Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Darauf operiert die Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ durch Möbius-Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \langle \tau \rangle = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \ .$$

Seien j und $\lambda(\tau) = (e_3(\tau) - e_2(\tau))/(e_1(\tau) - e_2(\tau))$ die Modulfunktionen aus der Vorlesung. Sie können bei jeder Aufgabe die Ergebnisse der vorherigen nutzen, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben. Die besten vier Aufgaben werden gewertet.

35. Aufgabe: (1+1+2=4 Punkte) Sei $\phi : \Gamma/\Gamma[2] \to \mathrm{Bij}(\{e_1, e_2, e_3\})$ der Isomorphismus aus Aufgabe 28c).

(a) Machen Sie diesen explizit, indem Sie $\phi(T)e_i$ und $\phi(S)e_i$ bestimmen für $i = 1, 2, 3$.

(b) Bestimmen Sie Vertreter von $\Gamma/\Gamma[2]$ als Produkte von S und T.

(c) Zeigen Sie $\{\lambda|_0 M \mid M \in \Gamma\} = \{\lambda, \lambda^{-1}, 1 - \lambda, 1 - \lambda^{-1}, (1 - \lambda)^{-1}, \lambda/(1 - \lambda)\}$.

Hinweis: Für eine Menge X bezeichnet $\mathrm{Bij}(X)$ die Gruppe der Bijektionen $X \to X$.

Lösung:
Wir schreiben $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$.

(a) Nach Konstruktion ist dann $e_i = \wp(\omega_i)$ für $i = 1, 2, 3$ mit $\omega_1 = 1/2$ und $\omega_2 = \tau/2$ sowie $\omega_3 = (1 + \tau)/2$. Die Operation von Γ erhält das Gitter, daher ändert sich die $\wp_\Lambda$-Funktion nicht unter der Anwendung von S und T. Wegen $T(m\tau + n) = n + (m + n)\tau = m\tau + n(1 + \tau)$ für reelle $n, m \in \mathbb{R}$ folgt durch Matrizenmultiplikation

$$T\omega_i = \begin{cases} \omega_3 & i = 1 \\ \omega_2 & i = 2 \\ \omega_1 + \tau & i = 3 \ . \end{cases}$$

(Nachrechnen!) Wegen $\wp(\tau + \omega_1) = \wp(\omega_1) = e_1$ folgt

$$\begin{aligned} \phi(T)e_1 &= \wp(\omega_3) = e_3 \ , \\ \phi(T)e_2 &= \wp(\omega_2) = e_2 \ , \\ \phi(T)e_3 &= \wp(\tau + \omega_1) = \wp(\omega_1) = e_1 \ . \end{aligned}$$

Für $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erhält man $S(m\tau + n) = n\tau - m$ für reelle $n, m \in \mathbb{R}$ und damit

$$S\omega_i = \begin{cases} \omega_2 & i = 1 \\ -\omega_1 & i = 2 \\ \omega_3 - 1 & i = 3 \ . \end{cases}$$

Wie oben benutzen wir $-\omega_1 \equiv \omega_1 \pmod{\Gamma}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \phi(S)e_1 &= \wp(\omega_2) = e_2 \ , \\ \phi(S)e_2 &= \wp(-\omega_1) = e_1 \ , \\ \phi(S)e_3 &= \wp(\omega_2 - 1) = e_3 \ . \end{aligned}$$

(b) Ein Vertretersystem ist gegeben durch id, S, T, STS, TS, ST. Entweder explizit nachrechnen oder Bruhat-Zerlegung auf die algebraische Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ anwenden.

(c) Wir bestimmen den Orbit von λ unter Γ. Weil λ invariant ist unter dem Normalteiler $\Gamma(2)$, genügt es, den Orbit unter $\Gamma/\Gamma(2)$ zu bestimmen. Die λ-Funktion ist $\lambda(\tau) = (e_3 - e_2)/(e_1 - e_2)$. Die Terme e_i transformieren sich wie oben berechnet, daher gilt:

$$\phi(T)(\lambda) = \frac{e_1 - e_2}{e_3 - e_2} = \lambda^{-1} \ .$$

Entsprechend zeigt man

$$\phi(S)(\lambda) = \phi(S)\frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = \frac{e_3 - e_1}{e_2 - e_1} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_2} - \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} = 1 - \lambda \ .$$

Wendet man jetzt diese Transformationen mit den Vertretern aus Teil b an, so erhält man den angegebenen Orbit von λ.

