Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

0. Übungsblatt - Lösungsskizzen

Aufgabe -4 (Elementare Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) **De Morgansche Regeln:** $(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)^c = \bigcap_{n=1}^\infty A_n^c$, und $(\bigcap_{n=1}^\infty A_n)^c = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^c$

(b) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(c) **Ungleichung von Boole:** $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.
Hinweis: Hier darf verwendet werden, dass aus $A \subseteq B$ folgt $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(d) **Stetigkeit des Maßes von oben:**
Gilt $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
Hinweis: Gehen Sie unter Nutzung von (a),(b) zunächst zum Gegenereignis über. Definieren Sie dann $B_n := A_n^c \setminus A_{n-1}^c$, und drücken Sie $\bigcup_{n=1}^\infty A_n^c$ mittels der B_n aus. Nutzen Sie dann Eigenschaft (iii) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Lösung -4. (a)

$$
\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)^c &\iff x \in \Omega \text{ und } x \notin \bigcup_{n=1}^\infty A_n \\
&\iff x \in \Omega \text{ und } \neg\,(\exists n \in \mathbb{N} : x \in A_n) \\
&\iff x \in \Omega \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} : x \notin A_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N} : \Big(x \in \Omega \text{ und } x \notin A_n\Big) \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N} : x \in A_n^c \\
&\iff x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n^c.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \in \left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right)^c &\iff x \in \Omega \text{ und } x \notin \bigcap_{n=1}^\infty A_n \\
&\iff x \in \Omega \text{ und } \neg\,(\forall n \in \mathbb{N} : x \in A_n) \\
&\iff x \in \Omega \text{ und } \exists n \in \mathbb{N} : x \notin A_n \\
&\iff \exists n \in \mathbb{N} : x \in A_n^c \\
&\iff x \in \bigcup_{n=1}^\infty A_n^c
\end{aligned}
$$

(b) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ hat laut Definition 02.01 (auch Kolmogorov-Axiome genannt) die folgenden drei Eigenschaften:

(K1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(K2) $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ (bzw. $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$)

(K3) $\mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ für alle paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$.

Wir nutzen, dass $A \dot{\cup} A^c = \Omega$ eine disjunkte Vereinigung ist. Damit gilt nach den Kolmogorov-Axiomen (K1) und Lemma 02.08 (iii):

$$1 \overset{(K1)}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \dot{\cup} A^c) \overset{02.08(iii)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

(c) Es genügt zu zeigen, dass $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$ gilt (dann folgt die Aussage direkt mit dem Hinweis):

$$\begin{aligned} x \in \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N} : x \in \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \ \geq m : x \in A_n. \end{aligned}$$

Wir wählen nun also solch ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq m_0$ gilt: $x \in A_n$.
Nun schauen wir uns die Definition von $\limsup_{n\to\infty} A_n$ an:

$$\begin{aligned} & x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n \\ \Longleftrightarrow \quad & \forall m \in \mathbb{N} : \exists n \geq m : x \in A_n \end{aligned}$$

Wir können also für jedes $m \in \mathbb{N}$ einfach $n = m_0$ von oben wählen! Damit ist $x \in \limsup_{n\to\infty} A_n$.

(d) *Anmerkung: Man könnte diese Aufgabe natürlich auch einfach mit Aufgabe 1(c) vom 1. Übungsblatt zeigen, Sinn dieser Aufgabe ist aber die Technik mit dem Disjunkt-Machen von Mengen zu üben.*
Wir gehen zum Gegenereignis über: Zeige stattdessen

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^c), \qquad (*)$$

daraus folgt dann

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Nun zum Beweis von $(*)$:
Definiere $B_n := A_n^c \setminus A_{n-1}^c$. Weil $A_{n+1} \subseteq A_n$ ist, gilt $A_n^c \subseteq A_{n+1}^c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit sind die B_n disjunkt, und es gilt

$$\bigcup_{n=1}^{N} B_n = A_N^c \quad \text{und} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

Damit haben wir (alle Limiten existieren, da es sich immer um monoton wachsende, nach oben beschränkte Folgen handelt):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) &= \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N^c).
\end{aligned}$$

Aufgabe -3 (Entwicklung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen).

Definieren Sie bei den folgenden Aufgaben zunächst ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell (d.h. einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), welches die Wahrscheinlichkeiten aus den Aufgabenstellungen korrekt abbildet, wobei $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung sein soll (d.h. jedes Ergebnis ist gleichwahrscheinlich). Definieren Sie dann die gesuchten Ereignisse als Teilmengen von Ω und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeit.

