Höhere Analysis

Hans Knüpfer, Heidelberg University

Wintersemester 2020/21

Diese Notizen sind nicht auf Fehler geprüft, nicht korrigiert und unvollständig (insbesondere einige Beweise). Sie sind ein zusätzliches Angebot an die Studierenden, sollen aber nicht die Vorlesungsmitschrift ersetzen. Die Mitschrift ist nur für die Studierenden der Vorlesung *Höhere Analysis* im Wintersemester 20/21, Universität Heidelberg, gedacht. Während des Semesters wird es kontinuierlich Updates der Mitschrift geben. Die Quelle der Bilder ist wikipedia.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **3**

2 Grundlagen der Maßtheorie **9**

2.1 Ringe, σ-Algebren und Maße . . . 9

2.2 Maßerweiterung . . . 20

2.3 Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ . . . 30

3 Integration **38**

3.1 Messbare Funktionen . . . 38

3.2 Lebesgueintegral und Konvergenzsätze . . . 45

3.3 Räume integrabler Funktionen . . . 58

3.4 Vergleich von Konvergenzbegriffen 70

4 Integrationssätze **76**

4.1 Produktmaße und Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ 76

4.2 Satz von Fubini 84

4.3 Transformationssatz 86

4.4 Faltungsoperator und Approximation durch glatte Funktionen 98

4.5 Fouriertransformation 106

1 Einführung

Durchführung:

- Synchrone Vorlesung
  - Zeiten: Mo 9:30-11:00, Fr 13:15-14:45.
  - Platform: WebEx
- Asynchrone Materialien
  - Skript wird wöchentlich im Voraus.
  - Screencast ca 1x wöchentlich im Voraus.

Organisation:

- Informationen auf Moodle und Müsli
- Plenarübung: Mi 14:00-15:30
- Übungsbetrieb: 50% Punkte der Übungszettel für Klausurzulassung
- Klausur: Termin wird noch bekanntgeben. Wahrscheinlich letzte Vorlesungswoche.

Themen: Wir beschaftigen uns in diesem Semester mit

- Maßtheorie: Maße sind Abbildungen der Form $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ für $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Mit Maßen können wir z.B. das Volumen oder das Oberflächenmaß von Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ messen.

- Integrationstheorie: Wir führen das Lebesgue-Integral ein (eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals). Das Lebesgueintegral erlaubt insbesondere Konvergenzsätze wie den Satz von der dominierten Konvergenz, ...

- Integrationssätze: Wir führen wichtige Sätz aus der Integrationstheorie ein wie den Transformationssatz, Satz von Gauss, Fubini.

Literatur

- Ambrosio, Da Prato, Mennucci –Introduction to measure theory and integration: Hauptgrundlage des Kapitels über Maß– und Integrationstheorie.

- Evans, Gariepy – Fine properties of functions: Bietet interessante weitergehende Informationen. Schöne Ideen, schreckliche Notation.

- Rudin – Real Analysis

Wir beginnen mit einer kurzen Motivation der grundlegenden Themen der Vorlesung:

Problem mit Riemann-Integral. Sei $r_1, \dots,$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ und

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{r_1, \dots, r_k\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad , \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Dann sind die Funktionen $f_k \geq 0$ sind Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f_k \, dx \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad f_k \nearrow f \;\; \text{punktweise monoton.}$$

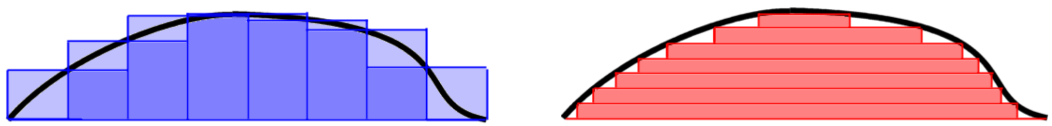

Abbildung 1: Riemannintegral vs. Lebesgueintegral.

Die Grenzfunktion f ist allerdings nicht Riemann-integrierbar. Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen ist also nicht abgeschlossen unter punktweiser monotoner Konvergenz. Wir führen daher einen allgemeineren Integrationsbegriff, bei dem auch der Grenzwert von integrablen Funktionsfolgen (und gewissen Bedingungen) integrierbar ist. Das Lebesgue-Integral bietet eine solche Erweiterung des Riemann-Integrals. Dies erlaubt dann die Herleitung von Konvergenzsätzen wie den Satz von der monotonen Konvergenz, welche die Integrabilität der Grenzfunktion sicherstellen.

Grundidee des Lebesgue-Integrals. Die Funktion f aus (1.1) ist an keinem Punkt $x \in [0,1]$ stetig. Eine Zerlegung des Definitionsbereiches in der Konstruktion von Ober– und Untersummen führt also nicht zum Erfolg. Beim Lebesgueintegral wird nicht der Definitionsbereicht, sondern stattdessen der Bildbereich zerlegt. Für eine nichtnegative Funktion $f : \Omega \to [0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Mengen

$$E_k^{(h)} \; := \; f^{-1}((kh, (k+1)h]) \subset \Omega \qquad \text{für } h > 0 \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

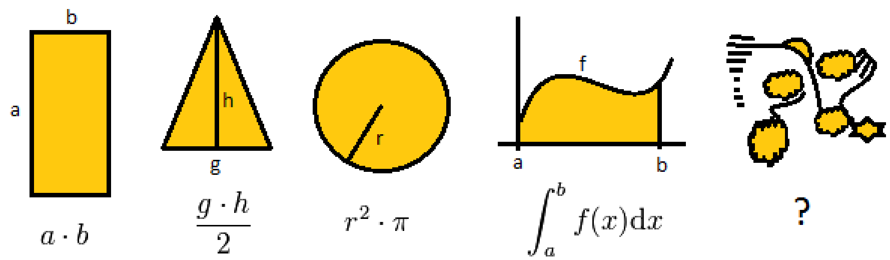

Abbildung 2: Komplexer werdende Teilmengen der Ebene und ihre Flächeninhalte

Wir approximieren dann das Integral von f durch

$$\sum_{k=1}^{\infty}[kh]\mu(E_k^h) \ \leq \ \int_\Omega f(x)\ dx \ \leq \ \sum_{k=1}^{\infty}[(k+1)h]\mu(E_k^{(h)}). \tag{1.2}$$

Hierbei ist $\mu(E)$ das Volumen (allgemeiner Maß) der Menge $E \subset \Omega$. Das Integral ergibt sich dann aus (1.2) im Limes $h \to 0$. Man sieht leicht, dass mit diesem Integralbegriff die Funktion f aus (1.1) integrierbar ist!

Um das Lebesgueintegral zu konstruieren, müssen wir also das Maß einer Menge E kennen.

Das Maßproblem. Mit $\mathscr{P}(X)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von X, d.h. die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Wir suchen nach einer Funktion

$$\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \ \to \ [0, \infty],$$

welche das Volumen von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ misst. Wenn wir natürliche Annahmen an diese Maßfunktion stellen, dann führt dies auf das folgende Maßproblem:

Problem 1.1 (Maßproblem). *Wir suchen* $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ *mit*

(i) $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ *falls* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *(σ-Additivität)*

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu([0,1]^n) = 1$ *(Normierung)*

(iii) $\mu(A + y) = \mu(A)\ \forall y \in \mathbb{R}^n$ *(Translationsinvarianz)*

Aus der σ-Additivität erhalten wir auch die Monotonie unserer Abbildung:

$$\mu(A) \leq \mu(B) \quad \forall A \subset B. \qquad (Monotonie) \tag{1.3}$$

Allerdings hat das Maßproblem 1.1 keine Lösung:

Satz 1.2 (Vitali 1905). *Es gibt keine Abbildung* $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, *welche die Forderungen des Maßproblems erfüllt.*

Beweis. Wir geben den Beweis für $n = 1$, der Beweis für allgemeine n folgt analog.

Wir definieren die Äquivalenzrelation $x \sim y$ auf $E := [0,1]$ durch $x \sim y$, genau dann wenn $x - y \in \mathbb{Q}$. Nach dem Auswahlaxiom (ein Axiom der Mengenlehre) gibt es eine Menge $M_0 \subset [0,1]$, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, d.h. zu $y \in [0,1]$ gibt es genau ein $x \in M_0$ mit $x - y \in \mathbb{Q}$.

Sei q_i, $i \in \mathbb{N}$, eine Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ und sei

$$M_j \; := \; M_0 + q_j \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i \neq j, \qquad [0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_j \subset [0,2], \qquad \mu(M_i) \; = \; \mu(M_0) \; \forall i \tag{1.4}$$

Falls μ die Forderungen (i)–(iii) des Maßproblems erfüllt, dann folgt aus (1.4), dass

$$1 \overset{(ii)}{=} \mu([0,1]) \overset{(1.3)}{\leq} \mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i) \overset{(i)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_0) \overset{(1.3)}{\leq} \mu([0,2]) \overset{(i),(iii)}{<} \infty. \tag{1.5}$$

Aus (1.5) erhalten wir den Widerspruch $\mu(M_0) > 0$ und $\sum_i \mu(M_0) = \infty$. $\square$

Es ist also nicht möglich einen Maßbegriff zu definieren, so dass alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messbar sind und so dass die Eigenschaften aus Problem 1.1 gelten. Wir suchen daher eine maximale Familie $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ von <u>messbaren</u> Mengen und eine Funktion

$$\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty],$$

welche die Eigenschaften des Maßproblems erfüllt.

Integration über allgemeinere Maße. Das Lebesgueintegral kann auch genutzt werden, um über allgemeinere Maße μ in allgemeinen Räumen X zu integrieren. Relevante Beispiele sind

- gewichtete Maße wie das Gaußmaß $e^{-x^2}dx$
- diskrete Maße wie das Zählmaß.
- Oberflächenmaße wie das $(n-1)$–dimensionale Hausdorffmaß $\mathscr{H}^{n-1}$.

Wir werden daher zuerst eine allgemeine Maßtheorie einführen.

2 Grundlagen der Maßtheorie

2.1 Ringe, σ-Algebren und Maße

Mit X bezeichnen wir eine nichtleere Menge. Die Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ bezeichnet die Menge aller Teilmengen von X. Der Raum $\mathscr{P}(X)$ wird durch die Operatoren $\cup$, $\cap$, ^{c} (Komplement) mit einer algebraischen Struktur versehen. Wir schreiben , $A\backslash B := A \cap B^c$ für die relative Differenz und $A \Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ für die symmetrische Differenz. Wir erinnern an:

$$\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c \qquad \text{(Identität von De Morgan).}$$

In Analogie zu algebraischen Strukturen defininieren wir:

Definition 2.1 (Ring, Algebra). *Eine Teilmenge $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt Ring, falls*

(i) $\emptyset \in \mathscr{A}$.

(ii) $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cup B,\ A \cap B,\ A\backslash B \in \mathscr{A}$.

Falls außerdem $X \in \mathscr{A}$, dann heißt $\mathscr{A}$ Algebra.

Ein Ring ist also stabil unter den Operatoren $\cup$, $\cap$ und $\setminus$ (und damit auch Δ). Mit der obigen Definition ist $(\mathscr{A}, \Delta, \cap)$ dann auch ein Ring im algebraischen Sinne: Das neutrale Element bezüglich der “Addition” Δ ist $\emptyset$, das inverse Element zu A ist A. Man rechnet leicht nach, dass Kommutativ, Assoziativ und Distributivgesetz gelten. Falls $\mathscr{A}$ eine Algebra ist, dann ist X das neutrales Element der Multiplikation.

Der Raum $\mathscr{P}(X)$ ist teilgeordnet durch die Ordnungsrelationen $\subset$, $\supset$. Entsprechend sagen wir, dass die Folge A_k monoton steigt, wenn $A_k \subset A_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, wir sagen, dass sie monoton fällt, wenn entsprechend $A_{k+1} \subset A_k$ gilt. Wir schreiben:

$$\limsup_{k\to\infty} A_k := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \liminf_{k\to\infty} A_k := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Die Menge $\limsup_k A_k$ besteht also aus den Elementen von X, die in unendlich vielen Mengen A_k enthalten sind. Die Menge $\liminf_k A_k$ besteht aus den Elementen von X, welche in allen, bis auf endlichen vielen Mengen A_k enthalten sind. Falls $\limsup_k A_k = \liminf_k A_k$, dann schreiben wir $\lim_{k\to\infty} A_k := \limsup_{k\to\infty} A_k = \liminf_{k\to\infty} A_k$. Falls die Folge $A_k \subset X$ monoton ist, dann existiert der Limes $\lim_{k\to\infty} A_k$. Wir bemerken, dass $A_k \to A$ genau dann, wenn $A_k \Delta A \to \emptyset$. Korrespondiert dieser Konvergenzbegriff zu einer Topologie (Übungsaufgabe)?.

Falls die Folge monoton steigt, dann gilt $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Falls die Folge monoton fällt, d.h. $A_{k+1} \subset A_k$, dann gilt $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$. Wir schreiben $A_k \nearrow L$

beziehungsweise $A_k \searrow L$.

Eine Algebra, welche abgeschlossen unter Grenzwertbildung ist heißt σ–Algebra:

Definition 2.2 (σ-Algebra). *$\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt σ–Algebra auf X, falls*

(i) $\mathscr{A}$ ist Algebra.

(ii) $A_i \in \mathscr{A}\ \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Falls $A_i \in \mathscr{A}$, dann folgt aus der De Morganschen Identität, dass die Mengen $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, $\liminf A_i, \limsup A_i \in \mathscr{A}$. Falls $A_i \in \mathscr{A}$ mit $A_i \to A$, dann gilt also insbesondere $A \in \mathscr{A}$.

