Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik

Björn Malte Schäfer | Anja Butter

Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

7. Übungsblatt

Ausgabe 15.12.2020 – Besprechung 11.01-14.01.2021

1. Lösung: O Multipol

(a) Wir beginnen mit den Monopolen

$$Q = \int d^3r'\ \rho(\boldsymbol{r}') \tag{1}$$

Zunächst betrachten wir ein gleichschenkliges Dreieck mit Grundseite $2a$ und Höhe h.

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{-a}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1+\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\ \rho_0 + \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{0}^{a} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\ \rho_0 && (2)\\ &= 2d\rho_0 \int_{-a}^{0} \mathrm{d}x\ h(1+\frac{x}{a}) + 2d\rho_0 \int_{0}^{a} \mathrm{d}x\ h(1-\frac{x}{a}) && (3)\\ &= 2hd\rho_0(a-\frac{a^2}{2a}) + 2hd\rho_0(a-\frac{a^2}{2a}) && (4)\\ &= 2ahd\rho_0 && (5) \end{aligned}$$

Für den Stamm des Tannenbaums $(2b \times h' \times 2d)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{-h'}^{0} \mathrm{d}y \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x\ \rho_0 && (6)\\ &= 4h'bd\rho_0 && (7) \end{aligned}$$

Für den Baum ergibt sich somit direkt

$$\begin{aligned} Q_{Baum} &= 2d\rho_0(ah + 2h'b) && (8)\\ &= d\rho_0(2\cdot 2\cdot 5 + 4\cdot 0.5\cdot 0.5) && (9)\\ &= 21d\rho_0 && (10) \end{aligned}$$

Der Stern ist zusammengesetzt aus 4 gleichseitigen Dreiecken, einem großen mit Seitenlänge $2a$ und 3 kleinen mit Seitenlänge $2a/3$ Für ein gleichseitiges Dreieck gilt $h = a\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} Q_{Stern} &= 2a\cdot a\sqrt{3}\cdot d\rho_0 + 3\cdot 2a/3\cdot a/3\cdot \sqrt{3}\cdot d\rho_0 && (11)\\ &= \frac{8}{3}\sqrt{3}\cdot a^2\cdot d\rho_0 && (12) \end{aligned}$$

(b) Als nächstes betrachten wir die Dipole.

$$\boldsymbol{P} = \int d^3r\, \boldsymbol{r}\rho(\boldsymbol{r}) \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

Für den Stern sehen wir direkt, dass der Dipol aus Symmetriegründen verschwindet, da der Dipol unter Spiegelung das Vorzeichen wechselt.
Wir müssen also nur den Baum berechnen.

$$\boldsymbol{P}_{Stamm} = \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{-h'}^{0} \mathrm{d}y \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x\, \boldsymbol{r}\rho_0 \tag{15}$$

$$= \rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{-h'}^{0} \mathrm{d}y \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{16}$$

Aus der Symmetrie von x und z folgt gleich dass die zugehörigen Dipolmomente verschwinden.

$$\boldsymbol{P}_{Stamm,y} = \rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{-h'}^{0} \mathrm{d}y \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x\, y \tag{17}$$

$$= \rho_0 2b2d(-)h'^2/2 \tag{18}$$

$$= -\rho_0 2bdh'^2 \tag{19}$$

$$\boldsymbol{P}_{Stamm} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho_0 2bdh'^2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Für das Dreieck folgt analog, dass die Dipolmomente in x und z-Richtung verschwinden.

$$\boldsymbol{P}_{Dreieck,y} = \rho_0 \left(\int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{-a}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1+\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\, y + \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{0}^{a} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\, y \right) \tag{21}$$

$$= \rho_0 2d\frac{1}{2}h^2 \left(\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x\, (1+\frac{x}{a})^2 + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x\, (1-\frac{x}{a})^2 \right) \tag{22}$$

$$= \rho_0 dh^2 \left(\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x\, 1 + \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x\, 1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right) \tag{23}$$

$$= \rho_0 dh^2 \left(a - \frac{a^2}{a} + \frac{a^3}{3a^2} + a - \frac{a^2}{a} + \frac{a^3}{3a^2} \right) \tag{24}$$

$$= \rho_0 \frac{2}{3} dah^2 \tag{25}$$

$$\boldsymbol{P}_{Baum} = 2\rho_0 d \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}ah^2 - bh'^2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