(a) An einer Geschwindigkeitskontrolle fahren Autos mit einer Geschwindigkeit von 50km/h, wobei mit gleichen Wahrscheinlichkeiten Abweichungen von diesem Wert von genau -10 km/h, -5 km/h, 0 km/h, 5 km/h, 10 km/h auftreten. Nun wird an der Geschwindigkeitskontrolle die Geschwindigkeit von 4 zufällig ausgewählten Autos gemessen.

  (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit halten sich alle vier beobachteten Autos an das Limit von 50km/h (d.h. fahren mit einer Geschwindigkeit von 50km/h oder weniger) ?

  (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe der Geschwindigkeiten aller vier beobachteten Autos genau 170 km/h ?

(b) Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten. Es gibt 4 verschiedene Farben (Karo, Herz, Pik, Kreuz), die jeweils mit 8 Karten im Spiel vertreten sind. Uns werden im Folgenden nur die Herzkarten interessieren. Der Stapel wird gut durchgemischt und eine Spieler*in zieht 10 Karten.

  (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Spieler*in genau 6 Herzkarten gezogen?

  (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Spieler*in mindestens 7 Herzkarten gezogen?

(c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass beim Lotto (6 aus 49) während eines Kalenderjahres (52 Ausspielungen) jede der 49 Zahlen mindestens einmal Gewinnzahl wird.

(d) 20 Studierende sollen schriftlich von einer Änderung des Prüfungstermins benachrichtigt werden. Im irrtümlichen Glauben, dass jeder der 20 Briefe den gleichen Inhalt aufweist, verteilt eine Bürokraft die Briefe willkürlich in die verschiedenen Umschläge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag gelangt?

Hinweis: Nutzen Sie für (c), (d) die folgende Regel (siehe Blatt 1, Aufgabe 3):
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,...,k_j\}\subseteq\{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

Lösung -3. (a) Modelliere nur Abweichungen:

$$\Omega = \{-10, -5, 0, 5, 10\}^4$$

Element $(w_1, w_2, w_3, w_4) \in \Omega$ entspricht dem Ereignis, dass Auto 1 mit Abweichung w_1 fährt, Auto 2 mit Abweichung w_2 usw.
(i) Gesucht ist Wahrscheinlichkeit von

$$A = \text{Alle vier Autos fahren mit Geschwindigkeit kleiner gleich 50km/h} = \{-10, -5, 0\}^4,$$

es ist $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3^4}{5^4} = (3/5)^4 = 0.6^4$.
(ii) Gesucht ist Wahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned} A &= \text{Summe der Geschwindigkeiten der vier Autos genau 170 km/h} \\ &= \{(w_1, w_2, w_3, w_4) \in \Omega : w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = -30\} \end{aligned}$$

Möglichkeit 1) Bestimmung von $\#A$ durch kombinatorisches Zählen:

$$\begin{aligned} A = \{&(-10, -10, -10, 0), (-10, -10, -5, -5), (-10, -10, 0, -10), (-10, -5, -10, -5), \\ &(-10, -5, -5, -10), (-10, 0, -10, -10), (-5, -10, -10, -5), (-5, -10, -5, -10), \\ &(-5, -5, -10, -10), (0, -10, -10, -10)\}, \end{aligned}$$

also $\#A = 10$.
Möglichkeit 2) Bestimmung von $\#A$ durch kombinatorische Formel: Die niedrigste erreichbare Gesamtgeschwindigkeit ist 160 km/h (in diesem Fall fahren alle Autos mit -10km/h Abweichung). Von dort aus geht es in 5km/h Schritten nach oben. Um 170 km/h zu erreichen, müssen also $r = 2$ mal 5 km/h auf die $n = 4$ Autos verteilt werden. Ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge (am Ende interessiert nur, wie viel Abweichung die Autos haben), und mit Zurücklegen (ein Auto kann auch mehrmals 5km/h zusätzlich bekommen).
Ergebnis: $\#A = \binom{n+r-1}{r} = \binom{5}{2} = 10$.
(Achtung: Diese Technik funktioniert nicht immer. Mit 190km/h statt 170km/h hätte es nicht so einfach funktioniert, da dafür 6-mal 5km/h verteilt werden müssten. Hier kann es passieren, dass 6-mal 5km/h auf ein Auto verteilt wird, was einer Abweichung von insgesamt 20km/h entsprechend würde, die aber gar nicht vorkommen kann. Diese Möglichkeiten müssten dann wieder abgezogen werden!)
Damit insgesamt $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{10}{5^4} = \frac{2}{125}$.

