Aufgabe 35

$g = 1 - e^{2\pi i \frac{1}{x}}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}^\times$ als Komposition holomorpher Funktionen. Es gilt

$$1 - e^{2\pi i \frac{1}{\frac{1}{n}}} = 1 - e^{2\pi i n} = 1 - e^0 = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Das ist allerdings kein Widerspruch zum Identitätssatz, da $\mathbb{C}^\times$ kein Gebiet ist.

Aufgabe 36

Sei zunächst $N = \{z \in \mathbb{C} | f(z) = 0\}$. Wir betrachten nun die Funktion $h(z) = \frac{|g(z)|}{|f(z)|}$. h ist also holomorph und beschränkt (wegen $|g(z)| \leq |f(z)|$) für alle $z \in \mathbb{C} \backslash N$. Besitzt N einen Häufungspunkt, so ist nach Identitätssatz $f \equiv 0$ und daher $g \equiv 0 = 0 \cdot f$. Hat N hingegen keinen Häufungspunkt, so gibt es zu jedem Punkt $z_0 \in N$ eine offene Kreisscheibe $K_r(z_0)$ mit Radius r, in der kein anderer Punkt aus N liegt. Auf $K_r(z_0)$ ist nun h beschränkt und holomorph, sodass sich h analog zu Aufgabe 24c auf $K_r(z_0)$ holomorph und insbesondere stetig fortsetzen lässt. Damit ist $h(z_0)$ ebenfalls ≤ 1. Dies lässt sich für alle $z_0 \in N$ durchführen und somit erhalten wir, dass h sich auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzen lässt und dabei immer noch durch 1 beschränkt bleibt. Nach dem Satz von Liouville ist also $h \equiv c$ konstant. Also ist $\forall z \in \mathbb{C} \setminus N : g = c \cdot f$. Für alle $z \in N$ gilt $g(z) = 0 = c \cdot 0 = c \cdot f(z)$, da $g(z) \leq f(z) = 0$.