Algebraische Zahlentheorie II
Sommersemester 2022

Dr. Katharina Hübner
basierend auf Alexander Schmidts AZT2-Skript von 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Lokale Klassenkörpertheorie **1**
1.1 Der Existenzsatz 2
1.2 Primitive Erzeugung 4
1.3 Zahm verzweigte Erweiterungen 6
1.4 Trägheits- und Verzweigungsgruppen 8
1.5 Das Bild der Einheiten unter Reziprozität 13

1 Lokale Klassenkörpertheorie

Es sei k ein lokaler Körper, $\overline{k}$ ein separabler Abschluss und $G = G_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}|k)$. In Kapitel 4 haben wir einen Isomorphismus

$$inv_K : H^2(G_k, \overline{k}^\times) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

konstruiert, so dass für $k \subset K \subset L \subset \overline{k}$ mit L/k endlich das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^2(L|K, L^\times) & \xrightarrow{\text{inf}} & H^2(K, \overline{k}^\times) & \xrightarrow{res} & H^2(L, \overline{k}^\times) \\
 & & \downarrow inv_{L|K} & & \downarrow inv_K & & \downarrow inv_L \\
0 & \longrightarrow & \frac{1}{(L:K)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{[L:K]} & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}
\end{array}$$

kommutiert. Außerdem gilt für jeden Zwischenkörper $k \subset K \subset \overline{k}$ nach Hilberts Satz 90, dass $H^1(G_K, \overline{k}^\times) = 0$. Wir erhalten

Satz 1.1. *Das Paar $(G_k, \overline{k}^\times)$ ist eine Klassenformation.*

Korollar 1.2. *Wir erhalten einen Reziprozitätshomomorphismus*

$$rec : k^\times \longrightarrow G_k^{\mathrm{ab}}$$

mit dichtem Bild.

Ziele:

1.) Verstehe die Normengruppe in $k^\times$.
2.) Verstehe das Bild von *rec*.
3.) Welche Rolle spielt das Bild $rec(U_k)$?

1.1 Der Existenzsatz

Satz 1.3. *Die Normengruppen in $k^\times$ sind genau die offenen Untergruppen von endlichem Index.*

Wir brauchen zunächst:

Satz 1.4. *Sei $(n, char\ k) = 1$ und $\mu_n \subset k$. Sei $K = k(\sqrt[n]{k^\times})$ die Erweiterung, die man durch Adjunktion der n-ten Wurzel aus allen Elementen in $k^\times$ erhält. Dann ist $K|k$ endlich und*

$$N_{K|k}K^\times = k^{\times n}$$

Beweis. Wir fixieren eine primitive n-te Einheitswurzel in k, d.h. einen Isomorphismus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_n$ und erhalten nach Kummer-Theorie

$$H^1(G_k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong H^1(G_k, \mu_n) \cong k^\times/k^{\times n}.$$

Nach Zahlentheorie I, 8.54, ist $k^\times/k^{\times n}$ endlich. Entspricht $\varphi \in H^1(G_k, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ bzgl. dieses Isomorphismus dem Element $x \in k^\times/k^{\times n}$, so ist $\overline{k}^{\ker(\varphi)} = k(\sqrt[n]{x})$. Daher ist K das Kompositum aller zyklischen Erweiterungen von k, deren Ordnung n teilt. Wir erhalten einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} G(K|k) \cong \operatorname{Hom}(G(K|k), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\vee &= \operatorname{Hom}(G_k^{\mathrm{ab}}/n, \mathbb{Z}/n)^\vee \\ &= H^1(G_k, \mathbb{Z}/n)^\vee = (k^\times/k^{\times n})^\vee. \end{aligned}$$

Daher ist $K|k$ endlich (und abelsch sowieso). Nun hat die Gruppe $G(K|k)$ den Exponenten n. Daher gilt $n \cdot \hat{H}^i(G(K|k), A) = 0$ für jeden $G(K|k)$-Modul A. Für $i = 0$ und $A = K^\times$ erhalten wir $k^{\times n} \subseteq N_{K|k}K^\times$.

Nach Korollar 9 in Kapitel 6 gilt nun aber

$$(k^\times : N_{K|k}K^\times) = [K : k] = \#k^\times/k^{\times n}$$

und wir erhalten $N_{K|k}K^\times = k^{\times n}$. □

Beweis von Satz 1.3. Wir versehen für jede endliche Erweiterung $K|k$ die Gruppe $K^\times$ mit ihrer natürlichen Topologie. Nach Abschnitt 6 in Kapitel 6 müssen wir die folgenden Axiome verifizieren:

Axiom I. Für jede endliche Erweiterung $L'|L$ hat die Normabbildung abgeschlossenes Bild und kompakten Kern.

Beweis von Axiom I. Die Normabbildung $N_{L'|L} : L'^{\times} \to L^{\times}$ ist eigentlich, siehe Übungsaufgabe.

