# Aufgabe 1

(a) Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{81}{n^2} = 0$. Daher können wir folgern:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+3n-1}{9n^2-81} = \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{9-\frac{81}{n^2}} \overset{\text{Lemma 2.5}}{=} \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

(b) Behauptung $a_n = (-1)^n$.
Beweis durch Fallunterscheidung

- $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k$: Dann ist $\frac{7^{2k}+(-13)^{2k}}{(-7)^{2k}+13^{2k}} = \frac{7^{2k}+13^{2k}}{7^{2k}+13^{2k}} = 1 = -1^{2k}$
- $\exists k \in \mathbb{N} : n = 2k-1$: Dann ist $\frac{7^{2k-1}+(-13)^{2k-1}}{(-7)^{2k-1}+13^{2k-1}} = \frac{7^{2k-1}-13^{2k-1}}{-7^{2k-1}+13^{2k-1}} = \frac{7^{2k-1}-13^{2k-1}}{-(7^{2k-1}-13^{2k-1})} = -1 = -1^{2k-1}$

Da jede Folge genau dann konvergiert, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, und $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+1}| = 2$ ist, kann $a_n = (-1)^n$ nicht konvergieren.

(c) $a_n = \binom{42n}{n^2} = \prod_{j=1}^{n^2} \frac{42n-j+1}{j}$. Sei nun $n > 42$. Dann ist

$$\prod_{j=1}^{n^2} \frac{42n-j+1}{j} = \prod_{j=1}^{42^2} \frac{42^2-j+1}{j} \cdot \underbrace{\frac{42^2-(42^2+1)+1}{j}}_{=0} \cdot \prod_{j=42^2+2}^{n^2} \frac{42n-j+1}{j} = 0$$

Folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(d) **Z.Z.:** $(2n)! > n^4 \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

*Beweis.*
**Induktionsanfang:** $n = 2$: $(2 \cdot 2)! = 24 > 16 = 2^4$
**Induktionsannahme:** Gelte die Behauptung für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
**Induktionsschluss:** $n \to n+1$

$$(2n+2)! = (2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)! \overset{\text{I.V.}}{>} (2n+2)(2n+1)\cdot n^4 \overset{n\geq 2}{\geq} 30n^4 > n^4+4n^3+6n^2+4n+1 = (n+1)^4$$

$\square$

Daraus folgt $a_n = \frac{n^3}{\binom{2n}{n}} = \frac{n^3}{\frac{(2n)!\cdot n!}{(2n-n)!}} = \frac{n^3}{(2n)!} \leq \frac{n^3}{n^4} = \frac{1}{n}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(e) Es gilt

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right) \overset{\text{Teleskopprodukt}}{=} \frac{1}{n}$$

und daher $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

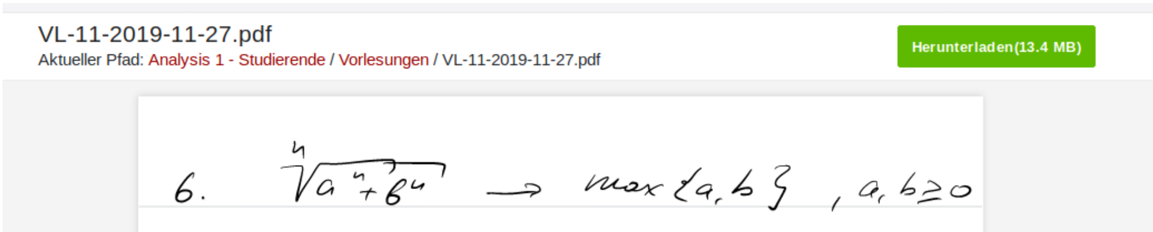


Abbildung 1: Skript zur Analysis 1 Vorlesung vom 27.11.

