Übungen zu Funktionentheorie 1 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 6
Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 5. Juni

Bearbeiten Sie bitte nur zwei der vier Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.

23. Aufgabe: Sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein reelles Polynom in einer Variablen.

(a) Ist $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P, dann auch $\overline{z}$.

(b) Ist P irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$, dann ist P linear oder quadratisch.

Hinweis: Verwenden Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

Lösung: Sei $P(X) = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$. Für jede Nullstelle z gilt

$$P(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{N} a_n \overline{z}^n = \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n z^n} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0 ,$$

also ist auch $\overline{z}$ eine Nullstelle. Hier benutzen wir, dass die Koeffizienten a_n reell sind.
Sei nun P irreduzibel, insbesondere ist dann P nicht konstant, hat also mindestens Grad $N \geq 1$. Nach Fundamentalsatz der Algebra ist $P(X) = \prod_{n=1}^{N}(X - z_n)$ mit komplexen Nullstellen z_n. Wenn eine dieser Nullstellen $z = z_n \in \mathbb{R}$ reell ist, dann wird P über $\mathbb{R}$ vom Linearfaktor $R(X) = (X - z)$ geteilt. Da P irreduzibel ist, ist es linear und stimmt bis auf Einheiten mit R überein, also $N = 1$. Angenommen, P hat eine komplexe nichtreelle Nullstelle $z = z_n$. Dann ist nach a) auch $\overline{z}$ eine Nullstelle. Das Polynom $Q(X) = (X - z)(X - \overline{z}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$ hat reelle Koeffizienten und teilt P. Da P irreduzibel ist, stimmt es bis auf Einheiten mit Q überein und damit quadratisch, also $N = 2$.

24. Aufgabe: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie zwei der drei Aussagen:

(a) Ist f nicht konstant, dann hat f dichtes Bild in $\mathbb{C}$.

(b) Wenn $f(z) = f(z + 1) = f(z + i)$, dann ist f konstant.

(c)* Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine weitere holomorphe Funktion mit höchstens einer Nullstelle. Wenn $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann gilt $f = c \cdot g$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{C}$.

Hinweis: Verwenden Sie jeweils den Satz von Liouville.

Lösung:

(a) Angenommen das Bild ist nicht dicht, dann gibt es einen Punkt $c \in \mathbb{C}$ und ein $\epsilon > 0$ sodass die offene Kugel $B_\epsilon(c)$ nicht von f getroffen wird, also disjunkt zum Bild ist. Die Funktion $g(w) = \frac{1}{w-c}$ ist holomorph in $w \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$, damit ist $g \circ f$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$. Aber $|f(z) - c| \geq \epsilon$ für alle z, also $|g \circ f(z)| = |\frac{1}{f(z)-c}| \leq \epsilon^{-1}$. Damit ist $g \circ f$ beschränkt und ganz, also nach dem Satz von Liouville konstant.

(b) Nach Annahme ist $f(z) = f(z+n+mi)$ für alle ganzzahligen n, m. Damit ist das Bild $f(\mathbb{C}) = f(Q)$ für das Quadrat $Q = \{x+iy \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$. Aber Q ist kompakt, also ist das Bild $f(Q)$ der stetigen Funktion f beschränkt. Nach Satz von Liouville ist f konstant.

(c) Die Funktion $h(z) = f(z)/g(z)$ ist definiert für z mit $g(z) \neq 0$. Nach Annahme gilt $|h(z)| \leq 1$. Nach Annahme hat g höchstens eine Nullstelle z_0 in $\mathbb{C}$ und h ist beschränkt, lässt sich also nach dem (schwachen) Riemanschen Hebbarkeitssatz fortsetzen zu einer holomorphen ganzen Funktion $\tilde{h}$, deren Einschränkung auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ mit h übereinstimmt. Wegen Stetigkeit gilt $f(z) = \tilde{h}(z)g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und damit $|\tilde{h}(z)| \leq 1$. Nach Satz von Liouville ist $\tilde{h}(z)$ konstant, setze also $c := \tilde{h}(z)$.