Axiom II. Für jede Primzahl p existiert ein Körper L_p so dass für $L \supset L_p$ die p-Potenzierung $m_p : L^{\times} \to L^{\times}$ der folgenden Bedingung genügt

$$(*) \qquad \ker(m_p) \text{ ist kompakt und } \operatorname{im}(m_p) \supset D_L$$

Beweis von Axiom II. Der Kern von m_p ist endlich. Wir zeigen die Aussage über $\operatorname{im}(m_p)$ im Fall $p \neq \operatorname{char} k$. Setze $L_p = k(\mu_p)$. Dann gilt für jedes $L \supset L_p$ nach 1.4:

$$N(L(\sqrt[p]{L^{\times}})/L) = L^{\times p} = \operatorname{im}(m_p)$$

also $D_L \subset \operatorname{im}(m_p)$

- für $p = \operatorname{char} k$, siehe Serre: Local fields.

Axiom III. Es existiert eine kompakte Untergruppe $U \subset L^{\times}$, so dass jede Untergruppe von endlichem Index in $L^{\times}$, die U enthält, Normengruppe ist.

Zum Beweis brauchen wir:

Lemma 1.5. *Sei $L_n|L$ die unverzweigte Erweiterung vom Grad n. Dann gilt*

$$N_{L_n|L}(L_n^{\times}) = \ker(L^{\times} \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\pi^n) \times U_L$$

wobei π eine Uniformisierende von L ist.

Beweis. U_{L_n} ist ein kohomologisch trivialer $G(L_n|L)$-Modul, insbesondere

$$\hat{H}^0(G(L_n|L), U_{L_n}) = 0, \text{ d.h. } N_{L_n|L}(U_{L_n}) = U_L,$$

d.h. $N_{L_n|L}(L_n^{\times}) \supset U_L$. Es ist π eine Uniformisierende von L_n und

$$N_{L_n|L}(\pi) = \pi^n \Longrightarrow (\pi^n) \times U_L \subset N_{L_n|L}(L_n^{\times}).$$

Nun gilt aber

$$(L^{\times} : (\pi^n) \times U_L) = n = (L^{\times} : N_{L_n|L}(L_n^{\times})),$$

also $(\pi^n) \times U_L = N_{L_n|L}(L_n^{\times})$.

□

Beweis von Axiom III. Wir setzen $U = U_L$. Die offenen Untergruppen von endlichem Index in $L^{\times}$, die U_L enthalten, sind wegen $L^{\times}/U_L \xrightarrow[\sim]{v} \mathbb{Z}$ genau die Untergruppen der Form $(\pi^n) \times U_L$ und diese sind nach 1.5 Normengruppen. Dies zeigt Satz 1.3. □

Korollar 1.6. *Die Gruppe der universellen Normen ist trivial.*

Beweis. Nach Zahlentheorie I, 8.54, ist der Durchschnitt aller offenen Untergruppen von endlichem Index in $L^\times$ trivial. □

Korollar 1.7. *Die Reziprozitätsabbildung*

$$rec : k^\times \longrightarrow G(k^{\mathrm{ab}}|k)$$

ist stetig und injektiv.

Beweis. Nach 1.6 gilt $\ker(rec) = 0$. Nun faktorisiert *rec* als

$$\begin{array}{ccccc} k^\times \xrightarrow{\alpha} & \varprojlim\limits_{\substack{U \subset k^\times \\ \text{off. von endl. Index}}} & k^\times/U \underset{\sim}{\xrightarrow{\beta}} & \varinjlim\limits_{\substack{U \subset G(k^{\mathrm{ab}}|k) \text{ off.} \\ \text{von endl. Index}}} & G(k^{\mathrm{ab}}|k)/U \\ & & & & \| \wr \\ & & & & G(k^{\mathrm{ab}}|k) \end{array}$$

α ist stetig, da die Projektionen $k^\times \to k^\times/U$ stetig sind und β ist der projektive Limes von Isomorphismen endlicher Gruppen, also ein topologischer Isomorphismus. □

1.2 Primitive Erzeugung

Wir erinnern uns an AZT I, Lemma 8.55

Lemma 1.8. *Sei A ein kommutativer Ring, und M ein freier A-Modul vom endlichen Rang n. Dann ist jedes Erzeugendensystem $x_1, \dots, x_n$ der Länge n von M eine Basis.*

Satz 1.9. *Sei $L|K$ eine endliche separable Erweiterung lokaler Körper. Dann existiert ein $x \in \mathcal{O}_L$, so dass*

$$\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x].$$

Beweis. Sei $e = e(L|K)$, $f = f(L|K)$ und $n = [L : K]$, also $n = ef$. Sei $\pi = \pi_L$ eine Uniformisierende von L und sei $x \in \mathcal{O}_L$ so gewählt, dass $\ell = k(\overline{x})$.

Behauptung 1. Die Produkte

$$x^i \pi^j, \quad 0 \le i < f, \quad 0 \le j < e,$$

sind eine $\mathcal{O}_K$-Basis von $\mathcal{O}_L$.

Beweis der Behauptung 1. Diese Elemente erzeugen offenbar $\mathcal{O}_L/\pi^e\mathcal{O}_L$. Nun gilt $\mathfrak{p}_K \cdot \mathcal{O}_L = \pi^e\mathcal{O}_L$, d.h. diese Elemente erzeugen $\mathcal{O}_L/\mathfrak{p}_K\mathcal{O}_L$. Nach Nakayama erzeugen sie $\mathcal{O}_L$ und nach 1.8 sind sie eine Basis.