(c) Schließlich müssen wir noch die Quadrupole berechnen.

$$q_{ij} = \int d^3r' \left(r'_i r'_j - \frac{\delta_{ij} r'^2}{3} \right) \rho(\boldsymbol{r}') \ . \tag{27}$$

Beginnen wir wieder mit dem Stamm:

$$q_{ij,Stamm} = \rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{-h'}^{0} \mathrm{d}y \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x \ \left(r'_i r'_j - \frac{\delta_{ij} r'^2}{3} \right) \tag{28}$$

Für die off-diagonalen Terme, die x oder z beinhalten, sehen wir, dass das Integral auf Grund der symmetrischen Grenzen verschwindet. Damit sind alle off-diagonalen Einträge 0. Betrachten wir nun also die Diagonaleinträge.

$$\begin{aligned}
q_{ii,Stamm} &= \rho_0 \frac{1}{3} \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{-h'}^{0} \mathrm{d}y \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x \ \left(3r'^2_i - r'^2 \right) && (29)\\
q_{11,Stamm} &= \rho_0 \frac{1}{3} \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{-h'}^{0} \mathrm{d}y \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x \ \left(2x^2 - y^2 - z^2 \right) && (30)\\
&= \rho_0 \frac{1}{3} \frac{1}{3} (2dh'2 \cdot 2b^3 - 2dh'^3 2b - 2d^3 h' 2b) && (31)\\
&= \rho_0 \frac{4dh'b}{9} (2b^2 - h'^2 - d^2) && (32)\\
q_{22,Stamm} &= \rho_0 \frac{4dh'b}{9} (-b^2 + 2h'^2 - d^2) && (33)\\
q_{33,Stamm} &= \rho_0 \frac{4dh'b}{9} (-b^2 - h'^2 + 2d^2) && (34)
\end{aligned}$$

Und nun das Dreieck:

$$\begin{aligned}
q_{12,Dreieck} &= \rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \ x \int_{0}^{h(1-\frac{|x|}{a})} \mathrm{d}y \ y && (35)\\
&= 2d\rho_0 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \ x \int_{0}^{h(1-\frac{|x|}{a})} \mathrm{d}y \ y && (36)\\
&= dh^2 \rho_0 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \ x (1 - \frac{|x|}{a})^2 = 0 \ , && (37)
\end{aligned}$$

Somit ist

$$q_{12,Dreieck} = 0 \tag{38}$$

Für die übrigen off-Diagonalen finden wir über die Symmetrie des z Integrals wieder:

$$\begin{aligned}
q_{13,Dreieck} &= \rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \ z \left[\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \ x \int_{0}^{h(1-\frac{|x|}{a})} \mathrm{d}y \ 1 \right] && (39)\\
&= \rho_0 \frac{1}{2} \left[z^2 \right]_{-d}^{d} \left[\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \ x \int_{0}^{h(1-\frac{|x|}{a})} \mathrm{d}y \ 1 \right] && (40)\\
&= 0 && (41)
\end{aligned}$$

und analog

$$q_{23,Dreieck} = 0 \tag{42}$$

Für die Diagonalelemente betrachten wir

$$q_{ii} = \frac{1}{3}\rho_0 \int d^3r' \, \left(3r_i'^2 - r'^2\right) \ . \tag{43}$$

Wir berechnen daher zunächst einige Hilfsintegrale.

$$\begin{aligned}
q_x &= \frac{1}{3}\rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1+\frac{x}{a})} \mathrm{d}y \, x^2 + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y \, x^2\right] && (44)\\
&= \frac{h}{3}\rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x \, x^2(1+\frac{x}{a}) + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x \, x^2(1-\frac{x}{a})\right] && (45)\\
&= \frac{h}{3}\rho_0 2d \left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x \, x^2 + \frac{x^3}{a} + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x \, x^2 - \frac{x^3}{a}\right] && (46)\\
&= \frac{h}{3}\rho_0 2d \left[\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4a}\right]_{-a}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4a}\right]_{0}^{a}\right] && (47)\\
&= \frac{h}{3}\rho_0 2d \left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a}\right] && (48)\\
&= \frac{h}{3}\rho_0 4d \left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4}\right] && (49)\\
&= \frac{\rho_0}{9} hda \cdot a^2 && (50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_y &= \frac{1}{3}\rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1+\frac{x}{a})} \mathrm{d}y \, y^2 + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y \, y^2\right] && (51)\\
&= \frac{h^3}{9}\rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \, \left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x \, (1+\frac{x}{a})^3 + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x \, (1-\frac{x}{a})^3\right] && (52)\\
&= \frac{h^3}{9}\rho_0 2d \left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x \, 1 + 3\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x \, 1 - 3\frac{x}{a} + 3\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3}\right] && (53)\\
&= \frac{h^3}{9}\rho_0 2d \left[a - 3\frac{a^2}{2a} + 3\frac{a^3}{3a^2} - \frac{a^4}{4a^3} + a - 3\frac{a^2}{2a} + 3\frac{a^3}{3a^2} - \frac{a^4}{4a^3}\right] && (54)\\
&= \frac{h^3}{9}\rho_0 4d \left[a - 3\frac{a}{2} + a - \frac{a}{4}\right] && (55)\\
&= \frac{\rho_0}{9} hda \cdot h^2 && (56)\\
& && (57)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
q_z &= \frac{1}{3}\rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1+\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\, z^2 + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\, z^2\right] && (58)\\
&= \frac{h}{3}\rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z\, z^2 \left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x\, (1+\frac{x}{a}) + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x\, (1-\frac{x}{a})\right] && (59)\\
&= \frac{h}{9}\rho_0 2d^3 \left[a - \frac{a^2}{2a} + a - \frac{a^2}{2a}\right] && (60)\\
&= \frac{\rho_0}{9} hda \cdot 2d^2 && (61)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{11,Dreieck} &= \frac{1}{3}\rho_0 \int_{-d}^{d} \mathrm{d}z \left[\int_{-a}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1+\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\, \left(2x^2 - y^2 - z^2\right) + \int_{0}^{a} \mathrm{d}x \int_{0}^{h(1-\frac{x}{a})} \mathrm{d}y\, \left(2x^2 - y^2 - z^2\right)\right] && (62)\\
&= 2q_x - q_y - q_z && (63)\\
&= \frac{\rho_0}{9} hda \cdot (2a^2 - h^2 - 2d^2) && (64)\\
q_{22,Dreieck} &= 2q_y - q_x - q_z && (65)\\
&= \frac{\rho_0}{9} hda \cdot (2h^2 - a^2 - 2d^2) && (66)\\
q_{33,Dreieck} &= 2q_z - q_x - q_y && (67)\\
&= \frac{\rho_0}{9} hda \cdot (4d^2 - a^2 - h^2) && (68)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{ij,Dreieck} &= \frac{\rho_0}{9} hda \begin{pmatrix} 2a^2 - h^2 - 2d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2h^2 - a^2 - 2d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4d^2 - a^2 - h^2 \end{pmatrix} && (69)\\
q_{ij,Dreieck(gleichseitig)} &= \frac{\rho_0\sqrt{3}}{9} da^2 \begin{pmatrix} 2a^2 - 3a^2 - 2d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6a^2 - a^2 - 2d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4d^2 - a^2 - 3a^2 \end{pmatrix} && (70)\\
&= \frac{\rho_0\sqrt{3}}{9} da^2 \begin{pmatrix} -a^2 - 2d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 2d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4d^2 - 4a^2 \end{pmatrix} && (71)
\end{aligned}
$$

