Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2020/21

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. M. Leonhardt

Blatt 01
Abgabetermin: Freitag, 13.11.2020, 9:15 Uhr

Aufgabe 1. *(Produkt zweier Untergruppen)* (6 Punkte) Für zwei Untergruppen H, K einer Gruppe G betrachten wir die Teilmenge

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\} \subset G.$$

Zeigen Sie: Stimmen die Mengen HK und KH überein, so ist HK eine Untergruppe von G.

Aufgabe 2. *(Satz von Wilson)* (6 Punkte) Es sei G eine endliche abelsche Gruppe und $a := \prod_{g \in G} g$.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie

$$a = \prod_{\substack{g \in G \\ g^2 = e}} g$$

und folgern Sie $a^2 = e$.

(b) (3 Punkte) Folgern Sie für $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ mit p prim:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Aufgabe 3. *(Zentrum)* (6 Punkte) Es sei G eine Gruppe. Wir nennen

$$Z(G) := \{g \in G \mid gh = hg \ \forall \ h \in G\}$$

das *Zentrum* von G. Zeigen Sie:

(a) (3 Punkte) $Z(G)$ ist ein Normalteiler von G.

(b) (3 Punkte) Falls $G/Z(G)$ zyklisch ist, so ist G abelsch.

Aufgabe 4.(*Diedergruppe D_4*) (6 Punkte, 2 Bonuspunkte) Wir definieren die *Diedergruppe*

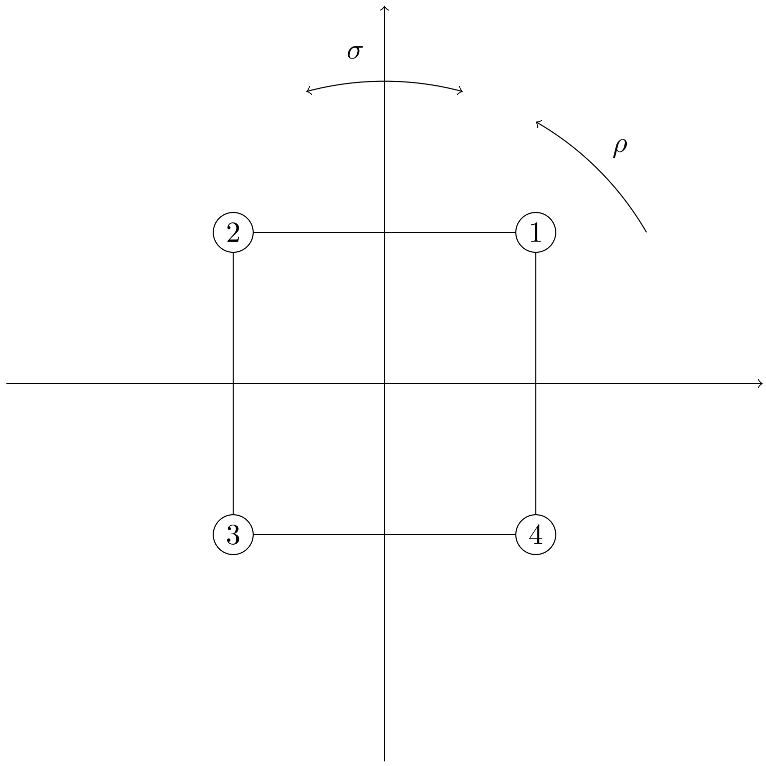
$$D_4 := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid A(\square) = \square\},$$

wobei $\square$ den Rand des Quadrates $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ bezeichne. Beispielsweise liegen die Rotation ρ um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung und die Spiegelung σ an der y-Achse in D_4 (siehe Skizze auf der Rückseite).

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass D_4 eine Untergruppe (bzgl. Multiplikation) von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ist.

(b) (2 Punkt) Zeigen Sie, dass D_4 endlich ist und bestimmen Sie ihre Ordnung. *(Tipp: Lineare Abbildungen bilden Endpunkte von Strecken auf Endpunkte von Strecken ab (wieso?).)*

(c) (3 Punkte) Listen Sie alle Elemente der D_4 auf. *(Tipp: Elemente der D_4 sind eindeutig durch die Wirkung auf den Eckpunkten von $\square$ bestimmt (wieso?). Sie müssen zum Lösen dieser Aufgabe also keine Matrizen verwenden (und bekommen dann sogar 2 Bonuspunkte).)*



Skizze: Der Rand $\square$ des Quadrates $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ mit nummerierten Ecken.