und $g$ injektiv, so braucht das $f \otimes g$ nicht zu sein.

**Beispiel 3.12.** Betrachte die injektiven Homomorphismen von $\mathbb{Z}$-Moduln:

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto 2x, \quad g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Dann ist

$$f \otimes g : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

die Nullabbildung wegen

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$$

für beliebige $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Nun sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus (man sagt, $B$ ist eine $A$-Algebra). $B$ wird zum $A$-Modul durch $ab := f(a)b$. Allgemeiner können wir jeden $B$-Modul $N$ durch $an := f(a)n$ als $A$-Modul auffassen.

**Definition/Lemma 3.13.** *Für einen $A$-Modul $M$ betrachten wir*

$$M_B = M \otimes_A B.$$

*Für $b \in B$ ist die $b$-Multiplikationsabbildung $b(m \otimes b') := m \otimes bb'$ wohldefiniert und definiert eine $B$-Modulstruktur auf $M_B$. Man nennt $M_B$ den **Basiswechsel von $M$ nach $B$.***

*Beweis.* Für festes $b \in B$ ist die Abbildung $M \times B \to M \otimes_A B$, $(m, b') \mapsto m \otimes bb'$ $A$-bilinear und induziert somit die $b$-Multiplikationsabbildung $\cdot b : M \otimes_A B \to M \otimes_A B$, $b(m \otimes b') := m \otimes bb'$. Dass diese Regel eine $B$-Modulstruktur auf $M_B$ induziert folgt direkt aus den Rechenregeln für Tensoren. □

**Satz 3.14.** *Es sei $B$ eine $A$-Algebra, $M$ ein $A$-Modul und $N$ ein $B$-Modul. Dann gibt es natürliche Isomorphismen von $B$-Moduln*

(i) $\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$,

(ii) $(M \otimes_A B) \otimes_B N \cong M \otimes_A N$.

*Hier ist die $B$-Modulstruktur auf $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ durch $(bf)(m) = bf(m)$ gegeben und die $B$-Modulstruktur auf $M \otimes_A N$ durch $b(m \otimes n) = m \otimes bn$.*

*Beweis.* Zunächst bemerken wir, dass für $b \in B$ die beschriebene $b$-Wirkung auf $M \otimes_A N$ wohldefiniert ist, weil $M \times N \to M \otimes_A N$, $(m, n) \mapsto m \otimes bn$ $A$-bilinear ist.
(i) Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N),\ \Phi(f)(m) := f(m \otimes 1_B).$$

In der anderen Richtung ist für $g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ die Abbildung $M \times B \to N$, $(m, b) \mapsto bg(m)$ $A$-bilinear und induziert damit einen Homomorphismus $M \otimes_A B \to N$, $m \otimes b \mapsto bg(m)$. Daher ist

$$\Psi : \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N),\ \Psi(g)(m \otimes b) = bg(m)$$

wohldefiniert. Man rechnet leicht nach, dass $\Phi$ und $\Psi$ zueinander invers sind.

(ii) Für festes $n \in N$ ist $M \times B \to M \otimes_A N$, $(m, b) \mapsto m \otimes bn$, $A$-bilinear und induziert $\phi_n : M \otimes_A B \to M \otimes_A N$. Die Zuordnung $(M \otimes_A B) \times N \to M \otimes_A N$, $(m \otimes b, n) \mapsto \phi_n(m \otimes b) = m \otimes bn$ ist $B$-bilinear und induziert

$$\Phi : (M \otimes_A B) \otimes_B N \longrightarrow M \otimes_A N,\ \Phi((m \otimes b) \otimes n) = m \otimes bn.$$

In der anderen Richtung ist die Abbildung $M \times N \to (M \otimes_A B) \otimes_B N$, $(m, n) \mapsto (m \otimes 1) \otimes n$ $A$-bilinear und induziert

$$\Psi : M \otimes_A N \longrightarrow (M \otimes_A B) \otimes_B N,\ \Psi(m \otimes n) = (m \otimes 1) \otimes n.$$

Man rechnet leicht nach, dass $\Phi$ und $\Psi$ zueinander invers sind. □

# 4 Exaktheit

Sei $R$ ein nicht notwendig kommutativer Ring.

**Definition 4.1.** Eine (endliche, einseitig oder beidseitig unendliche) Folge

$$\ldots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} M_n \xrightarrow{\alpha_n} M_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \ldots$$

von $R$-Moduln heißt **exakt an der Stelle $n$**, wenn $\mathrm{im}(\alpha_{n-1}) = \ker(\alpha_n)$ gilt. Die Folge heißt **exakt**, wenn sie an jeder Stelle exakt ist. Eine exakte Folge der Form $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ heißt **kurze exakte Folge**.

**Bemerkung 4.2.** Die Folge $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0$ ist genau dann exakt wenn $i$ injektiv ist, $j$ surjektiv ist und $\ker(j) = \operatorname{im}(i)$ gilt. Insbesondere ist für jeden surjektiven Homomorphismus $\varphi : M \to N$ die Folge $0 \to \ker(\varphi) \to M \to N \to 0$ exakt und für jeden injektiven Homomorphismus $\psi : M \to N$ die Folge $0 \to M \xrightarrow{\psi} N \to N/\psi(M) \to 0$. Für beliebige Moduln $M, N$ ist die Folge $0 \to M \xrightarrow{i_1} M \oplus N \xrightarrow{p_2} N \to 0$ exakt.

**Lemma 4.3** (Exaktheit von Produkt und Summe)**.** *Sei $I$ eine Indexmenge und seien*
$$M_i' \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} M_i'', \quad i \in I,$$
*exakte Folgen von $R$-Moduln. Dann sind auch die Folgen*
$$\bigoplus_{i\in I} M_i' \xrightarrow{\oplus\alpha_i} \bigoplus_{i\in I} M_i \xrightarrow{\oplus\beta_i} \bigoplus_{i\in I} M_i'', \qquad \text{und}$$
$$\prod_{i\in I} M_i' \xrightarrow{\prod\alpha_i} \prod_{i\in I} M_i \xrightarrow{\prod\beta_i} \prod_{i\in I} M_i''$$
*exakt. Umgekehrt folgt aus der Exaktheit der direkten Summe (analog: aus der Exaktheit des Produkts), dass alle Folgen $M_i' \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} M_i''$ exakt sind.*

*Beweis.* Exaktheit kann komponentenweise geprüft werden, daher ist die Aussage für das Produkt offensichtlich. Im Fall der direkten Summe bekommt man Urbilder a priori nur im Produkt. Nimmt man für die 0 (die ja in fast allen Komponenten steht) auch die 0 als Urbild in der jeweiligen Komponente, so liegt das Urbild auch wieder in der direkten Summe. □

**Korollar 4.4.** *Sei $I$ eine Indexmenge und*
$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$$
*eine exakte Folge von $R$-Moduln. Dann sind auch die Folgen*
$$M'^{(I)} \longrightarrow M^{(I)} \longrightarrow M''^{(I)} \quad \text{und } M'^{I} \longrightarrow M^{I} \longrightarrow M''^{I}$$
*exakt.*

*Beweis.* Es gilt nach Definition $M^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} M$ und $M^I = \prod_{i\in I} M$. Die Aussage folgt daher aus Lemma 4.3. □

$R$-Modulhomomorphismen $u : M' \to M$ und $v : N \to N'$ induzieren Homomorphismen abelscher Gruppen (im kommutativen Fall von Moduln)
$$u^* : \operatorname{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M',N), \quad f \longmapsto f \circ u, \qquad \text{und}$$
$$v_* : \operatorname{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M,N'), \quad f \longmapsto v \circ f.$$

**Satz 4.5.** (i) *Sei*

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0 \tag{1}$$

*eine Folge von $R$-Moduln. Die Folge* (1) *ist genau dann exakt, wenn für jeden $R$-Modul $N$ die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}(M', N) \tag{2}$$

*exakt ist.*

(ii) *Sei*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \tag{3}$$

*eine Folge von $R$-Moduln. Die Folge* (3) *ist genau dann exakt, wenn für jeden $R$-Modul $M$ die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Hom}_R(M, N'') \tag{4}$$

*exakt ist.*

*Beweis.* Wir zeigen (i) und lassen (ii) als Übungsaufgabe. Sei (1) exakt. Wir betrachten (2) für beliebiges $N$. Es gilt

- $u^* \circ v^* = (v \circ u)^* = 0^* = 0$, also $\mathrm{im}(v^*) \subset \ker u^*$.
- Wegen $v$ surjektiv folgt $v^*$ injektiv.

Sei nun $\varphi \in \ker(u^*) \subset \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Dann gilt $\varphi \circ u = 0$, also faktorisiert $\varphi$ über $M/\mathrm{im}(u) = M/\ker(v) \cong M''$ und wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "v"'] & & N \\ & M'' \arrow[ur, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Es folgt $\varphi = v^*(\varphi') \in \mathrm{im}(v^*)$. Wir erhalten $\ker(u^*) = \mathrm{im}(v^*)$.

Sei umgekehrt (2) exakt für alle $N$. Wir betrachten $M \xrightarrow{v} M''$, setzen $N = \mathrm{coker}(v) = M''/\mathrm{im}(v)$ und betrachten die kanonische Projektion $M'' \xrightarrow{\pi} N$. Es ist $v^*(\pi) = \pi \circ v : M \xrightarrow{v} M'' \xrightarrow{\pi} M''/\mathrm{im}(v) = N$ die Nullabbildung. Wegen $v^*$ injektiv folgt $\pi = 0$, was wegen $\pi$ surjektiv $N = 0$ impliziert. Daher ist $v$ surjektiv.
Setze nun $N = M''$ und betrachte $\mathrm{id}_{M''} \in \mathrm{Hom}(M'', N)$. Dann gilt

$$0 = 0^*(\mathrm{id}_{M''}) = u^* \circ v^*(\mathrm{id}_{M''}) = (v \circ u)^*(\mathrm{id}_{M''}),$$

also ist $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \xrightarrow{\mathrm{id}_{M''}} M''$ die Nullabbildung, also $\ker(v) \supset \mathrm{im}(u)$.

