Anmerkung: Wir benutzen für Referenzen unser mit ein paar Kommilitonen zusammen getextes Skript, zu finden unter `https://flavigny.de/lecture/pdf/analysis2`.

Aufgabe 1

(a) **Induktionsanfang:** Es gilt für $n = 2$.

$$(x_1 + x_2)^\nu \overset{\text{Binom. Formel}}{=} \sum_{i=1}^{\nu} \binom{\nu}{i} x_1^i x_2^{\nu-i} = \nu! \sum_{i=1}^{\nu} \frac{x_1^i x_2^{\nu-i}}{i!(\nu-i)!} = \nu! \sum_{i=1}^{\nu} \frac{x^{(i,\nu-i)}}{(i,\nu-i)!} = \nu! \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{x^\alpha}{\alpha!}$$

Der letzte Umformungsschritt gilt, da der zweite Eintrag eines Index $\alpha = (i, j)$ mit $|\alpha| = \nu$ bereits durch $\nu - i$ gegeben ist. Durch Iteration über alle i erhält man so bereits alle α mit $|\alpha| = \nu$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt:

$$(x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1})^\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \binom{\nu}{i} (x_1 + \cdots + x_n)^i x_{n+1}^{\nu-i}$$

Setzen wir die Definition des Binomialkoeffizienten und die Induktionsvoraussetzung ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&= \nu! \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{(\nu-i)! \cdot i!} \left(i! \sum_{|\alpha|=i} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \right) x_{n+1}^{\nu-i} \\
&= \nu! \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{|\alpha|=i} \frac{x^\alpha x_{n+1}^{\nu-i}}{(\nu-i)! \cdot \alpha!} \\
&= \nu! \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{|\alpha|=i} \frac{x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{\nu-i}}{\alpha_1! \cdot \dots \alpha_n! \cdot (\nu-i)!} \\
&= \nu! \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{|\alpha|=i} \frac{x^{(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\nu-i)}}{(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\nu-i)!}
\end{aligned}$$

Analog zur letzen Umformung im Induktionsanfang ist das letze Element des Multiindex $\beta := (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \nu - i)$ bereits vollständig durch $|\alpha| = i$ und $|\beta| = \nu$ festgelegt, sodass wir durch Iteration über i alle Multiindizes mit $|\beta| = \nu$ erhalten

$$= \nu! \sum_{|\beta|=\nu} \frac{x^\beta}{\beta!}$$

(b) Wir berechnen zunächst einige Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x_1,x_2,x_3) &= e^{-x_2} - x_3 e^{-x_1} & \partial_2 f(x_1,x_2,x_3) &= -x_1 e^{-x_2} & \partial_3 f(x_1,x_2,x_3) &= e^{-x_1} \\
\partial_1\partial_1 f(x_1,x_2,x_3) &= x_3 e^{-x_1} & \partial_2\partial_2 f(x_1,x_2,x_3) &= x_1 e^{-x_2} & \partial_3\partial_3 f(x_1,x_2,x_3) &= 0 \\
\partial_2\partial_1 f(x_1,x_2,x_3) &= -e^{-x_2} & \partial_3\partial_2 f(x_1,x_2,x_3) &= 0 & \partial_1\partial_3 f(x_1,x_2,x_3) &= -e^{-x_1}
\end{aligned}$$

An der Stelle $(x_1, x_2, x_3)^T = \hat{x}$ erhalten wir also $x_1 = -1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 0$.

$$\begin{array}{lll} \partial_1 f(x_1,x_2,x_3) = e & \partial_2 f(x_1,x_2,x_3) = e & \partial_3 f(x_1,x_2,x_3) = e \\ \partial_1\partial_1 f(x_1,x_2,x_3) = 0 & \partial_2\partial_2 f(x_1,x_2,x_3) = -e & \partial_3\partial_3 f(x_1,x_2,x_3) = 0 \\ \partial_2\partial_1 f(x_1,x_2,x_3) = -e & \partial_3\partial_2 f(x_1,x_2,x_3) = 0 & \partial_1\partial_3 f(x_1,x_2,x_3) = -e \end{array}$$