Nach Definition ist $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ also eine σ–Algebra ist, genau dann wenn

(i) $X, \emptyset \in \mathscr{A}$

(ii) $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$

(iii) $A_i \in A\ \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Wir bemerken, dass $\mathscr{P}(X)$ die größte σ-Algebra auf X ist. Die Menge $\{\emptyset, X\} \subset \mathscr{P}(X)$ ist die kleinste σ-Algebra auf X. Zu jeder Menge $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ gibt es eine kleinste σ-Algebra, welche $\mathscr{F}$ enthält:

Satz 2.3 (Erzeugte σ-Algebra). *Sei $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann ist*

$$\sigma(\mathscr{F}) \;:=\; \bigcap\{\mathscr{A} : \mathscr{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra mir } \mathscr{F} \subset \mathscr{A}\}.$$

die kleinste σ-Algebra, welche $\mathscr{F}$ enthält. $\sigma(\mathscr{F})$ heißt die von $\mathscr{F}$ erzeugt σ-Algebra.

Beweis. Nach Konstruktion ist $\sigma(\mathscr{F}) \subset \mathscr{A}$ für jede σ-Algebra $\mathscr{A}$, welche $\mathscr{F}$ enthält. Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma(\mathscr{F})$ eine σ-Algebra ist. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller σ-Algebren, welche $\mathscr{F}$ enthalten. Es gilt $\mathscr{P}(X) \in \mathbb{A}$ und daher ist $\mathbb{A}$ nicht leer. Wir prüfen die Bedingungen (i)–(iii) aus der obigen Bemerkung:

(i) Nach Konstruktion gilt $\emptyset, X \in \sigma(\mathscr{A})\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$ und daher $\emptyset, X \in \sigma(\mathscr{F})$.

(ii) Falls $A \in \sigma(\mathscr{F})$, dann gilt $A \in \mathscr{A}\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$. Da die Mengen $\mathscr{A}$ σ-Algebren sind, erhalten wir $A^c \in \mathscr{A}\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$ und daher $A^c \in \sigma(\mathscr{F})$.

(iii) Falls $A_i \in \sigma(\mathscr{F})$, $i \in \mathbb{N}$, dann folgt $A_i \in \mathscr{A}\ \forall i \in \mathbb{N}\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$. Damit folgt auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}\ \forall A \in \mathscr{A}$ und damit auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathscr{F})$.

Daher ist $\sigma(\mathscr{F})$ eine σ–Algebra. □

Aus der Analysis wissen wir, dass sich jeder metrische Raum vervollständigen lässt. In diesem Sinne kann man $\sigma(\mathscr{F})$ die Vervollständigung des Mengensystems $\mathscr{F}$ bezüglich unseres Konvergenzbegriffes für Mengen interpretieren.

[02.11.2020]

Definition 2.4 (Borel σ-Algebra). *Sei X ein metrischer Raum und sei $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ die Topologie auf X, d.h. die Menge der offenen Mengen. Dann ist die Borel σ-Algebra definiert durch*

$$\mathscr{B}(X) := \sigma(\mathscr{T}).$$

Nach Definition enthält $\mathscr{B}(X)$ alle offenen Mengen, alle abgschlossenen Mengen und die abzählbaren Druchschnitte und Vereinigungen dieser Mengen. Äquivalent wird die Borel σ–Algebra auch durch die abgeschlossen Mengen erzeugt. Elemente der Borel σ–Algebra heißen Borelmengen.

Wir betrachten nun additive und subadditive Funktionen auf $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$:

Definition 2.5 (Additivität). *Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann heißt $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$*

(i) subadditiv, falls $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)\ \forall A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cup B \in \mathscr{A}$.

(ii) additiv, falls $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)\ \forall A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B \in \mathscr{A}$.

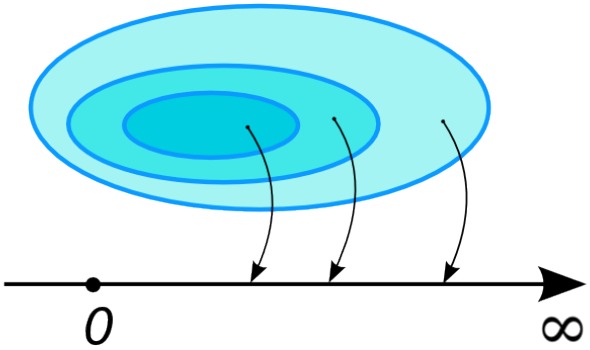

Abbildung 3: Ein Maß ordnet Teilmengen einer Grundmenge Zahlen zu. Das Bild illustriert die Monotonieeigenschaft von Maßen, das heißt größere Mengen haben auch ein größeres Maß.

(iii) *<u>σ–subadditiv</u>, falls für jede Folge $A_k \in \mathscr{A}$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$ gilt*

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \qquad (\sigma\text{-Subadditivität}).$$

(iv) *<u>σ–additiv</u>, falls für jede Folge $A_k \in \mathscr{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$*

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \qquad (\sigma\text{-Additivität}).$$

Eine σ–additive Abbildung auf einer σ–Algebra nennen wir Maß:

Definition 2.6 (Maßraum, Maß).

(i) *Ein messbarer Raum* $(X, \mathscr{E})$ *ist eine Menge* X *mit einer* σ*–Algebra* $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$*.*

(ii) *Eine Maß* $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ *ist eine* σ*–additive Funktion auf einem messbaren Raum* $(X, \mathscr{E})$ *mit* $\mu(\emptyset) = 0$*. Dann heißt* $(X, \mathscr{E}, \mu)$ *Maßraum.*

Das Maß $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ *heißt*

(iii) *Wahrscheinlichkeitsmaß, falls* $\mu(X) = 1$*.*

(iv) *endlich, falls* $\mu(X) < \infty$*,*

(v) σ*–endlich, falls es* $A_k \in \mathscr{E}$ *gibt mit* $\mu(A_k) < \infty \ \forall k \in \mathbb{N}$ *und* $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$*.*

(vi) *Ein Punkt* $x \in X$ *heißt Atom, falls* $\mu(\{x\}) > 0$*.*

(vii) *Falls* X *ein metrischer Raum ist, dann heißt* μ *Borelmaß, falls* $\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{E}$*.*

Wir hatten für das Maßproblem gesehen, dass wir nicht das Volumen aller Teilmengen $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ des $\mathbb{R}^n$ messen können. Wir werden zeigen, dass wir zumindest jede Borelmenge messen können (und sogar ein etwas größeres System von Mengen).

Beispiel 2.7 (Beispiele diskreter Maße).

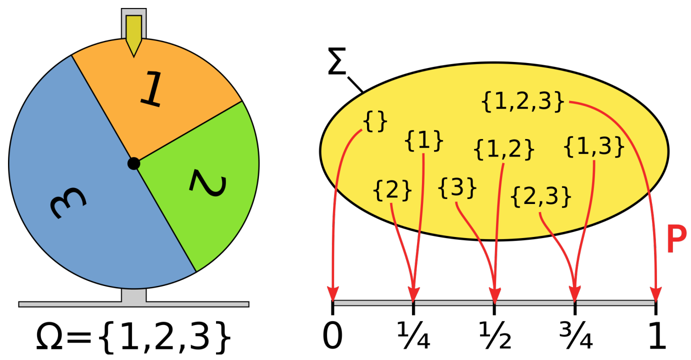

Abbildung 4: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dass jedem Element aus dem Ereignisraum eine Wahrscheinlichkeit zuordnet.

(i) Sei X eine beliebige Menge. Das Diracmaß zum Punkt $x \in X$ ist

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } x \in A \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Das Diracmaß ist ein endliches Maß. Der Punkt $x \in X$ ist ein Atom von δ_x. Falls X ein metrischer Raum ist, dann ist δ_x ein Borelmaß.

(ii) Sei X eine beliebige Menge. Für $A \in \mathscr{P}(X)$ definieren wir das Zählmaß durch

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \textit{falls } A \textit{ endlich viele Elemente enthält} \\ \infty & \textit{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\#A$ die Anzahl der Elemente von A ist. Das Zählmaß ist genau dann endlich, wenn X endlich ist; es ist genau dann σ–endlich, wenn X abzählbar ist. Falls $X =$

$\mathbb{R}^n$, *dann ist das Zählmaß also nicht σ–endlich.*

Aus der Additivität von Maßen erhalten wir direkt die folgenden Rechenregeln:

- $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathscr{E}$.
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathscr{E}$.

Diese beiden Aussagen folgen aus der Additivität des Maßes zusammen mit den disjunkten Zerlegungen $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$, $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$. Aus der Definition von Maßen erhalten wir Monotonie, σ–Subadditivität und Stetigkeit des Maßes bezüglich monotoner Konvergenz:

Proposition 2.8 (Eigenschaften von Maßen). *Sei $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Dann*

(i) $\mu(A) \leq \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathscr{E}$ *mit* $A \subset B$. *(Monotonie)*

(ii) $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \quad \forall A_i \in \mathscr{E}, i \in \mathbb{N}$. *($\sigma$-Subadditivität)*

(iii) Falls $A_k \nearrow A$ oder $A_k \searrow A$ und $\mu(A_0) < \infty$ für $A_k \in \mathscr{A}$. Dann gilt $A \in \mathscr{E}$ und

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu(A) \qquad \text{(Stetigkeit bzgl. monotoner Konvergenz)}$$

Beweis. *(i):* Folgt aus der disjunkten Zerlegung $B = A \cup (B \backslash A)$.

(ii): Wir definieren induktiv $B_0 := A_0$ und $B_{k+1} := A_{k+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset A_{k+1}$. Dann gilt $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ und $\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ nach (i). Da die Mengen B_k paarweise

disjunkt sind, erhalten wir

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_k) = \mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} B_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

(iii): Nach Annahme gilt $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_k$ und damit $A \in \mathscr{E}$. Wir können $\mu(A_k) < \infty \ \forall k \in \mathbb{N}$ annehmen, da die Aussage sonst trivialerweise erfüllt ist. Die Mengen $B_0 := A_0$ und $B_k := A_k \backslash A_{k-1}$ für $k \geq 1$ sind disjunkt und $\mu(B_k) = \mu(A_k) - \mu(A_{k-1})$. Daher

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) \ = \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

Für $A_k \searrow A$ betrachte man die Folge $C_k := A_0 \backslash A_k$ an. Falls $\mu(A_0) < \infty$, dann gilt $\mu(C_k) = \mu(A_0) - \mu(A_k)$ und wir können das obige Argument anwenden. $\square$

Gilt auch allgemein $\mu(A_k) \to \mu(A)$, falls $A_k \to A$ (Übungsaufgabe)?

Ein weiterer nützlicher Begriff ist der Begriff des äußeren Maßes.

Definition 2.9 (Äußeres Maß). *Sei X eine Menge und $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$. Dann heißt μ^* äußeres Maß, falls*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) μ^* *ist σ–subadditiv.*

(iii) *Für $A \subset B$ ist $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.* *(Monotonie)*

Wir geben einige Beispiele: Sei X ein Menge. Falls $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ gegeben ist durch

- $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A) = 1$ für alle $A \neq \emptyset$, oder
- $\mu(A) = 0$, falls $\#A < \infty$ und $\mu(A) = 1$

Dann ist μ ein äußeres Maß.

Maße und äußere Maße sind subadditiv und erfüllen damit eine wichtige Eigenschaft einer Norm. Allerdings folgt aus $\mu(A) = 0$ im Allgemeinen nicht $A = \emptyset$. Eine Menge $A \in \mathscr{E}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt μ–Nullmenge. Es ist allerdings sinnvoll auch die Teilmengen von Nullmengen als Nullmengen zu bezeichnen:

Definition 2.10 (Nullmengen & fast überall Aussagen). *Sei $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ und sei $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ ein Maß oder äußeres Maß.*

(i) $A \in \mathscr{P}(X)$ heißt μ-Nullmenge, falls es ein $B \in \mathscr{E}$ gibt mit $A \subset B$ und $\mu(B) = 0$.

(ii) Eine Aussage $P(x)$ gilt μ–fast überall, falls $P(x)$ bis auf eine Nullmenge gilt.

(iii) Sei Y ein topologischer Raum. Wir sagen, dass $f_k : X \to Y$ μ–fast überall gegen f konvergiert, falls es eine μ-Nullmenge $N \subset X$ gibt mit $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$.

Die Funktionenfolge $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = k\chi_{[0,\frac{1}{k}]}$ konvergiert f.ü. gegen $f = 0$.

Nach Definition ist jede σ–Algebra $\mathscr{E}$ vollständig in dem Sinne, dass $A_k \in \mathscr{E}$ und $A_k \to A$ schon die Aussage $A \in \mathscr{E}$ impliziert. Ein Maß $\mu : X \to [0, \infty]$ induziert eine Konvergenz:

Wir können sagen, dass $A_k \to A$ bezüglich des Maßes μ konvergiert, falls $\mu(A\Delta A_k) \to 0$. Im Allgemeinen folgt aus $A_k \in \mathscr{E}$ und $\mu(A\Delta A_k) \to 0$ aber nicht $A \in \mathscr{E}$. Das Maß ist dann in diesem Sinne nicht vollständig. Jedes Maß lässt sich aber zu einem vollständigen Maß fortsetzen. Dies führt auf die folgende Definition:

Satz 2.11 (Maßvervollständigung). *Sei $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist*

$$\mathscr{E}_\mu \;:=\; \{A \in \mathscr{P}(X) \;:\; \textit{es gibt } B, N \in \mathscr{E} \textit{ mit } A\Delta B \subset N \textit{ und } \mu(N) = 0\}.$$

eine σ–Algebra. Die Erweiterung $\overline{\mu} : \mathscr{E}_\mu \to [0, \infty]$ mit $\overline{\mu}(A) = \mu(B)$ ist ein Maß. Die Elemente von $E \in \mathscr{E}_\mu$ heißen μ–<u>messbar</u> Mengen. Das Maß $\overline{\mu}$ heißt <u>Vervollständigung</u> von μ. Falls $\mu = \overline{\mu}$, dann heisst das Maß μ <u>vollständig</u>. Entsprechend heißt der Maßraum $(X, \mathscr{E}, \mu)$ vollständig, falls μ vollständig ist.

