Aufgabe 1

- Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 11 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & 15 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 11 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & 15 \\ 0 & 6 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -11 \\ -2 & 3 & -1 & -2 & 15 \\ 0 & 6 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \mathrm{III} + 2 \cdot \mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -11 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \mathrm{III} - 5 \cdot \mathrm{II} \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \mathrm{IV} - 6 \cdot \mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot(-1) \\ \mid \mathrm{IV} - 2 \cdot \mathrm{III} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \mathrm{I} + \mathrm{IV} \\ \\ \\ \mid \cdot -1 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

Da der Rang der Matrix 4 ist, hat das LGS die Lösungsmenge $\mathrm{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} \right\}$.

- Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \mathrm{II} - \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \mid \mathrm{IV} - \mathrm{I} \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \mid \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \mid \mathrm{IV} - \mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \mathrm{II} - \mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \mathrm{I} + \mathrm{III} \\ \\ \mid \cdot -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat also den Rang 3. Daher hat die Lösungsmenge Dimension 1. Als Partikulärlösung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Außerdem ist

$$\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

die Lösungsmenge des homogenen Systems.

Also lautet die Lösungsmenge des inhomogenen Systems $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$.

- Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \\ \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \mathrm{III} - \mathrm{IV} \\ \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich liefern Zeile II und III einen Widerspruch.
Somit gilt $\mathrm{L} = \emptyset$

Aufgabe 2

(a) Euklidischer Algorithmus:

$$\begin{aligned}
\underbrace{x^2+x+1}_{f_1} &= 1\cdot\underbrace{(x^2+1)}_{f_2} && + \underbrace{x}_{f_3}\\
x^2+1 &= x\cdot x && + \underbrace{1}_{f_4}\\
x &= x\cdot 1 && + 0
\end{aligned}$$

Es ist also $f_4 = 1 = \operatorname{ggT}(f_1, f_2))$. Folglich sind die beiden teilerfremd.

(b) Vorgehensweise laut Vorlesung:

$$\begin{aligned}
f_3 &= 1\cdot f_1 - 1\cdot f_2\\
f_4 &= 1\cdot f_2 - x\cdot f_3\\
f_4 &= f_2 - x\cdot(f_1 - f_2)\\
1 &= -1\cdot f_1 + (1+x)\cdot f_2
\end{aligned}$$

(c) Sei $h = f\cdot g \in f\cdot K[x]$. Dann ist auch $-h = -f\cdot g = f\cdot -g \in f\cdot K[x]$. Sei außerdem $e = f\cdot d \in f\cdot K[x]$. Dann ist auch die Summe $h+e = f\cdot g + f\cdot d = f\cdot(g+d) \in f\cdot K[x]$. Sei zusätzlich $\lambda \in K$. Dann ist $\lambda\cdot h = \lambda\cdot f\cdot g = f\cdot\lambda\cdot g \in f\cdot K[x]$.

(d) Es bezeichne $p : K[x] \to K[x]/fK[x]$ die kanonische Projektion. Dann existiert nach Satz 4.6 zu jedem $g \in K[x]$ ein eindeutig bestimmtes $r \in \{s \in K[x] | \deg(s) < \deg(f)\}$ mit $g = r + f\cdot q$, $q \in K[x]$. Daher ist $p(g) = r + fK[x]$. Offensichtlich ist also $K[x]/fK[x]$ isomorph zu $S :=\{s \in K[x] | \deg(s) < \deg(f)\} = \operatorname{Lin}(x^0, x^1, \ldots, x^{\deg(f)-1})$. Diese $\deg(f)$ Vektoren sind linear unabhängig und daher eine Basis von S. Folglich ist $\deg(f) = \dim_K(S) = \dim_K(K[x]/fK[x])$.

Aufgabe 3

Sei K ein K ein Körper, $A \in M_{n,n}(K)$ und $\lambda \in K$.

(a) **ZZ:** $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Beweis. DIe Abbildung

$$\det : M_{n,n}(K) \longrightarrow K,\ \text{wobei } M_{n,n}(K) \Longleftrightarrow (K^n)^n$$

ist nach VL eine alternierende n-Form, weshalb sie insbesondere multilinear, also in jeder Komponente linear ist.
Für die i-te Zeile von $\lambda A \in M_{n,n}(K)$ gilt:

$$(\lambda a_{i,1}, \cdots, \lambda a_{i,n}) = \lambda(a_{i,1}, \cdots, a_{i,n}).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}\det(\lambda A) &= \det\left(\lambda\left(a_{1,1},\cdots,a_{1,n}\right),\cdots,\lambda\left(a_{n,1},\cdots,a_{n,n}\right)\right)\\ &\overset{\text{det ist multilinear}}{=} \lambda\cdot\ldots\cdot\lambda\det\left(\left(a_{1,1},\cdots,a_{1,n}\right),\cdots,\left(a_{n,1},\cdots,a_{n,n}\right)\right)\\ &= \lambda^n\det(A)\end{aligned}$$

□

(b) **ZZ:** Ist $K=\mathbb{R}, n=3$ und A antisymmetrisch, so ist A nicht invertierbar.

