Aufgabe 1

(a) Es gilt, wie erwartet $p = m\dot{x}$. Daher gilt

$$-2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -2m\vec{\nabla}V\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2m\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\dot{\vec{x}} = 2m\dot{\vec{x}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = 2m\dot{\vec{x}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = 2\vec{p}\dot{\vec{p}} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}^{\,2}}{\mathrm{d}t}$$

(b)

$$m\dot{r} = m\cdot\vec{\nabla}|\vec{x}|\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = m\cdot\frac{\vec{x}}{r}\cdot\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{x}\vec{p}}{r}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x_i^{(j)} &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2p_ix_j - x_ip_j - \delta_{ij}(\vec{x}\cdot\vec{p})\right)\delta a \\ &= \frac{1}{2}\left(2\dot{p}_ix_j + 2p_i\dot{x}_j - \dot{x}_ip_j - x_i\dot{p}_j - \delta_{ij}(\dot{\vec{x}}\vec{p} + \vec{x}\dot{\vec{p}})\right)\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}\delta L^{(j)} &= \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\delta x_i^{(j)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\delta\dot{x}_i^{(j)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\left(2p_ix_j - x_ip_j - \delta_{ij}(\vec{x}\cdot\vec{p})\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\left(2\dot{p}_ix_j + 2p_i\dot{x}_j - \dot{x}_ip_j - x_i\dot{p}_j - \delta_{ij}(\dot{\vec{x}}\vec{p} + \vec{x}\dot{\vec{p}})\right)\right)\delta a \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\dot{p}_i\left(2p_ix_j - x_ip_j - \delta_{ij}(\vec{x}\cdot\vec{p})\right) + p_i\left(2\dot{p}_ix_j + 2p_i\dot{x}_j - \dot{x}_ip_j - x_i\dot{p}_j - \delta_{ij}(\dot{\vec{x}}\vec{p} + \vec{x}\dot{\vec{p}})\right)\right)\delta a \\
&= \frac{1}{2}\left(-\dot{p}_j\vec{x}\cdot\vec{p} - p_j(\dot{\vec{x}}\vec{p} + \vec{x}\dot{\vec{p}}) + \sum_{i=1}^{3}\left(2\dot{p}_ip_ix_j - \dot{p}_ix_ip_j + 2p_i\dot{p}_ix_j + 2p_i^2\dot{x}_j - p_i\dot{x}_ip_j - p_ix_i\dot{p}_j\right)\right)\delta a \\
&= \frac{1}{2}\left(-(\vec{x}\vec{p})\dot{p}_j - (\dot{\vec{x}}\vec{p})p_j - (\vec{x}\dot{\vec{p}})p_j + 2(\dot{\vec{p}}\vec{p})x_j - (\dot{\vec{p}}\vec{x})p_j + 2(\vec{p}\dot{\vec{p}})x_j + 2(\vec{p}^{\,2})\dot{x}_j - (\vec{p}\dot{\vec{x}})p_j - (\vec{p}\vec{x})\dot{p}_j\right)\delta a \\
&= \left(-(\vec{x}\vec{p})\dot{p}_j - (\dot{\vec{x}}\vec{p})p_j - (\vec{x}\dot{\vec{p}})p_j + 2(\dot{\vec{p}}\vec{p})x_j + (\vec{p}^{\,2})\dot{x}_j\right)\delta a \\
&= \left(-(\vec{x}\vec{p})\dot{p}_j + 2(\dot{\vec{p}}\vec{p})x_j - (\vec{x}\dot{\vec{p}})p_j - (\dot{\vec{x}}\vec{p})p_j + (\dot{\vec{x}}\vec{p})p_j\right)\delta a\end{aligned}$$

Es gilt $\vec{x}\dot{\vec{p}} = \vec{x}\cdot\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = \vec{x}\cdot\vec{\nabla}V = -V$, da V homogen vom Grad -1 in $\vec{x}$ ist.

$$\begin{aligned}&= -\frac{\partial L}{\partial x_j}(\vec{x}\vec{p})\delta a - \frac{\mathrm{d}\vec{p}^{\,2}}{\mathrm{d}t}x_j\delta a + Vp_j\delta a \\
&= -\frac{k}{r^3}(\vec{x}\vec{p})\cdot x_j\delta a + 2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}x_j\delta a + mV\dot{x}_j\delta a \\
&= -mk\frac{\dot{r}}{r^2}\cdot x_j\delta a + 2m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}x_j\delta a + mV\dot{x}_j\delta a \\
&= m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}x_j\delta a + mV\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\delta a \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mVx_j\delta a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta f(x_j)\end{aligned}$$

