Aufgabe	1	2	3
Punkte	16	18	14

a) Es gilt laut Kettenregel

$$\frac{d f(M\langle z\rangle)}{dz} = \frac{d M\langle z\rangle}{dz} \cdot f'(M\langle z\rangle)$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(M\langle z\rangle) = \left(\frac{d}{dz} \frac{az+b}{cz+d}\right)^{-1} \cdot \frac{d}{dz}\left[(cz+d)^k f(z)\right]$$

$$= \left(\frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2}\right)^{-1} \cdot \left[(cz+d)^k f'(z) + ck(cz+d)^{k-1} f(z)\right]$$

$ad-bc = \det M = 1$

$$= \left(\frac{1}{(cz+d)^2}\right)^{-1} \cdot \left[(cz+d)^k f'(z) + ck(cz+d)^{k-1} f(z)\right]$$

$$= (cz+d)^{k+2} f'(z) + ck(cz+d)^{k-1} f(z) \quad \square$$

b) Es gilt $[f,g]_1 = (-1)^0 \binom{k}{1}\binom{l}{0} f g' + (-1)^1 \binom{k}{0}\binom{l}{1} f' g = k f g' - l f' g$

6) Wir erhalten $([f,g]_1|_{k+l+2} M)(z) = (cz+d)^{-k-l-2}\left[k \cdot f(M\langle z\rangle) g'(M\langle z\rangle) - l f'(M\langle z\rangle) g(M\langle z\rangle)\right]$

$$= (cz+d)^{-k-l-2}\Big[k \cdot (cz+d)^k f(z) \cdot \left((cz+d)^{l+2} g'(z) + lc(cz+d)^{l+1} g(z)\right) - l \cdot (cz+d)^l g(z) \cdot \left((cz+d)^{k+2} f'(z) + kc(cz+d)^{k+1} f(z)\right)\Big]$$

$$= k f(z) g'(z) + klc(cz+d)^{-1} f(z) g(z) - klc(cz+d)^{-1} g(z) f(z) - l g(z) f'(z)$$

$$= (k f g' - l f' g)(z) = [f,g]_1(z)$$

Weiter gilt $\lim_{z\to\infty} [f,g]_1(z) = \lim_{z\to\infty} \left([f,g]_1|_{k+l+2} M\right)(z) \overset{\text{wähle } M = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{smallmatrix}\right)}{=} \lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z-i)^{k+l+2}} \cdot [f,g]_1\left(\frac{iz}{z-i}\right)$

~~Als~~ Als holomorphe Funktion ist $[f,g]_1$ stetig, d.h. $\lim_{z\to\infty} [f,g]_1\left(\frac{iz}{z-i}\right) = [f,g]_1\left(\lim_{z\to\infty} \frac{iz}{z-i}\right)$

$= [f,g]_1(i) = c < \infty$, da $[f,g]_1$ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist.

Wegen $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z-i)^{k+l+2}} = 0$ folgt also

$$\lim_{z\to\infty} [f,g]_1(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z-i)^{k+l+2}} \cdot [f,g]_1\left(\frac{iz}{z-i}\right) = 0 \cdot c = 0.$$

$\Rightarrow$ $[f,g]_1$ ist in der Spitze ∞ null, da $SL_2(\mathbb{Z})$ nur eine Spitzenklasse besitzt, ist damit $[f,g]_1$ eine Spitzenform vom Gewicht $k+l+2$.

$\square$

1b (ii) $[[f,g]_1,h]_1 + [[g,h]_1,f]_1 + [[h,f]_1,g]_1$

$= [kfg' - lf'g, h]_1 + [lgh' - mg'h, f]_1 + [mhf' - nh'f, g]_1$

$= (k+l+2)(kfg' - lf'g)h' - m(kf'g' + kfg'' - lf''g - lf'g')\cdot h$
$+ (l+m+2)(lgh' - mg'h)f' - k(lg'h' + lgh'' - mg''h - mg'h')\cdot f$
$+ (n+k+2)(nhf' - kh'f)g' - l(nh'f' + nhf'' - kh''f - kh'f')\cdot g$

$= fg'h'[(k+l+2)k - kl + km - k(n+k+2)]$
$+ f'gh'[-l(k+l+2) + l(l+m+2) + kl - lm]$
$+ f'g'h[-mk + lm - m(l+m+2) + n(n+k+2)]$
$+ fg''h[-km + km]$
$+ f''gh[lm - lm]$
$+ fgh''[-lk + lk]$