Setze nun $N = M/\operatorname{im}(u)$ und betrachte die Projektion $\pi : M \to N$. Es gilt $u^*(\pi) = 0$, also $\pi \in \ker(u^*) = \operatorname{im}(v^*)$. Daher existiert $\varphi \in \operatorname{Hom}(M'', N)$ mit $\pi = v^*(\varphi) = \varphi \circ v$, d.h. das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "v"] \arrow[dr, "\pi"'] & & M'' \arrow[dl, "\varphi"] \\ & M/\operatorname{im}(u) & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Es folgt $\ker(v) \subset \ker(\pi) = \operatorname{im}(u)$. □

**Lemma 4.6.** *(5er-Lemma) Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

*ein kommutatives Diagramm von $R$-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen. Ist $\varphi_1$ surjektiv, $\varphi_2$, $\varphi_4$ Isomorphismen und $\varphi_5$ injektiv, so ist $\varphi_3$ ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Diagrammjagd. □

**Lemma 4.7.** *(Schlangenlemma) Sei*

$$\begin{array}{cccccccccc} (0 & \longrightarrow) & M' & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\alpha} & M'' & \longrightarrow & 0 & \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\beta'} & N & \xrightarrow{\beta} & N'' & (\longrightarrow & 0) & \end{array}$$

*ein kommutatives Diagramm von $R$-Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen. Dann gibt es eine natürliche exakte Folge*

$$(0 \to) \ker(\varphi') \to \ker(\varphi) \to \ker(\varphi'') \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\varphi') \to \operatorname{coker}(\varphi) \to \operatorname{coker}(\varphi'')(\to 0).$$

*Die Klammerinhalte sind so zu interpretieren, dass sie in Voraussetzung und Aussage entweder betrachtet oder ignoriert werden können.*

*Beweis.* Wie ist $\delta$ definiert? Sei $m'' \in \ker(\varphi'') \subset M''$. Wähle $m \in M$ mit $\alpha(m) = m''$. Setze $n = \varphi(m)$. Dann gilt $\beta(n) = \varphi''(\alpha(m)) = \varphi''(m'') = 0 \Rightarrow n \in N'$. Setze $\delta(m'') := n + \operatorname{im}(\varphi') \in \operatorname{coker}(\varphi')$.
Wohldefiniertheit: Sei $\tilde{m} \in M$ ein weiteres Element mit $\alpha(\tilde{m}) = m''$. Dann gilt $m - \tilde{m} \in M'$, also $n = \tilde{n} + \varphi'(m - \tilde{m}) \Rightarrow n + \operatorname{im}(\varphi') = \tilde{n} + \operatorname{im}(\varphi')$.
Exaktheit: Übungsaufgabe in Diagrammjagd. □

# 5 Flachheit

**Satz 5.1.** *Sei $R = A$ ein kommutativer Ring, und $M, N, P$ $A$-Moduln. Dann gilt*

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)) \cong \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$$

*Beweis.* Wir betrachten die Homomorphismen

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)) \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathrm{Bil}_A(M, N; P)$$

mit $f(\varphi)(x, y) = \varphi(x)(y)$ und $g(\gamma)(x)(y) = \gamma(x, y)$. Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$. Daher folgt die Aussage aus der Universaleigenschaft von $\otimes$. □

Sind $f : M \to N$ und $f' : M' \to N'$ $A$-Modulhomomorphismen, so definiert $M \times M' \to N \otimes_A N', (m, m') \mapsto f(m) \otimes f'(m')$ eine $A$-bilineare Abbildung und somit einen Homomorphismus $f \otimes f' : M \otimes_A M' \to N \otimes_A N'$.

**Satz 5.2** (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts)**.** *Sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ eine exakte Folge von $A$-Moduln. Dann ist für jeden $A$-Modul $N$ die Folge*

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

*exakt.*

*Beweis.* Nach Satz 4.5 genügt es zu zeigen: Für jeden $A$-Modul $P$ ist die Folge $0 \to \mathrm{Hom}_A(M'' \otimes_A N, P) \to \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \to \mathrm{Hom}(M' \otimes_A N, P)$ exakt. Nach Satz 5.1 identifiziert sich diese Folge mit

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M'', P)) \to \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M, P))$$

$$\to \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M', P)),$$

welche nach Satz 4.5 (erst (i), dann (ii) angewendet) exakt ist. □

**Korollar 5.3.** *Für einen $A$-Modul $N$ sind äquivalent:*

(i) *Für jede exakte Folge $M' \to M \to M''$ von $A$-Moduln ist $M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N$ exakt.*

(ii) *Für jede kurze exakte Folge $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ von $A$-Moduln ist $0 \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0$ exakt.*

(iii) *Für jede Inklusion $M' \hookrightarrow M$ ist $M' \otimes_A N \to M \otimes_A N$ injektiv.*

*Beweis.* Die Äquivalenz (ii)⇔(iii) folgt aus Satz 5.2 und (i)⇒(ii) ist trivial. Nun gelte (ii) und es sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ exakt. Setzt man $P' = \mathrm{im}(f) \subset M$ und $P'' = \mathrm{im}(g) \subset M''$, so erhält man drei kurze exakte Folgen $0 \to \ker(f) \to M' \to P' \to 0$, $0 \to P' \to M \to P'' \to 0$ und $0 \to P'' \to M'' \to \mathrm{coker}(g) \to 0$. Diese drei Folgen bleiben exakt nach Tensorieren mit $N$, d.h. die Folgen $0 \to \ker(f) \otimes_A N \to M' \otimes_A N \to P' \otimes_A N \to 0$, $0 \to P' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to P'' \otimes_A N \to 0$ und $0 \to P'' \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to \mathrm{coker}(g) \otimes_A N \to 0$ sind exakt. Hieraus folgt die Exaktheit von $M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N$. □

**Definition 5.4.** Ein $A$-Modul $N$, für den die äquivalenten Eigenschaften von Korollar 5.3 gelten, heißt **flacher** $A$-Modul.

**Lemma 5.5.** *$\bigoplus_{i \in I} N_i$ flach ⇔ $N_i$ flach für alle $i$.*

*Beweis.* Dies folgt direkt aus $M \otimes_A \bigoplus_{i \in I} N_i \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A N_i)$ und aus Lemma 4.3. □

**Lemma 5.6.** *$A$ ist flacher $A$-Modul.*

*Beweis.* Dies folgt aus $M \otimes_A A \cong M$. □

Wir sagen $N$ sei direkter Summand in einem freien Modul, wenn ein Modul $N'$ existiert, so dass $N \oplus N'$ frei ist.

**Korollar 5.7.** *Ist $N$ direkter Summand in einem freien Modul, so ist $N$ flach.*

*Beweis.* Nach Lemma 5.5 genügt es zu zeigen: freie Moduln sind flach. Wieder nach Lemma 5.5 genügt es zu zeigen: $A$ ist flach. Dies ist Lemma 5.6. □

**Beispiel 5.8.** Sei $A = A_1 \times A_2$ und $\mathfrak{a}_1 = A_1 \times 0$, $\mathfrak{a}_2 = 0 \times A_2$. Dann gilt $A \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$ als $A$-Moduln. Daher sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ flache $A$-Moduln.

**Bemerkung 5.9.** Tensorieren mit einem Modul $M$ erhält Kokerne. Ist $M$ flach, so werden auch Kerne und Bilder erhalten.

*Kokerne:* $\phi : X \to X'$ gibt exakte Folge $X \to X' \to \mathrm{coker}(\phi) \to 0$. Tensorieren mit $M$ liefert nach Satz 5.2 die exakte Folge $X \otimes_A M \to X' \otimes_A M \to \mathrm{coker}(\phi) \otimes_A M \to 0$ und somit $\mathrm{coker}(\phi) \otimes_A M = \mathrm{coker}(\phi \otimes_A M)$.

*Bilder:* Faktorisieren wir $\phi : X \to X'$ in $X \twoheadrightarrow \mathrm{im}(\phi) \hookrightarrow X'$ und tensorieren mit dem flachen $A$-Modul $M$, so erhalten wir $X \otimes_A M \twoheadrightarrow \mathrm{im}(\phi) \otimes_A M \hookrightarrow X' \otimes_A M$ und damit $\mathrm{im}(\phi \otimes_A M) = \mathrm{im}(\phi) \otimes_A M$.

*Kerne:* Aus der exakten Folge $0 \to \ker(\phi) \to X \to X'$ erhalten wir die exakte Folge $0 \to \ker(\phi) \otimes_A M \to X \otimes_A M \to X' \otimes_A M$, also gilt $\ker(\phi \otimes_A M) = \ker(\phi) \otimes_A M$.

**Definition 5.10.** Ein $A$-Modul $M$ heißt **treuflach**, wenn gilt:

$$N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \text{ exakt} \iff N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M \text{ exakt.}$$

**Beispiel 5.11.** Jeder freie Modul $\neq 0$ ist treuflach ($A$ ist offenbar treuflach, also auch $A^{(I)}$ nach Lemma 4.3).

Eine $A$-Algebra $B$ heißt (treu)flache Algebra, wenn $B$ (treu)flacher $A$-Modul ist.

**Satz 5.12.** *Sei $B$ eine flache $A$-Algebra. Dann sind äquivalent:*

(i) *$B$ ist treuflach.*
(ii) $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a} \quad \forall\, \mathfrak{a} \subset A$.
(iii) *jedes Primideal von $A$ ist zurückgezogen.*
(iv) *jedes Maximalideal von $A$ ist zurückgezogen.*
(v) *es gilt $\mathfrak{m}^e \neq (1)$ für jedes Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$.*

*Insbesondere sind treuflache Homomorphismen injektiv.*

*Beweis.* Wegen $(0)^{ec} = (0)^c = \ker(f)$ ist $f$ ist genau dann injektiv wenn $(0)^{ec} = (0)$ gilt. Dies zeigt wegen (ii) das "Insbesondere". Für einen $A$-Modul $M$ schreiben wir $M_B = M \otimes_A B$ und fügen die folgenden Bedingungen hinzu.

(vi) $M \neq 0 \Longrightarrow M_B \neq 0$.
(vii) die natürliche Abbildung $M \longrightarrow M_B$, $m \mapsto m \otimes 1$, ist für jeden $A$-Modul $M$ injektiv.

(i) $\Longrightarrow$ (vi). Ist $M_B = 0$, so ist die Folge $0 \to M_B \to 0$ exakt und aus der Treuflachheit von $B$ folgt die Exaktheit von $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, also $M = 0$.
(vi) $\Longrightarrow$ (i). Sei $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ so dass $N'_B \xrightarrow{f_B} N_B \xrightarrow{g_B} N''_B$ exakt ist.
Wenden wir Bemerkung 5.9 auf $\phi = g \circ f$ an, erhalten wir $\operatorname{im}(g \circ f)_B = \operatorname{im}(g_B \circ f_B) = 0$, also gilt $\operatorname{im}(g \circ f) = 0$ und daher $g \circ f = 0$. Es folgt $\operatorname{im}(f) \subset \ker(g)$ und wir können den Faktormodul $\ker(g)/\operatorname{im}(f)$ bilden. Erneute Anwendung von Bemerkung 5.9 liefert: $\big(\ker(g)/\operatorname{im}(f)\big)_B = \ker(g_B)/\operatorname{im}(f_B) = 0$. Wir schließen $\ker(g)/\operatorname{im}(f) = 0$. Daher ist die Folge $N' \longrightarrow N \longrightarrow N''$ exakt und somit $B$ treuflach.
(vi) $\to$ (vii). Wir zeigen zunächst:

*Behauptung:* Sei $M$ ein $B$-Modul den man durch den Homomorphismus $f : A \to B$ als $A$-Modul auffasst. Dann ist der Homomorphismus $\tau : M \to M_B, m \mapsto m \otimes 1$, injektiv.
*Beweis der Behauptung:* Die $A$-bilineare Abbildung

$$M \times B \longrightarrow M, \quad (m, b) \longmapsto bm,$$

induziert einen Homomorphismus $g : M_B \to M$, $m \otimes b \mapsto bm$. Es gilt $g \circ \tau = \mathrm{id}_M$. Daher ist $\tau$ injektiv.

Sei nun $M$ ein beliebiger $A$-Modul und $M' = \ker(\tau)$. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M_B$$

induziert die exakte Folge $0 \to M'_B \to M_B \hookrightarrow (M_B)_B$, also gilt $M'_B = 0$, und daher $M' = 0$.
(vii) $\Rightarrow$ (ii) Es gilt stets $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}$. Setze $M = A/\mathfrak{a}$. Dann ist die Abbildung $A/\mathfrak{a} \to A/\mathfrak{a} \otimes_A B \overset{3.9}{=} B/\mathfrak{a}B = B/\mathfrak{a}^e$ injektiv. Aus $f(a) \in \mathfrak{a}^e$ folgt $a \in \mathfrak{a}$, m.A.W.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) und (vii) $\Longrightarrow$ (vi) sind trivial.
(iv) $\Longrightarrow$ (v). Wäre $\mathfrak{m}^e = (1)$, folgte $\mathfrak{m}^{ec} = (1) \neq \mathfrak{m}$, und $\mathfrak{m}$ wäre kein zurückgezogenes Ideal (vgl. Satz 1.31).
(v) $\Longrightarrow$ (vi). Sei $0 \neq x \in M$ und $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(x)$. Sei $M' = Ax \subset M$. Der Homomorphismus $A \to M$, $a \mapsto ax$ induziert nach dem Homomorphiesatz einen Isomorphismus $A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} M'$. Nun gilt

$$M'_B \cong A/\mathfrak{a} \otimes_A B = B/\mathfrak{a}B = B/\mathfrak{a}^e$$

Wegen $x \neq 0$ gilt $1 \notin \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} \subsetneqq A$. Daher existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ und wir erhalten $\mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{m}^e \subsetneqq B$. Also gilt $M'_B \neq 0$. Da $B$ flach ist, ist die natürliche Abbildung $M'_B \to M_B$ injektiv, also $M_B \neq 0$. □

**Definition 5.13.** Ein Homomorphismus $f : A \longrightarrow B$ lokaler Ringe heißt **lokal**, wenn $f(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$ gilt.

**Korollar 5.14.** *Ein flacher lokaler Homomorphismus lokaler Ringe ist treuflach und insbesondere injektiv.*

*Beweis.* Bedingung (v) von Satz 5.12 ist erfüllt. □

# 6 Limites

**Definition 6.1.** Eine Menge $I$ mit einer Relation $\leq$ heißt **halbgeordnet**, wenn $\leq$ reflexiv und transitiv ist und es gilt: $(i \leq j$ und $j \leq i) \Rightarrow i = j$. Die halbgeordnete Menge $I$ heißt **gerichtet**, wenn zu $a, b \in I$ stets ein $c \in I$ mit $a \leq c$ und $b \leq c$ existiert.

**Definition 6.2.** Sei $I$ eine gerichtete halbgeordnete Menge. Ein über $I$ indiziertes **direktes System** von $R$-Moduln besteht aus den folgenden Daten

- eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von $R$-Moduln
- zu jedem Paar $i \leq j$ ein $R$-Modulhomomorphismus („Übergangsabbildung“) $\varphi_{ij} : M_i \longrightarrow M_j$, so dass gilt: $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{M_i}$ und $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ falls $i \leq j \leq k$.

**Beispiele 6.3.** 1) Sei $I = \mathbb{N}$ mit $\leq$ und

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$$

eine Folge ineinander enthaltener Untermoduln eines $R$-Moduls $M$. Die Inklusionen $\varphi_{ij} : M_i \hookrightarrow M_j$ definieren ein direktes System.

2) Sei $I = \mathbb{N}$ mit der multiplikativen Halbordnung, d.h. $i \leq j$ falls $i \mid j$. Setze $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}$ und

$$\varphi_{ij} : \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}, \quad a + i\mathbb{Z} \longmapsto \frac{j}{i}a + j\mathbb{Z}.$$

3) Sei $M$ ein $R$-Modul und $(M_i)$ die Familie seiner e.e. Untermoduln (indiziert durch sich selbst und mit $\subset$ als $\leq$). Dies ist ein direktes System mit den Inklusionen als Übergangsabbildungen.

Sei nun $(M_i)_{i\in I}$ ein direktes System.

**Definition 6.4.**

$$\varinjlim_{i\in I} M_i = \left(\coprod_{i\in I} M_i\right) / \sim$$

mit $m_i \in M_i \sim m_j \in M_j \Longleftrightarrow \exists\, k \in I,\ i \leq k,\ j \leq k$ mit $\varphi_{ik}(m_i) = \varphi_{jk}(m_j)$,

heißt der **direkte** (oder auch **induktive**) **Limes** des Systems $M_i$.

Wir überlegen uns nacheinander

- $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation:
  - reflexiv, symmetrisch: trivial.
  - transitiv, weil $I$ gerichtet.
    Sei $m_i \sim m_j$ und $m_j \sim m_k$. Dann existieren $\ell$, $i \leq \ell$, $j \leq \ell$: $\varphi_{i\ell}(m_i) = \varphi_{j\ell}(m_j)$ und $m \in I$, $j \leq m$, $k \leq m$: $\varphi_{jm}(m_j) = \varphi_{km}(m_k)$. Wähle $n \in I$ mit $\ell, m \leq n$. Dann gilt $\varphi_{in}(m_i) = \varphi_{\ell n}(\varphi_{i\ell}(m_i)) = \varphi_{\ell n}(\varphi_{j\ell}(m_j)) = \varphi_{jn}(m_j) = \varphi_{mn}(\varphi_{jm}(m_j)) = \varphi_{mn}(\varphi_{km}(m_k)) = \varphi_{kn}(m_k)$, also $m_i \sim m_k$.
- es existieren natürliche Abbildungen $\varphi_i : M_i \to M := \varinjlim_{i\in I} M_i$ für alle $i \in I$ und es gilt für $i \leq j$, dass $\varphi_j \circ \varphi_{ij} = \varphi_i$ (bette $M_i$ in die disjunkte Vereinigung ein und komponiere mit der kanonischen Projektion auf die Faktormenge).
- jedes $m \in M$ liegt in $\mathrm{im}(\varphi_i)$ für ein $i \in I$.
- zu $m, n \in \varinjlim_{i\in I} M$ existiert ein $i \in I$ mit $m, n \in \mathrm{im}(\varphi_i)$ (weil $I$ gerichtet ist)

- $\varinjlim_{i\in I} M_i$ wird zum $R$-Modul durch:
  - Sei $r \in R$, $m \in \varinjlim_{i\in I} M_i$. Wähle $i \in I$ und $m_i \in M_i$ mit $m = \varphi_i(m_i)$.
  - Setze $rm := \varphi_i(rm_i)$. Dies ist wohldefiniert.
  - Seien $m, n \in \varinjlim_{i\in I} M_i$. Wähle $i \in I$ und $m_i \in M_i$, $n_i \in M_i$ mit $m = \varphi_i(m_i)$, $n = \varphi_i(n_i)$. Setze $m + n = \varphi_i(m_i + n_i)$. Dies ist wohldefiniert.

**Lemma 6.5.** *Hat $I$ ein maximales Element $i_0 \in I$, so ist*

$$\phi_{i_0} : M_{i_0} \to M = \varinjlim_{i\in I} M_i$$

*ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Sei $m \in M$ beliebig. Dann existiert $i \in I$, $m_i \in M_i$ mit $\varphi_i(m_i) = m$. Wegen $i \le i_0$ folgt

$$m = \varphi_{i_0}\varphi_{ii_0}(m_i) \in \operatorname{im}\varphi_{i_0}.$$

Daher ist $\varphi_{i_0}$ surjektiv.

Für $x \in \ker(\varphi_{i_0})$ gilt $\varphi_{i_0}(x) = \varphi_{i_0}(0)$. Nach Definition von $\sim$ folgt die Existenz eines $k \in I$ mit $i_0 \le k$ und $\varphi_{i_0k}(x) = \varphi_{i_0k}(0) = 0$. Weil $i_0$ maximal ist, folgt $k = i_0$ und wegen $\varphi_{i_0i_0} = \mathrm{id}_{M_{i_0}}$ folgt $x = 0$. Daher ist $\varphi_{i_0}$ injektiv. $\square$

**Satz 6.6.** *Das Paar*

$$\big(M = \varinjlim_{i\in I} M_i,\ (\varphi_i : M_i \longrightarrow M)_{i\in I}\big)$$

*erfüllt die folgende Universaleigenschaft:*

*Sei $N$ ein $R$-Modul und $\psi_i : M_i \longrightarrow N$, $i \in I$, $R$-Modulhomomorphismen mit $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij} \quad \forall\, i \le j$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter $R$-Modulhomomorphismus $\psi : M \longrightarrow N$ mit $\psi_i = \psi \circ \varphi_i, \quad \forall\, i$.*

*Beweis.* Wir wählen zu $m \in M$ ein $i \in I$ und $m_i \in M_i$ mit $\varphi_i(m_i) = m$ und setzen $\psi(m) = \psi_i(m_i)$. Das ist offensichtlich die einzig mögliche Definition von $\psi$. Wir müssen noch nachweisen, dass $\psi$ wohldefiniert ist. Seien also $j$ und $m_j \in M_j$ mit $\varphi_j(m_j) = m$. Z.z.: $\psi_i(m_i) = \psi_j(m_j)$. Nach Definition der Äquivalenzrelation $\sim$ finden wir $k \in I$ mit $i \le k$, $j \le k$ und $\varphi_{ik}(m_i) = \varphi_{jk}(m_j)$. Es folgt

$$\psi_i(m_i) = \psi_k(\varphi_{ik}(m_i)) = \psi_k(\varphi_{jk}(m_j)) = \psi_j(m_j).$$

$\square$

**Beispiele 6.7.** In Beispiel 6.3, 1.) $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$: $\varinjlim_{i\in\mathbb{N}} M_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subset M$.

In Beispiel 6.3 2): $I = \mathbb{N}$ multiplikativ halbgeordnet, $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\varinjlim_{i\in\mathbb{N}} M_i \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Beweis: Betrachte die natürlichen Isomorphismen

$$\mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} (\frac{1}{i}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ a + i\mathbb{Z} \longmapsto \frac{a}{i} + \mathbb{Z}.$$

Bezüglich dieser Inklusionen von $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ wird das System $M_i$ isomorph auf das System $\left(\frac{1}{i}\mathbb{Z}\right)/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von Untergruppen von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ abgebildet. Daher ist der direkte Limes nichts weiter als die Vereinigung dieser Untergruppen $=$ (ganz) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. □

Beispiel 6.3,3): $M$ ein $R$-Modul und das System seiner endlich erzeugten Untermoduln: der Limes ist $M$ selbst, da jedes Element in einem endlich erzeugten Untermodul enthalten ist.

Es sei $I = \mathbb{N}$ und wir betrachten das konstante System mit Nullabbildungen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots \quad .$$

Es gilt

$$\varinjlim_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z} = 0$$

wegen $\varphi_{ij}(x) = 0$ für $i < j$.

**Satz 6.8.** *Es gilt*

(i) $\left(\varinjlim_{i\in I} M_i\right) \oplus N \cong \varinjlim_{i\in I}(M_i \oplus N)$.

