Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

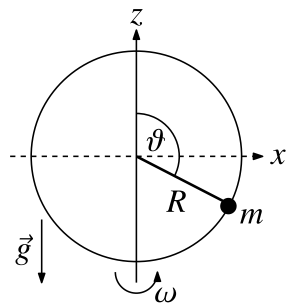
Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 5

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 25. Mai 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Perle auf rotierendem Drahtring*

Eine Perle der Masse m gleite reibungslos auf einem Drahtring vom Radius R. Der Drahtring rotiere mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Durchmesser im Schwerefeld der Erde. Wählt man ein ortsfestes Koordinatensystem so, dass der Mittelpunkt des Drahtringes seinen Ursprung darstellt und dass die z-Achse parallel zur Rotationsachse und antiparallel zur Richtung der Schwerkraft ausgerichtet ist, dann ist die zugehörige Lagrange-Funktion



$$L = T - V = \frac{1}{2} mR^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2 \sin^2 \vartheta \right) - mgR \cos \vartheta.$$

a) Begründen Sie die obige Lagrange-Funktion.
b) Bestimmen Sie die zugehörige Hamilton-Funktion.
c) Ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie? Sind beide jeweils zeitlich erhalten? Warum bzw. warum nicht?
d) Stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf.
e) Bestimmen Sie alle stationären Lösungen und mögliche Bedingungen für diese.

2. *Eindimensionaler harmonischer Oszillator*

Ein Teilchen der Masse m habe die potentielle Energie

$$V(q) = \frac{m}{2} \omega^2 q^2.$$

a) Leiten Sie die sowohl die Lagrange- als auch die Hamilton-Funktion des Systems her.
b) Lösen Sie die Hamilton'schen Gleichungen in der Form

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} \qquad \text{mit} \qquad \vec{y} \equiv \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

indem Sie die Exponentialfunktion der Matrix At in der Lösung

$$\vec{y}(t) = \mathrm{e}^{At}\, \vec{y}_0$$

mit den Anfangsbedingungen $\vec{y}_0 \equiv (q_0, p_0)^\top$ über die Reihendarstellung der Exponentialfunktion berechnen, die durch

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

gegeben ist. Hierfür sind ebenfalls die folgenden Reihendarstellungen nützlich,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

3. *Kugelwellen*

In der Vorlesung wurde darauf hingewiesen, dass die d'Alembert'sche Gleichung auf mehrere Dimensionen erweitert werden kann, indem man für jede Raumdimension eine zweite Ableitung hinzufügt. Sei n die Anzahl der Dimensionen, dann ist die d'Alembert'sche Gleichung durch

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \Delta_{(n)}\right] q(\vec{x}, t) = 0$$

gegeben, wobei v die Ausbreitungsgeschwindigkeit, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ der n-dimensionale Ortsvektor und

$$\Delta_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

der n-dimensionale Laplace-Operator ist.

a) Betrachten Sie im Folgenden die d'Alembert'sche Gleichung für $n = 2$ und $n = 3$. Leiten Sie für den symmetrischen Fall $q(\vec{x}, t) = q(r, t)$, wobei $r \equiv |\vec{x}|$ ist, mit Hilfe des Separationsansatzes $q(r, t) = R(r)\, T(t)$ Differentialgleichungen für $R(r)$ und $T(t)$ her. Dabei ist der Laplace-Operator für $n = 2$ in Polarkoordinaten durch

$$\Delta_{(2)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

gegeben, während er für $n = 3$ in Kugelkoordinaten durch

$$\Delta_{(3)} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

gegeben ist.

b) Finden Sie für $n = 3$ mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{R}(r) \equiv r\, R(r)$ eine allgemeine Lösung für $q(r, t)$, die bei $r = 0$ stetig ist. Was ist die physikalische Bedeutung der dabei auftretenden Separationskonstanten?

4. *Verständnisfragen*

a) Was bedeutet die Hamilton-Funktion, und was besagen die Hamilton'schen Gleichungen?

b) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen einer Lagrange-Funktion, einer Lagrange-Dichte und einer Wirkung.

c) Beschreiben Sie die Struktur der d'Alembert-Gleichung, und erklären Sie die Bedingungen an ihre Lösung(en).

Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 5: Lösungen

1. Perle auf rotierendem Drahtring

a) Die kinetische Energie der Perle in Kugelkoordinaten ist durch

$$
\begin{aligned}
T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) = \frac{m}{2}\Big[&R^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta\cos^2(\omega t)+R^2\omega^2\sin^2\vartheta\sin^2(\omega t)\\
&-2R^2\dot{\vartheta}\omega\sin\vartheta\cos\vartheta\cos(\omega t)\sin(\omega t)+R^2\dot{\vartheta}^2\cos^2\vartheta\sin^2(\omega t)+R^2\omega^2\sin^2\vartheta\cos^2(\omega t)\\
&+2R^2\dot{\vartheta}\omega\sin\vartheta\cos\vartheta\sin(\omega t)\cos(\omega t)+R^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta\Big] = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\vartheta}^2+\omega^2\sin^2\vartheta\right)
\end{aligned}
$$

gegeben. Die potentielle Energie der Perle ist in dem gewählten Koordinatensystem durch

$$V = mgR\cos\vartheta$$

gegeben. Somit folgt für die Lagrange-Funktion

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2\left(\dot{\vartheta}^2+\omega^2\sin^2\vartheta\right) - mgR\cos\vartheta.$$

b) Um die Hamilton-Funktion zu bestimmen, benötigt man zunächst den zu ϑ konjugierten Impuls

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} = mR^2\dot{\vartheta}.$$

Die Hamilton-Funktion ist dann durch

$$H = p_\vartheta\dot{\vartheta} - L$$

definiert, wobei man noch die generalisierte Geschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ durch den konjugierten Impuls p_ϑ ausdrücken muss,

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mR^2}.$$

Somit erhält man für die Hamilton-Funktion

$$
\begin{aligned}
H(\vartheta, p_\vartheta) &= \frac{p_\vartheta^2}{mR^2} - \frac{mR^2}{2}\left(\frac{p_\vartheta^2}{m^2R^4}+\omega^2\sin^2\vartheta\right) + mgR\cos\vartheta\\
&= \frac{p_\vartheta^2}{2mR^2} - \frac{mR^2\omega^2}{2}\sin^2\vartheta + mgR\cos\vartheta.
\end{aligned}
$$

c) Da die Hamilton-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, ist sie erhalten,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

Das Potential ist zwar konservativ, allerdings ist die Zwangsbedingung rheonom-holonom. Daher ist die Hamilton-Funktion im Allgemeinen nicht gleich der Gesamtenergie,

$$E = T + V = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\vartheta}^2+\omega^2\sin^2\vartheta\right) + mgR\cos\vartheta = \frac{p_\vartheta^2}{2mR^2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}\sin^2\vartheta + mgR\cos\vartheta \neq H.$$

Insbesondere ist die Differenz von Hamilton-Funktion und Gesamtenergie durch

$$E - H = m\omega^2 R^2 \sin^2\vartheta$$

gegeben. Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie ist somit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(H + m\omega^2 R^2 \sin^2\vartheta\right) = 2m\omega^2 R^2 \dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = 2\omega^2 p_\vartheta \sin\vartheta\cos\vartheta \neq 0. \tag{I}$$

Die Gesamtenergie ist somit im Allgemeinen nicht erhalten. Dies lässt sich dadurch verstehen, dass für die erzwungene Konstanz der Drehgeschwindigkeit ω i.A. Energie aufgebracht werden muss, solange der Winkel ϑ sich ändert.

d) Die kanonischen Gleichungen zur Hamilton-Funktion lauten,

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mR^2}, \qquad \text{und} \qquad \dot{p_\vartheta} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = mR^2 \sin\vartheta\left(\omega^2\cos\vartheta + \frac{g}{R}\right).$$

e) Durch einmalige Zeitableitung der ersten Gleichung und Einsetzen der zweiten Gleichung lässt sich aus diesen Differentialgleichungen erster Ordnung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung herleiten,

$$\ddot{\vartheta} = \frac{\dot{p}_\vartheta}{mR^2} = \sin\vartheta\left(\omega^2\cos\vartheta + \frac{g}{R}\right).$$

Für stationäre Lösungen verschwinden die Geschwindigkeit $\dot{\vartheta}$ und die Beschleunigung $\ddot{\vartheta}$. Insbesondere folgt daraus

$$\ddot{\vartheta} = \sin\vartheta\left(\omega^2\cos\vartheta + \frac{g}{R}\right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese Relation ist einerseits erfüllt für

$$\sin\vartheta \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \vartheta_2 = \pi$$

und andererseits für

$$\omega^2\cos\vartheta + \frac{g}{R} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vartheta_{3/4} = \pm\arccos\left(-\frac{g}{R\omega^2}\right),$$

wobei die stationären Lösungen $\vartheta_{3/4}$ nur unter der Bedingung $\omega \geq \sqrt{g/R}$ existieren, denn das Argument von $\arccos(\cdot)$ muss größer als -1 sein.

