Algebraische Zahlentheorie II
Sommersemester 2022

Dr. Katharina Hübner
basierend auf Alexander Schmidts AZT2-Skript von 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Homologische Algebra (Auffrischung)

1.1 Injektive und projektive Objekte

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie (z.B. die Kategorie der R-Moduln, R ein unitärer Ring). Eine Folge

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M''$$

heißt exakt, wenn $v \circ u = 0$ und der natürliche Homomorphismus $\mathrm{im}(u) \to \ker(v)$ ein Isomorphismus ist.

Satz 1.1. (i) *Eine Folge $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ ist genau dann exakt, wenn für jedes $N \in \mathcal{A}$ die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M'', N) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \xrightarrow{u^*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N)$$

exakt ist.

(ii) *Eine Folge* $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ *in* $\mathcal{A}$ *ist genau dann exakt, wenn für jedes* $M \in \mathcal{A}$ *die Folge abelscher Gruppen*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N') \xrightarrow{u_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N'')$$

exakt ist.

Definition. Ein Funktor zwischen abelschen Kategorien heißt **exakt**, wenn er exakte Folgen in exakte Folgen überführt.

Definition. $I \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ heißt **injektiv**, falls sich jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ A \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"] & I \end{tikzcd}$$

in dem i ein Monomorphismus ist und f ein beliebiger Morphismus, kommutativ durch ein g ergänzen läßt.

$P \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ heißt **projektiv**, wenn $P \in \mathrm{ob}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ injektiv ist. M.a.W., wenn sich jedes Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "p"'] & \\ A & P \arrow[l, "f"] \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

mit p Epimorphismus und f beliebig, durch ein g kommutativ ergänzen läßt.

Bemerkung. Ist $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine exakte Folge in $\mathcal{A}$ und A' injektiv oder A'' projektiv, so zerfällt die Folge.

Lemma 1.2. (i) *I ist genau dann injektiv, wenn der Funktor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

exakt ist.

(ii) *P ist genau dann projektiv, wenn der Funktor* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}b$ *exakt ist.*

Bemerkung. Sei A ein Hauptidealring. Dann sind die injektiven A-Moduln genau die teilbaren A-Moduln, die projektiven genau die freien.

1.2 Adjungierte Funktoren

Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren.

Definition. F ist **linksadjungiert** zu G (und G **rechtsadjungiert** zu F, Schreibweise: $F \dashv G$), wenn eine natürliche Äquivalenz

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G-) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(F-, -)$$

von Bifunktoren: $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to$ (Mengen) existiert.

Sind $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ additive Kategorien und F, G additive Funktoren, so wird stillschweigend angenommen, dass eine Äquivalenz von Bifunktoren $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}b$ vorliegt.

Beispiele. 1) $\mathcal{C} = \text{Mod-}R$, $\mathcal{D} = \mathcal{A}b$. Sei B ein R-Linksmodul. Wir betrachten die Funktoren

$$\mathrm{Mod} - R \to \mathcal{A}b, \quad A \mapsto A \otimes_R B,$$

und

$$\mathcal{A}b \to \mathrm{Mod} - R, \quad C \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(B, C).$$

Dann gilt in natürlicher Weise

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(A \otimes_R B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}-R}(A, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(B, C)).$$

Wir erhalten die Funktorenadjunktion

$$- \otimes_R B \dashv \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(B, -).$$

2) Sei $\mathcal{C} = K\text{-Vec}$, $\mathcal{D} =$ (Mengen), $F : K\text{-Vec} \to$ (Mengen) der Vergiß-Funktor und $G :$ (Mengen) $\to K\text{-Vec}$, $M \to K^{(M)} =$ Vektorraum mit Basis M.
Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_{K-\mathrm{Vec}}(GM, V) = \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Mengen})}(M, FV)$$

also $G \dashv F$.

Satz 1.3. *Es seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ additive Funktoren und sei $F \dashv G$ (im additiven Sinne). Dann gilt*

(i) *F ist rechtsexakt, d.h. ist $A' \to A \to A'' \to 0$ exakt in $\mathcal{A}$, so ist $FA' \to FA \to FA'' \to 0$ exakt in $\mathcal{B}$.*

(ii) *G ist linksexakt.*

(iii) *ist F exakt, so überführt G Injektive in Injektive.*

(iv) *ist G exakt, so überführt F Projektive in Projektive.*

Beweis. F induziert einen Funktor $F^{\mathrm{op}} : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ und analog $G^{\mathrm{op}} : \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$. Es gilt $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}$. Daher genügt es (i) und (iii) zu zeigen.