(ii) *Ist $R = A$ kommutativ, so gilt* $\left(\varinjlim_{i\in I} M_i\right) \otimes_A N \cong \varinjlim_{i\in I}(M_i \otimes_A N)$.

*Beweis.* Hier hat man grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Zum einen kann man die expliziten Definitionen auf beiden Seiten vergleichen. Zum anderen kann man nachweisen, dass die jeweils linken und rechten Seiten dieselbe Universaleigenschaft erfüllen. Das lassen wir als Übungsaufgabe. □

Es seien $(M_i)$, $(N_i)$ zwei über der gleichen gerichteten halbgeordneten Indexmenge $I$ definierte direkte Systeme von $R$-Moduln.

**Definition 6.9.** Ein **Homomorphismus** $(f_i)_{i\in I}$ von $(M_i)$ nach $(N_i)$ ist eine Familie von $R$-Modulhomomorphismen $f_i : M_i \longrightarrow N_i$, $i \in I$, so dass $\varphi_{ij}^N \circ f_i = f_j \circ \varphi_{ij}^M$ für alle $i \leq j$ gilt.

**Lemma 6.10.** *$(f_i)_{i\in I}$ induziert einen natürlichen $R$-Modulhomomorphismus*

$$f : \varinjlim_{i\in I} M_i \longrightarrow \varinjlim_{i\in I} N_i.$$

*Beweis.* Sei $N = \varinjlim_{i \in I} N_i$. Die Kompositionen $M_i \to N_i \to N$ bilden ein kompatibles System und induzieren nach Universaleigenschaft des direkten Limes einen natürlichen Homomorphismus $\varinjlim_{i \in I} M_i \to N$. □

**Definition 6.11.** Eine Folge

$$(M_i) \xrightarrow{(f_i)} (N_i) \xrightarrow{(g_i)} (K_i)$$

von direkten Systemen heißt **exakt**, wenn für jedes $i \in I$ die Folge von $R$-Moduln

$$M_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{g_i} K_i$$

exakt ist.

**Satz 6.12.** *Ist $(M_i) \xrightarrow{(f_i)} (N_i) \xrightarrow{(g_i)} (K_i)$ eine exakte Folge direkter Systeme, so ist die Folge*

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \xrightarrow{f} \varinjlim_{i \in I} N_i \xrightarrow{g} \varinjlim_{i \in I} K_i$$

*exakt.*

*Beweis.* Wegen $g_i \circ f_i = 0$ für alle $i$ folgt $g \circ f = 0$, also $\mathrm{im}(f) \subset \ker(g)$. Wir zeigen Gleichheit. Sei $n \in N = \varinjlim_{i \in I} N_i$ mit $g(n) = 0$. Wähle $i, n_i \in N_i$ mit $n = \varphi_i^N(n_i)$. Dann gilt $\varphi_i^K(g_i(n_i)) = 0 \Longrightarrow \exists j \geq i : \varphi_{ij}^K(g_i(n_i)) = 0 \Longrightarrow \varphi_{ij}^N(n_i) \in \ker(g_j) = \mathrm{im}(f_j) \Longrightarrow \exists m_j \in M_j$ mit $f_j(m_j) = n_j := \varphi_{ij}^N(n_i) \Longrightarrow n = f(m)$ mit $m = \varphi_j^M(m_j) \in M$. □

**Korollar 6.13.** *Der direkte Limes eines Systems flacher $A$-Moduln ist ein flacher $A$-Modul.*

*Beweis.* Ist $M = \varinjlim M_i$ mit flachen Moduln $M_i$ und $N' \to N \to N''$ eine exakte Folge, so ist nach Satz 6.8 (ii) die Folge $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N''$ der direkte Limes der exakten Folgen $M_i \otimes_A N' \to M_i \otimes_A N \to M_i \otimes_A N''$ und daher nach Satz 6.12 exakt. □

**Korollar 6.14.** *Ist jeder e.e. Untermodul von $M$ flach, so auch $M$ selbst.*

*Beweis.* $M$ ist die Vereinigung, also der direkte Limes seiner e.e. Untermoduln. □

**Definition 6.15.** Eine Teilmenge $J \subset I$ heißt **kofinal**, wenn zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ mit $i \leq j$ existiert.

Eine kofinale Teilmenge einer gerichteten halbgeordneten Menge ist wieder gerichtet und durch Einschränkung definiert jedes über $I$ indizierte direkte System $(M_i)_{i \in I}$ ein direktes System $(M_j)_{j \in J}$.

**Lemma 6.16.** *Sei $J \subset I$ kofinal. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\Phi : \varinjlim_{j\in J} M_j \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in I} M_i.$$

*Beweis.* Die natürliche Inklusion

$$\coprod_{j\in J} M_j \hookrightarrow \coprod_{i\in I} M_i$$

induziert nach Austeilen der Äquivalenzrelationen den behaupteten Homomorphismus $\Phi$.

Für $m_j \in M_j$ gelte $\varphi_{ji}(m_j) = 0$ für ein $i \in I$. Da $J$ kofinal in $I$ ist, existiert ein $j' \in J$ mit $i \le j'$ und somit $\varphi_{jj'}(m_j) = \varphi_{ij'}\varphi_{ji}(m_j) = 0$. Dies zeigt die Injektivität von $\Phi$.

Für $m_i \in M_i$, $i \in I$ existiert ein $j \in J$ mit $i \le j$. Wegen $\varphi_i(m_i) = \varphi_j\varphi_{ij}(m_j)$, ist $\Phi$ surjektiv. □

**Lemma 6.17.** *Sei $I$ eine abzählbare gerichtete halbgerichte Menge. Dann hat $I$ ein maximales Element oder es existiert eine kofinale Teilmenge $J \subset I$ mit $J \cong \mathbb{N}$ als halbgeordnete Mengen.*

*Beweis.* Sei $I = \{i_1, i_2, \dots\}$. Wähle $j_1 = i_1$, dann $j_2$ mit $j_2 \ge j_1$ und $j_2 \ge i_2$, dann $j_3 \ge j_2$, $j_3 \ge i_3$, $\dots$; und setze $J = \{j_1, j_2, \dots\}$. Dann ist $J$ kofinal, und wenn $I$ kein maximales Element besitzt, gilt $J \cong \mathbb{N}$ als halbgeordnete Menge. □

**Moral:** Für abzählbare Limites kann man sich auf den Fall $I = \mathbb{N}$ zurückziehen.

Sei $(I, \le)$ eine gerichtete h.g. Menge.

**Definition 6.18.** Ein über $I$ indiziertes **projektives System** von $R$-Moduln besteht aus
- einer Familie $(M_i)_{i\in I}$ von $R$-Moduln
- zu $i \le j$ ein $R$-Modulhomomorphismus $\varphi_{ij} : M_j \longrightarrow M_i$ so dass $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{M_i}$ und $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$ falls $i \le j \le k$.

**Beispiele 6.19.** 1) Sei $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \dots$ eine absteigende Folge von Untermoduln eines $R$-Moduls $M$. Die Inklusionen $M_j \subset M_i$, $i \le j$ definieren ein durch $\mathbb{N}$ indiziertes projektives System.
2) $I = \mathbb{N}$, $p$ Primzahl.

$$M_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}\,, \quad \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z},\ i \le j,$$

die kanonische Projektion.
3) $I = \mathbb{N}$ mit multiplikativer Anordnung $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, und für $i \mid j$ betrachten wir die kanonische Projektion $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$.

**Definition 6.20.**

$$\varprojlim_{i\in I} M_i = \left\{ (m_i) \in \prod_{i\in I} M_i \mid \varphi_{ij}(m_j) = m_i \quad \forall\, i \le j \right\}$$

heißt der **projektive Limes** des projektiven Systems $(M_i)_{i\in I}$.

**Bemerkungen 6.21.** • $\varprojlim_{i\in I} M_i$ ist ein $R$-Untermodul von $\prod\limits_{i\in I} M_i$.
• die Projektionen definieren natürliche Homomorphismen

$$\varphi_j : \varprojlim_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$$

für alle $j \in I$.

**Satz 6.22.** *Das Paar*

$$(M = \varprojlim_{i\in I} M_i,\ (\varphi_i)_{i\in I})$$

*erfüllt die folgende Universaleigenschaft:*

*Sei $N$ ein $R$-Modul und $\psi_i : N \longrightarrow M_i$, $i \in I$, Homomorphismen, so dass für $i \le j$ gilt: $\psi_i = \varphi_{ij} \circ \psi_j$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter $R$-Modulhomomorphismus $\psi : N \longrightarrow M$ mit $\psi_i = \varphi_i \circ \psi$ für alle $i \in I$.*

*Beweis.* Die $\psi_i$ definieren einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $N \to \prod\limits_{i\in I} M_i$, dessen Bild in $\varprojlim_{i\in I} M_i$ liegt. □

**Beispiele 6.23.** • 6.19, 1) $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ Untermoduln $\Longrightarrow$

$$\varprojlim_{i\in \mathbb{N}} M_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i.$$

• 6.19, 2) der projektive Limes heißt $\mathbb{Z}_p$.
• 6.19, 3) der projektive Limes heißt $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Die Definitionen der Begriffe „Homomorphismus projektiver Systeme“ und „exakte Folge projektiver Systeme“ sind offensichtlich. Ein Homomorphismus $(f_i)_{i\in I} : (M_i) \to (N_i)$ projektiver Systeme induziert einen Homomorphismus

$$f : \varprojlim_{i\in I} M_i \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} N_i$$

im projektiven Limes.

**Satz 6.24.** *Sei*

$$0 \longrightarrow (M_i') \xrightarrow{(f_i)} (M_i) \xrightarrow{(g_i)} (M_i'')$$

*eine exakte Folge projektiver Systeme. Dann ist die Folge*

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{i\in I} M_i' \xrightarrow{f} \varprojlim_{i\in I} M_i \xrightarrow{g} \varprojlim_{i\in I} M_i''$$

*exakt.*

*Beweis.* $f$ ist injektiv wegen des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim M_i' \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & \prod_i M_i' \arrow[d, hook] \\
\varprojlim M_i \arrow[r, hook] & \prod_i M_i
\end{tikzcd}$$

und $g \circ f = 0$ ist klar. Wir fassen die $M_i'$ und $\varprojlim M_i'$ über $f_i$ und $f$ als Untermoduln von $M_i$ und $\varprojlim M_i$ auf. Sei $m = (m_i) \in \ker(g)$. Dann gilt $m_i \in \ker(g_i) = M_i'$ für alle $i$. Deshalb gilt $m \in \varprojlim M_i'$. □

**Bemerkung 6.25.** Die Exaktheit nach rechts wird nicht notwendig erhalten.

**Beispiel 6.26.** Wir betrachten die exakten Folgen projektiver Systeme (über $\mathbb{N}$ indiziert)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n+1}"] \arrow[d, "\cdot p"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n}"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/p^{n}\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Das System links ist über die Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
M_{n+1} = \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n+1}", "\sim"'] \arrow[d, "\cdot p"] & p^{n+1}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \arrow[d, hook] \\
M_n = \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot p^{n}", "\sim"'] & p^{n}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

isomorph zum projektiven System

$$p\mathbb{Z} \supset p^2\mathbb{Z} \supset \ldots$$

ineinander enthaltener Untergruppen von $\mathbb{Z}$. Daher ist der projektive Limes isomorph zu

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n\mathbb{Z} = 0.$$

Wir erhalten im projektiven Limes die Folge

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$$

und sehen so, dass $\mathbb{Z}$ injektiv in $\mathbb{Z}_p$ liegt. Aber es existieren Elemente in $\mathbb{Z}_p$, die nicht in $\mathbb{Z}$ liegen (siehe Übungsaufgaben). Daher werden Surjektionen beim Übergang zum projektiven Limes nicht notwendig erhalten.