(b) Seien $K_1, ..., K_{32}$ die Karten, und nehme an, dass $K_1, ..., K_8$ die Herzkarten sind (o.E. da Nummerierungsfreiheit). Da der Stapel gut durchgemischt wird, ist jede Kombination von 10 Karten, die die Spieler*in zieht, gleichwahrscheinlich. Daher wird durch

$$\Omega = \{N \subseteq \{K_1, ..., K_{36}\} : \#N = 10\}$$

mit Laplaceverteilung das Experiment korrekt abgebildet. Es ist $\#\Omega = \binom{32}{10}$ (10 Karten werden ohne Zurücklegen gezogen, ohne Beachtung Reihenfolge).
(i) Hier ist

$$\begin{aligned} A &= \text{Spieler zieht genau 6 Herzkarten} = \{N \in \Omega : \#(N \cap \{K_1, ..., K_8\}) = 6\} \\ &= \{N \in \Omega : \#(N \cap \{K_1, ..., K_8\}) = 6, \#(N \cap \{K_9, ..., K_{32}\}) = 4\}. \end{aligned}$$

Müssen also 6 aus 8 Karten gezogen werden und 4 aus 24. Ziehungen erfolgen unabhängig, d.h. Möglichkeiten der beiden Teilziehungen sind zu multiplizieren. Daher $\#A = \binom{24}{4} \cdot \binom{8}{6}$. Ergebnis

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{24}{4} \cdot \binom{8}{6}}{\binom{32}{10}}.$$

(ii) Gleiches Prinzip wie in (i). Es ist

$$\begin{aligned} A &= \text{Spieler zieht mindestens 7 Herzkarten} = \{N \in \Omega : \#(N \cap \{K_1, ..., K_8\}) \geq 7\} \\ &= \{N \in \Omega : \#(N \cap \{K_1, ..., K_8\}) = 7, \#(N \cap \{K_9, ..., K_{32}\}) = 1\} \\ &\quad \dot\cup \{N \in \Omega : \#(N \cap \{K_1, ..., K_8\}) = 8, \#(N \cap \{K_9, ..., K_{32}\}) = 0\}. \end{aligned}$$

Nutze hier Eigenschaft (iii) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes (σ-Additivität) und die Tatsache, dass obige beiden Teilereignisse disjunkt sind. Dann vorgehen wie in (i) zur Berechnung von $\#A$. Ergebnis

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{24}{3} \cdot \binom{8}{7} + \binom{24}{2} \cdot \binom{8}{8}}{\binom{32}{10}}.$$

(c) Wähle (in Anlehnung an (b)):

$$\Omega = \{M \subseteq \{1, ..., 49\} : \#M = 6\}^{52}.$$

Ein Element enthält also 52 Mengen von jeweils 6 Elementen, die den einzelnen Ziehungen entsprechen. Da jede Ziehung gleichwahrscheinlich ist etc., passt das mit der Laplace-Verteilung zusammen.
Definiere die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &:= \text{Jede Zahl 1,...,49 wird mindestens einmal Gewinnzahl bei 52 Ziehungen} \\ A^c &= \text{Mind. eine Zahl 1,...,49 wird nie Gewinnzahl bei 52 Ziehungen} \\ A_i &:= \text{Die Zahl } i \text{ wird nie Gewinnzahl bei 52 Ziehungen.} \end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich $A^c = \bigcup_{i=1}^{49} A_i$. Anwendung der Formel aus Hinweis:

$$\mathbb{P}(A^c) = \sum_{j=1}^{49} \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,49\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

Es gilt

$$A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j} = \text{Die Zahlen } k_1, ..., k_j \text{ werden nie Gewinnzahl bei 52 Ziehungen,}$$

und damit (nun wieder Kombinatorik: Die 52 Zahlen sind unabhängig. Für eine feste Ziehung von 6 Zahlen ist die Wahrscheinlichkeit $p_j := \frac{\binom{49-j}{6}}{\binom{49}{6}}$, dass j bestimmte Zahlen keine Gewinnzahlen sind. Ziehung der Kugeln ist ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge). Damit

$$\mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) = p_j^{52}.$$

Achtung: Für $j \geq 44$ ist $p_j = 0$ (wenn mehr als 43 Zahlen keine Gewinnzahlen sein können, können nicht 6 Zahlen Gewinnzahlen sein).
Damit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \sum_{j=1}^{43} \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,49\}} p_j^{52} \right) \\ &= = 1 - \sum_{j=1}^{43} \left((-1)^{j-1} \binom{49}{j} p_j^{52} \right).\end{aligned}$$