Behauptung 2. Man kann x so wählen, dass ein normales Polynom

$$F \in \mathcal{O}_K[x], \quad \deg F = f,$$

existiert, so dass $F(x) \in \mathcal{O}_L$ eine Uniformisierende ist.

Beweis von Behauptung 2. Sei $F \in \mathcal{O}_K[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad f, dessen Reduktion $\overline{F} \in k[x]$ das Minimalpolynom von $\overline{x} \in \ell$ über k ist. Wegen $\overline{F}(\overline{x}) = 0$ folgt $v_L(F(x)) \geq 1$. Gilt „=“, sind wir fertig. Ansonsten gilt $v_L(F(x)) \geq 2$. Sei $h \in \mathcal{O}_L$ irgendein Element mit $v_L(h) = 1$. Taylor:

$$F(x+h) = F(x) + h \cdot F'(x) + h^2 \cdot r,\ r \in \mathcal{O}_L.$$

Da $\overline{F}$ separabel ist, gilt $\overline{F}'(\overline{x}) \neq 0$, also

$$v_L(F'(x)) = 0,\ v_L(F'(x)h) = 1.$$

Wir erhalten $v_L(F(x+h)) = 1$ und $x+h$ erfüllt das Gewünschte.

Nun wählen wir x wie in Behauptung 2 und setzen $\pi = F(x)$. Nach Behauptung 1 ist $x^i F(x)^j$, $0 \leq i < f$, $0 \leq j < e$, eine $\mathcal{O}_K$-Basis von $\mathcal{O}_L$. Also wird $\mathcal{O}_L$ über $\mathcal{O}_K$ durch $1, x, \ldots, x^{n-1}$ erzeugt und nach 1.8 ist auch dies eine Basis. □

Satz 1.10. *Sei $L|K$ eine endliche separable Erweiterung lokaler Körper. Sei $x \in \mathcal{O}_L$, so dass $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[x]$, und sei $F \in \mathcal{O}_K[X]$ das Minimalpolynom von x. Dann sind äquivalent:*

(i) *$L|K$ ist unverzweigt,*
(ii) *$\overline{F} \in k[X]$ ist separabel,*
(iii) *$\overline{F} \in k[X]$ ist irreduzibel,*
(iv) *$v_L(F'(x)) = 0$.*

Beweis. Sei $\overline{F} = G_1^{e_1} \ldots G_g^{e_g}$ die Primzerlegung von $\overline{F} \in k[X]$. Dann gibt es g Primideale in $\mathcal{O}_L$ über $\mathfrak{p}_K$. Da $\mathcal{O}_L$ ein diskreter Bewertungsring ist, gilt $g = 1$, d.h. $\overline{F} = G^e$ für ein irreduzibles normales Polynom $G \in k[X]$ und $e = e(L|K)$.
Da k vollkommen ist, ist G separabel. Nun gilt in dieser Situation
$\overline{F}$ irreduzibel $\Longleftrightarrow e = 1 \Longleftrightarrow \overline{F}$ separabel $\Longleftrightarrow (\overline{F}, \overline{F}') = 1 \Longrightarrow \overline{F}'(\overline{x}) \neq 0$
$\Longleftrightarrow \overline{x}$ ist einfache Nullstelle von $\overline{F} \Longrightarrow e = 1$
Außerdem gilt $\overline{F}'(\overline{x}) \neq 0 \Longleftrightarrow v_L(F'(x)) = 0$. □

Erinnerung: $F \in \mathcal{O}_K[X]$ heißt *Eisensteinpolynom*, wenn

$$F = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

mit $\pi_K \mid a_i$, $i = 0, \ldots, a_{n-1}$ und $\pi_K^2 \nmid a_0$. Eisensteinpolynome sind irreduzibel.

Satz 1.11. *Sei K ein lokaler Körper und $F \in \mathcal{O}_K[X]$ ein Eisensteinpolynom. Sei $L = K[X]/F$. Dann ist $L|K$ rein verzweigte Erweiterung (d.h. $e(L|K) = [L : K]$) vom Grad $n = \deg F$ und das Bild von X in L ist eine Uniformisierende von L.*

Beweis. Da F irreduzibel ist, ist $L|K$ eine Körpererweiterung vom Grad $n = \deg F$. Sei $F = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, und sei α die tautologische Nullstelle von F in L (α ist das Bild von X unter $K[X] \longrightarrow K[X]/F = L$). Dann gilt:

$$-\alpha^n = a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0$$

und daher $v_L(\alpha) \geq 1$.
Es gilt auch

$$\begin{aligned} e = v_L(a_0) &= v_L(\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha) \\ &\geq \min(nv_L(\alpha), e + v_L(\alpha)). \end{aligned}$$

Daher gilt $e = n \cdot v_L(\alpha)$, also

$$v_L(\alpha) = 1 \quad \text{und} \quad e = n.$$ □

Umgekehrt gilt

Satz 1.12. *Sei $L|K$ eine rein verzweigte endliche separable Erweiterung lokaler Körper, und sei $\pi = \pi_L$ eine Uniformisierende von L. Dann gilt $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_K[\pi]$, und das Minimalpolynom F von π über K ist ein Eisensteinpolynom.*