**Lemma 6.27.** *Sei $J \subset I$ eine kofinale Teilmenge. Dann ist für jedes projektive System $(M_i)_{i\in I}$ die natürliche Abbildung*

$$\varprojlim_{i\in I} M_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{j\in J} M_j$$

*ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Für ein

$$(m_i)_{i\in I} \in \varprojlim_{i\in I} M_i = \{\prod_{i\in I} M_i \mid \varphi_{ii'}(m_{i'}) = m_i \quad \forall\, i \le i'\}$$

ergeben sich die $m_i$ für $i \in I \smallsetminus J$ eindeutig aus den $m_j$ für $j \in J$, da nämlich $J$ kofinal in $I$ ist. □

**Bemerkung 6.28.** Man kann direkte und projektive Limites auch von Systemen von Mengen, Gruppen und Ringen bilden. Die Konstruktionen und universellen Eigenschaften bleiben die gleichen und kommutieren mit dem Vergessen von Struktur.

# 7 Lokalisierung

Sei $A$ ein kommutativer Ring mit 1.

**Definition 7.1.** Eine Teilmenge $S \subset A$ heißt **multiplikativ abgeschlossen**, wenn $1 \in S$ und es gilt $s, s' \in S \Rightarrow ss' \in S$.

**Problem.** Die Relation $\sim$ auf $A \times S$ mit $(a, s) \sim (a', s') \Longleftrightarrow as' - a's = 0$ ist im Allgemeinen **keine** Äquivalenzrelation (nur wenn $A$ nullteilerfrei).

**Definition 7.2.** Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Die Lokalisierung $S^{-1}A$ ist definiert durch

$$S^{-1}A = A \times S/\sim$$

mit

$$(a,s) \sim (a',s') \stackrel{df}{=} \exists s'' \in S \text{ mit } s''(as' - a's) = 0.$$

$S^{-1}A$ ist ein kommutativer Ring mit 1 durch

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'},$$

wobei $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ die Äquivalenzklasse von $(a,s)$ bezüglich $\sim$ bezeichnet.

Wir zeigen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Dass die algebraischen Operationen auf $S^{-1}A$ wohldefiniert sind, lassen wir als Übungsaufgabe.

- $\sim$ reflexiv und symmetrisch: klar.
- Transitivität: es gelte $(a,s) \sim (a',s')$ und $(a',s') \sim (a'',s'')$. Also existieren $t_1, t_2 \in S$ mit $t_1(as' - a's) = 0 = t_2(a's'' - a''s')$.
  Hieraus folgt
  $0 = t_1t_2s''(as' - a's) + t_1t_2s(a's'' - a''s') = t_1t_2s'(as'' - a''s)$, also $(a,s) \sim (a'',s'')$.

**Beispiele 7.3.**
- Sei $x \in A$ ein Element. Dann ist $S = \{1, x, x^2 \dots\}$ multiplikativ abgeschlossen. Man setzt $A_x = S^{-1}A$.
- Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist (dies ist sogar gdw.) $S = A \smallsetminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen. Man setzt $A_\mathfrak{p} := S^{-1}A$ (die Lokalisierung von $A$ bei $\mathfrak{p}$).
- Sei $A$ nullteilerfrei, also $(0)$ ist Primideal:

  $$Q(A) := A_{(0)} = (A \smallsetminus \{0\})^{-1}A$$

  ist per definitionem der Quotientenkörper von $A$.

**Lemma 7.4.** *Es gilt*

$$S^{-1}A = 0 \Longleftrightarrow 0 \in S.$$

*Beweis.* $\Leftarrow$ Sei $0 \in S$. Wegen $0 \cdot (as' - a's) = 0$ für alle $a, a' \in A$, $s, s' \in S$, besteht $S^{-1}A$ aus genau einem Element.
$\Rightarrow$ Gilt $S^{-1}A = 0$, so folgt insbesondere $(1,1) \sim (0,1)$. Also existiert $s \in S$ mit $0 = s(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = s$. □

**Korollar 7.5.** $A_x = 0 \Longleftrightarrow x$ *nilpotent.*

Die Abbildung $\varphi : A \to S^{-1}A$, $a \mapsto \frac{a}{1}$ ist ein Ringhomomorphismus. Wegen $\frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} = \frac{1}{1}$ bildet sich jedes $s \in S$ nach $(S^{-1}A)^\times$ ab.

**Lemma 7.6.** *(Universaleigenschaft der Lokalisierung)*
*Zu jedem Ringhomomorphismus $f : A \to B$ mit $f(s) \in B^\times$ für alle $s \in S$ existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $g : S^{-1}A \to B$ mit $f = g \circ \varphi$.*

*Beweis.* Existenz: Setze $g(\frac{a}{s}) = f(s)^{-1} \cdot f(a)$
Wohldefiniertheit: Übungsaufgabe.
Eindeutigkeit: Für $g$ ist die obige Gleichung zwingend

$$\begin{aligned} g(\tfrac{a}{s}) = g(\tfrac{1}{s} \cdot a) &= g(\tfrac{1}{s})g(a) \\ &= g(s)^{-1}g(a) \\ &= f(s)^{-1}f(a) \end{aligned}$$

□

Ist $A$ nullteilerfrei und sind $S \subset T$ multiplikativ abgeschlossene Teilmengen mit $0 \notin T$, so ist der natürliche Homomorphismus

$$\phi_{S,T} : S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}A$$

injektiv. Grund $\phi_{S,T}(\frac{a}{s}) = 0 \Rightarrow \exists t \in T$:

$$ta = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow \frac{a}{s} = 0.$$

Für $T = A \smallsetminus \{0\}$ erhalten wir

$$S^{-1}A \subset Q(A) \quad \text{für} \quad S \subset A \smallsetminus \{0\}.$$

Als Teilring eines Körpers ist $S^{-1}A$ wieder nullteilerfrei.

Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ setzen wir

$$S^{-1}\mathfrak{a} = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in \mathfrak{a}, s \in S \right\}.$$

Dies ist ein Ideal in $S^{-1}A$. Es gilt bzgl. $\phi : A \to S^{-1}A$, dass $\mathfrak{a}^e = S^{-1}\mathfrak{a}$.
Grund: jedes Element in $\mathfrak{a}^e$ ist von der Form $\sum_{\text{endl.}} \frac{a_i}{s_i}$, $a_i \in \mathfrak{a}$, $s_i \in S$. Suche Hauptnenner.

**Satz 7.7.** *Für den kanonischen Homomorphismus $\phi : A \to S^{-1}A$ gilt:*
(i) *Jedes Ideal in $S^{-1}A$ ist von der Form $\mathfrak{a}^e = S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.*
(ii) *Für $\mathfrak{a} \subset A$ gilt*

$$\mathfrak{a}^{ec} = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s).$$

*Insbesondere gilt $\mathfrak{a}^e = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap S \neq \varnothing$.*
(iii) *$\mathfrak{a} \subset A$ ist Kontraktion eines Ideals in $S^{-1}A \Leftrightarrow$ für kein $s \in S$ ist $s + \mathfrak{a}$ Nullteiler in $A/\mathfrak{a}$.*

(iv) *Die Zuordnung* $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$ *gibt eine Bijektion zwischen den Primidealen in* $S^{-1}A$ *und den Primidealen* $\mathfrak{p} \subset A$ *mit* $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$.

(v) $S^{-1}$ *kommutiert mit endlichen Summen, endlichen Produkten und endlichen Durchschnitten von Idealen, sowie mit Radikalbildung.*

*Beweis.* (i) Sei $\mathfrak{b} \subset S^{-1}A$ ein Ideal und sei $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$. Dann gilt $\frac{x}{1} = \frac{s}{1} \cdot \frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$, also $x \in \mathfrak{b}^c$ also $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}^{ce}$. Dies zeigt $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}^{ce}$. Die Inklusion $\mathfrak{b}^{ce} \subset \mathfrak{b}$ gilt nach Satz 1.31, also gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{ce}$. Insbesondere ist jedes Ideal in $S^{-1}A$ erweitert.
(ii) Für $x \in \bigcup_{s\in S}(\mathfrak{a} : s)$ gilt $sx \in \mathfrak{a}$ für ein $s \in S$, also $\frac{x}{1} = \frac{sx}{s} \in \mathfrak{a}^e$, und somit $x \in \mathfrak{a}^{ec}$. Sei nun $x \in \mathfrak{a}^{ec} = (S^{-1}\mathfrak{a})^c$. Dann gilt $\frac{x}{1} = \frac{a}{s}$ für gewisse $a \in \mathfrak{a}$, $s \in S$ $\Rightarrow (xs - a)t = 0$ für ein $t \in S \Rightarrow xst = at \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \bigcup_{s\in S}(\mathfrak{a} : s)$.
(iii) $\mathfrak{a} \in C \overset{1.31}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathfrak{a}^{ec} \subset \mathfrak{a} \overset{\text{(ii)}}{\Leftrightarrow} (sx \in \mathfrak{a}$ für ein $s \in S \Rightarrow x \in \mathfrak{a}) \Leftrightarrow$ kein $s \in S$ ist Nullteiler in $A/\mathfrak{a}$.
(iv) Sei $\mathfrak{q} \subset S^{-1}A$ ein Primideal. Dann ist $\mathfrak{q}^c \subset A$ ein Primideal mit $\mathfrak{q}^c \cap S = \varnothing$ (ansonsten existierte $s \in S$ mit $\frac{s}{1} \in \mathfrak{q}$, also $\frac{1}{1} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} \in \mathfrak{q}$ Widerspruch.). Nach (i) ist $\mathfrak{q}$ selbst eine Erweiterung. Nach Satz 1.31 folgt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{ce}$. Daher ist die Abbildung

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Primideale in} \\ S^{-1}A \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\mathfrak{q}\mapsto\mathfrak{q}^c} \left\{ \begin{matrix} \text{Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit} \\ \mathfrak{p} \cap S = \varnothing \end{matrix} \right\}$$

injektiv. Bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ und $\bar{S}$ das Bild von $S$ in $A/\mathfrak{p}$. Die natürliche Abbildung $S^{-1}A \to \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p})$, $\frac{a}{s} \mapsto \frac{\bar{a}}{\bar{s}}$ induziert den Isomorphismus

$$S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p}).$$

Wegen $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ folgt $0 \notin \bar{S}$, also $\overline{S} \subset A/\mathfrak{p} \smallsetminus \{0\}$ und weil $A/\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist, ist $\bar{S}^{-1}A/\mathfrak{p} \subset Q(A/\mathfrak{p})$ auch nullteilerfrei. Daher ist $\mathfrak{p}^e = S^{-1}\mathfrak{p}$ ein Primideal in $S^{-1}A$.