(d) Seien 1,...,20 die Studenten.

$$\Omega = \{f : \{1, ..., 20\} \to \{1, ..., 20\} : f \text{ ist bijektiv}\} = S_{20}$$

(Permutationsgruppe). Ein Element $f \in \Omega$ entspricht anschaulich der Verteilung der Briefe auf die Studenten: $f(1)$ ist die Nummer des Studenten, der den Brief von Student 1 bekommt, usw.
Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit von

$A =$ Mindestens ein Student erhält seinen eigenen Brief $= \{f \in \Omega : \exists i \in \{1, ..., 20\} : f(i) = i\}$.

Es gilt $A = \bigcup_{i=1}^{20} A_i$ mit

$$A = \text{Student } i \text{ erhält seinen eigenen Brief} = \{f \in \Omega : f(i) = i\}.$$

Anwendung der Formel aus Hinweis:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{20} \left((-1)^{j-1} \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subseteq \{1,...,20\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

Es gilt

$$A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j} = \text{Studenten } k_1, ..., k_j \text{ erhalten ihren eigenen Brief,}$$

Anwendung von Kombinatorik (Wenn j Studenten ihren eigenen Brief haben, sind noch $(20 - j)$ Briefe frei verteilbar. Reihenfolge wichtig, da Studenten individualisiert (sonst Aufgabe sinnlos), ohne Zurücklegen):

$$\mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) = p_j := \frac{(20 - j)!}{20!}.$$

Damit

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{20} (-1)^{j-1} \binom{20}{j} \cdot p_j = \sum_{j=1}^{20} \frac{(-1)^{j-1}}{j!}.$$

Aufgabe -2 (Entwicklung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen).

Geben Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils einen Stichprobenraum Ω an. Dieser soll so gewählt sein, dass alle in der Aufgabenstellung relevanten Ereignisse in der σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ enthalten sind und der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung (d.h. jedes Ergebnis ist gleichwahrscheinlich), die Situation aus der Aufgabenstellung korrekt abbildet.
Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten der gegebenen Ereignisse.

(a) Wir haben einen Würfel, bei dem jede Zahl von 1 bis 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt. Wir würfeln mit diesem Würfel dreimal. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) bei allen drei Würfen nur gerade Zahlen gewürfelt werden?

(ii) die Summe der drei Würfe 6 beträgt?

(b) Wir haben eine Kiste voll mit 60 Labormäusen, von denen 20 erkrankt sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) von 10 zufällig ausgewählten Mäusen genau 3 Mäuse krank sind?

(ii) von 10 zufällig ausgewählten Mäusen mindestens eine Maus krank ist?

Lösung -2. (a) Wir wählen

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3 = \{(w_1,w_2,w_3) : w_i \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ für } i = 1,2,3\}.$$

Ein Elementarereignis $(w_1,w_2,w_3) \in \Omega$ entspricht dabei anschaulich der Situation, dass beim ersten Würfelwurf w_1 gewürfelt wurde, beim zweiten Würfelwurf w_2 und beim dritten Würfelwurf w_3.
Da jede Zahl bei dem Würfel mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt, haben auch alle möglichen Ergebnisse bei drei Würfelwürfen die gleiche Wahrscheinlichkeit, d.h. jedes $(w_1,w_2,w_3) \in \Omega$ tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.
Daher bildet der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}$ die Laplaceverteilung die vorliegende Situation korrekt ab.
(i) Das gesuchte Ereignis ist

$$\begin{aligned} A &= \text{Bei allen drei Würfen werden nur gerade Zahlen gewürfelt} \\ &= \{2,4,6\}^3 = \{(w_1,w_2,w_3) \in \Omega : w_i \in \{2,4,6\} \text{ für } i = 1,2,3\}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung ist, gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

