UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

9. Übungsblatt - Lösungsskizzen

Aufgabe 33 (Unkorreliertheit und Unabhängigkeit, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).
Seien (X, Y) die Koordinaten eines Punktes, der zufällig aus $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ausgewählt wird, d.h. der Zufallsvektor (X, Y) habe die Dichte

$$\mathbb{f}^{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Berechnen Sie die Marginalverteilungen $\mathbb{f}^X$ und $\mathbb{f}^Y$ von X und Y.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X), \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ sowie $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$ und die Korrelation $\rho(X, Y)$.
Hinweis: *Verwenden Sie für die Berechnungen die Transformationsformel und Polarkoordinaten* $(x, y) = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ *bzw.* $x = \sin(\phi)$ *für die 2- bzw. 1-dimensionalen Integrale.*

(c) Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind, obwohl sie unkorreliert sind.

Lösung 33.

(a) Es ist

$$\mathbb{f}^{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}} = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leq 1\}} = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\}} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 1\}},$$

also

$$\underline{\underline{\mathbb{f}^X(x)}} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{f}^{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, \mathrm{d}y \cdot \mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 1\}} = \underline{\underline{\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\leq x\leq 1\}}}},$$

und weil $\mathbb{f}_{X,Y}(x, y)$ symmetrisch in x und y ist, folgt analog:

$$\underline{\underline{\mathbb{f}^Y(y)}} = \underline{\underline{\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-y^2} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\leq y\leq 1\}}}}.$$

(b) Berechne zunächst $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f^X(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} \underbrace{\underbrace{x}_{\text{ungerade}} \cdot \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\text{gerade}}}_{\text{ungerade}}\, \mathrm{d}x = 0.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f^X(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$$

und da der Integrand gerade ist, folgt:

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$$

mit der Substitution $x = \sin(u) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos(u) \Rightarrow \ \mathrm{d}x = \cos(u)\ \mathrm{d}u$ folgt

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \int_{u^{-1}(0)=0}^{u^{-1}(1)=\frac{\pi}{2}} \sin^2(u) \cdot \sqrt{1-\sin^2(u)} \cos(u)\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{2\sin(u)\cos(u)}_{=\sin(2u)})^2\ \mathrm{d}u$$

und mit $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ schließlich:

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(4u)\right)\ \mathrm{d}u \quad = \quad \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} \quad = \quad \frac{1}{4}.$$

Damit ist

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{4} - 0^2 = \frac{1}{4}.$$

Da $\mathbb{f}^X = \mathbb{f}^Y$ (d.h. X und Y sind identisch verteilt), folgt $\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1}{4}$.

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot \mathbb{f}^{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}} \frac{1}{\pi} xy\ \mathrm{d}(x,y)$$

Wir transformieren nun in Polarkoordinaten: $\psi(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) \\ r\sin(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\psi^{-1}(E) = \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 1, \phi \in [0, 2\pi]\}$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cdot (r\cos(\phi)) \cdot (r\sin(\phi)) \cdot r\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 r^3 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin(2\phi)\ \mathrm{d}\phi}_{=0}\ \mathrm{d}r = 0. \end{aligned}$$

(c) Wegen $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = 0$ sind X und Y unkorreliert. Aber X und Y sind nicht unabhängig, denn

$$\begin{aligned} \mathbb{f}^{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\le 1\}} \\ &\neq \left(\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\le x\le 1\}}\right) \cdot \left(\frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1-y^2} \cdot \mathbb{1}_{\{-1\le y\le 1\}}\right) = \mathbb{f}^X(x) \cdot \mathbb{f}^Y(y) \end{aligned}$$

(Dass linke und rechte Seite sich nicht nur auf einer $\mathbb{R}^2$-Nullmenge unterscheiden, sieht man daran, dass $\mathbb{f}^X(x) \cdot \mathbb{f}^Y(y)$ in der Menge $[0,1]^2 \backslash E$ positive Werte annimmt, aber $\mathbb{f}^{X,Y}(x,y)$ dort überall Null ist).

