Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 1

Besprechung in den Übungsgruppen am 21. Oktober 2019

1. Hausaufgabe: **Differentiation**

Die folgenden Teilaufgaben sollen dazu dienen, einige Regeln der Differentiation anhand von Beispielen aufzufrischen bzw. einzuüben. Hierbei bezeichnet $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ die Ableitung nach x.

a) Benutzen Sie die *Produktregel*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[g(x)\,h(x)\right] = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\,h(x) + g(x)\,\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$$

wobei $g(x)$ und $h(x)$ zwei Funktionen von x sind, um die Ableitungen folgender Funktionen zu berechnen,

$$f(x) = x^2 \sin(x)\,, \qquad f(x) = \cos(x)\ln(x)\,, \qquad f(x) = \cosh(x)\,\mathrm{e}^x, \qquad f(x) = 5x^3\,\mathrm{e}^x \sin(x)\,.$$

b) Benutzen Sie die *Quotientenregel*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\,h(x) - g(x)\,\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}}{h^2(x)},$$

um die Ableitungen von folgenden Funktionen zu berechnen,

$$f(x) = \frac{x^2+3x+5}{3x-4}, \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\ln(x)}, \quad f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{x}.$$

c) Benutzen Sie die *Kettenregel*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g[h(x)] = \frac{\mathrm{d}g[h(x)]}{\mathrm{d}h(x)}\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x},$$

und die Ableitungen der folgenden Funktionen zu berechnen,

$$f(x) = \cos\left(x^2+5\right), \qquad f(x) = \mathrm{e}^{x^2}, \qquad f(x) = \ln\left(\sqrt{3x^3+4x}\right), \qquad f(x) = \frac{x^2}{\ln[\cos(x)]}.$$

d) Benutzen Sie die *Umkehrregel*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}g^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}}$$

mit $y = g(x)$, um die Ableitungen der folgenden Funktionen zu berechnen,

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad f(x) = \ln x, \qquad f(x) = \arccos(x)\,, \qquad f(x) = \operatorname{arsinh}(x)\,.$$

2. *Hausaufgabe:* Integration

Während es bei der Differentiation feste Regeln gibt, nach denen bei der Berechnung der Ableitung vorgegangen werden kann, ist die Berechnung von Integralen oft eine Kunst, für die eine gewisse Intuition enorm wichtig ist. Doch selbst mit genügend Erfahrung ist man nicht immer erfolgreich: Es gibt Funktionen, die keine analytische Stammfunktion besitzen, sodass in diesen Fällen bei der Berechnung eines Integrals auf numerische Methoden zurückgegriffen werden muss.

Im Folgenden finden Sie ein paar Tricks, um die Stammfunktion bestimmen zu können. Funktionen mit großen Buchstaben bezeichnen die Stammfunktion der entsprechenden Funktion mit kleinen Buchstaben, also ist z.B. $F(x)$ die Stammfunktion zu $f(x)$.

– Umkehrung der Kettenregel, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} f[g(x)] = F[g(x)]|_a^b$

– Partialbruchzerlegung, z.B. $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{1}{(x-3)\,(x+5)} = \frac{1}{8}\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{1}{x-3} - \frac{1}{8}\int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{1}{x+5}$

– Partielle Integration, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)\, g(x) = F(x)\, g(x)|_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\, F(x)\, \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$

– Substitution, $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x) = \int_{y(a)}^{y(b)} \mathrm{d}y\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(y) f[y(x)]$

Lösen Sie hiermit die folgenden Integrale,

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\, x \sin(x)\,, \quad \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x\, \mathrm{e}^{-x^2}, \quad \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x}{x^2+1}, \quad \int_2^3 \mathrm{d}x\, \frac{1}{x^2-1},$$

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, \sin(x)\, \mathrm{e}^{\cos(x)}, \quad \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\, \sin^2(x)\,, \quad \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{x^2+x-6}.$$

3. *Präsenzaufgabe:* Schiefer Wurf

Ein Speerwerfer trainiert für einen Wettkampf. Er überlegt sich, dass es einen optimalen Abwurfwinkel geben muss, um die Reichweite zu maximieren. Dies ist offensichtlich: Wird der Speer waagerecht geworfen, fällt er nach kurzer Flugstrecke auf den Boden. Wirft man ihn fast senkrecht nach oben, ist das Ergebnis ebenfalls enttäuschend. Die allgemeine Bahnkurve dieses reibungsfreien schiefen Wurfes liege in der x-z-Ebene, wobei die Gravitation in negative z-Richtung wirke.

a) Der Wurfwinkel zwischen dem Anfangsgeschwindigkeitsvektor und dem Boden sei α. Stellen Sie zunächst jeweils einen Zusammenhang zwischen dem Betrag der Anfangsgeschwindigkeit, v_0, dem Wurfwinkel α und den Projektionen der Anfangsgeschwindigkeit auf die x- und z-Achsen, $v_{x,0}$ und $v_{z,0}$, auf.

b) Leiten Sie eine Gleichung her, die die Reichweite des Wurfes als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und des Wurfwinkels α beschreibt. Die Anfangsbedingungen für den Ort und die Geschwindigkeit seien $x(0) = x_0$, $z(0) = z_0$ und $v_x(0) = v_{x,0}$, $v_z(0) = v_{z,0}$. Gehen Sie dabei davon aus, dass auch die Endhöhe bei z_0 liegt. Für welchen Wurfwinkel wird die Reichweite bei festem v_0 maximal?