Hier haben wir Kombinatorik benutzt: $\#\Omega$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, aus 6 verschiedenen Zahlen 3 Zahlen zu ziehen. Dieses Ziehen erfolgt mit Zurücklegen (wenn man einmal eine 5 gewürfelt hat, kann man nochmal eine 5 würfeln), und mit Beachtung der Reihenfolge (da bei einem Tripel (w_1,w_2,w_3) die Reihenfolge relevant ist). Daher ist $\#\Omega = 6^3$. Analoge Überlegung für $\#A$.
(ii) Das gesuchte Ereignis ist

$$\begin{aligned} A &= \text{Die Summe der drei Würfe beträgt 6} \\ &= \{(w_1,w_2,w_3) \in \Omega : w_1 + w_2 + w_3 = 6\}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung ist, gilt wieder

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#A}{6^3}.$$

Es bleibt $\#A$ zu bestimmen. Dies kann durch zwei Möglichkeiten erfolgen:

- Explizite Aufzählung aller Elemente (sog. "Kombinatorisches Zählen"), im Allgemeinen sehr aufwendig:

  $$A = \{(1,1,4),(1,2,3),(1,3,2),(1,4,1),(2,1,3),(2,2,2),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1),(4,1,1)\},$$

  daher $\#A = 10$.
- Nutzung Kombinatorik: Die Summe der drei Zahlen w_1, w_2, w_3 soll 6 sein. Die Anzahl der Möglichkeiten kann man in folgendem äquivalenten Problem herausfinden: 3 Einsen wählen aus 3 Eimern (am Ende des Experiments sind also 3 Einsen irgendwie in 3 Eimern verteilt. Die Anzahl der Einsen in Eimer 1 entspricht $w_1 - 1$, die Anzahl der Einsen in Eimer 2 entspricht $w_2 - 1$, usw. In diesem Sinne sind die Probleme äquivalent).
  Diese Wahl erfolgt mit Zurücklegen (Es können mehrere Einsen in einen Eimer), aber ohne Beachtung der Reihenfolge (am Ende zählt nur, wie viele Einsen in einem Eimer sind, aber nicht in welcher Reihenfolge die Einsen in die Eimer gekommen sind). Daher ist

  $$\#A = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10.$$

(b) Seien $M_1, ..., M_{60}$ die 60 Mäuse, und wir nehmen an, dass $M_1, ..., M_{20}$ die kranken Mäuse sind (da wir die Mäuse bezeichnen können wie wir wollen, ist es keine Einschränkung, anzunehmen, dass die ersten 20 Mäuse krank sind).
Wir wählen nun

$$\Omega = \{N \subseteq \{M_1, ..., M_{60}\} : \#N = 10\}.$$

Ein Element $A = \{w_1, ..., w_{10}\} \in \Omega$ entspricht also den 10 zufällig gezogenen Mäusen. Da jede Maus mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen wird, werden die auftretenden Wahrscheinlichkeiten in de Aufgabenstellung durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mit $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung, korrekt abgebildet.
(i) Das gesuchte Ereignis ist

$$\begin{aligned} A &= \text{3 der 10 zufällig ausgewählten Mäuse sind krank} \\ &= \{N \in \Omega : \#(\{M_1, ..., M_{20}\} \cap N) = 3\} \\ &\overset{N\in\Omega}{=} \{N \in \Omega : \#(\{M_1, ..., M_{20}\} \cap N) = 3, \#(\{M_{21}, ..., M_{60}\} \cap N) = 7\} \end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung ist, gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Es gilt $\#\Omega = \binom{60}{10}$, denn wir suchen die Anzahl der Möglichkeiten, aus 60 Mäusen 10 Mäuse auszuwählen. Diese Wahl erfolgt ohne Beachtung der Reihenfolge (am Ende interessiert uns nur, welche 10 Mäuse gewählt wurden, aber nicht welche zuerst gewählt wurde - der Unterschied zu (a) ist, dass die Elemente von Ω hier Mengen sind, keine geordneten Tripel!), und ohne Zurücklegen (jede Maus kann nur einmal gewählt werden).
Für $\#A$ halten wir zunächst fest, dass die Auswahl von den 3 kranken Mäusen unabhängig von der Auswahl der 7 gesunden Mäuse erfolgt. Daher können wir die Berechnung der Anzahl der Elemente von A auf die Berechnung zweier kleinerer Mengen zurückführen:

$$\#A = \#(\{N \subseteq \{M_1, ..., M_{20}\} : \#N = 3\}) \cdot \# (\{N \subseteq \{M_{21}, ..., M_{60}\} : \#N = 7\} = \binom{20}{3} \cdot \binom{40}{7}.$$

