Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 2

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 4. Mai 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Extremum mit Nebenbedingung in der Quantenmechanik*

Die Grundzustandsenergie eines quantenmechanischen Teilchens in einem quaderförmigen Kasten ist durch

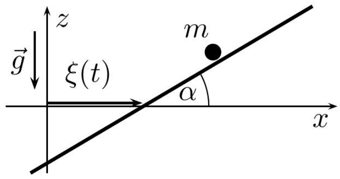
$$E(a,b,c) = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

gegeben, wobei $a, b, c > 0$ die Kantenlängen des Quaders sind, m ist die Masse des Teilchens und h das sog. Planck'sche Wirkungsquantum.

Für welche a, b, c ist bei gegebenem Volumen V die Grundzustandsenergie minimal?

2. *Massenpunkt auf schiefer Ebene*

Eine schiefe Ebene bilde mit der x-Achse den konstanten Winkel α. Die Ebene sei in x-Richtung einer langsamen äußeren Bewegung $\xi(t)$ mit $\xi(0) = 0$ und $\dot{\xi}(0) = 0$ unterworfen. Auf der Ebene kann sich ein Massenpunkt m unter dem Einfluss der Schwerkraft bewegen.



a) Formulieren Sie die zugehörige Zwangsbedingung.

b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = 0$ und $\dot{\vec{r}}(0) = 0$ mit $\vec{r} = (x, y, z)^\top$.*

c) Bestimmen Sie die auf den Massenpunkt wirkende Zwangskraft $\vec{Z}$.

3. *Bewegungsdauer einer Punktmasse*

Eine Punktmasse bewege sich unter Einfluss der Gravitationskraft $\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$ reibungsfrei auf einer Kurve der Form $z = -f(x)$.

a) Leiten Sie unter Verwendung der Energieerhaltung eine allgemeine Formel für die Dauer der Bewegung von $x = x_0$ nach $x = x_\mathrm{E}$ her, wie Sie es aus der PTP1 schon kennen.†

b) Nach welcher Zeit erreicht die Punktmasse, die bei $x_0 = 0$ startet, die Koordinaten $(x_\mathrm{E}, z_\mathrm{E}) = (1, -1)$, wenn $f(x) = x$?

4. *Verständnisfragen*

a) Formulieren Sie das d'Alembert'sche Prinzip der virtuellen Arbeit.

b) Beschreiben Sie den Weg zu den Lagrange-Gleichungen erster Art.

c) Wozu dienen Lagrange-Multiplikatoren?

---

* *Hinweis:* Benutzen Sie die Zusammenhänge $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ und $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, um die Ergebnisse möglichst einfach mit Hilfe von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ darstellen zu können.

† *Hinweis:* Sie müssen das Integral hier noch nicht lösen!