# Höhere Analysis

Hans Knüpfer, Heidelberg University
Wintersemester 2020/21

Diese Notizen sind nicht auf Fehler geprüft, nicht korrigiert und unvollständig (insbesondere einige Beweise). Sie sind ein zusätzliches Angebot an die Studierenden, sollen aber nicht die Vorlesungsmitschrift ersetzen. Die Mitschrift ist nur für die Studierenden der Vorlesung *Höhere Analysis* im Wintersemester 20/21, Universität Heidelberg, gedacht. Während des Semesters wird es kontinuierlich Updates der Mitschrift geben.

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Einführung

Durchführung:

- Synchrone Vorlesung
  - Zeiten: Mo 9:30-11:00, Fr 13:15-14:45.
  - Platform: WebEx
- Asynchrone Materialien
  - Skript wird wöchentlich im Voraus.
  - Screencast ca 1x wöchentlich im Voraus.

Organisation:

- Informationen auf Moodle und Müsli
- Plenarübung: Mi 14:00-15:30
- Übungsbetrieb: 50% Punkte der Übungszettel für Klausurzulassung
- Klausur: Termin wird noch bekanntgeben. Wahrscheinlich letzte Vorlesungswoche.

Themen: Wir beschaftigen uns in diesem Semester mit

- Maßtheorie: Maße sind Abbildungen der Form $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ für $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Mit Maßen können wir z.B. das Volumen oder das Oberflächenmaß von Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ messen.
- Integrationstheorie: Wir führen das Lebesgue-Integral ein (eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals). Das Lebesgueintegral erlaubt insbesondere Konvergenzsätze wie den Satz von der dominierten Konvergenz, ...
- Integrationssätze: Wir führen wichtige Sätz aus der Integrationstheorie ein wie den Transformationssatz, Satz von Gauss, Fubini.

Literatur

- Ambrosio, Da Prato, Mennucci –Introduction to measure theory and integration: Hauptgrundlage des Kapitels über Maß– und Integrationstheorie.
- Evans, Gariepy – Fine properties of functions: Bietet interessante weitergehende Informationen. Schöne Ideen, schreckliche Notation.
- Rudin – Real Analysis

Wir beginnen mit einer kurzen Motivation der grundlegenden Themen der Vorlesung:

**Problem mit Riemann-Integral.** Sei $r_1, \ldots,$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ und

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{r_1, \ldots, r_k\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} , \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Dann sind die Funktionen $f_k \geq 0$ sind Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f_k \, dx \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad f_k \nearrow f \;\; \text{punktweise monoton.}$$

Die Grenzfunktion $f$ ist allerdings nicht Riemann-integrierbar. Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen ist also nicht abgeschlossen unter punktweiser monotoner Konvergenz. Wir führen daher einen allgemeineren Integrationsbegriff, bei dem auch der Grenzwert von integrablen Funktionsfolgen (und gewissen Bedingungen) integrierbar ist. Das Lebesgue-Integral bietet eine solche Erweiterung des Riemann-Integrals. Dies erlaubt dann die Herleitung von Konvergenzsätzen wie den Satz von der monotonen Konvergenz, welche die Integrabilität der Grenzfunktion sicherstellen.

**Grundidee des Lebesgue-Integrals.** Die Funktion $f$ aus (1.1) ist an keinem Punkt $z \in [0,1]$ stetig. Eine Zerlegung des Definitionsbereiches in der Konstruktion von Ober– und Untersummen führt also nicht zum Erfolg. Beim Lebesgueintegral wird nicht der Definitionsbereicht, sondern stattdessen der Bildbereich zerlegt. Für eine nichtnegative Funktion $f : \Omega \to [0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Mengen

$$E_k^{(h)} \;:=\; f^{-1}((kh, (k+1)h]) \subset \Omega \qquad\qquad \text{für } h > 0 \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Wir approximieren dann das Integral von $f$ durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} [kh] \mu(E_k^h) \;\leq\; \int_\Omega f(x) \, dx \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)h] \mu(E_k^{(h)}). \tag{1.2}$$

Hierbei ist $\mu(E)$ das Volumen (allgemeiner <u>Maß</u>) der Menge $E \subset \Omega$. Das Integral ergibt sich dann aus (1.2) im Limes $h \to 0$. Man sieht leicht, dass mit diesem Integralbegriff die Funktion $f$ aus (1.1) integrierbar ist!

Um das Lebesgueintegral zu konstruieren, müssen wir also das Maß einer Menge $E$ kennen.

**Das Maßproblem.** Mit $\mathscr{P}(X)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von $X$, d.h. die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Wir suchen nach einer Funktion

$$\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \;\to\; [0, \infty],$$

welche das Volumen von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ misst. Wenn wir natürliche Annahmen an diese Maßfunktion stellen, dann führt dies auf das folgende <u>Maßproblem</u>:

**Problem 1.1 (Maßproblem).** *Wir suchen $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ mit*

*(i)* $\mu\big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ *falls* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *($\sigma$-Additivität)*

*(ii)* $\mu(\emptyset) \;=\; 0,\ \mu([0,1]^n) \;=\; 1$ *(Normierung)*

*(iii)* $\mu(A+y) \;=\; \mu(A)\ \forall y \in \mathbb{R}^n$ *(Translationsinvarianz)*

Aus der $\sigma$-Additivität erhalten wir auch die Monotonie unserer Abbildung:

$$\mu(A) \leq \mu(B) \quad \forall A \subset B. \qquad (Monotonie) \tag{1.3}$$

Allerdings hat das Maßproblem 1.1 keine Lösung:

**Satz 1.2 (Vitali 1905).** *Es gibt keine Abbildung $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, welche die Forderungen des Maßproblems erfüllt.*

*Beweis.* Wir geben den Beweis für $n = 1$, der Beweis für allgemeine $n$ folgt analog.

Wir definieren die Äquivalenzrelation $x \sim y$ auf $E := [0,1]$ durch $x \sim y$, genau dann wenn $x - y \in \mathbb{Q}$. Nach dem Auswahlaxiom (ein Axiom der Mengenlehre) gibt es eine Menge $M_0 \subset [0,1]$, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, d.h. zu $y \in [0,1]$ gibt es genau ein $x \in M_0$ mit $x - y \in \mathbb{Q}$.

Sei $q_i$, $i \in \mathbb{N}$, eine Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ und sei

$$M_j \;:=\; M_0 + q_j \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i \neq j, \qquad [0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_j \subset [0,2], \qquad \mu(M_i) \;=\; \mu(M_0)\ \forall i \tag{1.4}$$

Falls $\mu$ die Forderungen (i)–(iii) des Maßproblems erfüllt, dann folgt aus (1.4), dass

$$1 \overset{(ii)}{=} \mu([0,1]) \overset{(1.3)}{\leq} \mu\Big(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\Big) \overset{(i)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_0) \overset{(1.3)}{\leq} \mu([0,2]) \overset{(i),(iii)}{<} \infty. \tag{1.5}$$

Aus (1.5) erhalten wir den Widerspruch $\mu(M_0) > 0$ und $\sum_i \mu(M_0) = \infty$. □

Es ist also nicht möglich einen Maßbegriff zu definieren, so dass alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messbar sind und so dass die Eigenschaften aus Problem 1.1 gelten. Wir suchen daher eine maximale Familie $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ von messbaren Mengen und eine Funktion

$$\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty],$$

welche die Eigenschaften des Maßproblems erfüllt.

