Aufgabe 24

(a) Es gilt $M_12 = \mathbb{C}\Delta + \mathbb{C}G_4^3$. Daher lässt sich jede Modulform in M_{12} in der Form $f = \alpha\Delta + \beta G_4^3$ schreiben. Es gilt $G_4(a) = 0 \Leftrightarrow a = \rho$ und $\Delta(a) = 0 \Leftrightarrow a = i\infty$. Für $a = \rho$ wähle daher $\alpha = 0, \beta = 1$. Dann ist $f(\rho) = 0 \cdot \Delta(\rho) + G_4^3(\rho) = 0$. Sonst wähle $\beta = \Delta(a)$ und $\alpha = -G_4^3(a)$. Dann gilt $f(a) = -G_4^3(a) \cdot \Delta(a) + \Delta(a) \cdot G_4^3(a) = 0$.

(b) Besitzt f keine Nullstellen in $\mathbb{H}$, so muss nach der $\frac{k}{12}$-Formel bereits $v_{i\infty}(f) = \frac{k}{12}$ gelten. Insbesondere ist also $k \in 12\mathbb{Z}$. Die Funktion $g = \frac{f}{\Delta^{\frac{k}{12}}}$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$ als Quotient zweier holomorpher Funktionen, die keine Nullstellen in $\mathbb{H}$ besitzen. Die Nullstellenordung am Punkt $i\infty$ ist bei beiden Funktionen identisch, sodass $\lim\limits_{z \to i\infty} g(z) = c$ gilt. Insbesondere ist die Funktion also beschränkt auf der Fundamentalmenge. Wegen $g(M\langle z\rangle) = \frac{(cz+d)^{-k}}{(cz+d)^{-k}} g(z) = g(z)$ ist g daher eine Modulform vom Gewicht 0 und es gilt $g \equiv c$, also $f = c\Delta^{k/12}$.

Aufgabe 25

(a) Es gilt $T\langle z\rangle = \frac{z+1}{1} = z + 1$ und $S\langle z\rangle = \frac{-1}{z}$. Liegt ein Punkt bereits in $\overline{\mathcal{F}}$, so wählen wir $M = (ST)^3 = -E_2$. Ein Punkt in der komplexen oberen Halbebene kann sonst durch iteriertes Anwenden von T in den Streifen $|\Re(\tau) \leq 1/2|$ gebracht werden. Beachte

$$\Im(M\langle\tau\rangle) = \frac{\Im(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

Völlig analog zum Beweis im Skript folgt nun, dass die Menge $\{\Im(M\langle\tau\rangle) | M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})\}$ ein Maximum besitzt. Sei o.B.d.A. $\Im(\tau)$ dieses Maximum und durch Translation sei o.B.d.A. auch $|\Re(\tau)| \leq 1/2$. Der Vergleich von $\Im(\tau) \geq \Im(S\langle\tau\rangle)$ zeigt dann $\Im(\tau) \geq \Im(\tau)/|\tau|^2$. Daher besitzt jeder $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$-Orbit in $\mathbb{H}$ einen Repräsentanten im Bereich $\overline{\mathcal{F}}$, definiert durch

$$|\Re(\tau)| \leq 1/2 \quad , \quad |\tau| \geq 1.$$

(b) Wegen

$$\Im(M\langle\tau\rangle) = \frac{\Im(\tau)}{|c\tau + d|^2}.$$

ist $\Gamma\langle\tau\rangle \in \mathbb{H}\ \forall \tau \in \mathbb{H}$. Nach Teilaufgabe a existiert daher ein M mit $MA\tau \in \overline{\mathcal{F}}$.

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\mathcal{F}$ ein genauer Fundamentalbereich ist. Daher ist $MA\langle\tau\rangle \notin \mathcal{F}$ für ein beliebiges $\tau \in \mathcal{F}$ und $MA \notin \{\pm E_2\}$. Das ist nur dann möglich wenn $\tau' := MA\langle\tau\rangle \in \mathcal{F}^c \cap \overline{\mathcal{F}}$, also

(a) $\Re(\tau') = \frac{1}{2}$ oder

(b) $|\tau| = 1$ und $\Re(\tau) > 0$.

Im ersten Fall gilt dann aber $T\langle\tau' - 1\rangle = \tau'$ mit $\tau' - 1 \in \mathcal{F}$ und weil $\mathcal{F}$ ein genauer Fundamentalbereich ist folgt daraus $\tau = \tau' - 1 \implies \Re(\tau) = \frac{1}{2} \implies \tau \in \partial F$. Im zweiten Fall gilt $S\langle -\overline{\tau'}\rangle = \frac{1}{\overline{\tau'}} = \frac{\tau'}{|\tau'|^2} = \tau'$ und weil $\mathcal{F}$ ein genauer Fundamentalbereich ist folgt daraus $\tau = -\overline{\tau'}$.

Das kann aber beides nicht sein, da τ als innerer Punkt von $\mathcal{F}$ gewählt war. Also muss $MA\langle\tau\rangle = \tau$ gelten und $MA \in \{\pm E_2\}$. $-E_2$ ist in $\tilde{\Gamma}$ enthalten. Angenommen, $E_2 \notin \tilde{\Gamma}$. Wähle dann $A = -E_2$. Dann gilt $M \cdot -E_2 = -E_2 \implies M = E_2 \in \tilde{\Gamma}$. Das ist ein Widerspruch, also liegt auch E_2 in $\tilde{\Gamma}$. Insbesondere gilt daher $\forall A \in \Gamma\colon\ A^{-1} \in \tilde{\Gamma}$ und damit $\tilde{\Gamma} = \Gamma$.