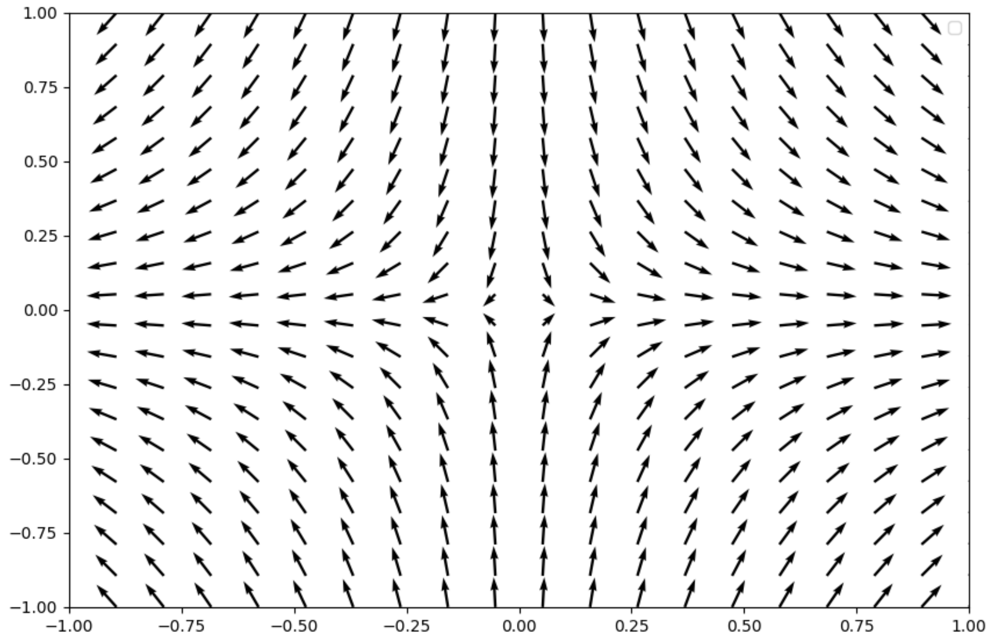
# Aufgabe 3

1. Aus $x' = y' = 0$ folgt sofort $x = 0$ und dann auch $y = 0$, d.h. $y* = (0,0)$ ist der Gleichgewichtspunkt des Systems. Das linearisierte System ist dann gegeben durch
$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
Die Eigenwerte sind offensichtlich gegeben durch 1 und $-1$ und wir können die Eigenräume direkt ablesen:
$$E_1(A) = E^-(A) = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-1}(A) = E^+(A) = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$




2. $y^*$ ist in beiden Eigenräumen enthalten und damit ein Sattelpunkt im linearen System. Zum linearisierten System gehört der Fluss
$$\Phi_t^l \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ y_0 e^{-t} \end{pmatrix}.$$
Das nichtlinearisierte System ist gegeben durch
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4x^3 = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei $g$ differenzierbar mit $g'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 12x^2$ und daher auf einer Umgebung $U$ stets eine beschränkte Ableitung besitzt. Der zugehörige Fluss ist gegeben durch

$$\Phi_t^{\mathrm{nl}}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0e^t\\(x_0)^3e^{3t}+(y_0-x_0^3)e^{-t}\end{pmatrix},$$

denn:
Die Differentialgleichung in der ersten Komponente ist unabhängig von der zweiten Komponente und ist bekanntlich eindeutig lösbar durch $x = x_0e^t$. In der zweiten Komponente folgt die Eindeutigkeit aus dem Satz von Picard-Lindelöf, da $-y + 4(x_0^3e^{3t})$ lokal Lipschitz-stetig in $y$ ist. Es gilt

$$y' = 3x_0^3e^{3t} - (y_0 - x_0^3)e^{-t} = -x_0^3e^{3t} - (y_0 - x_0^3)e^{-t} + 4(x_0e^t)^3 = -y + 4x^3$$

und

$$y(0) = x_0^3 + (y_0 - x_0^3) = y_0.$$

Insbesondere ist also $y$ eine Lösung des Anfangswertproblems. Diese ist nach Picard-Lindelöf aber eindeutig.

Insgesamt ist also Satz 3.18 anwendbar und es folgt, dass $\Phi_t^{\mathrm{nl}}$ und

$$e^{tA} \overset{A\text{ diagonal}}{=} \begin{pmatrix}e^t & 0\\0 & e^{-t}\end{pmatrix} = \Phi_t^{\mathrm{l}}$$

topologisch konjugiert sind. $y^*$ ist in beiden Systemen der Fixpunkt, d.h. die beiden Punkte werden aufeinander abgebildet unter der topologischen Konjugation. Insbesondere ist also $y^*$ auch im nichtlinearisierten System ein Sattelpunkt. Sei $(x_0, y_0)$ ein Element der stabilen Menge. Dann muss gelten $\lim\limits_{t\to\infty} x_0e^t = c \in \mathbb{R} \implies x_0 = 0$. Weiter muss gelten $\lim\limits_{t\to\infty} x_0^3e^{3t} + (y_0 - x_0^3)e^{-t} = \lim\limits_{t\to\infty} y_0e^{-t} = 0$ für beliebiges $y_0$. Die stabile Menge ist also gegeben durch span $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Sei nun $(x_0, y_0)$ Element der instabilen Menge. Dann gilt für beliebiges $x_0$ $\lim\limits_{t\to-\infty} x_0e^t = 0$. Weiter muss gelten $\lim\limits_{t\to-\infty}(x_0)^3e^{3t} + (y_0 - x_0^3)e^{-t} = (y_0 - x_0^3)\lim\limits_{t\to-\infty} e^{-t}$. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-t}$ divergiert, also muss $y_0 = x_0^3$ gelten. Wir erhalten als instabile Menge die Menge aller $(x_0, x_0^3)$ für $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Betrachte die Abbildung

$$\Psi\colon \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}a\\b-a^3\end{pmatrix}.$$

Dann gilt für beliebige $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Phi_t^{\mathrm{l}} \circ \Psi \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \Phi_t^{\mathrm{l}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 - x_0^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ (y_0 - x_0^3) e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ x_0^3 e^{3t} + (y_0 - x_0^3) - (x_0 e^t)^3 \end{pmatrix} \\
&= \Psi \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ x_0^3 e^{3t} + (y_0 - x_0^3) e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \Psi \circ \Phi_t^{\mathrm{nl}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Phasendiagramm des nichtlinearisierten Systems: