Aufgabe 1

(a) Behauptung: Diese Aussage ist falsch.

Beweis. Sei $d(\cdot,\cdot) : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Metrik. Definiere $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = x^2$. φ ist nach Analysis 1 eine stetige, wohldefinierte Funktion. Betrachte nun die Funktion $\rho : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \rho(x) = \varphi(||x||_2)$ und gelte $d(x,y) = \rho(x-y)$. Sei nun $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho(\alpha(x-y)) &= \varphi(||\alpha(x-y)||_2) \\ &\overset{||x||_2 \text{ ist eine Norm}}{=} \varphi(\alpha||x-y||_2) \\ &= (\alpha||x-y||_2)^2 \\ &= \alpha^2 \cdot ||x-y||_2^2 \\ &= \alpha^2 \cdot \rho(x-y) \end{aligned}$$

Somit ist ρ nicht linear im ersten Argument und somit keine Norm. □

(b) Behauptung: Diese Aussage ist richtig.

Beweis.
- "$\Rightarrow$": Angenommen $r \in O$ sei ein Randpunkt von O. Dann befindet sich in jeder Umgebung von r sowohl ein Element aus O, als auch aus der Menge $\mathbb{K}^n \backslash O$. Somit ist O insbesondere nicht abgeschlossen.
- "$\Leftarrow$": Diese Richtung folgt direkt aus 2.26 (i)

□

(c) Diese Aussage ist wahr, siehe 2.26 (iii) im Skript

(d) Behauptung: Diese Aussage ist falsch für $\emptyset \neq M \neq \mathbb{K}^n$

Beweis.
- ($\emptyset \neq M \neq \mathbb{K}^n$): Nach Satz 2.26 (i) ist jede Menge $\overline{M}$ mit $M \subset \mathbb{K}^n$ abgeschlossen und M° offen. $(\overline{M})^\circ = \overline{M^\circ}$ fordert also die Gleichheit einer offenen und einer abgeschlossenen Menge, was ein Widerspruch ist.
- ($\emptyset = M$ oder $M = \mathbb{K}^n$): Das Innere der leeren Menge, ist wieder leer, genau so auch der Abschluss. Somit gilt die Gleichung für die leere Menge. Es gilt $(\mathbb{K}^n)^\circ = \emptyset$, also insbesondere auch die Gleicheit.

□

Aufgabe 2

(a) Behauptung: $\partial M = A := \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty \leq 1\}$.

Beweis. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, gibt es in jeder Umgebung eines beliebigen Elementes aus M sowohl Punkte in $\mathbb{Q}^n$ als auch Punkte in $\mathbb{R}^n$. Auch für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty = 1$ liegen in jeder Umgebung sowohl Punkte in M als auch in $\mathbb{R}^n \setminus M$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt mit $\|x\|_\infty = 1 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 1$. Dann ist $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap M = \emptyset$. Daher ist $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty \leq 1\}$. □

Der Abschluss ergibt sich dann durch $\overline{M} = M \cup \partial M = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty \leq 1\}$ und für das Innere erhalten wir $M^\circ = M \setminus \partial M = \emptyset$.

(b) Behauptung: $\partial M = M$.

Beweis. In jeder Umgebung eines Punktes aus M liegen sowohl Punkte aus M (z.B. der Punkt selbst), als auch Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus M$, da es immer auch Punkte mit $x_1 \neq 0$ gibt. Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x_1 = \varepsilon \neq 0$. Dann ist $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap M = \emptyset$, da kein Punkt mit $x_1 = 0$ in $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ liegt. Sei ansonsten $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_2 = 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0$. Dann ist aufgrund der Dreiecksungleichung $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap M = \emptyset$. □

Der Abschluss ergibt sich dann durch $\overline{M} = M \cup M = M$ und für das Innere erhalten wir $M^\circ = M \setminus \partial M = M \setminus M = \emptyset$.

(c) $F := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n | x \in (1, -1)^n\} = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty < 1\}$. Behauptung: $\partial F = A := \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty = 1\}$.

Beweis. Wegen $A \cap F = \emptyset$ liegen natürlich in jeder Umgebung eines Punktes von A Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus F$. Allerdings liegen in jeder Umgebung auch Punkte mit $\|x\|_\infty < 1$, also Punkte aus F. Wäre jetzt $\|x\|_\infty = 1 - \varepsilon$, dann wäre $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \subset F$. Analog wäre für $\|x\|_\infty = 1 + \varepsilon$ $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \cap F = \emptyset$. Daher können solche Punkte nicht auf dem Rand liegen. □

Wir erhalten also $\overline{F} = F \cup \partial F = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty \leq 1\}$ und $F^\circ = F \setminus \partial F = F$. Nun ist M gleich $\mathbb{R}^n \setminus F = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty > 1\}$. Daher erhalten wir $\partial M = \partial F$. Also ist $\overline{M} = M \cup \partial M = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty \geq 1\}$ und $M^\circ = M \setminus \partial M = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty > 1\}$.

(d) Hier ist $M = F$ und wir erhalten aus der (c) sofort $\partial F = A := \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty = 1\}$, $\overline{F} = F \cup \partial F = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\|_\infty \leq 1\}$ und $F^\circ = F \setminus \partial F = F$.

