Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik

Björn Malte Schäfer — Anja Butter

Theoretische Physik III: Elektrodynamik — Wintersemester 2020/2021

9. Übungsblatt

Ausgabe 19.01.2020 – Besprechung 25.01-28.01.2021

1. Lösung: Das Licht braucht

$$t_l = \frac{x}{c} \tag{1}$$

um die Strecke x zurückzulegen.
Im System des Raumschiffs vergeht die Zeit

$$t_{RS} = \frac{x}{v\gamma}, \tag{2}$$

während das Raumschiff zu dem Stern fliegt.
Sowohl Licht als auch das Raumschiff brauchen 1 Jahr für die Strecke.

$$\frac{x}{c} = \frac{x}{v\gamma} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \beta\gamma = 1 \tag{4}$$

$$\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 \tag{5}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{6}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}c \tag{7}$$

Auf der Erde vergeht

$$\Delta t = \frac{v}{c} \tag{8}$$

$$= \frac{c \cdot 1y}{\frac{1}{\sqrt{2}}c} \tag{9}$$

$$= \sqrt{2}y \tag{10}$$

$$= 1.4y \tag{11}$$

2. Lösung:

Beide Raumschiffe fliegen im Bezugssystem des Beobachters B_0 mit jeweils $v = \frac{c}{2}$ aufeinander zu.

$$\Rightarrow v_1 = \frac{c}{2} \qquad v_2 = -\frac{c}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{12}$$

Wechseln wir nun das das Bezugssystems des Beobachters B_1 an Bord des ersten Raumschiffs. Für ihn bewegt sich das Raumschiff R_2 mit der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
v_2' &= \frac{\Delta x'}{\Delta t'} && (13)\\
&= \frac{\gamma(\Delta x - v_1 \Delta t)}{\gamma(\Delta t - \frac{v_1}{c^2}\Delta x)} \qquad \text{(Lorentz Transformation)} && (14)\\
&= \frac{\Delta x - v_1 \Delta t}{\Delta t - \frac{v_1}{c^2}\Delta x} && (15)\\
&= \frac{v_2 \Delta t - v_1 \Delta t}{\Delta t - \frac{v_1}{c^2} v_2 \Delta t} \qquad \text{(Geschwindigkeit in System } B_0 \text{ eingesetzt)} && (16)\\
&= \frac{v_2 - v_1}{1 - v_1 v_2 / c^2} && (17)\\
&= \frac{-\frac{c}{2} - \frac{c}{2}}{1 + \frac{1}{2^2}} && (18)\\
&= -\frac{4c}{5} && (19)
\end{aligned}$$

Die Länge L' des anderen Raumschiffs ist somit

$$\begin{aligned}
L' &= \frac{L_0}{\gamma} && (20)\\
&= L_0 \sqrt{1 - \beta^2} && (21)\\
&= L_0 \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} && (22)\\
&= \frac{3}{5} L_0 && (23)
\end{aligned}$$

3. Lösung:

Eine Rakete bewegt sich zunächst mit Impuls und Geschwindigkeit (p_i, v_i) und später mit $(p_f = 4p_i, v_f = 4v_i)$.

$$\begin{aligned}
4 &= \frac{p_f}{p_i} && (24)\\
&= \frac{\gamma_f m v_f}{\gamma_i m v_i} && (25)\\
&= \frac{2\gamma_f}{\gamma_i} && (26)\\
&= \frac{2\sqrt{1 - \left(\frac{v_i}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2v_i}{c}\right)^2}} && (27)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4(1-\left(\frac{2v_i}{c}\right)^2) = 1-\left(\frac{v_i}{c}\right)^2 \tag{28}$$

$$3 = 15\left(\frac{v_i}{c}\right)^2 \tag{29}$$

$$\frac{v_i}{c} = \frac{1}{\sqrt{5}} \tag{30}$$

4. Lösung:

(a) Wir betrachten nur das erste Viertel der Reise, also das erste Jahr gemessen im Bezugssystem der Rakete. Die Beschleunigung wird ebenfalls im System der Rakete gemessen und beträgt

$$\frac{g}{c} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\psi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau} \tag{31}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\tanh(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau} \tag{32}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2(\psi)}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau} \tag{33}$$

$$\approx \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\tau} \tag{34}$$

Hier geht ein, dass es sich nur um eine infinitesimale Geschwindigkeitsänderung handelt

$$\Rightarrow \mathrm{d}\psi = \frac{g}{c}\mathrm{d}\tau \tag{35}$$

Mit $\psi(0) = 0$ können wir nun ψ nach einem Jahr berechnen.