Aufgabe 34 (Unkorreliertheit und Unabhängigkeit, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass es zwingend notwendig ist, dass zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 **gemeinsam** normalverteilt sind, damit aus $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_1, X_2) = 0$ auf die Unabhängigkeit von X_1, X_2 geschlossen werden kann (vgl. Beispiel 24.14 aus dem Skript).
Sei dazu $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei $Y \sim \mathrm{N}_{(0,1)}$ standardnormalverteilt und $V_p \sim \mathrm{Bin}_{(1,p)}$ eine von Y unabhängige, bernoulliverteilte Zufallsvariable mit $p \in (0,1)$. Definiere $Z_p := (-1)^{V_p} \cdot Y$.

(a) Zeigen Sie: $Z_p \sim \mathrm{N}_{(0,1)}$ für alle $p \in (0,1)$.
Hinweis: *Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von Z_p, indem Sie den "Trick" $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \{V_p = 0\}) + \mathbb{P}(A \cap \{V_p = 1\})$ benutzen.*

(b) Zeigen Sie: Für alle $p \in (0,1)$ sind Y, Z_p nicht unabhängig.
Hinweis: *Betrachten Sie die Ereignisse $\{Y < -1, Z_p < -1\}$ und $\{Y < -1, Z_p > 1\}$.*

(c) Finden Sie $p \in (0,1)$, so dass Y, Z_p unkorreliert sind, d.h. $\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, Z_p) = 0$.

Lösung 34.

(a) Es gilt für die Verteilungsfunktion von Z_p mit $z \in \mathbb{R}$ (es bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung):

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{Z_p}(z) &= \mathbb{P}(Z_p \le z) = \mathbb{P}((-1)^{V_p} \cdot Y \le z) \\
&= \mathbb{P}((-1)^{V_p} \cdot Y \le z, V_p = 0) + \mathbb{P}((-1)^{V_p} \cdot Y \le z, V_p = 1) \\
&= \mathbb{P}(Y \le z) \cdot \mathbb{P}(V_p = 0) + \underbrace{\mathbb{P}(-Y \le z)}_{=\mathbb{P}(Y \ge -z)} \cdot \mathbb{P}(V_p = 1) \\
&= \Phi(z) \cdot (1-p) + (1 - \Phi(-z)) \cdot p
\end{aligned}$$

Da die Dichte der Standardnormalverteilung symmetrisch um 0 ist, ist Φ punktsymmetrisch um $(0, \Phi(0)) = (0, \frac{1}{2})$. Das bedeutet $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ und damit

$$\mathbb{F}_{Z_p}(z) = \Phi(z) \cdot (1-p) + \Phi(z) \cdot p = \Phi(z).$$

Das bedeutet, $Z_p \sim \mathrm{N}_{(0,1)}$.

(b) Wären Y, Z_p unabhängig, so würde für alle $z < 0$ gelten

$$\mathbb{P}(Y < z, Z_p < z) \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(Y < z) \cdot \mathbb{P}(Z_p < z) \stackrel{Y, Z_p \sim N_{(0,1)}}{=} \Phi(z)^2.$$

sowie

$$\mathbb{P}(Y < z, Z_p > -z) \stackrel{!}{=} \mathbb{P}(Y < z) \cdot \mathbb{P}(Z_p > -z) \stackrel{Y, Z_p \sim N_{(0,1)}}{=} \Phi(z)(1 - \Phi(-z)) = \Phi(z)^2.$$

Hier ist aber

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y < z, Z_p < z) &= \mathbb{P}(Y < z, (-1)^{V_p} Y < z) \\
&= \mathbb{P}(Y < z, (-1)^{V_p} Y < z, V_p = 0) + \mathbb{P}(Y < z, (-1)^{V_p} Y < z, V_p = 1) \\
&= \mathbb{P}(Y < z, V_p = 0) + \mathbb{P}(Y < z, -Y < z, V_p = 1) \\
&= \mathbb{P}(Y < z) \cdot \mathbb{P}(V_p = 0) + 0 \\
&= \Phi(z) \cdot (1-p).
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y < z, Z_p > -z) &= \mathbb{P}(Y < z, (-1)^{V_p} Y > -z) \\
&= \mathbb{P}(Y < z, (-1)^{V_p} Y > -z, V_p = 0) + \mathbb{P}(Y < z, (-1)^{V_p} Y > -z, V_p = 1) \\
&= \mathbb{P}(Y < z, Y > -z, V_p = 0) + \mathbb{P}(Y < z, -Y > -z, V_p = 1) \\
&= 0 + \mathbb{P}(Y < z) \cdot \mathbb{P}(V_p = 1) \\
&= \Phi(z) \cdot p.
\end{aligned}$$

