Algebraische Zahlentheorie II
Sommersemester 2022

Dr. Katharina Hübner
basierend auf Alexander Schmidts AZT2-Skript von 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Klassenformationen

1.1 Dualität für endliche Gruppen

Erinnerung:

- $H^n(G, A^*) \cong H_n(G, A)^*$
- $\hat{H}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \ker(N_G)/I_G\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \frac{1}{\#G} \cdot \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Lemma 1.1. *Sei G eine endliche Gruppe und sei A ein G-Modul. Die durch die Paarung $A^* \times A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ induzierte Cup-Produktpaarung*

$$\hat{H}^i(G, A^*) \times \hat{H}^{-i-1}(G, A) \longrightarrow H^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \frac{1}{\#G}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

induziert einen Isomorphismus

$$\hat{H}^i(G, A^*) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{-i-1}(G, A)^*$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Sei zunächst $i = 0$. Ein Homomorphismus $f : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist ein G-Homomorphismus, d.h. $f \in H^0(G, A^*)$, gdw. $f(I_G A) = 0$. Daher ist die Abbildung

$$H^0(G, A^*) \longrightarrow H_0(G, A)^*$$

die einem G-Homomorphismus $f : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ den assoziierten Homomorphismus $\tilde{f} : A/I_GA \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zuordnet, ein Isomorphismus. (Das hatten wir schon beim Beweis von $H^n(G,A)^* \cong H_n(G,A)^*$ gesehen).
Ist $f \in N_GA^*$, d.h. $f = \sum_{g\in G} gF$ für ein $F \in A^*$, dann gilt für $a \in {}_{N_G}A$:

$$f(a) = \sum_{g\in G} g \cdot F(a) = \sum_{g\in G} F(g^{-1}a) = F(N_Ga) = 0.$$

Daher faktorisiert der Homomorphismus

$$H^0(G,A^*) \longrightarrow H_0(G,A)^* = (A/I_GA)^* \twoheadrightarrow (N_GA/I_GA)^*$$

zu einem Homomorphismus

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & A^*G/N_GA^* & \twoheadrightarrow & (N_GA/I_GA)^* \\ & \| & & \| \\ & \hat{H}^0(G,A^*) & & \hat{H}^{-1}(G,A)^*. \end{array}$$

Nun habe $f \in A^{*G}$ triviales Bild, d.h. $f(N_GA) = 0$. Da

$$N_G : A/_{N_G}A \xrightarrow{\sim} N_GA$$

ein Isomorphismus ist, existiert ein Homomorphismus $\tilde{f} : N_GA \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $f(a) = \tilde{f}(N_Ga)$ für alle $a \in A$. Da $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-injektiv ist, können wir $\tilde{f}$ zu einem Homomorphismus $\tilde{f} : A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ fortsetzen und es gilt $f = \tilde{f} \circ N_G$.
Hieraus folgt aber $f = N_G\tilde{f}$ weil für alle $a \in A$ gilt

$$N_G\tilde{f}(a) = \sum_{g\in G} \tilde{f}(g^{-1}a) = \tilde{f}(N_Ga) = f(a).$$

Dies zeigt die Injektivität von φ und damit die Behauptung für $i = 0$ (dass der Isomorphismus vom Cup-Produkt induziert ist, lassen wir hier weg). Der allgemeine Fall folgt durch Dimensionsverschiebung mit Hilfe von

$$\begin{array}{ccccc} \hat{H}^i(G,\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \times & \hat{H}^{-i-1}(G,A) & \xrightarrow{\cup} & \hat{H}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ {\scriptstyle \delta^i} \uparrow \wr & & {\scriptstyle \delta^i} \downarrow \wr & & {\scriptstyle (-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}} \downarrow \\ \hat{H}^0(G,\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_i) & \times & \hat{H}^{-i-1}(G,A_{-i}) & \longrightarrow & \hat{H}^{-1}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

unter Beachtung von

$$\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_i = \mathrm{Hom}(A_{-i},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

□

Lemma 1.2. *Ist G eine endliche Gruppe und A ein $\mathbb{Z}$-freier G-Modul, so induziert für alle $i \in \mathbb{Z}$ die Cup-Produktpaarung*

$$\hat{H}^i(G, \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z})) \times \hat{H}^{-i}(G, A) \xrightarrow{\cup} \hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\#G\mathbb{Z}$$

einen Isomorphismus

$$\hat{H}^i(G, \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z})) \cong \hat{H}^{-i}(G, A)^*.$$

