Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

11. Übungsblatt - Lösungsskizzen

Aufgabe 40 (Anwendung des SGGZ, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Ein Spieler startet mit dem Anfangskapital $K_0 = 1$. Bei jeder Runde setzt er sein gesamtes Kapital ein. Es wird eine faire Münze geworfen, bei *Kopf* erhält er den anderthalbfachen Einsatz zurück, bei *Zahl* nur den halben.

(a) Stellen Sie das Kapital nach der n-ten Runde als $K_n = \prod_{i=1}^n R_i$ mit geeigneten unabhängigen Zufallsvariablen R_i dar.

(b) Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist in dem Sinne, dass $\mathbb{E}(K_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass trotzdem $\lim_{n\to\infty} K_n = 0$ fast sicher gilt.
Hinweis: *Betrachten Sie* $\log(K_n)$.

Lösung 40.

(a) Formal können wir den Münzwurf durch $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Ber}_{1/2}$ modellieren, dann wird R_i definiert durch

$$R_i := \frac{3}{2}\mathbb{1}_{\{X_i=1\}} + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{X_i=0\}}.$$

Dies entspricht gerade

$$R_i = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{falls in der } i\text{-ten Runde } \textit{Kopf} \text{ geworfen wird,} \\ \frac{1}{2} & \text{falls in der } i\text{-ten Runde } \textit{Zahl} \text{ geworfen wird.} \end{cases}$$

Da R_i jeweils nur von X_i abhängt, folgt die Unabhängigkeit der $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aus der Unabhängigkeit der $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Es gilt weiterhin

$$\mathbb{P}(R_i = 3/2) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = 0) = \mathbb{P}(R_i = 1/2),$$

also $R_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{U}_{\{3/2,1/2\}}$.

(b) Da die $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig sind, faktorisiert der Erwartungswert

$$\mathbb{E}(K_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(R_i).$$

Wir müssen nun also die Erwartungswert der einzelnen R_is berechen:

$$\mathbb{E}(R_i) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(R_i = 1/2) + \frac{3}{2} \cdot \mathbb{P}(R_i = 3/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 1,$$

insgesamt erhalten wir

$$\mathbb{E}(K_n) = \prod_{i=1}^n 1 = 1.$$

(c) Wir betrachten (wie im Hinweis)

$$\frac{1}{n}\log(K_n) = \frac{1}{n}\log\left(\prod_{i=1}^{n} R_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(R_i).$$

Da die $(R_i)_{i\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind, sind es auch die Zufallsvariablen $L_i := \log(R_i)$. Es gilt

$$\mathbb{E}\,|L_i| = \frac{1}{2}\,|\log(1/2)| + \frac{1}{2}\,|\log(3/2)| < \infty,$$

d.h. $L_i \in \mathscr{L}_1$ und

$$\mathbb{E}L_i = \frac{1}{2}\log(1/2) + \frac{1}{2}\log(3/2) = \frac{1}{2}\log(3/4) \in (-1,0).$$

Damit folgt mit dem starken Gesetz der großen Zahlen:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i - \mathbb{E}(L_i) \overset{\mathbb{P}-\text{f.s.}}{\longrightarrow} 0$$

also auch (beachte, dass $\mathbb{E}(L_i) \in (-1,0)$)

$$\log(K_n) \overset{\mathbb{P}-\text{f.s.}}{\longrightarrow} -\infty$$

und somit

$$K_n \overset{\mathbb{P}-\text{f.s.}}{\longrightarrow} 0.$$

Aufgabe 41 (Konvergenz in Verteilung, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie: Das schwache Gesetz der großen Zahlen folgt aus dem Zentralen Grenzwertsatz!

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ besitze X_n die Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathbb{f}_n(x) = \frac{n+1}{2}|x|^n \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Existiert eine Zufallsvariable Z mit $X_n \overset{D}{\to} Z$?

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob eine Zufallsvariable Z existiert mit $X_n \overset{D}{\to} Z$, indem Sie die Verteilungsfunktionen berechnen und deren Grenzwerte bestimmen:

- $X_n \sim \mathrm{U}_{[0,1+\frac{1}{n}]}$,
- $X_n \sim \mathrm{Exp}_n$,
- $X_n \sim \mathrm{Exp}_{1/n}$.

Lösung 41.

(a) Sind die $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge von Zufallsvariablen mit $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) < \infty$, so gilt nach dem Zentralen Grenzwertsatz:

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)}} \overset{D}{\to} \mathrm{N}_{(0,1)}$$

bzw.

$$\sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow{D} \mathrm{N}_{(0,\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1))}.$$

Es gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Aus den Rechenregeln für stochastische und schwache Konvergenz folgt

$$\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}(\overline{X_n} - \mathbb{E}[X_1]) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Damit folgt $\overline{X_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$, das schwache Gesetz der großen Zahlen.