**Integration über allgemeinere Maße.** Das Lebesgueintegral kann auch genutzt werden, um über allgemeinere Maße $\mu$ in allgemeinen Räumen $X$ zu integrieren. Relevante Beispiele sind

- gewichtete Maße wie das Gaußmaß $e^{-x^2}dx$
- diskrete Maße wie das Zählmaß.
- Oberflächenmaße wie das $(n-1)$–dimensionale Hausdorffmaß $\mathscr{H}^{n-1}$.

Wir werden daher zuerst eine allgemeine Maßtheorie einführen.

# 2 Grundlagen der Maßtheorie

## 2.1 Ringe, $\sigma$-Algebren und Maße

Mit $X$ bezeichnen wir eine nichtleere Menge. Die Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ bezeichnet die Menge aller Teilmengen von $X$. Der Raum $\mathscr{P}(X)$ wird durch die Operatoren $\cup$, $\cap$, $^c$ (Komplement) mit einer algebraischen Struktur versehen. Wir schreiben , $A\backslash B := A \cap B^c$ für die relative Differenz und $A \Delta B := (A\backslash B) \cup (B \backslash A)$ für die symmetrische Differenz. Wir erinnern an:

$$\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big)^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c \qquad \text{(Identität von De Morgan).}$$

In Analogie zu algebraischen Strukturen defininieren wir:

**Definition 2.1 (Ring, Algebra).** *Eine Teilmenge $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt Ring, falls*

*(i)* $\emptyset \in \mathscr{A}$.

*(ii)* $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cup B,\ A \cap B,\ A\backslash B \in \mathscr{A}$.

*Falls außerdem $X \in \mathscr{A}$, dann heißt $\mathscr{A}$ Algebra.*

Ein Ring ist also stabil unter den Operatoren $\cup$, $\cap$ und $\backslash$ (und damit auch $\Delta$). Mit der obigen Definition ist $(\mathscr{A}, \Delta, \cap)$ dann auch ein Ring im algebraischen Sinne: Das neutrale Element bezüglich der “Addition” $\Delta$ ist $\emptyset$, das inverse Element zu $A$ ist $A$. Man rechnet leicht nach, dass Kommutativ, Assoziativ und Distributivgesetz gelten. Falls $\mathscr{A}$ eine Algebra ist, dann ist $X$ das neutrales Element der Multiplikation.

Der Raum $\mathscr{P}(X)$ ist teilgeordnet durch die Ordnungsrelationen $\subset$, $\supset$. Entsprechend sagen wir, dass die Folge $A_k$ monoton steigt, wenn $A_k \subset A_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, wir sagen, dass sie monoton fällt, wenn entsprechend $A_{k+1} \subset A_k$ gilt. Wir schreiben:

$$\limsup_{k\to\infty} A_k := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \liminf_{k\to\infty} A_k := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Die Menge $\limsup_k A_k$ besteht also aus den Elementen von $X$, die in unendlich vielen Mengen $A_k$ enthalten sind. Die Menge $\liminf_k A_k$ besteht aus den Elementen von $X$, welche in allen, bis auf endlichen vielen Mengen $A_k$ enthalten sind. Falls $\limsup_k A_k = \liminf_k A_k$, dann schreiben wir $\lim_{k\to\infty} A_k := \limsup_{k\to\infty} A_k = \liminf_{k\to\infty} A_k$. Falls die Folge $A_k \subset X$ monoton ist, dann existiert der Limes $\lim_{k\to\infty} A_k$. Wir bemerken, dass $A_k \to A$ genau dann, wenn $A_k \Delta A \to \emptyset$. Korrespondiert dieser Konvergenzbegriff zu einer Topologie (Übungsaufgabe)?.

Falls die Folge monoton steigt, dann gilt $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Falls die Folge monoton fällt, d.h. $A_{k+1} \subset A_k$, dann gilt $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$. Wir schreiben $A_k \nearrow L$ beziehungsweise $A_k \searrow L$.

Eine Algebra, welche abgeschlossen unter Grenzwertbildung ist heißt $\sigma$–Algebra:

**Definition 2.2 ($\sigma$-Algebra).** *$\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt σ-Algebra auf $X$, falls*

*(i) $\mathscr{A}$ ist Algebra.*

*(ii) $A_i \in A\ \forall i \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.*

Falls $A_i \in \mathscr{A}$, dann folgt aus der De Morganschen Identität, dass die Mengen $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, $\liminf A_i, \limsup A_i \in \mathscr{A}$. Falls $A_i \in \mathscr{A}$ mit $A_i \to A$, dann gilt also insbesondere $A \in \mathscr{A}$.

Nach Definition ist $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ also eine $\sigma$–Algebra ist, genau dann wenn

(i) $X,\ \emptyset \in \mathscr{A}$

(ii) $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$

(iii) $A_i \in A\ \forall i \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Wir bemerken, dass $\mathscr{P}(X)$ die größte $\sigma$-Algebra auf $X$ ist. Die Menge $\{\emptyset, X\} \subset \mathscr{P}(X)$ ist die kleinste $\sigma$-Algebra auf $X$. Zu jeder Menge $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ gibt es eine kleinste $\sigma$-Algebra, welche $\mathscr{F}$ enthält:

**Satz 2.3 (Erzeugte $\sigma$-Algebra).** *Sei $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann ist*

$$\sigma(\mathscr{F}) \ := \ \bigcap \{\mathscr{A} : \mathscr{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra mir } \mathscr{F} \subset \mathscr{A}\}.$$

*die kleinste $\sigma$-Algebra, welche $\mathscr{F}$ enthält. $\sigma(\mathscr{F})$ heißt die von $\mathscr{F}$ erzeugt $\sigma$-Algebra.*

*Beweis.* Nach Konstruktion ist $\sigma(\mathscr{F}) \subset \mathscr{A}$ für jede $\sigma$-Algebra $\mathscr{A}$, welche $\mathscr{F}$ enthält. Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma(\mathscr{F})$ eine $\sigma$-Algebra ist. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller $\sigma$-Algebren, welche $\mathscr{F}$ enthalten. Es gilt $\mathscr{P}(X) \in \mathbb{A}$ und daher ist $\mathbb{A}$ nicht leer. Wir prüfen die Bedingungen (i)–(iii) aus der obigen Bemerkung:

(i) Nach Konstruktion gilt $\emptyset, X \in \sigma(\mathscr{A})\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$ und daher $\emptyset, X \in \sigma(\mathscr{F})$.

