Aufgabe 1

(a) Zunächst benötigen wir eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Als $\mathbb{Z}$-Modul ist $\mathbb{Z}$ frei und damit projektiv. Insbesondere ist $P_\bullet := 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z} \to 0$ eine projektive Folge. Es gilt $H_0(P_\bullet) = \ker(\mathbb{Z} \to 0)/\operatorname{im}(\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $H_1(P_\bullet) = \ker(\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z})/\operatorname{im}(0 \to \mathbb{Z}) = 0/0 = 0$ und $H_{\geq 2}(P_\bullet) = 0/0 = 0$. Folglich handelt es sich um eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/mZ$.

Es gilt $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = L_i(\bar{\otimes}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = H_n(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Es gilt

$$\begin{aligned} P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &= 0 \to \mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m \otimes 1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0 \\ &\cong 0 \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0, \end{aligned}$$

wobei die zweite Zeile kanonisch isomorph zur ersten ist, insbesondere also die selben Homologiegruppen besitzt. Es folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &= H_0(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\operatorname{im}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= \mathbb{Z}/((n) + (m)) \\ &= \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(n, m)\mathbb{Z} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &= H_1(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= \ker(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= (n) : (m)/(n) \\ &= \frac{n}{\operatorname{ggT}(n, m)}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Für alle weiteren Homologiegruppen gilt, $i \geq 2:$

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &= H_i(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= \ker(0)/\operatorname{im}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Wir konstruieren zunächst wieder eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Fallunterscheidung:

1) $\operatorname{ggT}(d, n/d) = 1$ oder $\operatorname{ggT}(e, n/e) = 1$ (vertausche dann OE e und d).
Behauptung: $\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(e, d)\mathbb{Z}$ und $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) = 0 \forall i \geq 1$.

Beweis. $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ist in diesem Fall ein projektiver $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul und durch $0 \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to 0$ ist eine projektive Auflösung gegeben, da $H_0 = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ und $H_i = 0/0 = 0 \forall i \geq 1$. Durch tensorieren mit $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ erhalten wir die Folge $0 \to \mathbb{Z}/\mathrm{d}\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \to 0$. Dabei ist $\mathbb{Z}/\mathrm{d}\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ kanonisch isomorph zu $\mathbb{Z}/((d) + (e)) = \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(e, d)\mathbb{Z}$. Insbesondere gilt $\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \ker(\mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(e, d)\mathbb{Z} \to 0)/\operatorname{im} 0 = \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(e, d)\mathbb{Z}$ und $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) = 0/0 = 0 \forall i \geq 1$. □

2) $\mathrm{ggT}(d, n/d) \neq 1$ und $\mathrm{ggT}(e, n/e) \neq 1$. Behauptung: Der folgende Komplex ist eine projektive Auflösung für $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul.

$$\cdots \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0 \tag{1}$$

Beweis. Wir berechnen die Homologiegruppen. Es gilt

$$H_0 = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/d(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z},$$

sowie

$$H_1 = (\ker \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(n/d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (n/d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(n/d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$$

und

$$H_2 = (\ker \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0.$$

Aufgrund der Periodizität der Auflösung sind auch alle weiteren Homologiegruppen 0. □

Wir tensorieren den Komplex 1 mit $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ und erhalten

$$\cdots \xrightarrow{\cdot d \otimes 1_{\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d \otimes 1_{\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d \otimes 1_{\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \to 0 \tag{2}$$

Es existiert ein kanonischer Komplexisomorphismus zu folgendem Komplex

$$\cdots \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \to 0 \tag{3}$$

Daraus berechnen wir nun die gesuchten Werte des Tor-Funktors. Es gilt

$$\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})/d(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/((d)+(e)) = \mathbb{Z}/\,\mathrm{ggT}(e,d)\mathbb{Z},$$

für alle weiteren i ist der Komplex periodisch, also auch die Homologiegruppen. Es gilt $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_{2k-1}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) &= \ker(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})/\operatorname{im}(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) \\
&= \frac{((e):(d))/(e))}{(n/d)\cdot(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})} \\
&= \frac{\left(\frac{e}{\mathrm{ggT}(e,d)}\right)/(e)}{((n/d)+(e))/(e)} \\
&= \frac{\left(\frac{e}{\mathrm{ggT}(e,d)}\right)}{(\mathrm{ggT}(n/d,e))}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}_{2k}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) &= \ker(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})/\operatorname{im}(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) \\
&= \frac{((e):(n/d))/(e))}{(d)\cdot(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})} \\
&= \frac{\left(\frac{e}{\mathrm{ggT}(e,n/d)}\right)/(e)}{((d)+(e))/(e)} \\
&= \frac{\left(\frac{e}{\mathrm{ggT}(e,n/d)}\right)}{(\mathrm{ggT}(d,e))}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a) $\mathbb{C}[X,Y]$ und $\mathbb{C}[X,Y]^2$ sind frei als $\mathbb{C}[X,Y]$-Moduln, also insbesondere projektiv.

$$0 \to \mathbb{C}[X,Y] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}[X,Y]^2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}[X,Y] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \to 0 \tag{4}$$