(b) Um die schwache Konvergenz zu untersuchen, müssen wir zunächst die Verteilungsfunktion von X_n bestimmen: Für $x \in (-1,1)$ gilt:

$$\mathbb{F}_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{f}_n(y)\ \mathrm{d}y = \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{x} |y|^n\ \mathrm{d}y.$$

Im Falle $x \in (-1,0]$ folgt nun:

$$\mathbb{F}_n(x) = \frac{n+1}{2}(-1)^n \int_{-1}^{x} y^n\ \mathrm{d}y = \frac{(-1)^n}{2}\Big[y^{n+1}\Big]_{-1}^{x} = \frac{(-1)^n}{2}\Big(x^{n+1} - (-1)^{n+1}\Big) = \frac{1}{2}(1-(-x)^{n+1}).$$

Insbesondere folgt daher $F_n(0) = \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{0} |y|^n\ \mathrm{d}y$.
Für $x \in (0,1)$ gilt:

$$\mathbb{F}_n(x) = \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{x} |y|^n\ \mathrm{d}y = \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{0} |y|^n\ \mathrm{d}y + \frac{n+1}{2}\int_{0}^{x} y^n\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big[y^{n+1}\Big]_{0}^{x} = \frac{1}{2}(1+x^{n+1}).$$

Alternative für $x \in (0,1)$: Da $\mathbb{f}_n$ achsensymmetrisch zum Ursprung ist, wissen wir, dass $\mathbb{F}_n(x) = 1 - \mathbb{F}_n(-x)$ gelten muss. Daraus kann das Ergebnis für $x \in (0,1)$ direkt aus dem Ergebnis für $x \in (-1,0)$ abgelesen werden.
Zur schwachen Konvergenz: Um zu ermitteln, ob X_n schwach konvergiert, untersuchen wir den punktweisen Limes von F_n für $n \to \infty$. Hier ist:

$$\mathbb{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2}(1-(-x)^{n+1}), & x \in (-1,0], \\ \frac{1}{2}(1+x^{n+1}), & x \in (0,1), \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{1}{2}, & x \in (-1,1), \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} =: \quad \tilde{\mathbb{F}}(x).$$

$\tilde{\mathbb{F}}$ ist noch keine Verteilungsfunktion, da sie nicht rechtsseitig stetig ist. Wir können $\tilde{\mathbb{F}}$ aber an der Unstetigkeitsstellen $x = -1$ so modifizieren, dass sie rechtsseitig stetig und damit zur Verteilungsfunktion wird. Definiere

$$\mathbb{F}(x) := \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}, & x \in [-1,1), \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$\mathbb{F}$ ist eine Verteilungsfunktion und es gilt $\mathbb{F}_n(x) \to \mathbb{F}(x)$ für alle Stetigkeitspunkte x von $\mathbb{F}$ (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$). Damit ist gezeigt, dass $X_n \xrightarrow{D} Z$, wobei Z eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $\mathbb{F}$ ist.
Genauer ist Z eine diskrete Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(Z=-1) = \mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{2}$, wie man leicht aus der Verteilungsfunktion $\mathbb{F}$ abliest.

(c) Wir ermitteln nun wie in (b) jeweils die Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_n$ von X_n und deren Limes $\tilde{\mathbb{F}}$, und nehmen evtl. Modifikationen vor, damit $\tilde{\mathbb{F}}$ zur Verteilungsfunktion wird.

- $X_n \sim \mathrm{U}_{[0,1+\frac{1}{n}]}$: Hier ist die Dichte $\mathbb{f}_n(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \mathbb{1}_{[0,1+\frac{1}{n}]}(x)$ und

$$\mathbb{F}_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{1+\frac{1}{n}}, & 0 \le x \le 1 + \frac{1}{n}, \\ 1, & x > 1 + \frac{1}{n} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases} =: \tilde{\mathbb{F}}(x).$$

  $\tilde{\mathbb{F}}$ ist an der Stelle $x = 1$ nicht rechsseitig stetig: Modifiziere zu

$$\mathbb{F}(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

  dann ist $\mathbb{F}$ rechtsseitig stetig (es ist die Verteilungsfunktion einer $\mathrm{U}_{[0,1]}$-Verteilung) und es gilt $\mathbb{F}_n(x) \to \mathbb{F}(x)$ für alle Stetigkeitspunkte x von $\mathbb{F}$. Das bedeutet, es gibt $Z \sim \mathrm{U}_{[0,1]}$ mit $X_n \xrightarrow{D} Z$.

