INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 8 - Update-Nr.: 1 20. Juni 2020

Abgabe bis Fr. 26.06.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Dass eine Gleichung $F(x, y) = 0 \in \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung $U = U_x \times U_y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ durch eine Funktion $y = \varphi(x)$ *aufgelöst* werden kann bedeutet, dass eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit $F(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in U_x$ und $\varphi(x_0) = y_0$. Man nennt die Funktion φ dann auch eine *Auflösung* der Gleichung nach x.

Themen:

- Multiindex
- Taylor-Entwicklung
- Lokale Extrema
- Satz über implizite Funktionen

Aufgabe 8.1 (6 Punkte): Multiindex und Taylor-Entwicklung

(a) Man beweise für $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 2,\ \nu \in \mathbb{N}_0$:

$$(x_1 + \ldots + x_n)^\nu = \nu! \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Hierbei ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, wobei

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$
$$\alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i!,$$
$$x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

3

Tipp: Man mache eine vollständige Induktion über n.

Bemerkung: Die Behauptung gilt trivialerweise auch für $n = 1$, das muss hier aber nicht gezeigt werden.

(b) Man berechne das Taylorpolynom 2. Ordnung für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{-x_2} + x_3 e^{-x_1},$$

an der Stelle $\hat{x} = (-1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$. 3

Aufgabe 8.2 (5 Punkte): Lokale Extrema

Man bestimme alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = (4x^2 + y^2) \exp(-x^2 - 4y^2)$$

und klassifiziere diese.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte): Satz über implizite Funktionen

Man zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \sin(y_1 y_2) &= y_1 x_1 + 1 + \frac{\pi}{2} \\ \cos(y_1) &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $\left(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0\right)^{\mathrm{T}} = \left(0, -1, \frac{\pi}{2}, 1\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ durch differenzierbare Funktionen $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2), \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

eindeutig aufgelöst werden kann, und berechne die Jacobi-Matrix $J_g(0, -1)$ der Funktion $g = (g_1, g_2)^{\mathrm{T}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzgl. $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ an der Stelle $x^0 = (0, -1)^{\mathrm{T}}$.

Aufgabe 8.4 (5 Punkte): Taylor-Entwicklung durch implizite Differentiation

Man zeige, dass die Gleichung

$$\ln(3\varepsilon + x) = \varepsilon^2 x$$

in einer Umgebung von $(\varepsilon_0, x_0)^{\mathrm{T}} = (0, 1)^{\mathrm{T}}$ eindeutig nach x durch eine Abbildung $x = g(\varepsilon)$ auflösbar ist und berechne das Taylor-Polynom 2. Ordnung von g im Punkt $\varepsilon_0 = 0$.

Tipp: Man überlege sich dazu, wie man das Konzept der impliziten Differentiation, das wir verwendet haben, um die Aussage (3) des Satzes über implizite Funktion zu beweisen, für höhere Ableitungen verwenden kann.

Bonusaufgabe 8.5 (4 Bonuspunkte): Implizite Gleichung

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. In einem Punkt $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ gelte

$$\prod_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(x^0\right) \neq 0.$$

Weiter sei $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lokale Auflösung der Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = f\left(x^0\right)$$

nach $x_i,\ i = 1, 2, 3$. Man zeige, dass dann

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} \left(x_2^0, x_3^0\right) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \left(x_1^0, x_3^0\right) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \left(x_1^0, x_2^0\right) = -1.$$