(ii) Falls $A \in \sigma(\mathscr{F})$, dann gilt $A \in \mathscr{A}\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$. Da die Mengen $\mathscr{A}$ $\sigma$-Algebren sind, erhalten wir $A^c \in \mathscr{A}\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$ und daher $A^c \in \sigma(\mathscr{F})$.

(iii) Falls $A_i \in \sigma(\mathscr{F})$, $i \in \mathbb{N}$, dann folgt $A_i \in \mathscr{A}\ \forall i \in \mathbb{N}\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$. Damit folgt auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}\ \forall A \in \mathscr{A}$ und damit auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathscr{F})$.

Daher ist $\sigma(\mathscr{F})$ eine $\sigma$–Algebra. □

Aus der Analysis wissen wir, dass sich jeder metrische Raum vervollständigen lässt. In diesem Sinne kann man $\sigma(\mathscr{F})$ die Vervollständigung des Mengensystems $\mathscr{F}$ bezüglich unseres Konvergenzbegriffes für Mengen interpretieren.

[02.11.2020]

---

[06.11.2020]

**Definition 2.4 (Borel $\sigma$-Algebra).** *Sei $X$ ein metrischer Raum und sei $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ die Topologie auf $X$, d.h. die Menge der offenen Mengen. Dann ist die Borel $\sigma$-Algebra definiert durch*

$$\mathscr{B}(X) \ := \sigma(\mathscr{T}).$$

Nach Definition enthält $\mathscr{B}(X)$ alle offenen Mengen, alle abgschlossenen Mengen und die abzählbaren Druchschnitte und Vereinigungen dieser Mengen. Äquivalent wird die Borel $\sigma$–Algebra auch durch die abgeschlossen Mengen erzeugt. Elemente der Borel $\sigma$–Algebra heißen Borelmengen.

Wir betrachten nun additive und subadditive Funktionen auf $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$:

**Definition 2.5 (Additivität).** *Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann heißt $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$*

*(i) subadditiv, falls $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)\ \forall A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cup B \in \mathscr{A}$.*

*(ii) additiv, falls $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)\ \forall A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B \in \mathscr{A}$.*

*(iii) $\sigma$–subadditiv, falls für jede Folge $A_k \in \mathscr{A}$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$ gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \qquad \text{($\sigma$-Subadditivität).}$$

*(iv)* *$\sigma$–additiv, falls für jede Folge $A_k \in \mathscr{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$*

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \qquad\qquad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Eine $\sigma$–additive Abbildung auf einer $\sigma$–Algebra nennen wir Maß:

**Definition 2.6 (Maßraum, Maß).**

*(i)* *Ein messbarer Raum $(X, \mathscr{E})$ ist eine Menge $X$ mit einer $\sigma$–Algebra $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$.*

*(ii)* *Eine Maß $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ ist eine $\sigma$–additive Funktion auf einem messbaren Raum $(X, \mathscr{E})$. Dann heißt $(X, \mathscr{E}, \mu)$ Maßraum.*

*Das Maß $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ heißt*

*(iii)* *Wahrscheinlichkeitsmaß, falls $\mu(X) = 1$.*

*(iv)* *endlich, falls $\mu(X) < \infty$,*

*(v)* *$\sigma$-endlich, falls es $A_k \in \mathscr{E}$ gibt mit $\mu(A_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.*

*(vi)* *Ein Punkt $x \in X$ heißt Atom, falls $\mu(\{x\}) > 0$.*

*(vii)* *Falls $X$ ein metrischer Raum ist, dann heißt $\mu$ Borelmaß, falls $\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{E}$.*

Wir hatten für das Maßproblem gesehen, dass wir nicht das Volumen aller Teilmengen $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ des $\mathbb{R}^n$ messen können. Unser Ziel ist aber zu zeigen, dass wir zumindest jede Borelmenge messen können.

**Beispiel 2.7 (Beispiele diskreter Maße).**

*(i)* *Sei $X$ eine beliebige Menge. Das Diracmaß zum Punkt $x \in X$ ist*

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Das Diracmaß ist ein endliches Maß. Der Punkt $x \in X$ ist ein Atom von $\delta_x$. Falls $X$ ein metrischer Raum ist, dann ist $\delta_x$ ein Borelmaß.*

*(ii)* *Sei $X$ eine beliebige Menge. Für $A \in \mathscr{P}(X)$ definieren wir das Zählmaß durch*

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich viele Elemente enthält} \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

*wobei $\#A$ die Anzahl der Elemente von $A$ ist. Das Zählmaß ist genau dann endlich, wenn $X$ endlich ist; es ist genau dann $\sigma$–endlich, wenn $X$ abzählbar ist. Falls $X = \mathbb{R}^n$, dann ist das Zählmaß also nicht $\sigma$–endlich.*

Aus der Additivität von Maßen erhalten wir direkt die folgenden Rechenregeln:

- $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathscr{E}$.
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathscr{E}$.

Diese beiden Aussagen folgen aus der Additivität des Maßes zusammen mit den disjunkten Zerlegungen $A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$, $A \cup B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \cup (A \cap B)$. Aus der Definition von Maßen erhalten wir Monotonie, $\sigma$–Subadditivität und Stetigkeit des Maßes bezüglich monotoner Konvergenz:

**Proposition 2.8 (Eigenschaften von Maßen).** *Sei $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Dann*

*(i)* $\mu(A) \leq \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathscr{E}$ *mit* $A \subset B$. *(Monotonie)*

*(ii)* $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \quad \forall A_i \in \mathscr{E}, i \in \mathbb{N}$. *($\sigma$-Subadditivität)*

*(iii) Falls $A_k \nearrow A$ oder $A_k \searrow A$ und $\mu(A_0) < \infty$ für $A_k \in \mathscr{A}$. Dann gilt $A \in \mathscr{E}$ und*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$$ *(Stetigkeit bzgl. monotoner Konvergenz)*

*Beweis.* *(i):* Folgt aus der disjunkten Zerlegung $B = A \cup (B\backslash A)$.

*(ii):* Wir definieren induktiv $B_0 := A_0$ und $B_{k+1} := A_{k+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset A_{k+1}$. Dann gilt $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ und $\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ nach (i). Da die Mengen $B_k$ paarweise disjunkt sind, erhalten wir

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_k) = \mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} B_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

*(iii):* Nach Annahme gilt $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_k$ und damit $A \in \mathscr{E}$. Wir können $\mu(A_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ annehmen, da die Aussage sonst trivialerweise erfüllt ist. Die Mengen $B_0 := A_0$ und $B_k := A_k \backslash A_{k-1}$ für $k \geq 1$ sind disjunkt und $\mu(B_k) = \mu(A_k) - \mu(A_{k-1})$. Daher

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) \;= \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Für $A_k \searrow A$ betrachte man die Folge $C_k := A_0 \backslash A_k$ an. Falls $\mu(A_0) < \infty$, dann gilt $\mu(C_k) = \mu(A_0) - \mu(A_k)$ und wir können das obige Argument anwenden. □

Gilt auch allgemein $\mu(A_k) \to \mu(A)$, falls $A_k \to A$ (Übungsaufgabe)?