- $X_n \sim \mathrm{Exp}_n$: Hier ist $\mathbb{F}_n(x) = \left(1 - e^{-nx}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Es gilt

$$\mathbb{F}_n(x) = \left(1 - e^{-nx}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \to \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) =: \tilde{\mathbb{F}}(x),$$

  $\tilde{\mathbb{F}}$ ist an der Stelle $x = 0$ nicht rechtsseitig stetig: Modifiziere zu $\mathbb{F}(x) := \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, dann ist $\mathbb{F}$ rechtsseitig stetig (es ist die Verteilungsfunktion einer konstante Zufallsvariable $Z = 0$). Das bedeutet $X_n \xrightarrow{D} 0$.

- $X_n \sim \mathrm{Exp}_{1/n}$: Hier ist $\mathbb{F}_n(x) = \left(1 - e^{-x/n}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Es gilt

$$\mathbb{F}_n(x) = \left(1 - e^{-x/n}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x) \to 0 =: \tilde{\mathbb{F}}(x),$$

  Angenommen, es gäbe eine Zufallsvariable Z mit $X_n \xrightarrow{D} Z$. Dann müsste $\mathbb{F}_n(x) \to 0 = \mathbb{F}_Z(x)$ für alle Stetigkeitspunkte x von $\mathbb{F}_Z$ gelten.
  Da $\mathbb{F}_Z$ nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen hat (Übungsaufgabe 4(d)), gilt also sicher $\mathbb{F}_Z(x) = 0$ für beliebig große $x \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Monotonie von $\mathbb{F}_Z$ folgt dann aber schon $\mathbb{F}_Z \equiv 0$. Das ist ein Widerspruch zu der Eigenschaft $\lim_{x\to\infty} \mathbb{F}_Z(x) = 1$ einer Verteilungsfunktion. Daher kann X_n nicht schwach konvergieren.

Aufgabe 42 (Charakteristische Funktionen, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

(a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion φ_X einer auf dem Intervall $[a, b]$, $a < b$, gleichverteilten Zufallsvariable $X \sim \mathrm{U}_{[a,b]}$.

(b) Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Funktionen φ_Y, φ_Z zweier unabhängiger Zufallsvariablen Y, Z

$$\varphi_{Y+Z}(t) = \varphi_Y(t) \cdot \varphi_Z(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \varphi_{-Y}(t) = \overline{\varphi_Y(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt und folgern Sie:
Die Differenz zweier unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen kann **nicht** $U_{[-1,1]}$-verteilt sein.
Hinweis: *Es gilt* $\sin(t) = \frac{1}{2i}\left(\exp(it) - \exp(-it)\right)$.

(c) Seien X_1, X_2 unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Es gelte: $X_1 + X_2$ hat dieselbe Verteilung wie X_1. Zeigen Sie, dass dann schon $X_1 = 0 = X_2$ fast sicher gilt.

Lösung 42.

(a) Für $X \sim U_{[a,b]}$ gilt für $t \neq 0$

$$\varphi_X(t) \overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}[\exp(itX)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b \exp(itx)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{it(b-a)}(e^{itb} - e^{ita})$$

und für $t = 0$ gilt $\varphi_X(0) = 1$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_{Y+Z}(t) &\overset{\text{Def}}{=} \mathbb{E}[\exp(it(Y+Z))] = \mathbb{E}[\exp(itY)\exp(itZ)] \\ &\overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}[\exp(itY)]\mathbb{E}[\exp(itZ)] = \varphi_Y(t)\cdot\varphi_Z(t)\end{aligned}$$

Außerdem

$$\varphi_{-Y}(t) = \mathbb{E}[\exp(-itY)] = \mathbb{E}[\overline{\exp(itY)}] = \overline{\mathbb{E}[\exp(itY)]} = \overline{\varphi_Y(t)}$$

Seien nun Y und Z zusätzlich identisch verteilt: Dann gilt

$$\varphi_{Z-Y}(t) = \varphi_Z(t)\cdot\varphi_{-Y}(t) = \varphi_Z(t)\cdot\overline{\varphi_Y(t)} = |\varphi_Z(t)|^2 \geq 0,$$

aber $\varphi_{U_{[-1,1]}}(t) = \frac{\sin(t)}{t} < 0$ für einige $t \in \mathbb{R}$.