Beweis. Nach Behauptung 1 im Beweis von 1.9 (wähle $x = 1$) ist $1, \pi, \ldots, \pi^{e-1}$ eine $\mathcal{O}_K$-Basis von $\mathcal{O}_L$. Für das Minimalpolynom $F \in \mathcal{O}_K[x]$ von π gilt wegen $\overline{\pi} = 0$ und $e = n$: $\overline{F} = X^e$ und daher

$$F = X^e + a_{e-1}X^{e-1} + \cdots + a_0$$

mit $\overline{a_i} = 0$, also $\pi_K \mid a_i$, also $\pi^e \mid a_i$ für $i = 0, \ldots, e-1$. Wir erhalten $-a_0 = \pi^e + a_{e-1}\pi^{e-1} + \cdots + a_1\pi$ und daher $v_L(a_0) = v_L(\pi^e) = e$ und $v_K(a_0) = 1$. □

1.3 Zahm verzweigte Erweiterungen

Erinnerung: $L|K$ heißt zahm verzweigt, falls $p \nmid e$ mit $e = e(L|K)$ und $p = \mathrm{char}(k)$.

Lemma 1.13. *Sei $(n,p) = 1$ und $\pi \in K$ eine Uniformisierende. Dann ist die Erweiterung $K(\sqrt[n]{\pi})|K$ rein zahm verzweigt vom Grad n, d.h. $e(K(\sqrt[n]{\pi})|K) = n$.*

Beweis. Wegen $v(\pi) = 1$ existiert in K für kein $m \geq 2$ eine n-te Wurzel aus π. Das Minimalpolynom F von $\sqrt[n]{\pi}$ ist ein Teiler des Eisensteinpolynoms $X^n - \pi \Longrightarrow F = X^n - \pi$. Jetzt folgt alles aus 1.11. □

Lemma 1.14. (i) *Für einen Turm $M|L|K$ gilt*

$$M|K \quad \text{z.v.} \quad \Longleftrightarrow M|L \quad \text{z.v.} \quad + \quad L|K \quad \text{z.v.}$$

(ii) *Ist $L_1|K$ unverzweigt und $L_2|K$ separabel, so gilt*

$$L_2|K \text{ z.v. } \iff L_1L_2|L_1 \text{ z.v.}$$

Beweis. (i) folgt aus der Multiplikativität der Verzweigungsindizes in Körpertürmen.
(ii)

$$\begin{tikzcd}
 & L_1L_2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash, "\text{unv.}"] & \\
L_1 \arrow[dr, dash, "\text{unv.}"'] & & L_2 \arrow[dl, dash] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

Nach (i) folgt nun

$$L_2|K \text{ z.v. } \iff L_1L_2|K \text{ z.v. } \iff L_1L_2|L_1 \text{ z.v.} \qquad \square$$

Satz 1.15. *Sei $\pi \in K$ eine Uniformisierende. Für eine Erweiterung $L|K$ sind äquivalent:*

(i) *$L|K$ ist zahm verzweigt.*
(ii) *Es existiert eine unverzweigte Erweiterung $M|K$ so dass $LM = M(\sqrt[e]{\pi})$, wobei $(e,p) = 1$.*

Beweis. (ii) $\implies$ (i). Nach 1.13 ist $LM|M$ zahm verzweigt. Nach 1.14 folgt $L|K$ ist zahm verzweigt.
(i) $\implies$ (ii). Sei $L|K$ zahm verzweigt und π_L eine Uniformisierende von L. Sei K' die maximal unverzweigte Teilerweiterung und π eine Uniformisierende von K und damit auch von K'. Es gilt

$$\pi_L^e = \pi \cdot \zeta \cdot u$$

mit $\zeta \in \mu'(L) = \mu'(K')$ und $u \in U_L^1$. Wegen $1/e \in \mathbb{Z}_p$ existiert $\sqrt[e]{\pi\zeta'} \in L$, also $L = K'(\sqrt[e]{\pi\zeta'})$. Mit $M := K'(\sqrt[e]{\zeta})$ erhalten wir $LM = M(\sqrt[e]{\pi})$. $\square$

Korollar 1.16. *Das Kompositum zahm verzweigter Erweiterungen ist zahm verzweigt.*

Beweis. Sei $e_1 = e(L_1|K)$, $e_2 = e(L_2'|K)$. Für geeignetes $M|K$ unverzweigt gilt:

$$\begin{aligned}
&L_1M = M(\sqrt[e_1]{\pi}),\ L_2M = M(\sqrt[e_2]{\pi}) \\
\implies &L_1L_2M = M(\sqrt[e]{\pi}) \text{ mit } e = \mathrm{kgV}(e_1, e_2) \\
\implies &L_1L_2M|M \text{ zahm verzweigt} \\
\implies &L_1L_2|K \text{ zahm verzweigt.}
\end{aligned}$$

$\square$

Definition. Wir nennen eine unendliche, separable algebraische Erweiterung L eines lokalen Körpers K **zahm verzweigt**, wenn jede endliche Teilerweiterung zahm verzweigt ist. Die maximal zahm verzweigte Teilerweiterung von K in einem gegebenen separablen Abschluß $\overline{K}$ von K wird mit K^{tr} bezeichnet.

