Funktionalanalysis - Übungsblatt 9

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 20. Dezember 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Bitte beachten Sie die verkürzte Abgabefrist!

Aufgabe 9.1 4 Punkte

Beweisen Sie Satz 3.46 aus der Vorlesung, d.h.: Ist $W \subset V$ ein linearer Teilraum und $v \in V$ ein Element in einem normierten $\mathbb{K}$-Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ mit

$$\operatorname{dist}(v, W) := \inf\{\|v - w\| : w \in W\} > 0,$$

so existiert ein $\Phi \in V'$ derart, dass

$$\|\Phi\|_{V'} = 1, \quad \Phi(v) = \operatorname{dist}(v, W), \quad \Phi(w) = 0 \text{ für alle } w \in W.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Teilraum $W_v := \mathbb{K}v + W = \{\lambda v + w : w \in W\}$ und definieren Sie ein geeignetes Funktional auf W_v.

Aufgabe 9.2 4 Punkte

Seien X, Y Banachräume. Seien $A : X \to Y$ und $B : Y' \to X'$ linear. Für alle $x \in X$ und $y' \in Y'$ gelte

$$\langle y', Ax\rangle_Y = \langle By', x\rangle_X$$

Man zeige, dass dann A und B stetig sind.
*Hinweis: Hier bezeichnet $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$ die so genannte **duale Paarung**. Das heißt für $x \in X$ und $f \in X'$ ist $\langle f, x\rangle_X = f(x)$.*

Aufgabe 9.3 4 Punkte

Sei X ein Banachraum und X' separabel. Zeigen Sie, dass dann auch X separabel ist.

Die folgenden Aufgaben müssen Sie nicht einreichen. Sie dienen zur Wiederholung oder der Erweiterung des Vorlesungsstoffes. Dafür können Sie auch Aussagen und Konzepte aus der Vorlesungswoche des 18.12. verwenden.

Aufgabe 9.4

Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist $A \subset X$ genau dann präkompakt wenn für jede Folge in A eine in X konvergente Teilfolge existiert.

Aufgabe 9.5

Sei $V = \mathbb{R}^2$ ausgestattet mit der üblichen euklidschen Norm und betrachten Sie den linearen Teilraum $W = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = 0\}$. Wir definieren das Funktional $\phi : W \to \mathbb{R}$ durch $\phi(x) = x_1$.
Zeigen Sie, es existiert eine eindeutige Hahn-Banach Fortsetzung $\Phi \in V'$ von ϕ, d.h. $\Phi|_W = \phi$ und $\|\Phi\|_{V'} = \|\phi\|_{W'}$. Diese ist gegeben durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{5}(4x_1 + 2x_2).$$

Aufgabe 9.6
Sei $V = \ell_1$ ausgestattet mit der üblichen $\|\cdot\|_{\ell_1}$ Norm. Betrachten Sie den Untervektorraum

$$W = \{v \in \ell_1 \mid v_k = 0 \text{ für alle } k \text{ ungerade}\}.$$

Betrachten Sie den Operator $\phi : W \to \mathbb{R}$, $\phi(w) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j$. Zeigen Sie, dass für jedes $y \in \ell_\infty$ mit

$$y_k = \begin{cases} 1, & k \text{ gerade,} \\ |y_k| \leq 1, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

der Operator Φ_y definiert durch $\Phi_y(v) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^* v_k$ eine Hah-Banach Fortsetzung von ϕ.
Hinweis: $\ell_1' = \ell_\infty$.

Aufgabe 9.7
Bestimmen Sie für die folgenden Operatoren den adjungierten Operator:

(a) $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$, $T(v_1, v_2, ...) = \left(\frac{v_1+v_2}{2}, \frac{v_2+v_3}{2}, \frac{v_3+v_4}{2}, ...\right)$.

(b) $T \in \mathcal{L}(L_2([0,1])))$, $(Tf)(x) = \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$.

(c) $T \in \mathcal{L}(L^2([0,1]))$, mit $(Tf)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$ fast überall. Hierbei ist $k \in C^0([0,1] \times [0,1], \mathbb{K})$ ein Integralkern.

(d) $TT^* \in \mathcal{L}(L^2([0,1])$ mit T und T^* aus Aufgabenteil c).