Beweis. Da A $\mathbb{Z}$-frei ist, ist die Folge

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q}) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

exakt. Nun ist $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q})$ eindeutig teilbar, also kohomologisch trivial und wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \hat{H}^{i-1}(G, \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \times & \hat{H}^{-i}(G, A) & \xrightarrow{\cup} & \hat{H}^{-1}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \delta \\ \hat{H}^{-i}(G, \operatorname{Hom}(A, \mathbb{Z})) & \times & \hat{H}^{-i}(G, A) & \xrightarrow{\cup} & \hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \end{array}$$

wobei die vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind. Daher folgt die Aussage aus 1.1. $\square$

1.2 Klassenmoduln

Definition. Sei G eine endliche Gruppe. Ein G-Modul C heißt **Klassenmodul**, wenn für jede Untergruppe H von G gilt:

(i) $H^1(H, C) = 0$
(ii) $H^2(H, C)$ ist zyklisch von Ordnung $\#H$.

Ein Erzeuger γ von $H^2(G, C)$ heißt **Fundamentalklasse**.

Bemerkung. C ist offenbar auch Klassenmodul für jede Untergruppe $H \subset G$. Ist γ ein Erzeuger von $H^2(G, C)$, so ist $\gamma_H = res_H^G \gamma$ ein Erzeuger von $H^2(H, C)$.

Grund: Wegen $cor\gamma_H = cor \cdot res\gamma = (G : H) \cdot \gamma$ ist die Ordnung von γ_H durch $\#H$ teilbar.

Beispiel. 1) Ist G zyklisch, so ist $C = \mathbb{Z}$ ein Klassenmodul. In der Tat gilt

$$H^1(G, \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}(G, \mathbb{Z}) = 0$$

und

$$H^2(G, \mathbb{Z}) \cong \hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\#G\mathbb{Z}.$$

2) Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung lokaler Körper mit Gruppe G. Dann ist $L^\times$ ein Klassenmodul.

Grund:

$$\begin{array}{rcll} H^1(G, L^\times) & = & 0 & \text{(Hilberts Satz 90)} \\ H^2(G, L^\times) & = & Br(L|K) \cong \mathbb{Z}/[L : K]\mathbb{Z}. & \end{array}$$

Bemerkung. Im Beispiel 1 haben wir gezeigt: Ist $\gamma \in H^2(G, \mathbb{Z})$ eine Fundamentalklasse, so ist das Cup-Produkt

$$\gamma \cup - : \hat{H}^n(G, A) \longrightarrow \hat{H}^{n+2}(G, A)$$

ein Isomorphismus für jeden G-Modul A und alle $n \in \mathbb{Z}$. Dies wollen wir auf beliebige Klassenmoduln verallgemeinern.

Wir erinnern uns zunächst an das kommutative Diagramm im Beweis von Satz 1.13 in Kapitel 3.2 ($H^1 = Der/\mathrm{I}Der$) und erweitern es ein wenig:

$$\begin{array}{ccc}
C^0(G,A) & \xrightarrow[\varphi \mapsto \varphi(1)]{\sim} & A = \mathcal{C}^0(G,A) \\
d^1 \downarrow & & \downarrow \partial^1 \\
C^1(G,A) & \xrightarrow[\varphi \mapsto (g \mapsto \varphi(1,g))]{\sim} & \mathrm{Abb}(G,A) = \mathcal{C}^1(G,A) \\
d^2 \downarrow & & \downarrow \partial^2 \\
C^2(G,A) & \xrightarrow[\varphi \mapsto ((g_1,g_2) \mapsto \varphi(1,g_1,g_1g_2))]{\sim} & \mathrm{Abb}(G^2,A) = \mathcal{C}^2(G,A) \\
d^3 \downarrow & & \downarrow \partial^3 \\
C^3(G,A) & \xrightarrow[\varphi \mapsto ((g_1,g_2,g_3) \mapsto \varphi(1,g_1,g_1g_2,g_1g_2g_3))]{\sim} & \mathrm{Abb}(G^3,A) = \mathcal{C}^3(G,A),
\end{array}$$

wobei:

- $\partial^1(a) = (g \mapsto ga - a)$
- $\partial^2(x) = ((g_1, g_2) \mapsto g_1x(g_2) - x(g_1g_2) + x(g_1)$

und (einfach nachrechnen)

$$\partial^3(x) = (g_1, g_2, g_3) \longmapsto g_1x(g_2, g_3) - x(g_1g_2, g_3) + x(g_1, g_2g_3) - x(g_1, g_2)$$

Bemerkung. Die Elemente in $\mathcal{C}^\bullet(G, A)$ heißen **inhomogene** Koketten.

Definition. Sei G eine endliche Gruppe und C ein G-Modul. Sei $\gamma \in H^2(G, C)$. Der **Zerfällungsmodul** $C(\gamma)$ ist wie folgt definiert:

Sei $B = \bigoplus_{g \neq 1} \mathbb{Z}b_g$ die freie abelsche Gruppe mit Basis b_g, $g \in G \smallsetminus \{1\}$. Wir setzen $C(\gamma) = C \oplus B$ und lassen G wie folgt operieren: Wähle ein $c \in \mathcal{C}^2(G, A)$, das γ repräsentiert. Wir setzen $b_1 = c(1, 1)$ und definieren

$$\sigma b_\tau = b_{\sigma\tau} - b_\sigma + c(\sigma, \tau).$$

Dies ist in der Tat eine G-Wirkung.
Nachzurechnen sind: $1b_\tau = b_\tau$ und $(\rho\sigma)(b_\tau) = \rho(\sigma b_\tau)$.
Dies folgt aus $\partial^3(c) = 0$, d.h. aus der Relation

$$\rho c(\sigma, \tau) - c(\rho\sigma, \tau) + c(\rho, \tau\sigma) - c(\rho, \sigma) = 0.$$

Erklärung: Wir haben die natürliche Inklusion $i : C \to C(\gamma)$. Betrachtet man die Abbildung: $b : G \to C(\gamma)$, $\sigma \mapsto b_\sigma$, $b \in \mathrm{Abb}(G, C(\gamma)) = \mathcal{C}^1(G, C(\gamma))$ so gilt $\partial^2 b = i(c) \in \mathcal{C}^2(G, C(\gamma))$. D.h. c wird zum Korand in $C(\gamma)$, also $H^2(G, C) \to H^2(G, C(\gamma))$ schickt γ auf Null, d.h. γ „zerfällt".

Bemerkung. Eine andere Wahl der Repräsentanten c von γ liefert einen isomorphen G-Modul.

Wir erhalten eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} C(\gamma) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

in der φ durch $\varphi(c) = 0$ für $c \in C$ und $\varphi(b_\sigma) = \sigma - 1$, $\sigma \neq 1$, definiert ist. Diese 4er Folge kann man in zwei 3-er Folgen spalten

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} C(\gamma) \xrightarrow{\varphi} I_G \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Bemerkung. Die obere Folge entspricht gerade dem Element

$$\gamma \in H^2(G, C) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, C) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}[G]}(I_G, C).$$

unter der Identifikation zwischen Elementen in Ext^1 und Isomorphieklassen von Erweiterungen.

Für jede Untergruppe $H \subset G$ liefern die zwei exakten Folgen einen Homomorphismus

$$\delta^2 : \hat{H}^n(H, \mathbb{Z}) \longrightarrow \hat{H}^{n+2}(H, C)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Satz 1.3. *Sei G eine endliche Gruppe, C ein G-Modul und $\gamma \in H^2(G, C)$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und jede Untergruppe $H \subset G$ die Abbildung*

$$\delta^2 : \hat{H}^n(H, \mathbb{Z}) \longrightarrow \hat{H}^{n+2}(H, C)$$

gegeben durch $\beta \mapsto \gamma_H \cup \beta$, wobei $\gamma_H = res^G_H\ \gamma \in H^2(H, C)$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent

(i) *$C(\gamma)$ ist ein kohomologisch trivialer G-Modul.*
(ii) *C ist ein Klassenmodul mit Fundamentalklasse γ.*
(iii) *δ^2 ist ein Isomorphismus für alle H und alle $n \in \mathbb{Z}$.*

Bemerkung. Ist C ein Klassenmodul für G, dann haben wir nach dem obigen Satz Isomorphismen

$$\begin{array}{rcl} (\delta^2)^{-1} : H^2(H, C) & \xrightarrow{\sim} & \frac{1}{\#H}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\ \gamma_H & \longmapsto & \frac{1}{\#H}\mathbb{Z} + \mathbb{Z}. \end{array}$$

Diese heißen die **Invariantenabbildungen** (bzgl. γ) und werden mit inv bezeichnet.