(i) Für $A' \to A \to A'' \to 0$ exakt und $B \in \mathrm{ob}(\mathcal{B})$ beliebig ist

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', GB) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A', GB)$$

exakt, also auch

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA'', B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA', B).$$

Hieraus folgt die Exaktheit von

$$FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0.$$

(iii) Sei $I \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ injektiv. Zu zeigen: der Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GI)$$

ist exakt. Nun gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GI) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F-, I)$$

und weil F exakt und I injektiv ist ... $\square$

1.3 Komplexe

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Definition. Ein **Komplex** $A^\bullet$ in $\mathcal{A}$ ist eine Folge von Objekten und Homomorphismen

$$\cdots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \ldots$$

so dass $d_i \circ d_{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt.

Definition. Ein **Homomorphismus** $f : A^\bullet \to B^\bullet$ zwischen zwei Komplexen ist eine Familie $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $f_i : A^i \to B^i$, so dass für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt: $d_i \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i$, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & A^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & A^i & \xrightarrow{d_i} & A^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & f_{i-1} \downarrow & & f_i \downarrow & & f_{i+1} \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & B^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & B^i & \xrightarrow{d_i} & B^{i+1}(C^\bullet) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

kommutiert.

Bemerkung. Komplexe in $\mathcal{A}$ zusammen mit Homomorphismen von Komplexen bilden wieder eine abelsche Kategorie. Kerne, Kokerne und endliche Produkte bilden sich an jeder Stelle separat.

Definition. $Z^i = \ker(d_i) \subset A^i$ heißen die ***i*-Kozykel** von $A^\bullet$.

$B^i = \mathrm{im}(d_{i-1}) \subset A^i$ heißen die ***i*-Koränder**.

$H^i(A^\bullet) = Z^i/B^i$ heißt die ***i*-te Kohomologiegruppe** von $A^\bullet$.

Bemerkung. Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \to B^\bullet$ induziert Homomorphismen $Z^i(f) : Z^iA^\bullet \to Z^iB^\bullet$, $B^i(f) : B^iA^\bullet \to B^iB^\bullet$ und $H^i(f) : H^i(A^\bullet) \to H^i(B^\bullet)$ für alle i.

Satz 1.4 (Verallgemeinertes Schlangen-Lemma). *Sei $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ eine kurze exakte Folge von Komplexen (d.h. für jedes i ist $0 \to A^i \to B^i \to C^i \to 0$ exakt). Dann existiert eine natürliche lange exakte Folge*

$$\cdots \longrightarrow H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet) \longrightarrow H^i(C^\bullet) \longrightarrow H^{i+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots \quad .$$

Definition. Eine **injektive Auflösung** von $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ ist ein Komplex

$$0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \longrightarrow \cdots$$

bestehend aus injektiven Objekten in $\mathcal{A}$, mit $H^i(I^\bullet) = 0$ für $i \geq 1$ zusammen mit einem Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} \ker(d_0) = H^0(I^\bullet)$.
Eine **projektive Auflösung** ist eine injektive Auflösung in $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$, d.h. ein Komplex

$$\longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$$

bestehend aus projektiven Objekten in $\mathcal{A}$, mit $H^i(P^\bullet) = 0$, $i \leq -1$, zusammen mit einem Isomorphismus $H^0(P^\bullet) \xrightarrow{\sim} A$.

Bemerkung. Man benutzt gerne die untere Numerierung $P_i = P^{-i}$ und schreibt dann $H_i(-) = H^{-i}(-)$.

Definition. $\mathcal{A}$ hat **genügend viele Injektive**, wenn zu jedem $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ ein Monomorphismus $i : A \to I$ mit I injektives Objekt existiert. $\mathcal{A}$ hat **genügend viele Projektive**, wenn $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ genügend viele Injektive hat.

Beispiel. R-Mod hat genügend viele Injektive und genügend viele Projektive.

Lemma 1.5. (i) *Hat $\mathcal{A}$ genügend viele Injektive, so hat jedes Objekt eine injektive Auflösung.*

(ii) ... *projektive* ...

