Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

8. Übungsblatt

Ausgabe 12.01.2020 – Besprechung 18.01-23.01.2021

Verständnisfragen

- Welche der folgenden Funktionen $f(z)$ sind holomorph?
  - z
  - z^2
  - $|z|$
  - $|z|^2$
  - e^z
  - $\mathrm{Re}(z)$

1. Aufgabe: Residuensatz

Wir betrachten eine auf ihrem gesamten Definitionsbereich D komplex differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Solche Funktionen nennt man auch *analytisch* oder *holomorph*. Nun besitze aber D eine Lücke z_0. Der Residuensatz beantwortet die Frage, welchen Wert beispielsweise das Wegintegral

$$\oint \mathrm{d}z\, f(z) \tag{1}$$

entlang eines mathematisch positiven Kreiswegs um z_0 annimmt. Ausgangspunkt ist das Resultat, dass sich eine analytische Funktion um eine Lücke z_0 als eine *Laurent-Reihe* darstellen lässt (die im Gegensatz su einer Potenzreihe auch negative Potenzen enthält),

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ und somit } \oint \mathrm{d}z f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left[\oint \mathrm{d}z\, (z - z_0)^n \right]. \tag{2}$$

Hier schließt sich die Beobachtung an (die beispielsweise elementar nachgerechnet werden kann), dass nur die Potenz $n = 1$ beiträgt, nämlich

$$\oint \mathrm{d}z\, (z - z_0)^n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{für } n = -1 \end{cases} \tag{3}$$

Zusammen finden wir also $\oint \mathrm{d}z f(z) = 2\pi i a_{-1}$. Man nennt den Koeffizienten a_{-1} auch das Residuum Res(f, z_0) des *Pols* z_0. Berücksichtigt man nun noch, dass man den Weg auch in umgekehrter Richtung definieren könnte (dies gäbe ein Vorzeichen) oder mehrfach (gäbe einen ganzzahligen Faktor), führt man eine *Windungszahl* χ ein. Gibt es in der vom Integrationsweg eingeschlossenen Fläche sogar mehrere Pole z_0 bis z_N, schreibt man insgesamt (*Residuensatz*):

$$\oint \mathrm{d}z f(z) = 2\pi i \sum_{k=0}^{N} \mathrm{Res}(f, z_k) \chi_k. \tag{4}$$

Wir betrachten nun speziell die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$.

(a) Welche Pole hat die Funktion f? Wie lauten ihre Residuen, wenn Sie die für Pole 1. Ordnung (Verhalten wie $\propto z^{-1}$) gültige Formel

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) \tag{5}$$

zugrunde legen?

(b) Berechnen Sie nun mit Hilfe des Residuensatzes den Wert folgender Integrale:

1. Kreisweg im mathematisch positiven Sinn um jeden der Pole (ohne andere Pole mit einzuschließen).
2. Kreisweg im mathematisch positiven Sinn um den Ursprung, so groß gewählt, dass alle Pole im Innern enthalten sind.

2. Aufgabe: Erdmagnetfeld in Heidelberg

In guter Näherung gleicht das Erdmagnetfeld an der Oberfläche dem Feld eines im Erdmittelpunkt lokalisierten Dipols. Wie groß ist die sogenannte Inklination t (Winkel zwischen Erdmagnetfeld und lokaler Horizontalebene) in Heidelberg? *Hinweis:* Sie dürfen annehmen, dass magnetische und geographische Breite übereinstimmen.

3. Aufgabe: Polare und axiale Vektorfelder

Man unterscheidet Skalarfelder, polare Vektorfelder und axiale Vektorfelder nach ihrem Verhalten unter Drehungen und Spiegelungen, also orthogonalen Transformationen Q mit det $Q = \pm 1$. Der Fall det $Q = +1$ bezeichnet eine reine Drehung. Ein Skalar ist unter Drehungen invariant, ein polares Vektorfeld transformiert sich gemäß $\boldsymbol{v} = Q\boldsymbol{v}$, ein axiales hingegen mit $\boldsymbol{v} = (\det Q)Q\boldsymbol{v}$. Ein axiales Vektorfeld ist also invariant unter Punktspiegelung. Es seien $\phi(\boldsymbol{r})$ ein Skalarfeld und $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ ein polares Vektorfeld.

(a) Von welcher Art sind $\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ und $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$?

(b) Zeigen Sie, dass das elektrische Feld ein polarer Vektor, das Magnetfeld hingegen ein axialer Vektor ist.

Hinweis Es gilt $(\det Q)\epsilon_{ijk} = q_{il}q_{jm}q_{kn}\epsilon_{lmn}$ für $Q = (q_{ij})$. Bedenken Sie ferner, dass die Transformation zunächst auf den Ortsvektor wirkt, $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = Q\boldsymbol{r}$. Hieraus gewinnen Sie, wie sich die partiellen Ableitungen $\partial/\partial x_i'$ bezüglich der transformierten Koordinaten zu den ursprünglichen Ableitungen verhalten.