Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 7

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 15. Juni 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. Kugelvolumen im n-dimensionalen Raum

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, tritt bei der Bestimmung der Anzahl möglicher Mikrozustände bei vorgegebener Energie die Frage auf, wie groß das Volumen einer Kugel mit Radius r im n-dimensionalen Raum ist. Letztere ist durch die Menge

$$S_r^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2 \right\}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass das Volumen einer solchen Kugel durch

$$V_n = \frac{\Omega_n r^n}{n}$$

gegeben ist, wobei Ω_n der n-dimensionale Raumwinkel ist. Benutzen Sie dabei, dass das Volumenelement in n Dimensionen durch $\mathrm{d}V_n = r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Omega_n$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Gleichheiten gelten,

$$\Omega_n \int_0^\infty \mathrm{d}r\ \mathrm{e}^{-r^2}\, r^{n-1} = \left(\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x \right)^n = \pi^{n/2}.$$

c) Führen Sie das Integral auf der linken Seite der vorherigen Gleichung durch geeigente Substitution zurück auf die *Gammafunktion*

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\,.$$

d) Folgern Sie aus den Ergebnissen der Teilaufgaben a) bis c) zusammen mit der Identität $x\,\Gamma(x) \equiv \Gamma(x+1)$, dass das Volumen der n-dimensionalen Kugel durch

$$V_n = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma(n/2+1)} \tag{I}$$

gegeben ist.

e) Nutzen Sie die Eigenschaften der Gammafunktion

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{und} \qquad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{n!\,4^n}\sqrt{\pi}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, um zu zeigen, dass (I) die Volumina $V_2 = \pi r^2$ und $V_3 = 4\pi r^3/3$ reproduziert.

2. *Anzahl von Mikrozuständen*

Betrachten Sie ein System aus $N \gg 1$ Punktteilchen der Masse m mit der zugehörigen Hamilton-Funktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} z_i^2 + V(x_i, y_i) \right] \qquad \text{mit} \qquad V(x_i, y_i) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_i^2 + y_i^2 \leq R^2 \\ \infty & \text{für } x_i^2 + y_i^2 > R^2. \end{cases}$$

Die Teilchen spüren also ein harmonisches Potential parallel zur z-Achse, während sie sich orthogonal dazu nur innerhalb des Radius R bewegen können.

a) Berechnen Sie die zugänglichen Zustände bis zur Maximalenergie E,

$$\Phi(E) = \frac{1}{h_0^{3N}} \int\limits_{0 \leq H \leq E} \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}x_i \, \mathrm{d}y_i \, \mathrm{d}z_i \, \mathrm{d}p_{x,i} \, \mathrm{d}p_{y,i} \, \mathrm{d}p_{z,i}, \tag{II}$$

indem Sie

(i) für x_i und y_i der Symmetrie angemessene Koordinaten einführen,

(ii) neue Koordinaten für z_i, $p_{x,i}$, $p_{y,i}$ und $p_{z,i}$ einführen, sodass $\bar{H} \equiv H - \sum_{i=1}^{N} V(x_i, y_i)$ als $\bar{H} = \sum_{j=1}^{4N} \xi_j^2$ geschrieben werden kann,

(iii) die Integration (II) in den neuen Koordinaten ausführen und dabei einen Teil auf das Volumenintegral einer $4N$-dimensionalen Kugel vom Radius $\sqrt{E}$ zurückführen. Benutzen Sie dazu, dass das Volumen einer n-dimensionalen Kugel durch (I) gegeben ist.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Zustände $\Omega(E)$ in der Energieschale $E \leq H \leq E + \delta E$.

3. *Vollständige und unvollständige Differentiale*

Die folgenden Differentiale beschreiben näherungsweise das Verhalten realer Gase als Funktion des Drucks P, des Volumens V und der Temperatur T. Prüfen Sie, ob es sich bei

a) $\delta F(P, V, T) = (V - b)\,\mathrm{d}P + \left(P - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}\right)\mathrm{d}V - R\,\mathrm{d}T,$

b) $\delta F(P, V, T) = V\,\mathrm{d}P + \left(P - \frac{a}{V^2}\right)\mathrm{d}V - \left(\frac{cP}{T^2} + R\right)\mathrm{d}T,$

um vollständige Differentiale handelt; a, b, c und R seien hierbei Konstanten. Bestimmen Sie, wenn möglich, die zugehörige Funktion F.

4. *Verständnisfragen*

a) Wodurch ist ein Mikrozustand in einem System aus klassisch-mechanischen Teilchen gekennzeichnet?

b) Wodurch kann dagegen ein Makrozustand angegeben werden?

c) Was besagt das Grundpostulat der statistischen Physik?