Das bedeutet, es müsste insgesamt gelten:

$$\Phi(z) \cdot (1-p) = \Phi(z)^2 = \Phi(z) \cdot p \quad \Leftrightarrow \quad (1-p) = \Phi(z) = p.$$

Das kann wegen $p \in (0,1)$, $z < 0$ aber nie erfüllt sein, da $\Phi(z) < \frac{1}{2}$, aber entweder p oder $(1-p)$ einen Wert größer $\frac{1}{2}$ annehmen.

(c) Es ist $\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, Z_p) = \mathbb{E}(YZ_p) - \mathbb{E}(Y) \cdot \mathbb{E}(Z_p) = \mathbb{E}(YZ_p)$, da $Y, Z_p \sim N_{(0,1)}$. Wir berechnen nun noch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(YZ_p) &= \mathbb{E}((-1)^{V_p} Y^2) \overset{Y, V_p \text{ unabh.}}{=} \mathbb{E}((-1)^{V_p}) \cdot \mathbb{E}(Y^2) \\ &\overset{Y \sim N_{(0,1)}}{=} \Big(1 \cdot \mathbb{P}(V_p = 0) + (-1) \cdot \mathbb{P}(V_p = 1)\Big) \cdot 1 \\ &= (1 - 2p). \end{aligned}$$

Damit haben wir $\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, Z_p) = 1 - 2p = 0$ genau dann, wenn $p = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 35 (Erwartungstreue Schätzer, 4 = 1 + 0.5 + 1 + 1.5 Punkte).
In dieser Aufgabe rekapitulieren wir Beispiel 26.16 (a) und Beispiel 26.18 (a) aus der Vorlesung.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ unabhängig und identisch, stetig verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $\mathbb{F}^X$.
Seien $M_1 := \min(X_1, ..., X_n)$ und $M_2 := \max(X_1, ..., X_n)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktionen von M_1 und M_2 gegeben sind durch

$$\mathbb{F}^{M_1}(z) = 1 - (1 - \mathbb{F}^X(z))^n \qquad \text{und} \qquad \mathbb{F}^{M_2}(z) = \mathbb{F}^X(z)^n.$$

Hinweis: *Finden Sie eine zu* $\max(x_1, ..., x_n) \leq z$ *äquivalente Aussage, die Bedingungen an die einzelnen* x_i *stellt.*

(b) Sei $X_1 \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Welche bekannte Verteilung besitzt M_1?

(c) Sei nun $X_1 \sim U_{[0,\theta]}$ gleichverteilt auf $[0, \theta]$ mit Parameter $\theta > 0$.

- Bestimmen Sie $\mathbb{E}_\theta(X_1)$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(X_1)$.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte f_{M_2} von M_2 und berechnen Sie $\mathbb{E}_\theta(M_2)$.

(d) Wir betrachten nun zwei Schätzer für den Parameter θ: den Momentschätzer $\hat{\theta}_1 = 2\overline{X_n}$ und den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_2 = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Zeigen Sie, dass

- $\hat{\theta}_1$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist, und dass
- $\hat{\theta}_2$ nicht erwartungstreu ist.

Wir können den Maximum-Likelihood-Schätzer korrigieren, indem wir stattdessen $\hat{\theta}_3 = \frac{n+1}{n}\hat{\theta}_2$ betrachten. Zeigen Sie, dass für $n > 1$

- der korrigierte Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_3$ effizienter ist als der Momentschätzer $\hat{\theta}_1$.

Bestimmen Sie nun für alle drei Schätzer den mittleren quadratischen Fehler. Welcher der drei Schätzer ist der beste bzgl. des MSE?

Lösung 35.

