Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 4

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 18. Mai 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Teilchen im expandierenden Universum*

Die Lagrange-Funktion eines Teilchens der Masse m im expandierenden Universum homogener Massendichte ist durch

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - m\,\Phi(\vec{x})$$

gegeben, wobei $\Phi(\vec{x})$ das Newton'sche Gravitationspotential ist. Die Expansion des Universums wird durch die Einführung von sog. *mitbewegten Koordinaten* $\vec{q}$ mit $\vec{x} \equiv a(t)\,\vec{q}$ beschrieben, wobei sich der Skalenfaktor $a(t)$ für ein räumlich flaches Universum, das nur Materie beinhaltet, aus der Differentialgleichung

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0\,a^{-3/2}$$

mit der Randbedingung $a(t = 0) = 0$ und der Hubble-Konstanten H_0 ergibt.

a) Drücken Sie die Lagrange-Funktion als Funktion der mitbewegten Koordinaten $\vec{q}$ aus. Verwenden Sie dabei die Funktion

$$f = \frac{m}{2}a\dot{a}\vec{q}^2,$$

um die Lagrangefunktion auf die Form

$$L' = L - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{2}a^2\dot{\vec{q}}^2 - m\,\varphi(\vec{q})$$

zu bringen.*

b) Berechnen Sie die zu L' gehörige Hamilton-Funktion, und identifizieren Sie Erhaltungsgrößen im Fall eines freien Teilchens in einem Universum ohne Dichtefluktuationen, für das $\varphi \equiv 0$ ist.

c) Berechnen Sie $\vec{q}(t)$ unter den Annahmen, dass das Teilchen bei t_0 startet, was einem Wert a_0 des Skalenfaktors entspricht, und dass $\varphi \equiv 0$ ist. Was passiert im Limes $t \to \infty$ mit $\vec{q}(t)$ und mit $\vec{x}(t)$? Interpretieren Sie das Ergebnis.

2. *Zylinderförmiges Potential*

Eine Punktmasse m befinde sich in einem zylindersymmetrischen Potential, sodass ihre potentielle Energie durch $V(\rho, \varphi, z) \equiv V(\rho)$ gegeben ist, wobei ρ die Radialkoordinate in Zylinderkoordinaten ist. Identifizieren Sie die Lagrange- und Hamilton-Funktion sowie die Erhaltungsgrößen dieses Systems.

---

* *Hinweis:* Identifizieren Sie das Potential φ einfach durch „übrig gebliebene“ Terme nach der Transformation auf L'.

3. *Brachistochrone*

Auf dem 2. Übungsblatt haben Sie berechnet, dass die Zeit, die eine reibungsfrei unter dem Einfluss der Gravitationskraft entlang einer Kurve $z = -f(x)$ gleitende Punktmasse braucht, um sich von $x = x_0$ nach $x = x_\mathrm{E}$ zu bewegen, durch

$$T[f] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} \mathrm{d}x \, \sqrt{\frac{1 + [f'(x)]^2}{f(x)}}$$

gegeben ist, wenn die Punktmasse zu Beginn weder potentielle noch kinetische Energie besitzt.

a) Interpretieren Sie das Funktional $T[f]$ als Wirkung zu einer Lagrange-Funktion $L(t, q, \dot{q})$, indem Sie die Ersetzungen $t \to x$, $q \to f$ und $\dot{q} \to f'$ vornehmen. Finden Sie die entsprechende Hamilton-Funktion, und leiten Sie aus der Tatsache, dass die Lagrange-Funktion nicht explizit von x abhängt, eine Differentialgleichung 1. Ordnung für $f(x)$ her, indem Sie eine Größe E finden, die für die Bahn mit minimalem $T[f]$ erhalten ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$f(\varphi) = \frac{1 - \cos\varphi}{4gE^2} \qquad \text{und} \qquad x(\varphi) = \frac{\varphi - \sin\varphi}{4gE^2}$$

die Differentialgleichung löst, wobei E die Erhaltungsgröße aus Aufgabenteil a) ist und g die Gravitationsbeschleunigung. Die durch $f(\varphi)$ und $x(\varphi)$ beschriebene Kurve wird als *Brachistochrone* (Kurve zu geringster Zeit) bezeichnet.

4. *Verständnisfragen*

a) Was sind zyklische Koordinaten, und wofür sind sie wichtig?

b) Was besagt das Hamilton'sche Prinzip?

c) Ist die Lagrange-Funktion eindeutig bestimmt? Begründen Sie Ihre Aussage und zeigen Sie gegebenenfalls, wie Lagrange-Funktionen verändert werden dürfen.