Aufgabe 1

(a) Es gilt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & Id \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{22} \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + S \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir $A_{22} = A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + S \Leftrightarrow S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

(b) Es gilt

$$(A_{11})_{ij} = A_{ij} = \overline{A_{ji}} = \overline{(A_{11})_{ji}},$$

also ist A_{11} hermitesch. Außerdem gilt

$$(A_{22})_{ij} = A_{(p+i)(p+j)} = \overline{A_{(p+j)(p+i)}} = \overline{(A_{22})_{ji}}.$$

Schließlich zeigen wir noch

$$(A_{21})_{ij} = A_{(p+i)j} = \overline{A_{j(p+i)}} = \overline{(A_{12})_{ji}}$$

und folglich $A_{21} = \overline{A_{12}}^T$. Weiter gilt für alle Vektoren $x \in \mathbb{K}^{n\times n}$ $(Ax, A)_2 > 0$. Sind die letzten $n-p$ Einträge von x 0, so gilt $(Ax, x)_2 = (A_{11}x, x) > 0$. Man kann nun jeden Vektor $\hat{x} \in \mathbb{K}^{p\times p}$ per (mehr oder weniger) kanonischer Inklusion als einen Vektor $x \in \mathbb{K}^{n\times n}$ auffassen, bei dem die letzten $n-p$ Elemente 0 sind. Also ist $(A_{11}\hat{x}, \hat{x})_2 = (Ax, x) > 0$ und damit A_{11} positiv definit. Also ist A_{11} reell unitär diagonalisierbar und regulär, d.h. $A_{11} = Q \cdot A' \cdot \overline{Q}^T$, wobei $A' = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$, $0 \neq \lambda_i \in \mathbb{R}$. Es gilt also

$$A_{11} \cdot Q \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_p}\right) \cdot \overline{Q}^T = Q \cdot \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_p}\right) \cdot \overline{Q}^T = Id$$

und folglich $A_{11}^{-1} = Q \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_p}\right) \cdot \overline{Q}^T = \overline{A_{11}}^{-T}$, da alle λ_i reell sind. Nun betrachten wir die Matrix S. Es gilt

$$\overline{S}^T = \overline{A_{22}}^T - \overline{(A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})}^T = A_{22} - \overline{A_{12}}^T \overline{A_{11}}^{-T} \overline{A_{21}}^T = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = S,$$

S ist also hermitesch. Es gilt für $X = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & Id \end{pmatrix}$

$$X \cdot A\overline{X}^T = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & Id \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Id & -A_{12}A_{11}^{-1} \\ 0 & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

Es gilt also

$$\left(\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} x, x\right)_2 = \left(XA\overline{X}^T x, x\right)_2 = \left(XA\overline{X}^T x, x\right)_2 = \left(A\overline{X}^T x, \overline{X}^T x\right)_2 > 0$$

Das gilt insbesondere auch für alle Vektoren, deren ersten p Komponenten 0 sind. Daher muss auch S positiv definit sein.

Aufgabe 2

(a) Behauptung: Der Algorithmus ist durchführbar.

Beweis. Beweis durch endliche Induktion über $j < n$.

IB: Für alle $1 \leq j < n$ gelte $u_j \neq 0$ und $|u_j| > |b_j|$.

IS: Sei $j < n$ und **IB** für $j-1$ bereits gezeigt. Dann ist $u_{j-1} \neq 0$, und $u_j = a_j - \frac{c_j}{u_{j-1}} b_{j-1}$. Somit gilt

$$
\begin{aligned}
|u_j| &= |a_j - \frac{c_j}{u_{j-1}} b_{j-1}| \\
&\geq ||a_j| - \frac{|c_j|}{|u_{j-1}|} |b_{j-1}|| \\
&\geq ||b_j| + |c_j|(1 - \frac{|b_{j-1}|}{|u_{j-1}|}) \\
&\overset{IB}{\geq} |b_j| > 0.
\end{aligned}
$$

Für den Fall $j = n$ gilt:

$$
\begin{aligned}
|u_j| &= |a_n - \frac{c_n}{u_{n-1}} b_{n-1}| \\
&\geq ||c_n|(1 - \frac{|b_{n-1}}{|u_{n-1}}) \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

□

(b) Behauptung: Der Algorithmus liefert die gesuchte LU-Zerlegung.

Beweis. In jeder Zeile müssen nur die c_j verändert werden, was durch das l_j geschieht. Die Diagonale wird um $-l_j b_{j-1}$ verändert, da $b_j \neq 0$ und die b_j werden nicht verändert, denn die Elemente oberhalb der b_j sind alle gleich null. Insgesamt erhält man so die gesuchte LU-Zerlegung. □

(c) Behauptung: $\det(A) \neq 0$.