Nachdem wir das Quadrupolmoment des Dreiecks berechnet haben, können wir durch Spiegelung und Translation das Quadrupolmoment des Sterns berechnen. Der Stern lässt sich wieder als eine Zusammensetzung von 4 gleichseitigen Dreiecken betrachten. Wir erhalten das große umgekehrte Dreieck mit Seitenlänge $2a$ durch Spiegelung und Verschiebung in y-Richtung um 1/3 der Höhe also $1/3 \cdot \sqrt{3}a = \frac{1}{\sqrt{3}}a$. Die kleineren Dreicke haben die Seitenlänge $2a/3$. Sie werden ebenfalls um $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}a$ in y Richtung und 0 oder $\pm 2/3a$ in x-Richtung verschoben.

Wie Übung 5 gezeigt, ist das Quadrupolmoment invariant unter Spiegelung. Unter Translation gilt hingegen:

$$\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} \tag{72}$$

$$\boldsymbol{q}'_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij} + (s_i s_j - \frac{1}{3}|\boldsymbol{s}|^2\delta_{ij})Q \tag{73}$$

$$+ s_i P_j + s_j P_i - \frac{2}{3}\boldsymbol{s}\boldsymbol{P}\delta_{ij} \tag{74}$$

Das Dipolmoment des gleichseitigen Dreiecks ist

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho_0 2da^3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{75}$$

Mit $P_1 = P_3 = s_3 = 0$ können wir die Änderung der Quadrupolmomentes unter Translation schreiben als

$$\boldsymbol{q}'_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij} + Q\begin{pmatrix} s_1^2 - \frac{1}{3}(s_1^2+s_2^2) & s_1 s_2 & 0 \\ s_1 s_2 & s_2^2 - \frac{1}{3}(s_1^2+s_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}(s_1^2+s_2^2) \end{pmatrix} + P_2\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}s_2 & s_1 & 0 \\ s_1 & 2s_2 - \frac{2}{3}s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}s_2 \end{pmatrix} \tag{76}$$

$$= \boldsymbol{q}_{ij} + \frac{Q}{3}\begin{pmatrix} 2s_1^2 - s_2^2 & 3s_1 s_2 & 0 \\ 3s_1 s_2 & 2s_2^2 - s_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -s_1^2 - s_2^2 \end{pmatrix} + \frac{P_2}{3}\begin{pmatrix} -2s_2 & 3s_1 & 0 \\ 3s_1 & 4s_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2s_2 \end{pmatrix} \tag{77}$$

Für eine Verschiebung in y-Richtung um $s_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}a$ ergibt sich

$$\boldsymbol{q}'_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij} + \frac{Q}{3}\begin{pmatrix} 2s_1^2 - \frac{a^2}{3} & \pm\sqrt{3}s_1 a & 0 \\ \pm\sqrt{3}s_1 a & 2\frac{a^2}{3} - s_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -s_1^2 - \frac{a^2}{3} \end{pmatrix} + \frac{P_2}{3}\begin{pmatrix} \mp\frac{2}{\sqrt{3}}a & 3s_1 & 0 \\ 3s_1 & \pm\frac{4}{\sqrt{3}}a & 0 \\ 0 & 0 & \mp\frac{2}{\sqrt{3}}a \end{pmatrix} \tag{78}$$

Gilt zusätzlich $s_1 = 0$, dann ist

$$\boldsymbol{q}'_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij} + \frac{Qa^2}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\pm 2\cdot\sqrt{3}P_2 a}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{79}$$

