Aufgabe 1

(a) **Z.Z.:** W ist ein Untervektorraum von V.

Beweis. Zunächst ist $0_v(n) + 0_v(n+1) + 0_v(n+2) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ und daher $0_v \in W$. Seien nun $f, g \in W$. Es gilt:

$$(f+g)(n)+(f+g)(n+1)+(f+g)(n+2) = f(n)+g(n)+f(n+1)+g(n+1)+f(n+1)+g(n+1)$$
$$= f(n) + f(n+1) + f(n+2) + g(n) + g(n+1) + g(n+2) = 0 + 0 = 0$$

Daher ist $f + g \in W$ Sei außerdem $a \in K$. Dann gilt:

$$a \cdot f(n) + a \cdot f(n+1) + a \cdot f(n+1) = a \cdot (f(n) + f(n+1) + f(n+2)) = a \cdot 0 = 0$$

Daher ist auch $a \cdot f \in W$. Da das neutrale Element von V in W liegt, W additiv und unter Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, muss W ein Untervektorraum von V sein. □

(b) **Z.Z.:** Seien $g, f \in W$ mit $f(1) = g(1)$ und $f(2) = g(2)$. Dann ist $f = g$, also $\forall i \in \mathbb{N} : f(i) = g(i)$.

Beweis.
Induktionsanfang: $n = 1, 2$: Es gilt $f(1) = g(1)$ und $f(2) = g(2)$
Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in N$ mit $n > 1$ beliebig , aber fest. Dann gilt $f(n-1) = g(n-1)$ und $f(n) = g(n)$
Induktionsschluss: $n \to n+1$: Mit der Induktionsvoraussetzung folgt direkt $f(n) = g(n)$.

$$f(n-1) + f(n) + f(n+1) = g(n-1) + g(n) + g(n+1)$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\iff g(n-1) + g(n) + f(n+1) = g(n-1) + g(n) + g(n+1)$$
$$\iff f(n+1) = g(n+1)$$

□

(c) Definiere

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to K \\ i &\mapsto 1 && |\exists k \in \mathbb{N} : i = 3 \cdot k - 2 \\ i &\mapsto 0 && |\exists k \in \mathbb{N} : i = 3 \cdot k - 1 \\ i &\mapsto -1 && |\exists k \in \mathbb{N} : i = 3 \cdot k \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\to K \\ i &\mapsto 0 && |\exists k \in \mathbb{N} : i = 3 \cdot k - 2 \\ i &\mapsto 1 && |\exists k \in \mathbb{N} : i = 3 \cdot k - 1 \\ i &\mapsto -1 && |\exists k \in \mathbb{N} : i = 3 \cdot k \end{aligned}$$

Z.Z.: $f \in W$:

Beweis.

$$f(n)+f(n+1)+f(n+2)=\begin{cases}1+0-1=0 & \exists k\in\mathbb{N}: n=3\cdot k-2\\ 0+-1+1=0 & \exists k\in\mathbb{N}: n=3\cdot k-1\\ -1+1+0=0 & \exists k\in\mathbb{N}: n=3\cdot k\end{cases}$$

□

Z.Z.: $g \in W$:

Beweis.

$$g(n)+g(n+1)+g(n+2)=\begin{cases}0+1+-1=0 & \exists k\in\mathbb{N}: n=3\cdot k-2\\ 1+-1+0=0 & \exists k\in\mathbb{N}: n=3\cdot k-1\\ -1+0+1=0 & \exists k\in\mathbb{N}: n=3\cdot k\end{cases}$$

□

Z.Z.: (f, g) ist ein Erzeugendensystem von W.

Beweis. Sei $h \in W$ beliebig mit $h(1) = \alpha_1$ und $h(2) = \alpha_2$. Behauptung: Dann ist $h = \alpha_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot g$. Beweis der Behauptung: Aus $(\alpha_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot g)(1) = \alpha_1 \cdot f(1) + \alpha_2 \cdot g(1) = \alpha_1 = h(1)$ und $(\alpha_1 \cdot f + \alpha_2 \cdot g)(2) = \alpha_1 \cdot f(2) + \alpha_2 \cdot g(2) = \alpha_2 = h(2)$ folgt mit Teilaufgabe (b) die Behauptung. □

(d) **Z.Z.:** (f, g) ist linear unabhängig.

