Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 4

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 18. Mai 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Teilchen im expandierenden Universum*

Die Lagrange-Funktion eines Teilchens der Masse m im expandierenden Universum homogener Massendichte ist durch

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - m\,\Phi(\vec{x})$$

gegeben, wobei $\Phi(\vec{x})$ das Newton'sche Gravitationspotential ist. Die Expansion des Universums wird durch die Einführung von sog. *mitbewegten Koordinaten* $\vec{q}$ mit $\vec{x} \equiv a(t)\,\vec{q}$ beschrieben, wobei sich der Skalenfaktor $a(t)$ für ein räumlich flaches Universum, das nur Materie beinhaltet, aus der Differentialgleichung

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0\,a^{-3/2}$$

mit der Randbedingung $a(t = 0) = 0$ und der Hubble-Konstanten H_0 ergibt.

a) Drücken Sie die Lagrange-Funktion als Funktion der mitbewegten Koordinaten $\vec{q}$ aus. Verwenden Sie dabei die Funktion

$$f = \frac{m}{2}a\dot{a}\vec{q}^2,$$

um die Lagrangefunktion auf die Form

$$L' = L - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}a^2\dot{\vec{q}}^2 - m\,\varphi(\vec{q})$$

zu bringen.*

b) Berechnen Sie die zu L' gehörige Hamilton-Funktion, und identifizieren Sie Erhaltungsgrößen im Fall eines freien Teilchens in einem Universum ohne Dichtefluktuationen, für das $\varphi \equiv 0$ ist.

c) Berechnen Sie $\vec{q}(t)$ unter den Annahmen, dass das Teilchen bei t_0 startet, was einem Wert a_0 des Skalenfaktors entspricht, und dass $\varphi \equiv 0$ ist. Was passiert im Limes $t \to \infty$ mit $\vec{q}(t)$ und mit $\vec{x}(t)$? Interpretieren Sie das Ergebnis.

2. *Zylinderförmiges Potential*

Eine Punktmasse m befinde sich in einem zylindersymmetrischen Potential, sodass ihre potentielle Energie durch $V(\rho, \varphi, z) \equiv V(\rho)$ gegeben ist, wobei ρ die Radialkoordinate in Zylinderkoordinaten ist. Identifizieren Sie die Lagrange- und Hamilton-Funktion sowie die Erhaltungsgrößen dieses Systems.

---

* *Hinweis:* Identifizieren Sie das Potential φ einfach durch „übrig gebliebene" Terme nach der Transformation auf L'.

3. *Brachistochrone*

Auf dem 2. Übungsblatt haben Sie berechnet, dass die Zeit, die eine reibungsfrei unter dem Einfluss der Gravitationskraft entlang einer Kurve $z = -f(x)$ gleitende Punktmasse braucht, um sich von $x = x_0$ nach $x = x_\mathrm{E}$ zu bewegen, durch

$$T[f] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} \mathrm{d}x \, \sqrt{\frac{1 + [f'(x)]^2}{f(x)}}$$

gegeben ist, wenn die Punktmasse zu Beginn weder potentielle noch kinetische Energie besitzt.

a) Interpretieren Sie das Funktional $T[f]$ als Wirkung zu einer Lagrange-Funktion $L(t, q, \dot{q})$, indem Sie die Ersetzungen $t \to x$, $q \to f$ und $\dot{q} \to f'$ vornehmen. Finden Sie die entsprechende Hamilton-Funktion, und leiten Sie aus der Tatsache, dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von x abhängt, eine Differentialgleichung 1. Ordnung für $f(x)$ her, indem Sie eine Größe E finden, die für die Bahn mit minimalem $T[f]$ erhalten ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$f(\varphi) = \frac{1 - \cos\varphi}{4gE^2} \qquad \text{und} \qquad x(\varphi) = \frac{\varphi - \sin\varphi}{4gE^2}$$

die Differentialgleichung löst, wobei E die Erhaltungsgröße aus Aufgabenteil a) ist und g die Gravitationsbeschleunigung. Die durch $f(\varphi)$ und $x(\varphi)$ beschriebene Kurve wird als *Brachistochrone* (Kurve zu geringster Zeit) bezeichnet.