Ein weiterer nützlicher Begriff is der Begriff des äußeren Maßes.

**Definition 2.9 (Äußeres Maß).** *Sei $X$ eine Menge. Ein äußeres Maß ist eine $\sigma$ subadditive Abbildung $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$.*

Wir geben einige Beispiele: Sei $X$ ein Menge. Falls $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ gegeben ist durch

- $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A) = 1$ für alle $A \neq \emptyset$, oder
- $\mu(A) = 0$, falls $\#A < \infty$ und $\mu(A) = 1$

Dann ist $\mu$ ein äußeres Maß.

Maße und äußere Maße sind subadditiv und erfüllen damit eine wichtige Eigenschaft einer Norm. Allerdings folgt aus $\mu(A) = 0$ im Allgemeinen nicht $A = \emptyset$.

**Definition 2.10 (Nullmengen & fast überall Aussagen).** *Sei $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ und sei $\mu : \mathscr{E} \to [0,\infty]$ subadditiv.*

*(i) Dann heißt $A \in \mathscr{E}$ eine $\mu$-Nullmenge, falls $\mu(A) = 0$.*

*(ii) Eine Aussage $P(x)$ gilt $\mu$–fast überall, falls $P(x)$ bis auf eine Nullmenge gilt.*

*(iii) Sei $Y$ ein topologischer Raum. Wir sagen, dass $f_k : X \to Y$ $\mu$–fast überall gegen $f$ konvergiert, falls es eine $\mu$-Nullmenge $N \subset X$ gibt mit $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$.*

Die Funktionenfolge $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = k\chi_{[0,\frac{1}{k}]}$ konvergiert f.ü. gegen $f = 0$.

Nach Definition ist jede $\sigma$–Algebra $\mathscr{E}$ vollständig in dem Sinne, dass $A_k \in \mathscr{E}$ und $A_k \to A$ schon die Aussage $A \in \mathscr{E}$ impliziert. Ein Maß $\mu : X \to [0,\infty]$ induziert eine Konvergenz: Wir können sagen, dass $A_k \to_\mu A$ im Maß bezüglich des Maßes $\mu$ konvergiert, falls $\mu(A \Delta A_k) \to 0$. Im Allgemeinen folgt aus $A_k \in \mathscr{E}$ und $A_K \to_\mu A$ aber nicht, dass $A \in \mathscr{E}$. Das Maß heißt dann nicht vollständig. Durch eine Erweiterung des Definitionsbereiches lässt sich aber jedes Maß zu einem vollständigen Maß fortsetzen. Dies führt auf die folgende Definition:

**Satz 2.11 (Maßvervollständigung).** *Sei $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist*

$$\mathscr{E}_\mu \;:=\; \{A \in \mathscr{P}(X) \;:\; \text{es gibt } B, N \in \mathscr{E} \text{ mit } A \Delta B \subset N \text{ und } \mu(N) = 0\}.$$

*eine $\sigma$–Algebra. Die Erweiterung $\overline{\mu} : \mathscr{E}_\mu \to [0, \infty]$ mit $\overline{\mu}(A) = \mu(B)$ ist ein Maß. Die Elemente von $E \in \mathscr{E}_\mu$ heißen $\underline{\mu\text{–messbar}}$ Mengen. Das Maß $\overline{\mu}$ heißt Vervollständigung von $\mu$. Falls $\mu = \overline{\mu}$, dann heisst das Maß $\mu$ vollständig. Entsprechend heißt der Maßraum $(X, \mathscr{E}, \mu)$ vollständig, falls $\mu$ vollständig ist.*

*Beweis.* Der Beweis ist Übungsaufgabe. □

## 2.2 Maßerweiterung

Wir wenden uns wieder dem Maßproblem zu, d.h. das Ziel ist ein Maß zur Volumenmessung zu definieren. Wir betrachten zuerst die Menge der linksgeschlossenen Intervalle

$$\mathscr{J} := \{[a, b) \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Wir benutzen dabei die Konvention, dass $[a, b) = \emptyset$ falls $b \leq a$. Man zeigt leicht, dass

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{J}).$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass sich jedes offene Intervall als abzählbare Überdeckung von Mengen in $\mathscr{J}$ darstellen lässt und umgekehrt (Übungsaufgabe). Jedem Intervall $I = [a, b) \in \mathscr{J}$ mit $I \neq \emptyset$ ordnen wir die Länge $|I| := |b - a|$ und wir setzen $|\emptyset| = 0$. In einem ersten Schritt definieren wir ein Volumenmaß auf der endlichen Vereingung von Mengen in $\mathscr{J}$:

**Lemma 2.12 (Lebesgue–Prämaß).** *Sei $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ die Menge der Mengen, welche sich als endliche Vereinigung von linksgeschlossenen Intervallen darstellen lässt, d.h.*

$$\mathscr{K} \;=\; \left\{ A \subset \mathbb{R} \;:\; A = \bigcup_{j=1}^{N} I_j \quad \text{mit } I_j \in \mathscr{J},\, 1 \leq j \leq N, \text{ für ein } N \in \mathbb{N}. \right\} \tag{2.1}$$

*Wir definieren das Lebesgue–Prämaß $\lambda : \mathscr{K} \to [0, \infty)$ durch*

$$\lambda(A) \;:=\; \inf \left\{ \sum_{I \in \mathscr{J}} |I_j| \;:\; A = \bigcup_{j=1}^{N} I_j \text{für } N \in \mathbb{N} \text{ und } I_j \in \mathscr{J} \right\},$$

*Dann ist $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ eine Algebra und $\lambda$ ist $\sigma$–additiv auf $\mathscr{K}$.*

*Beweis.* Man zeigt leicht, dass $\mathscr{A}$ ein Ring ist. Wir bemerken, dass jede Menge $A \in \mathscr{K}$ als endliche, disjunkte Vereinigung von Mengen $I_j \in \mathscr{J}$ geschrieben werden kann. Mit einer solchen disjunkten Vereinigung gilt $\lambda(A) := \sum_{j=1}^{n} |I_j|$ und das Maß ist unabhängig von der Wahl der disjunkten Vereinigung. Die Details sind Übungsaufgabe. $\square$

[06.11.2020]

---

[09.11.2020]

Das Lebesgueprämaß $\lambda : \mathscr{K} \to [0, \infty]$ erfüllt die Eigenschaften (i)—(iii) des Maßproblemes ist aber nur auf einem sehr kleinen System von Mengen definiert. Unser Ziel ist $\lambda$ zu einem Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{K}) = \sigma(\mathscr{J})$ fortzusetzen. Die folgende Konstruktion geht auf Constantin Carathéodory (1873-1950) zurück.

**Proposition 2.13 (Induziertes äußeres Maß).** *Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ und sei $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ $\sigma$–additiv. Sei $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ gegeben durch*

$$\mu^*(E) \ := \ \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : \mathscr{A} \in \mathscr{A}, E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\}.$$

*Dann ist $\mu^*$ äußeres Maß mit $\mu^* = \mu$ auf $\mathscr{A}$ und heißt das von $\mu$ induzierte äußere Maß.*

*Beweis.* Aus der Definition und der Monotonie von $\mu$ erhalten wir direkt, dass $\mu(A) = \mu^*(A)\ \forall A \in \mathscr{A}$. Insbesondere gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mu^*$ subadditiv ist: Sei $E_i \in \mathscr{P}(X)$ und sei $E := \bigcup_i E_i$. OBdA nehmen wir an, dass $\sum_i \mu^*(E_i) < \infty$. Nach Konstruktion gibt es dann zu $\varepsilon > 0$ und $E_i$ eine Folge $A_{ij}$ mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_{ij}) < \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \qquad \text{und} \qquad E_i \subset \bigcup_j A_{ij}$$

Wir summieren über $i$ und erhalten

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \mu^*(A_{ij}) < \sum_i \mu^*(E_i) + \varepsilon, \qquad \text{und} \qquad E \subset \bigcup_{i,j} A_{ij}$$

Die Subadditivität folgt im Limes $\varepsilon \to 0$. $\square$

Wir möchte nun zeigen, dass die Einschränkung von $\mu^*$ auf einer hinreichend großen Menge schon ein Maß ist. Dafür benötigen wir einige technische Definitionen und Resultate:

**Definition 2.14 (Dynkinsystem).** *$\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt Dynkinsystem, falls*

*(i)* $\emptyset, X \in \mathscr{D}$.

*(ii)* $A \in \mathscr{D} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{D}$.

*(iii)* $A_i \in \mathscr{D}\ \forall i \in \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{D}$.

**Definition 2.15 ($\pi$–System).** *$\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt $\pi$–System, falls $\mathscr{K} \neq \emptyset$ und $A \cap B \in \mathscr{K}\ \forall A, B \in \mathscr{K}$.*

Wir bemerken, dass das Mengensystem $\mathscr{K}$ aus Lemma 2.1 eine Algebra und damit insbesondere ein $\pi$–System ist. Wir haben das folgende Resultat:

**Proposition 2.16 (Dynkinsystem).** *Falls $\mathscr{D}$ ein Dynkinsystem ist und $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$ ein $\pi$–System, dann ist $\sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{D}$.*

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

Es gilt insbesondere die folgende hinreichende Bedingungen für eine $\sigma$–Algebra: Falls $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ sowohl Dynkinsystem als auch $\pi$–System ist, dann ist $\mathscr{A}$ eine $\sigma$–Algebra.

**Satz 2.17 (Maßerweiterung).** *Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ ein Ring, sei $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ additiv und sei $\mu^*$ das induzierte äußere Maß. Dann ist die Menge*

$$\mathscr{M} \ := \ \{A \in \mathscr{P}(X)\ :\ \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall E \in \mathscr{P}(X).\} \tag{2.2}$$

*eine $\sigma$–Algebra mit $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$ und $\mu^*$ ist $\sigma$–additiv auf $\mathscr{M}$.*

*Beweis.* Da $\mu^*$ subadditiv ist, ist die Bedigung in (2.2) äquivalent zu

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \ \leq \ \mu^*(E) \qquad \forall E \in \mathscr{P}(X) \text{ mit } \mathscr{P}(E) < \infty.\} \tag{2.3}$$

*Schritt 1: $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$:* Wir bemerken zuerst, dass $\mu^*$ additiv auf $\mathscr{A}$ ist. In der Tat, sei $A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Aus der Definition (2.2) und der Wahl $E = A \cup B$ gilt

$$\mu^*(A \cup B) \ = \ \mu^*(A) + \mu^*(B) \qquad \forall A, B \in \mathscr{A} \text{ mit } A \cap B = \emptyset. \tag{2.4}$$

Für $E \in \mathscr{P}(X)$ mit $\mu^*(E) < \infty$ wählen wir $B_i \in \mathscr{A}$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(B_i) \ < \ \mu^*(E) + \varepsilon$ und $E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$. Sei nun $A \in \mathscr{A}$, Da $\mu^*$ subbaditiv und auf $\mathscr{A}$ additiv ist erhalten wir

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\mu^*(B_i \cap A) + \mu^*(B_i \cap A^c)\Big) \overset{(2.4)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(B_i) \ < \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (2.3) und daher $A \in \mathscr{M}$.

*Schritt 2: $\mathscr{M}$ ist eine $\sigma$–Algebra.* Nach Proposition 2.16 reicht es zu zeigen, dass $\mathscr{M}$ ein Dynkinsystem und ein $\pi$–System ist. Nach Definition gilt $\emptyset, X \in \mathscr{M}$. Aus der Definition sieht man auch direkt, dass $A^c \in \mathscr{M}$, falls $A \in \mathscr{M}$.

Wir zeigen zuerst, dass $A \cup B \in \mathscr{M}$, falls $A, B \in \mathscr{M}$. Dafür schreiben wir $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ als Vereinigung zweier disjunkter Mengen. Für $E \in \mathscr{P}(X)$ erhalten wir mit der Subadditivität von $\mu$ dann

$$\begin{aligned}\mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \ &\leq \ \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ &= \ \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \ \mu^*(E).\end{aligned}$$

Für die beiden Identitäten haben wir $A, B \in \mathscr{M}$ genutzt. Nun gilt $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ und damit ist $\mathscr{M}$ ein $\pi$–System.

Es bleibt zu zeigen, dass $S := \bigcup_n A_n$, falls die Mengen $A_n \in \mathscr{M}$ disjunkt sind. Nach der obigen Rechnung gilt $S_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{M}$. Da $S^c \subset S_n^c$ und für $E \in \mathscr{P}(X)$ gilt also

$$\mu^*(E) \ = \ \mu^*(E \cap S_n^c) + \mu^*(E \cap S_n) \ \geq \mu^*(E \cap S^c) + \mu^*(E \cap S_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Da die Mengen $A_i$ disjunkt sind und da $\mu^*$ subadditiv ist, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(E \cap S_n) \ = \ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu^*(E \cap A_i) \ = \ \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) \ \geq \mu^*(E \cap S) \tag{2.6}$$

Im Limes erhalten wir $S \in \mathscr{M}$ aus (2.5)–(2.6) für $n \to \infty$.

*Schritt 3: $\mu^*$ ist $\sigma$–additiv auf $\mathscr{M}$.* Mit der Wahl $E := A \cup B$ in (2.2) erhalten wir

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \qquad \forall A, B \in \mathscr{M} \text{ mit } A \cap B = \emptyset. \tag{2.7}$$

Daher ist $\mu^*$ additiv auf $\mathscr{M}$. Sei nun $A_n \in \mathscr{A}$ eine Folge von disjunkten Mengen. Da $\mu^*$ monoton ist, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) \ \overset{(2.7)}{=} \ \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \ \leq \ \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Im Limes $n \to \infty$ erhalten wir die $\sigma$-Additivität von $\mu^*$. $\square$

Die Eindeutigkeit von Maßerweiterung wird in folgender Proposition behandelt:

**Proposition 2.18 (Eindeutigkeitskriterium).** *Seien $\mu_1$, $\mu_2$ Maße auf $(X, \mathscr{E})$ und sei $\mathscr{D} := \{A \in \mathscr{E} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Die folgenden beiden Bedingungen seien erfüllt:*

*(i) Es gibt ein $\pi$–System $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$ mit $\sigma(\mathscr{K}) = \mathscr{E}$.*

*(ii) Es gibt eine Folge $X_i \in \mathscr{E}$ mit $X_i \nearrow X$ und $\mu_1(X_i) = \mu_2(X_i) < \infty$.*

*Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{E}$.*

*Beweis.* Wir nehmen zuerst an, dass $\mu_1$, $\mu_2$ endliche Maße sind. Für $D \in \mathscr{D}$ gilt dann $\mu_1(D^c) = \mu_1(X) - \mu_1(D) = \mu_2(X) - \mu_2(D) = \mu_2(D^c)$. Daher ist $\mathscr{D}$ ein Dynkinsystem. Nach Annahme enthält $\mathscr{D}$ das $\pi$–System $\mathscr{K}$. Nach Proposition 2.16 gilt $\sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{D}$. Da $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{K}$ erhalten wir nach $\sigma$-Additivität der Maße auch $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{K})$.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wenn $\mu_1$, $\mu_2$ $\sigma$–endlich sind. Nach Voraussetzung gilt $\mu_1(X_i) = \mu_2(X_i) < \infty$ und $X_i \nearrow X$. Die Maße $\mu_1$, $\mu_2$ sind endliche Maße auf $(X_i, \mathscr{E}_i)$, wobei die $\sigma$-Algebras $\mathscr{E}_i \subset \mathscr{P}(X_i)$ gegeben sind durch $\mathscr{E}_i := \{E \in \mathscr{E} : E \subset X_i\} \subset \mathscr{P}(X_i)$. Nach Annahme gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{K}_i := \{E \in \mathscr{K} : E \subset X_i\} \subset \mathscr{K}$. Nach der vorherigen Rechnung erhalten wir $\mu_1 = \mu_2$ auf $\sigma(\mathscr{K}_i) \subset \mathscr{P}(X_i)$.

Wir betrachten nun die Mengen

$$\mathscr{F}_i := \{B \in \mathscr{P}(X) : B \cap X_i \in \sigma(\mathscr{K}_i)\}$$

Dann ist $\mathscr{F}_i$ eine $\sigma$–Algebra und $\mathscr{K} \subset \mathscr{F}_i$. Nach Proposition 2.16 gilt $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{F}_i$. Aus der $\sigma$–Algebraeigenschaft der Maße folgt also

$$\mu_1(B \cap X_i) = \mu_2(B \cap X_i) \qquad \forall B \in \mathscr{E}\ \forall i \in \mathbb{N}$$

Im Limes $i \to \infty$ ergibt dies $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{E}$. □

## 2.3 Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$

**Satz 2.19 (Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$).** *Es gibt ein eindeutiges, translationsinvariantes Maß*

$$\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty] \qquad \textit{mit} \quad \lambda([0, 1]) = 1.$$

*Dieses Maß heißt Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$.*

*Beweis. Existenz:* Sei $\lambda : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ die $\sigma$-additive Funktion auf $\mathscr{A}$. Nach Satz 2.17 induziert eine eindeutige Erweiterung $\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{A})$. Offensichtlich ist $\lambda$ $\sigma$–endlich. Für jedes $h \in \mathbb{R}$ ist auch $A \mapsto \lambda(A + h)$ eine $\sigma$–additive Erweiterung von

$\lambda|_{\mathscr{A}}$. Aus der Eindeutigkeit der Erweiterung erhalten wir, dass $\lambda$ translationsinvariant ist.

*Eindeutigkeit* In der Tat, nach Satz 2.17 ist $\lambda_n : \mathscr{M}_n \to [0,\infty]$ ein Maß. Wir erinnern uns, dass ein Maß $\mu$ Borelmaß heisst, falls alle Borelmengen $\mu$-messbar sind. $\square$

**Definition 2.20 (Regularität von Maßen).** *Sei $X$ ein metrischer Raum. Ein Borelmaß ist*

*(iv)* *von innen regulär, falls $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ kompakt } \} \; \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$*

*(v)* *von außen regulär $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ offen } \} \; \forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$.*

*(vi)* *regulär, wenn es von innen und außen regulär ist.*

*(vii)* *Ein reguläres Borelmaß, so dass $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset X$, heißt Radonmaß.*

**Proposition 2.21.** *Jedes $\sigma$–endliche Borelmaß ist regulär.*

*Beweis.* $\square$

Daraus erhalten wir insbesondere:

**Satz 2.22.** *Das Lebesguemaß ist ein Radonmaß.*

*Beweis.* $\square$

Nach Konstruktion des Lebesguemaßes folgt, dass jede abzählbare Menge eine Nullmenge ist. Ein Beispiel für eine Nullmengen, welche nicht abzählbar ist, ist die Cantormenge $C$. Diese ist wie folgt konstruiert:

Sei $I_{0,1} = [0,1]$. Wir entfernen aus $I_0$ das mittlere offene Drittel des Intervalls und erhalten die beiden kompakten Intervalle $I_{1,1} = \frac{1}{3}[0,1]$, $I_{1,2} = \frac{1}{3}[2,3]$. Aus den beiden Intervallen $I_{1,1}$, $I_{1,2}$ entfernen wir jeweils das mittlere Drittel und erhalten die vier kompakten Intervalle $I_{2,1} = \frac{1}{9}[0,1]$, $I_{2,2} = \frac{1}{9}[2,3]$, $I_{2,3} = \frac{1}{9}[6,7]$, $I_{2,4} = \frac{1}{9}[8,9]$. Induktiv erhalten wir die kompakten Intervalle $I_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k = 1,\dots,2^n$. Die Cantormenge $C \subset [0,1]$ ist definiert

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \qquad \text{wobei} \quad C_n := \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}.$$

**Lemma 2.23 (Überabzählbare Nullmenge).** *Die Cantormenge $C$ ist überabzählbar, kompakt und erfüllt $\lambda(C) = 0$.*

*Beweis.* $C$ is offenbar beschränkt und als Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossenb. Daher ist $C$ kompakt. Wir zeigen als nächstes, dass $\lambda(C) = 0$. In der Tat, $C_n$ ist die Vereinigung von $2^n$ disjunkten Intervallen der Länge $3^{-n}$ und daher $\lambda_n(C_n) = 2^n 3^{-n} = (\frac{2}{3})^n$. Aus der Monotonie des Lebesguemaßes erhalten wir also $\lambda(C) \le \lim_{n\to\infty}(C_n) = 0$. Man kann zeigen, dass $C$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist (Übungsaufgabe). Daraus folgt die Überzbzählbarkeit von $C$. □

Analog zur Definition des Lebesguesmaßes kann man auch allgemeiner $s$–dimensionale Maße konstrieren:

**Definition 2.24 ($s$–dimensionales Hausdorffmaß).** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le s < \infty$. Sei $\alpha(s) := \pi^{\frac{s}{2}}/\Gamma(\frac{s}{2}+1)$, wobei $\Gamma$ die Gamma–Funktion bezeichnet. Wir definieren*

*(i)* $\mathscr{H}^s_\delta(A) \;:=\; \inf\left\{ \sum_{j=1}^\infty \alpha(s)\left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\right)^s \;:\; A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j, \operatorname{diam} C_j \le \delta\right\}$.