Beweis. Die Abbildung δ^2 entsteht aus den exakten Folgen

$$0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{i} C(\gamma) \xrightarrow{\varphi} I_G \longrightarrow 0 \tag{2}$$

und ist das Kompositum der Abbildung

$$\hat{H}^n(G,\mathbb{Z}) \underset{\sim}{\xrightarrow{\delta_1}} \hat{H}^{n+1}(G,I_G) \xrightarrow{\delta_2} \hat{H}^{n+2}(G,C), \tag{3}$$

wobei δ_1 stets ein Isomorphismus ist. Für $n=0$ haben wir die Abbildung

$$\mathbb{Z}/\#H\mathbb{Z} = \hat{H}^0(H,\mathbb{Z}) \underset{\sim}{\xrightarrow{\delta_1}} H^1(H,I_G) \xrightarrow{\delta_2} H^2(H,C) \tag{4}$$

Behauptung: Für $\overline{1} = 1 + \#H\mathbb{Z}$ gilt

$$\delta_2\delta_1\overline{1} = \gamma_H = res_H^G\gamma. \tag{5}$$

Beweis der Behauptung. Ein Urbild des inhomogenen 0-Kozykels $1 \in \mathcal{Z}^0(H,\mathbb{Z})$ in $\mathcal{C}^0(H,\mathbb{Z}[G])$ ist $1 \in \mathbb{Z}[G]$ und $\delta_1\overline{1} \in H^1(H,I_G)$ ist durch den inhomogenen 1-Kozykel $(\partial 1)(\sigma) = \sigma - 1$ repräsentiert (eine Derivation $H \to I_G$). Ein Urbild von $\partial 1$ in $\mathcal{C}^1(H,C(\gamma))$ ist durch die Abbildung

$$x : H \to C(\gamma),\ x(\sigma) = b_\sigma$$

gegeben und deshalb wird $\delta_2\delta_1(\overline{1})$ durch die Abbildung

$$\begin{aligned} &\partial(x) : H^2 \longrightarrow C \\ &\partial(x)(\sigma,\tau) = \sigma b_\tau - b_{\sigma\tau} + b_\sigma = c(\sigma,\tau) \end{aligned}$$

repräsentiert. Dies zeigt die Behauptung.

Nun sei $\beta \in \hat{H}^n(H,\mathbb{Z})$ wobei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig ist. Wendet man nun Satz 1.21 aus Kapitel 3.2 (Verhalten von $\cup$ unter Randabbildung, die Variante für Tate-Kohomologie) auf die exakten Folgen (1) und (2) an, erhält man

$$\delta^2\beta = \delta_2\delta_1(\overline{1}\cup\beta) = \delta_2(\delta_1\overline{1}\cup\beta) = \delta_2\delta_1\overline{1}\cup\beta = \gamma_H \cup \beta.$$

Dies zeigt die erste Aussage.

Nun gilt

$$\hat{H}^i(H,I_G) \cong \hat{H}^{i-1}(H,\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{für} \quad i = 0,2.$$

Daher liefert (2) die exakte Folge

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^1(H,C) \longrightarrow H^1(H,C(\gamma)) \longrightarrow H^1(H,I_G) \\ &\xrightarrow{\delta_2} H^2(H,C) \longrightarrow H^2(H,C(\gamma)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Ist nun $C(\gamma)$ kohomologisch trivial, so folgt $H^1(H,C)=0$ und das Kompositum

$$\mathbb{Z}/\#H\mathbb{Z} = \hat{H}^0(H,\mathbb{Z}) \xrightarrow[\sim]{\delta_1} H^1(H,I_G) \xrightarrow[\sim]{\delta_2} H^2(H,C)$$

ist ein Isomorphismus, der $\bar{1}$ auf γ_H schickt. Daher ist C ein Klassenmodul mit Fundamentalklasse γ, d.h. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist gezeigt. Gilt umgekehrt (ii), so ist $H^1(H,C)=0$ und $H^1(H,I_G) \xrightarrow[\sim]{\delta} H^2(H,C)$ ist ein Isomorphismus. Wir erhalten