4. *Verständnisfragen*

a) Was sind zyklische Koordinaten, und wofür sind sie wichtig?

b) Was besagt das Hamilton'sche Prinzip?

c) Ist die Lagrange-Funktion eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Aussage und zeigen Sie gegebenenfalls, wie Lagrange-Funktionen verändert werden dürfen.

Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 4: Lösungen

1. Teilchen im expandierenden Universum

a) Für $\vec{x} = a(t)\,\vec{q}$ ist die Ableitung durch $\dot{\vec{x}} = \dot{a}\vec{q} + a\dot{\vec{q}}$ gegeben. Einsetzen in die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - m\,\Phi(\vec{x})$$

ergibt

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{a}\vec{q} + a\dot{\vec{q}}\right)^2 - m\,\Phi(\vec{x}) = \frac{m}{2}\left(\dot{a}^2\vec{q}^2 + 2\dot{a}a\,\vec{q}\cdot\dot{\vec{q}} + a^2\dot{\vec{q}}^2\right) - m\,\Phi(\vec{x}).$$

Die totale Zeitableitung von $f = (m/2)\,a\dot{a}\vec{q}^2$ ist durch

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\left(\dot{a}^2\vec{q}^2 + a\ddot{a}\vec{q}^2 + 2a\dot{a}\,\vec{q}\cdot\dot{\vec{q}}\right)$$

gegeben. Die neue Lagrange-Funktion L' ist dann

$$\begin{aligned} L' &= L - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}\left(\dot{a}^2\vec{q}^2 + 2\dot{a}a\,\vec{q}\cdot\dot{\vec{q}} + a^2\dot{\vec{q}}^2\right) - m\,\Phi(\vec{x}) - \frac{m}{2}\left(\dot{a}^2\vec{q}^2 + a\ddot{a}\vec{q}^2 + 2a\dot{a}\,\vec{q}\cdot\dot{\vec{q}}\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(a^2\dot{\vec{q}}^2 - a\ddot{a}\vec{q}^2\right) - m\,\Phi(a\vec{q}). \end{aligned}$$

Mit

$$\varphi(\vec{q}) \equiv \frac{1}{2}a\ddot{a}\vec{q}^2 + \Phi(a\vec{q})$$

kann L' demnach als

$$L' = \frac{m}{2}a^2\dot{\vec{q}}^2 - m\,\varphi(\vec{q})$$

geschrieben werden.

b) Die Hamilton-Funktion ist durch

$$H = \vec{p}\cdot\dot{\vec{q}} - L$$

gegeben, wobei

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{q}}} = ma^2\dot{\vec{q}} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{q}} = \frac{\vec{p}}{ma^2}.$$

Somit ergibt sich für die Hamilton-Funktion

$$H = \vec{p}\cdot\frac{\vec{p}}{ma^2} - \frac{m}{2}a^2\frac{\vec{p}^2}{m^2a^4} + m\,\varphi(\vec{q}) = \frac{\vec{p}^2}{2ma^2} + m\varphi(\vec{q}).$$

Für ein freies Teilchen ist $\varphi(\vec{q}) \equiv 0$, und die Hamilton-Funktion vereinfacht sich zu

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2ma^2}.$$

Aus den Hamilton'schen Gleichungen ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial\vec{q}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{p} = \text{const.}, \\ \dot{\vec{q}} &= \frac{\partial H}{\partial\vec{p}} = \frac{\vec{p}}{ma^2}. \end{aligned}$$

Der Impuls ist also erhalten, während die Energie *nicht* erhalten ist, da die Hamilton-Funktion über $a(t)$ explizit von der Zeit abhängt, und somit $\partial H/\partial t \neq 0$ ist.