2. *Eindimensionaler harmonischer Oszillator*

a) Die Lagrange-Funktion ist durch

$$L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

gegeben. Der zu q konjugierte Impuls p ist durch

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{q} = \frac{p}{m}$$

gegeben. Somit ist die Hamilton-Funktion

$$H = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{m}{2}\frac{p^2}{m^2} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2.$$

b) Die Hamilton'schen Gleichungen sind durch

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} = m\omega^2 q \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} = \frac{p}{m}$$

gegeben. Diese beiden Gleichungen können zu der folgenden vektorwertigen Gleichung kombiniert werden,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & m^{-1} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad At = \begin{pmatrix} 0 & m^{-1}t \\ -m\omega^2 t & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Quadrat der Matrix At ist durch

$$(At)^2 = \begin{pmatrix} 0 & m^{-1}t \\ -m\omega^2 t & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & m^{-1}t \\ -m\omega^2 t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 t^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 t^2 \end{pmatrix} = -\omega^2 t^2\, \mathbb{1}_2$$

gegeben, wobei $\mathbb{1}_2$ die 2×2-Einheitsmatrix ist. Mit diesem Wissen kann man nun die Exponentialfunktion von At ausrechnen, indem die Reihendarstellung der Exponentialfunktion wie folgt aufgeteilt wird in Beiträge, für die n entweder gerade oder ungerade ist,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} = \mathbb{1}_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!} + At \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \mathbb{1}_2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{A}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathbb{1}_2 \cos(\omega t) + \frac{A}{\omega} \sin(\omega t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & (m\omega)^{-1} \sin(\omega t) \\ -m\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & (m\omega)^{-1} \sin(\omega t) \\ -m\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \cos(\omega t) + p_0 (m\omega)^{-1} \sin(\omega t) \\ -m\omega q_0 \sin(\omega t) + p_0 \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

3. *Kugelwellen*

a) Da $q(\vec{x}, t) = q(r, t)$ ist, geben die Winkelanteile des Laplace-Operators für $n = 2$ und $n = 3$ keine Beiträge.

(i) Für $n = 2$ folgt aus der d'Alembert'schen Gleichung mit

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

dass

$$R\ddot{T} - v^2 T \left(R'' + \frac{1}{r} R'\right) = 0$$

ist, wobei der Punkt Ableitung nach t bedeutet und der Strich Ableitung nach r. Die vorherige Gleichung kann zu

$$\frac{\ddot{T}}{T} = v^2 \left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R}\right)$$

umgestellt werden, sodass mit der Konstanten $-C$ für die linke und rechte Seite separat gilt, dass

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -C \qquad \text{und} \qquad v^2 \left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R}\right) = -C.$$

Dies ergibt die beiden homogenen Differentialgleichungen

$$\ddot{T} + CT = 0 \qquad \text{und} \qquad R'' + \frac{1}{r} R' + \frac{C}{v^2} R = 0.$$

(ii) Für $n = 3$ folgt aus der d'Alembert'schen Gleichung mit

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r},$$

dass

$$R\ddot{T} - v^2 T\left(R'' + \frac{2}{r}R'\right) = 0$$

ist. Die vorherige Gleichung kann zu

$$\frac{\ddot{T}}{T} = v^2\left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right)$$

umgestellt werden, sodass wieder mit der Konstanten $-C$ für die linke und rechte Seite separat gilt, dass

$$\frac{\ddot{T}}{T} = -C \qquad \text{und} \qquad v^2\left(\frac{R''}{R} + \frac{2}{r}\frac{R'}{R}\right) = -C.$$