(c) Es gilt nach Voraussetzung $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_1+X_2}(t) \overset{\text{unabh.}}{=} \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) \overset{\text{ident. vlt.}}{=} \varphi_{X_1}^2(t)$. D.h. $\varphi_{X_1}(t) \in \{0,1\}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da $\varphi_{X_1}(t)$ stetig in t ist und $\varphi_{X_1}(0) = 1$, folgt $\varphi_{X_1}(t) \equiv 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies ist gerade die charakteristische Funktion einer konstanten Zufallsvariablen $Y \equiv 0$, also muss $X_1 \equiv 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher gelten.

Aufgabe 43 (ZGWS und empirische Vtlgsfunktion, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \sigma^2$ und Verteilungsfunktion $\mathbb{F}$. Seien für $x \in \mathbb{R}$

$$\hat{\mathbb{F}}_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$$

die empirische Verteilungsfunktion.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $n \cdot \hat{\mathbb{F}}_n(x)$ und geben Sie dann $\mathbb{E}(\hat{\mathbb{F}}_n(x))$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{\mathbb{F}}_n(x))$ in Termen von n und $\mathbb{F}(x)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbb{F}}_n(x) \overset{\mathbb{P}-\text{f.s.}}{\longrightarrow} \mathbb{F}(x)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sqrt{n}\left(\hat{\mathbb{F}}_n(x) - \mathbb{F}(x)\right) \overset{D}{\to} N_{(0,\mathbb{F}(x)(1-\mathbb{F}(x))}$ gilt.

Lösung 43.

(a) Es gilt $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} = 1) = \mathbb{P}(X_i \leq x) = \mathbb{F}(x)$. Daher ist $\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} \sim \text{Bin}_{(1,\mathbb{F}(x))}$. Da die X_i $(i = 1, ..., n)$ unabhängig sind, sind auch $\mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$ $(i = 1, ..., n)$ unabhängig. Es folgt nach der Vorlesung (Faltung von Binomialverteilungen):

$$n \cdot \hat{\mathbb{F}}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} \sim \text{Bin}_{(n,\mathbb{F}(x))}.$$

Aus den bekannten Formeln für Erwartungswert und Varianz für eine Binomialverteilung erhalten wir $\mathbb{E}[n \cdot \hat{\mathbb{F}}_n(x)] = n \cdot \mathbb{F}(x)$ und $\mathbb{V}\text{ar}(n \cdot \hat{\mathbb{F}}_n(x)) = n \cdot \mathbb{F}(x) \cdot (1 - \mathbb{F}(x))$, womit

$$\mathbb{E}[\hat{\mathbb{F}}_n(x)] = \mathbb{F}(x), \qquad \mathbb{V}\text{ar}(\hat{\mathbb{F}}_n(x)) = \frac{\mathbb{F}(x) \cdot (1 - \mathbb{F}(x))}{n}$$

folgt.

(b) Nach dem Starken Gesetz der großen Zahlen (SGGZ, 28.13.) folgt für die iid Zufallsvariablen $Y_i := \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$ mit $\mathbb{E}(|Y_i|) \leq 1$:

$$\hat{\mathbb{F}}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \overset{\mathbb{P}-\text{f.s.}}{\longrightarrow} \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{F}(x).$$

(c) Nach dem Zentralen Grenzwertsatz 31.02 folgt für die iid Zufallsvariablen $Y_i := \mathbb{1}_{\{X_i \geq x\}}$ mit $\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{F}(x)$, $\mathbb{V}\text{ar}(Y_i) = \mathbb{F}(x)(1 - \mathbb{F}(x))$:

$$\sqrt{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i - \mathbb{E}(Y_i)}{\sqrt{\mathbb{V}\text{ar}(Y_i)}} = \sqrt{n} \frac{\hat{\mathbb{F}}_n(x) - \mathbb{F}(x)}{\sqrt{\mathbb{F}(x)(1 - \mathbb{F}(x))}} \overset{D}{\to} N_{(0,1)}$$

bzw.

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbb{F}}_n(x) - \mathbb{F}(x)) \overset{D}{\to} N_{(0,\mathbb{F}(x)(1-\mathbb{F}(x)))}.$$

Aufgabe 44 (Asymptotische Konfidenzintervalle und Tests, 4 = 4 × 1 Punkte).

Sie haben eine Maschine, die bei Betätigung eines Knopfes eine (reelle) Zufallszahl X_i zwischen 0 und b ausgibt. Die Generierung der Zufallszahlen ist unabhängig voneinander und jede Zahl zwischen 0 und b ist *gleichwahrscheinlich*, d.h. $X_i \sim \text{U}[0, b]$. Sie beobachten n Ergebnisse der Maschine, $X_1, \ldots, X_n$.

