Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1

Sei A gegeben.
Die Einträge der adjungierten Matrix $\widetilde{A}$ von A sind nach Vorlesung gegeben durch

$$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij}) \text{ mit } \widetilde{a}_{ij} = (-1)^{j+i}|A_{ij}|.$$

Daraus folgt

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{13} & \widetilde{a}_{14} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} & \widetilde{a}_{23} & \widetilde{a}_{24} \\ \widetilde{a}_{31} & \widetilde{a}_{32} & \widetilde{a}_{33} & \widetilde{a}_{34} \\ \widetilde{a}_{41} & \widetilde{a}_{42} & \widetilde{a}_{43} & \widetilde{a}_{44} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 0 & 11 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} -2 & 11 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 11 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 11 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 11 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 11 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 11 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 8 & -32 & -8 \\ 3 & 3 & -12 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \\ -5 & -5 & 20 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nun ist

$$\begin{pmatrix} 8 & 8 & -32 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T = (0),$$

Das bedeutet, dass der Eintrag in der ersten Zeile und ersten Spalte des Produktes von $\widetilde{A}$ und A gleich null ist. Nach der ersten Cramerschen Regel gilt $\widetilde{A} \cdot A = |A| \cdot E$, weshalb folglich alle Einträge des Produktes null sind und die Determinante von A null sein muss. Dementsprechend ist A insbesondere nicht invertierbar.

Aufgabe 2

(a) (i) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Für die Spaltenvektoren der Permutationsmatrix gilt nach Vorlesung $\varphi(\sigma)(e_i) = e_{\sigma(i)}$ und somit

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma)(e_1) &= e_{\sigma(1)} = e_4 \\
\varphi(\sigma)(e_2) &= e_{\sigma(2)} = e_3 \\
\varphi(\sigma)(e_3) &= e_{\sigma(3)} = e_2 \\
\varphi(\sigma)(e_4) &= e_{\sigma(4)} = e_1 \\
\varphi(\sigma)(e_5) &= e_{\sigma(5)} = e_5
\end{aligned}$$

Daher hat die Permutationsmatrix die Form

$$\varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma)(e_1) &= e_{\sigma(1)} = e_2 \\
\varphi(\sigma)(e_2) &= e_{\sigma(2)} = e_4 \\
\varphi(\sigma)(e_3) &= e_{\sigma(3)} = e_5 \\
\varphi(\sigma)(e_4) &= e_{\sigma(4)} = e_1 \\
\varphi(\sigma)(e_5) &= e_{\sigma(5)} = e_3
\end{aligned}$$

Daher hat die Permutaionsmatrix die Form

$$\varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) **ZZ:** Für $\sigma \in S_n$ und K Körper ist die Spur der zugehörigen Permutationsmatrix $\varphi(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Anzahl der Fixpunkte von σ.

Beweis. Sei $\sigma \in S_n$, K ein Körper und $\varphi(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(K)$ die zugehörige Permutaionsmatrix. Es gilt

$$\sigma(i) = i \Longleftrightarrow \varphi(\sigma)_{ii} = 1_K,$$

d.h., dass der i-te Einheitsvektor in der i-ten Spalte stehen bleibt.
Weiter gilt

$$\sigma(i) \neq i \Longleftrightarrow \varphi(\sigma)_{ii} = 0_K.$$

Somit stehen insbesondere auf der Hauptdiagonalen von $\varphi(\sigma)$ dort eine 1_K, wo $\sigma(i) = i$, also σ einen Fixpunkt hat und 0_K, wo $\sigma(i) \neq i$. Insgesamt erhalten wir

$$\operatorname{Sp}(\varphi(\sigma)) = \sum_{i \in \{1,\dots,n\}:\sigma(i)=i} 1_K = N_K$$

□

Aufgabe 3

Wir berechnen zunächst die Eigenwerte von $M := \lambda \cdot E_3 - A$. Diese sind laut Vorlesung die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\begin{aligned}
&\det(\lambda \cdot E_3 - A)\\
=&\det\begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 & -6 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 3 & 5 & \lambda + 5 \end{pmatrix} = \qquad (\lambda-4)(\lambda-3)(\lambda+5) - 3(\lambda-3)(-6)\\
=&(\lambda - 3) \cdot ((\lambda-4)(\lambda+5) + 18)\\
=&(\lambda - 3) \cdot (\lambda^2 + \lambda - 2)\\
=&(\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 2)
\end{aligned}$$

Als Nullstellen des Polynoms und damit Eigenwerte von M erhalten wir also $\lambda = 3, 1, -2$. Da M eine lineare Abbildung ist, gilt: $0 \in \ker(M)$. Ist λ nun kein Eigenwert von M, so gilt nach Vorlesung: $\forall v \in V$ mit $v \neq 0 : A \cdot v \neq \lambda \cdot v \iff \lambda \cdot E_3 \cdot v - A \cdot v \neq 0 \iff \ker(\lambda \cdot E_3 - A) = \{0\}$. Nun betrachten wir die drei Eigenwerte.