c) Die Trajektorie $\vec{q}(t)$ ist durch

$$\vec{q}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, \frac{\vec{p}}{ma^2}$$

gegeben. Jetzt benutzt man die Differentialgleichung

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0\, a^{-3/2} \quad \Rightarrow \quad \dot{a} = H_0\, a^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a}}{H_0}\, \mathrm{d}a, \tag{I}$$

um $\mathrm{d}t'$ durch $\mathrm{d}a'$ auszudrücken. Dies ergibt

$$\vec{q}(a) = \frac{\vec{p}}{mH_0} \int_{a_0}^{a} \mathrm{d}a'\, a'^{-3/2} = \frac{2\vec{p}}{mH_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right).$$

Aus (I) ergibt sich, dass

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \mathrm{d}a' \, \sqrt{a'} = \frac{2}{3H_0} a^{3/2} \qquad \Rightarrow \qquad a = \left(\frac{3H_0 t}{2} \right)^{2/3} \equiv \tau^{2/3},$$

wobei verwendet wurde, dass $a(t = 0) = 0$ gilt. Außerdem wurde im letzten Schritt die dimensionslose Zeit τ eingeführt. Demnach ist

$$\vec{q}(\tau) = \frac{2\vec{p}}{mH_0} \left(\frac{1}{\tau_0^{1/3}} - \frac{1}{\tau^{1/3}} \right) \xrightarrow{\tau\to\infty} \frac{2\vec{p}}{mH_0 \tau_0^{1/3}}.$$

Für $\vec{x}(\tau)$ hingegeben gilt, dass

$$\vec{x}(\tau) = a(\tau)\, \vec{q}(\tau) = \frac{2\vec{p}}{mH_0} \tau^{2/3} \left(\frac{1}{\tau_0^{1/3}} - \frac{1}{\tau^{1/3}} \right) \xrightarrow{\tau\to\infty} \infty.$$

In mitbewegten Koordinaten $\vec{q}$ bleibt das Teilchen für $t \to \infty$ an der Stelle $2\vec{p}/(mH_0\tau_0^{1/3})$ stehen, da die Eigengeschwindigkeit des Teilchens in Relation zur Expansionsgeschwindigkeit des Universums für größer werdende Zeiten immer unbedeutender wird. In physikalischen Koordinaten $\vec{x}$ kommt das Teilchen aufgrund der Expansion und der Eigenbewegung hingegen unendlich weit.

2. Zylinderförmiges Potential

Zylinderkoordinaten sind durch $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ und $z = z$ gegeben. Mit

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi \qquad \text{und} \qquad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi$$

sowie $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ ist

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= (\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 \\
&= \dot{\rho}^2\cos^2\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi - 2\dot{\rho}\rho\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\varphi + \dot{\rho}^2\sin^2\varphi + \rho^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 2\dot{\rho}\rho\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi \\
&= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2.
\end{aligned}$$

Somit ist die Lagrange-Funktion durch

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\rho) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\rho)$$

gegeben. Die konjugierten Impulse zu ρ, φ und z sind durch

$$\begin{aligned}
p_\rho &= \frac{\partial L}{\partial \dot\rho} = m\dot\rho &\quad&\Rightarrow &\quad \dot\rho &= \frac{p_\rho}{m}, \\
p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi &&\Rightarrow & \dot\varphi &= \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, \\
p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot z} = m\dot z &&\Rightarrow & \dot z &= \frac{p_z}{m}
\end{aligned}$$

gegeben. Für die Hamilton-Funktion ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
H &= p_\rho\,\dot\rho + p_\varphi\,\dot\varphi + p_z\,\dot z - L = \frac{p_\rho^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m\rho^2} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_\rho^2}{m^2} + \rho^2\frac{p_\varphi^2}{m^2\rho^4} + \frac{p_z^2}{m^2}\right) + V(\rho) \\
&= \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + V(\rho).
\end{aligned}$$

Da die Lagrange-Funktion nicht explizit von φ und z abhängt, sind p_φ und p_z erhalten. Dies sieht man auch mit Hilfe der Hamilton'schen Gleichungen,

$$\dot p_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3} - \frac{\partial V}{\partial \rho} \neq 0, \qquad \dot p_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{und} \quad \dot p_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Da die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, also $\partial H/\partial t = 0$ ist, ist außerdem die Energie erhalten.