Beweis. Nach VL ist $\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$ und somit ist $\det(A) = 1 \cdot u_1 \cdot ... \cdot u_n \neq 0$, da das Produkt $u_1 \cdot ... \cdot u_n \neq 0$. □

Aufgabe 3

(a) Wählen wir stets $l_{ij} = -1$, so erhalten wir für das Produkt $L_i \cdot \dots \cdot L_1 \cdot A$

$$
\begin{array}{cc}
\left(\begin{array}{c|c|c}
\mathbb{I} & 0 & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 2^{i-1} \end{matrix} \\ \hline
0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 2^i \\ \vdots \\ \vdots \\ 2^i \end{matrix}
\end{array}\right) & \begin{matrix} i \\ \\ \\ n-i \end{matrix} \\
\begin{matrix} i & \qquad n-1-i & \qquad 1 \end{matrix} &
\end{array}
$$

Sowohl Induktionsanfang als auch Induktionsschritt sind leicht einzusehen. Für $L_{n-1} \cdot \dots \cdot L_1$ erhalten wir damit eine obere Dreiecksmatrix u mit $u_{nn} = 2^{n-1}$.

(b) Wir vertauschen zunächst die Spalten so, dass Spalte i zu Spalten $i+1$ wird und die letzte Spalte zur ersten Spalte wird. Für die erste Spalte müssen wir also $l_{i1} = 1$ wählen. Nach dem ersten Schritt erhalten wir also die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & -1 & 1 & & \\ 1 & -1 & -1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & -2 & -1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & -2 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir $l_{ij} = 1$ wählen und erhalten die LU-Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & -2 & -1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & -2 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & -2 & 1 & & \\ 0 & 0 & -2 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & -2 & 1 & & \\ & & -2 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

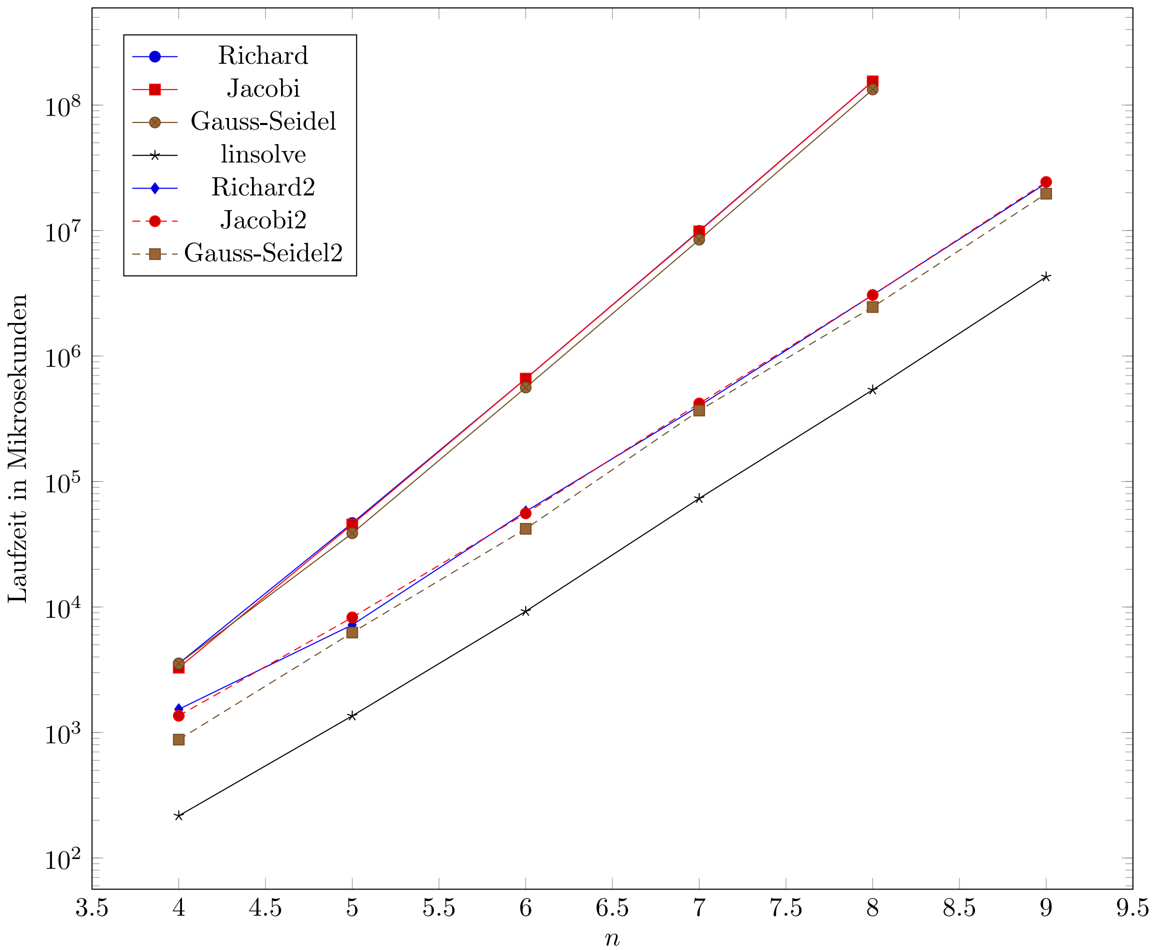

Abbildung 1: Laufzeit der Verfahren zur Lösung von $Ax = b$. Die Verfahren, die mit einer 1 gekennzeichent sind, wurden in DenseMatrix implementiert, die mit einer 2 indizierten Verfahren haben verbesserte Laufzeiten durch die Verwendung von SparseMatrix. Beim Gauß-Seidel-Verfahren wurde zusätzlich das Invertieren von W verbessert, indem die Bandstruktur ausgenutzt wurde.