Beweis. Gelte $\alpha_1 f + \alpha_2 g = 0_v$. Dann ist auch $(\alpha_1 f + \alpha_2 g)(1) = \alpha_1 \cdot f(1) + \alpha_2 \cdot g(1) = \alpha_1 = 0$ und $(\alpha_1 f + \alpha_2 g)(1) = \alpha_1 \cdot f(2) + \alpha_2 \cdot g(2) = \alpha_2 = 0$. Nach Aufgabe (c) ist (f, g) auch ein Erzeugendensystem von W und folglich eine Basis. Die Dimension des Vektorraums ist daher 2. □

Aufgabe 2

(a) (u, w) ist wegen (c) linear unabhängig. Da dieses System nur aus zwei Elementen besteht, ist es kleiner als die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$. Daher kann es kein Erzeugendensystem und insbesondere keine Basis sein.

(b)

$$w = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$$

Folglich ist $S = (u, v, w)$ linear abhängig. Es gilt $\mathrm{Lin}(u, v, w) = \mathrm{Lin}(u, v)$. $\mathrm{Lin}(u, v)$ ist allerdings kleiner als die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ und daher kein Erzeugendensystem. Folglich ist S keine Basis.

(c) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Es gelte: $au + bv + cx = 0$. Daraus folgt

$$a \cdot 0 + b \cdot 2 + c \cdot 1 = 0 \tag{1}$$
$$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 \tag{2}$$
$$a \cdot 2 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \tag{3}$$
$$\tag{4}$$

Aus (3) folgt sofort $a = 0$. Setzt man in (2) $a = 0$, so erhält man $b = 0$. Setzt man in (1) $b = 0$, so erhält man $c = 0$. Insgesamt gilt also $a = b = c = 0$ und das System $S = (u, v, x)$ ist linear unabhängig. Da der $\mathbb{R}^3$ die Dimension 3 hat, ist S ein maximales linear unabhängiges System und daher eine Basis.

(d) Nach (b) ist $S = (u, v, w, x)$ linear abhängig und daher keine Basis. Nach (c) ist S ein Erzeugendensystem.

Aufgabe 3

1. Wird g nach f ausgeführt, so wird die Urmenge von g auf die Bildmenge von f eingeschränkt. Definiere $g' : \mathrm{im}(f) \to W, x \mapsto g(x)$. Es gilt für die Bildmenge von $g \circ f$

$$\mathrm{im}(g \circ f) = \mathrm{im}(g') \subset \mathrm{im}(g).$$

Daraus folgt

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim(\mathrm{im}(g \circ f)) \leq \dim(\mathrm{im}(g)) = \mathrm{rg}(g)$$

Definiere nun $g'' : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{im}(g'), x \mapsto g'(x)$. Da g linear ist, sind g' und g'' ebenfalls linear. Nach Konstruktion ist g'' außerdem surjektiv. Mit Lemma 2.55(ii) folgt: $\dim(\mathrm{im}(f)) \geq \dim(\mathrm{im}(g'))$.

$$\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim(\mathrm{im}(g \circ f)) = \dim(\mathrm{im}(g')) \leq \dim(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$$

Also ist $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g) \wedge \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f) \implies \mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

2. Definiere

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Durch Komposition erhält man

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt also $\mathrm{rg}(g) = 2, \mathrm{rg}(f) = 2$ und $\mathrm{rg}(g \circ f) = 1$.

3. Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$. Durch Komposition erhält man $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x$. Es gilt also $\mathrm{rg}(g) = 1, \mathrm{rg}(f) = 1, \mathrm{rg}(g \circ g) = 1$.

