Aufgabe 24

(a) Angenommen, es gäbe ein $z \in \mathbb{C}$, sodass $\forall \epsilon > 0 : |z - f(\epsilon)| > \epsilon$. Dies können wir umformen zu

$$\frac{1}{\epsilon} > \underbrace{\frac{1}{|z - f(\zeta)|}}_{\text{holomorph, da } z \neq f(\zeta)} .$$

Wegen des Satzes von Liouville muss $\frac{1}{|z-f(\zeta)|} = \text{const}$ sein. Also ist auch $\text{const} = |z - f(\zeta)| = |f(\zeta) - z| \geq |f(\zeta)| - |z|$ und daher $|f(\zeta)| < \text{const}$, also ist f beschränkt und daher nach Liouville konstant. Die Kontraposition war zu zeigen.

(b) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Dann gilt $z = k + i \cdot l + q + i \cdot s$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq q, s \leq 1$. Aufgrund der in der Aufgabenstellung beschriebenen Eigenschaft, ist also $f(z) = f(k + i \cdot l + q + i \cdot s) = f(q + s \cdot i)$. Aus Holomorphie folgt Stetigkeit, also ist $f(M)$ kompakt für $M = \{q + s \cdot i | 0 \leq q, s \leq 1\}$. Daher gibt es ein $C \in \mathbb{C}$, sodass $\sup\limits_{\zeta \in M} \zeta < C$. Es gilt folglich $f(z) = f(q + s \cdot i) < C$. Also ist f beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant.

Wir betrachten die Funktion $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$. Hat g eine Nullstelle, so nennen wir diese ζ. $h(z)$ ist also wohldefiniert für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\zeta\}$. In dieser Menge ist auch stets $|h(z)| \leq 1$, da $|f(z)| \leq |g(z)| \; \forall z \in \mathbb{C}$. Soll h holomorph sein, so muss die Cauchy'sche Integralformel gelten: $h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\varphi \frac{h(z)}{z - \zeta} \, \mathrm{d}z$