Satz 1.17. *$K^{tr}|K$ ist galoissch. K^{tr} entsteht aus K durch Adjunktion aller prim-zu-p Einheitswurzeln und aller prim-zu-p-ten Wurzeln aus π.*

Setzt man $\hat{\mathbb{Z}}^{(p')} = \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_p$, so erhalten wir eine exakte Folge

$$1 \to \hat{\mathbb{Z}}^{(p')} \to G(K^{tr}|K) \to \hat{\mathbb{Z}} \to 1.$$

1.4 Trägheits- und Verzweigungsgruppen

Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung lokaler oder globaler Körper, und sei v eine nicht-archimedische Bewertung auf K und w eine Fortsetzung auf L.

Definition. • $T_w(L|K) = \{\sigma \in G_w(L|K) \mid \sigma x \equiv x \mod \mathfrak{P}_w \quad \forall x \in \mathcal{O}_w\}$ heißt die **Trägheitsgruppe** von w in $L|K$. Hierbei ist $\mathcal{O}_w$ der Bewertungsring von w in L und $\mathfrak{P}_w \subset \mathcal{O}_w$ das Maximalideal
• $V_w(L|K) = \{\sigma \in G_w(L|K) \mid \frac{\sigma x}{x} \equiv 1 \mod \mathfrak{P}_w \quad \forall x \in L^\times\}$
heißt die **Verzweigungsgruppe** von w in $L|K$.

Bemerkungen. 1) Für $\sigma \in G_w$ und $x \in L^\times$ gilt $v_L(\sigma x) = v_L(x)$, also $\sigma x/x \in \mathcal{O}_w$. Daher ist die Definition von V_w sinnvoll.
2) Für $\sigma \in V_w$ und $x \in \mathcal{O}_w$ gilt $\sigma x \equiv x \mod \mathfrak{P}_w$. Daher gilt

$$V_w \subset T_w.$$

Lemma 1.18. (i) *Es gilt $\sigma \in T_w(L|K)$ (bzw. $V_w(L|K)$) dann und nur dann, wenn für jede endliche galoissche Teilerweiterung $K' \subset L$ gilt $\sigma|_{K'} \in T_w(K'|K)$ (bzw. $V_w(K'|K)$).*

(ii) *Es gilt*

$$T_w(L|K) = \varprojlim_{K \subset K' \subset L} T_w(K'|K)$$

und analog für V_w.

(iii) *V_w und T_w sind abgeschlossene Untergruppen in $G(L|K)$.*

Beweis. Standard. □

Lemma 1.19. *V_w und T_w sind Normalteiler in G_w.*

Beweis. $T_w = \ker(G_w \longrightarrow G(\ell|k))$ ist offensichtlich ein NT.
Sei $\sigma \in V_w$ und $\tau \in G_w$. Dann gilt für jedes $x \in L^\times$

$$\frac{\tau\sigma\tau^{-1}x}{x} - 1 = \frac{\tau\sigma\tau^{-1}x}{\tau\tau^{-1}x} - 1 = \tau\left(\frac{\sigma\tau^{-1}x}{\tau^{-1}x} - 1\right) \in \tau(\mathfrak{P}_L) = \mathfrak{P}_L.$$

Also gilt $\tau\sigma\tau^{-1} \in T_w$ und $V_w \subset G_w$ ist Normalteiler. □

Lemma 1.20. *Sei $M|K$ eine Galoiserweiterung, w eine nicht-archimedische Bewertung auf M und $L \subset M$ eine Zwischenerweiterung. Dann gilt*

$$\begin{array}{rcl} T_w(M|L) & = & T_w(M|K) \cap G(M|L) \\ V_w(M|L) & = & V_w(M|K) \cap G(M|K) \end{array}$$

Beweis. direkt aus Definition. □

Satz 1.21. *Sei K ein globaler Körper. Dann gilt*

$$\begin{array}{rcl} T_w(L|K) & = & T(L_w|K_v) \\ V_w(L|K) & = & V(K_w|K_v). \end{array}$$

Beweis. Es gilt $G_w(L|K) = G(L_w|K_v)$. Aus Stetigkeitsgründen genügt es die definierenden Bedingungen für Elemente in T_w bzw. V_w auf einer dichten Teilmenge zu prüfen. Da $\mathcal{O}_w \subset \mathcal{O}_{L_w}$ und $L^\times$ in $L_w^\times$ dicht sind, folgt das Ergebnis. □

Satz 1.22. *Sei K ein lokaler Körper und $L|K$ galoissch. Dann ist L^T die maximal unverzweigte Teilerweiterung von $L|K$.*

Beweis. Nach Definition gilt

$$T(L|K) = \ker(\varphi : G(L|K) \longrightarrow G(\ell|k)).$$

Nach Konstruktion faktorisiert φ in der Form

$$G(L|K) \twoheadrightarrow G(K'|K) \xrightarrow{\sim} G(\ell|k),$$

wobei $K'|K$ die maximal unverzweigte Teilerweiterung ist. Nach Galoistheorie folgt $L^T = K'$. □

So wie T_w der Kern des natürlichen Homomorphismus $\phi : G_w \longrightarrow G(\ell/k)$ ist, so ist auch V_w der Kern eines natürlichen Homomorphismus von T_w in eine abelsche Gruppe.

