Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I

11. Übungsblatt

Abgabe bis zum 23.01.20, 9:15 Uhr

Aufgabe 1 (4 + 1 + 1 Punkte). Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 11 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Adjunkte $\widetilde{A}$ zu A und berechnen Sie $\widetilde{A} \cdot A$. Ist A invertierbar?

Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte).

(a) Stellen Sie die Permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$$

als Produkte von Transpositionen dar und bestimmen Sie die zugehörigen Permutationsmatrizen.

(b) Zeigen Sie: Für $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ und K ein Körper ist die Spur der zugehörigen Permutationsmatrix $\varphi(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Anzahl der Fixpunkte von σ aufgefasst als Element von K, d. h. es gilt:

$$\mathrm{Sp}(\varphi(\sigma)) = N_K := \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{N\text{-mal}}, \quad N = \#\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \sigma(i) = i\}.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte). Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Q}).$$

Bestimmen Sie $\ker(\lambda E_3 - A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4 (1 + 5 Punkte). Für $n \geqslant 2$ betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} (-)^t \colon M_{n,n}(\mathbb{Q}) &\longrightarrow M_{n,n}(\mathbb{Q}) \\ A &\longmapsto A^t. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(-)^t$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} \left(\ker\left(\lambda \cdot \mathrm{id}_{M_{n,n}(\mathbb{Q})} - (-)^t\right)\right)$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$.