Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

2. Übungsblatt

Ausgabe 10.11.2020 – Besprechung 16.-19.11.2020

Verständnisfragen

- Wie hängt das Superpositionsprinzip mit der Linearität der Maxwell-Gleichungen zusammen?
- Warum hat nur im statischen Fall das elektrische Potenzial die Interpretation einer Energie/Ladung? Gibt es im dynamischen Fall keine Energieerhaltung mehr?
- Was ist der Unterschied zwischen $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{E}$? Warum ist die Rotation von $\boldsymbol{H}$ in den Maxwell-Gleichungen abhängig von $\boldsymbol{D}$ statt $\boldsymbol{E}$?
- In der Vorlesung wurde die Energiedichte des elektrischen Feldes $W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\ \rho(\boldsymbol{r})\Phi(\boldsymbol{r})$ berechnet. Wie ändert sich die Energiedichte in Materie?
- Warum stehen E-Feldlinien senkrecht auf den Äquipotentiallinien?
- Woher kommt das Minus bei der Dualitätstransformation ($\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{E}$) ?
- Wenn die Lichtgeschwindigkeit einheitenlos ist $c = 1$, wie lang ist dann eine Sekunde in Metern?

1. Aufgabe: Delta Distribution

(a) Berechnen Sie die zweite Ableitung von $g(x) = x\theta(x)$, wobei $\theta(x)$ die Heaviside Sprungfunktion ist.

(b) Zeigen Sie für $a \neq 0$ die Beziehung

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}\,.$$

(c) Verallgemeinern Sie das Ergebnis aus (a) für eine Funktion $f(x)$ mit endlich vielen Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ zu

$$\delta\left(f(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}\,.$$

(d) Die Dirac'sche δ-Funktion kann als Grenzfunktion einer Funktionenschar δ_ϵ verstanden werden:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(x)\,.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Funktionenscharen

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{für } |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\epsilon}}$$

Funktionen vom δ-Typ sind, also für $\epsilon \to 0$ gegen die Dirac'sche δ-Funktion konvergieren.

2. Aufgabe: Ladungsverteilungen

Drücken Sie die folgenden Ladungsverteilungen mit Hilfe der Delta- und Heaviside-Funktion (θ - Funktion) in den angegebenen Koordinaten aus:

(a) Eine Punktladung an der Stelle (r_0, ϕ_0, θ_0) in Kugelkoordinaten.

(b) Eine Ladung Q, die gleichmäßig auf einer Kugeloberfläche mit Radius R verteilt ist in Kugelkoordinaten.

(c) Eine Ladung Q, die gleichmäßig auf der Oberfläche einer unendlich dünnen Scheibe mit Radius R verteilt ist in Zylinderkoordinaten.

(d) Für die Oberfläche eines Zylinders der Länge $2a$ auf der pro Längeneinheit eine Ladung Q gleichmäßig verteilt ist in Zylinderkoordinaten.

3. Aufgabe: Der ∇-Operator in Kugelkoordinaten

(a) Zeigen Sie, dass der ∇-Operator in sphärischen Polarkoordinaten

$$\boldsymbol{x} = r \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \,,$$

wobei $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ den Einheitsvektor in $i-$Richtung bezeichnet.
Hinweis: Verwenden Sie, dass

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{e}}_r &= \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \,, \\
\hat{\boldsymbol{e}}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \,, \\
\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi &= -\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \,,
\end{aligned}$$

und die Kettenregel.

(b) Sei

$$\boldsymbol{V}(x) = f(r,\theta,\phi)\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

ein Vektorfeld, wobei $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ der Einheitsvektor in radialer Richtung ist. Verwenden Sie den in (a) gefundenen Ausdruck für $\boldsymbol{\nabla}$ um die Rotation des Vektorfeldes zu bestimmen. Unter welcher Bedingung an $f(\boldsymbol{r})$ wird das Feld rotationsfrei?