3. *Brachistochrone*

a) Mit den Ersetzungen $t \to x$, $q \to f$ und $\dot q \to f'$ kann

$$L = \sqrt{\frac{1 + f'^2(x)}{2gf(x)}}$$

als Lagrange-Funktion angesehen werden. Die entsprechende Hamilton-Funktion ergibt sich somit aus

$$\begin{aligned}
H &= f'\,\frac{\partial L}{\partial f'} - L = f' \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2gf}{1+f'^2}} \cdot \frac{2f'}{2gf} - \sqrt{\frac{1+f'^2}{2gf}} = \frac{f'^2}{\sqrt{2gf\,(1+f'^2)}} - \sqrt{\frac{1+f'^2}{2gf}} \\
&= \frac{f'^2 - 1 - f'^2}{\sqrt{2gf\,(1+f'^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{2gf\,(1+f'^2)}}.
\end{aligned}$$

Für die Bahn mit minimalem $T[f]$ ist $\mathrm{d}H/\mathrm{d}x = \partial H/\partial x$. Da H nicht explizit von x abhängt, ist dann $H = \text{const.} \equiv E$. Die Differentialgleichung für $f(x)$ lautet demnach

$$f\,(1 + f'^2) = \frac{1}{2gE^2}. \tag{II}$$

b) Die Ableitungen von

$$f(\varphi) = \frac{1 - \cos\varphi}{4gE^2} \qquad \text{und} \qquad x(\varphi) = \frac{\varphi - \sin\varphi}{4gE^2} \tag{III}$$

nach φ sind durch

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\sin\varphi}{4gE^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1 - \cos\varphi}{4gE^2}$$

gegeben. Die Ableitung f' ist demnach durch

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{-1} = \frac{\sin\varphi}{4gE^2}\frac{4gE^2}{1-\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} \tag{IV}$$

gegeben. Einsetzen von (III) und (IV) in (II) ergibt

$$\begin{aligned} f\,(1+f'^2) &= \frac{1-\cos\varphi}{4gE^2}\left[1+\frac{\sin^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2}\right] = \frac{1-\cos\varphi}{4gE^2}\frac{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}{(1-\cos\varphi)^2} \\ &= \frac{1}{4gE^2}\frac{1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{1}{4gE^2}\frac{2-2\cos\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{1}{2gE^2}. \end{aligned}$$

Also löst die parametrische Darstellung (III) tatsächlich die Differentialgleichung (II).

4. Verständnisfragen

a) Koordinaten, von denen die Lagrange-Funktion L nicht explizit abhängt, heißen zyklisch: Wenn die Koordinate q_i nicht explizit in L vorkommt, kann ihr Nullpunkt beliebig verschoben werden, $q_i \to q_i + c$, ohne dass sich die Bewegungsgleichungen ändern. Der zugehörige konjugierte Impuls $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$ ist dann erhalten.

b) Entlang der wirklichen Bahn zwischen zwei festen Punkten wird die Wirkung $S\,[q(t)]$, die als zeitliches Integral über die Lagrange-Funktion definiert ist, extremal, bzw. ihre Variation $\delta S\,[q(t)]$ verschwindet.

c) Aus dem Hamilton'schen Prinzip folgt, dass die Lagrange-Funktion nicht eindeutig ist: Wenn man die Lagrange-Funktion durch einen Term ergänzt, der die totale Zeitableitung einer beliebigen Funktion der Koordinaten und der Zeit ist, dann ändert sich dadurch die Wirkung lediglich um eine Konstante, die bei der Variation verschwindet. Die Bewegungsgleichungen, auf die es ankommt, bleiben dadurch unverändert.