$$\begin{aligned} T_2^f(\hat{x}+h) &= \sum_{|\alpha|=0}^{r} \frac{\partial^\alpha f(\hat{x})}{\alpha!} h^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^{3} \partial_i f(\hat{x}) h_i + \sum_{i=1}^{3} \partial_i\partial_i f(\hat{x}) \frac{h_i^2}{2} + \partial_2\partial_1 f(\hat{x}) h_2 h_1 + \partial_3\partial_2 f(\hat{x}) h_2 h_3 + \partial_1\partial_3 f(\hat{x}) h_1 h_3 \\ &= eh_1 + eh_2 + eh_3 - e\frac{h_2^2}{2} - eh_2h_1 - eh_1h_3 \\ &= e\left(h_1 + h_2 + h_3 - \frac{h^2}{2} - h_2h_1 - h_1h_3\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Wir berechnen zunächst den Gradienten

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 8x + (4x^2+y^2)(-2x) \\ 2y + (4x^2+y^2)(-8y) \end{pmatrix} \cdot e^{-x^2-4y^2}$$

und die Hesse-Matrix

$$\begin{pmatrix} -24x^2 + 8 - 2y^2 + (-8x^3 + 8x - 2xy^2)(-2x) & -4xy + (-8x^3 + 8x - 2xy^2)(-8y) \\ (-8y^3 + 2y - 32x^2y)(-2x^2) - 64xy & -24y^2 + 2 - 32x^2 - 8y(-8y^3 + 2y - 32x^2y) \end{pmatrix} \cdot e^{-x^2-4y^2}.$$

An einer Extremstelle muss notwendigerweise $\nabla f = 0$ sein. Da die Exponentialfunktion nicht 0 wird, erhalten wir folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= 2x \cdot (-4x^2 + 4 - y^2) \\ 0 &= 2y \cdot (4y^2 - 1 + 16x^2) \end{aligned}$$

Wir machen nun eine Fallunterscheidung. Beim Einsetzen in die Hesse-Matrix lassen wir stets die Exponentialfunktion weg, da diese stets größer 0 ist und keinen Einfluss auf die Klassifizierung hat.

1. $x = y = 0$ ist eine Lösung der Gleichungen. Setzen wir dies in die Hesse-Matrix ein, so erhalten wir
$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
was offensichtlich positiv definit ist. Daher erhalten wir ein lokales Minimum bei $x = y = 0$.

2. $x = 0,\ y \neq 0$. Die erste Gleichung ist also erfüllt, nun müssen wir die Bedingungen für die zweite Gleichung überprüfen. Wir erhalten durch Einsetzen $4y^2 - 1 = 0$, woraus wir $y = \pm\frac{1}{2}$ schließen. Setzen wir diese beiden Möglichkeiten in die Hesse-Matrix ein, so erhalten wir
$$H_f(0, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad H_f(0, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

sodass an beiden Stellen kein Extremum vorliegt, da die Hesse-Matrix offensichtlich semidefinit ist.

3. $x \neq 0,\ y = 0$. Die zweite Gleichung ist erfüllt, aus der ersten Gleichung erhalten wir $4 = 4x^2 \iff x = \pm 1$. Setzen wir dies in die Hesse-Matrix ein, so ergibt sich

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -30 \end{pmatrix}, \qquad H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -30 \end{pmatrix},$$

was offensichtlich negativ semidefinit ist, wir erhalten zwei lokale Maxima.

4. $x \neq 0,\ y \neq 0$. In diesem Fall erhalten wir durch Umformungen einen Widerspruch.