Schließlich gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$ wegen

$$x \in \mathfrak{p}^{ec} \overset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow} \exists s \in S \text{ mit } sx \in \mathfrak{p} \overset{\mathfrak{p}\cap S=\varnothing}{\Longleftrightarrow} x \in \mathfrak{p}.$$

Dies zeigt die Surjektivität.
(v) Unter Beachtung von $S^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^e$ folgt dies aus Lemma 1.21 und Lemma 1.23. □

**Korollar 7.8.** *Ist* $\mathfrak{N}$ *das Nilradikal von* $A$*, so ist* $S^{-1}\mathfrak{N}$ *das Nilradikal von* $S^{-1}A$.

*Beweis.* $\mathfrak{N} = r((0))$. □

**Korollar 7.9.** *Ist* $\mathfrak{p} \subset A$ *ein Primideal, so ist* $A_\mathfrak{p}$ *ein lokaler Ring mit Maximalideal* $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. *Die Primideale in* $A_\mathfrak{p}$ *stehen in* $1:1$ *Korrespondenz zu den Primidealen in* $A$*, die in* $\mathfrak{p}$ *enthalten sind.*

*Beweis.* Setze $S = A \smallsetminus \mathfrak{p}$ in Satz 7.7 (iv). $\square$

**Satz 7.10.** *Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ für ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ genau dann, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$.*

*Beweis.* Dieselbe Aussage für (nicht notwendig Prim-) Ideale ist Satz 1.31. Es verbleibt daher zu zeigen, dass ein Primideal, das Kontraktion eines Ideals ist, auch Kontraktion eines Primideals ist. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein kontrahiertes Primideal. Nach Satz 1.31 gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$. Sei $S$ das Bild von $A \smallsetminus \mathfrak{p}$ in $B$. Beachte: $S$ ist multiplikativ abgeschlossen. Wegen $\varnothing = \mathfrak{p} \cap (A \smallsetminus \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{ec} \cap (A \smallsetminus \mathfrak{p})$ folgt $\mathfrak{p}^e \cap S = \varnothing$. Daher ist $S^{-1}(\mathfrak{p}^e) \subset S^{-1}B$ ein Ideal $\neq (1)$. Nach Korollar 1.6 existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$ mit $S^{-1}(\mathfrak{p}^e) \subset \mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{q}$ das Urbild von $\mathfrak{m}$ in $B$. Dann ist $\mathfrak{q}$ ein Primideal mit $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^e$, $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$. Wir erhalten $\mathfrak{q}^c \supset \mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}^c \cap (A \smallsetminus \mathfrak{p}) = \varnothing$, also $\mathfrak{q}^c \subset \mathfrak{p}$. Wir erhalten $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$. $\square$

**Korollar 7.11.** *Sei $f : A \to B$ ein flacher Ringhomomorphismus. Dann sind äquivalent:*
(i) *$f$ ist treuflach.*
(ii) *jedes Primideal in $A$ ist Urbild eines Primideals in $B$.*
(iii) *jedes Maximalideal in $A$ ist Urbild eines Maximalideals in $B$.*

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Satz 5.12 gilt $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}\ \forall \mathfrak{p}$. Nach Satz 7.10 existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$
(i) $\Rightarrow$ (iii). Nach Satz 5.12 gilt $\mathfrak{m}^e \neq (1)$. Sei $\mathfrak{n} \subset B$ ein Maximalideal mit $\mathfrak{m}^e \subset \mathfrak{n}$. Dann gilt $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}^c \subsetneqq (1)$, also $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^c$.
(ii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (i). Nach Satz 1.31 (iii) gilt $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ für jedes Primideal (bzw. $\mathfrak{m}^{ec} = \mathfrak{m}$ für jedes Maximalideal). Nach Satz 5.12 folgt die Treuflachheit. $\square$

## Lokalisierung von Moduln

Sei $A$ ein kommutativer Ring und $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

**Definition 7.12.** Für einen $A$-Modul $M$ sei $S^{-1}M = M \times S/\sim$ mit

$$(m, s) \sim (m', s') \iff \exists\, t \in S : t(s'm - sm') = 0.$$

Die Äquivalenzklasse von $(m, s)$ wird mit $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ bezeichnet.

$S^{-1}M$ wird zum $S^{-1}A$-Modul durch:
- $\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm+sm'}{ss'}$
- $\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{s'} = \frac{am}{ss'}$.

Ein Homomorphismus $f : M' \to M$ induziert einen Homomorphismus $S^{-1}f : S^{-1}M' \to S^{-1}M$ durch $S^{-1}f(\frac{m'}{s}) := \frac{f(m')}{s}$.

**Satz 7.13.** *Die Operation $S^{-1}$ ist exakt, d.h. für jede exakte Folge $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ von $A$-Moduln ist die Folge von $S^{-1}A$-Moduln $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ exakt.*

*Beweis.* Wegen $g \circ f = 0$ folgt $S^{-1}g \circ S^{-1}f = 0$, also $\mathrm{im}(S^{-1}f) \subset \ker(S^{-1}g)$. Sei $\frac{m}{s} \in \ker(S^{-1}f)$. Dann gilt $\frac{g(m)}{s} = 0$ in $S^{-1}M''$, daher existiert ein $t \in S$ mit $tg(m) = 0$ in $M$. Also $tm \in \ker(g) = \mathrm{im}(f)$. Wähle $m' \in M'$ mit $f(m') = tm$. Dann gilt $S^{-1}f\left(\frac{m'}{ts}\right) = \frac{m}{s} \Longrightarrow \ker(S^{-1}g) = \mathrm{im}(S^{-1}f)$. □

**Korollar 7.14.** *Sei $M$ ein $A$-Modul und $N, P \subset M$ Untermoduln. Dann gilt*

(i) $S^{-1}(N+P) = S^{-1}N + S^{-1}P$.
(ii) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$.
(iii) $S^{-1}M/S^{-1}N \cong S^{-1}(M/N)$.

*Beweis.* Wegen der Exaktheit der Lokalisierung sind $S^{-1}N$, $S^{-1}P$, … Untermoduln von $S^{-1}M$.
(i) Es ist $S^{-1}(N+P)$ die Menge aller Elemente der Form $\frac{n+p}{s} \in S^{-1}M$ mit $n \in N$, $p \in P$, $s \in S$. Dies ist offensichtlich ein Untermodul von $S^{-1}N + S^{-1}P$, welches die Menge aller Elemente der Form $\frac{n}{s} + \frac{p}{t}$ mit $n \in N$, $p \in P$, $s, t \in S$ ist. Nun gilt

$$\frac{n}{s} + \frac{p}{t} = \frac{tn + sp}{st} \in S^{-1}(N+P),$$

was Gleichheit zeigt.
(ii) Hier ist die Inklusion $S^{-1}(N \cap P) \subset S^{-1}N \cap S^{-1}P$ offensichtlich. Sei nun $x \in S^{-1}N \cap S^{-1}P$, d.h. es gibt Darstellungen $x = \frac{n}{s} = \frac{p}{t}$, $n \in N$, $p \in P$, $s, t \in S$. Nach Definition existiert $r \in S$ mit $rtn = rsp \in N \cap P$. Es gilt daher $x = \frac{rtn}{rts} \in S^{-1}(N \cap P)$.
Für (iii) wendet man die Exaktheit der Lokalisierung Satz 7.13 auf die exakte Folge $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ an. □

**Satz 7.15.** *Es existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}A \otimes_A M & \xrightarrow{\sim} & S^{-1}M \\ \frac{a}{s} \otimes m & \longmapsto & \frac{am}{s} \end{array}$$

*Beweis.* Die Abbildung $S^{-1}A \times M \longrightarrow S^{-1}M$, $\left(\frac{a}{s}, m\right) \longmapsto \frac{am}{s}$ ist $A$-bilinear und induziert den Homomorphismus im Satz. Nennen wir ihn $f$. Wegen $\frac{m}{s} = f(\frac{1}{s} \otimes m)$ ist $f$ surjektiv. Sei nun

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \in S^{-1}A \otimes_A M$$

ein beliebiges Element und setze $s = \prod_{i=1}^{n} s_i$ und $t_i = \prod_{j \neq i} s_j$.

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m = \frac{1}{s} \otimes \sum_{i=1}^{n} a_i t_i m_i.$$

Daher ist jedes Element in $S^{-1}A \otimes_A M$ von der Form $\frac{1}{s} \otimes m$.

Sei nun $\frac{1}{s} \otimes m \in \ker(f)$. Dann gilt $\frac{m}{s} = 0$ in $S^{-1}M \Longrightarrow tm = 0$ für ein $t \in S \Longrightarrow \frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0$. Dies zeigt die Injektivität. □

**Korollar 7.16.** *$S^{-1}A$ ist eine flache $A$-Algebra.*

*Beweis.* Nach Satz 7.15 ist Tensorieren mit $S^{-1}A$ dasselbe, wie nach $S$ zu Lokalisieren. Nach Satz 7.13 ist Lokalisierung exakt. □

**Lemma 7.17.** *Für $A$-Moduln $M, N$ existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N & \xrightarrow{\sim} & S^{-1}(M \otimes_A N) \\ \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} & \longmapsto & \frac{m \otimes n}{st} \end{array}$$

*Beweis.* Nach Satz 7.15 haben wir

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \cong (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_{S^{-1}A} \otimes (S^{-1}A \otimes_A N).$$

Nach Satz 3.14(ii) ist dies isomorph zu $S^{-1}A \otimes_A M \otimes_A N$, was wiederum nach Satz 7.15 isomorph zu $S^{-1}(M \otimes_A N)$ ist. Die Gesamtabbildung ist die angegebene. □

**Definition 7.18.** Eine Eigenschaft $E$ von $A$ oder eines $A$-Moduls $M$ heißt **lokale Eigenschaft** wenn gilt

$A$ (oder $M$) erfüllt $E \Leftrightarrow A_{\mathfrak{p}}$ (oder $M_{\mathfrak{p}}$) erfüllt $E$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$.

**Satz 7.19.** *Sei $M$ ein $A$-Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) $M = 0$.
(ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p}$.
(iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *für alle Maximalideale* $\mathfrak{m}$.

*Hierbei ist $M_{\mathfrak{p}} = S^{-1}M$ mit $S = A \smallsetminus \mathfrak{p}$.*

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $0 \neq x \in M$. Wir zeigen: es existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ mit $\frac{x}{1} \neq 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$. Wir betrachten den Annullator $\mathrm{Ann}(x) := \{a \in A \mid ax = 0\}$. Dies ist ein Ideal $\neq A$, daher existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ mit $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathfrak{m}$. Wäre nun $\frac{x}{1} = 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$, so existierte ein $s \in A \smallsetminus \mathfrak{m}$ mit $sx = 0$. Aber $s \notin \mathrm{Ann}(x)$. Widerspruch. □

**Satz 7.20.** *Sei $M' \to M \to M''$ eine Folge von $A$-Moduln. Dann sind äquivalent:*

(i) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *exakt.*

(ii) $M'_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \xrightarrow{g_\mathfrak{p}} M''_\mathfrak{p}$ *exakt* $\forall\, \mathfrak{p}$

(iii) $M'_\mathfrak{m} \xrightarrow{f_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m} \xrightarrow{g_\mathfrak{m}} M''_\mathfrak{m}$ *exakt* $\forall\, \mathfrak{m}$.