25. Aufgabe: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der Taylorreihe von f in den Punkten $x_0 = 0$ und $x_1 = 4\sqrt{3}$.
Hinweis: Setzen Sie f fort zu einer holomorphen Funktion auf einem geeigneten Definitionsbereich. Verwenden Sie dann die Abschätzung des Konvergenzradius.

Lösung: Wir setzen f fort zu einer holomorphen Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ für $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Nach Eigenschaft E7 und Korollar 4 lässt sich f in eine Potenzreihe

$$P_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$$

entwickeln, die in jeder offenen Kugel $B_\epsilon(a)$ um $a \in D$ konvergiert, welche vollständig im Definitionsbereich D enthalten ist. Mit anderen Worten, der Konvergenzradius R_a der Taylorreihe um $a \in D$ ist $R_a \geq r_a := \sup\{r > 0 \mid B_r(a) \subseteq D\}$. Innerhalb von B_{r_a} konvergiert die Taylorreihe $P_a(z)$ gegen eine holomorphe Funktion, die mit $f(z)$ übereinstimmt. Warum ist der Konvergenzradius nicht größer als r_a?
Erster Teil: Für $a = x_0$ gilt offenbar $r_a = 1$. Wenn $R_a > r_a$, dann wäre $P_a(z)$ auf dem Kompaktum $\overline{B_{r_a}(a)} = \{|z-a| \leq r_a\}$ konvergent und durch eine Konstante C beschränkt. Insbesondere wäre $f(z)$ in der offenen Kugel $B_{r_a}(a)$ durch die Konstante C beschränkt. Widerspruch, da $f(i(1-1/n)) \to \infty$ für $n \to \infty$. **Alternativ** kann man die Koeffizienten bestimmen durch die geometrische Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n$. Diese konvergiert für $|-z^2| < 1$, also $|z| < 1$, also $R_a = 1$.
Zweiter Teil: Für $a = x_1 = 4\sqrt{3}$ argumentiert man ähnlich und erhält

$$R_a = r_a = |a - \pm i| = \sqrt{\mathrm{Re}(a)^2 + \mathrm{Im}(\pm i)^2} = \sqrt{48+1} = 7 \ .$$

26. Aufgabe: Seien D und E offene nichtleere Teilmengen von $\mathbb{C}$ und $b : D \to E$ eine Bijektion, sodass b und b^{-1} holomorph sind. Sei E sternförmig. Zeigen Sie: Jede holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ hat eine Stammfunktion.

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass b' keine Nullstellen hat. In der Tat, wegen $b \circ b^{-1} = \mathrm{id}_E$ folgt mit Kettenregel $(b' \circ b^{-1}) \cdot (b^{-1})' = \mathrm{id}_E' = 1$, insbesondere ist $b' \circ b^{-1}(e) \neq 0$ für alle $e \in E$. Weil aber b eine Bijektion ist, folgt $b'(d) \neq 0$ für alle $d \in D$. Mit dem gleichen Argument zeigt man, dass $(b^{-1})'$ keine Nullstellen hat.
Sei jetzt f beliebige holomorphe Funktion auf D. Als Zusammensetzung holomorpher Funktionen ist die Funktion $g = \frac{f}{b'} \circ b^{-1}$ holomorph auf E. Da E sternförmig ist, hat g eine Stammfunktion

G. Jetzt setzen wir $F := G \circ b$. Als Zusammensetzung holomorpher Funktionen ist F holomorph. Mit Kettenregel und Produktregel zeigt man

$$F' = (G' \circ b) \cdot b' = (g \circ b) \cdot b' = \frac{f}{b'} \cdot b' = f \ .$$

Bonusaufgabe (keine Wertung): Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer. Sei $\gamma : [0,1] \to D$ ein stetiger Weg und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wie kann man ein Wegintegral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ sinnvoll definieren? Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 23.