Achtung: Es gab einen Tippfehler in der Aufgabe. Im letzten Eintrag $1/(1 - \lambda^{-1}) = -\lambda/(1 - \lambda)$ stimmte das Vorzeichen nicht.

36. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Wir entwickeln die Eisensteinreihen als Fourierreihen.

(a) Zeigen Sie für ganze $k \geq 2$ und $\tau \in \mathbb{H}$ die Reihenentwicklung

$$(-1)^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \exp(2\pi i n \tau) \ .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst den Fall $k = 2$. Aufgaben 48, 49 aus FT1 sind nützlich.

(b) Sei G_k die Eisensteinreihe zur vollen Modulgruppe von geradem Gewicht $k \geq 4$. Für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ gilt dann

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i \tau n} \ .$$

Hier ist $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ ist die Teilersumme der k-ten Potenzen und $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ für $k \geq 2$.
Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Summationsreihenfolge.

Lösung: Siehe Freitag und Busam:Funktionentheorie", Kapitel VII, Abschnitt 1. Die Fourierentwicklung ist Satz 1.3.

37. Aufgabe: (4 Punkte) Seien $(X, \mathfrak{U}_X)$ und $(Y, \mathfrak{U}_Y)$ topologische Räume. Wir erklären die Produkttopologie $\mathfrak{U}_{X\times Y}$ auf $X \times Y$ als die Topologie erzeugt von der Basis

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathfrak{U}_X, V \in \mathfrak{U}_Y\} \ .$$

Zeigen Sie: Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist gleich der Euklidischen Topologie.

Skizze: Wir müssen zeigen, dass die beiden Topologien übereinstimmen. Die Produkttopologie ist hier die Topologie der ∞-norm, die Euklidische Topologie ist die der 2-Norm. Nach dem Satz über Normäquivalenz sind alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent, also stimmen die Topologien überein. (Ein expliziter Beweis ist auch möglich, aber umständlich.)

38. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $f : (X, \mathfrak{U}_X) \to (Y, \mathfrak{U}_Y)$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Zeigen Sie: Ist M eine quasikompakte Teilmenge von X, dann ist auch $f(M)$ quasikompakt.

$f(M) = \bigcup_{i\in I} U_i$ eine beliebige offene Überdeckung von $f(M)$, dann ist $M = f^{-1}(f(M)) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i)$ eine Überdeckung von M. Weil f stetig ist, ist $f^{-1}(U_i)$ wiederum offen. Da M quasikompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $M = \bigcup_{j=1}^N f^{-1}(U_{i_j})$ mit $i_j \in I$. Wenden wir darauf f an, erhalten wir

$$f(M) = f(\bigcup_{j=1}^N f^{-1}(U_i) = \bigcup_{j=1}^N f(f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{j=1}^N U_i \ .$$

Dies ist die gesuchte endliche Teilüberdekung voon $f(M)$.

39. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $(X, \mathfrak{U}_X)$ ein topologischer Raum. Wir versehen $X \times X$ mit der Produkttopologie. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Die Diagonale $\Delta X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.

(b) $(X, \mathfrak{U}_X)$ ist separiert.

Lösung: $b) \implies a)$. Seien $(r, s) \in X \times X$ beliebig mit $r \neq s$. Wegen (b) Separiertheit gibt es offene Umgebungen $r \in R \in \mathfrak{U}_X$ und $s \in S \in \mathfrak{U}_X$ mit $R \cap S = \emptyset$. Also ist $R \times S \subseteq X \times X$ disjunkt zu ΔX. Nach Konstruktion der Produkttopologie ist $V_{r,s} = R \times S$ offen in der Produkttopologie und in $X \times X \setminus \Delta X$ enthalten. Also hat (r, s) eine offene Umgebung $V_{r,s}$. Damit ist $X \times X \setminus \Delta X = \bigcup_{r\neq s} V_{r,s}$ als Vereinigung offener Teilmengen wiederum offen, also ist ΔX abgeschlossen.
$a) \implies b)$. Seien $r, s \in X$ beliebig mit $r \neq s$. Dann ist $(r, s) \notin \Delta X$. Wegen a) gibt es eine offene Umgebung $V_{r,s}$ von (r, s) in $X \times X$. Weil die Produkttopologie von Produkten der Form $R \times S$ mit $R, S \in \mathfrak{U}_X$ erzeugt wird, können wir annehmen $V = R \times S$. Wegen $(r, s) \in R \times S$ gilt $r \in R$ und $s \in S$. Außerdem ist $R \times S \subseteq X \times X \setminus \Delta X$, daher sind R und S disjunkt. Weil r und s beliebig waren, ist X separiert.