Aufgabe 1

(a) Sei f ein Monomorphismus. Für ein beliebiges T und zwei Abbildungen t, t' mit $r := f't = f't'$ genügt es zu zeigen, dass $t = t'$. Wir erhalten $s = g't$ und $s' = g't'$. Es gilt $fs' = gr = fs$. Weil f ein Monomorphismus ist, folgt daraus $s' = s$. Es gilt also $r = f't$ und $s = g't$, aber auch $r = f't'$ und $s = g't'$. Nach der universellen Eigenschaft des Faserprodukts ist t aber eindeutig bestimmt, es folgt $t = t'$. Folglich ist f' ein Monomorphismus.

(b) Behauptung: (D, f', g') erfüllt die universelle Eigenschaft des Faserprodukts für

$$D := \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a) \times g^{-1}(a), \qquad \underset{(x,y) \mapsto x}{g' : D \to B}, \qquad \underset{(x,y) \mapsto y}{f' : D \to C}.$$

Beweis. Sei $(x, y) \in D$. Das ist äquivalent zu $f(x) = g(y) \in A$.

$$g \circ f'(x, y) = g(y) = f(x) = f \circ g'(x, y).$$

Seien nun eine Menge T und Abbildungen $r : T \to C$ und $s : T \to B$ mit $gr = fs$ gegeben. Sei eine beliebige Abbildung

$$t : T \to D \qquad x \mapsto (a_x, b_x)$$

gegeben, die der Forderung der universellen Eigenschaft genügt. Dann muss $r(x) = f'((a_x, b_x)) = a_x$ und $s(x) = g'((a_x, b_x)) = b_x$ sein, es folgt

$$t : T \to D \qquad x \mapsto (r(x), s(x)).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert wegen $g(r(x)) = f(s(x))$. Es existiert also genau ein Morphismus $t : T \to D$ mit der gewünschten Eigenschaft. □

(c) Behauptung: $(D, f' = p_2 m, g' = p_1 m)$ erfüllt die universelle Eigenschaft des Faserprodukts.

Beweis. Es gilt

$$fg' - gf' = fp_1 m - gp_2 m = (fp_1 - gp_2)m = qm = 0,$$

wegen $m = \ker q$, also $fg' = gf'$. Seien nun ein Objekt T und Abbildungen $r : T \to C$ und $s : T \to B$ mit $gr = fs$ gegeben. Falls ein t existiert, gilt $g't = p_1 mt = s$ und $f't = p_2 mt = r$. Sollte es also ein t mit der gewünschten Eigenschaft geben, so gilt $mt \overset{!}{=} \langle s, r \rangle : T \to B \oplus C, \qquad x \mapsto (s(x), r(x))$. Es gilt

$$q\langle s, r \rangle = (fp_1 - gp_2)\langle s, r \rangle = fp_1 \langle s, r \rangle - gp_2 \langle s, r \rangle = fs - gr = 0.$$

Nach der universellen Eigenschaft des Kerns faktorisiert $\langle s, r \rangle$ also über D, es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $t : T \to D$ mit $mt = \langle s, r \rangle$, also $g't = p_1 mt = s$ und $f't = p_2 mt = r$. □

(d)

Aufgabe 3

(a) OE existieren $\chi(A^\bullet)$ und $\chi(B^\bullet)$. Es verschwinden also nur endlich viele der $H^i(A^\bullet)$ und $H^i(B^\bullet)$ nicht. Insbesondere existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $H^i(A^\bullet) = H^i(B^\bullet) = 0 \forall i \geq n$. Wir betrachten nun die lange exakte Kohomologiesequenz, die sich aus dem verallgemeinerten Schlangenlemma ergibt. Für jedes $i \geq n$ erhalten wir die exakte Folge $\cdots \to H^i(B^\bullet) \to H^i(C^\bullet) \to H^{i+1}(A^\bullet) \to \ldots$. Da nun aber $H^i(B^\bullet) = H^{i+1}(A^\bullet) = 0$ gilt, ergibt sich die exakte Folge $0 \to H^i(C^\bullet) \to 0 \implies H^i(C^\bullet) = 0$. Analog existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $H^i(A^\bullet) = H^i(B^\bullet) = 0 \forall i \leq n$. Insgesamt folgern wir $H^i(C^\bullet) = 0 \forall i < m \vee i > n$, es verschwinden also nur endlich viele der $H^i(C^\bullet)$ nicht und $\chi(C^\bullet)$ existiert. Wir definieren

$$K_A^i = \ker(H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet)) = \operatorname{im}(H^{i-1}(C^\bullet) \to H^i(A^\bullet))$$

und analog

$$K_B^i = \ker(H^i(B^\bullet) \to H^i(C^\bullet)) = \operatorname{im}(H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet))$$

sowie

$$K_C^i = \ker(H^i(C^\bullet) \to H^{i+1}(A^\bullet)) = \operatorname{im}(H^i(B^\bullet) \to H^i(C^\bullet)).$$

Wir erhalten $\forall i \in \mathbb{Z}$ kurze exakte Folgen

$$\begin{gathered} 0 \to K_A^i \to H^i(A^\bullet) \to K_B^i \to 0 \\ 0 \to K_B^i \to H^i(B^\bullet) \to K_C^i \to 0 \\ 0 \to K_C^i \to H^i(C^\bullet) \to K_A^{i+1} \to 0 \end{gathered}$$

Nach dem Rangsatz für kurze exakte Folgen ergeben sich daraus die Gleichungen

$$\begin{gathered} \dim_K H^i(A^\bullet) = \dim_K K_A^i + \dim_K K_B^i \\ \dim_K H^i(B^\bullet) = \dim_K K_B^i + \dim_K K_C^i \\ \dim_K H^i(C^\bullet) = \dim_K K_C^i + \dim_K K_A^{i+1} \end{gathered}$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned} &\chi(A^\bullet) - \chi(B^\bullet) + \chi(C^\bullet) \\ =&\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \left[\dim_K H^i(A^\bullet) - \dim_K H^i(B^\bullet) + \dim_K H^i(C^\bullet)\right] \\ =&\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \left[\dim_K K_A^i + \dim_K K_B^i - \dim_K K_B^i - \dim_K K_C^i + \dim_K K_C^i + \dim_K K_A^{i+1}\right] \\ =&\sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \left[\dim_K K_A^i + \dim_K K_A^{i+1}\right] \\ =&0, \end{aligned}$$

da es sich um eine Teleskopsumme handelt, bei der sich alle Terme kürzen.

(b) Wir erhalten $\forall i \in \mathbb{Z}$ kurze exakte Folgen

$$
\begin{aligned}
0 \to B^i \to Z^i \to H^i \to 0 \\
0 \to Z^i \to A^i \to B^{i+1} \to 0
\end{aligned}
$$

Mit dem Rangsatz für kurze exakte Folgen erhalten wir daraus

$$
\begin{aligned}
\dim_K Z^i &= \dim_K B^i + \dim_K H^i \\
\dim_K A^i &= \dim_K Z^i + \dim_K B^{i+1}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$\dim_K A^i = \dim_K Z^i + \dim_K B^{i+1} = \dim_K B^i + \dim_K B^{i+1} + \dim_K H^i,$$

eingesetzt in $\chi(A^\bullet)$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\chi(A^\bullet) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K H^i(A^\bullet) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K A^i - \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i (\dim_K B^i + \dim_K B^{i+1})
\end{aligned}
$$

Der rechte Term ist eine Teleskopsumme, bei der sich alle Terme kürzen

$$= \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K A^i$$