(e) Nach Noether ist der folgende Ausdruck erhalten.

$$\vec{p}\delta\vec{x} - H\delta t - f(\delta\vec{x}, \delta t)$$

In unserem Fall gilt also

$$\sum_{i=1}^{3} p_i \delta x_i - H\delta t - f(\delta\vec{x}, \delta t) = \text{const}$$

Wir betrachten nun die infinetisimale Transformation $x^{(j)} \to x^{(j)} + \delta x^{(j)}$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{1}{2} \left(2p_i x_j - x_i p_j - \delta_{ij}(\vec{x}\cdot\vec{p})\right) \delta a - mVx_j\delta a \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(2p_i^2 x_j - x_i p_i p_j - p_j(x_i p_i)\right) \delta a - mVx_j\delta a \\
&= x_j \cdot \vec{p}^{\,2}\delta a - \sum_{i=1}^{3} (x_i p_i p_j)\, \delta a - m\frac{k}{r} x_j \delta a \\
&= (x_j \cdot \vec{p}^{\,2} - p_j \cdot \vec{x}\vec{p} - m\frac{k}{r} x_j)\delta a \\
&= (\vec{x} \times (\vec{x} \times \vec{p}) - m\frac{k}{r}\vec{x})_j \cdot \delta a \\
&= \left(\vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{x}\right)_j \delta a
\end{aligned}$$

Da a konstant ist, muss auch der erste Faktor konstant sein.

$$\implies \left(\vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{x}\right)_j = \text{const}$$

Dies können wir für alle j durchführen. Dann erhalten wir

$$\vec{p} \times \vec{L} - \frac{mk}{r}\vec{x} = \text{const}$$

Aufgabe 2

(a) Es gilt $\beta = \frac{3}{5}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} = \frac{5}{4}$. Wir bezeichnen das Bezugssystem von Bob mit S' und das Bezugssystem von Alice mit S. Zu Beginn gilt $t = t' = 0$. Beim Erreichen der Raumstation gilt $x_3' = 3Ly$ und $x_3 = 0$, da sich Alice ja zu dem Zeitpunkt an der Raumstation befindet. Also gilt $x_3' = 3Ly = \gamma\beta x_0 + \gamma x_3 \implies x_0 = 4Ly$ und $x_0' = \gamma x_0 + \beta\gamma x_3 = \gamma x_0 = 5Ly$. In Bobs Bezugssystem sind also 5 Jahre vergangen, bis Alice zur Raumstation gereist ist, während bei Alice nur 4 Jahre vergangen sind. Für die Rückreise erhalten wir aus Symmetriegründen dieselbe Zeit, sodass Alice um 8 Jahre altert, während Bob um 10 Jahre altert.

Aufgabe 3

$$\Phi_3(p_1,\dots,p_f,Q_1,\dots,Q_f) = \Phi_1 - \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} q_i$$

gegeben. Das totale Differential auf beiden Seiten ist

$$\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial p_i}\,\mathrm{d}p_i + \frac{\partial \Phi_3}{\partial Q_i}\,\mathrm{d}Q_i\right) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i}\,\mathrm{d}Q_i - q_i\,\mathrm{d}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i}\right)\right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\,\mathrm{d}t$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial Q_i}, \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_i} = p_i, \qquad -q_i = \frac{\partial \Phi_3}{\partial p_i}$$

Diese Identitäten können wir nun ausnutzen.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial \Phi_3}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\right) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\\ &= \sum_{i=1}^{f}\left(-q_i\dot{p}_i + \frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i\right) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\end{aligned}$$

Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\frac{\partial \Phi_1}{\partial Q_i} = -P_i$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_3}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{f}\left(\dot{q}_i p_i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q_i p_i) - P_i\dot{Q}_i\right) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}$$

Daher gilt

$$\sum_{i=1}^{f} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{f}\left(P_i\dot{Q}_i\right) - \underbrace{\left(H + \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}\right)}_{K} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Phi_3 + \sum_{i=1}^{f}(q_i p_i)\right)$$