Beweis. Der Beweis ist Übungsaufgabe. □

Für ein vollständiges Maß $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ gilt insbesondere $A \in \mathscr{E}$ für jede Nullmenge A.

2.2 Maßerweiterung

Wir wenden uns wieder dem Maßproblem zu, d.h. das Ziel ist ein Maß zur Volumenmessung zu definieren. Wir betrachten zuerst die Menge der linksgeschlossenen Intervalle

$$\mathscr{J} := \{[a, b) \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Wir benutzen dabei die Konvention, dass $[a,b)=\emptyset$ falls $b\le a$. Man zeigt leicht, dass

$$\mathscr{B}(\mathbb{R})=\sigma(\mathscr{J}).$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass sich jedes offene Intervall als abzählbare Überdeckung von Mengen in $\mathscr{J}$ darstellen lässt und umgekehrt (Übungsaufgabe). Jedem Intervall $I=[a,b)\in\mathscr{J}$ mit $I\neq\emptyset$ ordnen wir die Länge $|I|:=|b-a|$ und wir setzen $|\emptyset|=0$. In einem ersten Schritt definieren wir ein Volumenmaß auf der endlichen Vereingung von Mengen in $\mathscr{J}$:

Lemma 2.12 (Lebesgue–Prämaß). *Sei $\mathscr{K}\subset\mathscr{P}(\mathbb{R})$ die Menge der Mengen, welche sich als endliche Vereinigung von linksgeschlossenen Intervallen darstellen lässt, d.h.*

$$\mathscr{K} \;=\; \Big\{A\subset\mathbb{R}\;:\;A=\bigcup_{j=1}^{N}I_j\quad \textit{mit } I_j\in\mathscr{J},\,1\le j\le N,\,\textit{für ein } N\in\mathbb{N}.\Big\} \tag{2.1}$$

Wir definieren das <u>Lebesgue–Prämaß</u> $\lambda:\mathscr{K}\to[0,\infty)$ durch

$$\lambda(A)\;:=\;\inf\Big\{\sum_{I\in\mathscr{J}}|I_j|\;:\;A=\bigcup_{j=1}^{N}I_j\,\textit{für } N\in\mathbb{N} \textit{ und } I_j\in\mathscr{J}\Big\},$$

Dann ist $\mathscr{K}\subset\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein Ring und λ ist σ–additiv auf $\mathscr{K}$.

Beweis. Man zeigt leicht, dass $\mathscr{K}$ ein Ring ist. Wir bemerken, dass jede Menge $A\in\mathscr{K}$ als endliche, disjunkte Vereinigung von Mengen $I_j\in\mathscr{J}$ geschrieben werden kann. Mit einer solchen disjunkten Vereinigung gilt $\lambda(A) := \sum_{j=1}^{n} |I_j|$ und das Maß ist unabhängig von der Wahl der disjunkten Vereinigung. Die Details sind Übungsaufgabe. $\square$

[06.11.2020]

[09.11.2020]

Das Lebesgueprämaß $\lambda : \mathscr{K} \to [0,\infty]$ erfüllt die Eigenschaften (i)—(iii) des Maßproblemes ist aber nur auf dem kleinen System $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ von Mengen definiert. Unser Ziel ist λ zu einem Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{K}) = \sigma(\mathscr{J})$ fortzusetzen. Die folgende Konstruktion geht auf Constantin Carathéodory (1873-1950) zurück.

Proposition 2.13 (Induziertes äußeres Maß). *Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ und sei $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ σ–additiv. Sei $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ gegeben durch*

$$\mu^*(E) := \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : \mathscr{A} \in \mathscr{A}, E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\}.$$

Dann ist μ^* äußeres Maß mit $\mu^* = \mu$ auf $\mathscr{A}$ und heißt das von μ induzierte äußere Maß.

Beweis. Aus der Definition und der Monotonie von μ erhalten wir direkt, dass $\mu(A) = \mu^*(A)\ \forall A \in \mathscr{A}$. Insbesondere gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$. Offensichtlich ist μ^* monoton. Es bleibt zu zeigen, dass μ^* subadditiv ist: Sei $E_i \in \mathscr{P}(X)$ und sei $E := \bigcup_i E_i$. OBdA nehmen wir an, dass $\sum_i \mu^*(E_i) < \infty$. Nach Konstruktion gibt es dann zu $\varepsilon > 0$ und E_i eine Folge A_{ij} mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_{ij}) < \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \qquad \text{und} \qquad E_i \subset \bigcup_j A_{ij}$$

Wir summieren über i und erhalten

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \mu^*(A_{ij}) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon, \qquad \text{und} \qquad E \subset \bigcup_{i,j} A_{ij}$$

Die Subadditivität folgt im Limes $\varepsilon \to 0$. □

Wir möchten zeigen, dass die Einschränkung von μ^* auf einer hinreichend großen Menge σ–additiv ist. Dafür benötigen wir einige technische Definitionen und Resultate:

Definition 2.14 (Dynkinsystem, π–System).

(i) $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(X)$ *heißt* *Dynkinsystem, falls*

- $\emptyset, X \in \mathscr{D}$.
- $A \in \mathscr{D} \implies A^c \in \mathscr{D}$.
- $A_i \in \mathscr{D}\ \forall i \in \mathbb{N},\ A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{D}$.

(ii) $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(X)$ *heißt* π*–System, falls* $\mathscr{K} \neq \emptyset$ *und* $A \cap B \in \mathscr{K}\ \forall A, B \in \mathscr{K}$.

Wir bemerken, dass das Mengensystem $\mathscr{K}$ aus Lemma 2.1 eine Algebra und damit ins-

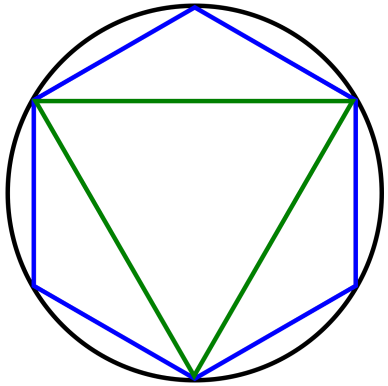

Abbildung 5: Archimedes hat die Fläche des Kreises durch Ausschöpfen von innen approximiert. Bei der Konstruktion des äußeren Maßes approximieren wir das Volumen von Mengen von außen.

besondere ein π–System ist. Wir haben das folgende Resultat:

Proposition 2.15 (Dynkinsystem). *Falls $\mathscr{D}$ ein Dynkinsystem ist und $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$ ein π–System, dann ist $\sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{D}$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Falls insbesondere $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ sowohl Dynkinsystem als auch π–System ist, dann ist $\mathscr{A}$ eine σ–Algebra. Wir wollen nun für das induzierte äußere Maß eine σ–Algebra $\mathscr{M}$ identifizieren, so dass die Einschränkung des äußeren Maßes σ–additiv ist. Intuitiv stellen wir uns eine Menge messbar vor, wenn eine Approximation von außen und innen den gleichen Wert ergibt. Zuer Einfachheit stellen wir uns einen endlichen Maßraum E vor mit

$\mu(E) < \infty$ und eine Menge $A \in \mathscr{P}(E)$. Wir können dann ein "inneres Maß" definieren als das Supremum des Volumens von diskunkten Mengen, welche in A enthalten sind. Alternativ können wir (für einen endlichen Maßraum) das inntere Maß von A definieren als $\mu_*(A) := \mu(E) - \mu^*(E \backslash A)$. Wir nennen dann die Menge A Menge messbar, falls $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ gilt. In unserem Beispiel gilt $A \subset E$ und damit $A = A \cap E$ Dies führt auf das sogenannte Carathéodory–Kriterion für messbare Mengen:

$$\mu^*(E) \;=\; \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Der folgende Satz zeigt, dass dieses Kriterium das geeignete Kriterium, um ein Maß zu erhalten:

Satz 2.16 (Maßerweiterung). *Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ ein Ring. Sei $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ ein Maß und sei $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ das von μ induzierte äußere Maß. Sei*

$$\mathscr{M} \;:=\; \{A \in \mathscr{P}(X) \;:\; \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall E \in \mathscr{P}(X).\} \tag{2.2}$$

Dann gilt

(i) $\mathscr{M}$ ist eine σ–Algebra mit $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$

(ii) μ^* ist σ–additiv auf $\mathscr{M}$.

(iii) Der Maßraum $(X, \mathscr{M}, \mu^*)$ ist vollständig.

Beweis. Da μ^* subadditiv ist, ist die Bedingung in (2.2) äquivalent zu

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \;\leq\; \mu^*(E) \qquad \forall E \in \mathscr{P}(X) \text{ mit } \mu^*(E) < \infty. \tag{2.3}$$

Schritt 1: $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$: Sei $A \in \mathscr{A}$. Für $E \in \mathscr{P}(X)$ mit $\mu^*(E) < \infty$ wählen wir $B_i \in \mathscr{A}$ mit $\sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(B_i) \;<\; \mu^*(E) + \varepsilon$ und $E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$. Da μ^* subbaditiv und auf $\mathscr{A}$ additiv ist erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \;&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\mu^*(B_i \cap A) + \mu^*(B_i \cap A^c) \Big) \overset{\textbf{(??)}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(B_i) \\ &< \mu^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (2.3) und daher $A \in \mathscr{M}$.

Schritt 2: $\mathscr{M}$ ist eine σ–Algebra. Nach Proposition 2.15 reicht es zu zeigen, dass $\mathscr{M}$ ein Dynkinsystem und ein π–System ist. Nach Definition gilt $\emptyset, X \in \mathscr{M}$. Aus der Definition sieht man auch direkt, dass $A^c \in \mathscr{M}$, falls $A \in \mathscr{M}$.

Wir zeigen zuerst, dass $A \cup B \in \mathscr{M}$, falls $A, B \in \mathscr{M}$. Dafür schreiben wir $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$ als Vereinigung zweier disjunkter Mengen. Für $E \in \mathscr{P}(X)$ erhalten wir mit der Subadditivität von μ^* dann

$$\begin{aligned} \mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \;&\leq\; \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ &=\; \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &=\; \mu^*(E). \end{aligned}$$

Für die beiden Identitäten haben wir $A, B \in \mathscr{M}$ genutzt. Für $A, B \in \mathscr{M}$ gilt damit auch $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathscr{M}$. Damit ist $\mathscr{M}$ ein π–System.

[09.11.2020]

[13.11.2020]

Indem wir E in (2.2) durch $E \cap (A \cup B)$ ersetzen erhalten wir für alle $E \in \mathscr{P}(X)$

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \;=\; \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap B) \quad \forall A, B \in \mathscr{M} \text{ mit } A \cap B = \emptyset. \tag{2.4}$$

Mit der Wahl $E := A \cup B$ gilt insbesondere

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \qquad \forall A, B \in \mathscr{M} \text{ mit } A \cap B = \emptyset, \tag{2.5}$$

d.h. μ^* ist additiv auf $\mathscr{M}$.

Um zu sehen, dass $\mathscr{M}$ ein Dynkinsystem ist reicht es zu zeigen, dass $S := \bigcup_n A_n \in \mathscr{M}$, falls die Mengen $A_n \in \mathscr{M}$ disjunkt sind. Nach der obigen Rechnung gilt $S_n := \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{M}$. Da $S^c \subset S_n^c$ und für $E \in \mathscr{P}(X)$ gilt also

$$\begin{aligned} \mu^*(E) \;&=\; \mu^*(E \cap S_n^c) + \mu^*(E \cap S_n) \;\geq \mu^*(E \cap S^c) + \mu^*(E \cap S_n) \\ &\overset{(2.4)}{\geq} \mu^*(E \cap S^c) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da μ^* subadditiv ist, erhalten wir im Limes $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mu^*(E \cap A_i) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) \;\geq\; \mu^*(E \cap S) \tag{2.7}$$

Wenn wir (2.7) in (2.6) einsetzen, folgt $S \in \mathscr{M}$. Daher ist $\mathscr{M}$ also sowohl Dynkinsystem als auch π–System und damit eine σ–Algebra.

Schritt 3: μ^* ist σ–additiv auf $\mathscr{M}$. Für eine Folge $A_n \in \mathscr{A}$ von disjunkten Mengen und da μ^* monoton ist, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i) \overset{(2.5)}{=} \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \;\leq\; \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Im Limes $n \to \infty$ erhalten wir die σ-Additivität von μ^*.

Schritt 4: Der Maßraum $(X, \mathscr{M}, \mu^*)$ ist vollständig. Sei $A, N \in \mathscr{M}$, sei $\mu^*(N) = 0$ und es gelte $B \subset A\Delta N$. Dann gilt (2.2) auch für B, d.h. $B \in \mathscr{M}$. $\square$

Die Eindeutigkeit der Maßerweiterung wird in folgender Proposition behandelt:

Proposition 2.17 (Eindeutigkeitskriterium). *Seien μ_1, μ_2 Maße auf $(X, \mathscr{E})$ und sei $\mathscr{F} := \{A \in \mathscr{E} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Die folgenden beiden Bedingungen seien erfüllt:*

(i) Es gibt ein π–System $\mathscr{K} \subset \mathscr{F}$ mit $\sigma(\mathscr{K}) = \mathscr{E}$.

(ii) Es gibt eine Folge $X_i \in \mathscr{K}$ mit $X_i \nearrow X$ und $\mu_1(X_i) = \mu_2(X_i) < \infty$.

Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{E}$.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass μ_1, μ_2 endliche Maße sind. Wir behaupten, dass $\mathscr{F}$ ein Dynkinsystem ist: Offensichtlich gilt $\emptyset \in \mathscr{F}$. Für disjunkte Mengen $A_i \in \mathscr{F}$ gilt nach der σ–Additivität der Maße auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$. Um zu sehen, dass $X \in \mathscr{K}$ bemerken wir, dass nach Voraussetzung $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{K})$. Insbesondere gilt $X \in \sigma(\mathscr{K})$. Daher gibt es eine abzählbare Vereinigung disjunkter Mengen $K_i \in \mathscr{K}$ mit $X = \bigcup_i K_i$. Insbesondere erhalten wir $X \in \mathscr{F}$. Für $A \in \mathscr{F}$ gilt auch $\mu_1(A^c) = \mu_1(X) - \mu_1(A) = \mu_2(X) - \mu_2(A) = \mu_2(A^c)$, d.h. $A^c \in \mathscr{F}$. Daher ist $\mathscr{F}$ ein Dynkinsystem. Mit Proposition 2.15 und nach (i) gilt dann $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{F}$. Insbesondere gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{E}$.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wenn μ_1, μ_2 σ–endlich sind. Nach Voraussetzung gilt $\mu_1(X_i) = \mu_2(X_i) < \infty$ und $X_i \nearrow X$. Die Maße μ_1, μ_2 sind endliche Maße auf $(X_i, \mathscr{E}_i)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, wobei die σ-Algebra $\mathscr{E}_i \subset \mathscr{P}(X_i)$ gegeben ist durch $\mathscr{E}_i := \{E \in \mathscr{E} : E \subset X_i\}$. Nach Annahme gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf dem π–System $\mathscr{K}_i := \{E \in \mathscr{K} : E \subset X_i\}$. Nach der vorherigen Rechnung erhalten wir $\mu_1 = \mu_2$ auf $\sigma(\mathscr{K}_i) \subset \mathscr{P}(X_i)$.

Wir betrachten nun die Mengen $\mathscr{F}_i := \{B \in \mathscr{P}(X) : B \cap X_i \in \sigma(\mathscr{K}_i)\}$. Dann ist $\mathscr{F}_i$ eine σ–Algebra und $\mathscr{K} \subset \mathscr{F}_i$. Nach Proposition 2.15 gilt $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{F}_i$. Aus der σ–Algebraeigenschaft der Maße folgt also

$$\mu_1(B \cap X_i) = \mu_2(B \cap X_i) \qquad \forall B \in \mathscr{E}\ \forall i \in \mathbb{N}$$

Im Limes $i \to \infty$ ergibt dies $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{E}$. $\square$

2.3 Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$

Mit der Konstruktion aus dem vorigen Kapitel können wir unser Prä-Lebesguemaß eindeutig zu einem Borelmaß erweitern:

Satz 2.18 (Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$). *Es gibt ein eindeutiges, translationsinvariantes Maß*

$$\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty] \qquad \textit{mit} \quad \lambda([0,1]) = 1.$$

Dieses Maß heißt Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\lambda : \mathscr{K} \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Prämaß aus Lemma 2.12. Nach Satz 2.16 induziert dieses Pramäß eine Erweiterung $\lambda : \mathscr{M} \to [0, \infty]$. Da $\mathscr{M}$ eine σ–Algebra ist, gilt $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{M}$. Durch Einschränkung unseres Maßes auf die Borelmengen erhalten wir also ein Borelmaß $\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$. Jedes weitere translationsinvariante, normierte Maß $\tilde{\lambda}$, welches die Anforderungen des Satzes erfüllt ist σ–endlich und erfüllt $\tilde{\lambda} = \lambda$ auf $\mathscr{K}$. Nach Proposition 2.17 ist die Erweiterung damit eindeutig definiert.

Für jedes $h \in \mathbb{R}$ ist auch $A \mapsto \lambda(A + h)$ eine σ–additive Erweiterung von $\lambda|_{\mathscr{A}}$. Aus der Eindeutigkeit der Erweiterung erhalten wir, dass λ translationsinvariant ist. $\square$

Das Lebesguemaß lässt sich aber zu einem vollständigen Maß erweitern:

- Das Lebesguemaß hat eine Erweiterung zu einem vollständigen Maß

$$\lambda : \mathscr{L}_1 \to [0, \infty]$$

Die Erweiterung ist durch Satz 2.11 mit $\mathscr{L}_1 := \mathscr{M}$ gegeben.

- Die Mengen in $\mathscr{L}_1$ heißen auch Lebesguemengen.
- Es gilt $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{L}_1$ (Übungsaufgabe).

In der Literatur wird das Lebesguemaß auch als vollständiges Maß $\lambda : \mathscr{L}_1 \to [0, \infty]$ definiert (Ich folge der Notation aus dem Buch von Ambrosio). Die Notation ist dann in manchen Bereichen etwas umständlicher.

Wir haben in Proposition 2.8 gesehen, dass Maße stetig sind bezüglich der Approximation durch messbare Mengen. Borelmengen lassen sich im Lebesguemaß sogar durch offene bzw. abgeschlossene Mengen approximieren. Wir formulieren dies Aussage in einem etwas allgemeineren Setting:

Proposition 2.19 (Regularität von σ–endliche Maßen). *Sei X ein metrischer Raum und sei $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0, \infty]$ σ–endlich. Dann gilt für jedes $B \in \mathscr{B}(X)$:*

$$\mu(B) = \sup\{\mu(A) : A \subset B, \textit{ abgeschlossen}\} = \inf\{\mu(U) : U \supset B, \textit{ offen}\} \tag{2.8}$$

Beweis. Der Beweis wurde in der Vorlesung nicht behandelt. *Der Fall, wenn μ endlich ist:* Wir nehmen zuerst an, dass μ ein endliches Maß ist. Sei $\mathscr{K}$ die Menge, so dass (2.8) gilt. Wir bemerken zuerst, dass $\mathscr{K}$ alle offenen Mengen enthält. In der Tat, für eine U

offen definieren wir die Folge abgeschlossener Mengen

$$A_n \; := \; \{x \in U \; : \; d(x, U^c) \geq \frac{1}{n}\} \; \subset \; U.$$

Dann gilt $A_n \nearrow U$ und damit $\mu(A_n) \nearrow \mu(U)$. Daher enthält $\mathscr{K}$ alle offenen Mengen und es reicht zu zeigen, dass $\mathscr{K}$ eine σ–Algebra ist.

Offensichtlich gilt $\emptyset, X \in \mathscr{K}$. Falls $B \in \mathscr{K}$, dann gilt nach Definition auch $B^c \in \mathscr{K}$ (da μ endlich ist). Sei nun $B_n \in \mathscr{K}$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ abgeschlossene Mengen A_n und offene Mengen U_n mit $A_n \subset B_n \subset U_n$ mit $\mu(A_n \backslash C_n) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Wir definieren $S := \bigcup_n A_n$ und $U := \bigcup_n U_n$. Dann gilt $S \subset \bigcup_n B_n \subset U$ und

$$\mu(U \backslash S) \;\leq\; \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \;\leq\; \varepsilon.$$

Die Menge U ist offen, die Menge S im Allgemeinen aber nicht abgeschlossen. Allerdings sind die Mengen $S^n := \bigcup_{k=0}^n A_n$ abgeschlossen und es gilt $\mu(S^n) \nearrow \mu(S)$. Daher gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(S^{n_0}) \geq \mu(S) - \varepsilon$. Mit der Wahl $A := S^{n_0}$ erhalten wir also $A \subset \bigcup_n B_n \subset U$ und $\mu(U \backslash A) \leq 2\varepsilon$.

Der allgemeine Fall: Übungsaufgabe. $\square$

Nach Konstruktion des Lebesguemaßes ist jede abzählbare Menge eine Nullmenge (Übungsaufgabe).

[13.11.2020]

[16.11.2020]

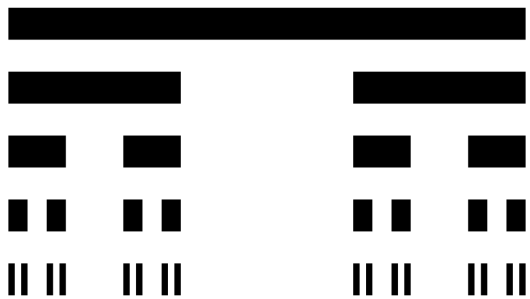

Abbildung 6: Die ersten Iterationsschritte zur Konstruktion der Cantormenge

Ein Beispiel für eine Nullmengen, welche nicht abzählbar ist, ist die Cantormenge C. Diese ist wie folgt konstruiert: Sei $I_{0,1} = [0,1]$. Wir entfernen aus I_0 das mittlere offene Drittel des Intervalls und erhalten die beiden kompakten Intervalle $I_{1,1} = \frac{1}{3}[0,1]$, $I_{1,2} = \frac{1}{3}[2,3]$. Aus den beiden Intervallen $I_{1,1}$, $I_{1,2}$ entfernen wir jeweils das mittlere Drittel und erhalten die vier kompakten Intervalle $I_{2,1} = \frac{1}{9}[0,1]$, $I_{2,2} = \frac{1}{9}[2,3]$, $I_{2,3} = \frac{1}{9}[6,7]$, $I_{2,4} = \frac{1}{9}[8,9]$. Induktiv erhalten wir die kompakten Intervalle $I_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, 2^n$. Die Cantormenge $C \subset [0,1]$ ist definiert

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \qquad \text{wobei} \quad C_n := \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}.$$

Die Cantormenge gibt uns ein Beispiel für eine überabzählbare Nullmenge:

Lemma 2.20 (Cantormenge). *Sei $C \subset [0,1]$ die Cantormenge. Dann gilt* *(i)* $C \subset [0,1]$ *ist kompakt.*

(ii) $\lambda(C) = 0$.

(iii) C *ist überabzählbar*

Beweis. C is beschränkt und als Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen; insbesondere ist C kompakt. C_n ist die Vereinigung von 2^n disjunkten Intervallen der Länge 3^{-n} und daher $\lambda(C_n) = 2^n 3^{-n} = (\frac{2}{3})^n$. Aus der Monotonie des Lebesguemaßes erhalten wir also $\lambda(C) \leq \lim_{n\to\infty}(C_n) = 0$. Der Beweis, dass C überabzählbar ist, ist Übungsaufgabe. $\square$

Analog zur Definition des Lebesguesmaßes kann man auch allgemeiner s–dimensionale Maße konstrieren. Wir bemerken zuerst, dass für $n \in \mathbb{N}$ das Volumen der n–dimensionalen Einheitskugel gegeben ist durch $\alpha(n) := \pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$. Das Hausdorffmaß ist dann durch Überdeckung mit skalierten Kugeln definiert:

Definition 2.21 (Hausdorffmaß). *Sei* $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$. *Sei* $\alpha(s) := \pi^{\frac{s}{2}}/\Gamma(\frac{s}{2}+1)$, *wobei* Γ *die Gamma–Funktion bezeichnet. Sei*

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) \ := \ \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\Big(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\Big)^s \ : \ A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j, \operatorname{diam} C_j \leq \delta\Big\}.$$

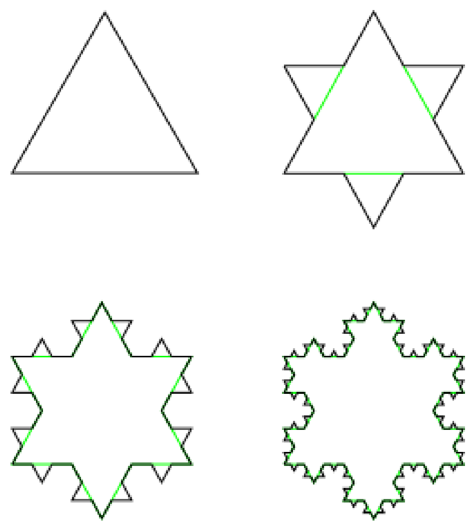

Abbildung 7: Die Koch Schneeflocke ist ein Beispiel einer fraktalen Menge. Im Bild sind die ersten vier Iterationsschritte skizziert.

Das Hausdorffmaß $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ ist dann definiert durch

$$\mathscr{H}^s(A) \;:=\; \limsup_{\delta\to 0} \mathscr{H}^s_\delta(A). \tag{2.9}$$

Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathscr{H}^s_\delta(A)$ monoton steigend für $s \to 0$, insbesondere ist der Limsup in (2.9) auch ein Limes. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\mathscr{H}^s$–Nullmenge, falls $\mathscr{H}^s(A) = 0$. Frage: Geben Sie Beispiele für $\mathscr{H}^s$–Nullmengen im $\mathbb{R}^n$.

Die Einschränkung des Hausdorffmaßes auf Borelmengen ist ein Maß. Allgemein ist das Hausdorffmaß aber nur ein äußeres Maß. Ein Maß heißt lokal endlich, wenn es zu jedem Punkt eine Umgebung mit endlichem Maß gibt.

Satz 2.22 (Eigenschaften des Hausdorffmaßes). *Sei $0 \le s < \infty$. Dann gilt*

(i) $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ *ist ein äußeres Maß*

(ii) $\mathscr{H}^s : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ *ist ein Borelmaß (aber für $s \in (0,n)$ nicht lokal endlich).*

(iii) $\mathscr{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathscr{H}^s(A) \qquad \forall A \in \mathscr{P}(X), \lambda > 0.$

(iv) $\mathscr{H}^s(A + y) = \mathscr{H}^s(A) \qquad \forall A \in \mathscr{P}(X), y \in \mathbb{R}^n.$

Beweis. Dies ist Übungsaufgabe. Zum Beweis von (ii) verwendet man das Carathéodory–Kriterion (2.2). □

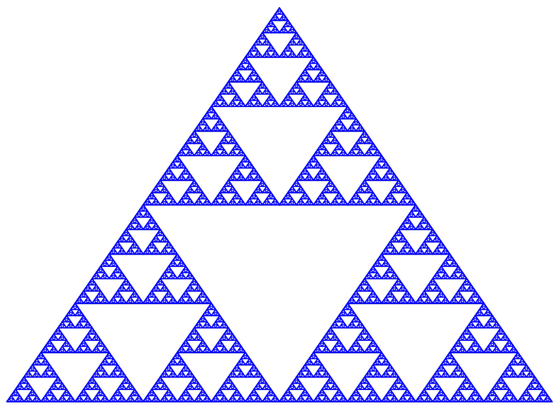

Abbildung 8: Das Sierpinsky-Dreieck hat Hausdorffdimension $\ln 3/\ln 2$.

