Übungen zu Funktionentheorie 1 Musterlösung Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 4

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 22. Mai

Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.
Wir schreiben $u(z) = \mathrm{Re}(f(z))$ und $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$, also $f = u + iv$ für Real- und Imaginärteil.

15. Aufgabe: Seien $\alpha, \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\alpha(t) = \exp(2\pi i t) \quad \text{and} \quad \gamma(t) = \begin{cases} 3t & 0 \le t \le 1/3\ , \\ 3(i-1)t - i + 2 & 1/3 < t \le 2/3\ , \\ 3i(1-t) & 2/3 < t \le 1\ . \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass α und γ geschlossene Wege sind.

(b) Berechnen Sie explizit die Kurvenintegrale $\oint_\gamma z^2 \mathrm{d}\, z$ und $\oint_\alpha \frac{1}{z} \mathrm{d}\, z$.

Lösung: a) Hier muss man Stetigkeit zeigen und dass $\alpha(0) = \alpha(1)$ sowie $\gamma(0) = \gamma(1)$. Das kann jeder selbst. b)

$$\oint_\alpha z^2 \, d\, z = \int_0^1 \gamma(t)^2 \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^{1/3} (3t)^2 \cdot 3dt + \int_{1/3}^{2/3} (3(i-1)t - i + 2)^2 \cdot 3(i-1) \cdot 3dt + \int_{2/3}^1 (3i(1-t))^2 \cdot (-3i) \cdot 3dt\ ,$$

$$= [(3t)^3/3]_0^{1/3} + [(3(i-1)t - i + 2)^3/3]_{1/3}^{2/3} + [(3i(1-t))^3/3]_{2/3}^1\ ,$$

$$= 1/3 + (2(i-1) - i + 2)^3/3 - ((i-1) - i + 2)^3/3 - i^3/3$$

$$= 1/3 + i^3/3 - 1/3 - i^3/3 \ = 0\ .$$

Das zweite Integral ist $\oint_\alpha z^{-1} dz = \int_0^1 \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt = \int_0^1 \frac{2\pi i \exp(2\pi i t)}{\exp(2\pi i t)} dt = 2\pi i$.

16. Aufgabe: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Teilmenge. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. U ist wegzusammenhängend. Das bedeutet für je zwei Punkte $\xi, \eta \in U$ existiert ein Weg $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \xi$ und $\gamma(1) = \eta$.
2. Jede stetig partiell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit Ableitung $Df = 0$ ist konstant.

Lösung: 1. $\Rightarrow$ 2. Nehmen wir an, U ist wegzusammenhängend und fixieren wir eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit totaler Ableitung $Df = 0$. Wenn f nicht konstant wäre, gäbe es zwei Punkte ξ und η in U mit $f(\xi) \neq f(\eta)$. Da U wegzusammenhängend ist, können wir diese Punkte durch einen stetigen Weg $\gamma : [0,1] \to U$ verbinden sodass $\gamma(0) = \xi$ und $\gamma(1) = \eta$. Sei $t_0 = \max\{t \mid f(\gamma(t)) = f(\xi)\}$. Obda ist $t_0 = 0$, sonst schränken wir den Weg ein auf $[t_0, 1]$ und parametrisieren neu.

Wählen wir nun ein $\epsilon > 0$, sodass der Einheitsball $B_\epsilon(\xi) \subseteq \mathbb{R}^n$ vollkommen in U enthalten ist. Wegen Stetigkeit gibt es dann ein $t_1 > 0$ sodass $\gamma(t_1)$ in $B_\epsilon(\xi)$. Obda ist $t_1 = 1$, sonst ersetzen wir η durch $\gamma(t_1)$ und parametrisieren um. Jetzt ist die Verbindungsgerade $\alpha(s) = s\xi + (1-s)\eta$ von ξ nach η in U enthalten. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $0 < s_0 < 1$ sodass $Df(\alpha(s_0))(\xi - \eta) = f(\xi) - f(\eta) \neq 0$. Widerspruch, da $Df = 0$.
$\neg 1. \Rightarrow \neg 2.$ Nehmen wir an, U ist nicht wegzusammenhängend, also gibt es η und ξ in U, die sich nicht verbinden lassen. Definieren wir V als die Teilmenge der Punkte in U, die man mit ξ durch einen Weg verbinden kann, [die Zusammenhangskompanente von ξ]. Dann ist V offen und das Komplement $U \setminus V$ ist auch offen und nichtleer nach Annahme. [Insbesondere ist U nicht zusammenhängend im topologischen Sinne.] Die charakteristische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \ , \\ 0 & x \notin V \ . \end{cases}$$

ist stetig partiell differenzierbar mit Ableitung $Df = 0$, aber ist nicht konstant.

17. Aufgabe: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und nichtleer und sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie:

(a) Wenn $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in U$, dann ist f lokalkonstant.

(b) Wenn $|f(z)| = 1$ für alle $z \in U$, dann ist f lokalkonstant.

Hinweis: Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen.

Lösung: a) Der Imaginärteil $v(z) = \operatorname{Im}(f(z)) = 0$ verschwindet, also ist $u_x = v_y = 0$ und $u_y = -v_x = 0$ und damit $Du = 0$. Also ist $f = u$ lokalkonstant.
b) $|f(z)|^2 = 1$ ist konstant und damit holomorph. Also ist $\overline{f} = \frac{|f|^2}{f}$ holomorph. Damit ist $u = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ holomorph und nach a) lokalkonstant. Ebenso ist $v = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$ lokalkonstant und damit auch $f = u + iv$.

18. Aufgabe: Für welche reellen Zahlen a, b ist $u(x+iy) = x^2 + 2axy + by^2$ der Realteil einer holomorphen Funktion? Geben Sie alle möglichen Imaginärteile an.
Hinweis: Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

Lösung: Nehmen wir an, es gibt ein v wie gewünscht. Wir schreiben $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ und so weiter. Dann verlangen die CRD

$$v_x = -u_y = -2ax + 2by \text{ und } v_y = u_x = 2x + 2ay \ .$$

Damit ist v beliebig oft differenzierbar. Nach Satz von Schwartz sind partielle Ableitungen vertauschbar und es gilt $u_{xx} + u_{yy} = \partial_x v_y - \partial_y v_x = 0$. Einsetzen liefert $2 + 2b = 0$ und damit die notwendige Bedingung $b = -1$. Jedes reelle a liefert eine Lösung $v(x + iy) = 2xy + a(y^2 - x^2)$. Die gesuchte Funktion ist dann $f(z) = u(z) + iv(z) = (1 - ai)z^2$.