Insgesamt ist also

$$K = H + \frac{\partial \Phi_3}{\partial t}, \qquad P_i = -\frac{\partial \Phi_3}{\partial Q_i}, \qquad q_i = -\frac{\partial \Phi_3}{\partial p_i}$$

Aufgabe 4

(a)

$$\{q_i, q_j\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k}}_{=0} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} \right) = 0$$

$$\{p_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k}}_{=0} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \underbrace{\frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0} \right) = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_{k=1}^{3} (\delta_{ik}\delta_{jk} - 0) = \delta_{ij}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\{L_i, p_j\} &= \{\varepsilon_{ilk} q_l p_k, p_j\} = \varepsilon_{ilk}\{q_l p_k, p_j\} = -\varepsilon_{ilk}\{p_j, q_l p_k\} = -\varepsilon_{ilk}(p_k\{p_j, q_l\} + q_l\{p_j, p_k\}) \\
&= \varepsilon_{ilk} p_k \{q_l, p_j\} = \varepsilon_{ilk} p_k \delta_{lj} = \varepsilon_{ijk} p_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{L_i, q_j\} &= \{\varepsilon_{ilk} q_l p_k, q_j\} = \varepsilon_{ilk}\{q_l p_k, q_j\} = -\varepsilon_{ilk}\{q_j, q_l p_k\} = -\varepsilon_{ilk}(q_k\{p_j, q_l\} + q_l\{q_j, p_k\}) \\
&= -\varepsilon_{ilk} q_l \{q_j, p_k\} = \varepsilon_{ilk} q_k \{q_j, p_l\} = \varepsilon_{ilk} q_k \delta_{jl} = \varepsilon_{ijk} q_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{L_i, L_j\} &= \varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jmn}\{q_l p_k, q_m p_n\} = \varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jmn}(p_n\{q_l p_k, q_m\} + q_m\{q_l p_k, p_n\}) \\
&= -\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jmn}(p_n\{q_m, q_l p_k\} + q_m\{p_n, q_l p_k\}) \\
&= -\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jmn}(p_n q_l\{q_m, p_k\} + p_n p_k\{q_m, q_l\} + q_m q_l\{p_n, p_k\} + q_m p_k\{p_n, q_l\}) \\
&= -\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jmn}(p_n q_l \delta_{mk} - q_m p_k \delta_{nl}) \\
&= -\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jkn} p_n q_l + \varepsilon_{ilk}\varepsilon_{jml} q_m p_k \\
&= -\varepsilon_{ilk}\varepsilon_{knj} p_n q_l - \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{ljm} q_m p_k \\
&= -(\delta_{in}\delta_{lj} - \delta_{ij}\delta_{ln})(p_n q_l) - (\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kj})(q_m p_k) \\
&= -p_i q_j + \delta_{ij}\delta_{nl} p_n q_l - \delta_{ij}\delta_{km} p_k q_m + q_i p_j \\
&= q_i p_j - p_i q_j + \delta_{ij}(p_l q_l - p_k q_k) \\
&= q_i p_j - q_j p_i \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) q_l p_m \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} q_l p_m \\
&= \varepsilon_{ijk} L_k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left\{L_i, \vec{L}^2\right\} &= \{L_i, L_j L_j\} \\
&= 2\{L_i, L_j\} L_j \\
&= 2\varepsilon_{ijk} L_j L_k \\
&= 2\vec{L} \times \vec{L} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(c) Aufgrund der Definition des Drehimpulses ist $\partial L/\partial t = 0$. Es genügt also, die Poisson-Klammer zu berechnen.

$$
\begin{aligned}
\left\{\vec{L}, H\right\}_i &= \{L_i, H\} = \{L_i, T\} + \{L_i, V\} \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial L_i}{\partial q_j} \frac{\partial T(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_j} - \frac{\partial L_i}{\partial p_j} \frac{\partial T(p_1, p_2, p_3)}{\partial q_j} \right) + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial L_i}{\partial q_j} \frac{\partial V(q_1, q_2, q_3)}{\partial p_j} - \frac{\partial L_i}{\partial p_j} \frac{\partial V(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_j} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial L_i}{\partial q_j} \frac{\partial T}{\partial p_j} \right) - \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial L_i}{\partial p_j} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) \\
&= \epsilon_{ikl} \frac{\partial T}{\partial p_k} p_l - \epsilon_{ikl} q_k \frac{\partial V}{\partial q_l}
\end{aligned}
$$