Definition. $X_w(L|K) = \mathrm{Hom}(w(L^\times)/v(K^\times), \ell^\times)$.

Für $\sigma \in T_w$ definieren wir ein Element $\chi_\sigma \in X_w(L|K)$, d.h. einen Homomorphismus

$$\chi_\sigma : w(L^\times)/w(K^\times) \longrightarrow \ell^\times$$

wie folgt: Zu $\overline{x} \in w(L^\times)/w(K^\times)$ wähle einen Vertreter $x \in L^\times$. Dann setze

$$\chi_\sigma(\overline{x}) = \overline{\left(\frac{\sigma x}{x}\right)} \in \ell^\times.$$

Satz 1.23. *Die obige Zuordnung ist wohldefiniert und induziert einen Homomorphismus $T_w \longrightarrow X_w$ mit Kern V_w.*

Beweis. Wohldefiniertheit. Ist $x' \in L^\times$ weiterer Vertreter, so gilt $w(x') = w(xa)$ mit $a \in K^\times$, also $x' = xa \cdot u$ mit $u \in U_w = \mathcal{O}_w^\times$. Für $\sigma \in T_w$ gilt $\overline{\left(\frac{\sigma u}{u}\right)} = 1 \in \ell^\times$ und deshalb

$$\overline{\left(\frac{\sigma x'}{x'}\right)} = \overline{\left(\frac{\sigma x}{x}\right)\left(\frac{\sigma a}{a}\right)\left(\frac{\sigma u}{u}\right)} = \overline{\left(\frac{\sigma x}{x}\right)}.$$

Dies zeigt die Wohldefiniertheit. Ist nun χ_σ die Nullabbildung, so gilt

$$\overline{\left(\frac{\sigma x}{x}\right)} = 1 \quad \forall\, x \in L^\times,$$

also $\sigma \in V_w$ und umgekehrt. Bleibt zu zeigen, dass $T_w \to X_w$ ein Homomorphismus ist: Für $\sigma, \tau \in T_w$ gilt

$$\chi_{\sigma\tau}(\overline{x}) = \overline{\left(\frac{\sigma\tau x}{x}\right)} = \overline{\frac{\sigma x}{x} \cdot \frac{\tau x}{x} \cdot \frac{\sigma(\tau(x)/x)}{\tau(x)/x}}.$$

Wegen $u := \frac{\tau(x)}{x} \in U_w$ folgt

$$\overline{\left(\frac{\sigma u}{u}\right)} = 1 \in \ell^\times.$$

□

Satz 1.24. *Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung. Dann ist V_w eine p-Gruppe und T_w/V_w ist von prim-zu-p-Ordnung. D.h. V_w ist die einzige p-Sylowgruppe in T_w.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $L|K$ eine Erweiterung lokaler Körper. Dann ist $\ell^\times$ eine endliche Gruppe von prim-zu-p Ordnung und dasselbe gilt für die endliche abelsche Gruppe

$$X = \mathrm{Hom}(w(L^\times)/v(K^\times), \ell^\times).$$

(Erinnerung: $(w(L^\times) : v(K^\times)) = e(L|K) < \infty$ und $w(L^\times) \cong \mathbb{Z} \cong v(K^\times)$.)
Nach 1.23 haben wir eine Inklusion

$$T/V \hookrightarrow X$$

also ist $\#T/V$ prim zu p.

Bleibt zu zeigen, dass V eine p-Gruppe ist. Angenommen nicht. Dann existiert eine Primzahl $q \neq p$ und ein Element $\sigma \in V$ der Ordnung q. Nach 1.22 ist $L|L^{\langle\sigma\rangle}$ eine rein zahm verzweigte Galoiserweiterung vom Grad q. Sei π_L eine Uniformisierende von L und π eine Uniformisierende von $L^{\langle\sigma\rangle}$. Es gilt

$$\pi_L^q = \pi \cdot \zeta \cdot u$$

mit $\zeta \in \mu'(L)$ und $u \in U_L^{(1)}$.

Wie im Beweis von 1.15 folgt $\zeta \in L^{\langle\sigma\rangle}$ und $L = L^{\langle\sigma\rangle}(\sqrt[q]{\pi\zeta})$. Ersetzen wir π durch $\pi\zeta$ erhalten wir $L = L^{\langle\sigma\rangle}(\sqrt[q]{\pi})$. Da $L|L^{\langle\sigma\rangle}$ galoissch ist, folgt die Existenz einer primitiven q-ten Erweiterung $\zeta_q \in L^{\langle\sigma\rangle}$ so dass gilt:

$$\sigma(\sqrt[q]{\pi}) = \zeta_q \cdot \sqrt[q]{\pi}.$$

Folglich gilt

$$\frac{\sigma(\sqrt[q]{\pi})}{\sqrt[q]{\pi}} = \zeta_q \not\equiv 1 \mod \mathfrak{P}$$

wegen $(p, q) = 1$. Widerspruch □

Korollar 1.25. *Ist $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung lokaler Körper so ist L^V die maximal zahm verzweigte Teilerweiterung von $L|K$.*