4. Verständnisfragen

a) Warum ist das erste Newton'sche Axiom *nicht* im zweiten enthalten?

b) Wenn actio = reactio ist, wie wirkt dann ein fallender Bleistift auf die Erde zurück?

c) Warum müssen Ort *und* Geschwindigkeit angegeben werden, bevor die Newton'sche Bewegungsgleichung eindeutig gelöst werden kann?

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 1: Lösungen

1. Hausaufgabe: Differentiation

a)
- $f(x) = x^2 \sin(x)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x\sin(x) + x^2\cos(x) = x\left[2\sin(x) + x\cos(x)\right]$$

- $f(x) = \cos(x)\ln(x)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)\ln(x) + \cos(x)\frac{1}{x} = \frac{\cos(x)}{x} - \sin(x)\ln(x)$$

- $f(x) = \cosh(x)\,\mathrm{e}^x$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \sinh(x)\,\mathrm{e}^x + \cosh(x)\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left[\sinh(x) + \cosh(x)\right] = \mathrm{e}^x\left[\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right] = \mathrm{e}^{2x}$$

- $f(x) = 5x^3\,\mathrm{e}^x\sin(x)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 15x^2\,\mathrm{e}^x\sin(x) + 5x^3\,\mathrm{e}^x\sin(x) + 5x^3\,\mathrm{e}^x\cos(x) = 5x^2\,\mathrm{e}^x\left[(3+x)\sin(x) + x\cos(x)\right]$$

b)
- $f(x) = \dfrac{x^2+3x+5}{3x-4}$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{(2x+3)(3x-4) - (x^2+3x+5)\cdot 3}{(3x-4)^2} = \frac{3x^2-8x-27}{(3x-4)^2}$$

- $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\ln(x)}$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{e}^x\ln(x) - \mathrm{e}^x/x}{\ln^2(x)} = \frac{\mathrm{e}^x\left[x\ln(x) - 1\right]}{x\ln^2(x)}$$

- $f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

- $f(x) = \dfrac{\sin(x)\cos(x)}{x}$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\left[\cos^2(x) - \sin^2(x)\right]x - \sin(x)\cos(x)}{x^2}$$

c)
- $f(x) = \cos\left(x^2+5\right)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -2x\sin\left(x^2+5\right)$$

- $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$$

- $f(x) = \ln\left(\sqrt{3x^3 + 4x}\right)$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{3x^3 + 4x}}\,\frac{1}{2\sqrt{3x^3 + 4x}}\left(9x^2 + 4\right) = \frac{9x^2 + 4}{6x^3 + 8x}$$

- $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln\left[\cos(x)\right]}$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\ln\left[\cos(x)\right] + x^2\sin(x)/\cos(x)}{\ln^2\left[\cos(x)\right]} = \frac{x\left\{2\ln\left[\cos(x)\right] + x\tan(x)\right\}}{\ln^2\left[\cos(x)\right]}$$

d)
- $f(x) = \sqrt{x}$

$$f^{-1}(y) = x = y^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y} = 2y \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- $f(x) = \ln x$

$$f^{-1}(y) = \mathrm{e}^y \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y} = \mathrm{e}^y \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

- $f(x) = \arccos(x)$

$$f^{-1}(y) = \cos(y) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y} = -\sin(y)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\left[\arccos(x)\right]}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $f(x) = \operatorname{arsinh}(x)$

$$f^{-1}(y) = \sinh(y) \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y} = \cosh(y)$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cosh(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2\left[\operatorname{arsinh}(x)\right]}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. *Hausaufgabe:* Integration

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\, x\sin(x) = \underbrace{-x\cos(x)\big|_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\cos(x) = \sin(x)\big|_0^{\pi/2} = 1$
- $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x\,\mathrm{e}^{-x^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{d}x\,(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$
- $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{d}x\,\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^{1}\frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|\Big|_0^{1} = \frac{\ln(2)}{2} = \ln\left(\sqrt{2}\right) \approx 0{,}347$

- $$\int_2^3 \mathrm{d}x\, \frac{1}{x^2-1} = \int_2^3 \mathrm{d}x\, \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \int_2^3 \mathrm{d}x \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}\right)$$
$$= \int_2^3 \mathrm{d}x\, \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} = \int_2^3 \mathrm{d}x\, \underbrace{\frac{(A+B)x+B-A}{x^2-1}}_{B=-A=1/2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_2^3 \mathrm{d}x\, \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\int_2^3 \mathrm{d}x\, \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1|\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\ln|x+1|\Big|_2^3$$
$$= \frac{1}{2}\left[\ln(2) - \ln(4) + \ln(3)\right] = \ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \approx 0{,}203$$