Die Berechnung der Anzahl der Möglichkeiten erfolgt dabei wie oben bei $\#\Omega$. Wir erhalten

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{20}{3} \cdot \binom{40}{7}}{\binom{60}{10}} \approx 0.282$$

(ii) Das gesuchte Ereignis ist

$$\begin{aligned} A &= \text{mindestens eine der 10 zufällig ausgewählten Mäuse ist krank} \\ &= \{N \in \Omega : \#(\{M_1, ..., M_{20}\} \cap N) \geq 1\} \end{aligned}$$

Zur einfacheren Behandlung arbeiten wir mit dem Gegenereignis:

$$\begin{aligned} A^c &= \text{Keine der 10 zufällig ausgewählten Mäuse ist krank} \\ &= \{N \in \Omega : \#(\{M_1, ..., M_{20}\} \cap N) = 0\} \end{aligned}$$

Die Berechnung von $\mathbb{P}(A^c)$ erfolgt nun wie in (i). Wir erhalten:

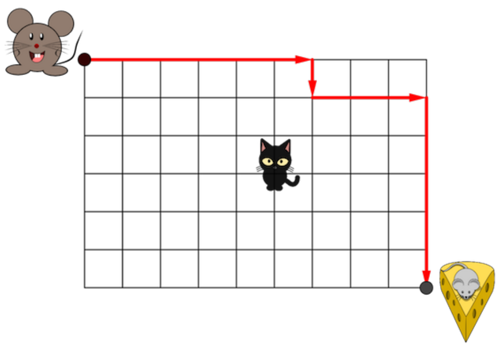
$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{\#A^c}{\#\Omega} = 1 - \frac{\binom{20}{0} \cdot \binom{40}{10}}{\binom{60}{10}} \approx 0.989$$

Grundsätzliche Anmerkung zur Aufgabe: Evtl. wirkt die Vorgehensweise bei dieser Aufgabe unnötig kompliziert, da erst ein Wahrscheinlichkeitsraum konstruiert und dann mit der Laplace-Verteilung gearbeitet wird. Die Alternative wäre, das Ergebnis einfach (durch Schulkenntnisse etc.) hinzuschreiben. Der Vorteil des Vorgehens in dieser Aufgabe liegt darin, dass Probleme in der Modellierung hier sofort mathematisch deutlich werden und man Unsicherheiten in der Ergebnisfindung genau lokalisieren kann (z.B.: ich weiß nicht, wie man die Anzahl der Elemente dieser Menge berechnet). Später werden wir noch einfachere Standard-Modellierungen kennen lernen, sodass wir nicht immer mit der Definition von Ω beginnen müssen.

Aufgabe -1 (Kombinatorik).

Nutzen Sie, wenn möglich, die kombinatorischen Formeln aus der Vorlesung.

(a) Eine Maus befindet sich am oberen linken Ende eines einfachen Labyrinths. Das Labyrinth ist unten abgebildet: die Linien entsprechen möglichen Wegen, Schnittpunkte entsprechen Kreuzungen. Das Ziel der Maus ist der Käse ganz unten rechts. Wie viele mögliche Wege gibt es für die Maus, zum Käse zu gelangen, wenn die Maus nur nach rechts und unten gehen darf (d.h. in Richtung Käse)? Ein möglicher Weg ist mit Pfeilen abgebildet.



(b) In dem Labyrinth blockiert nun eine Katze eine Kreuzung (siehe Bild), sodass die Maus diese nicht passieren darf. Wie viele mögliche Wege zum Käse gibt es nun für die Maus?

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, dass sich ein Schwarm von 10 nichtunterscheidbaren Vögeln auf 4 Bäume B_1, B_2, B_3, B_4 verteilt?

(d) Fünf von sieben Menschen A,B,C,D,E,F,G stellen sich an einen Bankschalter an. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die entstehende Warteschlange?

Lösung -1.