$$\psi = \frac{g}{c}\int_0^\tau \mathrm{d}\tau' = \frac{g}{c}\tau \tag{36}$$

Auf der Erde vergeht dagegen die Zeit

$$t = \int_0^\tau \cosh(\psi(\tau'))\mathrm{d}\tau' \tag{37}$$

$$= \int_0^\tau \cosh(\frac{g}{c}\tau')\mathrm{d}\tau' \tag{38}$$

$$= \frac{c}{g}\sinh(\frac{g}{c}\tau) \tag{39}$$

$$= 1.187y \tag{40}$$

Insgesamt vergeht somit die Zeit $4t = 4.748y$

(b) Die maximale Distanz ist gegeben durch

$$x_1 = \int_0^{t_1} v(t)\mathrm{d}t \tag{41}$$

$$= \int_0^{\tau_1} \cosh(\psi(\tau'))v(\tau')\mathrm{d}\tau' \tag{42}$$

$$= c\int_0^{\tau_1} \cosh(\frac{g}{c}\tau')\beta(\tau')\mathrm{d}\tau' \tag{43}$$

$$= c\int_0^{\tau_1} \sinh(\frac{g}{c}\tau')\mathrm{d}\tau' \qquad (\beta = \sinh / \cosh) \tag{44}$$

$$= \frac{c^2}{g}(\cosh(\frac{g}{c}\tau) - 1) \tag{45}$$

$x_1 = 0.563\mathrm{ly} \Rightarrow 2x_1 = 1.126\mathrm{ly}$

5. Lösung:

(a) Wir können zunächst die Lorentz-transformation durch die Rapiditäten ausdrücken.

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi & 0 & 0 \\ -\sinh\psi & \cosh\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Damit ist

$$\Lambda(\psi_1)^\mu{}_\alpha \Lambda(\psi_2)^\alpha{}_\nu = \begin{pmatrix} c\psi_1 c\psi_2 + s\psi_1 s\psi_2 & -c\psi_1 s\psi_2 - c\psi_2 s\psi_1 & 0 & 0 \\ -c\psi_1 s\psi_2 - c\psi_2 s\psi_1 & c\psi_1 c\psi_2 + s\psi_1 s\psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh(\psi_1 + \psi_2) & -\sinh(\psi_1 + \psi_2) & 0 & 0 \\ -\sinh(\psi_1 + \psi_2) & \cosh(\psi_1 + \psi_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Lambda(\psi_1 + \psi_2)^\mu{}_\nu \tag{48}$$

Da $\psi \in \mathbb{R}$ bilden Boosts entlang einer Achse eine Untergruppe der Lorentzgruppe isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$

(b)

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma} \tag{49}$$

$$-\frac{E'_x}{c} = F'^{01} = \Lambda^0{}_\rho \Lambda^1{}_\sigma F^{\rho\sigma} \tag{50}$$
$$= \Lambda^0{}_0 \Lambda^1{}_1 F^{01} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^1{}_0 F^{10} \tag{51}$$
$$= \frac{\gamma^2 v^2}{c^2}\frac{E_x}{c} - \gamma^2 \frac{E_x}{c} = -\frac{E_x}{c} \tag{52}$$
$$-\frac{E'_y}{c} = F'^{02} = \Lambda^0{}_\rho \Lambda^2{}_\sigma F^{\rho\sigma} \tag{53}$$
$$= \Lambda^0{}_0 \Lambda^2{}_2 F^{02} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^2{}_2 F^{12} \tag{54}$$
$$= -\gamma \frac{E_y}{c} + \gamma \frac{v}{c} B_z = -\frac{\gamma}{c}(E_y - vB_z) \tag{55}$$
$$-\frac{E'_z}{c} = F'^{03} = \Lambda^0{}_\rho \Lambda^3{}_\sigma F^{\rho\sigma} \tag{56}$$
$$= \Lambda^0{}_0 \Lambda^3{}_3 F^{03} + \Lambda^0{}_1 \Lambda^3{}_3 F^{13} \tag{57}$$
$$= -\gamma \frac{E_z}{c} - \gamma \frac{v}{c} B_y = -\frac{\gamma}{c}(E_z + vB_y) \tag{58}$$
$$-B'_x = F'^{32} = \Lambda^3{}_\rho \Lambda^2{}_\sigma F^{\rho\sigma} \tag{59}$$
$$= \Lambda^3{}_3 \Lambda^2{}_2 F^{32} \tag{60}$$
$$= -B_x \tag{61}$$
$$-B'_y = F'^{13} = \Lambda^1{}_\rho \Lambda^3{}_\sigma F^{\rho\sigma} \tag{62}$$
$$= \Lambda^1{}_1 \Lambda^3{}_3 F^{13} + \Lambda^1{}_0 \Lambda^3{}_3 F^{03} \tag{63}$$
$$= -\gamma B_y - \gamma \frac{v}{c^2} E_z \tag{64}$$
$$-B'_z = F'^{21} = \Lambda^2{}_\rho \Lambda^1{}_\sigma F^{\rho\sigma} \tag{65}$$
$$= \Lambda^2{}_2 \Lambda^1{}_1 F^{21} + \Lambda^2{}_2 \Lambda^1{}_0 F^{20} \tag{66}$$
$$= -\gamma B_z + \frac{v}{c^2} E_y \tag{67}$$