$= fg'h'[\cancel{k^2} + \cancel{kl} + \cancel{2k} - \cancel{kl} + \cancel{km} - \cancel{km} - \cancel{k^2} - \cancel{2k}]$
$+ f'gh'[-\cancel{lk} - \cancel{l^2} - \cancel{2l} + \cancel{l^2} + \cancel{lm} + \cancel{2l} + \cancel{kl} - \cancel{lm}]$
$+ f'g'h[-\cancel{mk} + \cancel{lm} - \cancel{ml} - m^2 - 2m + m^2 + km + 2m]$
$= 0$ $\square$

2a) Es gilt $x \cdot e^{-c \cdot x} \xrightarrow{x \to \infty} 0$ nach Ana 1 für $c > 0$.
Insbesondere gilt also auch $n^2 \cdot e^{-c \cdot n^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N : n^2 e^{-cn^2} \leq 1$ (*)
Sei nun K ein beliebiges kompaktum $K \subseteq \mathbb{H}$. Dann gilt für ein beliebiges

$z = x + iy \in K$: $y \geq k$ für ein $k > 0$.

Wir erhalten
$$|e^{\pi i n^2 z}| = |e^{\pi i n^2 (x+iy)}| = |e^{\overbrace{\pi i n^2 x}^{\in i\mathbb{R}}}| \cdot |e^{-\pi n^2 y}| = e^{-\pi n^2 y} \leq e^{-\pi n^2 k}$$

Es gilt $c := \pi k > 0$, also folgt für $n > N$ mit (*): $|e^{\pi i n^2 z}| \leq \frac{1}{n^2}$.

Insgesamt erhalten wir für $z \in K$:
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\pi i n^2 z}| \leq 1 + 2\left(\sum_{n=1}^{N} |e^{\pi i n^2 z}| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$$
$$\leq 1 + 2 \cdot \left(C' + \frac{\pi^2}{6}\right) < \infty$$

Insbesondere ist ϑ kompakt absolut konvergent und damit holomorph nach Fktheo 1.

2a) Fortsetzung: Sei $z \in D_{1,\infty}$. Dann gilt

$$|\vartheta(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\pi i n^2 z}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im}(z)} < \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \cdot 1} = \vartheta(i)$$

ϑ ist auf dem Kompaktum $\{i\}$ absolut konvergent, d.h. $\vartheta(i) = C < \infty$.

$$\Rightarrow \quad |\vartheta(z)| < C \quad \forall z \in D_{1,\infty}. \qquad \square$$

$\boxed{2b}$

$$\vartheta(z+2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 (z+2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} \cdot \underbrace{e^{2\pi i n^2}}_{\substack{2n^2 \equiv 0 \bmod 2 \\ \Rightarrow e^{2\pi i n^2} = 1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z} = \vartheta(z)$$

$\boxed{2c}$

$$(\vartheta^8|_4 T^2)(z) = 1^{-4} \vartheta^8(z+2) = \vartheta^8(z)$$

$$(\vartheta^8|_4 S)(z) = z^{-4} \vartheta(-\tfrac{1}{z}) = z^{-4} \sqrt{\tfrac{z}{i}}^{\,8} \vartheta^8(z) = \vartheta^8(z)$$

3) 1. $\varphi(M\langle z\rangle) = \operatorname{Im}(M\langle z\rangle)^{k/2} \cdot f(M\langle z\rangle) = \left(\frac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}\right)^{k/2} (cz+d)^k f(z)$

2. $|f| \leq \frac{|\varphi|}{\operatorname{Im}(z)^{k/2}} = C \cdot \operatorname{Im}(z)^{-\frac{k}{2}}$

3. $|a_n(f)| = \left| \int_\gamma f(z) e^{-2\pi i n z} dz \right| = \left| \int_0^1 f(t+iy) \underbrace{e^{-2\pi i n (t+iy)}}_{||\neq 1} dt \right|$

$\leq \int_0^1 |f(t+iy)| \cdot |e^{2\pi n y}| dt \leq \int_0^1 C \cdot y^{-\frac{k}{2}} \cdot e^{2\pi n y} dt = C y^{-\frac{k}{2}} e^{2\pi n y}$

$\overset{y=\frac{1}{n}}{=} C n^{\frac{k}{2}} \cdot e^{2\pi} = C' n^{\frac{k}{2}}$ $\square$