(a) Beachte, dass

$$\max(X_1,...,X_n) \le z \Longleftrightarrow X_1 \le z, ..., X_n \le z$$

und

$$\min(X_1,...,X_n) > z \Longleftrightarrow X_1 > z, ..., X_n > z.$$

Unter Nutzung dieser Äquivalenzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^{M_2}(z) &= \mathbb{P}(M_2 \le z) = \mathbb{P}(\max(X_1,...,X_n) \le z) = \mathbb{P}(X_1 \le z, ..., X_n \le z) \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{P}(X_1 \le z) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_n \le z) \\
&\overset{\text{identisch verteilt}}{=} \mathbb{P}(X_1 \le z)^n = \mathbb{F}^{X_1}(z)^n
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^{M_1}(z) &= \mathbb{P}(M_1 \le z) = 1 - \mathbb{P}(M_1 > z) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1,...,X_n) > z) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > z, ..., X_n > z) \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} 1 - \mathbb{P}(Z_1 > z) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(X_n > z) \\
&\overset{\text{identisch verteilt}}{=} 1 - \mathbb{P}(X_1 > z)^n = 1 - (1 - \mathbb{F}^{X_1}(z))^n.
\end{aligned}$$

(b) Nun ist $\mathbb{f}^{X_1}(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\{x \ge 0\}}$ bzw. $\mathbb{F}^{X_1}(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbb{1}_{x \ge 0}$. Wir erhalten für $x \ge 0$:

$$\mathbb{F}^{M_1}(x) = 1 - (1 - F^{X_1}(x))^n = 1 - e^{-\lambda n x},$$

d.h. $M_1 \sim \mathrm{Exp}_{\lambda n}$ ist wieder exponentialverteilt mit Parameter λn.

(c) Nun ist $\mathbb{f}^{X_1}(x) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$, und damit für $x \in [0, \theta]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta(X_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \mathbb{f}^{X_1}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta x\, \mathrm{d}x = \frac{\theta}{2} \\
\mathbb{E}_\theta(X_1^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathbb{f}^{X_1}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta x^2\, \mathrm{d} = \frac{\theta^2}{3} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(X_1) &= \mathbb{E}_\theta(X_1^2) - (\mathbb{E}_\theta(X_1))^2 = \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12} \\
\mathbb{F}^{X_1}(x) &= \int_{-\infty}^{x} \mathbb{f}^{X_1}(y)\, \mathrm{d}y = \frac{1}{\theta}\int_0^x \mathrm{d}y = \frac{x}{\theta}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten nach (a) für $x \in [0, \theta]$:

$$\mathbb{F}^{M_2}(x) = \mathbb{F}^{X_1}(x)^n = \frac{x^n}{\theta^n}.$$

Für die Dichte von M_2 erhalten wir durch Differenzieren für $x \in (0, \theta)$:

$$\mathbb{f}^{M_2}(x) = (\mathbb{F}^{M_2})'(x) = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}.$$

Offensichtlich ist $\mathbb{f}^{M_2}(x) = 0$ für $x \notin (0, \theta)$, da $X_1, ..., X_n \in [0, \theta]$ gilt und daher auch $M_2 = \max(X_1, ..., X_n) \in [0, \theta]$. Wir erhalten also insgesamt:

$$\mathbb{f}^{M_2}(x) = \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}_{(0,\theta)}(x).$$

Der Erwartungswert von M_2 berechnet sich durch

$$\mathbb{E}(M_2) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \mathbb{f}^{M_2}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^n\, \mathrm{d}x = \frac{n}{n+1}\theta.$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta(\hat\theta_1) &\overset{\mathbb{E}\text{ lin}}{=} \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}_\theta(X_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\theta}{2} = \theta \\
\mathbb{E}_\theta(\hat\theta_2) &\overset{(c)}{=} \frac{n}{n+1}\theta \\
\mathbb{E}_\theta(\hat\theta_2^2) &= \int_0^\theta \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{n+2}\theta^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\hat\theta_1) &= \frac{4}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \overset{\text{unabh.}}{=} \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) \overset{(c)}{=} \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\hat\theta_3) &= \frac{(n+1)^2}{n^2}\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\hat\theta_2) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\left(\frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2\right) \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2}\left(\frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2}\right)\theta^2 = \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} - 1\right)\theta^2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}
\end{aligned}$$

also halten wir für $n > 1$ $\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\hat\theta_3) < \mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\hat\theta_1)$, der korrigierte Maximum-Likelihood-Schätzer ist also effizienter als der Momentschätzer.

