Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2022

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. K. Hübner
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 7
Abgabe: *Freitag, 10.06.2022, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Dualität von Homologie und Kohomologie (Abschnitt 3.15)). (**4 Punkte**)
Sei G eine (abstrakte) Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Für $A \in \mathtt{Ab}$ sendet der Funktor $\mathrm{Hom}(-,A)\colon G\text{-}\mathtt{Mod} \to G\text{-}\mathtt{Mod}$ induzierte Moduln auf koinduzierte Moduln.

(b) Der Funktor $(-)^* := \mathrm{Hom}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})\colon G\text{-}\mathtt{Mod} \to G\text{-}\mathtt{Mod}$ is exakt.

(c) Für $A \in G\text{-}\mathtt{Mod}$ und $n \geq 0$ ist $\mathrm{H}_n(G,A)^* \cong \mathrm{H}^n(G,A^*)$.

Aufgabe 2 (Tate-Kohomologie). (**4 Punkte**)
Sei G eine endliche Gruppe.

(a) (Dimensionsverschiebung) Für einen G-Modul A betrachten wir die G-Moduln $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ aus Aufgabe 4 auf Blatt 6. Zeigen Sie, dass $\hat{\mathrm{H}}^n(G,A_i) \cong \hat{\mathrm{H}}^{n+i}(G,A)$ für alle $n,i \in \mathbb{Z}$.

(b) (Shapiro-Lemma) Sei H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass ein kanonischer Isomorphismus

$$\hat{\mathrm{H}}^*(G,\mathrm{Koind}_H^G(-)) \cong \hat{\mathrm{H}}^*(H,-)$$

von δ-Funktoren auf der Kategorie der H-Moduln existiert.

Aufgabe 3 (Endliche Tate-Kohomologiegruppen). (**4 Punkte**)
Seien G eine endliche Gruppe, $I_G = \ker(\varepsilon\colon \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z})$ ihr Augmentationsideal und A ein endlich erzeugter G-Modul. Zeigen Sie:

(a) Die abelschen Gruppen A und I_G sind endlich erzeugt.

(b) Die abelschen Gruppen $I_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(I_G,A)$ sind ebenfalls endlich erzeugt.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist $\hat{\mathrm{H}}^n(G,A)$ endlich.
Hinweis: Benutzen Sie die Dimensionsverschiebung aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (Kohomologiering zyklischer Gruppen). (**4 Punkte**)
Sei C_n eine zyklische Gruppe von Ordnung $n \geq 2$. Ferner sei $\chi \in \mathrm{H}^2(C_n,\mathbb{Z})$ ein Erzeuger. Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus

$$\phi\colon \mathrm{H}^*(C_n,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}[X]/(nX)$$

von *graduierten* Ringen mit $\phi(\chi) = X$ existiert (wobei $|X| = 2$).