INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 8 19. Juni 2020

Abgabe bis Fr. 26.06.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Dass eine Gleichung $F(x,y) = 0 \in \mathbb{R}^m$ in einer Umgebung $U = U_x \times U_y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ von $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ durch eine Funktion $y = \varphi(x)$ *aufgelöst* werden kann bedeutet, dass eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert mit $F(x, \varphi(x)) = 0$ für alle $x \in U_x$ und $\varphi(x_0) = y_0$. Man nennt die Funktion φ dann auch eine *Auflösung* der Gleichung nach x.

Themen:

- Multiindex
- Taylor-Entwicklung
- Lokale Extrema
- Satz über implizite Funktionen

Aufgabe 8.1 (6 Punkte): Multiindex und Taylor-Entwicklung

(a) Man beweise für $x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 2,\ \nu \in \mathbb{N}_0$:

$$(x_1 + \ldots + x_n)^\nu = \nu! \sum_{|\alpha|=\nu} \frac{x^\alpha}{\alpha!}.$$

Hierbei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, wobei

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$
$$\alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i!,$$
$$x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$ 3

Tipp: Man mache eine vollständige Induktion über n.

Bemerkung: Die Behauptung gilt trivialerweise auch für $n = 1$, das muss hier aber nicht gezeigt werden.

(b) Man berechne das Taylorpolynom 2. Ordnung für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2, x_3) = x_1 e^{-x_2} + x_3 e^{-x_1},$$

an der Stelle $\hat{x} = (-1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$. 3

Lösungsvorschlag:

(a) $n = 1$: trivial

$n = 2$: Nach der binomischen Formel gilt:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^\nu &= \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}x_1^k x_2^{\nu-k}\\ &= \sum_{k=0}^{\nu}\frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}x_1^k x_2^{\nu-k}\\ &= \nu!\sum_{k=0}^{\nu}\frac{x_1^k x_2^{\nu-k}}{k!(\nu-k)!} \overset{(\alpha_1,\alpha_2)=(k,\nu-k)}{=} \nu!\sum_{|\alpha|=\nu}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\end{aligned}$$

$\boxed{1}$

I. V.: Gelte die Behauptung bis $n-1$, $n \geq 3$, jew. für alle $\nu \in \mathbb{N}_0$. $\boxed{0.5}$

I. S.: Dann folgt mit den Bezeichnungen $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$:

$$\begin{aligned}(x_1+\ldots+x_n)^\nu &= (x_n + (x_1+\ldots+x_{n-1}))^\nu\\ &\overset{\text{bin. F.}}{=} \sum_{\alpha_n=0}^{\nu}\binom{\nu}{\alpha_n}x_n^{\alpha_n}(x_1+\ldots+x_{n-1})^{\nu-\alpha_n}\\ &\overset{\text{I.V.}}{=} \nu!\sum_{\alpha_n=0}^{\nu}\frac{x_n^{\alpha_n}(\nu-\alpha_n)!\sum_{|\tilde{\alpha}|=\nu-\alpha_n}\frac{\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}}{\tilde{\alpha}!}}{\alpha_n!\,(\nu-\alpha_n)!}\\ &= \nu!\sum_{\alpha_n=0}^{\nu}\sum_{|\tilde{\alpha}|=\nu-\alpha_n}\frac{\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}x_n^{\alpha_n}}{\tilde{\alpha}!\alpha_n!}\\ &= \nu!\sum_{|\alpha|=\nu}\frac{x^\alpha}{\alpha!}\end{aligned}$$

$\boxed{1.5}$

(b) Bezeichne $\vec{x} := (x,y,z)^T$. Für das zweite Taylorpolynom erhält man mithilfe der Hessematrix H_f auch die Darstellung

$$T_{f,2,\vec{x}_0}(\vec{x}_0+\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)\cdot\vec{x} + \frac{1}{2}H_f(\vec{x}_0)\,\vec{x}\cdot\vec{x}$$

Hier wurde verwendet: $\boxed{0.5}$

- $f(\vec{x}_0) = -e$
- $\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} e^{-y} - ze^{-x} \\ -xe^{-y} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$
- $\nabla f(\vec{x_0}) = \begin{pmatrix} e \\ e \\ e \end{pmatrix}$

- $H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} ze^{-x} & -e^{-y} & -e^{-x} \\ -e^{-y} & xe^{-y} & 0 \\ -e^{-x} & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $H_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & -e & -e \\ -e & -e & 0 \\ -e & 0 & 0 \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Somit lautet das Taylorpolynom bis zum 2. Grad mit Entwicklungspunkt $\vec{x_0}$: $\boxed{1}$

$$\begin{aligned} T_{f,2,\vec{x}_0}(\vec{x}_0 + \vec{x}) &= -e + e \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}(-e) \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= -e + e(x+y+z) - \frac{1}{2} e \begin{pmatrix} y+z \\ x+y \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= -e \left(1 - x - y - z + xy + xz + \frac{1}{2} y^2 \right) \end{aligned}$$

$\boxed{1.5}$

Aufgabe 8.2 (5 Punkte): Lokale Extrema

Man bestimme alle lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2)$$

und klassifiziere diese.

Lösungsvorschlag:

f ist in $\mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell differenzierbar und es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= e^{-x^2-4y^2} \left(x\left(-8x^2 - 2y^2 + 8\right), y\left(-8y^2 - 32x^2 + 2\right) \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \left(16x^4 - 40x^2 + 4x^2y^2 + 8 - 2y^2\right) e^{-x^2-4y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \left(64x^3y - 68xy + 16xy^3\right) e^{-x^2-4y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \left(64y^4 - 40y^2 + 256x^2y^2 - 32x^2 + 2\right) e^{-x^2-4y^2} \end{aligned}$$

Notwendig für das Vorliegen eines lokalen Extremums in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist:

$$\nabla f(x, y) = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x(-8x^2 - 2y^2 + 8) &= 0 \\ y(-8y^2 - 32x^2 + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann erfüllt, wenn eine der folgenden 4 Bedingungen erfüllt ist:

(i) $x = y = 0$

(ii) $x = 0$ und $8y^2 + 32x^2 = 8y^2 = 2$

(iii) $y = 0$ und $8x^2 + 2y^2 = 8x^2 = 8$

(iv) $8x^2 + 2y^2 = 8$ und $8y^2 + 32x^2 = 2$

Die Bedingung (iv) ist unerfüllbar. Also können lokale Extrema in den Punkten $\boxed{2}$

$$0, \quad \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \left(0, -\frac{1}{2}\right), \quad (1, 0), \quad (-1, 0)$$

vorliegen. Für die Hesse-Matrizen an diesen Stellen gilt:

- $H_f(0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist positiv definit (lok. Min.). $\boxed{1}$

- $H_f(1, 0) = H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} -16e^{-1} & 0 \\ 0 & -30e^{-1} \end{pmatrix}$ ist negativ definit (lok. Max.). $\boxed{1}$

- $H_f\left(0, \frac{1}{2}\right) = H_f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{15}{2}e^{-1} & 0 \\ 0 & -4e^{-1} \end{pmatrix}$ ist indefinit (Sattelpunkt). $\boxed{1}$

Aufgabe 8.3 (4 Punkte): Satz über implizite Funktionen

Man zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \sin(y_1 y_2) &= y_1 x_1 + 1 \\ \cos(y_1) &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $\left(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0\right)^{\mathrm{T}} = \left(0, -1, \frac{\pi}{2}, 1\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$ durch differenzierbare Funktionen $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2), \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

eindeutig aufgelöst werden kann, und berechne die Jacobi-Matrix $J_g(0,-1)$ der Funktion $g=(g_1,g_2)^{\mathrm{T}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ bzgl. $x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$ an der Stelle $x^0=(0,-1)^{\mathrm{T}}$.

Lösungsvorschlag:

Definiere:

$$\begin{aligned} F=(F_1,F_2)&:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2\\ F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)&=y_1+\sin(y_1y_2)-y_1x_1-1\\ F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)&=\cos(y_1)-x_2-y_2. \end{aligned}$$

Dann ist:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y_1,y_2)}=\begin{pmatrix} 1+y_2\cos(y_1y_2)-x_1 & y_1\cos(y_1y_2)\\ -\sin(y_1) & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \det\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y_1,y_2)}&=-1-y_2\cos(y_1y_2)+x_1+y_1\sin(y_1)\cos(y_1y_2)\\ \Longrightarrow\ \det\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y_1,y_2)}\bigg|_{(0,-1,\frac{\pi}{2},1)}&=-1. \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung $F(x_1,x_2,y_1,y_2)=0$ in einer Umgebung von $\left(0,-1,\frac{\pi}{2},1\right)$ eindeutig nach y_1,y_2 auflösbar. Die Spalten der Inversen von 2

$$B:=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y_1,y_2)}\bigg|_{(0,-1,\frac{\pi}{2},1)}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$$

erhält man durch Lösung von $Bb^{(i)}=e^i, i=1,2$ mit den Einheitsvektoren $e^{(i)}\in\mathbb{R}^2, B^{-1}=(b^{(1)}|b^{(2)})$ als

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}.$$

Nach der Formel für die Ableitung der implizit definierten Funktion (g_1,g_2) ergibt sich bei $(x_1,x_2)=(0,-1);(y_1,y_2)=(g_1(x_1,x_2),g_2(x_1,x_2))=\left(\frac{\pi}{2},1\right)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}&\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}&\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\end{pmatrix}\Bigg|_{(0,1)}&=-\,B^{-1}\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x_1,x_2)}\bigg|_{(0,-1,\frac{\pi}{2},1)}\\ &=-\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-y_1&0\\0&-1\end{pmatrix}\Bigg|_{y_1=\frac{\pi}{2}}\\ &=-\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2}&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}&0\\-\frac{\pi}{2}&-1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

2

Aufgabe 8.4 (5 Punkte): Taylor-Entwicklung durch implizite Differentiation

Man zeige, dass die Gleichung

$$\ln(3\varepsilon + x) = \varepsilon^2 x$$

in einer Umgebung von $(\varepsilon_0, x_0)^{\mathrm{T}} = (0,1)^{\mathrm{T}}$ eindeutig nach x durch eine Abbildung $x = g(\varepsilon)$ auflösbar ist und berechne das Taylor-Polynom 2. Ordnung von g im Punkt $\varepsilon_0 = 0$.

Tipp: Man überlege sich dazu, wie man das Konzept der impliziten Differentiation, das wir verwendet haben, um die Aussage (3) des Satzes über implizite Funktion zu beweisen, für höhere Ableitungen verwenden kann.

Lösungsvorschlag:

(a) Auflösbarkeit:

$$f(x,\varepsilon) = \ln(3\varepsilon + x) - \varepsilon^2 x, \quad f_x(x,\varepsilon) = \frac{1}{3\varepsilon + x} - \varepsilon^2$$

Lösung $x = 1$ für $\varepsilon = 0 \Leftrightarrow f(1,0) = 0$ bzw., $g(0) = 1$ $f_x(1,0) = 1 \neq 0$; Satz über impizite Funktionen $\implies$ lokale Auflösbarkeit, d.h. $\exists g$ sd. $f(x,\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow x = g(\varepsilon), \varepsilon \approx 0$ $\boxed{1}$

(b) Taylor-Polynom:

Berechnung der Ableitungswerte $g'(0), g''(0)$ durch implizites Differenzieren der Gleichung

$$0 = f(\varphi(\varepsilon),\varepsilon) = \ln(3\varepsilon + \varphi(\varepsilon)) - \varepsilon^2\varphi(\varepsilon)$$

ergibt: $\boxed{1}$

$$0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{3 + g'(\varepsilon)}{3\varepsilon + g(\varepsilon)} - 2\varepsilon g(\varepsilon) - \varepsilon^2 g'(\varepsilon)$$
$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\varepsilon^2} = \frac{g''(\varepsilon)(3\varepsilon + g(\varepsilon)) - (3 + g'(\varepsilon))\,(3 + g'(\varepsilon))}{(3\varepsilon + g(\varepsilon))^2} - 2g(\varepsilon).$$

Einsetzen von $\varepsilon = 0$ und sukzessives Auflösen der Gleichungen nach $g'(0)$ und $g''(0)$ ergibt schließlich: $\boxed{1}$

- $g(0) = 1$
- $g'(0) = -3$
- $g''(0) = 2$

Somit erhalten wir das Taylor-Polynom $\boxed{1}$

$$T_g^2(\varepsilon) = g(0) + g'(0)\varepsilon + \frac{1}{2}g''(0)\varepsilon^2 = 1 - 3\varepsilon + \varepsilon^2$$

$\boxed{1}$

Bonusaufgabe 8.5 (4 Bonuspunkte): Implizite Gleichung

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. In einem Punkt $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ gelte

$$\prod_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(x^0\right) \neq 0.$$

Weiter sei $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine lokale Auflösung der Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = f\left(x^0\right)$$

nach $x_i,\ i = 1, 2, 3$. Man zeige, dass dann

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} \left(x_2^0, x_3^0\right) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \left(x_1^0, x_3^0\right) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \left(x_1^0, x_2^0\right) = -1.$$

Lösungsvorschlag:

g_1 ist eine lokale Auflösung der Gleichung $f\left(x_1, x_2, x_3\right) = f\left(x^0\right)$. D.h. für alle $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ in einer Umgebung von $\vec{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$ gilt:

$$f\left(g_1\left(x_2, x_3\right), x_2, x_3\right) = f\left(\vec{x}^0\right).$$

Differentiation dieser Gleichung nach x_2 ergibt nach der Kettenregel: 1

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(g_1(x_2,x_3),x_2,x_3)} = \partial_1 f\left(g_1\left(x_2, x_3\right), x_2, x_3\right)\ \partial_2 g_1\left(x_2, x_3\right) + \left.\partial_y f(x, y, z)\right|_{x=g_1(x_2,x_3), y=x_2, z=x_3} = 0.$$

Da $g_1\left(x_2^0, x_3^0\right) = x_1^0$ und $\partial_1 f(\vec{x}^0) \neq 0$ ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} g_1\left(x_2^0, x_3^0\right) = -\frac{\partial_2 f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial_1 f\left(\vec{x}^0\right)}$$

Ganz analog beweist man: 2

$$\frac{\partial}{\partial x_3} g_2\left(x_1^0, x_3^0\right) = -\frac{\partial_3 f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial_2 f\left(\vec{x}^0\right)}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1} g_3\left(x_1^0, x_2^0\right) = -\frac{\partial_1 f\left(\vec{x}^0\right)}{\partial_3 f\left(\vec{x}^0\right)}$$

Multipliziert man alle drei Gleichungen miteinander, so ergibt sich gerade

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} \left(x_2^0, x_3^0\right) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \left(x_1^0, x_3^0\right) \cdot \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \left(x_1^0, x_2^0\right) = -1.$$

1