*(ii)* $\mathscr{H}^s(A) \;:=\; \limsup_{s\to 0} \mathscr{H}^s_\delta(A)$.

*Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\mathscr{H}^s$–Nullmenge, falls $\mathscr{H}^s(A) = 0$.*

Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathscr{H}^s_\delta(A)$ monoton steigend für $s \to 0$, insbesondere ist der Limes $s \to 0$ wohldefiniert. Man kann zeigen, dass $\mathscr{H}^s$ ein äußeres Maß ist (Übungsaufgabe). Für $n = 1$ gilt außerdem $\mathscr{H}^1 = \mathscr{L}^1$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ (Übungsaufgabe).

# 3 Integration

## 3.1 Messbare Funktionen

Seien $(X, \mathscr{E})$, $(Y, \mathscr{F})$ messbare Räume und $f : X \to Y$. Das Urbild $f^{-1}(F)$ für $F \subset Y$ ist definiert als $f^{-1}(F) = \{x \in X : \varphi(x) \in F\}$. Man sieht leicht, dass

- $f^{-1}(F^c) = f^{-1}(F)^c$
- $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(F_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} F_i)$
- $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(F_i) = f^{-1}(\bigcap_{i\in I} F_i)$

Für eine Teilmenge $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ definieren wir entsprechend $f^{-1}(\mathscr{F}) = \{E \in \mathscr{P}(X) : f(E) \in \mathscr{F}\}$. Falls $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(Y)$ eine $\sigma$–Algebra ist, dann ist auch $f^{-1}(\mathscr{F})$ eine $\sigma$–Algebra.

**Definition 3.1 (Messbare Funktionen).** *Seien $(X, \mathscr{E})$, $(Y, \mathscr{F})$ messbare Räume.*

*(i) Dann heisst $f : X \to Y$ $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$-messbar, falls $f^{-1}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{E}$.*

*(ii) Falls $X$ ein metrischer Raum ist und $\mathscr{E} = \mathscr{B}(X)$, dann heisst $f$ Borel-messbar.*

*(iii) Falls $X = \mathbb{R}$ und $\mathscr{E} = \mathscr{M}^1$, dann heisst $f$ Lebesgue-messbar.*

Nach Definition ist $f : X \to Y$ also genau dann messbar, wenn $f^{-1}(F) \in \mathscr{E}\ \forall f \in \mathscr{F}$. Falls $\mathscr{E}, \mathscr{B} \in X$ $\sigma$-Algebren sind mit $\mathscr{E} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$, dann ist jede $\mathscr{E}$-messbare Funktion auch $\mathscr{B}$ messbar. Eine ist die charakteristische Funktion $\chi_A : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathscr{E}$–messbar, wenn $A \in \mathscr{E}$.

**Proposition 3.2.** *Seien $(X, \mathscr{E})$, $(Y, \mathscr{F})$, $(Z, \mathscr{G})$ messbare Räume. Falls $f : X \to Y$ $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$–messbar und $g : Y \to Z$ $(\mathscr{F}, \mathscr{G})$–messbar ist, dann ist $g \circ f$ $(\mathscr{E}, \mathscr{G})$–messbar.*

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition. □

Es reicht, Messbarkeit für eine hinreichend große Menge von Funktionen zu testen:

**Proposition 3.3.** *Seien $(X, \mathscr{E})$, $(Y, \mathscr{F})$ messbare Räume und sei $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ mit $\sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{F}$. Dann ist $f : X \to Y$ genau dann messbar, wenn $f^{-1}(\mathscr{G}) \subset \mathscr{E}$.*

*Beweis.* Übungsaufgabe. □

Falls $Y$ metrischer Raum ist und $\mathscr{F} = \mathscr{B}(Y)$, dann ist also $f : X \to Y$ schon messbar, wenn $f^{-1}(\Omega) \in \mathscr{E}$ für alle offenen Mengen $\Omega$. Falls $f : X \to \mathbb{R}$, dann ist $f$ schon messbar, wenn $f^{-1}([a, b))$ für alle halboffenen Intervalle der Form $[a, b)$.

Insbesondere betrachten wir den Fall von Funktionen $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$, wobei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Der Raum $\overline{\mathbb{R}}$ kann metrisiert werden mit der Metrik $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to 0$

$$d(x, y) \ = \ \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist dann $\mathscr{E}$–messbar genau dann, wenn

$$f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{E} \qquad f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{E} \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subset \mathscr{E}.$$

Für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir $f \wedge g := \min\{a, b\}$ und $a \vee b := \max\{a, b\}$. Wir schreiben auch $a_+ := 0 \vee 0$ und $a_- := -a \wedge 0$. Dann gilt $a = a_+ - a_-$ und $|a| = a_+ + a_-$. Entsprechend sind für $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ die Funktionen $f \wedge g$, $f \vee g$, $f_\pm$ punktweise definiert.

**Lemma 3.4 (Stetige Funktionen, monotone Funktionen sind borelmessbar).**

*(i) Sei $X$ ein metrischer Raum und sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig. Dann ist $f$ borelmessbar.*

*(ii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist $f$ borelmessbar.*

*(iii) Falls $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und falls $f = g$ f.ü. für $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, dann ist $f$ genau dann messbar, wenn $g$ messbar ist.*

*Beweis. (i):* Dann ist $f^{-1}(\Omega)$ offen für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$. Damit gilt $f^{-1}(\Omega) \in \mathscr{B}(X)$ für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$. Nach Proposition 3.3 ist damit $f$ borelmessbar.

*(ii):* Dann ist $f^{-1}((t, \infty))$ ein Intervall und daher eine Borelmenge. Nach Proposition **??** ist $f$ Borel-messbar.