Wir bestimmen nun für die drei Schätzer den mittleren quadratischen Fehler: Da $\hat\theta_1$ und $\hat\theta_3$ erwartungstreu sind, handelt es sich dabei um die Varianz, die wir schon bestimmt haben:

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}_\theta(\hat\theta_1) &= \mathbb{E}_\theta\left(\hat\theta_1 - \theta\right)^2 = \frac{\theta^2}{3n} \\
\mathrm{MSE}_\theta(\hat\theta_3) &= \mathbb{E}_\theta\left(\hat\theta_3 - \theta\right)^2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}
\end{aligned}$$

für $\hat\theta_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}_\theta(\hat\theta_2) &= \mathbb{E}_\theta\left(\hat\theta_2 - \theta\right)^2 = \mathbb{E}_\theta(\hat\theta_2^2) - 2\theta\mathbb{E}_\theta(\hat\theta_2) + \theta^2 \\
&= \frac{n}{n+2}\theta^2 - 2\theta\frac{n}{n+1}\theta + \theta^2 = \frac{2}{(n+2)(n+1)}\theta^2
\end{aligned}$$

und es gilt

$$\mathrm{MSE}_\theta(\hat\theta_1) \geq \mathrm{MSE}_\theta(\hat\theta_2) \geq \mathrm{MSE}_\theta(\hat\theta_3).$$

Aufgabe 36 (t-Test für den Erwartungswert, 4 = 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Auf der Packung eines Feuerwerks der Marke "Superböller" steht geschrieben, dass die durchschnittliche Lautstärke höchstens $\mu_0 = 100$ Dezibel beträgt. Wie sind skeptisch und vermuten, dass die durchschnittliche Lautstärke höher ist. Dies wollen wir der Hersteller*in nachweisen. Dazu nehmen wir an, dass die Lautstärke beim Abbrennen eines Böllers normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ (entspricht der durchschnittlichen Lautstärke) und unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Unter strenger Aufsicht zünden wir nun $n = 10$ der "Superböller"-Feuerwerke unabhängig voneinander an und messen folgende Lautstärken (in Dezibel):

112.0	105.2	98.1	108.7	97.2	102.3	110.1	100.5	103.3	99.0

(a) Formulieren Sie zunächst die Hypothesen für das Testproblem, so dass der Fehler 1. Art dem peinlichen Irrtum entspricht, dass wir den Hersteller zu Unrecht beschuldigen. Führen Sie dann einen Student'schen t-Test (Satz 26.38) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und formulieren Sie das Ergebnis der Testentscheidung.

(b) Sei $\alpha \in (0,1)$. Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}_{(\mu,\sigma^2)}$. Sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Mittelwert und $S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ die empirische Stichprobenvarianz. Zeigen Sie, dass das Intervall

$$B(X_1, ..., X_n) := \left[\overline{X_n} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X_n} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right]$$

ein $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall für μ ist.

(c) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Lautstärke μ des Feuerwerks "Superböller" basierend auf unseren Beobachtungen an.

Hinweis: *Hier sind einige Quantile der t-Verteilung: $t_{9,0.95} = 1.833$, $t_{10,0.95} = 1.812$, $t_{9,0.975} = 2.262$, $t_{10,0.975} = 2.228$.*

Lösung 36. (a) Wir haben Beobachtungen $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}_{(\mu,\sigma^2)}$ (die gemessenen Lautstärken) mit unbekanntem $\sigma > 0$. Wir wollen einen t-Test zu den Hypothesen

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 100 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

durchführen (dann entspricht der Fehler 1. Art der Situation, dass die Lautstärke unter 100 Dezibel liegt, wir aber sagen, dass es mehr ist und wir somit der Händler*in zu Unrecht beschuldigen).
Der t-Test für den Erwartungswert zum Niveau α lautet nach Satz 26.38:

$$\phi^*(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1, & T_n > c^*, \\ 0, & T_n \leq c^*, \end{cases}$$

wobei $c^* = t_{n-1,1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der t_n-Verteilung ist und T_n unten definiert wird. Hier gilt

$$\begin{aligned} \overline{X_n} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = 103.64, \\ S^2 &:= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2 = 27.24, \\ T_n &:= \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = 2.21. \end{aligned}$$

Wegen $t_{n-1,1-\alpha} = t_{9,0.95} = 1.833$ folgt

$$T_n = 2.21 > 1.833 = t_{n-1,1-\alpha} = c^*,$$

d.h. $\phi^*(X_1, ..., X_n) = 1$. Auf Basis unserer Beobachtungen entscheiden wir uns also dafür, den Hersteller zu kontaktieren und auf seinen Fehler hinzuweisen.