$$H^n(H,C(\gamma)) = 0 \quad \text{für} \quad n = 1,2$$

und jede Untergruppe H von G (insbesondere für jede p-Sylowgruppe). Nach 3.4.7 ist $C(\gamma)$ kohomologisch trivial. Wir erhalten (i) $\Longleftrightarrow$ (ii). Die Äquivalenz (i) $\Longleftrightarrow$ (iii) folgt aus (3) und der langen exakten Folge

$$\begin{aligned} \cdots \quad &\longrightarrow \hat{H}^n(H,C) \longrightarrow \hat{H}^n(H,C(\gamma)) \longrightarrow \hat{H}^n(H,I_G) \\ &\xrightarrow{\delta} \hat{H}^{n+1}(H,C) \longrightarrow \hat{H}^{n+1}(H,C(\gamma)) \longrightarrow \cdots . \end{aligned}$$

$\square$

1.3 Nakayama-Tate Dualität

Satz 1.4. *(Nakayama-Tate). Sei G eine endliche Gruppe, C ein Klassenmodul und $\gamma \in H^2(G,C)$ eine Fundamentalklasse. Sei A ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-freier G-Modul. Dann induziert für alle $i \in \mathbb{Z}$ das Cup-Produkt*

$$\hat{H}^i(G,\mathrm{Hom}(A,C)) \times \hat{H}^{2-i}(G,A) \xrightarrow{\cup} H^2(G,C) \cong \frac{1}{\#G}\mathbb{Z}/\mathbb{Z},$$

wobei $H^2(G,C) \cong \frac{1}{\#G}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ durch $\gamma \mapsto \frac{1}{\#G} + \mathbb{Z}$ gegeben ist, einen Isomorphismus

$$\hat{H}^i(G,\mathrm{Hom}(A,C)) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{2-i}(G,A)^*$$

endlicher abelscher Gruppen.

Beweis. Sei

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow C(\gamma) \longrightarrow I_G \longrightarrow 0$$

die exakte Folge aus dem Beweis von 1.3. Da A $\mathbb{Z}$-frei ist, sind die Folgen

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,C(\gamma)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,I_G) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,I_G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}[G]) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0 \end{gathered}$$

exakt und die G-Moduln in der Mitte sind jeweils kohomologisch trivial (nach Korollar 1.21 in Kapitel 4). Wir erhalten somit für alle $i \in \mathbb{Z}$ ein kommutatives

Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{H}^{i-2}(G,\operatorname{Hom}(A,\mathbb{Z})) & \times & \hat{H}^{2-i}(G,A) & \xrightarrow{\cup} & \hat{H}^0(G,\mathbb{Z}) \\
\delta\downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow\delta \\
\hat{H}^{i-1}(G,\operatorname{Hom}(A,I_G)) & \times & \hat{H}^{2-i}(G,A) & \longrightarrow & \hat{H}^1(G,I_G) \\
\delta\downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow\delta \\
\hat{H}^{i}(G,\operatorname{Hom}(A,C)) & \times & \hat{H}^{2-i}(G,A) & \longrightarrow & \hat{H}^2(G,C)
\end{array}$$

in dem die vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind. Nach 1.2 erhalten wir den Isomorphismus

$$\hat{H}^i(G,\operatorname{Hom}(A,C)) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{2-i}(G,A)^*.$$

Schließlich ist A endlich erzeugt und G endlich. Daher sind die Kohomologiegruppen $\hat{H}^i(G,A)$ endlich erzeugte abelsche Gruppen die durch $\#G$ annulliert werden, also endlich. □

Bemerkung. Für eine Untergruppe $H \subset G$ haben wir zwei kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\hat{H}^i(H,\operatorname{Hom}(A,C)) & \xrightarrow{\sim} & \hat{H}^{2-i}(H,A)^* \\
res \uparrow\downarrow cor & & cor^* \uparrow\downarrow res^* \\
\hat{H}^i(G,\operatorname{Hom}(A,C)) & \xrightarrow{\sim} & \hat{H}^{2-i}(G,A)
\end{array}$$

wobei cor^* und res^* die zu cor und res dualen Abbildungen sind. Die Kommutativität folgt aus $cor(\alpha \cup res\beta) = cor(\alpha) \cup \beta$ (Übungsaufgabe).

