AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

22. Oktober 2021

Modulformen 1 – Übungsblatt 1

Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt eine Möbiustransformation $\varphi : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ mit den Eigenschaften

$$\varphi(0) = -1, \varphi(i) = 0, \varphi(2i) = \tfrac{1}{3} \text{ und } \varphi(1) = 1 \ .$$

(b) Gilt $\varphi(z_1) = 0$ und $\varphi(z_2) = \infty$ für eine Möbiustransformation φ und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so ist φ von der Form

$$\varphi(z) = c \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) Möbiustransformationen sind Homöomorphismen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es ist bekannt, dass jede invertierbare komplexe (2×2)-Matrix M einer Möbiustransformation φ_M zugeordnet wird. Die Menge all dieser Matrizen bildet die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ und nach Proposition 1.3 ist $\mathfrak{M}$ als Menge aller Möbiustransformationen ebenfalls eine Gruppe. Demnach ist die Abbildung

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \to \mathfrak{M}, M \mapsto \varphi_M$$

ein Gruppenhomomorphismus.

(a) Beweisen Sie, dass zwei Matrizen $M, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ genau dann dieselbe Möbiustransformation definieren, wenn sie sich um einen skalaren Faktor $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ unterscheiden.

(b) Sei $f \in \mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{C}})$ ein Automorphismus unter der Riemann'schen Zahlenkugel. Zeigen Sie:
  (i): Die Umkehrabbildung f^{-1} ist meromorph.
  (ii): Es gilt $\mathrm{Aut}(\bar{\mathbb{C}}) = \mathfrak{M}$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien A und B zwei Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\pm I_2\}$ mit der Eigenschaft $AB = BA$. Weisen Sie nach:

(a) Ist A parabolisch, so ist auch B parabolisch.

(b) Gilt $A\langle z\rangle = z$ für ein $z \in \bar{\mathbb{C}}$, so folgt $B\langle z\rangle = z$.

Hinweis zu (a): Nutzen Sie beispielsweise Korollar 1.18.

Abgabe: online über MaMpf bis Freitag, den 29. Oktober 2021, spätestens um 12 Uhr s. t.