Aufgabe 4

(a) **Z.Z.**(Kontraposition): f nicht surjektiv $\implies$ f^* nicht injektiv.

Beweis. Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Sei f nicht surjektiv. Dann enthält (v_i) einen Basisvektor $v_k \in V : \forall u \in U : f(u) \neq v_k$. Gäbe es keinen solchen Basisvektor, dann ließe sich aufgrund der Linearität von f zu jedem $v \in V$ ein Urbild konstruieren. Lineare Abbildungen sind vollständig definiert, wenn sie für alle Basisvektoren definiert sind. Daher sind

$$\begin{aligned} \varphi_1 : V &\to K \\ v_i &\mapsto 0 \qquad\qquad \forall i \in I \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_2 : V &\to K \\ v_k &\mapsto 1 \\ v_i &\mapsto 0 \qquad\qquad |\forall i \in I \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\varphi_1 \neq \varphi_2$, aber $\forall u \in U : f^*(\varphi_1)(u) = \varphi_1 \circ f(u) = 0 = \varphi_2 \circ f(u) = f^*(\varphi_2)(u)$ und daher $f^*(\varphi_1) = f^*(\varphi_2)$. Folglich ist f^* nicht injektiv. □

(b) **Z.Z.:** f^* surjektiv $\implies$ f injektiv, also f nicht injektiv $\implies$ f^* nicht surjektiv.

Beweis. Sei f nicht injektiv. Dann ist $\forall \varphi \in V^* : \varphi \circ f$ nicht injektiv. Sei nun $u^* \in U^*$ eine injektive Abbildung. Dann ist $\forall \varphi \in V^* : f^*(\varphi) = \varphi \circ f \neq u^*$, da u^* injektiv ist, $\varphi \circ f$ aber nicht. u^* besitzt also kein Urbild unter f^*, f^* ist also nicht surjektiv. □

Z.Z.: f injektiv $\implies$ f^* surjektiv.

Beweis. Sei nun f injektiv. Dann ist $f' : U \to \mathrm{im}(f)$ bijektiv und es existiert eine lineare Umkehrabbildung $f'^{-1} : \mathrm{im}(f) \to U$ sodass $\forall u \in U : f^{-1}(f(u)) = u$. Da f linear ist, ist $\mathrm{im}(f)$

ein Untervektorraum von V. Sei nun $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von V. Dann existiert nach Basisergänzungssatz eine Teilmenge $J \subset I$, sodass $(v_i)_{i\in J}$ eine Basis von $\mathrm{im}(f)$ ist. Sei nun $u^* \in U^*$. Dann existiert ein $\varphi \in V^*$ mit folgender Vorschrift:

$$\begin{aligned}
\varphi : V &\to K \\
v_i &\mapsto u^*(f'^{-1}(v_i)) && \forall i \in J \\
v_i &\mapsto k \in K && \forall i \notin J
\end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität von φ ist die Abbildung durch die Vorschrift für die Basisvektoren bereits vollständig definiert. Es gilt $\forall i \in J : v_i \in \mathrm{im}(f)$. Da $f(u) \in V$ liegt, gibt es ein endliches System $(\alpha_i) \in K^{(J)}$ mit $f(u) = \sum_{i\in J} \alpha_i v_i$. Daher gilt $\forall u \in U$:

$$\begin{aligned}
f^*(\varphi)(u) &= \varphi(f(u)) \\
&= \varphi(\sum_{i\in J} \alpha_i v_i) \\
&= \sum_{i\in J} \alpha_i \varphi(v_i) \\
&= \sum_{i\in J} \alpha_i u^*(f'^{-1}(v_i)) \\
&= u^*(f'^{-1}(\sum_{i\in J} \alpha_i v_i)) \\
&= u^*(f'^{-1}(f(u))) \\
&= u^*(u)
\end{aligned}$$

Folglich ist φ ein Urbild von u^* unter f^* und f^* ist surjektiv. $\square$

Aus den beiden Implikationen folgt (f^* surjektiv $\iff$ f injektiv).