Setzt man in 1.4 $i = 0$ und $A = \mathbb{Z}$ und erinnert sich an

$$H^2(G,\mathbb{Z})^* \cong H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* \cong G^{\mathrm{ab}},$$

erhält man

Satz 1.5. *Ist C ein Klassenmodul für die endliche Gruppe G, so erhält man einen Isomorphismus*

$$\rho = \rho_G : G^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} C^G/N_G C.$$

Dieser heißt **Nakayama-Abbildung***, hängt von der Wahl einer Fundamentalklasse $\gamma \in H^2(G,C)$ ab und es gilt*

$$\chi(\sigma) = inv(\rho(\sigma) \cup \delta\chi)$$

für jedes

$$\chi \in \operatorname{Hom}(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \underset{\sim}{\xrightarrow{\delta}} H^2(G,\mathbb{Z}).$$

Beweis. Die Existenz des Isomomorphismus ρ folgt direkt aus Satz 1.4. Um die Formel $\chi(\sigma) = inv(\rho(\sigma) \cup \delta\chi)$ zu zeigen erinnern wir uns an die Konstruktion von ρ.

$$\begin{tikzcd}
\hat{H}^0(G,C) \arrow[r, "\sim"] \arrow[rrr, bend left, "\rho"] & H^2(G,\mathbb{Z})^* \arrow[r, "\sim", "\delta^*"'] & H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* & G^{\mathrm{ab}} \arrow[l, "\sim"'] \\
c \arrow[r, mapsto] & (\alpha \mapsto inv(\alpha \cup c)) \arrow[r, mapsto] & (\chi \mapsto inv(\delta\chi \cup c)) & \\
 & & (\chi \mapsto \chi(\sigma)) & \sigma \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Ist nun $c = \rho(\sigma)$, erhalten wir $\chi(\sigma) = inv(\rho(\sigma) \cup \delta\chi)$ für alle $\chi \in H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. $\square$

Bemerkung. Wir können die Formel $\chi(\sigma) = inv(\rho(\sigma) \cup \delta\chi)$ auch anders ausdrücken, indem wir sagen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G^{\mathrm{ab}} & \times & H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\hat{H}^0(G,C) \arrow[u, "rec"] & \times & H^2(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\cup"] & H^2(G,C). \arrow[u, "inv"']
\end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei wir uns daran erinnern, dass der Reziprozitätshomomorphismus invers zu ρ ist.

Definition. Die Komposition

$$rec_G : C^G \twoheadrightarrow C^G/N_G C \xrightarrow[\sim]{\rho^{-1}} G^{\mathrm{ab}}$$

heißt **Reziprozitätshomomorphismus**. Ein alternativer Name ist „Normenrestsymbol" und für $\alpha \in C^G$ schreibt man auch $(\alpha, G) := rec(\alpha)$. Der Name rührt daher, dass (α, G) dann und nur dann trivial ist, wenn $\alpha \in N_G C$ gilt.

Schließlich erinnern wir uns an den Isomorphismus

$$\Phi : G^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} H_1(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{-2}(G,\mathbb{Z}).$$

Zusammen mit dem Isomorphismus aus 1.2 erhalten wir den Isomorphismus

$$\rho' : G^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} \hat{H}^{-2}(G,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\gamma \cup -} \hat{H}^0(G,C) \cong C^G/N_G C,$$

der in der Literatur oft zur Definition der Nakayama-Abbildung herangezogen wird.

Satz 1.6. $\rho = \rho'$.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
G^{\mathrm{ab}} & \times & H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup} & \frac{1}{\#G}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\
{\scriptstyle rec}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle inv} \\
\hat{H}^0(G,C) & \times & H^2(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup} & H^2(G,C) \\
{\scriptstyle \gamma\cup}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \uparrow{\scriptstyle \gamma\cup} \\
\hat{H}^{-2}(G,\mathbb{Z}) & \times & \hat{H}^2(G,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup} & \frac{1}{\#G}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}
\end{array}$$

Für $\rho = \rho'$ ist zu zeigen, dass für jedes $\sigma \in G^{\mathrm{ab}}$ und jedes $\chi \in H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ gilt

$$inv(\gamma \cup \Phi(\sigma) \cup \delta\chi) = \chi(\sigma)$$

Nach Definition von *inv* ist die Komposition der rechten vertikalen Pfeile die Identität. Wir erhalten

$$inv(\gamma \cup \Phi(\sigma) \cup \delta\chi) = \Phi(\sigma) \cup \delta\chi.$$

Dass dies gleich $\chi(\sigma)$ ist, ist eine Übungsaufgabe. □

1.4 Klassenformationen

Sei G eine proendliche Gruppe. Offene Untergruppen bezeichnen wir mit den Buchstaben U, V, W.

