Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

6 3/4. Übungsblatt

Aufgabe 21 (Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung, 2 Bonuspunkte).
Sei $X \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ eine Exponential-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$ mit Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\mathbb{f}(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweisen Sie die sogenannte **Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung**:

$$\mathbb{P}(X \geq s+t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t) \qquad \forall s,t \in \mathbb{R}^+.$$

Aufgabe 22 (Diskrete Faltung, Poisson-Verteilung 2 + 1 = 3 Bonuspunkte).
Wir zeigen nun die Behauptung aus Beispiel 17.09 in zwei Schritten.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Poi}_{\lambda_1} \star \mathrm{Poi}_{\lambda_2} = \mathrm{Poi}_{\lambda_1+\lambda_2}$ gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+_{\setminus 0}$.

(b) Sei $\mathbb{P}$ ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_0 \star \delta_0 = \mathbb{P}_0$ gilt, wobei δ_0 das Punktmaß in 0 ist.

Mit Aufgabenteil (a) und (b) folgt dann, dass $\mathrm{Poi}_{\lambda_1} \star \mathrm{Poi}_{\lambda_2} = \mathrm{Poi}_{\lambda_1+\lambda_2}$ gilt für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$.

Aufgabe 23 (Multiplikative Faltung, 3 Bonuspunkte).
Seien X und U zwei unabhängige stetig-verteilte reelle Zufallsvariablen mit Dichten $\mathbb{f}^U, \mathbb{f}^X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass dann $Y = XU$ stetig-verteilt mit Dichte

$$\mathbb{f}^Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}^X(x)\mathbb{f}^U(y/x)|x|^{-1}dx, \quad y \in \mathbb{R},$$

ist.
Hinweis: Beginnen Sie mit Zerlegung $\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(XU \leq y, X > 0) + \mathbb{P}(XU \leq y, X < 0)$ für $y \in \mathbb{R}$ und rechnen Sie von dort aus weiter.

Aufgabe 24 (Gamma und Beta-Verteilung, 5 = 1 + 2 + 1 + 1 Bonuspunkte).
In Beispiel 17.11 der Vorlesung wurde die Dichte der Gamma-Verteilung $\Gamma_{(\lambda,p)}$ für $\lambda, p \in \mathbb{R}^+_{\setminus 0}$ definiert als

$$\mathbb{f}_{\Gamma_{(\lambda,p)}}(x) := \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\Gamma(p) := \int_0^\infty t^{p-1}\exp(-t)dt$ die Gammafunktion ist. Für diese gilt $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{f}_{\Gamma_{(\lambda,p)}}$ in der Tat eine Dichte ist.

(b) Sei für $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+_{\setminus 0}$ die zwei unabhängige reellen Zufallsvariablen $G_1 \sim \Gamma_{(1,p_1)}$ und $G_2 \sim \Gamma_{(1,p_2)}$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Dichte von G_2/G_1 gegeben ist durch

$$\mathbb{f}_{G_2/G_1}(y) = \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} y^{p_2-1}(y+1)^{-p_1-p_2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y).$$

(c) Zeigen Sie mittels Aufgabenteil (b), dass $B_{p_1,p_2} := \frac{G_1}{G_1+G_2}$ die Dichte

$$\mathbb{f}_{B_{p_1,p_2}}(x) = \frac{\Gamma(p_1+p_2)}{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)} x^{p_1-1}(1-x)^{p_2-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

hat. Die Verteilung von $B_{(p_1,p_2)}$ ist unter dem Namen *Beta-Verteilung* bekannt.

(d) Zeigen Sie, dass $\Gamma_{(\lambda,p_1)} \star \Gamma_{(\lambda,p_2)} = \Gamma_{(\lambda,p_1+p_2)}$ für alle $\lambda, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+_{\setminus 0}$.

Aufgabe 25 (Chi-Quadrat- und t-Verteilung, 4 = 1 + 1 + 2 Bonuspunkte).