Für $s_1 = 2/3a$, ist

$$\boldsymbol{q}'_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij} + \frac{Qa^2}{9}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \pm 2\sqrt{3} & 0 \\ \pm 2\sqrt{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} + \frac{2P_2 a}{3}\begin{pmatrix} \mp\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 \\ 1 & \pm\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{80}$$

und für $s_1 = -2/3a$, ist

$$\boldsymbol{q}'_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij} + \frac{Qa^2}{9}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \mp 2\sqrt{3} & 0 \\ \mp 2\sqrt{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} + \frac{2P_2 a}{3}\begin{pmatrix} \mp\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 \\ -1 & \pm\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{81}$$

Als nächstes können wir die Quadrupole der 3 kleinen verschobenen Dreiecken ($s_1 = 0, s_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}a), (s_1 = 2/3a, s_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}a), (s_1 = -2/3a, s_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}a$) aufsummieren. Dabei heben sich die off-diagonalen Terme auf.

$$\boldsymbol{q}'_{1,ij} + \boldsymbol{q}'_{2,ij} + \boldsymbol{q}'_{3,ij} = 3\boldsymbol{q}_{ij} + \frac{Qa^2}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2\cdot\sqrt{3}P_2 a}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{82}$$

$$+ \frac{2Qa^2}{9}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} + \frac{4P_2 a}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & & 0 \\ & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \tag{83}$$

$$= 3\boldsymbol{q}_{ij} + \frac{Qa^2}{9}\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} \end{pmatrix} + \frac{2\sqrt{3}P_2 a}{9}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

Als nächstes können wir Monopol und Dipol einsetzen, wobei wir beachten müssen, dass die-Seitenlänge statt$2a$ lediglich $2a/3$ beträgt:
$Q = \rho_0 \frac{2\sqrt{3}}{9} a^2 d$
$P_2 = \rho_0 2da^3/3^3$

$$\boldsymbol{q}'_{1,ij} + \boldsymbol{q}'_{2,ij} + \boldsymbol{q}'_{3,ij} = 3\boldsymbol{q}_{ij} + \frac{2\sqrt{3}a^4 d\rho_0}{3^5}\begin{pmatrix} 7+2 & 0 & 0 \\ 0 & 10-4 & 0 \\ 0 & 0 & -17+2 \end{pmatrix} \tag{85}$$

$$= 3\boldsymbol{q}_{ij} + \frac{2\sqrt{3}a^4 d\rho_0}{3^5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \tag{86}$$

$$= 3\frac{\rho_0\sqrt{3}}{9\cdot 9}d\frac{a^2}{3^2}\begin{pmatrix} -a^2 - 2\cdot 9d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 2\cdot 9d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 9d^2 - 4a^2 \end{pmatrix} + \frac{2\sqrt{3}a^4 d\rho_0}{3^5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \tag{87}$$

$$= \frac{\sqrt{3}a^2 d\rho_0}{3^5}\begin{pmatrix} -a^2 - 2\cdot 9d^2 + 3\cdot 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 5a^2 - 2\cdot 9d^2 + 2\cdot 2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 9d^2 - 4a^2 - 5\cdot 2a^2 \end{pmatrix} \tag{88}$$

$$= \frac{\sqrt{3}a^2 d\rho_0}{3^5}\begin{pmatrix} -2\cdot 9d^2 + 5a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\cdot 9d^2 + 9a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 9d^2 - 14a^2 \end{pmatrix} \tag{89}$$

Schließlich benötigen wir noch das Quadrupol des großen Dreiecks. Dieses wird zunächst in Richtung ($s_1 = 0, s_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}a, s_3 = 0$) verschoben und anschließend gespiegelt. Da das Quadrupolmoment invariant ist under der Spiegelung müssen wir lediglich die Translation berechnen. Dies haben wir glücklicherweise bereits getan.

$$\boldsymbol{q}'_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij} + \frac{Qa^2}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{-2\cdot\sqrt{3}P_2 a}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{90}$$