Für $n = 0$ ist $\mathscr{H}^0$ das Zählmaß. Für $n = 1$ gilt außerdem $\mathscr{H}^1 = \mathscr{L}^1$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Für $s > n$ gilt $\mathscr{H}^s = 0$. Für $0 < s < n$ kann das Hausdorffmaß genutzt werden, um die Hausdorfdimension von Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$ zu definieren:

$$\dim(E) \ := \ \inf\{s \geq 0 \ : \ \mathscr{H}^s(X) \ = 0\}.$$

Die Menge $Q = [0,1]^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ hat zweidimensionales Hausdorffmaß $\mathscr{H}^2(Q) = 1$ und es gilt $\dim(Q) = 2$. Die Hausdorffdimension der Cantormenge C ist $\dim(C) = \ln 2/\ln 3$. Man kann analog Cantormengen mit beliebiger Dimension $s \in (0,1)$ konstruieren (Übungsaufgabe).

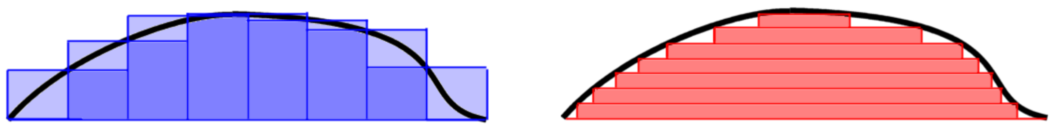

Abbildung 9: Riemannintegral vs. Lebesgueintegral.

3 Integration

3.1 Messbare Funktionen

Wir beschäftigen uns mit Funktionen auf messbaren Räumen. Dies führt auf den Begriff der messbaren Funktion. Wir erinnern an einige Identitäten für das Urbild: Seien $(X, \mathscr{E})$, $(Y, \mathscr{F})$ messbare Räume und $f : X \to Y$. Das Urbild $f^{-1}(F)$ für $F \subset Y$ ist definiert als $f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\}$. Man sieht leicht, dass

- $f^{-1}(F^c) = f^{-1}(F)^c$
- $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(F_i) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} F_i)$
- $\bigcap_{i \in I} f^{-1}(F_i) = f^{-1}(\bigcap_{i \in I} F_i)$

Für eine Teilmenge $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ definieren wir entsprechend $f^{-1}(\mathscr{F}) = \{f^{-1}(E) : E \in \mathscr{F}\}$. Falls $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(Y)$ eine σ–Algebra ist, dann ist nach den obigen Identitäten auch $f^{-1}(\mathscr{F})$ eine σ–Algebra.

Definition 3.1 (Messbare Funktionen). *Seien $(X, \mathscr{E})$, $(Y, \mathscr{F})$ messbare Räume.*

(i) $f : X \to Y$ *heißt* $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$*-messbar, falls* $f^{-1}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{E}$.

(ii) Falls X *ein metrischer Raum ist und* $\mathscr{E} = \mathscr{B}(X)$*, dann heisst* f *borelmessbar.*

(iii) Falls $X = \mathbb{R}$ *und* $\mathscr{E} = \mathscr{L}_1$*, dann heisst* f *lebesguemessbar.*

Falls der Zielraum ein metrischer Raum ist und die Zielalgebra nicht angegeben ist, dann wird im Zielraum die Borel-σ–Algebra angenommen.

Nach Definition ist $f : X \to Y$ also genau dann messbar, wenn $f^{-1}(F) \in \mathscr{E}\ \forall F \in \mathscr{F}$. Falls $\mathscr{E}, \mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ σ-Algebren sind mit $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}$, dann ist jede $\mathscr{E}$-messbare Funktion auch $\mathscr{B}$ messbar. Nach Definition ist eine borelmessbare Funktion $f : \mathbb{R} \to Y$ also auch lebesguemessbar, da $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}_1$. Nach dem Satz von Lusin gibt es zu jeder lebesguemessbaren Funktion f eine borelmessbare Funktion mit $f = g$ f.ü. (Übungsaufgabe). Eine charakteristische Funktion $\chi_A : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathscr{E}$–messbar, wenn $A \in \mathscr{E}$.

Direkt aus der Definition erhalten wir: Seien $(X, \mathscr{E})$, $(Y, \mathscr{F})$, $(Z, \mathscr{G})$ messbare Räume. Falls $f : X \to Y$ $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$–messbar und $g : Y \to Z$ $(\mathscr{F}, \mathscr{G})$–messbar ist, dann ist $g \circ f$ $(\mathscr{E}, \mathscr{G})$–messbar.

Es reicht, Messbarkeit für eine hinreichend große Menge von Mengen zu testen:

Proposition 3.2. *Seien* $(X, \mathscr{E})$, $(Y, \mathscr{F})$ *messbare Räume und sei* $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ *mit* $\sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{F}$. *Dann ist* $f : X \to Y$ *genau dann messbar, wenn* $f^{-1}(\mathscr{G}) \subset \mathscr{E}$.

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Falls Y metrischer Raum ist und $\mathscr{F} = \mathscr{B}(Y)$, dann ist also $f : X \to Y$ schon messbar, wenn $f^{-1}(\Omega) \in \mathscr{E}$ für alle offenen Mengen Ω. Falls $f : X \to \mathbb{R}$, dann ist f schon messbar, wenn $f^{-1}([a, b))$ für alle halboffenen Intervalle der Form $[a, b)$.

Insbesondere betrachten wir den Fall von Funktionen $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$, wobei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Der Raum $\overline{\mathbb{R}}$ kann metrisiert werden mit der Metrik $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to 0$

$$d(x, y) \;=\; \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist dann $\mathscr{E}$–messbar genau dann, wenn

$$f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{E} \qquad f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{E} \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subset \mathscr{E}.$$

Für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir $a \wedge b := \min\{a, b\}$ und $a \vee b := \max\{a, b\}$. Wir schreiben auch $a_+ := a \vee 0$ und $a_- := -(a \wedge 0)$. Dann gilt $a = a_+ - a_-$ und $|a| = a_+ + a_-$. Entsprechend sind für $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ die Funktionen $f \wedge g$, $f \vee g$, $f_\pm$ punktweise definiert.

[16.11.2020]

[20.11.2020]

Lemma 3.3 (Messbarkeitskriterien). *Sei $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum.*

(i) Falls X ein metrischer Raum ist und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig, dann ist f borelmessbar.

(ii) Falls $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ monoton ist, dann ist f borelmessbar.

(iii) Falls der Maßraum $(X, \mathscr{E}, \mu)$ vollständig ist und falls $f = g$ f.ü. für $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, dann ist f genau dann messbar, wenn g messbar ist.

(iv) Falls $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \to \overline{\mathbb{R}}^m$, dann ist f genau dann messbar, wenn jede Komponente f_i, $1 \leq i \leq m$ messbar ist.

Beweis. Für den Beweis verwenden wir wiederholt Proposition 3.2.

(i): Für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(\Omega)$ offen und daher $f^{-1}(\Omega) \in \mathscr{B}(X)$.

(ii): Dann ist $f^{-1}((t, \infty))$ ein Intervall und daher eine Borelmenge.

(iii): Sei also f messbar und es gelte $f = g$ auf $X \backslash N$ mit $\mu(N) = 0$. Sei Ω offen. Dann gibt es zwei Mengen N_1, $N_2 \subset N$ mit $\mu(g^{-1}(\Omega) = (f^{-1}(\Omega) \backslash N_2) \cup N_1$. Da f messbar ist und da der Maßraum vollständig ist, sind die Mengen $f^{-1}(\Omega)$, N_1 und N_2 messbar und daher ist $g^{-1}(\Omega)$ messbar.

(iv): Wir betrachten den Fall $m = 2$. Falls $f = (f_1, f_2) : X \to \mathbb{R}^2$ messbar ist, dann gilt $f^{-1}(\Omega \times \mathbb{R}) = f_1^{-1}(\Omega) \in \mathscr{E}$ $\forall \Omega \subset \mathbb{R}$ offen. damit ist f_1 messbar. Genauso zeigt man, dass f_2 messbar ist. Falls f_1, f_2 messbar sind, dann gilt $f^{-1}(\Omega_1 \times \Omega_2) \in \mathscr{E}$ für alle offenen Quader Q der Form $Q = \Omega_1 \times \Omega_2$. Jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich aber schreiben als $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ für offene Quader $Q_k \subset \mathbb{R}^2$. Die Messbarkeit von f folgt dann aus

$$f^{-1}(\Omega) = (f_1, f_2)^{-1}(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (f_1, f_2)^{-1}(Q_k) \in \mathscr{E}.$$

$\square$

Sei f die Dirichlet Funktion mit $f(x) = 1$ für $\forall x \in \mathbb{Q}$ und 0 sonst. Dann gilt $f = 0$ (Lebesgue) fast überall, da $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ eine Nullmenge ist. Insbesondere ist f messbar.

Proposition 3.4 (Eigenschaften messbarer Funktionen).

(i) Falls $f,\, g : X \to \mathbb{R}$ messbar sind, dann sind auch

$$-f, \quad f_-, \quad f_+, \quad |f|, \quad f \wedge g, \quad f \vee g, \quad f \pm g, \quad fg, \quad f/g$$

messbar. Wir verstehen dabei f/g als eine Funktion auf $X \backslash g^{-1}(0)$.

(ii) Falls die Elemente der Folge $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar sind, dann sind auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n\to\infty} f_n, \quad \liminf_{n\to\infty} f_n, \quad \lim_{n\to\infty} f_n$$

messbar (falls existent).

Beweis. Wir geben den Beweis in einigen Fällen, die übrigen Fälle sind Übungsaufgabe. Für den Beweis nehmen wir an, dass der Zielraum der Funktionen $\mathbb{R}$ ist, die Erweiterung des Beweisen auf den allgemeineren Fall ist einfach. Wir nutzen mehrfach, dass die Menge der messbaren Mengen $\mathscr{E}$ eine σ–Algebra ist.

“$f \wedge g, f_+, f_-$”: Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $(f \wedge g)^{-1}((t,\infty)) = f^{-1}((t,\infty)) \cap g^{-1}((t,\infty))$ messbar. Nach Proposition 3.2 ist dann $f \wedge g$ messbar. Damit sind auch f_+, f_- messbar.

"$-f$, $f \pm g$": Offensichtlich ist $-f$ messbar. Wir bemerken, dass $(f+g)(x) > t$ genau dann, wenn $f(x) > q$ und $g(x) > t-q$ für ein $q \in \mathbb{Q}$. Daher ist für $t \in \mathbb{R}$ die Menge

$$(f+g)^{-1}((t,\infty)) = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big(f^{-1}((q,\infty)) \cap g^{-1}((t-q,\infty))$$

messbar. Daher ist $f+g$ messbar und damit auch $f-g = f+(-g)$ messbar.

"fg": Es reicht zu zeigen, dass f^2 messbar ist. Die Messbarkeit von fg folgt dann aus der Identität $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$. Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$(f^2)^{-1}((t,\infty)) = f^{-1}(\sqrt{t},\infty) \cup f^{-1}(-\infty,-\sqrt{t})$$

messbar. Daher ist f^2 messbar.

"$\sup_n f_n$": Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$(\sup_n f_n)^{-1}((t,\infty)) = \bigcap_n f_k^{-1}((t,\infty))$$

als abzählbarer Durchschnitt messbarer Mengen messbar. □

Im Falle eines vollständiger Massraumes $(X,\mathscr{E},\mu)$ lassen sich die meisten Resultate verallgemeinern, indem wir punktweise Konvergenz durch f.ü. –Konvergenz ersetzen.

Definition 3.5 (Einfache Funktionen). *Seien X, Y Mengen. Eine Funktion $f: X \to Y$ heisst einfach, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.*

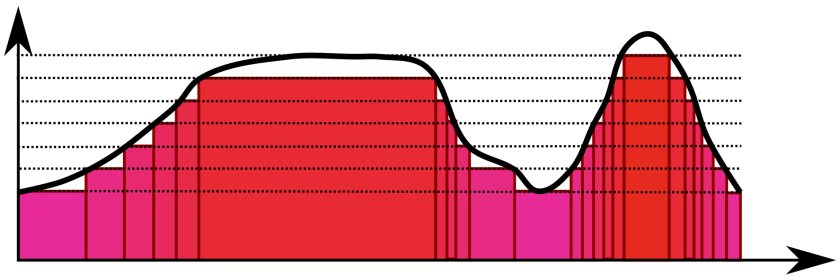

Abbildung 10: Approximation durch einfache Funktionen.

Satz 3.6 (Approximation durch einfache Funktionen). *Eine Funktion $f : X \to [0, \infty]$ ist genau dann messbar, wenn es eine monoton wachsende Folge $f_k : E \to [0, \infty]$ von einfachen, messbaren Funktionen gibt mit $f_k(x) \nearrow f(x)\ \forall x \in E$.*

Beweis. Aus Proposition 3.4 folgt, dass der Grenzwert einer monoton wachsenden Folge messbarer Funktionen messbar ist. Es bleibt zu zeigen, dass es für jede messbare Funktion eine monoton wachsende Folgende einfacher Funktionen konstruiert werden kann mit $f_k(x) \nearrow f(x)\ \forall x \in E$.