(b) Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}_{(\mu,\sigma^2)}$. Aus Korollar 26.36 wissen wir, dass

$$T_n := \frac{\overline{X_n} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}. \tag{1}$$

Beachte zusätzlich: Die t_{n-1}-Verteilung ist symmetrisch um 0 (die Wahrscheinlichkeitsdichte ist symmetrisch um 0), d.h. T_n hat dieselbe Verteilung wie $-T_n$. Wegen $\alpha \in (0,1)$ ist $1 - \frac{\alpha}{2} > 0.5$. Daher ist sicher $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \geq 0$ (Das 0.5-Quantil, d.h. der Median einer symmetrischen Verteilung ist Null. Nun fragen wir mit $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ ein größeres als das 0.5-Quantil ab, daher muss das Ergebnis auch größer oder gleich Null sein.)
Wir rechnen nun die Definition eines Konfidenzintervalls nach. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mu \in B(X_1, ..., X_n)) &= \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mu\right| \leq \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right) \\
&= \mathbb{P}(|T_n| \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(|T_n| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) \\
&= 1 - \mathbb{P}(T_n > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \text{ oder } -T_n > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) \\
&\overset{t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \geq 0}{=} 1 - \mathbb{P}(T_n > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) - \mathbb{P}(-T_n > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) \\
&\overset{T_n \text{ gleiche Vert. wie } -T_n}{=} 1 - 2\mathbb{P}(T_n > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) \\
&= 1 - 2 \cdot \Big(1 - \underbrace{\mathbb{P}(T_n \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}})}_{\overset{(1)}{=} 1-\frac{\alpha}{2}}\Big) \\
&= 1 - \alpha.
\end{aligned}$$

Anmerkung: Natürlich genügt mit einem Verweis auf die Symmetrie der Verteilung im Grunde die Argumentation $\mathbb{P}(\mu \in B(X_1, ..., X_n)) = \mathbb{P}(|T_n| \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$.

(c) Die Werte von $\overline{X_n}$ und S^2 wurden schon in (a) berechnet. Wir erhalten mit (b) daher folgendes 95%-Konfidenzintervall (d.h. $\alpha = 0.05$ und mit $n = 10$ entsprechend $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9,0.975} = 2.262$):

$$\begin{aligned}
B(X_1, ..., X_n) &= \left[\overline{X_n} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \overline{X_n} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right] \\
&= [99.907, 107.373].
\end{aligned}$$

Feststellung: Dieses 95%-Konfidenzintervall beinhaltet die vom Händler behaupteten $\mu_0 = 100$ *Dezibel. Beachte aber, dass wir in (b) ein zweiseitiges Konfidenzintervall konstruiert haben. Das zum in (a) angewendeten t-Test gehörige Konfidenzintervall ist ein einseitiges Konfidenzintervall der Form*

$$\tilde{B}(X_1, ..., X_n) = \left[\overline{X_n} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1,1-\alpha}, \infty\right) = [100.618, \infty). \tag{2}$$

(Das ist übrigens auch eine erlaubte Lösung für Aufgabe (c)). Hier ist $\mu_0 = 100$ *wie vom Test aus (a) bereits bekannt nicht enthalten. Formal konstruiert man mit dem Test aus (a) ein Konfidenzintervall mit falschen Parametern* $(-\infty, \mu)$ *(d.h. man möchte eine endliche Untergrenze für* μ*), das Konfidenzintervall aus (b) entspricht eher einem Konfidenzintervall mit falschen Parametern* $(-\infty, \mu) \cup (\mu, \infty)$ *(d.h. man möchte endliche Ober- und Untergrenze für* μ*). Durch die Möglichkeit, beim Konfidenzintervall* (2) *eine Obergrenze von* ∞ *zu haben, kann die Untergrenze größer gewählt werden.*

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **01. Februar 2021, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`