Minimal auf**spannende** Bäume

Nico Haaf und Josua Kugler

12.05.20 oder so

Grundlegende Definitionen

Sei S eine endliche Menge und $U \subseteq P(S)$ Familie von Teilmengen.

Grundlegende Definitionen

Sei S eine endliche Menge und $U \subseteq P(S)$ Familie von Teilmengen.

Definition

Das Paar $M = (S, U)$ heißt **Matroid** und U die Familie der **unabhängigen Mengen** von M, wenn gilt:

1. $\emptyset \in U$
2. $A \in U, B \subseteq A \implies B \in U$
3. $A, B \in U,\ \#B = \#A + 1 \implies \exists v \in B \setminus A$ mit $A \cup \{v\} \in U$

Grundlegende Definitionen

Sei S eine endliche Menge und $U \subseteq P(S)$ Familie von Teilmengen.

Definition

Das Paar $M = (S, U)$ heißt **Matroid** und U die Familie der **unabhängigen Mengen** von M, wenn gilt:

1. $\emptyset \in U$
2. $A \in U, B \subseteq A \implies B \in U$
3. $A, B \in U,\ \#B = \#A + 1 \implies \exists v \in B \setminus A$ mit $A \cup \{v\} \in U$

Definition

Eine maximale unabhängige Menge heißt eine **Basis** des Matroids. Alle Basen enthalten die gleiche Anzahl von Elementen, der **Rang** $r(M)$ des Matroids.

Matroide und Graphen

Sei $W \subseteq P(M)$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder eines Graphen $G = (E, K)$.

Lemma

Ist $G = (E, K)$ Graph, so ist $M = (K, W)$ ein Matroid.

Matroide und Graphen

Sei $W \subseteq P(M)$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder eines Graphen $G = (E, K)$.

Lemma

Ist $G = (E, K)$ Graph, so ist $M = (K, W)$ ein Matroid.

Beweis.

- Axiom 1

$\square$

Matroide und Graphen

Sei $W \subseteq P(M)$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder eines Graphen $G = (E, K)$.

Lemma

Ist $G = (E, K)$ Graph, so ist $M = (K, W)$ ein Matroid.

Beweis.

- Axiom 1
- Axiom 2

$\square$

Matroide und Graphen

Sei $W \subseteq P(M)$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder eines Graphen $G = (E, K)$.

Lemma

Ist $G = (E, K)$ Graph, so ist $M = (K, W)$ ein Matroid.

Beweis.

- Wälder $W = (E, A)$, $W' = (E, B)$ mit $\#B = \#A + 1$. Komponenten $T_1, ..., T_m$, Eckenmengen $E_1, ..., E_m$, Kantenmengen $A_1, ..., A_m$.

□

Matroide und Graphen

Sei $W \subseteq P(M)$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder eines Graphen $G = (E, K)$.

Lemma

Ist $G = (E, K)$ Graph, so ist $M = (K, W)$ ein Matroid.

Beweis.

- Wälder $W = (E, A)$, $W' = (E, B)$ mit $\#B = \#A + 1$.
  Komponenten $T_1, ..., T_m$, Eckenmengen $E_1, ..., E_m$,
  Kantenmengen $A_1, ..., A_m$.
- Nun: $\#A_i = \#E_i - 1,\ \ E = E_1 \cup ... \cup E_m,\ \ A = A_1 \cup ... \cup A_m$.
  $\#B > \#A \implies \exists$ Kante $k \in B$, die E_s, E_t verbindet.
  Dann ist $W'' = (E, A \cup k)$ Wald.

$\square$

Matroide und Graphen - Folgerungen

Korollar

Basen von $M = (K, W)$ sind die aufspannenden Bäume.

Matroide und Graphen - Folgerungen

Korollar

Basen von $M = (K, W)$ sind die aufspannenden Bäume.

Korollar

Rang des Matroids ist $r(M) = \#E - t$, wobei t die Anzahl der Komponenten von G ist.

Algorithmus von Kruskal

Eingabe: gewichteter Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten, Funktion $w : E \to \mathbb{R}$
Ausgabe: minimal Spannbaum G' von G
(1) **while** $\#G < n - 1$
(2) betrachte Kante e aus G mit $w(e) = \min_{e \in E} w(e)$
(3) **if** G' mit e azyklisch **then** e von G zu G'
(4) **else** entferne e in G

Algorithmus von Kruskal - Korrektheitsbeweis

Theorem

$M = (K, W)$ Matroid mit Gewichtsfunktion $w : K \to \mathbb{R}$. Algorithmus liefert minimalen Spannbaum:

1. *Sei $A_0 = \emptyset \in W$.*
2. *Ist $A_1 = \{a_1, ..., a_i\} \subseteq K$, so sei $X_i = \{k \in S \setminus A_i \mid A_i \cup \{x\} \in U\}$. Falls $X_i = \emptyset$, so ist A_i gesuchte Basis. Andernfalls wähle ein $a_{i+1} \in X_i$ mit minimalem Gewicht, und setze $A_{i+1} = A_i \cup \{a_{i+1}\}$. Iteriere (2).*