Zu $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $I_{kj} := [2^{-k}(j-1), 2^{-k}j)$ für $j = 1, \ldots, k2^k$. Die Mengen $f^{-1}(I_{kj})$, $f^{-1}([k, \infty))$ sind messbar da f messbar ist. Wir definieren die einfachen und messbaren Funktionen f_k durch

$$f_k(x) := \begin{cases} 2^{-k}(j-1) & \text{falls } f(x) \in I_{kj} \text{ für ein } j = -k2^k, \ldots, k2^k, \\ k & \text{falls } f(x) \in [k, \infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

Beachte, dass für festes k die Familie von Mengen

$$\mathscr{U}_k = \{[k,\infty), I_{kj} \text{ für } j = 0,\dots,k2^k\}$$

eine Überdeckung von $[0,\infty]$ darstellt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Familie $\mathscr{U}_{k+1}$ eine Verfeinerung von $\mathscr{U}_k$. Daraus folgt, dass $f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x)$ für alle $x \in E$. Falls $f(x) = \infty$, dann gilt $f_k(x) = k$. Falls $f(x) < \infty$, dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x) < k_0$, Aus der Definition (3.1) folgt dann $|f(x) - f_k(x)| \leq 2^{-k}$ für $k \geq k_0$ und daher $f_k(x) \to f(x)$. Dies ergibt $f_k(x) \to f(x)$. □

3.2 Lebesgueintegral und Konvergenzsätze

In diesem Abschnitt ist $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren das Integral für eine Klasse von "integrierbaren" Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Wir schreiben außerdem:

- $\mathscr{S} := \{f : X \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist einfach und messbaren}\}$,
- $\mathscr{S}_+ := \{f \in \mathscr{S} \ : \ f \geq 0\}$.

Wir benutzen im folgenden die Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

Definition 3.7 (Integral auf $\mathscr{S}_+$). *Für $f \in \mathscr{S}_+$ mit $f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{A_k}$, wobei $\alpha_k \geq 0$ und für messbare Mengen $A_k \in \mathscr{E}$, definieren wir*

$$\int f \; d\mu \; := \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu(A_k) \quad \in [0,\infty).$$

Man überprüft induktiv leicht, dass die Definition nicht von der Wahl der Darstellung von f abhängt (Übungsaufgabe). Wir sammeln einige Eigenschaften des Integrals:

Proposition 3.8. *Für $f, g \in \mathscr{S}_+$ gilt*

(i) $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu \qquad \forall \alpha, \beta \geq 0.$

(ii) $\displaystyle\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu,$ *falls* $f \leq g$.

(iii) $\displaystyle\int f\, d\mu \leq \mu(\operatorname{spt} f) \sup_{x \in X} f(x).$

Beweis. (i),(ii) folgen aus der Definition. (iii) folgt aus $f \leq \sup_x f \chi_E$ und (ii). □

Definition 3.9 (Integral für nichtnegative Funktionen). *Falls $f : X \to [0, \infty]$ messbar ist, dann definieren wir*

$$\int f\, d\mu := \sup \left\{ \int g\, d\mu \ : \ g \leq f, g \in \mathscr{S}_+ \right\} \quad \in [0, \infty].$$

Falls das Integral endlich ist, dann nennen wir f integrierbar.

Für $f \in \mathscr{S}_+$ ist das Integral von f nun sowohl durch Definition 3.7 als auch Definition 3.9 definiert. Beide Definition stimmen aber wegen Proposition 3.8(ii) überein.

Satz 3.10 (Satz von der monotonen Konvergenz in $\mathscr{S}_+$). *Sei $f_k \in \mathscr{S}_+$ eine Folge mit $f_k \nearrow f$. Dann ist f messbar und es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu \;=\; \int f \, d\mu.$$

Beweis. Nach Proposition 3.4 ist f messbar. Nach Proposition 3.8 steigt die Folge $\int f_k$ monoton. Daher existiert der Limes und

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu \;\leq\; \int f \, d\mu.$$

Nach Definition 3.9 existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathscr{S}_+$ mit $g \leq f$, $\int g \, d\mu < \infty$ und

$$\int g \, d\mu \;\geq \begin{cases} \displaystyle\int f d\mu - \varepsilon, & \text{falls } \displaystyle\int f d\mu < \infty, \\ \displaystyle\int g \, d\mu \;\geq \frac{1}{\varepsilon}, & \text{falls } \displaystyle\int f d\mu = \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

[20.11.2020]

[23.11.2020]

Insbesondere gilt $\mu(E) < \infty$ für $E := \operatorname{spt} g$. Für $g_k := g \wedge f_k \in \mathscr{S}_+$ gilt dann $g_k \nearrow g$ für

$k \to \infty$. Wir definieren

$$B_k \;:=\; \{x \in X : g(x) - g_k(x) > \frac{\varepsilon}{\mu(E)}\}.$$

Da $g_k \nearrow g$ erhalten wir $B_{k+1} \subset B_k$ und $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k = \emptyset$. Mit Proposition 2.8(ii) folgt $\mu(B_k) \to 0$ für $k \to \infty$. Daher gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(B_k) < \frac{\varepsilon}{M} \qquad\qquad \forall k \geq k_0$$

für $M := \sup_{x\in X} g$. Da $g_k \nearrow g$ gilt insbesondere $\operatorname{spt} g_k \subset E$ und $\sup g_k \leq M$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Aus Proposition 3.8(i),(iii) erhalten wir,

$$\begin{aligned}\int_X g \; d\mu - \int_X g_k \; d\mu \;&=\; \int_{B_k} (g - g_k) \; d\mu + \int_{X\setminus B_k} (g - g_k) \; d\mu \\ &=\; \mu(B_k) \sup_{x\in B_k} (g - g_k) + \mu(E) \sup_{x\in E\setminus B_k} (g - g_k) \;\leq\; 2\varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Zusammen mit (3.2) erhalten wir

$$\int f_k \; d\mu \geq \int g_k \; d\mu \overset{(3.3)}{\geq} \int g \; d\mu - 2\varepsilon \overset{(3.2)}{\geq} \min\Big\{ \int f \; d\mu, \frac{1}{\varepsilon}\Big\} - 3\varepsilon \qquad \forall k \geq k_0.$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. $\square$

Die Eigenschaften des Integrals übertragen sich auf nichtnegative, messbare Funktionen:

Proposition 3.11. *Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt*

(i) $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu \qquad \forall \alpha, \beta \geq 0.$

(ii) $\displaystyle\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$*, falls* $f \leq g$.

(iii) $\displaystyle\int f\, d\mu \leq \mu(\operatorname{spt} f) \sup_x f.$

Beweis. *(i):* Nach Satz 3.6 gibt es Folgen von Funktionen $f_n, g_n \in \mathscr{S}_+$ mit $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$. Nach Proposition 3.8 und Satz 3.10 gilt im Limes $n \to \infty$,

$$\int f\, d\mu + \int g\, d\mu \;\leftarrow\; \int f_n\, d\mu + \int g_n\, d\mu \;=\; \int (f_n + g_n)\, d\mu \;\to\; \int (f + g)\, d\mu.$$

Der Beweis von (ii),(iii) ist analog zum Beweis von (i). □

Satz 3.12 (Chebyshev Ungleichung). *Für jedes messbare $f : X \to [0, \infty]$ gilt*

$$\mu\Big(\{x \in X : f(x) \geq t\}\Big) \;\leq\; \frac{1}{t} \int f\, d\mu \qquad \forall t > 0.$$

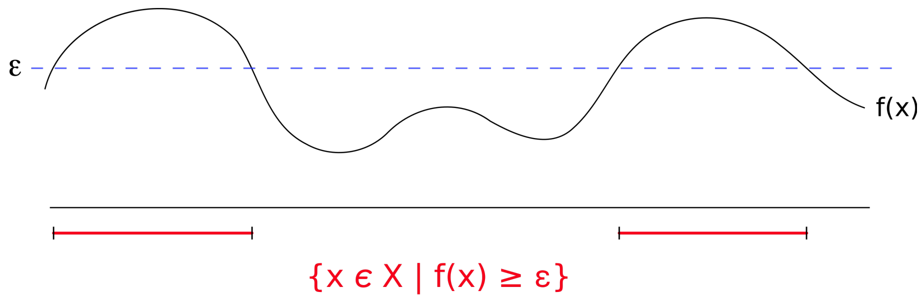

Abbildung 11: Die Chebyshev gibt eine Abschätzung über das Maß der Menge, an der eine Funktion einen bestimmten Wert überschreitet.

Beweis. Für $A_t = \{x \in X : f(x) \geq t\}$ gilt $t\chi_{A_t} \leq f\chi_{A_t} \leq f$ und daher

$$t\mu(A_t) = \int t\chi_{A_t}\, d\mu \leq \int f\chi_{A_t}\, d\mu \leq \int f\, d\mu.$$

□

Lemma 3.13. *Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar .*

(i) Es gilt $\int f\, d\mu = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ f.ü..

(ii) Falls $f = g$ f.ü., dann gilt $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$.

(iii) Falls $\int f\, d\mu < \infty$, dann gilt $f < \infty$ f.ü..

Beweis. *(i):* Falls $f = 0$ f.ü., dann erhalten wir $\int f\, d\mu = 0$ aus Proposition 3.11(iii).

Umgekehrt, falls $\int f \, d\mu = 0$, dann gilt mit der Chebyshevschen Ungleichung $t\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq t\}) = 0 \; \forall t > 0$. Daher ist

$$\mu(\{f(x) > 0\}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f(x) \geq \frac{1}{n}\}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{f(x) \geq \frac{1}{n}\}) = 0.$$

(ii): Aus (i) erhalten wir $\int |f-g| = 0$. Daraus folgt die Aussage.

(iii): Folgt aus Chebyshevschen Ungleichung. □

Um Funktionen der Form $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zu integrieren, zerlegen wir diese in der Form $f = f_+ - f_-$ mit $f_\pm : X \to [0, \infty]$.

Definition 3.14. *Eine messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt integrierbar, falls beide Funktionen f_- und f_+ integrierbar sind. Wir definieren dann das Integral von f durch*

$$\int f \, d\mu := \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu \in \mathbb{R}.$$

Falls $f\chi_A$ integrierbar ist für $A \in \mathscr{E}$, dann heißt f auf A integrierbar ist und wir schreiben

$$\int_A f \, d\mu := \int f\chi_A \, d\mu.$$

Im Allgemeinen bilden die integrablen Funktionen mit Zielraum $\overline{\mathbb{R}}$ keinen Vektorraum, da $f + g$ nicht unbedingt punktweise definiert ist. Dies erklärt die Einschränkung in der nächsten Proposition.

Proposition 3.15 (Eigenschaften des Integrals). *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar.*

(i) Falls $\alpha f + \beta g$ für α, β definiert ist, dann ist diese Funktion integrierbar und

$$\int_X \alpha f + \beta g \; d\mu \;=\; \alpha \int_X f \; d\mu + \beta \int_X g \; d\mu \qquad \textit{(Linearität)}$$

(ii) $\displaystyle\int_X f \; d\mu \;\leq\; \int_X g \; d\mu \qquad \textit{falls } f \leq g$

(iii) $\displaystyle\int_X f \; d\mu \;\leq\; \mu(\operatorname{spt} f) \sup_x |f|.$

(iv) $\displaystyle\int_X f \; d\mu \;\leq\; \int_X |f| \; d\mu \;<\infty$

Beweis. *(i):* Wir geben den Beweis für den Fall $\alpha > 0$, $\beta = 0$, die anderen Fälle verlaufen analog. Aus Proposition 3.11 und mit der Notation $f = f_+ - f_-$ folgt

$$\begin{aligned}\int \alpha f \; d\mu + \int g \; d\mu &= \int \alpha f_+ \; d\mu - \int \alpha f_- \; d\mu + \int g_+ \; d\mu - \int g_- \; d\mu \\ &= \int (\alpha(f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) \; d\mu = \int (\alpha f + g) \; d\mu.\end{aligned}$$

(ii): Aus $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+$ und $-f_- \leq -g_-$. Wende Proposition 3.11(ii) an.

(iii): Folgt aus $f \leq \sup f \chi_E$ und (ii).

(iv): Folgt aus $|f| = f_+ + f_-$ und (ii). $\square$

Wir erinnern daran, dass eine Funktion $f = (f_i)_{i=1}^m : X \to \mathbb{R}^n$ genau dann messbar ist, wenn jede Komponente f_i messbar ist. Auch das Integral ist komponentenweise definiert:

Bemerkung 3.16 (Integral vektorwertiger Funktionen). *Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}^m$ heisst integrabel, falls f_i integrierbar ist für $i = 1, \ldots, m$. Wir schreiben*

$$\int f \; d\mu := \Big(\int f_1 \; d\mu, \ldots, \int f_m \; d\mu \Big).$$

Die Funktion f heißt dann integrabel, wenn jede Komponente f_i integrabel ist. Die vorherigen Resultate lassen sich leicht verallgemeinern: Insbesondere ist der Raum der integrablen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorraum. Es gilt:

(i) $\displaystyle\int_E \alpha f + \beta g \; d\mu \;=\; \alpha \int_E f \; d\mu + \beta \int_E g \; d\mu$

(ii) $\displaystyle\Big| \int_E f \; d\mu \Big| \;\leq\; \mu(\operatorname{spt} f) \sup_x |f|.$

(iii) $\displaystyle\Big| \int_E f \; d\mu \Big| \;\leq\; \int_E |f| \; d\mu.$

Ein grosser Vorteil des Lebesgueintegrals ist das Vorhandensein von allgemeinen Konvergenzsäzten. In Kapitel 3.2 hatten wir schon das erste Konvergenzresultat hergeleitet, den Satz von der monotonen Konvergenz, welcher auch Satz von Beppo-Levi genannt wird. Dieser gilt allgemein für nichtnegative, messbare Funktionen:

