Modulformen 1 – Übungsgruppe 01. Dezember 2021

Wintersemester 2021/22

A: Besprechung 5.Übungszettel

Aufgabe 1

(a) Unter Berücksichtigung der folgenden Eigenschaften und der Definition von $\Omega(f,g)(z)$ ergibt sich die Behauptung durch Nachrechnen:

- $f|_k M, g|_k M$ genügen Proposition 2.6 mit
$$\overline{\det(M)^{k/2} \cdot j(M,z)^{-k} \cdot g(M\langle z\rangle)} = \det(M)^{k/2} \cdot \overline{j(M,z)^{-k}} \cdot \overline{g(M,z)}\ ,$$
- $d\omega(z)$ ist invariant unter Möbiustransformationen $z \mapsto M\langle z\rangle$ (Lemma 2.20) und
- es gilt $\operatorname{Im}(M\langle z\rangle) = \frac{\operatorname{Im}(z)\cdot\det(M)}{|cz+d|^2}$.

(b) Nach Beispiel 2.22 gilt $\operatorname{vol}(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}\omega(z) = \frac{\pi}{3}$ und gleichermaßen $\frac{\operatorname{vol}(\mathcal{F}(\Gamma))}{\operatorname{vol}(\mathcal{F})} = \left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}\right]$ für den Fundamentalbereich $\mathcal{F}(\Gamma)$ zu einer beliebigen Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Es folgt, dass $M\langle\mathcal{F}(\Gamma)\rangle$ ein Fundamentalbereich zu $M\Gamma M^{-1}$ für $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist. Somit gilt mit der Invarianz von $\mathrm{d}\omega(z)$ (Lemma 2.20):

$$\left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}\right] = \frac{\int_{\mathcal{F}(\Gamma)} \mathrm{d}\omega(z)}{\operatorname{vol}(\mathcal{F})} = \frac{\int_{M\langle\mathcal{F}(\Gamma)\rangle} \mathrm{d}\omega(z)}{\operatorname{vol}(\mathcal{F})} = \frac{\operatorname{vol}(M\langle\mathcal{F}(\Gamma)\rangle)}{\operatorname{vol}(\mathcal{F})} = \left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : M\overline{\Gamma}M^{-1}\right]$$

(c) Ersteres folgt unmittelbar mit den Teilaufgaben (a) und (b) wegen

$$\mathcal{I}_\Gamma \cdot \mathsf{L} = \int_{\mathcal{F}} \Omega(f|_k M, g|_k M)(z) \overset{\text{(a)}}{=} \int_{\mathcal{F}} \Omega(f,g)\left(M\langle z\rangle\right) = \int_{M\mathcal{F}} \Omega(f,g)(z) = \underbrace{\mathcal{I}_{M\overline{\Gamma}M^{-1}}}_{\overset{\text{(b)}}{=}\mathcal{I}_\Gamma} \cdot \underbrace{\langle f|g\rangle_{M\Gamma M^{-1}}}_{=\mathsf{R}\ \text{(Satz 2.25)}}\ ,$$

wobei $\mathcal{I}_\Gamma := \left[\overline{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : \overline{\Gamma}\right]$ und L bzw. R die linke bzw. rechte Seite des Gewünschten sind.

Aufgabe 2

Schreibe E_4 und E_6 gemäß Gleichung 3.2 in der Form $E_4 = 1 + 240A$ und $E_6 = 1 - 504B$ mit

$$A = \sum_{n=1}^\infty \sigma_3(n)q^n \text{ und } B = \sum_{n=1}^\infty \sigma_5(n)q^n\ .$$

Dann gilt

$$E_4^3 - E_6^2 = 3\cdot(240A) + 3\cdot(240A)^2 + (240A)^3 + 2\cdot(504B) - (504B)^2\ .$$

Es ist $3\cdot(240)^2 \equiv (240)^3 \equiv (504)^2 \equiv 0 \mod (1728)$ bzw. $E_4^3 - E_6^2 \equiv 144\cdot(5A+7B) \mod (1728)$, sodass $5A+7B \mod (12)$ zu zeigen bleibt. Wegen

$$5A + 7B = \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{d|n}\left(\underbrace{5d^3 + 7d^5}_{=:C}\right)\right) q^n$$

genügt die Aussage $C \equiv 0 \mod (12)$, was aus $C \equiv d^3\cdot(d^2-1) \equiv 0 \mod (p)$ mit $p \in \{3,4\}$ folgt.

Aufgabe 3

Nach dem Struktursatz für holomorphe Modulformen (Satz 3.12) gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $E_4^2 = c \cdot E_8$. Wendet man die Cauchy-Faltung für die Reihe

$$E_4^2 = \left(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n\right) = 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n + 240^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m)\right) q^n$$
$$= 1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sigma_3(n) + 120 \sum_{m=1}^{n-1} \sigma_3(m)\sigma_3(n-m)\right) q^n$$

an und vergleicht die Koeffizienten mit $1 + 480 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_7(n) q^n$, so erhält man beide Behauptungen.

B: Wiederholung Vorlesungsstoff: j-Invariante

- Die j-Invariante $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ bzw. $j : \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\} \to \bar{\mathbb{C}}$, definiert durch $j(z) = 1728 \cdot \frac{E_4^3(z)}{\Delta(z)}$, ist eine meromorphe Modulform vom Gewicht Null, also eine Modulfunktion (Proposition 3.20).
- Sie besitzt einen einfachen Pol in $z = \infty$ (denn: $\Delta \in S_{12}$ mit $a_0(\Delta) = 0$, d.h. $\lim_{z \to \infty} \Delta(z) = 0$) und ist holomorph auf $\mathbb{H}$ (denn: Δ hat keine Nullstelle in $\mathbb{H}$).
- Das besondere Interesse an der j-Invariante besteht einerseits in der durch diese gegebenen Bijektion ${}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathbb{H}} \cong \mathbb{C}$ bzw. ${}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}} \cong \bar{\mathbb{C}}$ (Proposition 3.21 und Bemerkung 3.23) und andererseits im Struktursatz für meromorphe Modulformen (Satz 3.22)

$$V_k \ni f = \mathbb{C}(j) \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{k/2}} = \left\{ \frac{P(j)}{Q(j)} \mid P, Q \text{ Polynom in } j \text{ und } Q \not\equiv 0 \right\} \cdot \frac{E_4^k}{E_6^{k/2}} \text{ für } k \in 2\mathbb{Z}\ .$$

C: Weitere Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

Zeigen Sie: Ist $f \in M_k$ mit $a_m(f) \in \mathbb{Q}$ für alle $m \geq 0$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\lambda \cdot a_m(f) \in \mathbb{Z}$ für alle $m \geq 0$.

Übungsaufgabe 2

Weisen Sie nach: Die Funktion $j : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ ist bijektiv, genauer gilt:

(i) Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1728\}$ hat $j - \lambda$ genau eine Nullstelle erster Ordnung in $\mathcal{F}$.

(ii) $j - 1728$ hat in i eine Nullstelle zweiter Ordnung und keine weitere in $\mathcal{F}$.

(iii) In ϱ besitzt j eine Nullstelle dritter Ordnung und sonst keine weitere in $\mathcal{F}$.

Übungsaufgabe 3

Beweisen Sie mithilfe der j-Funktion und der vorangegangenen Übungsaufgabe den folgenden Satz:

Satz: [Kleiner Satz von Picard]
Ist f nichtkonstant und ganz, so nimmt f jeden Wert in $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme an.