Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I

12. Übungsblatt

Abgabe bis zum 30.01.20, 9:15 Uhr

Aufgabe 1 ($4+2$ Punkte)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 \\ 6 & -7 & -4 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Q})$$

Zeigen Sie, dass A nicht diagonalisierbar ist. Zeigen Sie ferner, dass A über $\mathbb{Q}$ trigonalisierbar ist und bestimmen Sie S, $S^{-1} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$ derart, dass $S^{-1}AS$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 2 ($1+2+1+2$ Punkte)**.** In $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ betrachten wir den Untervektorraum $U = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid f(n+2) = 2f(n+1) + 3f(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Matrix $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f \in U$ gilt:
$$\begin{pmatrix} f(n+2) \\ f(n+1) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Eigenräume von A.

(c) Konstruieren Sie $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

(d) Leiten Sie aus (c) eine für alle $f \in U$ gültige Formel ab, welche $f(n)$ aus $f(1)$, $f(2)$ und n berechnet.

Aufgabe 3 ($3 \cdot 2$ Punkte)**.** Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $K[x]_{\leqslant n}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leqslant n$ über K. Wir definieren den Operator $\int - \,\mathrm{d}x \colon K[x]_{\leqslant n} \to K[x]_{\leqslant n+1}$ durch
$$\int \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{(i+1)_K} x^{i+1}$$
und die Abbildung $\gamma \colon K[x]_{\leqslant n} \times K[x]_{\leqslant n} \to K$ durch
$$\gamma(f, g) = \left(\int (f \cdot g) \,\mathrm{d}x \right) (1_K),$$
wobei wir mit $\left(\int (f \cdot g) \,\mathrm{d}x \right) (1_K)$ die Auswertung des Polynoms $\int (f \cdot g) \,\mathrm{d}x$ an 1_K bezeichnen.

(a) Zeigen Sie, dass γ eine symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

(b) Bestimmen Sie für $K = \mathbb{Q}$ und $n = 3$ die Fundamentalmatrix von γ zur Basis $(1, x, x^2, x^3)$.

(c) Bestimmen Sie für $K = \mathbb{Q}$ und $n = 3$ eine Orthogonalbasis von γ.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und f ein Endomorphismus von V. Zeigen Sie für $\lambda \in K$: λ ist genau dann ein Eigenwert von f, wenn λ Eigenwert des dualen Endomorphismus $f^* \colon V^* \to V^*$ ist; und wenn das der Fall ist, haben die Eigenräume dieselbe Dimension.