Satz 3.17 (Satz von der monotonen Konvergenz). *Sei $f_n : X \to [0,\infty]$ eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen. Dann ist $f := \lim f_n$ messbar und*

$$\int f \, d\mu \; = \; \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Nach Satz 3.6 gibt es zu f_n eine Folge $h_{nj} \in \mathscr{S}_+$ mit $h_{nj} \nearrow f_n$. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $f_n \nearrow f$ gilt $f_{n_0}(x) > f(x) - \varepsilon$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Da $h_{n_0 j} \nearrow f_{n_0}$ gilt $h_{n_0 j_0}(x) \geq f_{n_0}(x) - \varepsilon$ für ein $j_0 \in \mathbb{N}$. Wir definieren die monoton steigende Folge

$$g_n := \max\{h_{jk} : 1 \leq j, k \leq n\} \in \mathscr{S}_+.$$

Insbesondere gilt $g_n \leq \max(f_j)_{j=1}^n \leq f_n$. Mit $k_0 := \max\{n_0, j_0\}$ erhalten wir

$$g_{k_0}(x) \geq h_{n_0 j_0}(x) \geq f_{n_0}(x) - \varepsilon \geq f(x) - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $g_n(x) \nearrow f(x)$ und $g_n \in \mathscr{S}_+$. Dann folgt die Aussage des Satzes aus einer Anwendung von Satz 3.10. $\square$

Aus Satz 3.17 erhalten wir ein Konvergenzkriterium für Reihen: Für eine Folge $f_n : X \to [0,\infty]$ von messbaren Funktionen mit $f_n \nearrow f$ gilt

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Die monotone Konvergenz der Folge ist eine notwendige Voraussetzung für Satz 3.17: Sei $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ mit $\int f \; dx = 1$ und sei $f_n(x) := nf(nx)$. Dann gilt $f_n \to 0$, aber $1 = \int f_n dx \not\to \int f dx = 0$. Allerdings ist das Integral unterhalbstetig für eine Folge von nichtnegativen Funktionen, welche punktweise konvergiert: [23.11.2020]

[27.11.2020]

Lemma 3.18 (Lemma von Fatou). *Sei* $f_n : X \to [0,\infty]$ *eine Folge messbarer Funktionen. Dann ist* $\liminf_{n\to\infty} f_n$ *messbar und es gilt*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu.$$

Beweis. Für $f := \liminf f_n \geq 0$ und $g_n = \inf\{f_k\}_{k=n}^{\infty} \leq f_n$ erhalten wir $g_n \nearrow f$ nach Definition des Limes inferior. Anwendung von Satz 3.17 ergibt

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu \;=\; \int f \; d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int g_n \; d\mu \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu.$$

□

Der nächste Satz heißt auch Satz von Lebesgue:

Satz 3.19 (Satz von der dominierten Konvergenz). *Sei* $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine Folge messbarer Funktionen mit* $f_n \to f$ *für ein* $f : X \to \mathbb{R}$*. Es gelte* $\sup\{|f_n|\}_{n\in\mathbb{N}} \leq g$ *für eine integrable Funktion* $g : X \to [0, \infty]$*. Dann ist* f *integrabel und es gilt*

$$\int f \; d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu.$$

Beweis. Nach Proposition 3.4 ist f messbar. Da g integrabel ist und und $|f| \leq \sup_n |f_n(x)| \leq g(x)$ ist auch f integrabel. Nach Voraussetzung gilt $g - f_n \geq 0$ und $g - f_n \to g - f$. Nach dem Lemma von Fatou erhalten wir also

$$\int g - f \; d\mu \;\leq \liminf_{n\to\infty} \int g - f_n \; d\mu \;= \int g \; d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu.$$

Es gilt weiterhin $g + f_n \geq 0$ und $g + f_n \to f + g$. Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\int g + f \; d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int g + f_n \; d\mu = \int g \; d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu.$$

Beide Aussagen ergeben die Behauptung. □

Die drei Konvergenzsätze sind äquivalent und können in beliebiger Reihenfolge auseinander abgeleitet werden (Übungsaufgabe). Wir können nun zeigen, dass das Lebesgueintegral eine Erweiterung des Riemannintegrals ist:

Satz 3.20 (Lebesgueintegral vs. Riemannintegral). *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

(i) f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn f λ-fast überall stetig ist.

(ii) Falls f Riemann-integrierbar ist, dann ist f Lebesgue-integrierbar.

(iii) Falls $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist, dann ist f Lebesgue-integrierbar.

Falls Rieman–Integral und Lebesgue–Integral beide definiert sind, dann stimmen die Integrale überein.

Beweis. Die Beweise sind Übungsaufgabe. □

Wir können das Integral auch nutzen, um neue Maße zu definieren. Einer μ–integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ ordnen wir das Maß μ_f zu mit der Definition

$$f \mapsto \mu_f, \qquad \mu_f(A) \;:=\; \int_A f \; d\mu. \tag{3.4}$$

Jedes Maß von der Form μ_f ist ein lokal endliches Borelmaß. Wir definieren

Definition 3.21 (Radonmaß). *Ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$ ist ein lokal endliches Borelmaß $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ mit $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{A}$.*

In diesem Sinne sind die nichtnegativen, μ–integrablen Funktionen eingebettet in den

Raum $\mathscr{M}_+$ der Radonmaße. Wir erinnern, dass Radonmaße im $\mathbb{R}^n$ insbesondere die Regularitätseigenschaft aus Proposition 2.19 haben. Mit der Identifikation (3.4) gilt

$$\{ \ \mu \text{ integrable Funktionen } f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)\} \ \subset \ \mathscr{M}_+.$$

In diesem Sinne können wir Maße auch als verallgemeinerte Funktionen verstehen.

Wir betrachten nun den Raum $X := C_c^0(A)$ für ein festes $A \subset \mathbb{R}^n$. Der Raum X ist ein normierter Raum mit der Supremums-Norm. Für $\mu \in \mathscr{M}_+$ definieren wir

$$L_\mu(f) \ := \ \langle \mu, f \rangle \ \ := \ \int_A f \ d\mu.$$

Dann ist $L_\mu : X \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf X. Aus $f_k \rightrightarrows f$ folgt $L_\mu(f_k) \to f$. Das Funktional ist also stetig. L_f ist auch nichtnegativ, da $L_\mu(f) \geq 0$, falls $f \geq 0$. Damit ist $L_m \in X'$ dem Dualraum von X, definiert als der Raum der stetigen, linearen Funktionale auf X. Umgekehrt kann man zeigen, dass es zu jedem nichtnegativen stetigen Funktional L auf X ein Radonmaß μ gibt, so dass $L = L_\mu$. Dies wird in der Vorlesung Funktionalanalysis behandelt. In diesem Sinne ist der Raum der signierten Radonmaße also der Dualraum zum Raum der stetigen Funktionen.

3.3 Räume integrabler Funktionen

Im Abschnitt ist $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Zu $x \in \mathbb{R}^n$ kennen wir die p–Norm $|x|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. Wenn wir die Summe durch ein Integral ersetzen, können wir analog Funktionenräume integrabler Funktionen definieren. Wir definieren wir das essentielle Supremum und das essentielle Infimum von f durch

$$\operatorname*{ess\,sup}_E f := \inf\{ \sup_{x\in E\setminus N} f(x) : N \subset E, \mu(N) = 0\},$$

$$\operatorname*{ess\,inf}_E f := \sup\{ \inf_{x\in E\setminus N} f(x) : N \subset E, \mu(N) = 0\}$$

Die Ungleichung $\operatorname{ess\,sup}_X f(x) \leq M$ bedeutet also $f(x) \leq M$ f.ü. .

Definition 3.22 ($\mathscr{L}^p(X, \mathscr{E}, \mu)$). *Zu jeder messbaren Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ definieren wir*

$$\|f\|_p \ := \ \left(\int |f|^p \ d\mu\right)^{1/p} \ \textit{für } 1 \leq p < \infty, \qquad \|f\|_\infty \ := \ \operatorname*{ess\,sup}_X |f|.$$

Der entsprechende Raum ist definiert durch

$$\mathscr{L}^p(X, \mathscr{E}, \mu) \ := \ \{f : X \to \mathbb{R} : f \textit{ messbar und } \|f\|_p < \infty\}$$

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}$ als Zielraum, da der Raum $\overline{\mathbb{R}}$ kein Vektorraum ist. Wir zeigen als nächstes. dass $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{E}, \mu)$ in der Tat ein Vektorraum ist. Dafür leiten wir zuerst einige wichtige Ungleichungen her:

Lemma 3.23 (Youngsche Ungleichung). *Für* $\forall x, y \geq 0$ *gilt*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p'}}{p'} \qquad \forall 1 < p < \infty \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{3.5}$$

wobei der duale Exponent p' *zu* p *gegeben ist durch*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Beweis. Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Ungleichung trivial. Wir nehmen daher $x, y > 0$ an. Da der Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton ist, ist (3.5) aquivalent zu

$$\frac{1}{p} \ln x^p + \frac{1}{p'} \ln y^{p'} = \ln x + \ln y = \ln(xy) \leq \ln\big(\frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}\big).$$

Diese Ungleichung folgt, da der Logarithmus konkav ist. □

[27.11.2020]

[30.11.2020]

Insbesondere gibt es jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $C_{\varepsilon p} < \infty$ mit $xy \leq \varepsilon x^p + C_{\varepsilon p} x^{p'}$.

Satz 3.24 (Hölderungleichung). *Sei* $1 \leq p \leq \infty$*. Für* $f \in \mathscr{L}^p(X)$*,* $g \in \mathscr{L}^{p'}(X)$ *gilt*

$$\int |fg| \; d\mu \;\leq\; \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Beweis. Wir schreiben $q := p'$. Für $p = 1, q = \infty$ gilt $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ f.ü. und

$$\int |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int |f| \; d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1,$$

insbesondere $fg \in \mathscr{L}^1(X, Y)$. Die Behauptung für $p = \infty$, $q = 1$ gilt analog. Sei nun $1 < p, q < \infty$. Mit der Young'schen Ungleichung gilt für alle $s > 0$,

$$\int |fg| d\mu \leq \int \left(\frac{s^p |f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{s^q q} \right) d\mu \leq \frac{s^p}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q s^q} \|g\|_q^q. \tag{3.6}$$

und insbesondere $fg \in \mathscr{L}^1(X)$. Wir können die rechte Seite von (3.8) durch eine geschickte Wahl von s minimieren. Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erhalten wir $\frac{1}{p} = \frac{q-1}{q}$, $p = \frac{q}{q-1}$ und $\frac{q}{p} = q - 1$. Mit der Wahl $s = \|f\|_p^{\frac{1-p}{p}} \|g\|_p^{\frac{1}{p}}$ folgt

$$s^p = \|f\|_p^{1-p} \|g\|_p \qquad \text{und} \qquad s^{-q} = \|f\|_p^{\frac{(p-1)q}{p}} \|g\|_p^{-\frac{q}{p}} = \|f\|_p \|g\|_p^{1-q} \tag{3.7}$$

Aus (3.8)–(3.7) folgt damit

$$\int |fg| d\mu \leq \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q. \tag{3.8}$$

□

Die Höldergleichung lässt sich auf Produkte mit mehr als zwei Faktoren verallgemeinern (Übungsaufgabe). Die Abbildung $\| \cdot \|_p$ erfüllt die Dreiecksungleichung:

Satz 3.25 (Minkowski Ungleichung). *Für* $p \in [1, \infty]$ *gilt* $f + g \in \mathscr{L}^p(X, Y)$ *und*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \forall f, g \in \mathscr{L}^p(X, Y). \tag{3.9}$$

Insbesondere ist $\mathscr{L}^p(X)$ *ein Vektorraum mit Seminorm* $\| \cdot \|_p$.

Beweis. Es gilt $\|0\|_p = 0$ und $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$. Es bleibt (3.9) zu zeigen:

Der Fall $p = \infty$: Es gilt $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ für $x \in X \backslash N_1$ und $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ für $x \in X \backslash N_2$ für zwei Nullmengen N_1, N_2. Damit ist $N := N_1 \cup N_2$ eine Nullmenge und $|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ $\forall x \in X \backslash N$. Daraus folgt $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$.

Der Fall $p \in (1, \infty)$*:* Wir schreiben

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu \\ &\leq \int |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu + \int |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} d\mu. \end{aligned}$$

Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ erhalten $(p-1)p' = p$. Mit der Hölderungleichung erhalten wir also

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p \leq & \Big(\int |f(x)|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int |f(x) + g(x)|^{(p-1)p'} d\mu \Big)^{\frac{1}{p'}} \\ & + \Big(\int |g(x)|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int |f(x) + g(x)|^{(p-1)p'} d\mu \Big)^{\frac{1}{p'}} \\ \leq & \big(\|f\|_p + \|g\|_p \big) \|f + g\|_p^{p/p'}. \end{aligned}$$

Wir teilen die Ungleichung durch $\|f+g\|_p^{p/p'}$. Die Aussage folgt dann aus $p - \frac{p}{p'} = 1$. $\square$

Aus $\|f\|_p = 0$ folgt nur $f = 0$ f.ü.. Um normierte Räume zu erhalten, betrachten die Äquivalenzklassen $f \sim g \Longleftrightarrow f(x) = g(x)$ f.ü.. Offensichtlich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation (d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv). Die zugehörige Äquivalenzklasse ist

$$[f] := \{g \in \mathscr{L}(X, \mathbb{R}^n) : f(x) = g(x) \text{ f.ü. }\}$$

Für $f, g \in \mathscr{L}^p(X, \mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir

- $[f+g] := [f] + [g], \qquad [\lambda f] = \lambda [f]$
- $\|[f]\|_p := \|f\|_p$.
- $[f_k]$ ist messbar, falls ein Repräsentant f_k messbar ist.
- $[f_k] \to [f]$ f.ü. , falls es ein Repräsentanten gibt mit $f_k \to f$ f.ü. .

Man überprüft leicht, dass diese Definitionen konsistent sind. Zum Beispiel gilt $f(x) + g(x) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)$ f.ü. , falls $f(x) = \tilde{f}(x)$ und $g(x) = \tilde{g}(x)$ f.ü. . Falls die Funktionen $[f_k]$ messbar sind und $[f_k] \to [f]$ f.ü. , dann gibt es messbare Repräsentanten f_k mit $f_k \to f$ f.ü. . Wir können den Repräsentanten f so wählen, dass $f_k \to f$ punktweise überall gilt. Dann ist auch f messbar. Wir erhalten also die Aussage:

- Falls $[f_k]$ messbar ist und $[f_k] \to [f]$ f.ü. , dann ist $[f]$ messbar.