Allgemeiner Hinweis zur Lösung: Um die kombinatorischen Formeln aus der Vorlesung korrekt anzuwenden, muss man sich zuerst immer klar machen, wer der Wähler ist und wie viele es davon gibt (r) und wer/was die Wahlmöglichkeiten sind und wie viele es davon gibt (n). Bei der Anwendung der kombinatorischen Formeln müssen die Wahlmöglichkeiten immer unterscheidbar sein! Danach muss man das Wählen / Ziehen charakterisieren:

- *Ziehen mit / ohne Beachtung der Reihenfolge: Hier geht es um die Frage, ob die Wähler unterscheidbar sind und ob es für das Resultat des Wahlvorgangs einen Unterschied macht, ob Wähler 1,2 die Wahl a,b oder ob Wähler 1,2 die Wahl b,a getroffen haben. Falls ja, handelt sich um Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge.*

- *Ziehen mit Zurücklegen / ohne Zurücklegen: Hier geht es um die Frage, ob die Wähler mehrmals dieselbe Wahlmöglichkeit wählen können oder nicht. Falls ja, handelt es sich um Ziehen mit Zurücklegen. Im Falle des Ziehens ohne Zurücklegen muss die Anzahl der Wähler r natürlich auch kleiner oder gleich der Anzahl der Wahlmöglichkeiten n sein!*

(a) Insgesamt muss die Maus 9-mal nach rechts und 6-mal nach unten gehen, um zum Käse zu gelangen. Anders formuliert, muss die Maus 15 Bewegungen ausführen, und der Weg wird dadurch festgelegt, wann bei diesen 15 Bewegungen die 6 Bewegungen nach unten ausgeführt werden.
Hier wählen also die $r = 6$ Bewegungen nach unten aus den möglichen Positionen 1 bis 15 aus, d.h. aus $n = 15$ Wahlmöglichkeiten.
Daher erfolgt die Ziehung ohne Zurücklegen (die sechs Bewegungen nach unten müssen an verschiedenen Positionen ausgeführt werden) und ohne Beachtung der Reihenfolge (am Ende ist nur relevant, welche 6 Positionen ausgewählt wurden, aber nicht, in welcher Reihenfolge - die Bewegungen nach unten an sich sind nicht unterscheidbar).
Daher beträgt die Anzahl der möglichen Wege $\binom{n}{r} = \binom{15}{6} = 5005$.

(b) Wir müssen von dem Ergebnis aus (a) die Anzahl der Wege abziehen, die nun durch die Katze blockiert sind. Das sind genau die Wege, die von dem Punkt oben links im Labyrinth starten, durch die Kreuzung der Katze gehen und von dort zum Käse unten rechts:

- Die Anzahl aller möglichen Wege vom Punkt oben links bis zur Katze lassen sich genauso berechnen wie in (a): $r = 3$ Bewegungen nach unten müssen aus $n = 8$ Positionen wählen: $\binom{n}{r} = \binom{8}{3} = 56$.
- Dasselbe gilt für die Anzahl aller möglichen Wege von der Katze bis zum Käse: $\binom{7}{3} = 35$.

Da die Wege bis zur Katze und von der Katze weg unabhängig voneinander ausgewählt werden können, müssen wir die Möglichkeiten der beiden Wegteile multiplizieren, um alle Möglichkeiten für Wege durch die Kreuzung der Katze zu erhalten: $\binom{8}{3} \cdot \binom{7}{3}$.
Wir erhalten also insgesamt, dass es

$$\binom{15}{6} - \binom{8}{3} \cdot \binom{7}{3} = 3045.$$

Wege gibt, die nicht durch die Kreuzung der Katze führen.

(c) Hier wählen die $n = 10$ Vögel aus den $N = 4$ (unterscheidbaren) Bäumen. Da die Vögel (Wähler) in der Aufgabenstellung nicht individualisiert werden, erfolgt diese Ziehung ohne Beachtung der Reihenfolge. Am Ende interessiert also nur noch, wie viele Vögel auf jedem der 4 Bäume sind, aber nicht, welche Vögel genau das sind. Weiterhin erfolgt das Ziehen mit Zurücklegen, weil mehrere Vögel denselben Baum auswählen können. Damit ergibt sich die Lösung

$$\binom{N+n-1}{n} = \binom{13}{10} = 286.$$

für die Anzahl der Möglichkeiten.

(d) Hier wählen die $n = 5$ Positionen der Warteschlange aus den $N = 7$ Menschen. Da die Positionen unterscheidbar sind (am Ende interessiert es ja auch, an welcher Stelle welcher Mensch in der Schlange steht), handelt es sich um Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge. Da jeder Mensch nur einmal ausgewählt werden kann (nur an einer Position in der Schlange stehen kann), handelt es sich um Ziehen ohne Zurücklegen. Daher lautet die Anzahl der Möglichkeiten insgesamt

$$\frac{N!}{(N-n)!} = \frac{7!}{2!} = 2520.$$

Aufgabe 0 (Kombinatorik).

