Endliche separable K-Algebren

28.04.2022

Satz (Struktur endlicher K-Algebren)**.** *Sei B eine endlichdimensionale K-Algebra. Dann gilt*

$$B \cong \prod_{i=1}^{t} B_i$$

für ein $t \geq 0$ und lokale K-Algebren B_i mit nilpotentem Maximalideal.

Definition. *Eine endliche K-Algebra B heißt separabel, wenn der Homomorphismus*

$$\begin{aligned} \phi \colon B &\to \hom_K(B, K) \\ x &\mapsto (y \mapsto \mathrm{Sp}(xy)) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Satz (Struktur separabler Algebren)**.** *Sei K ein Körper mit algebraischen Abschluss $\overline{K}$ und B eine endlichdimensionale K-Algebra. Wir definieren außerdem die K-Algebra $\overline{B} := B \otimes_K \overline{K}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *B ist separabel über K*
2. *$\overline{B}$ ist separabel über $\overline{K}$*
3. *$\overline{B} \cong \overline{K}^n$ als K-Algebren für ein $n \geq 0$*
4. *$B \cong \prod_{i=1}^{t} B_i$ als K-Algebren für ein $t \geq 0$ und endlich separablen Körpererweiterungen B_i/K.*

Definition. *Eine π-Menge ist eine endliche Menge E mit einer stetigen Gruppenwirkung $\pi \curvearrowright E$. Dabei trägt π die proendliche und E die diskrete Topologie.*

Das Hauptresultat dieses Vortrags deutet schon auf die Kategorienantiäquivalenz hin, die wir insgesamt im Seminar zeigen wollen:

Theorem. *Sei K ein Körper und $\pi = \mathrm{Gal}(K_s/K)$ die absolute Galoisgruppe. Dann sind die Kategorien SepAlg_K und $\pi - \mathrm{Fin}$ antiäquivalent.*