Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 1

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 27. April 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. Gravitative Lichtablenkung

Betrachten wir von der Erde aus einen Stern, der uns nahe der Sonne erscheint, aber erheblich weiter entfernt ist, muss das Licht dieses Sterns auf dem Weg zu uns das Gravitationsfeld der Sonne durchqueren. Wird es dabei abgelenkt, verändert sich die scheinbare Position des Sterns am Himmel, was gemessen werden kann. Dieser Effekt ist umso stärker, je enger der Lichtstrahl an der Sonne vorbeigeht. Die Sonne überstrahlt jedoch die Sterne, sodass die nötigen Messungen nur während einer totalen Sonnenfinsternis durchgeführt werden können. Am 29. Mai 1919 nutzten Arthur Eddingon und Frank Dyson eine Sonnenfinsternis in Südamerika und Afrika für eben jene Messung.
Machen Sie eine Vorhersage für die Ablenkung des Lichts im Newton'schen Gravitationsfeld der Sonne, wenn Sie davon ausgehen, dass Licht – genau wie herkömmliche Teilchen – einem gravitativen Einfluss unterliegt.

a) Begründen Sie, warum sich das Licht entfernter Sterne auf einer Hyperbelbahn bewegen muss.

b) Berechnen Sie den Betrag des Drehimpulses des Lichts am Perihel der Bahn, wenn die Bahn die Sonnenoberfläche gerade in diesem Punkt berührt.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Bahngleichung der Hyperbel den Definitionsbereich $[\varphi_\mathrm{e}, \varphi_\mathrm{a}]$ einer Hyperbelbahn, wobei die beiden Winkel φ_e und φ_a als Ein- und Ausfallwinkel bezeichnet werden.

d) Um welchen Winkel ϑ wird somit das Licht des Sterns im Gravitationsfeld der Sonne maximal von seiner ungestörten (geradlinigen) Bahn abgelenkt? Berechnen Sie ϑ in Bogensekunden, wobei eine Bogensekunde der 3600ste Teil eines Grades ist. Machen Sie für die Rechnung von den folgenden Konstanten Gebrauch: Sonnenmasse $M_\odot = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, Sonnenradius $R_\odot = 7 \times 10^8\,\mathrm{m}$, Gravitationskonstante $G = 6{,}7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$, Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

2. Freier Fall auf zwei Wegen

Der freie Fall in einer Dimension wird durch die inhomogene Differentialgleichung $\ddot{x}(t) = -g$ beschrieben.

a) Lösen Sie die Differentialgleichung durch zweimaliges Integrieren. Identifizieren Sie die Integrationskonstanten mit physikalischen Größen.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung erneut, indem Sie die maximale Anzahl von linear unabhängigen Lösungen der homogenen sowie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen. Wie lautet dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung? Identifizieren Sie die Koeffizienten der allgemeinen Lösung ebenfalls mit physikalischen Größen.

c) Vergleichen Sie ihre Ergebnisse aus a) und b). Warum müssen Sie bei a) auf Integrationskonstanten achten, nicht aber bei b)?

3. *Gekoppelte Wasserbecken*

Zwei miteinander gekoppelte Wasserbecken A und B besitzen jeweils einen geregelten Ablauf, der sicherstellt, dass pro Zeiteinheit immer ein fester Anteil des jeweiligen vorhandenen Wasservolumens aus der Tonne fließt. Dabei fließe das austretende Wasser des A-Beckens durch einen Schlauch in das B-Becken. Die Änderung des Wasservolumens im A-Becken V_A und im B-Becken V_B ist dann durch

$$\begin{aligned}\dot{V}_A &= -f_A V_A,\\ \dot{V}_B &= -f_B V_B + f_A V_A \qquad \text{mit} \quad f_A, f_B \in \mathbb{R}_+\end{aligned}$$

gegeben.

a) Beschreiben Sie in eigenen Worten die Bedeutung der Terme in den beiden Differentialgleichungen; gehen Sie dabei insbesondere auf die Vorzeichen und auf die Bedeutung von f_A und f_B ein. Handelt es sich um homogene Differentialgleichungen? Falls nicht, worin besteht die Inhomogenität?

Bestimmen Sie nun die Wasservolumina im A- und im B-Becken in Abhängigkeit von der Zeit t für den Fall $f_A = f_B$ und mit den Anfangsbedingungen $V_A(t = 0) = V_{A,0}$ und $V_B(t = 0) = 0$.

b) Lösen Sie hierfür zunächst die Differentialgleichung für V_A bzw. den homogenen Teil der Differentialgleichung für V_B durch Trennung der Variablen.
c) Lösen Sie nun die inhomogene Differentialgleichung für V_B durch Variation der Konstanten.
d) Interpretieren Sie das Ergebnis für $V_B(t)$.

4. *Verständnisfragen*

a) Worauf beruht die klassische Mechanik? Welche Grundannahmen setzt sie voraus?
b) Wie kommt das Konzept der Energie in die Mechanik? Warum ist sie im drei- soviel aufwändiger als im eindimensionalen Fall zu definieren?
c) Verwenden Sie mechanische Ähnlichkeit, um zu erklären, wie die Amplitude eines harmonischen Oszillators von seiner Frequenz abhängt.