Beweis. Induktive Konstruktion von $I^\bullet$
1. Schritt: Wähle $A \hookrightarrow I^0$
2. Schritt: Wähle

$$I^0/A \hookrightarrow I^1$$

n-ter Schritt: Wähle

$$I^{n-2}/\mathrm{im}(I^{n-3}) \hookrightarrow I^{n-1}$$

□

Definition. Seien $f, g : A^\bullet \to B^\bullet$ zwei Komplexhomomorphismen f und g heißen **homotop**, wenn Homomorphismen $D^i : A^{i+1} \to B^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ existieren, so dass $f - g = Dd + dD$ gilt. Schreibweise: $f \sim g$.

$$\begin{array}{ccccccc} A^0 & \xrightarrow{d} & A^1 & \xrightarrow{d} & A^2 & \xrightarrow{d} & A^3 \\ f \downdownarrows g & \swarrow D & f \downdownarrows g & \swarrow D & f \downdownarrows g & \swarrow D & f \downdownarrows g \\ B^0 & \xrightarrow{d} & B^1 & \xrightarrow{d} & B^2 & \xrightarrow{d} & B^3 \end{array}$$

Bemerkung. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

Lemma 1.6. *Aus $f \sim g$ folgt*

$$H^i(f) = H^i(g) : H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet)$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Definition. Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \to B^\bullet$ heißt **Homotopieäquivalenz**, wenn $g : B^\bullet \to A^\bullet$ existiert mit $g \circ f \sim \mathrm{id}_A$ und $f \circ g \sim \mathrm{id}_B$.

Bemerkung. Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist $H^i(f) : H^i(A) \to H^i(B)$ ein Isomorphismus für alle i. Solche Homomorphismen nennt man **Quasi-Isomorphismen**. Nicht jeder Quasi-Isomorphismus ist eine Homotopieäquivalenz.

Beispiel. Betrachte den Komplexhomomorphismus

$$[0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z} \to 0] \to [0 \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0].$$

Dieser ist ein Quasiisomorphismus. Wäre er eine Homotopieäquivalenz, so wäre er auch nach Tensorieren mit einer beliebigen abelschen Gruppe wieder eine Homotopieäquivalenz und insbesondere ein Quasisomorphismus. Tensorieren mit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ gibt aber den Komplexhomomorphismus

$$[0 \to \mathbb{Z}/2Z \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0] \to [0 \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0],$$

welcher kein Quasiisomorphismus ist.

Satz 1.7. *Gegeben seien zwei Komplexe*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & \varphi \downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Wir nehmen an:
- *die obere Zeile ist exakt.*
- *alle I^i, $i \geq 0$, sind injektiv.*

Dann existiert ein Komplexhomomorphismus f von der oberen zur unteren Zeile mit $f_{-1} = \varphi$. Beliebige zwei solche f sind homotop.

Korollar 1.8 ($A = B$, $\varphi = \mathrm{id}_A$). *Zwei injektive Auflösungen desselben Objekts sind homotopieäquivalent, die Homotopieäquivalenz ist wohlbestimmt bis auf Homotopie.*

1.4 Abgeleitete Funktoren

Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven und sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor in eine abelsche Kategorie $\mathcal{B}$.

Wir wählen für $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ eine injektive Auflösung $A \to I^\bullet$ und setzen

$$R^iF(A) = H^i(FI^\bullet).$$

Nach 1.8 gibt eine andere injektive Auflösung in kanonischer Weise isomorphe Gruppen $R^iF(A)$. Ist nun $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus und $A \to I^\bullet$ und $B \to J^\bullet$ injektive Auflösungen, so existiert nach 1.7 ein bis auf Homotopie eindeutiges $f : I^\bullet \to J^\bullet$ mit $H^0(f) = \varphi$. So wird für alle $i \in \mathbb{Z}$ die Zuordnung $A \mapsto R^iF(A)$ zu einem Funktor $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Definition. $R^iF(-) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt der ***i*-te rechtsabgeleitete Funktor** des linksexakten Funktors F.

Lemma 1.9. *Es gilt $R^iF = 0$ für $i < 0$ und $R^0F = F$. Ist F exakt, so gilt $R^iF = 0$ für $i > 0$.*

Satz 1.10. *Für jede exakte Folge $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ existieren natürliche Abbildungen*

$$\delta^i : R^iF(A'') \longrightarrow R^{i+1}F(A')$$

für jedes $i \geq 0$, so dass die (lange) Folge

$$\cdots \to R^iFA' \to R^iFA \to R^iFA''$$
$$\to R^{i+1}FA' \to R^{i+1}FA \to R^{i+1}FA'' \to \cdots$$

exakt ist. Ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein Homomorphismus exakter Folgen, so kommutiert für alle $i \geq 0$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^iF(A'') & \xrightarrow{\delta} & R^{i+1}F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^i(FB'') & \xrightarrow{\delta} & R^{i+1}F(B'). \end{array}$$

Linksabgeleitete Funktoren: Man drehe alle Pfeile um:

$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei rechtsexakter Funktor und $\mathcal{A}$ habe genügend viele Projektive. Wir wählen für jedes Objekt A eine projektive Auflösung

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

und setzen $L_iF(A) := H_i(FP_\bullet)$.