Daher genügt es Exaktheit der Folge 4 nachzuweisen. Es gilt $\alpha(x) = 0 \implies x(X,-Y) = 0 \implies Xx = 0 \implies x = 0$. Insbesondere ist $\ker\alpha = 0$. Weiter gilt $\beta \circ \alpha(x) = \beta(x \cdot (X,-Y)) = xYX - xXY = 0$. Sei $(f,g) \in \ker\beta$. Dann ist $Yf = -gX$. Insbesondere ist $f \in (X)$ und $g \in (Y)$, also $f = \tilde{f}X, g = \tilde{g}Y$ und wir erhalten

$$\tilde{f}XY = -\tilde{g}YX \implies \tilde{f} = -\tilde{g} \implies (f,g) = \tilde{f}(X,-Y) = \alpha(\tilde{f}) \in \operatorname{im}\alpha.$$

Desweiteren ist $\operatorname{im}\beta = (X,Y)$, da $\beta(0,1) = Y$ und $\beta(1,0) = X$ gilt. Wegen $\varepsilon(X) = \varepsilon(Y) = 0$ und $\varepsilon|_{\mathbb{C}} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ ist $\ker\varepsilon = (X,Y) = \operatorname{im}\beta$. Schließlich ist $\operatorname{im}\varepsilon = \mathbb{C} = \ker(\mathbb{C} \to 0)$. Damit ist die Exaktheit von 4 gezeigt und es handelt sich bei

$$0 \to \mathbb{C}[X,Y] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}[X,Y]^2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}[X,Y] \to 0 \tag{5}$$

wegen $H_0(5) = \mathbb{C}[X,Y]/(X,Y) = \mathbb{C}$ um eine projektive Auflösung von $\mathbb{C}$.

(b) Wir tensorieren 5 mit $\mathbb{C}$ und erhalten

$$0 \to \mathbb{C}[X,Y] \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}[X,Y]^2 \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}[X,Y] \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C} \to 0 \tag{6}$$

Es gilt $\mathbb{C} = \mathbb{C}[X,Y]/(X,Y)$. Behauptung: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C}[X,Y] \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C} \arrow[r, "\alpha\otimes 1_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{C}[X,Y]^2 \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C} \arrow[r, "\beta\otimes 1_{\mathbb{C}}"] \arrow[d, "\psi"] & \mathbb{C}[X,Y] \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r, "0"] & \mathbb{C}^2 \arrow[r, "0"] & \mathbb{C} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{7}$$

kommutiert, wobei ϕ jeweils den kanonischen Isomorphismus aus Satz 3.9 bezeichne und ψ den Isomorphismus aus Korollar 3.8.

Beweis. Wir zeigen zunächst $\psi \circ (\alpha \otimes 1_{\mathbb{C}}) = 0$. Sei $x = \sum_{i=1}^n f_i \otimes c_i \in \mathbb{C}[X,Y] \otimes_{\mathbb{C}[X,Y]} \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\psi((\alpha \otimes 1_{\mathbb{C}})(x)) = \psi(\sum_{i=1}^n f_i(X,Y) \otimes c_i) = \sum_{i=1}^n (f_ic_iX, f_ic_iY) = \sum_{i=1}^n (0,0) = 0,$$

da die $\mathbb{C}[X,Y]$-Modulstruktur gegeben ist durch $X \cdot c = \varepsilon(X) \cdot c = 0, Y \cdot c = \varepsilon(Y) \cdot c = 0$. Außerdem gilt $\phi \circ (\beta \otimes 1_{\mathbb{C}}) = 0$. Sei nämlich $x = \sum_{i=1}^n (f_i, g_i) \otimes c_i$. Dann gilt

$$\phi((\beta \otimes 1_{\mathbb{C}})(x)) = \phi(\sum_{i=1}^n (Yf_i + Xg_i) \otimes c_i) = \sum_{i=1}^n (Yf_ic_i + Xg_ic_i) = 0,$$

da die $\mathbb{C}[X,Y]$-Modulstruktur gegeben ist durch $X \cdot c = \varepsilon(X) \cdot c = 0, Y \cdot c = \varepsilon(Y) \cdot c = 0$. □

Insgesamt erhalten wir also einen Isomorphismus von Komplexen, die demnach insbesondere dieselben Homologiegruppen besitzen. Daraus folgern wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C}) &= \ker(\mathbb{C} \to 0)/\operatorname{im}(\mathbb{C}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{C}) = \mathbb{C}/0 = \mathbb{C} \\
\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C}) &= \ker(\mathbb{C}^2 \to 0)/\operatorname{im}(\mathbb{C} \xrightarrow{0} \mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2/0 = \mathbb{C}^2 \\
\operatorname{Tor}_2^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C}) &= \ker(\mathbb{C} \to 0)/\operatorname{im}(0 \to \mathbb{C}) = \mathbb{C}/0 = \mathbb{C} \\
\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C}) &= \ker(0 \to 0)/\operatorname{im}(0 \to 0) = 0/0 = 0 \forall i \geq 3
\end{aligned}$$

(c) Da es sich bei $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{C}[X,Y]}$ um einen Funktor handelt, sind die Werte $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ unabhängig von der Wahl der Auflösung. Gäbe es eine kürzere projektive Auflösung $P_\bullet$ von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}[X,Y]$-Modul, so wäre für diese Auflösung $H_2(P_\bullet \otimes \mathbb{C}) = \ker(0 \to P_1)/\operatorname{im}(0 \to 0) = 0$, Widerspruch. Daher gibt es keine kürzere projektive Auflösung von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}[X,Y]$-Modul.