Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I

10. Übungsblatt

Abgabe bis zum 16.01.20, 9:15 Uhr

Aufgabe 1 (3 · 2 Punkte)**.** Bestimmen Sie mit dem Verfahren der Vorlesung die Lösungsmengen folgender Gleichungssysteme über den rationalen Zahlen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 15 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 ($1+2+1+2$ Punkte)**.** Sei K ein Körper und $K[x]$ sein Polynomring.

(a) Zeigen Sie, dass die Polynome x^2+1 und x^2+x+1 teilerfremd sind.

(b) Finden Sie mit dem euklidischen Algorithmus Polynome p, $q \in K[x]$ mit $p \cdot (x^2+1) + q \cdot (x^2+x+1) = 1$.

Sei nun $f \in K[x]$ ein Polynom. Zeigen Sie:

(c) $fK[x] = \{fg \mid g \in K[x]\}$ ist ein Untervektorraum von $K[x]$.

(d) $\dim_K K[x]/fK[x] = |\deg(f)|$.

Aufgabe 3 ($2+2+1+1$ Punkte)**.** Sei K ein Körper, $A \in M_{n,n}(K)$ und $\lambda \in K$.

(a) Zeigen Sie: $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(b) Zeigen Sie: Ist $K = \mathbb{R}$, $n = 3$ und A antisymmetrisch (d. h. gilt $A^t = -A$), so ist A nicht invertierbar.

(c) Gibt es eine antisymmetrische invertierbare reelle 2×2-Matrix?

(d) Gibt es eine antisymmetrische invertierbare 3×3-Matrix über einem anderen Körper als den reellen Zahlen?

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)**.** Sei K ein Körper. Für x, $y \in K$ und $n \geqslant 1$ betrachten wir die Matrizen $A = (a_{ij})_{ij} \in M_{n,n}(K)$ und $B = (b_{ij})_{ij} \in M_{2n,2n}(K)$ definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} y & \text{falls } i \neq j, \\ x, & \text{falls } i = j, \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} x & \text{falls } i = j, \\ y & \text{falls } i + j = 2n+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bringen Sie A mittels geeigneter Zeilen- und Spaltenumformungen auf obere Dreiecksform und zeigen Sie: $\det(A) = (x + (n-1)y)(x-y)^{n-1}$.

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion und Spaltenentwicklung: $\det(B) = (x^2 - y^2)^n$.