Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I

2. Übungsblatt

Abgabe bis zum 31.10.19, 9:15 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Sei $G = (G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(G)$ betrachten wir die Abbildung

$$(A, B) \longmapsto A * B = \{a \cdot b \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine assoziative Verknüpfung handelt und ein eindeutiges (links- und rechts-)neutrales Element existiert. Zu welchen Teilmengen gibt es inverse Elemente? Ist $(\mathcal{P}(G), *)$ jemals eine Gruppe?

Aufgabe 2 ($3 \cdot 2$ Punkte)**.** Es seien A, B und C Mengen und $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ Abbildungen zwischen ihnen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(c) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv und es gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Aufgabe 3 ($2 + 4$ Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N}_0 &\longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ n &\longmapsto \begin{cases} a & \text{falls } n \leqslant 1, \\ f(n-1) + f(n-2) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist weder injektiv noch surjektiv.

(b) $f(n)^2 = f(n-1)f(n+1) + (-1)^n \cdot a^2$ für alle $n \geqslant 1$.

Aufgabe 4 ($2 + 4$ Punkte)**.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren die Relation

$$R = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}.$$

Zeigen Sie:

(a) R ist eine Äquivalenzrelation auf X.

(b) Es bezeichne p die kanonische Projektion $p\colon X \to X/R$ und

$$\operatorname{im} f = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X : f(x) = y\} \subset Y$$

das Bild von f. Dann existiert eine eindeutige bijektive Abbildung $\overline{f}\colon X/R \to \operatorname{im} f$ mit der Eigenschaft, dass $\overline{f} \circ p = f$ gilt.