§ 1.3. Integration und Grenzübergänge

Wichtige Frage: $f_n \to f$ (in irgendeinen Sinn)
Gilt dann auch $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$?

Satz 1.3.1. Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige, Riemann-integrierbare Funktionen ($n \in \mathbb{N}$) und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (glm. Konvergenz). Dann gilt

f stetig und Riemann-integrierbar und

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Beweis

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ glm $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f Riemann integr.

Es gilt

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right|$$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \underbrace{\underbrace{\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|}_{=\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0}}\; \underbrace{(b-a)}_{\text{beschr.}}$$

$\Rightarrow$ Beh. q.e.d.

Satz 1.3.2. Seien $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen $(n \in \mathbb{N})$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiere gleichmässig auf $[a,b]$, d.h. die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{n=0}^{N} f_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent.

Dann gilt:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

ist stetig und Riemann integrierbar

und $$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

d.h. die Reihe wird gliedweise integriert.

<u>Beweis</u> f_n sind stetig $\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} f_n(x)$ stetig und Riemann integrierbar.

Die $\left(\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right)_n$ gleichmäßig konvergiert

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \text{stetig}$$
$$= \lim_{n \to \infty}\left(\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right) \quad (\text{glm Limes})$$

Es gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \int_a^b f_n(x)\,dx + \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

Die Reihe konvergiert gleichmäßig $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall N \geq N_\varepsilon$ gilt

$$\left| \int_a^b \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\,dx \right| \leq \varepsilon \cdot (b-a)$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx - \sum_{n=0}^{N} \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \leq \varepsilon$$

$\forall N \geq N_\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \qquad \text{q.e.d.}$$

Korollar 1.3.3. (Integration von Potenzreihen)

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$.

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ in jedem

Intervall $[x_0 - r, x_0 + r]$ für $0 < r < \rho$ gleichmäßig und für $[a,b] \subset]x_0-\rho, x_0+\rho[$ gilt

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} \Big|_a^b$$

Beweis: Nur die gleichmäßige Konvergenz für $|x-x_0| \leq r$ ist zu beweisen:

Für $|x-x_0| \leq r$, $r < \rho$ gilt

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n \right\|_\infty$$

$$= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right\|_\infty \underset{|x-x_0|<r}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n$$

$$\left[\begin{array}{l} \rho = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}, \; r < \rho - \varepsilon \text{ für ein } \varepsilon > 0 \\ \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ s.d. } \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho - \varepsilon} \quad \forall n \geq N_0 \end{array} \right]$$

$$\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho-\varepsilon}\right)^n \cdot r^n = \sum_{n=N+1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{r}{\rho-\varepsilon}\right)}_{<1}^n \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

geom. Reihe

q.e.d.