Sei $Z_0, Z_1, \ldots, Z_k$ unabhängige $\mathrm{N}_{(0,1)}$-verteilte Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie, dass die reelle Zufallsvariable $S_k := \sqrt{k^{-1}\sum_{j\in[\![k]\!]} Z_j^2}$ stetig-verteilt ist mit Dichte

$$\mathbb{f}_{S_k}(y) = \frac{(k/2)^{k/2}}{\Gamma(k/2)} 2y^{k-1}\exp(-ky^2/2)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable Z_0/S_k stetig verteilt ist mit Dichte

$$\mathbb{f}_{Z_0/S_k}(y) = \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma(k/2)}\left(1+\frac{y^2}{k}\right)^{-(k+1)/2}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 26 (Maximum-Likelihood-Schätzer, 3 Bonuspunkte).

Seien $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{Poi}_\lambda$ unabhängige und identisch Poisson-verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Die Zähldichte der Poisson-Verteilung mit Parameter λ ist gegeben durch

$$\mathbb{p}(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda) \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}_n$ von $\lambda \in \mathbb{R}^+$ basierend auf $X_1, \ldots, X_n$ durch $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ gegeben ist.
Bemerkung: *Betrachten Sie den Fall* $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$ *separat.*

Aufgabe 27 (Statistische Tests, 2 + 1 + 1.5 + 1 + 1.5 = 7 Bonuspunkte).

Wir untersuchen die Länge ausgewachsener Karpfen. Aufgrund langjähriger Untersuchungen nehmen wir in unserem Modell an, dass die Länge X eines ausgewachsenen Karpfens stetig Laplace(μ_0, b)-verteilt ist mit festem und bekanntem Mittelwert $\mu_0 = 50$ cm und unbekanntem Skalenparameter b, d.h. $X \sim \text{Laplace}(\mu_0, b) =: \mathbb{P}_b$. Die Dichte einer Laplace(μ_0, b)-Verteilung lautet

$$\mathbb{f}_{\mu_0,b}(x) = \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu_0|}{b}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ein Forscher stellt die Hypothese auf, dass $b = b_0 = 7$ cm gilt. Wir denken, dass der Skalenparameter b größer als 7 cm ist und fangen zur Untermauerung unserer Aussage unabhängig voneinander $n = 10$ ausgewachsene Karpfen. Wir erhalten folgende Längen (in cm):

56	55	36	42	69	49	64	42	45	44

(a) Sei zunächst $b_1 > b_0$ fest gewählt. Formulieren Sie den Neyman-Pearson-Test $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ für die $\mathbb{P}_b$-Verteilung zu den Hypothesen

$$H_0 : b = b_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : b = b_1$$

zum Niveau $\alpha \in (0,1)$. Zeigen Sie, dass der Test von der Form

$$\varphi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1, & T_n := \sum_{i=1}^n |X_i - \mu_0| > c^*, \\ 0, & T_n \leq c^*, \end{cases}$$

mit geeignet gewähltem c^* ist.

(b) Begründen Sie, warum φ aus (a) auch ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α für die Hypothesen

$$H_0 : b = b_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : b > b_0$$

ist.

(c) Es ist bekannt, dass für $X_1 \sim \text{Laplace}(\mu_0, b)$ gilt: $2\frac{|X_1 - \mu_0|}{b} \sim \chi_2^2$ (Chi-Quadrat-Verteilung mit 2 Freiheitsgraden).
Berechnen Sie damit den Wert c^* des Tests aus (a) und geben Sie das Testresultat zum Niveau $\alpha = 0.05$ für unsere Beobachtungen an.
Hinweis: *Hier sind einige α Quantile $\chi^2_{n,\alpha}$ der χ^2_n-Verteilung:*
$\chi^2_{2,0.05} = 0.10, \chi^2_{2,0.95} = 5.99, \chi^2_{20,0.05} = 10.85, \chi^2_{20,0.95} = 31.41.$

(d) Begründen Sie, warum φ auch ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α für die Hypothesen

$$H_0' : b \leq b_0 \quad \text{gegen} \quad H_1' : b > b_0$$

ist.
Bemerkung: *Für das c^* aus (c) gilt $c^* = \frac{b_0}{2} q$ für ein geeignetes Quantil q.*

(e) Geben Sie einen gleichmäßig besten Konfidenzbereich zum Niveau $1 - \alpha$ für die falschen Parameter $F_b = (0, b)$ an.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **11. Januar 2021, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`