Beweis. Nach Probeklausur haben alle antisymmetrischen 3×3-Matrizen die Form

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}\quad (a,b,c\in K)$$

Nach Korollar 3.26 gilt für $A\in M_{n,n}(K)$:
A invertierbar $\Longleftrightarrow$ Spalten von A bilden eine Basis des K^n.
Es genügt also zu zeigen, dass die Spalten von A linear abhängig sind. Es gilt

$$\begin{pmatrix}b\\ c\\ 0\end{pmatrix} = -\frac{c}{a}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -a\\ -b\end{pmatrix} + \frac{b}{a}\cdot\begin{pmatrix}a\\ 0\\ -c\end{pmatrix}$$

Somit sind die Spalten von A linear abhängig und insbesondere ist A nicht invertierbar. □

(c) **Behauptung:** Es existiert eine invertierbare reelle 2×2-Matrix.

Beweis. Betrachte

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

A ist antisymmetrisch und es gilt

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

□

(d) **Behauptung:** Es existiert keine invertierbare 3×3-Matrix über einem anderen Körper als $\mathbb{R}$.

Beweis. Betrachte eine Matrix der Form

$$A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}\quad (a,b,c\in K).$$

Dann gibt es folgende Fälle:

Fall 1: $a \neq \operatorname{char} K$. Dann lässt sich der Beweis aus 3b übernehmen.

Fall 2: $a = \operatorname{char} K$. Dann ist
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$
Dann sind
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}$$
und
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$$
linear abhängig.

Insgesamt ist eine antisymmetrische 3×3-Matrix also nicht invertierbar. □

Aufgabe 4

(a) Man zieht zunächst Zeile 1 einmal von jeder anderen Zeile ab. Dadurch erhält man die Einträge $a'_{ij} \begin{cases} x & i = j = 1 \\ x - y & i = j \neq 1 \\ y & i = 1, j \neq 1 \\ y - x & i \neq 1, j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Nun addiert man die zweite, dritte, …, n-te Spalte auf die erste. Wegen $y - x + x - y = 0$ erhält man $a''_{i1} = 0 | i > 1$. Für a_{11} erhält man $x + (n-1) \cdot y$. Nun ist die Matrix in oberer Dreiecksform, sodass die Determinante gleich dem Produkt der Diagonaleinträge ist und daher gleich $(x + (n-1)y)(x-y)^{n-1}$.

(b) Wir bezeichnen eine Matrix der Größe $2n \times 2n$ aus der Aufgabenstellung mit M_n.
Behauptung: $\det(M_n) = (x^2 - y^2)^n$

Beweis. **Induktionsanfang:** $n = 1 : \det(\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}) = (x^2 - y^2)^1$
Induktionsbehauptung: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte die Behauptung.
Induktionsschritt: $n \to n+1$: Sei $B \coloneqq M_{n+1}$, $B' \coloneqq B_{0,0}$ und $B'' \coloneqq B_{2n+2,0}$. Es gilt $b_{1,1} = x, b_{1,2n+2} = y$ und sonst $b_{1,j} = 0$. Daher ist $\det(B) = x \cdot \det B' - y \cdot B''$. Wegen $b'_{2n+1,2n+1} = x$ und $b'_{2n+1,j} = 0$ sonst ist $\det B' = x \cdot \det B'_{2n+1,2n+1}$. Wegen $b''_{2n+1,1} = y$ und $b''_{2n+1,j} = 0$ sonst ist $\det B'' = y \cdot \det B''_{1,2n+1}$. Da bei $B'_{2n+1,2n+1}$ und $B''_{1,2n+1}$ jeweils die obere und untere Zeile sowie die rechte und linke Spalte entfernt wurden, ist $B'_{2n+1,2n+1} = B''_{1,2n+1} = M_n$. Folglich ist $\det M_{n+1} = x \cdot x \cdot \det M_n - y \cdot y \cdot \det M_n \overset{IB}{=} (x^2 - y^2) \cdot (x^2 - y^2)^n = (x^2 - y^2)^{n+1}$. □