*(iii):* Sei also $f$ messbar und es gelte $f = g$ auf $X \backslash N$ mit $\mu(N) = 0$. Sei $X$ offen. Dann gibt es zwei Mengen $N_1$, $N_2 \subset N$ mit $\mu(g^{-1}(X) = (f^{-1}(X)\backslash N_2) \cup N_1$. Da $f$ messbar ist und da der Maßraum vollständig ist, sind die Mengen $f^{-1}(X)$, $N_1$ und $N_2$ messbar und daher ist $g^{-1}(X)$ messbar. □

Sei $f$ die Dirichlet Funktion mit $f(x) = 1$ für $\forall x \in \mathbb{Q}$ und 0 sonst. Dann gilt $f = 0$ (Lebesgue) fast überall, da $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ eine Nullmenge ist. Insbesondere ist $f$ messbar.

**Proposition 3.5 (Eigenschaften messbarer Funktionen).**

*(i) Falls $f$, $g$ messbar sind, dann sind auch*

$$-f, \quad f_-, \quad f_+, \quad |f|, \quad f \wedge g, \quad f \vee g, \quad f \pm g, \quad fg, \quad f/g$$

*messbar. Wir verstehen dabei $f/g$ als eine Funktion auf $X \backslash g^{-1}(0)$.*

*(ii) Falls die Elemente der Folge $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar sind, dann sind auch*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f, \quad \limsup_{n \to \infty} f, \quad \liminf_{n \to \infty} f, \quad \lim_{n \to \infty} f$$

*messbar (falls existent).*

*Beweis.* Wir geben den Beweis in einigen Fällen, die übrigen Fälle sind Übungsaufgabe. Für den Beweis nehmen wir an, dass der Zielraum der Funktionen $\mathbb{R}$ ist, die Erweiterung des Beweisen auf den allgemeineren Fall ist einfach. Wir nutzen mehrfach, dass die Menge der messbaren Mengen $\mathscr{E}$ eine $\sigma$–Algebra ist.

*"$f \wedge g, f_+, f_-$":* Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $(f \wedge g)^{-1}((t,\infty)) = f^{-1}((t,\infty)) \cap g^{-1}((t,\infty))$ messbar. Nach Proposition 3.3 ist dann $f \wedge g$ messbar. Damit sind auch $f_+$, $f_-$ messbar.

*"$f \wedge g$":* Für $t \in \mathbb{R}$ ist $(-f)^{-1}((t,\infty)) = f^{-1}(-\infty,-t)$ messbar und daher ist $-f$ messbar.

*"$\sup_n f$":* Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$(\sup_n f)^{-1}((t,\infty)) = \bigcap_n f_k^{-1}((t,\infty))$$

als abzählbarer Durchschnitt messbarer Mengen messbar. Nach (ii) ist $\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$ messbar. Um zu sehen, dass $\limsup f_n$ messbar ist, beobachten wir dass

$$(\limsup_n f)^{-1}((t,\infty)) = \bigcap_n \bigcup_{k \geq n} f_k^{-1}((t,\infty))$$

messbar ist. Nach (ii) ist $\liminf_n f_n = -\limsup(-f_n)$ messbar.

*"$f+g$":* Wir bemerken, dass $(f+g)(x) > t$ genau dann, wenn $f(x) > q$ und $g(x) > t-q$ für ein $q \in \mathbb{Q}$. Daher ist für $t \in \mathbb{R}$ die Menge

$$(f+g)^{-1}((t,\infty)) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big( f^{-1}((q,\infty)) \cap g^{-1}((t-q,\infty))$$

messbar. Daher ist $f+g$ messbar.

*"$fg$":* Es reicht zu zeigen, dass $f^2$ messbar ist. Die Messbarkeit von $fg$ folgt dann aus der Identität $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$. Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$(f^2)^{-1}((t,\infty)) = f^{-1}(\sqrt{t},\infty) \cup f^{-1}(-\infty,-\sqrt{t})$$

messbar. Daher ist $f^2$ messbar. □

**Definition 3.6 (Einfache Funktionen).** *Seien $X, Y$ Mengen. Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst einfach, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.*

**Lemma 3.7 (Approximation durch einfache Funktionen).** *Sei $f : X \to [0,\infty]$ messbar. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge $f_j : E \to [0,\infty]$ von einfachen, messbaren Funktionen mit $f_k(x) \nearrow f(x)$ $\forall x \in E$.*

*Beweis.* Zu $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $I_{kj} := [2^{-k}(j-1), 2^{-k}j)$ für $j = 1, \ldots, k2^k$. Die Mengen $f^{-1}(I_{kj})$, $f^{-1}([k, \infty))$ sind messbar da $f$ messbar ist. Wir definieren die einfachen und messbaren Funktionen $f_k$ durch

$$f_k(x) := \begin{cases} 2^{-k}(j-1) & \text{falls } f(x) \in I_{kj} \text{ für ein } j = -k2^k, \ldots, k2^k, \\ k & \text{falls } f(x) \in [k, \infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

Beachte, dass für festes $k$ die Familie von Mengen

$$\mathscr{U}_k = \{[k, \infty), I_{kj} \text{ für } j = 0, \ldots, k2^k\}$$

eine Überdeckung von $[0, \infty]$ darstellt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Familie $\mathscr{U}_{k+1}$ eine Verfeinerung von $\mathscr{U}_k$. Daraus folgt, dass $f_k(x) \le f_{k+1}(x) \le f(x)$ für alle $x \in E$. Falls $f(x) = \infty$, dann gilt $f_k(x) = k$. Falls $f(x) < \infty$, dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x) < k_0$, Aus der Definition (3.1) folgt dann $|f(x) - f_k(x)| \le 2^{-k}$ für $k \ge k_0$ und daher $f_k(x) \to f(x)$. Dies ergibt $f_k(x) \to f(x)$. $\square$

Falls der Maßraum vollständig ist, dann hängt die Messbarkeit der Funktion nicht von ihren Werten auf einer Nullmenge ab:

**Lemma 3.8.** *Sei $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum, $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \to \overline{\mathbb{R}}^m$, $E \subset X$. dann ist $f$ genau dann messbar, wenn $f_i$, $1 \le i \le m$ messbar ist.*

*Beweis.* Wir betrachten den Fall $m = 2$. Falls $f = (f_1, f_2) : X \to \mathbb{R}^2$ messbar ist, dann gilt $f^{-1}(X \times \mathbb{R}) = f_1^{-1}(X) \in \mathscr{E}$ $\forall X \subset \mathbb{R}$ offen. damit ist $f_1$ messbar. Genauso zeigt man, dass $f_2$ messbar ist. Falls $f_1, f_2$ messbar sind, dann gilt $f^{-1}(X_1 \times X_2) \in \mathscr{E}$ für alle offenen Quader $Q$ der Form $Q = X_1 \times X_2$. Jede offene Menge $X \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich aber schreiben als $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ für offene Quader $Q_k \subset \mathbb{R}^2$. Damit gilt

$$f^{-1}(X) = (f_1, f_2)^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (f_1, f_2)^{-1}(Q_k) \in \mathscr{E}.$$

Damit ist $f$ messbar. $\square$