(c) Im Inertialsystem S_1 ist

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r = \frac{q}{4\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{68}$$

Aus b) folgt, dass in S_2

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ \gamma y \\ \gamma z \end{pmatrix}, \tag{69}$$

da $\boldsymbol{B} = 0$. Die Koordinaten von S_2 sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{70}$$

sodass

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi} \frac{\gamma}{(\gamma^2[x'+vt']^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x'+vt' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{71}$$

Für das $\boldsymbol{B}$-Feld gilt mit b)

$$\boldsymbol{B} = \frac{q}{4\pi}\frac{\gamma\beta/c}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}0\\E_z\\-E_y\end{pmatrix} \tag{72}$$

$$= \frac{q}{4\pi}\frac{\gamma\beta/c}{(\gamma^2[x'+vt']^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}0\\E_z\\-E_y\end{pmatrix} \tag{73}$$

(d) Im Koordinatensystem S_2 geht das elektrische Feld von dem Punkt $\boldsymbol{x}' = (-vt', 0, 0)$ aus, an dem die Ladung sitzt. Für $t' = 0$ zeigt das feld entlang $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$. Es folgt für $t' = 0$:

$$\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2 = (\gamma^2-1)x'^2 + \boldsymbol{r}'^2 \tag{74}$$

$$= \frac{v^2\gamma^2}{c^2}x'^2 + \boldsymbol{r}'^2 \tag{75}$$

$$= \left(\frac{v^2\gamma^2}{c^2}\cos^2\theta + 1\right)\boldsymbol{r}'^2 \tag{76}$$

$$= \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)\boldsymbol{r}'^2 \tag{77}$$

$$\tag{78}$$

so dass

$$\boldsymbol{E}' = \frac{q}{4\pi r'^2}\frac{1}{\gamma^2(1-v^2\sin^2\theta/c^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{e}}_r \tag{79}$$

Das Feld ist daher nicht isotrop, sondern in x'-Richtung (für $\theta = 0$) schwächer und in y' und z'-Richtung ($\theta = \pi/2$) stärker.

6. Lösung: Ein Boost entlang der y-Achse kann geschrieben werden als

$$\Lambda_y^B(\psi) = \begin{pmatrix}\cosh\psi & 0 & -\sinh\psi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sinh\psi & 0 & \cosh\psi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{80}$$

und der Boost entlang der x-Achse $\Lambda_x^B(\psi)$ ist in 9.5 a) gegeben. Damit ist

$$\Lambda_x^B(\psi)\Lambda_y^B(\psi)\Lambda_x^B(-\psi)\Lambda_y^B(-\psi) = \begin{pmatrix}c^4-2c\cdot s^2 & (c^2-1)c\cdot s & -s(-c^3+c^2+s^2) & 0\\ s(-c^3+c^2+s^2) & c(c-s^2) & -(c-2)c\cdot s^2 & 0\\ -(c-1)c\cdot s & -s^2 & c(c-s^2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{81}$$

Wenn man das Resultat um $\psi = 0$ entwickelt, ($\rightarrow c = 1 + \psi^2/2 + \ldots, s = \psi + \ldots$) folgt

$$\Lambda_x^B(\psi)\Lambda_y^B(\psi)\Lambda_x^B(-\psi)\Lambda_y^B(-\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \psi^2 & 0 \\ 0 & -\psi^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots \tag{82}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots \tag{83}$$

da $\psi \approx \beta$ für $\psi \ll 1$. Dies entspricht einer Drehung um die z-Achse mit WInkel $-\psi^2 \ll 1$:

$$\Lambda_z^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\psi^2) & -\sin(-\psi^2) & 0 \\ 0 & \sin(-\psi^2) & \cos(-\psi^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \psi^2 & 0 \\ 0 & -\psi^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots \tag{85}$$

Diese Transformation ist also eine Drehung und kein Boost, sodass Boosts entlang verschiedener Achsen keine Gruppe bilden können. Im Limit $\beta \rightarrow 0$ (nicht relativistische Geschwindigkeit ist $\Lambda_x^B(\psi)\Lambda_y^B(\psi)\Lambda_x^B(-\psi)\Lambda_y^B(-\psi) = 1$, sodass die Hintereinanderausführung der Boosts dem Einheitselement entspricht, das wiederum in der Gruppe liegt.