Beweis. Da $L^T|K$ die maximal unverzweigte Teilerweiterung ist, ist $L|L^T$ rein verzweigt.
Für eine Zwischenerweiterung $K'|K$ die der Untergruppe $U \subset G$ entspricht gilt daher $K'|K$ zahm verzweigt $\overset{1.14}{\Longleftrightarrow}$ $K'L^T|L^T$ zahm verzweigt
$\Longleftrightarrow [K'L^T : L^T]$ ist prim zu p
$\Longleftrightarrow (T : U \cap T)$ ist prim zu p
$\Longleftrightarrow U \supset V$ □

Wir erweitern dies auf proendliche Gruppen durch die folgende Definition.

Definition. Eine proendliche Gruppe G heißt **pro-p-Gruppe**, wenn sie projektiver Limes endlicher p-Gruppen ist, d.h. wenn für jede offene Untergruppe $U \subseteq G$ der Index $(G : U)$ eine p-Potenz ist. Wir sagen, dass eine abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ einen **prim-zu-p-Index** hat, wenn für jede offene Untergruppe $U \subset G$, $U \supseteq H$ der Index $(G : U)$ prim zu p ist.

Eine abgeschlossene Untergruppe $G_p \subset G$ heißt **p-Sylowgruppe**, wenn

- G_p ist eine pro-p-Gruppe
- $(G : G_p)$ ist prim zu p.

Fakten:

- p-Sylowgruppen existieren.
- beliebige zwei p-Sylowgruppen sind konjugiert.
- ist eine p-Sylowgruppe Normalteiler, so ist sie die einzige p-Sylowgruppe.

Satz 1.26. *Sei K ein lokaler Körper und $L|K$ galoissch. Dann ist V die einzige p-Sylowgruppe in T und L^V ist die maximal zahm verzweigte Erweiterung von K in L.*

Beweis. Dies folgt per Limesbildung aus dem Fall endlicher Erweiterungen und Lemma 1.18. □

Satz 1.27. *Sei K ein lokaler oder globaler Körper und sei $M|L|K$ ein Turm von Galoiserweiterungen. Sei w die bzw. eine nicht-archimedische Bewertung auf M. Dann haben wir exakte Folgen*

$$
\begin{aligned}
1 \longrightarrow G_w(M|L) \longrightarrow G_w(M|K) \longrightarrow G_w(L|K) \longrightarrow 1,\\
1 \longrightarrow T_w(M|L) \longrightarrow T_w(M|K) \longrightarrow T_w(L|K) \longrightarrow 1,\\
1 \longrightarrow V_w(M|L) \longrightarrow V_w(M|K) \longrightarrow V_w(L|K) \longrightarrow 1.
\end{aligned}
$$

Beweis. Wegen der Exaktheit des projektiven Limes sei ohne Einschränkung $M|K$ endlich. Wegen $G_w(L|K) = G(L_w|K_w)$ folgt die Exaktheit der ersten Folge und nach 1.21 können wir uns für den Beweis der Exaktheit der beiden weiteren Folgen auf den Fall lokaler Körper beschränken. Im kommutativen Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & T(M|L) \arrow[r] \arrow[d] & G(M|L) \arrow[r] \arrow[d] & G(m|\ell) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & T(M|K) \arrow[r] \arrow[d] & G(M|K) \arrow[r] \arrow[d] & G(m|k) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & T(L|K) \arrow[r] \arrow[d] & G(L|K) \arrow[r] \arrow[d] & G(\ell|k) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}
$$

sind alle Zeilen und die 2. + 3. Spalte exakt, also auch die erste Spalte. Nach 1.26 erhalten wir die exakte Folge

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & V(L|K) \arrow[r] \arrow[d, hook] & V(M|K) \arrow[r] \arrow[d, hook] & V(L|K) \arrow[d, hook] & \\
1 \arrow[r] & T(L|K) \arrow[r] & T(M|K) \arrow[r] & T(L|K) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
$$

Es bleibt zu zeigen, dass $V(M|K) \to V(L|K)$ surjektiv ist. Sei $\sigma \in V(L|K)$ beliebig und $\tau \in T(M|K)$ mit $\tau|_L = \sigma$. Da $T(M|K)/V(M|K)$ von prim-zu-p Ordnung ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, $(n,p) = 1$ mit $\tau^n \in V(M|K)$.
Sei $o(\sigma) = p^s$ die Ordnung von σ. Wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot m \equiv 1 \mod o(\sigma)$. Dann gilt $\tau^{m\cdot n} = (\tau^n)^m \in V(M|K)$ und $\tau^{m\cdot n}|_L = \sigma^{m\cdot n} = \sigma$. □

Satz 1.28. *Die Galoisgruppe einer endlichen Galoiserweiterung eines lokalen Körpers ist auflösbar. Ist $L|K$ eine unendliche Galoiserweiterung eines lokalen Körpers K, so ist $G(L|K)$ pro-auflösbar, d.h. projektiver Limes endlicher auflösbarer Gruppen.*