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii) folgt aus der Exaktheit der Lokalisierung und (ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Da Lokalisierung exakt ist, kommutiert sie mit Kernen, Kokernen und Bildern. Wir erhalten $0 = \operatorname{im}(g_\mathfrak{m} \circ f_\mathfrak{m}) = \operatorname{im}(g \circ f)_\mathfrak{m}\ \forall\, \mathfrak{m}$. Nach Satz 7.19 gilt also $g \circ f = 0$. Wir erhalten $\operatorname{im}(f) \subset \ker(g)$ und wollen Gleichheit zeigen. Sei $N = \ker(g)/\operatorname{im}(f)$. Wegen der Exaktheit der Lokalisierung gilt $N_\mathfrak{m} = \ker(g_\mathfrak{m})/\operatorname{im}(f_\mathfrak{m}) = 0\ \forall\, \mathfrak{m}$, also $N = 0$. □

**Korollar 7.21.** (i) $f : M \to N$ *ist injektiv* $\Leftrightarrow f_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ *ist injektiv* $\forall\, \mathfrak{m}$.

(ii) $f : M \to N$ *ist surjektiv* $\Longleftrightarrow f_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ *ist surjektiv* $\forall\, \mathfrak{m}$.

*Beweis.* Man wende Satz 7.20 auf die Folge $0 \to M \to N$ bzw. auf die Folge $M \to N \to 0$ an. □

**Korollar 7.22.** *Es sind äquivalent:*

(i) $M$ *ist flacher* $A$*-Modul.*
(ii) $M_\mathfrak{p}$ *ist flacher* $A_\mathfrak{p}$*-Modul* $\forall\, \mathfrak{p}$.
(iii) $M_\mathfrak{m}$ *ist flacher* $A_\mathfrak{m}$*-Modul* $\forall\, \mathfrak{m}$.

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii) Für jeden $A_\mathfrak{p}$-Modul $N$ gilt nach Satz 7.15: $N \otimes_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = N \otimes_{A_\mathfrak{p}} \otimes A_\mathfrak{p} \otimes_A M \overset{3.14}{=} N \otimes_A M$. Daher ist $M_\mathfrak{p}$ flacher $A_\mathfrak{p}$-Modul wenn $M$ flacher $A$-Modul ist.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) ist trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $N' \to N \to N''$ exakt. Wegen $(N \otimes_A M)_\mathfrak{m} = N_\mathfrak{m} \otimes_{A_\mathfrak{m}} M_\mathfrak{m}$ ist für jedes $\mathfrak{m}$ die Folge

$$(N' \otimes_A M)_\mathfrak{m} \longrightarrow (N \otimes_A M)_\mathfrak{m} \longrightarrow (N'' \otimes_A M)_\mathfrak{m}$$

exakt, also nach Satz 7.20 auch $N' \otimes_A M \longrightarrow N' \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M$. □

Später (**??**) werden wir zeigen, dass endlich erzeugte flache Moduln über einem lokalen Ring frei sind. Korollar 7.22 ist für endlich erzeugte Moduln also zu lesen als: „flach = lokal frei“.

Sei $A$ nullteilerfrei und $M$ ein $A$-Modul.

**Definition 7.23.** $TM = \{x \in M \mid ax = 0 \text{ für ein } a \neq 0\}$

heißt der **Torsionsuntermodul** von $M$. $M$ heißt **torsionsfrei**, wenn $TM = 0$.

**Lemma 7.24.** *Sei $A$ nullteilerfrei. Dann ist jeder flache $A$-Modul torsionsfrei.*

*Beweis.* Sei $M$ ein flacher $A$-Modul. Für $0 \neq a \in A$ tensorieren wir die exakte Folge $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot a} A$ mit $M$ und erhalten die exakte Folge

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\cdot a} M.$$

Die Exaktheit bedeutet, dass $ax = 0$ nur für $x = 0$ auftritt. Da $a \neq 0$ beliebig war, ist $M$ torsionsfrei. □

Mit $A$ sind auch die Lokalisierungen $A_\mathfrak{p}$ nullteilerfrei und wir können somit auch über Torsionsfreiheit über den $A_\mathfrak{p}$ sprechen.

**Satz 7.25.** *Es sind äquivalent:*

(i) *$M$ ist torsionsfrei.*
(ii) *$M_\mathfrak{p}$ ist torsionsfrei $\forall\, \mathfrak{p}$.*
(iii) *$M_\mathfrak{m}$ ist torsionsfrei $\forall\, \mathfrak{m}$.*

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (ii). Es sei $S = A \smallsetminus \mathfrak{p}$ und $\frac{x}{s} \in M_\mathfrak{p}$ ein Torsionselement, d.h. es existiert $a \neq 0$, $t \in S$ mit $\frac{a}{t}\frac{x}{s} = 0$. Daher existiert ein $r \in S$ mit $rax = 0$. Folglich gilt $x \in TM = 0$, d.h. $x = 0$ und $M_\mathfrak{p}$ ist torsionsfrei.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) trivial.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Sei $M_\mathfrak{m}$ torsionsfrei $\forall\, \mathfrak{m}$ und $0 \neq x \in TM$. Dann existiert ein $a \neq 0$ mit $ax = 0$. Wähle ein Maximalideal $\mathfrak{m} \supset \mathrm{Ann}(x)$. Es gilt $\frac{a}{1} \neq 0$ in $A_\mathfrak{m}$ und $\frac{a}{1} \cdot \frac{x}{1} = 0$ in $M_\mathfrak{m}$, also $\frac{x}{1} = 0$ in $M_\mathfrak{m}$, also existiert $s \in A \smallsetminus \mathfrak{m}$ mit $sx = 0$. Aber $s \notin \mathrm{Ann}(x)$. Widerspruch. □

# Teil 2: Homologische Algebra

## 8 Injektive und projektive Moduln

Es sei $R$ ein Ring.

**Definition 8.1.** (i) Ein $R$-Modul $I$ heißt **injektiver** $R$-Modul, wenn für jede Injektion $i : M' \subset M$ die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}_R(M, I) \to \mathrm{Hom}_R(M', I)$ surjektiv ist. M.a.W.: Jeder $R$-Modulhomomorphismus $M' \to I$ besitzt eine Fortsetzung auf $M$.
(ii) Ein $R$-Modul $P$ heißt **projektiver** $R$-Modul, wenn für jede Surjektion $N \twoheadrightarrow N''$ die induzierte Abbildung $\mathrm{Hom}_R(P, N) \to \mathrm{Hom}_R(P, N'')$ surjektiv ist. M.a.W.: Jeder $R$-Modulhomomorphismus $\varphi : P \to N''$ besitzt eine Hebung nach $N$.

Wegen der Linksexaktheit des Hom-Funktors (siehe Satz 4.5) kann man dies auch so sagen:

$I$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Hom}_R(-, I)$ exakte Folgen von $R$-Moduln in exakte Folgen abelscher Gruppen überführt.

$P$ ist genau dann projektiv, wenn $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ exakte Folgen von $R$-Moduln in exakte Folgen abelscher Gruppen überführt.

**Lemma 8.2.** *Für eine kurze exakte Folge*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

*sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) *es existiert ein Untermodul $N \subset M$ mit $j|_N : N \xrightarrow{\sim} M''$.*

(ii) *es existiert ein Homomorphismus $p : M \to M'$ mit $p \circ i = \mathrm{id}_{M'}$.*

(iii) *es existiert ein Homomorphismus $s : M'' \to M$ mit $j \circ s = \mathrm{id}_{M''}$.*

(iv) *Es gibt einen Isomorphismus zwischen exakten Folgen*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi"', "\wr"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i'"] & M' \oplus M'' \arrow[r, "p''"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

*Man sagt dann, dass die Folge $(*)$* **zerfällt***. In diesem Fall gilt insbesondere $M \cong M' \oplus M''$.*

*Beweis.* (i) $\Rightarrow$ (iii): Definiere $s$ als die Komposition $M'' \overset{(j|_N)^{-1}}{\longrightarrow} N \overset{kan}{\hookrightarrow} M$.
(iv) $\Rightarrow$ (i): Setze $N = \varphi^{-1}(0 \oplus M'')$.
(iv) $\Rightarrow$ (ii): Definiere $p$ als Komposition $M \xrightarrow{\varphi} M' \oplus M'' \overset{p'}{\twoheadrightarrow} M'$.
(ii) $\Rightarrow$ (iv): Definiere $\varphi = (i' \circ p) + i'' \circ j$.
(iii) $\Rightarrow$ (iv): Definiere $\psi = i \circ p' + s \circ p'' : M' \oplus M'' \to M$. Nach dem 5er-Lemma ist $\psi$ ein Isomorphismus und man definiert $\varphi = \psi^{-1}$. □

**Lemma 8.3.** (i) *Ein $R$-Modul $I$ ist genau dann injektiv, wenn jede kurze exakte Folge*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

*mit $R$-Moduln $M$, $N$ zerfällt.*
(ii) *Ein $R$-Modul $P$ ist genau dann projektiv, wenn jede kurze exakte Folge*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

*mit $R$-Moduln $M$, $N$ zerfällt.*

*Beweis.* (i) Sei $I$ injektiv und $0 \to I \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} N \to 0$ exakt. Per definitionem existiert ein $p : M \to I$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, dashed, "p"] & \\ I \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\mathrm{id}_I"'] & I \end{tikzcd}$$

kommutiert, also $p \circ i = \mathrm{id}_I$, und die Folge zerfällt.
Sei umgekehrt $I$ mit der beschriebenen Eigenschaft gegeben, $M' \subset M$ $R$-Moduln und $\varphi : M' \to I$ ein $R$-Homomorphismus. Wir setzen

$$J := I \times M/\{(-\varphi(m'), m') \mid m' \in M'\}.$$

Die natürliche Abbildung $\psi : I \to J$, $x \mapsto \overline{(x,0)}$ ist injektiv, denn wir haben: $\overline{(x,0)} = 0$ in $J \Longrightarrow x = -\varphi(m')$, $0 = m' \Longrightarrow x = -\varphi(0) = 0$.
Nach Annahme zerfällt die exakte Folge $0 \to I \xrightarrow{\psi} J \to \mathrm{coker}(\psi) \to 0$, also existiert ein $p : J \to I$ mit $p \circ \psi = \mathrm{id}_I$. Sei nun $\tau : M \to J$ die natürliche Abbildung $m \mapsto \overline{(0,m)}$. In $J$ gilt

$$\overline{(\varphi(m'),0)} = \overline{(0,m')}$$

Daher gilt für jedes $m' \in M'$:

$$p \circ \tau(m') = p(\overline{(0,m')}) = p((\overline{\varphi(m'),0)}) = p(\psi(\varphi(m')) = \varphi(m').$$

Daher setzt $p \circ \tau$ die Abbildung $\varphi$ fort und $I$ ist injektiver $R$-Modul.