Definition. Ein **Formationsmodul** für G ist ein diskreter G-Modul C zusammen mit einem System von Isomorphismen

$$inv_{U/V} : H^2(U/V, C^V) \xrightarrow{\sim} \frac{1}{(U:V)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

für jedes Paar $V \subset U$ offener Untergruppen mit V Normalteiler in U, so dass die folgenden Bedingungen gelten

(i) $H^1(U/V, C^V) = 0$
(ii) Für offene Normalteiler $W \subset V$ von U kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
H^2(U/V,C^V) & \xrightarrow{\mathrm{inf}} & H^2(U/W,C^W) & \xrightarrow{res} & H^2(V/W,C^W) \\
\wr\downarrow{\scriptstyle inv} & & \wr\downarrow{\scriptstyle inv} & & \wr\downarrow{\scriptstyle inv} \\
\frac{1}{(U:V)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & \overset{\mathrm{inkl}}{\hookrightarrow} & \frac{1}{(U:W)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot(U:V)} & \frac{1}{(V:W)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.
\end{array}$$

Das Paar (G,C) heißt **Klassenformation**.

Bemerkung. 1) Auch für endliche Gruppen ist der Begriff Formationsmodul stärker als der des Klassenmoduls, da bei diesem keine Bedingung für den Übergang zu Quotienten gefordert ist.

2) Aus (ii) folgt die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} H^2(V/W, C^W) & \xrightarrow{inv} & \frac{1}{(V:W)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \\ {\scriptstyle cor}\downarrow & & \downarrow\cap \\ H^2(U/W, C^W) & \xrightarrow{inv} & \frac{1}{(U:W)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, \end{array}$$

da $cor_U^V \cdot res_V^U = (U:V)$.
3) Die Isomorphismen

$$inv : H^2(G/V, C^V) \xrightarrow{\sim} \frac{1}{(G:V)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

bilden ein gerichtetes System. Im direkten Limes erhält man eine Injektion

$$inv : H^2(G, C) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

die **Invariantenabbildung** heißt. Das Bild von *inv* ist

$$\frac{1}{\#G}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} := \varinjlim_{V} \frac{1}{(G:V)}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}.$$

4) für jeden offenen Normalteiler $U \subset G$ ist C^U ein Klassenmodul für G/U. Die Elemente $inv_{G/U}^{-1}\left(\frac{1}{(G:U)} \mod \mathbb{Z}\right) \in H^2(G/U, C^U)$ bilden ein kompatibles System von Fundamentalklassen bei variierendem U. Daher erhalten wir kompatible Homomorphismen

$$rec_{G/U} : C^G \twoheadrightarrow C^G/N_{G/U}C^U \xrightarrow{\sim} (G/U)^{\mathrm{ab}}.$$

Im Limes erhalten wir den **Reziprozitätshomomorphismus**

$$rec : C^G \longrightarrow G^{\mathrm{ab}}.$$

Dieser hat dichtes Bild: Ist $U \subset G^{\mathrm{ab}}$ eine offene Untergruppe und bezeichnen wir das Urbild von U unter der kanonischen Projektion $\pi : G \to G^{\mathrm{ab}}$ mit $\tilde{U}$, so gilt $G^{\mathrm{ab}}/U \cong G/\tilde{U} = (G/\tilde{U})^{\mathrm{ab}}$, weshalb die Komposition $rec : C^G \to G^{\mathrm{ab}} \twoheadrightarrow G^{\mathrm{ab}}/U$ surjektiv ist.

Nach Definition (und Linksexaktheit des projektiven Limes) gilt

$$\ker(rec) = N_G C := \bigcap_{U \lhd G} N_{G/U}C^U \subset C^G.$$

Man nennt $N_G C$ die **Gruppe der universellen Normen** von C.

Schließlich schreibt man für $\alpha \in C^G$ auch $(\alpha, G) := rec(\alpha)$ und nennt dies das **Normrestsymbol**.