- $$\int_0^\pi \mathrm{d}x\, \sin(x)\, \mathrm{e}^{\cos(x)},\ \text{substituiere } y = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\sin(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}y = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^\pi \mathrm{d}x\, \sin(x)\, \mathrm{e}^{\cos(x)} = -\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^y = \int_{-1}^1 \mathrm{d}y\, \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^y\big|_{-1}^1 = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 2{,}350$$

- $$\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{substituiere } x = \sin(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \cos(x)\,\mathrm{d}y$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \mathrm{d}y\, \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}y = y\big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

- $$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(x)\sin(x) = \underbrace{-\cos(x)\sin(x)\big|_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\, \cos^2(x)$$
$$= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\, \left[1 - \sin^2(x)\right] \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{x}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

- $$\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{x^2+x-6} = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}\right)$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \underbrace{\frac{(A+B)x+3B-2A}{(x+3)(x-2)}}_{B=-A=1/5}$$
$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{x-2} - \frac{1}{5}\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}\ln|x-2|\Big|_0^1 - \frac{1}{5}\ln|x+3|\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{5}\left[-\ln(2) - \ln(4) + \ln(3)\right] = \ln\left(\sqrt[5]{\frac{3}{8}}\right) \approx -0{,}196$$

3. ***Präsenzaufgabe:*** **Schiefer Wurf**

a) Es gelten die folgenden Zusammenhänge,

$$v_0^2 = v_{x,0}^2 + v_{z,0}^2, \qquad v_{x,0} = v_0\cos(\alpha) \quad \text{und} \quad v_{z,0} = v_0\sin(\alpha)\,. \tag{I}$$

b) Für die x- und z-Komponenten der Geschwindigkeit als Funktionen der Zeit gilt

$$v_x(t) = v_{x,0} \qquad \text{und} \qquad v_z(t) = v_{z,0} - gt.$$

Für die Koordinate gilt entsprechend

$$x(t) = v_{x,0}\, t + x_0 \qquad \text{und} \qquad z(t) = v_{z,0}\, t - \frac{1}{2} g t^2 + z_0.$$

Aus der linken Gleichung folgt sofort

$$t = \frac{x - x_0}{v_{x,0}}.$$

Einsetzen in die rechte Gleichung ergibt die *Bahnkurve*

$$z(x) = \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}} (x - x_0) - \frac{g}{2 v_{x,0}^2} (x - x_0)^2 + z_0 \quad \Rightarrow \quad z - z_0 = (x - x_0) \left[\frac{v_{z,0}}{v_{x,0}} - \frac{g}{2 v_{x,0}^2} (x - x_0) \right].$$

$z = z_0$ wird also trivialerweise erreicht bei $x = x_0$, also beim Start des Speeres. Die zweite Lösung ergibt sich, wenn der Term in der eckigen Klammer verschwindet. Dies ist der Fall für

$$x - x_0 = \frac{2 v_{z,0}\, v_{x,0}}{g} = \frac{2 v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g},$$

wobei im ersten Schritt (I) verwendet wurde und im zweiten Schritt ein Additionstheorem. Der Ausdruck $x - x_0$ und somit die Reichweite wird maximal für $\alpha = 45°$, also beim exakt diagonalen Wurf.

4. Verständnisfragen

a) Das erste und das zweite Newton'sche Axiom sind aufeinander bezogen und notwendig. Das erste legt fest, welche Art der Bewegung als natürlich oder grundlegend angesehen wird (in Newtons Fall die rein inertiale Trägheitsbewegung), und diese Festlegung könnte ebenfalls ganz anders aussehen – wenn man die freie Fallbewegung als natürlich oder grundlegend ansieht, kommt man geradewegs in die allgemeine Relativitätstheorie. Das zweite stellt dann fest, dass Abweichungen von dieser natürlichen Bewegung durch Kräfte verursacht werden und quantifiziert diesen Zusammenhang.

b) So wie die Erde den Bleistift anzieht, so zieht der Bleistift ebenfalls die Erde an. Die Kräfte, die aufeinander wirken, sind vom Betrag her gleich und entgegengesetzt. Jedoch besitzt der Bleistift eine um mehrere Größenordnung geringere Masse als die Erde, sodass aufgrund von $F = ma$ die Beschleunigung der Erde gegenüber der Beschleunigung des Bleistifts zu vernachlässigen ist. Die Beschleunigung der Erde ist in der Tat so klein, dass sie weit unterhalb der Nachweisgrenze liegt.

c) Die Newton'sche Bewegungsgleichung ist eine Bewegungsgleichung zweiter Ordnung für den Ort. Es sind zwei Anfangsbedingungen vonnöten, um den Ort als Funktion der Zeit eindeutig festlegen zu können. Wird die Bewegungsgleichung z.B. direkt zweifach integriert, so tauchen zwei Integrationskonstanten auf, die durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen.