Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg — Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Wintersemester 2019/20 — Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 2

Besprechung in den Übungsgruppen am 28. Oktober 2019

1. *Hausaufgabe:* Differentialgleichungen

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit den zugehörigen Anfangsbedingungen durch Separation der Variablen und evtl. Variation der Konstanten,

a) $y'(x) = y^2(x)\cosh(x)$ mit $y(0) = 4$,

b) $y'(x) = \sin(x)\cos(x) - y(x)\sin(x)$ mit $y(0) = 0$.

Hierbei bezeichnet der Strich die Ableitung $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

2. *Hausaufgabe:* Start einer Rakete

Beim Start einer Rakete wird diese durch den Rückstoß des von ihr ausgestoßenen Materials beschleunigt. Dabei nimmt die Masse m der Rakete kontinuierlich ab. Nehmen Sie im Folgenden an, dass die Rakete im homogenen Gravitationsfeld senkrecht nach oben beschleunigt wird und der Luftwiderstand vernachlässigbar ist. Im Bezugssystem der Rakete wird der verbrannte Treibstoff mit der konstanten Geschwindigkeit $-v_0 \leq 0$ nach unten ausgestoßen.

a) Mit welcher Geschwindigkeit wird der Treibstoff aus der Sicht eines auf der Erde ruhenden Beobachters ausgestoßen? Welche Kraft erfährt die Rakete somit aus der Sicht des ruhenden Beobachters? Berücksichtigen Sie sowohl den Rückstoß als auch den Einfluss der Gravitation. Bestimmen Sie hierzu den Impuls eines Treibstofftropfens der Masse Δm_T und leiten Sie daraus die Impulsänderung der Rakete Δp im Zeitinterval Δt ab. Bringen Sie außerdem die Masse des Tropfens mit der Massenänderung der Rakete Δm in Zusammenhang. Führen Sie anschließend die Grenzübergänge $\Delta p/\Delta t \to \dot{p}$ und $\Delta m/\Delta t \to \dot{m}$ durch.

b) Zeigen Sie, dass für die Rakete die folgende Bewegungsgleichung gilt,

$$\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} v_0 = -g - \dot{v}(t),$$

wobei $v(t)$ die Geschwindigkeit der Rakete aus Sicht des ruhenden Beobachters und g der Betrag der Erdbeschleunigung ist.

c) Bestimmen Sie $v(t)$ für den Fall, dass die Rakete bei $t = 0$ aus dem Stand startet und zu Beginn die Masse m_0 hat.

d) Nehmen Sie nun an, dass die Rakete ihren Treibstoff mit einer konstanten Rate μ ausstößt. Wie schnell ist die Rakete, wenn ihr Treibstoff der Masse $m_\mathrm{T} < m_0$ aufgebraucht ist? Wie hoch ist sie in dieser Zeit gestiegen? Drücken Sie hierfür die zeitabhängige Masse der Rakete $m(t)$ sowie den Zeitpunkt t_e, zu dem der Treibstoff aufgebraucht ist, über die Ausstoßrate aus.*

e) Wie schnell wird eine Rakete, die ihr gesamtes Gewicht als Treibstoff abstoßen kann? Ist das Ergebnis physikalisch sinnvoll? Woran liegt das?

---

* *Hinweis:* Lösen Sie das auftretende Integral der Form $\int \mathrm{d}x \, \ln(1 - cx)$ mit $c \in \mathbb{R}^+$, indem Sie eine Eins einschieben, dann einmal partiell integrieren und anschließend geschickt substituieren.

f) Ist der Treibstoff aufgebraucht, wird die Rakete nicht weiter nach oben beschleunigt, gehorcht jedoch nach wie vor ihrer Trägheit. Wie hoch steigt die Rakete ab dem Zeitpunkt, zu dem ihr Treibstoff aufgebraucht ist?

g) Bei einer Wasserrakete (bestehend aus einer PET-Flasche, die durch Druckluft und Wasser angetrieben wird) können etwa vier Fünftel des Anfangsgewichts als Treibstoff verwendet werden, und die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers ist ungefähr $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Gehen Sie davon aus, dass die Rakete das Wasser innerhalb einer halben Sekunde nach dem Start mit einer konstanten Rate ausstößt. Wie hoch und wie schnell ist die Rakete nach der ersten halben Sekunde? Wie hoch steigt die Rakete insgesamt, bevor sie auf den Boden zurückfällt? Trauen Sie diesem Ergebnis?

3. Präsenzaufgabe: Freier Fall mit Reibung

Ein zur Zeit $t = 0$ ruhender Wassertropfen falle aus einer Höhe von $600\,\mathrm{m}$ zur Erde. Die Beschleunigung sei durch die exponentielle Abhängigkeit $\ddot{r}(t) = -g\,\mathrm{e}^{-\gamma t}$ mit $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ und $\gamma = 1\,\mathrm{s^{-1}}$ gegeben.

a) Wie lautet die Lösung $r(t)$ für die gegebenen Anfangsbedingungen?

b) Berechnen Sie die Fallzeit des Tropfens und seine Aufprallgeschwindigkeit.

4. Verständnisfragen

a) Warum werden Bewegungen in der Mechanik und anderen Gebieten der Physik durch Differentialgleichungen beschrieben?

b) Beschreiben Sie das Verfahren, Differentialgleichungen durch Trennung der Variablen zu lösen.

c) Für welche Arten von Problemen ist es eine gute Näherung, die Gravitationskraft der Erde durch eine konstante Beschleunigung zu beschreiben?