Beweis. Ist $L|K$ endlich Galoissch, so haben wir in $G = G(L|K)$ die Folge von Normalteilern

$$1 \subseteq V \subseteq T \subseteq G.$$

Es sind $G|T$ und $T|V$ abelsch (sogar zyklisch) und V ist eine p-Gruppe. Da p-Gruppen nilpotent, also insbesondere auflösbar sind, folgt das Ergebnis. □

1.5 Das Bild der Einheiten unter Reziprozität

Satz 1.29. *Die Einschränkung von rec auf U_K definiert einen Isomorphismus $rec|_{U_K} : U_K \xrightarrow{\sim} T(K^{\mathrm{ab}}|K)$. Die induzierte Abbildung*

$$rec^{\mathrm{nr}} : K^\times/U_K \longrightarrow G(K^{\mathrm{nr}}|K)$$

ist injektiv und das Bild besteht aus allen ganzzahligen Potenzen des Frobeniusautomorphismus. Es gilt

$$rec^{\mathrm{nr}}(x) = \mathrm{Frob}^{v(x)}.$$

Beweis. Wir haben die induzierte Klassenformation $(G(K^{\mathrm{nr}}|K),\, K^{\mathrm{nr}\times})$. Da $U_{K^{\mathrm{nr}}}$ ein kohomologisch trivialer Modul ist, gibt die exakte Folge $0 \to U_{K^{\mathrm{nr}}} \to K^{\mathrm{nr}\times} \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \to 0$ einen Isomorphismus zur Klassenformation

$$(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$$

wobei die Invariantenabbildung gegeben ist durch den natürlichen Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} H^2(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^1(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(1). \end{array}$$

Die Reziprozitätsabbildung wird auf endlichem Level von der Cupproduktpaarung

$$\hat{H}^0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \times H^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

induziert, wobei der rechte Isomorphismus die Fundamentalklasse auf die 1 schickt. Da Cupprodukt mit H^0 einfach Multiplikation ist, ist die endliche Reziprozitätsabbildung der Homomorphismus

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \hat{H}^0(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(H^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}), H^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})),$$

der die 1 auf die Identität schickt. Die rechte Seite identifizieren wir kanonisch mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und damit ist die Reziprozitätsabbildung die Identität auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Im Limes über alle n erhalten wir die natürliche Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \hat{\mathbb{Z}}$ Dies zeigt $rec^{\mathrm{nr}}(x) = \mathrm{Frob}^{v(x)}$. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U_K & \longrightarrow & K^\times & \xrightarrow{v} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle rec|_{U_K}} & & \downarrow{\scriptstyle rec} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T(K^{\mathrm{ab}}|K) & \longrightarrow & G(K^{\mathrm{ab}}|K) & \longrightarrow & G(K^{\mathrm{nr}}|K) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Bleibt zu zeigen, dass $rec|_{U_K}$ ein topologischer Isomorphismus ist. Nun sei $L|K$ eine endliche abelsche Erweiterung und $I_L \subset K^\times$ die Normengruppe. Nach 1.5 sind die Normengruppen der unverzweigten Erweiterungen gerade die von der Form $(\pi^n) \cdot U_K$. Andererseits ist jede Untergruppe von endlichem Index, die U_K

enthält von dieser Form. Daher gilt für die maximal unverzweigte Teilerweiterung K' von $L|K$

$$I_{K'} = I_L \cdot U_k.$$

Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I_L U_K/U_K & \longrightarrow & K^\times/I_L & \longrightarrow & K^\times/I_L U_K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\ 0 & \longrightarrow & T(L|K) & \longrightarrow & G(L|K) & \longrightarrow & G(K'|K) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

und somit einen Isomorphismus:

$$U_K/I_L \cap U_K \xrightarrow{\sim} I_L U_K/U_K \xrightarrow{\sim} T(L|K).$$

Durchläuft L alle endlichen abelschen Erweiterungen, so durchläuft I_L wegen des Existenzsatzes alle abgeschlossenen Untergruppen von endlichem Index in $K^\times$ und $I_L \cap U_K$ alle abgeschlossenen Untergruppen von endlichem Index in U_K. Da U_K proendlich ist, erhalten wir im projektiven Limes den Isomorphismus

$$U_K \xrightarrow{\sim} T(K^{\mathrm{ab}}|K).$$ □

Moral: Bezüglich der exakten Folge

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & U_K & \longrightarrow & K^\times & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & T(K^{\mathrm{ab}}|K) & \longrightarrow & G(K^{\mathrm{ab}}|K) & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sieht man, dass $G(K^{\mathrm{ab}}|K)$ aus $K^\times$ entsteht „indem man $\mathbb{Z}$ durch $\hat{\mathbb{Z}}$ ersetzt".

Korollar 1.30. *Das Bild von U_K^1 unter rec ist $V(K^{\mathrm{ab}}|K)$.*

Beweis. U_K^1 bzw. $V(K^{\mathrm{ab}}|K)$ sind jeweils die p-Sylowuntergruppen von U_K bzw. $T(K^{\mathrm{ab}}|K)$. □