Mit $Q = \rho_0 2\sqrt{3}a^4 d$
$P_2 = \rho_0 2da^3$ folgt

$$\boldsymbol{q}'_{ij} = \boldsymbol{q}_{ij} + \frac{\rho_0 2\sqrt{3}da^4}{9}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{-4\cdot\sqrt{3}\rho_0 da^4}{9}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \tag{91}$$

$$= \boldsymbol{q}_{ij} + \frac{\rho_0 2\sqrt{3}da^4}{9}\begin{pmatrix}-1+2 & 0 & 0\\ 0 & 2-4 & 0\\ 0 & 0 & -1+2\end{pmatrix} \tag{92}$$

$$= \boldsymbol{q}_{ij} + \frac{\rho_0 2\sqrt{3}da^4}{9}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{93}$$

$$= \frac{\rho_0\sqrt{3}}{9}da^2\begin{pmatrix}-a^2-2d^2 & 0 & 0\\ 0 & 5a^2-2d^2 & 0\\ 0 & 0 & 4d^2-4a^2\end{pmatrix} + \frac{\rho_0 2\sqrt{3}da^4}{9}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{94}$$

$$= \frac{\rho_0\sqrt{3}}{9}da^2\begin{pmatrix}-a^2-2d^2+2a^2 & 0 & 0\\ 0 & 5a^2-2d^2-4a^2 & 0\\ 0 & 0 & 4d^2-4a^2+2a^2\end{pmatrix} \tag{95}$$

$$= \frac{\rho_0\sqrt{3}}{9}da^2\begin{pmatrix}a^2-2d^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2-2d^2 & 0\\ 0 & 0 & -2a^2+4d^2\end{pmatrix} \tag{96}$$

Damit können wir nun schließlich den gesamten Quadrupol des Sterns ausrechnen.

$$\boldsymbol{q}_{ij,Stern} = \frac{\rho_0\sqrt{3}}{3^5}da^2\begin{pmatrix}-2\cdot 9d^2+5a^2 & 0 & 0\\ 0 & -2\cdot 9d^2+9a^2 & 0\\ 0 & 0 & 4\cdot 9d^2-14a^2\end{pmatrix} \tag{97}$$

$$+ \frac{\rho_0\sqrt{3}}{9}da^2\begin{pmatrix}a^2-2d^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2-2d^2 & 0\\ 0 & 0 & -2a^2+4d^2\end{pmatrix} \tag{98}$$

$$= \frac{\rho_0\sqrt{3}}{3^5}da^2\begin{pmatrix}-8\cdot 9d^2+32a^2 & 0 & 0\\ 0 & -8\cdot 9d^2+36a^2 & 0\\ 0 & 0 & 16\cdot 9d^2-68a^2\end{pmatrix} \tag{99}$$

$$= \frac{\rho_0 4\cdot\sqrt{3}}{3^5}da^2\begin{pmatrix}-2\cdot 9d^2+8a^2 & 0 & 0\\ 0 & -2\cdot 9d^2+9a^2 & 0\\ 0 & 0 & 4\cdot 9d^2-17a^2\end{pmatrix} \tag{100}$$

2. Lösung: Let it glow, let it glow, let it glow

(a) Die Leuchtkraft der Sonne beträgt $S = 3,846 \cdot 10^{26}$ W. Unter der Annahme, dass die Sonne isotrop in alle Richtungen Energie abstrahlt beträgt die Strahlung auf Höhe der Erde ($r = 1,5 \cdot 10^{11}$ m)

$$s = \frac{S}{4\pi R^2} = 0,134 \text{ W/cm}^2 \tag{101}$$

Zwischen Energie und Impuls elektromagnetischer Strahlung besteht der Zusammenhang $E = ck$. Der Strahlungsdruck ergibt sich damit zu

$$s/c = 4,4 \cdot 10^{-6} \text{N/m}^2 \tag{102}$$

Um den 200 kg schweren Schlitten mit 5 m/s^2 zu beschleunigen müsste das Segel ganze

$$10^9/4,4 \text{m}^2 = 230 \text{km}^2 \tag{103}$$

umspannen - und selbst schwerelos sein. Durch Reflektion würde der Impulsübertrag verdoppelt.