Bild:
$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[d, "\tau"] \arrow[dl, bend right, "p"'] \\ I \arrow[r, hook, "\psi"'] & J \end{tikzcd}$$

(ii) Analog (Pfeile umdrehen) Übungsaufgabe. $\square$

**Lemma 8.4.** (i) $\prod_{i\in I} M_i$ *ist genau dann injektiv, wenn* $M_i$ *injektiv für alle* $i \in I$.

(ii) $\bigoplus_{i\in I} P_i$ *ist genau dann projektiv, wenn* $P_i$ *projektiv für alle* $i \in I$.

*Beweis.* Wir beachten nacheinander, dass:

- $\mathrm{Hom}_R(-, \prod_{i\in I} M_i) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(-, M_i)$,
- $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} P_i, -) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(P_i, -)$
- ein Produkt von Folgen ist genau dann exakt, wenn alle einzelnen Folgen exakt sind (Lemma 4.3).

Daher folgt Lemma 8.4 aus den Definitionen. $\square$

**Satz 8.5.** *Ein Modul ist genau dann projektiv, wenn er direkter Summand in einem freien Modul ist.*

*Beweis.* Wegen $\mathrm{Hom}_R(R, M) = M$ ist $R$ projektiver $R$-Modul. Wegen Lemma 8.4 sind somit freie Moduln projektiv. Nochmalige Anwendung von Lemma 8.4 ergibt, dass direkte Summanden in freien $R$-Moduln projektiv sind. Ist nun $P$ projektiv, so wähle freien $R$-Modul $F$ und Surjektion $F \twoheadrightarrow P \overset{8.3}{\Longrightarrow} P$ ist direkter Summand in $F$. $\square$

**Korollar 8.6.** *Jeder* $R$*-Modul ist Faktormodul eines projektiven* $R$*-Moduls.*

*Beweis.* Jeder Modul ist Faktormodul eines freien Moduls. $\square$

**Satz 8.7.** *Sei* $A$ *ein kommutativer lokaler Ring. Dann ist jeder endlich erzeugte projektive* $A$*-Modul frei.*

*Beweis.* Sei $P$ endlich erzeugt, projektiv und $x_1, \ldots, x_n \in P$ so gewählt, dass $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in P/\mathfrak{m}P$ eine $A/\mathfrak{m}$-Vektorraumbasis bilden. Wir betrachten den Homomorphismus $\pi : A^n \to P$, der die Basiselemente von $A^n$ auf $x_1, \ldots, x_n$ schickt. Nach dem Nakayama-Lemma ist $\pi$ surjektiv. Sei $Q = \ker(\pi)$. Da $P$ projektiv ist, gilt
$$A^n \cong P \oplus Q.$$
Insbesondere ist $Q$ endlich erzeugt (weil Faktormodul von $A^n$) und wir erhalten $\mathfrak{a}Q = \mathfrak{a}A^n \cap Q$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.

Für $x \in Q$ gilt $\pi(x) = 0$. Da nach Konstruktion $\pi : (A/\mathfrak{m})^n \xrightarrow{\sim} P/\mathfrak{m}P$ ein Isomorphismus ist, folgt $x \in \mathfrak{m}A^n \cap Q = \mathfrak{m}Q$. Folglich gilt $Q = \mathfrak{m}Q$, und daher $Q = 0$ nach dem Nakayama-Lemma. Wir erhalten $P \cong A^n$. $\square$

**Satz 8.8.** *Sei $A$ ein Hauptidealring. Dann ist jeder projektive $A$-Modul frei.*

*Beweis.* Über einem Hauptidealring ist jeder Untermodul eines freien Moduls frei. Jeder projektive Modul ist direkter Summand in, also insbesondere Untermodul eines freien Moduls. □

Wie sehen injektive Moduln aus?

**Definition 8.9.** Sei $A$ kommutativ und nullteilerfrei. Ein $A$-Modul $M$ heißt **teilbar**, wenn für jedes $a \in A$, $a \neq 0$, die Abbildung $a : M \to M$, $m \mapsto am$, surjektiv ist. $M$ heißt **eindeutig teilbar**, wenn diese Abbildungen sogar Isomorphismen sind.

**Bemerkung 8.10.** Jeder Faktormodul eines teilbaren Moduls ist teilbar

$$\begin{array}{ccc} M & \twoheadrightarrow & M'' \\ a\downarrow & & \downarrow a \\ M & \twoheadrightarrow & M''. \end{array}$$

**Beispiel 8.11.** $A = \mathbb{Z}$: $\mathbb{Q}$ ist eindeutig teilbarer $\mathbb{Z}$-Modul. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist teilbar.

**Satz 8.12.** *Sei $A$ ein Hauptidealring. Dann sind die injektiven $A$-Moduln genau die teilbaren $A$-Moduln.*

*Beweis.* Sei $I$ injektiv. Die Injektion, $a \neq 0$, $A \overset{\cdot a}{\hookrightarrow} A$ impliziert die Surjektion $I = \mathrm{Hom}(A, I) \overset{\cdot a}{\twoheadrightarrow} I = \mathrm{Hom}(A, I)$. Daher ist $I$ teilbar. (Hier haben wir nur ausgenutzt, dass $A$ nullteilerfrei ist).
Sei nun $I$ teilbar, $M \subset N$ und $\varphi : M \to I$ gegeben. Wir betrachten die Menge $\Sigma$ aller Paare $(M', \varphi')$ mit $M \subset M' \subset N$, $\varphi' : M' \to I$ mit $\varphi'_{|M} = \varphi$. Wir geben $\Sigma$ die Halbordnung $(M', \varphi') \leq (M'', \varphi'')$ falls $M' \subset M''$ und $\phi''|_{M'} = \varphi'$. Nach Zorn's Lemma hat $\Sigma$ ein maximales Element. Sei $(M', \varphi')$ maximal. Angenommen $M' \neq N$. Wähle $x \in N \smallsetminus M'$ beliebig und setze $M'' = \langle M', x \rangle$. Wir betrachten die exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow M''/M' \longrightarrow 0.$$

$M''/M'$ ist von $\bar{x} = x + M'$ erzeugt, also zyklisch. Wir betrachten den surjektiven Homomorphismus $\varepsilon : A \twoheadrightarrow M''/M'$, $a \mapsto a\bar{x}$. Ist $\varepsilon$ ein Isomorphismus, so ist $M''/M' \cong A$ frei, insbesondere projektiv und es gilt $M'' \cong M' \oplus A$. Dann können wir $\varphi'$ auf $M''$ fortsetzen (zum Beispiel indem wir die zweite Komponente auf Null abbilden). Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von $(M', \varphi')$.

Also ist $\varepsilon$ nicht injektiv und es gilt $M''/M' \cong A/(a)$ mit einem Element $0 \neq a \in A$. Insbesondere gilt $ax \in M'$. Da $I$ teilbar ist, existiert ein $y \in I$ mit $ay = \varphi'(ax)$. Wir definieren nun $\varphi'' : M'' \longrightarrow I$ durch

$$\varphi''(z + bx) := \varphi'(z) + by, \quad z \in M',\ b \in A.$$

Dies ist wohldefiniert: gilt $z_1 + b_1 x = z_2 + b_2 x$, so folgt

$$(b_1 - b_2)x = z_2 - z_1 \in M'$$

und daher $b_1 - b_2 \in (a)$, also $b_1 - b_2 = ac$, $c \in A$. Hieraus folgt $acx = z_2 - z_1 \in M'$ und

$$(\varphi'(z_1) + b_1 y) - (\varphi'(z_2) + b_2 y) = \varphi'(z_1 - z_2) + cay = \varphi'(z_1 - z_2) + c\varphi'(ax)$$
$$= \varphi'(z_1 - z_2) + \varphi'(acx) = \varphi'(z_1 - z_2 + acx) = \varphi'(0) = 0.$$

Wegen $\varphi''|_{M'} = \varphi'$, erhalten wir einen Widerspruch zur Maximalität von $(M', \varphi')$. Es folgt $M' = N$. Daher ist $I$ ist injektiv. □

**Korollar 8.13.** *$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist eine injektive abelsche Gruppe.*

$R^* \stackrel{df}{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ wird zum $R$-(Links-)Modul durch $r\varphi(s) = \varphi(sr)$.

**Definition 8.14.** Ein $R$-Modul $M$ heißt **kofrei**, wenn er isomorph zu einem (evtl. unendlichen) Produkt von $R^*$ ist.

**Lemma 8.15.** *Für jeden $R$-Modul $M$ existiert ein natürlicher Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_R(M, R^*) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

*Beweis.* Die Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(M, R^*) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \varphi & \longmapsto & (m \mapsto \varphi(m)(1)) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M, R^*) \\ \psi & \longmapsto & [m \mapsto (\varphi_m : R \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z})] \\ & & \varphi_m(r) = \psi(rm) \end{array}$$

sind zueinander invers. □

**Satz 8.16.** *Kofreie $R$-Moduln sind injektiv.*

*Beweis.* Nach Lemma 8.4 genügt es z.z., dass $R^*$ injektiv ist. Dies ist äquivalent zur Exaktheit von $\mathrm{Hom}_R(-, R^*)$. Diese folgt aus Lemma 8.15 und weil $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist. □

**Lemma 8.17.** *Sei $M$ ein $R$-Modul und $0 \neq m \in M$. Dann existiert ein $R$-Modulhomomorphismus $\varphi : M \longrightarrow R^*$ mit $\varphi(m) \neq 0$.*

*Beweis.* Nach Lemma 8.15 (und seinem Beweis) genügt es z.z., dass zu jeder abelschen Gruppe $M$ und zu jedem $0 \neq m \in M$ ein $\mathbb{Z}$-Homomorphismus $\psi : M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\psi(m) \neq 0$ existiert.
Sei $N = \langle m \rangle \subset M$. Dann gilt $N \cong \mathbb{Z}$ oder $N \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$.
In jedem Fall existiert ein Homomorphismus $\psi : N \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\psi(m) \neq 0$. Da $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektiver $\mathbb{Z}$-Modul ist, dehnt sich $\psi$ auf ganz $M$ aus. □

**Korollar 8.18.** *Jeder $R$-Modul ist Untermodul eines kofreien, also insbesondere eines injektiven $R$-Moduls.*

*Beweis.* Wähle gemäß Lemma 8.17 zu jedem $0 \neq m \in M$ ein $\varphi_m : M \longrightarrow R^*$ mit $\varphi_m(m) \neq 0$. Wir erhalten die Injektion

$$M \hookrightarrow \prod_{\substack{m \in M \\ m \neq 0}} R^* ,$$

die in der $m$-Komponente gerade durch $\varphi_m$ gegeben wird. □

**Satz 8.19.** *Ein $R$-Modul ist genau dann injektiv, wenn er direkter Faktor in einem kofreien Modul ist.*

*Beweis.* Wähle eine Injektion $I \hookrightarrow M$ mit $M$ kofrei. Da $I$ injektiv ist, ist $I$ direkter Faktor (= direkter Summand) in $M$. Umgekehrt sind nach Lemma 8.4 direkte Faktoren in kofreien Moduln injektiv. □