(f) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sin(n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\sin(n)\cdot\frac{1}{n} \overset{\text{Lemma 2.5}}{=} 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ und daher insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi n + 2\sin(n)}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi + \frac{2\sin(n)}{n}}{2+\frac{1}{n}} \overset{\text{Lemma 2.5}}{=} \frac{\pi}{2}$$

(g) Nach Vorlesung gilt (siehe Abbildung 1): $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n+y^n} = \max(x,y)$

(h) Es gilt

$$n^n = \prod_{k=1}^{n} n = n\prod_{k=2}^{n} n > n\prod_{k=2}^{n} k = n\cdot n!$$

Daraus folgt $a_n = \frac{n^n}{n!} \geq \frac{n\cdot n!}{n!} = n$. Daher ist $a_n$ nicht konvergent.

(i) Es gilt

$$n^n\cdot n = n^2\cdot\prod_{k=1}^{n-1} n < n^2\prod_{k=1}^{n-1} k(n+k) < n\cdot(n+n)\prod_{k=1}^{n-1} k(n+k) < \prod_{k=1}^{n} k(n+k) = \prod_{k=1}^{2n} k = (2n)!$$

Folglich ist $a_n = \frac{n^n}{(2n)!} \leq \frac{n^n}{n^n\cdot n} = \frac{1}{n}$ und da alle $a_n > 0$ sind, gilt nach Sandwichlemma $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

# Aufgabe 2

Sei $s$ eine obere Schranke für $|b_n|$. Dann gilt $\forall n\in\mathbb{N}: 0 \leq |a_n|\cdot|b_n| \leq |a_n|\cdot s$. Da $a_n$ eine Nullfolge ist, folgt mit Lemmma 2.5 und dem Sandwichlemma sofort $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|\cdot|b_n| = 0$. Ist $|a_n|\cdot|b_n| = |a_n\cdot b_n|$ eine Nullfolge, so ist offensichtlich auch $a_n\cdot b_n$ eine Nullfolge.

# Aufgabe 3

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = s\in\mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann

$$\exists N_a\in\mathbb{N}: \forall n\geq N_a: |a_n - s| < \varepsilon$$

und

$$\exists N_b\in\mathbb{N}: \forall n\geq N_b: |b_n - s| < \varepsilon.$$

Folglich ist

$$\forall n > \max(N_a, N_b) : |a_n - s| < \varepsilon \text{ und } |b_n - s| < \varepsilon$$

und äquivalent dazu

$$\forall n > \max(N_a, N_b) : |c_{2n-1} - s| < \varepsilon \text{ und } |c_{2n} - s| < \varepsilon.$$

Zusammengenommen erhalten wir

$$\forall n \geq \max(N_a, N_b) : |c_n - s| < \varepsilon.$$

Das impliziert sofort $\lim_{n\to\infty} c_n = s$.
Sei nun andererseits $\varepsilon > 0$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = s \in \mathbb{R}$. Dann

$$\exists N_c \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_c : |c_n - s| < \varepsilon$$

und insbesondere gilt nun

$$\forall n \geq N_c : |c_{2n} - s| < \varepsilon \text{ und } |c_{2n-1} - s| < \varepsilon.$$

Äquivalent dazu erhalten wir

$$\forall n \geq N_c : |a_n - s| < \varepsilon \text{ und } |b_n - s| < \epsilon.$$

Das impliziert sofort $\lim_{n\to\infty} a_n = s$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = s$.

# Aufgabe 4

(a) Z.Z.: 1 und $-1$ sind die einzigen Häufungspunkte und damit $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$