(b) Die Masse eines Wasserstoffatoms beträgt $m_H = 1,67 \cdot 10^-27$ kg. Innerhalb der Zeit t erreicht ein Volumen von $V = v * t * A$ die Fläche A. Der Impuls der Teilchen in diesem Volumen beträgt $m_H * \rho * V * v$. Der Impulsübertrag pro Fläche und Zeit ergibt sich damit zu

$$m_H \cdot V \cdot v^2 \tag{104}$$

$$= (1,67 \cdot 10^{-27}) \cdot (5 \cdot 10^6) \cdot (400 \cdot 10^3)^2 \text{ kg/m}^3 \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \tag{105}$$

$$= 1,34 \cdot 10^{-9} \text{N/m}^2 \tag{106}$$

Damit liegen wir nochmal drei Größenordnungen niedriger. Ein hoffnunsgloser Fall.

(c) https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Map%3A_University_Physics_II_-_Thermodynamics_Electricity_and_Magnetism_(OpenStax)/16%3A_Electromagnetic_Waves/16.05%3A_Momentum_and_Radiation_Pressure

3. Lösung: Fourier Wonderland

(a) Die Tannenbaumfunktion lässt sich als Summer zweier Sägezahnfunktionen schreiben.

$$T(x) = (x \mod 3) \cdot \frac{1}{2} + (x \mod 1) \cdot \frac{1}{2} \tag{107}$$

(b) Für die Fourrierreihe gilt:

$$\begin{align} a_0 &= \frac{1}{3} \int_0^3 \mathrm{d}x\, T(x) \tag{108}\\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2} x^2 \right]_0^3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \tag{109}\\ &= 1 \tag{110} \end{align}$$

$$\begin{align} a_n &= \frac{2}{3} \int_0^3 \mathrm{d}x\, T(x) \cos(2\pi x \frac{n}{3}) \tag{111}\\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \mathrm{d}x\, \frac{1}{2} \left[(x \mod 3) + (x \mod 1) \right] \cos(2\pi x \frac{n}{3}) \tag{112}\\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 \mathrm{d}x\, x \cos(2\pi x \frac{n}{3}) \tag{113}\\ &+ \frac{1}{3} \int_0^1 \mathrm{d}x\, x \left[\cos(2\pi x \frac{n}{3}) + \cos(2\pi (x+1) \frac{n}{3}) + \cos(2\pi (x+2) \frac{n}{3}) \right] \tag{114}\\ &= \frac{1}{2\pi n} \left[x \sin(2\pi x \frac{n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \cos(2\pi x \frac{n}{3}) \right]_0^3 \tag{115}\\ &+ \frac{1}{2\pi n} \left[x \sin(2\pi x \frac{n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \cos(2\pi x \frac{n}{3}) \right]_0^1 \tag{116}\\ &+ \frac{1}{2\pi n} \left[x \sin(2\pi (x+1) \frac{n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \cos(2\pi (x+1) \frac{n}{3}) \right]_0^1 \tag{117}\\ &+ \frac{1}{2\pi n} \left[x \sin(2\pi (x+2) \frac{n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \cos(2\pi (x+2) \frac{n}{3}) \right]_0^1 \tag{118}\\ &= \frac{1}{2\pi n} \left[0 + \frac{3}{2\pi n} \right]_0^3 \tag{119}\\ &+ \frac{1}{2\pi n} \left[\sin(2\pi \frac{n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \left(\cos(2\pi \frac{n}{3}) - 1 \right) \right] \tag{120}\\ &+ \frac{1}{2\pi n} \left[\sin(2\pi \frac{2n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \left(\cos(2\pi \frac{2n}{3}) - \cos(2\pi \frac{n}{3}) \right) \right] \tag{121}\\ &+ \frac{1}{2\pi n} \left[\frac{3}{2\pi n} \left(1 - \cos(2\pi \frac{2n}{3}) \right) \right] \tag{122}\\ &= \frac{1}{2\pi n} \left[\sin(2\pi \frac{n}{3}) + \sin(2\pi \frac{2n}{3}) \right] \tag{123}\\ &= 0 \tag{124} \end{align}$$