– alles analog –

1.5 Azyklische Objekte

Wie vorher sei $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakter Funktor.

Definition. $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ heißt ***F*-azyklisch**, wenn $R^iFA = 0$ für alle $i \geq 1$ gilt.

Lemma 1.11. *Injektive sind F-azyklisch.*

Satz 1.12. *Sei $A \to I^\bullet$ eine Auflösung durch F-azyklische, d.h.*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

ist exakt und I^i ist F-azyklisch für alle $i \geq 0$. Dann gibt es kanonische Isomorphismen

$$R^iFA \cong H^i(FI^\bullet).$$

1.6 Universelle δ-Funktoren

Sei wie vorher $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie.

Definition. Ein **(exakter) $\boldsymbol{\delta}$-Funktor** $H = (H^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine Familie von Funktoren $H^n : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zusammen mit Homomorphismen $\delta : H^n(C) \to H^{n+1}(A)$ für jede kurze exakte Folge $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$, so dass gilt

(i) δ ist funktoriell, d.h. ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen in $\mathcal{A}$ so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(C') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C) \end{array}$$

in $\mathcal{B}$.

(ii) Für jede kurze exakte Folge $0 \to A \to B \to C \to 0$ in $\mathcal{A}$ ist die lange Folge

$$\cdots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots$$

exakt in $\mathcal{B}$.

Beispiel. $\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei linksexakt. Dann ist $H^n := R^nF$ ein δ-Funktor.

Konvention: Ist ein δ-Funktor nur für gewisse H^n gegeben, so setzen wir $H^m = 0$ für alle anderen Indizes.

Definition. Ein δ-Funktor $H = (H^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to B$ heißt *universell*, wenn für jeden δ-Funktor $H' = (H'^n)_{n\geq 0} : \mathcal{A} \to B$ sich jede natürliche Transformation $f^0 : H^0 \to H'^0$ eindeutig zu einem Homomorphismus $f : H \to H'$ von δ-Funktoren ausdehnt.

Bemerkung. Das bedeutet, dass sich jeder linkexakte Funktor H^0 höchstens auf eine Weise (d.h. wenn existent, dann bis auf Isomorphie eindeutig) zu einem universellen δ-Funktor ausdehnen läßt.

Definition. Ein Funktor F heißt **auslöschbar**, wenn zu jedem $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{A})$ ein Monomorphismus $A \overset{u}{\hookrightarrow} A'$ existiert mit $F(u) = 0$.

Satz 1.13. *Ein δ-Funktor $H = (H^n)_{n\geq 0}$ ist universell, wenn für jedes $n \geq 1$ der Funktor H^n auslöschbar ist.*

Korollar 1.14. *$\mathcal{A}$ habe genügend viele Injektive und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei linksexakt. Dann ist $(R^n F)_{n\geq 0}$ ein universeller δ-Funktor.*

1.7 Tor und Ext

Sei R ein Ring. Wir betrachten den Bifunktor

$$- \otimes_R - : \text{Mod-}R \times R\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{A}b\,.$$

Dieser ist in beiden Variablen rechtsexakt.
In Mod-R und R-Mod existieren genügend viele Projektive, also:
für jeden R-Linksmodul N existiert $L_n(- \otimes_R N) : \text{Mod-}R \to \mathcal{A}b$.
für jeden R-Rechtsmodul M existiert $L_n(M \otimes_R -) : R\text{-Mod} \to \mathcal{A}b$.

Satz 1.15. *Es gibt natürliche Isomorphismen*

$$L_n(- \otimes_R N)(M) \cong L_n(M \otimes_R -)(N).$$

Man nennt diesen Funktor

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N).$$

Er kann durch eine flache Auflösung in der ersten oder in der zweiten Variable berechnet werden.

Analog: Für $\mathrm{Hom}_R(-,-) : R - \text{Mod} \times R - \text{Mod} \to \mathcal{A}b$ (oder wahlweise auch Rechtsmoduln).

Satz 1.16.

$$R^n\mathrm{Hom}_R(-, N)(M) \cong R^n\mathrm{Hom}_R(M, -)(N)$$

und man bezeichnet diesen Funktor mit

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, N).$$

Kann berechnet werden durch projektive Auflösung von M ($=$ injektive Auflösung in $(R\text{-Mod})^{\mathrm{op}}$) oder injektive Auflösung von N.