*Beweis.* Wir betrachten 2 Teilfolgen $d_n := a_{2n-1}$ und $e_n := a_{2n}$ von $a_n$. Es gilt $d_n = \frac{(-1)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{2n}\right)} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{2n}\right)}$ und $e_n = \frac{(-1)^{2n-1}}{1+\left(\frac{1}{2n-1}\right)} = -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2n-1}\right)}$. Mit Lemma 2.5 erhalten wir sofort $\lim_{n\to\infty} d_n = 1$ und $\lim_{n\to\infty} e_n = -1$. Daher sind 1 und $-1$ Häufungspunkte von $a_n$. Sei $1 \neq f \neq -1$ ein weiterer Häufungspunkt von $a_n$. Dann existiert eine Teilfolge $f_n$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Daher muss es aber auch eine Teilfolge von $d_n$ oder $e_n$ geben, die gegen $f$ konvergiert. Jede Teilfolge von $d_n$ konvergiert aber gegen 1 und jede Teilfolge von $e_n$ konvergiert gegen $-1$. Daher ist $f = 1$ oder $f = -1$ und daher sind 1 und $-1$ die einzigen Häufungswerte von $a_n$. □

(b) Z.Z.: $1, 0$ und $-1$ sind die einzigen Häufungspunkte und damit $\limsup_{n\to\infty} b_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} b_n = -1$.

*Beweis.* Wir definieren wieder mehrere Teilfolgen. Sei $g_n \coloneqq b_{10n}$, $h_n \coloneqq b_{2n-1}$ und $i_n$ die Folge aller $a_{2n}$ mit $5 \nmid n$. Dann ist offensichtlich $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$. Mit Lemma 2.5 ist $\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{2n-1}(2n)^2+2}{(2n+2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{-4n^2+2}{4n^2+4n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{-4+\frac{2}{n^2}}{4+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} = -1$ und $\lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{2n}(2n)^2+2}{(2n+2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2}{4n^2+4n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{2}{n^2}}{4+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} = 1$. Analog zur (a) folgt nun, dass 1, 0 und $-1$ die einzigen Häufungswerte unserer Folge sind und daher $\limsup_{n\to\infty} b_n = 1$ sowie $\liminf_{n\to\infty} b_n = -1$. □

(c) Z.Z.: $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{6}$ und $-\frac{5}{6}$ sind die einzigen Häufungspunkte und damit $\limsup_{n\to\infty} c_n = \frac{5}{6}$ und $\liminf_{n\to\infty} c_n = -\frac{5}{6}$.

*Beweis.* **Behauptung:**

$$c_n = \begin{cases} \frac{5}{6} & |\exists k \in \mathbb{N} : n = 4k \\ -\frac{5}{6} & |\exists k \in \mathbb{N} : n = 4k+1 \\ \frac{1}{6} & |\exists k \in \mathbb{N} : n = 4k+2 \\ -\frac{1}{6} & |\exists k \in \mathbb{N} : n = 4k+3 \end{cases}$$

Beweis der Behauptung durch Fallunterscheidung:

- $\exists k \in \mathbb{N} : n = 4k$
  Dann ist $c_n = c_{4k} = \frac{(-1)^{4k}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{4k(4k+1)}{2}}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{2k(4k+1)}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.
- $\exists k \in \mathbb{N} : n = 4k+1$
  Dann ist $c_n = c_{4k+1} = \frac{(-1)^{4k+1}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}}}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{(4k+1)(2k+1)}}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}$.
- $\exists k \in \mathbb{N} : n = 4k+2$
  Dann ist $c_n = c_{4k+2} = \frac{(-1)^{4k+2}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{(4k+2)(4k+3)}{2}}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{(2k+1)(4k+3)}}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
- $\exists k \in \mathbb{N} : n = 4k+1$
  Dann ist $c_n = c_{4k+3} = \frac{(-1)^{4k+3}}{2} + \frac{(-1)^{\frac{(4k+3)(4k+4)}{2}}}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{(4k+3)(2k+2)}}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$.

Die Folge nimmt also nur vier verschiedene Werte an, allerdings jeden davon unendlich oft. Daher sind $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{6}$ und $-\frac{5}{6}$ alle Häufungspunkte von $a_n$ und folglich ist $\limsup_{n\to\infty} c_n = \frac{5}{6}$ und $\liminf_{n\to\infty} c_n = -\frac{5}{6}$. □