Umformen der ersten Gleichung liefert

$$-4x^2 + 4 = y^2$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} 4(-4x^2 + 4) - 1 + 16x^2 &= 0 \\ -16x^2 + 16 - 1 + 16x^2 &= 0 \\ 15 &= 0 \lightning \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die Funktion F mit

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) &= y_1 + \sin(y_1 y_2) - y_1 x_1 - 1 - \frac{\pi}{2} \\ F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) &= x_2 + y_2 - \cos(y_1) \end{aligned}$$

ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} D_y F(x^0, y^0) &= \left.\begin{pmatrix} 1 + y_2 \cos(y_1 y_2) - x_1 & y_1 \cos(y_1 y_2) \\ \sin(y_1) & 1 \end{pmatrix}\right|_{(0,-1,\frac{\pi}{2},1)^T} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Matrix ist also invertierbar und

$$\left(D_y F(x^0, y^0)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es dann die geforderten eindeutigen Funktionen und es gilt

$$\begin{aligned} J_g(x^0) &= -\left(D_y F(x^0, y^0)\right)^{-1} \cdot D_x F(x^0, y^0) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,-1,\frac{\pi}{2},1)^T} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ -\frac{\pi}{2} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Diese Gleichung wird durch die implizite Funktion $F(\varepsilon, x) = \varepsilon^2 x - \ln(3\varepsilon + x)$ beschrieben. Die 1×1-Matrix $D_x F(\varepsilon_0, x_0) = \varepsilon_0^2 - \frac{1}{3\varepsilon_0 + x_0} = -1$ ist offensichtlich invertierbar mit $(D_x F(\varepsilon_0, x_0))^{-1} = -1$. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es daher eine eindeutige Abbildung g, die F in einer Umgebung von $(0,1)^T$ nach x auflöst. Es gilt nun nach Bemerkung 4.45

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\varepsilon_0, f(\varepsilon_0))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_0, f(\varepsilon_0)) = -(D_x F(\varepsilon_0, x_0))^{-1} \cdot \left(2\varepsilon_0 x_0 - \frac{3}{3\varepsilon_0 + x_0}\right) = -3$$

Nun müssen wir die zweite Ableitung berechnen. Analog zu Beispiel 4.46 folgern wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_0) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\varepsilon_0, f(\varepsilon_0))\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \varepsilon}\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)^2\right)\Bigg|_{(\varepsilon_0, f(\varepsilon_0))} \\ &= 2x_0 + \frac{9}{(3\varepsilon_0 + x_0)^2} + 2\left(2\varepsilon_0 + \frac{3}{(3\varepsilon_0 + x_0)^2}\right) \cdot (-3) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon^2 - \frac{1}{3\varepsilon + x}\right)\Bigg|_{(\varepsilon_0, x_0} \cdot 9 \\ &= 2x_0 + \frac{9}{(1)^2} + 2\left(2 \cdot 0 + \frac{3}{(1)^2}\right) \cdot (-3) + \frac{1}{(3\varepsilon_0 + x_0)^2} \cdot 9 \\ &= 2 + 9 + 6 \cdot (-3) + 9 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Damit können wir nun das Taylorpolynom aufstellen.

$$T_2^g(\varepsilon_0 + h) = g(\varepsilon_0) + g'(\varepsilon_0) \cdot h + \frac{g''(\varepsilon_0)}{2} h^2 = 1 - 3h + 2h^2$$

Aufgabe 5

Es gilt für alle x_1, x_2, x_3 in einer geeigneten Umgebung von x_1^0, x_2^0, x_3^0

$$\begin{aligned}
f(g_1(x_2, x_3), x_2, x_3) = f(x^0) \quad &\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}}{\Longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad &&\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial f}{\partial x_2} \\
f(x_1, g_2(x_1, x_3), x_3) = f(x^0) \quad &\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_3}}{\Longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \quad &&\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial f}{\partial x_3} \\
f(x_1, x_2, g_3(x_1, x_2)) = f(x^0) \quad &\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}}{\Longrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad &&\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial g_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial f}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

Werten wir diese Gleichungen an der Stelle x^0 aus und multiplizieren sie, so erhalten wir

$$\prod_{i=1}^{3} -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) = \prod_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_2^0, x_3^0)\frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x_1^0, x_3^0)\frac{\partial g_3}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0)$$

Wir teilen durch $\prod_{i=1}^{3} -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \neq 0$ und erhalten

$$-1 = \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(x_2^0, x_3^0) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(x_1^0, x_3^0) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0).$$