

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} E + \lambda \vec{\nabla} V &= 0 \\ -2 \cdot \frac{h^2}{8m} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^3} \\ \frac{1}{b^3} \\ \frac{1}{c^3} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} \lambda bc \\ \lambda ac \\ \lambda ab \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{h^2}{4m} \frac{1}{a^3} \\ \frac{h^2}{4m} \frac{1}{b^3} \\ \frac{h^2}{4m} \frac{1}{c^3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir

$$\lambda = \frac{h^2}{4m} \frac{1}{abc} \frac{1}{a^2}$$

In die zweite Zeile eingesetzt folgt

$$\begin{aligned}\frac{h^2}{4m} \frac{1}{abc} \frac{1}{a^2} ac &= \frac{h^2}{4m} \frac{1}{b^3} \\ b^2 &= a^2\end{aligned}$$

Analog kann man schlussfolgern

$$c^2 = a^2$$

Da negative Seitenlängen wenig Sinn ergeben, muss es sich bei dem Quader um einen Würfel handeln.

Aufgabe 2

Da die Masse sich nur auf der schiefen Ebene aufhält, muss folgende Zwangsbedingung gelten:

$$f = z \cdot \cos(\alpha) - (x - \xi) \sin(\alpha) = 0$$

Da wir dies später noch benötigen werden, bilden wir gleich auch noch die zweite Ableitung:

$$\ddot{f} = \ddot{z} \cdot \cos(\alpha) - (\ddot{x} - \ddot{\xi}) \sin(\alpha) = 0$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}0 &= F_x - m\ddot{x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = -m\ddot{x} - \lambda \sin(\alpha) \\ 0 &= F_z - m\ddot{z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = -mg_z - m\ddot{z} + \lambda \cos(\alpha)\end{aligned}$$

Wir stellen die erste Gleichung nach λ um und erhalten:

$$\lambda = -\frac{m\ddot{x}}{\sin(\alpha)}.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung kann man sofort m kürzen und erhält:

$$\ddot{z} = -\frac{\ddot{x} \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - g_z$$

Nun stellen wir die zweite Ableitung der Zwangsbedingung nach \ddot{z} um:

$$\ddot{z} = (\ddot{x} - \ddot{\xi}) \cdot \tan(\alpha).$$

Eingesetzt in unser obiges Ergebnis erhalten wir nun eine Gleichung für \ddot{x} .

$$\begin{aligned} -\frac{\ddot{x} \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - g_z &= (\ddot{x} - \ddot{\xi}) \cdot \tan(\alpha) \\ \ddot{\xi} \cdot \tan(\alpha) - g_z &= \ddot{x} \left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right) \\ \ddot{\xi} \cdot \sin^2(\alpha) - g_z \sin(\alpha) \cos(\alpha) &= \ddot{x} (\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) \\ \ddot{x} &= \ddot{\xi} \cdot \sin^2(\alpha) - g_z \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Wegen $\dot{x}(0) = 0$ führt Integration auf

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cdot \sin^2(\alpha) - g_z \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cdot t$$

Wegen $x(0) = 0$ führt Integration auf

$$x = \xi \cdot \sin^2(\alpha) - \frac{1}{2} g_z \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cdot t^2$$

Mithilfe der Zwangsbedingung folgt unmittelbar

$$z = \left(\xi \cdot \sin^2(\alpha) - \frac{1}{2} g_z \sin(\alpha) \cos(\alpha) \cdot t^2 - \xi \right) \cdot \tan(\alpha)$$

Für die Zwangskraft gilt dann:

$$\begin{aligned} \vec{Z} &= \lambda \cdot \vec{\nabla} f \\ &= m(g \cos(\alpha) - \ddot{\xi} \sin(\alpha)) \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ 0 \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Es gilt der Energiesatz:

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{2}(\dot{x}^2) - m g f(x) &= E \\
 \dot{x}^2 + \dot{z}^2 &= \frac{2}{m}(E + m g f(x)) \\
 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dt}\right)^2 &= \frac{2}{m}(E + m g f(x)) \\
 \left(1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= \frac{2}{m}(E + m g f(x)) \\
 \left(\frac{dx}{dt}\right) &= \sqrt{\frac{\frac{2}{m}(E + m g f(x))}{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}}
 \end{aligned}$$

Analog zu letztem Semester erhalten wir

$$\Delta t = \int_{x_0}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{\frac{\frac{2}{m}(E + m g f(x))}{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}}}$$

(b) Hier ist nun $f(x) = x$, $E = 0$, $x_0 = 0$ und $x_E = 1$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \Delta t &= \int_{x_0}^{x_E} \frac{dx}{\sqrt{g f(x)}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{g}} \sqrt{x} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{2}{\sqrt{g}}
 \end{aligned}$$