Dies ergibt die beiden homogenen Differentialgleichungen

$$\ddot{T} + CT = 0 \qquad \text{und} \qquad R'' + \frac{2}{r}R' + \frac{C}{v^2}R = 0.$$

b) Die allgemeine Lösung für $T(t)$ ist einfach durch

$$T(t) = A\cos\left(\sqrt{C}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{C}\,t\right)$$

gegeben. Hieran kann man bereits sehen, dass $C = \omega^2$ gelten muss, wobei ω die Schwingungsfrequenz ist. Also gilt

$$T(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\,.$$

Mit dem Ansatz $\tilde{R}(r) = r\,R(r)$ und den beiden Ableitungen

$$\tilde{R}' = R + rR' \qquad \text{und} \qquad \tilde{R}'' = rR'' + 2R'$$

kann die Differentialgleichung für $R(r)$ zu

$$\tilde{R}'' + \frac{\omega^2}{v^2}\tilde{R} = 0$$

umgeschrieben werden, wobei wieder verwendet wurde, dass $C = \omega^2$. Diese hat die allgemeine Lösung

$$\tilde{R}(r) = \tilde{A}\cos\left(\frac{\omega}{v}\,r\right) + \tilde{B}\sin\left(\frac{\omega}{v}\,r\right),$$

sodass sich für $R(r)$ ergibt, dass

$$R(r) = \frac{\tilde{A}}{r}\cos\left(\frac{\omega}{v}\,r\right) + \frac{\tilde{B}}{r}\sin\left(\frac{\omega}{v}\,r\right).$$

Da $R(r)$ bei $r = 0$ stetig sein soll, muss $\tilde{A} = 0$ sein, denn der Cosinus ergibt bei $r = 0$ ja gerade 1, während der Sinus 0 ergibt. Somit ist also

$$R(r) = \frac{\tilde{B}}{r}\sin\left(\frac{\omega}{v}\,r\right).$$

Kombiniert mit der Lösung $T(t)$ ergibt sich also als allgemeine Lösung für $q(r,t)$, dass

$$q(r,t) = \Big[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\Big]\frac{\tilde{B}}{r}\sin\left(\frac{\omega}{v}\,r\right) = \Big[\bar{A}\cos(\omega t) + \bar{B}\sin(\omega t)\Big]\frac{\sin(kr)}{r}$$

mit der Dispersionsrelation $\omega = vk$ sowie $\bar{A} \equiv A\tilde{B}$ und $\bar{B} \equiv B\tilde{B}$.

4. Verständnisfragen

a) Der Wert der Hamilton-Funktion ist bei skleronomen Zwangsbedingungen die Gesamtenergie als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten q_i und den dazugehörigen kanonischen Impulsen p_i. Wenn sie nicht explizit von der Zeit abhängt, folgt die Erhaltung der Gesamtenergie.

Die Hamiton'schen Gleichungen besagen, dass die zeitliche Änderung des verallgemeinerten Impulses p_i durch die negative Ableitung der Hamilton-Funktion nach der verallgemeinerten Koordinate q_i gegeben ist, während die zeitliche Änderung der verallgemeinerten Koordinate q_i durch die positive Ableitung der Hamilton-Funktion nach dem verallgemeinerten Impuls p_i gegeben ist. Somit sind die Bewegungsgleichungen durch ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung gegeben.

b) Die Wirkung ist das zeitliche Integral über die Lagrange-Funktion. Die Lagrange-Funktion ist ein räumliches (im Allgemeinen dreidimensionales) Integral über die Lagrange-Dichte, welche für Feldtheorien wichtig wird. In letzterem Fall ist die Wirkung dann im Allgemeinen das 4-dimensionale raumzeitlilche Integral (eine Zeitkoordinate und drei Raumkoordinaten) über die Lagrange-Dichte.

c) Die d'Alembert-Gleichung ist eine partielle homogene Differentialgleichung 2. Ordnung und beinhaltet die zweite Zeitableitung sowie die zweite Ortsableitung einer Funktion $q(x,t)$ sowie die Ausbreitungsgeschwindigkeit v. Mit dem d'Alembert-Operator $\Box \equiv v^{-2}\partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x^2$ kann die d'Alembert-Gleichung ganz einfach geschrieben werden als $\Box q(x,t) = 0$.

Die allgemeinste Lösung der d'Alembert-Gleichung ist einer Überlagerung zweier Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit v ausbreiten, wobei die eine vor- und die andere rückläufig ist: $q(x,t) = g(x+vt) + h(x-vt)$. Eine einmal vorgegebene Form von g und h verschiebt sich daher mit der Geschwindigkeit v nach links oder rechts.

Als Anfangsbedingungen müssen ein $q_0(x) \equiv q(x,t=0)$ und ein $\dot{q}_0(x) \equiv \dot{q}(x,t=0)$ vorgegeben werden.