Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

6. Übungsblatt

Ausgabe 08.12.2020 – Besprechung 14.12-17.12.2020

Verständnisfragen

- Was ist der Vorteil der Lorentz-Eichung?
- Erfüllen die retardierten Potenziale die Lorenz-Eichung?
- Der verallgemeinerte Brechungsindex kann komplexe Werte annehmen. Welche Bedeutung hat der Imaginärteil?
- Schätzen Sie die Größenordnung des Impulses ab, der durch von der Sonne ausgehendem Licht pro Sekunde auf die Erde übertragen wird.

1. Aufgabe: Ebene Welle

Betrachten Sie die die ebene Welle

$$\boldsymbol{e} = (A\hat{\boldsymbol{e}}_x + B\hat{\boldsymbol{e}}_y + C\hat{\boldsymbol{e}}_z)e^{i(kz-\omega t)}\,,$$

wobei $\omega = ck$ und $A, B, C \in \mathbb{C}$ beliebige komplexe Zahlen sind.

a) Welche Bedingung muss für die Koeffzienten A, B, C erfüllt sein, damit der Realteil von $\boldsymbol{e}$ eine elektromagnetische Welle im Vakuum darstellt?

b) Unter welchen Bedingungen ist diese Welle linear bzw. zirkular polarisiert ?

2. Aufgabe: Rayleigh Entwicklung

Die Rayleigh Entwicklung einer ebenen Welle ist gegeben durch

$$e^{i\boldsymbol{kx}} = 4\pi \sum_{\ell} i^{\ell} j_{\ell}(kr) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^{*}_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_k)Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r)\,,$$

wobei die Besselfunktionen $j_\ell(y)$ die Bessel-Differenzialgleichung lösen

$$y^2 \frac{d^2}{dy^2} j_\ell(y) + 2y \frac{d}{dy} j_\ell(y) + [y^2 - \ell(\ell+1)] j_\ell(y) = 0\,.$$

Für die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r)$ die Eigenwertgleichung

$$r^2 \Delta Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r) = -\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r)$$

unter Anwendung des Laplace-Operators Δ in Kugelkoordinaten. Zeigen Sie durch Anwendung des Laplace- Operators auf die Rayleigh Entwicklung der ebenen Welle, dass gilt

$$\Delta e^{i\boldsymbol{kx}} = -|\boldsymbol{k}|^2 e^{i\boldsymbol{kx}}\,.$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten geschrieben werden kann als

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} f(\partial_\theta, \partial_\phi)\,,$$

wobei der Anteil $f(\partial_\theta, \partial_\phi)$ nur Ableitungen nach den Winkelvariablen enthält.

2. Aufgabe: Vektorpotenzial in Lorenz-Eichung

Angenommen ein Vektorpotential in Lorenz-Eichung ist gegeben durch

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = A_0(x, y)(\hat{\boldsymbol{e}}_x \pm i\hat{\boldsymbol{e}}_y)e^{i(kz-\omega t)}\,,$$

mit den Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{e}}_x$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_y$, $\omega = ck$ und einer langsam veränderlichen Koeffizientenfunktion $A_0(x, y)$. Dabei bedeutet "langsam veränderlich", dass nur die ersten räumliche Ableitungen von $A_0(x, y)$ relevant sind und die zweiten und höheren räumlichen Ableitungen von $A_0(x, y)$ vernachlässigt werden können.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lorenz Eichbedingung

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + \partial_{ct}\phi = 0\,,$$

das skalare Potential $\phi(\boldsymbol{x}, t)$. Integrationskonstanten können Sie gleich Null wählen.

b) Zeigen Sie, dass das aus $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ und $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ abgeleitete elektrische und magnetische Feld geschrieben werden kann als

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) &= \left(ikA_0(\hat{\boldsymbol{e}}_x \pm i\hat{\boldsymbol{e}}_y) - \left(\frac{\partial A_0}{\partial x} \pm i\frac{\partial A_0}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_z \right) e^{i(kz-\omega t)}\,,\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) &= \pm i\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}, t)\,.\end{aligned}$$

c) Steht $\boldsymbol{A}$ auf dem Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ in Lorenz-Eichung senkrecht?

4. Aufgabe: Freie Wellengleichung

Wir betrachten die freie Wellengleichung in einer Dimension

$$\Box\psi(\vec{x}, t) = (\partial_x^2 - \partial_{ct}^2)\psi(\vec{x}, t) = 0\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $\psi_1 = f(x - ct)$ und $\psi_2 = g(x + ct)$ mit zwei beliebigen, zweifach differenzierbaren Funktionen f und g Lösungen der homogenen Wellengleichung sind. Skizzieren Sie das zeitliche Verhalten von f und g entlang der x-Achse.

b) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Existenz solcher Lösungen und der allgemeinen Lösung der freien Wellengleichung durch ebene Wellen?

c) Schreiben Sie die Wellengleichung in Lichtkegelkoordinaten:

$$a = x + ct\,, \qquad b = x - ct\,.$$

d) Drücken Sie das Linienelement $x^2 - (ct)^2$ in Lichtkegelkoordinaten aus.

e) Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B definiert durch

$$(x, ct)\,A\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$2(a, b)\,B\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dieselben Eigenwerte haben.

f) Zeigen Sie, dass aus dem Linienelement für die Fourier-transformierten Orts- und Zeitkoordinaten k und ω/c die Dispersionsrelation $\omega = \pm ck$ folgt. Leiten Sie die Dispersionsrelation in Lichtkegelkoordinaten her.