(a) Weisen Sie nach, dass $\hat{b}_n := 2\overline{X}_n$ für $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter b ist. Zeigen Sie, dass $\hat{b}_n$ folgendes erfüllt:

$$\sqrt{n}(\hat{b}_n - b) \overset{d}{\to} \text{N}_{(0,b^2/3)}$$

(b) Leiten Sie ein asymptotisches $(1 - \alpha)$-Konfidenzintervall $C_n^{(b)}$ für b für die richtigen Parameter $\mathcal{R}_b = [b, \infty)$ her.

(c) Sie wollen testen:

$$H_0 : b = b_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : b > b_0$$

Zeigen Sie, dass ein Test zum asymptotischen Niveau α durch

$$\phi_n^{(b)}(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \hat{b}_n - \frac{\hat{b}_n}{\sqrt{3n}} q_{1-\alpha} > b_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

(d) Sie haben nun konkret $n = 10$ Realisierungen der Maschine in folgender Tabelle gegeben:

Beobachtung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wert	42.09	64.91	24.61	42.38	42.08	46.67	31.92	54.96	59.16	99.98

Sie vermuten, dass $b_0 = 100$, sind sich aber nicht sicher, ob nicht $b > b_0$ ist. Berechnen Sie das Intervall aus (b) und das Testergebnis aus (c). Wie lautet schließlich Ihre Testentscheidung basierend auf den angegebenen Daten?

Hinweis: *Das 95%-Quantil der Standardnormalverteilung ist gegeben durch* $q_{0.95} = 1.64$.

Lösung 44. (a) Weil alle X_i stetig gleichverteilt auf $[0, b]$ sind gilt: $\mathbb{E}X_1 = \frac{b}{2}$ und $\mathbb{V}\text{ar}(X_1) = \frac{b^2}{12}$. Es gilt also auch $\mathbb{E}(\hat{b}_n) = 2\mathbb{E}(\overline{X}_n) = b$, d.h. $\hat{b}_n$ ist ein erwartungstreuer Schätzer für b. Mit dem ZGWS erhalten wir:

$$\sqrt{n}\frac{2\overline{X}_n - b}{\sqrt{b^2/3}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \frac{b}{2}}{\sqrt{b^2/12}} \xrightarrow{D} \mathrm{N}_{(0,1)}$$

Beachte, dass $\hat{b}_n = 2\overline{X}_n$. Mit dem Satz von Slutsky erhalten wir

$$\sqrt{n}\left(\hat{b}_n - b\right) \xrightarrow{D} \mathrm{N}_{(0,b^2/3)}$$

(b) Um ein asymptotisches Konfidenzintervall angeben zu können, benötigen wir einen konsistenten Schätzer für die Varianz der Grenzverteilung $b^2/3$ (vgl. Lemma 32.13). Wir wählen $\hat{\sigma}_n^2 := \frac{\hat{b}_n^2}{3}$. Weil $\hat{b}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} b$ folgt mit dem Stetigkeitssatz, dass $\hat{\sigma}_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} b^2/3$. Damit ist das asymptotische Konfidenzintervall gegeben durch

$$C_n^{(b)} = \left[\hat{b}_n - \frac{\hat{b}_n}{\sqrt{3n}}q_{1-\alpha}, +\infty\right),$$

wobei $q_{1-\alpha}$ das $1-\alpha$-Quantil der Standardnormalverteilung ist.

(c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass

$$\psi_n^{(b)}(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & b_0 \notin C_n^{(b)} \\ 0, & b_0 \in C_n^{(b)} \end{cases}$$

ein Test zum asymptotischen Niveau α ist. Nun gilt

$$b_0 \notin C_n^{(b)} \Leftrightarrow b_0 < \hat{b}_n - \frac{\hat{b}_n}{\sqrt{3n}}q_{1-\alpha}$$

Das ist aber genau die Bedingung damit $\phi_n^{(b)}(X_1, \ldots, X_n) = 1$ und damit ist $\phi_n^{(b)} = \psi_n^{(b)}$ ein Test zum asymptotischen Niveau α für das angegebene Testproblem.

(d) $\hat{b}_n = 101.752$, $\hat{\sigma}_n/\sqrt{n} = \hat{b}_n/\sqrt{30} = 18.577$. Das Konfidenzintervall ist wegen $q_{1-\alpha} = 1.64$ gegeben durch $[71.29, \infty)$. Damit verwirft der Test die Nullhypothese, dass $b = 100$ nicht, weil $71.29 < 100$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **15. Februar 2021, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`