Nutzen Sie zur Lösung der folgenden Aufgaben, wenn möglich, die kombinatorischen Formeln (Lemma 04.04) aus der Vorlesung.

(a) Wir betrachten ein regelmäßiges N-Eck. Wie viele Linien entstehen, wenn man alle Punkte miteinander verbindet?

(b) Aus einer Schulklasse von 23 Schülern soll eine Abordnung von 5 Schülern zum Direktor geschickt werden. Auf wie viele Arten kann diese Abordnung gebildet werden?

(c) Auf wie viele Arten kann man 7 Hotelgäste $H_1, ..., H_7$ in 10 freien, durchnummerierten Einzelzimmern unterbringen?

(d) In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?

(e) Wie viele 4-stellige Zahlen mit Quersumme 9 gibt es?

(f) Die Lottoziehung (6 aus 49) ist vorbei, die 6 Gewinnzahlen bekannt. Auf wie viele Arten hätte man 6 Zahlen auswählen können, sodass unter ihnen 3 Richtige gewesen wären?

(g) Wir haben N Bücher. Unter diesen Büchern gibt es M gleiche Bücher, die wir nicht voneinander unterscheiden können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die N Bücher in einem Regel nebeneinander anzuordnen.

Lösung 0.

(a) Es gibt N Punkte, und eine Linie ist eine Verbindung zwischen zwei Punkten. D.h. Anzahl der Linien entspricht Anzahl Möglichkeiten, aus N Punkten zwei auszuwählen.
Ergebnis: $\binom{N}{2}$.

(b) Hier werden 5 Schüler aus 23 Schülern gezogen. Da die Schüler nicht individualisiert sind, ohne Beachtung der Reihenfolge, und ohne Zurücklegen (jeder Schüler kann nur einmal in die Abordnung).
Ergebnis: $\binom{23}{5}$.

(c) 7 Hotelgäste wählen aus 10 Zimmern, mit Beachtung der Reihenfolge, da Hotelgäste individualisiert, ohne Zurücklegen, da Einzelzimmer.
Ergebnis: $\frac{10!}{(10-7)!}$.

(d) 5 Lampen wählen aus 2 möglichen Zuständen an/aus. Die Lampen sind individualisiert, da sie an verschiedenen Stellen im Zimmer angebracht sind, d.h. mit Beachtung Reihenfolge. Außerdem mit Zurücklegen, da jede Lampe neu an/aus auswählen kann.
Ergebnis: 2^5.

(e) $n = 8$ Einsen wählen aus den $N = 4$ Positionen einer vierstelligen Zahl. Die neunte Eins kann nicht frei wählen und wird auf die Tausenderstelle der vierstelligen Zahl gesetzt, sonst ist die resultierende Zahl evtl. gar nicht vierstellig. Das Ziehen erfolgt ohne Beachtung der Reihenfolge (am Ende ist nur interessant, wie viele Einsen auf den Positionen sind, nicht in welcher Reihenfolge sie dorthin gelangt sind), und mit Zurücklegen (Position kann mehrmals gewählt werden).
Ergebnis: $\binom{N+n-1}{n}$.

(f) 49 Zahlen sind aufgeteilt in zwei Gruppen, 43 Verlierzahlen und 6 Gewinnzahlen. Frage ist, wie viele Möglichkeiten es gibt, 3 Zahlen aus 43 und 3 Zahlen aus 6 zu ziehen. Die beiden Teilziehungen erfolgen unabhängig, daher können beide Ziehungen einzeln betrachtet werden und die Anzahl der Möglichkeiten müssen multipliziert werden. Ziehungen erfolgen ohne Beachtung der Reihenfolge (Reihenfolge der Zahlen hier nicht relevant, nur Frage Gewinnzahl oder nicht) und ohne Zurücklegen (jede Zahl nur einmal).
Ergebnis: $\binom{43}{3} \cdot \binom{6}{3}$.

(g) Wären alle Bücher verschieden, könnten sie auf $N!$ Arten angeordnet werden. Die M gleichen Bücher sind aber nicht unterscheidbar, Permutationen von diesen Büchern wurden aber bei $N!$ mitgezählt. Daher müssen diese nun wieder rausgeteilt werden.
Ergebnis: $\frac{N!}{M!}$.

Keine Abgabe:
Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungsgruppen in der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`