Alternative Lösung: Die Funktion kann in einen geraden und ungeraden Anteil geteilt werden:

$$T(x) = (x \mod 3) \cdot \frac{1}{2} + (x \mod 1) \cdot \frac{1}{2} \tag{125}$$
$$= 1 + \left[(x \mod 1) - \frac{1}{2}\right] \cdot \frac{1}{2} + \left[(x \mod 3) - \frac{3}{2}\right] \cdot \frac{1}{2} \tag{126}$$

Auf Grund der Periodizität der Funktion können wir von -3/2 bis 3/2 integrieren. Wegen der symmetrischen Grenzen verschwindet das Integral über das Produkt von cosinus mit einer ungeraden Funktion. Das Integral über den geraden Anteil, $1 \cdot \cos(2\pi x \frac{n}{3})$, verschwindet ebenfalls, da über ein Vielfaches einer gesamten Periode integriert wird.

Nun zu den Koeffizienten b_n.

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 \mathrm{d}x\, T(x) \sin(2\pi x \frac{n}{3}) \tag{127}$$
$$= \frac{2}{3} \int_0^3 \mathrm{d}x\, \frac{1}{2} \left[(x \mod 3) + (x \mod 1)\right] \sin(2\pi x \frac{n}{3}) \tag{128}$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^3 \mathrm{d}x\, x \sin(2\pi x \frac{n}{3}) \tag{129}$$
$$+ \frac{1}{3} \int_0^1 \mathrm{d}x\, x \left[\sin(2\pi x \frac{n}{3}) + \sin(2\pi (x+1) \frac{n}{3}) + \sin(2\pi (x+2) \frac{n}{3})\right] \tag{130}$$
$$= \frac{1}{2\pi n} \left[-x \cos(2\pi x \frac{n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \sin(2\pi x \frac{n}{3})\right]_0^3 \tag{131}$$
$$+ \frac{1}{2\pi n} \left[-x \cos(2\pi x \frac{n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \sin(2\pi x \frac{n}{3})\right]_0^1 \tag{132}$$
$$+ \frac{1}{2\pi n} \left[-x \cos(2\pi (x+1) \frac{n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \sin(2\pi (x+1) \frac{n}{3})\right]_0^1 \tag{133}$$
$$+ \frac{1}{2\pi n} \left[-x \cos(2\pi (x+2) \frac{n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \sin(2\pi (x+2) \frac{n}{3})\right]_0^1 \tag{134}$$
$$= \frac{1}{2\pi n} (-3) \tag{135}$$
$$+ \frac{1}{2\pi n} \left[-\cos(2\pi \frac{n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \sin(2\pi \frac{n}{3})\right] \tag{136}$$
$$+ \frac{1}{2\pi n} \left[-\cos(2\pi \frac{2n}{3}) + \frac{3}{2\pi n} \sin(2\pi \frac{2n}{3}) - \frac{3}{2\pi n} \sin(2\pi \frac{n}{3})\right] \tag{137}$$
$$+ \frac{1}{2\pi n} \left[-1 - \frac{3}{2\pi n} \sin(2\pi \frac{2n}{3})\right] \tag{138}$$
$$= \frac{1}{2\pi n} \left[-4 - \cos(2\pi \frac{n}{3}) - \cos(2\pi \frac{2n}{3})\right] \tag{139}$$
$$= \frac{1}{2\pi n} \begin{cases} -6 \text{ für } n \mod 3 = 0 \\ -3 \text{ für } n \mod 3 = 1 \\ -3 \text{ für } n \mod 3 = 2 \end{cases} \tag{140}$$