$\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 3-4 & -5 & -6 \\ 0 & 3-3 & 0 \\ 3 & 5 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \mathrm{III} + 3 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \mathrm{I} - 0.5 \cdot \mathrm{III} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot -1 \\ \mid \cdot -0.1 \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt nach dem im Tutorium besprochenen Verfahren

$$\ker(3 \cdot E_3 - A) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-4 & -5 & -6 \\ 0 & 1-3 & 0 \\ 3 & 5 & 1+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot -1 \\ | \cdot -0.5 \\ | \,\mathrm{III} + \mathrm{I} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \,\mathrm{I} - 5 \cdot \mathrm{II} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot 0.5 \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt nach dem im Tutorium besprochenen Verfahren

$$\ker(1 \cdot E_3 - A) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -2-4 & -5 & -6 \\ 0 & -2-3 & 0 \\ 3 & 5 & -2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \,\mathrm{I} - \mathrm{II} \\ | \cdot -0.2 \\ | \,\mathrm{III} + \mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot -\frac{1}{6} \\ \\ | \,\mathrm{III} + 0.5 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt nach dem im Tutorium besprochenen Verfahren

$$\ker(-2 \cdot E_3 - A) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Insgesamt erhalten wir also folgendes Ergebnis:

$$\ker(\lambda E_3 - A) = \begin{cases} \{0\} & |\lambda \notin \{-2, 1, 3\} \\ \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) & |\lambda = -2 \\ \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) & |\lambda = 1 \\ \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) & |\lambda = 3 \end{cases}$$

Aufgabe 4

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{Q}$ und $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$. Dann gilt $(\lambda A + B)^t = (\lambda A)^t + B^t = \lambda A^t + B^t$.

(b) Da $\lambda \cdot \mathrm{id}_{M_{n,n}(\mathbb{Q})} - (-)^t$ eine lineare Abbildung ist, gilt $0 \in \mathbb{Q} \forall \lambda \in \mathbb{Q}$. Für $\lambda = 0$ ist das offensichtlich auch das einzige Element des Kerns. Sei nun $A \neq 0 \in \ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_{M_{n,n}(\mathbb{Q})} - (-)^t)$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\lambda A - A^t = 0 \\ \iff &\lambda A = A^t \end{aligned} \tag{1}$$

Durch Transponieren erhalten wir

$$\iff \lambda A^t = A$$

Da $\lambda \neq 0$ existiert ein eindeutig bestimmtes Inverses λ^{-1}

$$\iff A^t = \lambda^{-1} A$$

Gleichsetzen mit (1) ergibt

$$\iff \lambda A = \lambda^{-1} A$$

Wegen $A \neq 0$ gibt es mindestens einen Eintrag $\neq 0$. Komponentenweise Vergleichen liefert als einzig mögliche Lösung

$$\begin{aligned} \iff &\lambda = \lambda^{-1} \\ \iff &\lambda = 1 \\ \iff &A = A^t \end{aligned} \tag{2}$$

oder

$$\begin{aligned} &\lambda = -1 \\ \iff &A = -A^t \end{aligned} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

Für eine Matrix, die Gleichung 2 genügt, gilt folgende Einschränkung: $a_{ij} = a_{ji}$. Insgesamt kann man also alle Diagonaleinträge sowie O.B.d.A. alle Einträge mit $i > j$ frei wählen, dann sind alle anderen Einträge durch Gleichung 2 bereits festgelegt. Die Anzahl der frei wählbaren Einträge ist also

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Daher besteht eine Basis über $\mathbb{Q}$ aus exakt $\frac{n(n+1)}{2}$ Vektoren. Für eine Matrix, die Gleichung 2 genügt, gilt folgende Einschränkung: $a_{ij} = -a_{ji}$. Insgesamt muss man also alle Diagonaleinträge gleich 0 wählen. Allerdings sind O.B.d.A. alle Einträge mit $i > j$ frei wählbar, dann sind alle anderen Einträge durch Gleichung 2 bereits festgelegt. Die Anzahl der frei wählbaren Einträge ist also

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Daher besteht eine Basis über $\mathbb{Q}$ aus exakt $\frac{n(n+1)}{2}$ Vektoren. Insgesamt erhalten wir also folgendes Ergebnis

$$\dim_{\mathbb{Q}}\left(\ker\left(\lambda \cdot \mathrm{id}_{M_{n,n}(\mathbb{Q})} - (-)^t\right)\right) = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & |\lambda = 1 \\ \frac{n(n-1)}{2} & |\lambda = -1 \\ 0 & |\text{sonst} \end{cases}$$