Aufgabe 3

Seien $V, \widetilde{V}$ definiert, wie auf dem Übungsblatt

(a) Behauptung: Auf $\widetilde{V}$ ist die Abbildung $(\cdot, \cdot)$ nicht definit.

Beweis. Gelte $(f, f) = 0$ für ein $f \in \widetilde{V}$, d.h. $\int\limits_a^b f'(x)^2 \, \mathrm{d}x = 0$. Nun ist $\int\limits_a^b 0 \, \mathrm{d}x = 0$, weshalb f' gleich der Nullabbildung sein kann. Nun ist dann aber f der Form $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$, also nicht die Nullabbildung in $\widetilde{V}$. Also gilt $\exists x \in \widetilde{V} : (x, x) = 0 \land x \neq 0$ □

(b) Wir zeigen die Skalarprodukt eigenschaften:

(S1) (Definitheit): Nach Analysis 1 Korollar 6.22 gilt $\forall x \in V : (x, x) = 0 \implies x = 0$. Außerdem ist $f'(x)^2 \geq 0$ für alle $f \in V$, weshalb $(x, x) \geq 0, \forall x \in V$

(S2) (Symmetrie): Es gilt für $f, g \in V$:

$$\begin{aligned}(f,g) &= \int\limits_a^b f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{V\subset C[a,b]}{=} \int\limits_a^b g'(x)f'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (g,f)\end{aligned}$$

(S3) (Linearität im ersten Argument): Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f_1, f_2, g \in V$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(\alpha f_1 + \beta f_2, g) &= \int\limits_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) g\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^b \alpha f_1 g + \beta f_2 g\,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_a^b \alpha f_1 g\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b \beta f_2 g\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha \int\limits_a^b f_1 g\,\mathrm{d}x + \beta \int\limits_a^b f_2 g\,\mathrm{d}x \\ &= \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g)\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir suchen 4 Elemente $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C([0,1])$ mit $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$. $x_1 = 1$ ist bereits normiert. Daher bestimmen wir zunächst

$$\tilde{x_2} = t - (t, x_1) \cdot x_1 = t - \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = t - \frac{t^2}{2}\bigg|_0^1 = t - \frac{1}{2}.$$

Nun müssen wir $\tilde{x_2}$ noch normieren.

$$(\tilde{x_2}, \tilde{x_2}) = \int_0^1 x_2^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 - t + \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Es gilt $x_2 = \frac{\tilde{x_2}}{\|\tilde{x_2}\|} = \frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)$ Als nächstes berechnen wir $\tilde{x_3}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{x_3} &= t^2 - \int_0^1 t^2 \cdot 1 \text{ d}t1 - \left(\int_0^1 t^2 \cdot 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) \text{ d}t\right) \cdot 2\sqrt{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) \\
&= t^2 - \frac{1}{3} - \left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot 12 \cdot \int_0^1 t^3 - \frac{1}{2}t^2 \text{ d}t \\
&= t^2 - \frac{1}{3} - (12t - 6) \cdot (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) \\
&= t^2 - \frac{1}{3} - t + \frac{1}{2} \\
&= t^2 - t + \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x_3}\|^2 &= \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 \text{ d}t \\
&= \int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2\frac{1}{3} - t\frac{1}{3} + t^2 + \frac{1}{36}) \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

$$x_3 = \tilde{x_3} \cdot \frac{1}{\|\tilde{x_3}\|} = (t^2 - t + \frac{1}{6}) \cdot \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x_4} &= t^3 - \int_0^1 t^3 \text{ d}t - \int_0^1 t^3 \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right) \text{ d}t \cdot 12\left(t - \frac{1}{2}\right) - \int_0^1 t^3 \cdot \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right) \text{ d}t \cdot 180\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right) \\
&= t^3 - \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) \cdot 12\left(t - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{24}\right) \cdot 180\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right) \\
&= t^3 - \frac{1}{4} - \left(\frac{9}{10}t - \frac{9}{20}\right) - \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{4}\right) \\
&= t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{15}{10}t - \frac{9}{10}t - \frac{10}{20} + \frac{9}{20} \\
&= t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{3t}{5} - \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{x_4}\|^2 &= \int_0^1 \left(t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{3t}{5} - \frac{1}{20}\right)^2 \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^6 - 3t^5 + \frac{6t^4}{5} - \frac{1}{10}t^3 + \frac{9t^4}{4} + \frac{9t^3}{5} + \frac{3t^2}{20} + \frac{9t^2}{25} - \frac{3t}{50} + \frac{1}{400} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t^6 - 3t^5 + \frac{69t^4}{20} - \frac{19t^3}{10} + \frac{51t^2}{100} - \frac{3t}{50} + \frac{1}{400} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{7} - \frac{3}{6} + \frac{69}{100} - \frac{19}{40} + \frac{17}{100} - \frac{3}{100} + \frac{1}{400} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{-200 + 4 \cdot 69 - 190 + 4 \cdot 17 - 12 + 1}{400} \\
&= \frac{400 - 7 \cdot 57}{2800} \\
&= \frac{1}{2800}
\end{aligned}$$

$$x_4 = \frac{\tilde{x_4}}{\|\tilde{x_4}\|} = 20\sqrt{7} \cdot \left(t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{3t}{5} - \frac{1}{20}\right) = \sqrt{7}\left(20t^3 - 30t^2 + 12t - 1\right)$$