Definition 3.26 (L^p-Räume). *Sei $p \in [1,\infty]$. Für $f, g \in \mathscr{L}^p(X,\mathbb{R}^n)$ definieren wir*

$$L^p(X,\mathscr{E},\mu) := \mathscr{L}^p(X,\mathscr{E},\mu)/\sim \;=\; \{[f] : f \in \mathscr{L}^p(X,\mathscr{E},\mu)\}.$$

Wir sagen $f_k \to f$ in L^p, falls $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$ für $k \to \infty$.

Elemente in L^p sind keine Funktionen sondern Äquivalenzklassen von Funktionen. Wir stellen uns trotzdem Elemente von L^p als Funktionen vor mit der Konvention, dass zwei Funktionen gleich sind, wenn sie fast überall übereinstimmen. Wir werden die Notation $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{E},\mu)$ nicht mehr benutzen und schreiben $f \in L^p(X,\mathscr{E},\mu)$ mit der Bedeutung, dass $f \in \mathscr{L}^p(X,\mathscr{E},\mu)$ ein Repräsentant der Äquivalenzklasse $[f] \in L^p(X,\mathscr{E},\mu)$ ist.

Die Konvergenzsätze lassen sich für $1 \le p < \infty$ auch in einer Form formulieren, die an L^p–Räume angepasst ist. Der Beweis ist Übungsaufgabe.

Bemerkung 3.27 (Konvergenzsätze in L^p).

(i) *Sei $1 \le p < \infty$ und $f_n \in L^p(X,\mathscr{E},\mu)$ mit $f_n \to f$ μ-f.ü. und $|f_n| \le g$ μ-f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$ für ein $f : X \to \mathbb{R}$ und ein $g \in L^p(X,\mathscr{E},\mu)$. Dann gilt $f \in L^p(X,\mathscr{E},\mu)$ und*

$$f_k \to f \qquad \text{in } L^p(X,\mathscr{E},\mu).$$

(ii) *Die entsprechende Aussage gilt nicht für $p = \infty$. Für $g, f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k = \chi_{[k,k+1]}$ gilt z.B. $f_k \to 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k \le 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, aber $\int_{\mathbb{R}} f_k \, dx = 1 \not\to \int_{\mathbb{R}} 1 \, dx = \infty$.*

Wir erinnern, dass ein metrischer/normierter Raum vollständig heißt, falls jede Cauchyfolge konvergiert. Dies führt auf die folgende Definition:

Definition 3.28 (Banachraum, Hilbertraum).

(i) Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

(ii) Ein vollständiger Raum mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum.

Frage: Sind die Räume $C^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, Banachräume? Frage: Kennen Sie weitere unendlich dimensionale Banachräume/Hilberträume?

Satz 3.29 (L^p–Räume als Banachräume, L^2 als Hilbertraum).

(i) Für $p \in [1, \infty]$ ist $L^p(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_p$.

(ii) Der Raum $L^2(X, \mathscr{E}, \mu)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{L^2}$.

Beweis. Aus $\|[f]\|_{L^p} = 0$ folgt $f = 0$ f.ü. und daher $[f] = 0$ nach Lemma 3.13. Zusammen mit Satz 3.25 erhalten wir, dass L^p ein normierter Vektorraum ist. Es bleibt zu zeigen, dass X vollständig ist. Sei also $f_n \in L^p$ eine Cauchyfolge.

Der Fall $p = \infty$: Nach Annahme gibt es Nullmengen N_{kj}, $k, j \in \mathbb{N}$ so dass es für $\varepsilon > 0$

ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \qquad\qquad \forall x \in X \backslash N_{jk}, \forall k, j \geq n_0$$

Dann ist auch $N := \bigcup_{j,k} N_{jk}$ eine Nullmenge und es gilt

$$|f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \qquad\qquad \forall x \in X \backslash N, \forall k, j \geq n_0 \tag{3.10}$$

Daher ist $f_n(x)$ eine Cauchyfolge $\forall x \in X \backslash N$ und $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existiert. Hier haben wir genutzt, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist. Wir setzen ausserdem $f(x) := 0$ für $x \notin N$. Dann ist f messbar als f.ü. Limes von messbaren Funktionen. Im Limes $n \to \infty$ und $\varepsilon \to$ erhalten wir aus (3.10), dass $f_n \to f$ in L^∞ und $f \in L^\infty$.

Der Fall $p \in (1, \infty)$: Es reicht zu zeigen, dass es eine Teilfolge von f_n gibt, welche in L^p gegen f konvergiert. Da f_n eine Cauchyfolge ist, konvergiert dann die ganze Folge. Da f_n eine Cauchyfolge ist, können wir nach Auswahl einer Teilfolge also annehmen, das

$$\|f_n - f_{n+1}\|_p \leq 2^{-n}.$$

Wir definieren nun die monoton wachsende Folge von Funktionen

$$F_k(x) := |f_0(x)| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|, \qquad F(x) := \lim_{k \to \infty} F_k(x). \tag{3.11}$$

Da die Folge F_k monoton steigend ist, ist $F(x) \in [0, \infty]$ wohldefiniert für alle $x \in X$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt daher

$$\|F\|_p = \lim_{k\to\infty} \|F_k\|_p \leq \|f_0\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \leq \|f_0\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$$

Insbesondere gilt $F \in L^p$. Wir schreiben f_k als Teleskopsumme, d.h.

$$f_k(x) \;=\; f_0(x) + \sum_{n=1}^{k} \big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big). \tag{3.12}$$

Da F_k f.ü. konvergiert, konvergiert im Vergleich (3.11)–(3.12) auch f_k f.ü. . Bis auf eine $N \subset X$ existiert also der Limes $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)\, \forall x \notin N$. Dann gilt $|f_k| \leq F$ f.ü. und $f_k \to f(x)$ f.ü.. Aus Bemerkung 3.27 erhalten wir $f \in L^p$ und $f_k \to f$ in L^p. $\square$

Aus dem Beweis von Satz 3.29 sehen wir, dass wir jeder L^p–Cauchyfolge von stetigen Funktionen eine f.ü. definierte Grenzfunktion zuordnen können. Diese Grenzfunktion ist als f.ü. –Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen auch messbar. Dies kann genutzt werden, um den Raum Lebesgue–messbarer Funktionen als den Norm-Abschluss des Raumes Riemann–integrierbarer Funktionen zu definieren. Der metrische Abschluss ist dann wiederum kein Raum von Funktionen, sondern ein Raum von Äquivalenzklassen.

[30.11.2020]

[4.12.2020]

Der Dualraum V^* eines endlich–dimensionalen Vektorraum V ist definiert als der Raum der linearen Funktionale auf V. Jeder endlich dimensionale Raum isomorph zu seinem Dualraum. Der Dualraum V^* eines endlich–dimensionalen Raumes ist isomorph zu seinem Dualraum. Alle linearen Funktionale auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind stetig. Für einen unendlich–dimensionalen Vektorraum gelten diese Aussagen im Allgemeinen nicht mehr. Allgemein definieren wir den Dualraum als Raum der stetigen, linearen Funktionale:

Definition 3.30 (Dualraum). *Der Dualraum des topologischen Vektorraum V ist*

$$V^* \ := \ \{\varphi : V \to \mathbb{R} : \ \varphi \text{ ist stetig und linear}\}.$$

Falls der Raum V normiert ist, dann lässt sich auf V^* eine Norm $\|\cdot\|_{V^*}$ definieren durch $\|\varphi\|_{V^*} := \sup_{|x|=1} |\varphi(x)|$ (Übungsaufgabe). Eine Lineare Abbildung ist genau dann stetig, wenn der Einheitsball auf eine beschränkte Menge abgebildet wird (Übungsaufgabe).

Man kann zeigen, dass für $1 < p < \infty$ der Raum $L^{p'}$ isometrisch isomorph zu $(L^p)^*$ ist. Die Isometrie ist gegeben durch

$$\varphi : L^{p'} \to (L^p)^*, \qquad \varphi(f)(g) \ := \ \int_X fg \ d\mu \quad \forall f \in L^{p'}, g \in L^p$$

Die Surjektivität dieser Abbildung folgt aus dem Satz von Hahn-Banach (Funktionalanalysis). Die Injektivität der Einbettung folgt aus:

Satz 3.31 (Duale Darstellung der L^p–Norm). *Sei $1 \le p < \infty$. Dann gilt*

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L^{p'}(X), \|g\|_{p'}=1} \int_X fg \; d\mu \qquad \forall f \in L^p(X, \mathscr{E}, \mu).$$

Beweis. Sei $f \in L^p$ mit $f \neq 0$ und sei $q := p'$. Aus der Hölderungleichung erhalten wir

$$\sup_{g \in L^q(X), \|g\|_q=1} \int fg \; d\mu \le \sup_{g \in L^q(X), \|g\|_q=1} \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p.$$

Für die umgekehrte Ungleichung wählen wir die Testfunktion

$$g^* := \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p/q}} \operatorname{sgn}(f) \in L^q \qquad \text{wobei} \quad \|g^*\|_q = \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}} \Big(\int |f|^{q(p-1)} d\mu \Big)^{1/q} = 1,$$

da $q(p-1) = p$. Damit erhalten wir

$$\sup_{g \in L^q(X), \|g\|_q=1} \int fg \; d\mu \ge \int fg^* \; d\mu = \int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p/q}} d\mu = \|f\|_p^{p(1-1/q)} = \|f\|_p.$$

$\square$

Wir können die Dualität ausdrücken in der Schreibweise

$$\langle g, f \rangle \; := \; \int fg \; dx.$$

Wir können auch allgemeiner den Ausdruck

$$\langle \mu, f \rangle := \int f \, d\mu$$

als einen dualen Ausdruck verstehen

3.4 Vergleich von Konvergenzbegriffen

Im folgenden vergleichen wir einige Konvergenzbegriffe: In endlich dimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent. Für Funktionenräume unterscheiden sich verschiedene Konvergenzbegriffe deutlich. In diesem Abschnitt ist $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Wir haben bisher u.a. verschiedene Begriffe für die Konvergenz von Funktionen eingeführt. Sei $f, f_k : E \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

- f.ü. punktweise Konvergenz: $f_k(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$ für μ–fast alle $x \in E$.
- Konvergenz in L^p: $\|f_k(x) - f(x)\|_{L^p} \to 0$.

Konvergenz in L^∞ entspricht im wesentlichen der gleichmäßigen Konvergenz (bis auf Nullmengen). Offensichtlich impliziert gleichmäßige Konvergenz die punktweise f.ü. –Konvergenz.

Der Begriff der f.ü. –Konvergenz ist natürlich auf dem Raum der messbaren Funktionen definiert. Ein weiterer Konvergenzbegriff auf dem Raum der messbaren Funktionen ist die Konvergenz im Maß. Dieser Konvergenzbegriff erzeugt eine Topologie auf dem Raum der messbaren Funktionen und setzt keinerlei Integrierbarkeit voraus:

Definition 3.32 (Konvergenz im Maß). *Seien $f_k, f : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ messbar. Wir sagen, dass f_k gegen f im Maß μ konvergiert, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty.$$

Wir bemerken, dass der Grenzwert für Konvergenz im Maß nicht eindeutig ist: Aus $f_k \to f$ und $f_k \to g$ im Maß folgt nur $f = g$ f.ü.. Genauso sind die Grenzwerte für L^p–Konvergenz und f.ü. –Konvergenz nur eindeutig bis auf eine Nullmenge.

Im Folgenden vergleichen wir die verschiedenen Konvergenzbegriffe miteinander. Maßkonvergenz ist schwächer als jede L^p–Konvergenz. Für Räume mit endlichem Maß gibt es eine Hierarchie der L^p–Konvergenzen:

Proposition 3.33 (L^p–Konvergenz, Maßkonvergenzen). *Sei $f, f_k : X \to \mathbb{R}$ messbar und es gelte $f_k \to f$ in $L^q(X, \mathscr{E}, \mu)$ für ein $q \in [1, \infty]$. Dann folgt*

(i) $f_k \to f$ im Maß.

(ii) Falls $\mu(X) < \infty$, dann folgt $f_k \to f$ in $L^p(X, \mathscr{E}, \mu)$ $\forall 1 \leq p \leq q$.

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $f = 0$ an.

(i): Zu $\varepsilon > 0$ erhalten wir aus der Chebyshev-Ungleichung in Satz 3.12,

$$\mu\big(\{x \in X : |f_k(x)|^q \geq \varepsilon\}\big) \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon}\int |f_k|^q \, d\mu \;\to 0 \qquad \text{für } k \to \infty$$

und damit Konvergenz im Maß.

(ii): Übungsaufgabe. $\square$

Im Folgenden untersuchen wir den Begriff der f.ü.–Konvergenz und das Verhältnis zu anderen Konvergenzbegriffen. Eine f.ü. –konvergente Folge konvergiert gleichmässig bis auf eine beliebig kleine Menge:

Satz 3.34 (Satz von Egorov). *Sei $\mu(X) < \infty$. Es gelte $f_k \to f$ f.ü. für messbare Funktionen $f_k, f : X \to \mathbb{R}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $E_\varepsilon \in \mathscr{E}$ mit $\mu(E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ und $f_k \rightrightarrows f$ in $X \backslash E_\varepsilon$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $f = 0$ an. Nach Annahme gilt $f_k \to 0$ auf $X \backslash N$ mit $\mu(N) = 0$. Wir definieren

$$F_{kn} := \{x \in X : |f_j(x)| < \frac{1}{n} \quad \forall j \geq k\}, \qquad E_{kn} := X \backslash F_{kn} \tag{3.13}$$

Dann gilt $E_{kn} \searrow N$ für $k \to \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Da $\mu(E_{1n}) \leq \mu(X) < \infty$ gilt $\mu(E_{kn}) \to \mu(N) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und es gibt zu $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(E_{k_n,n}) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Für $E_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^\infty E_{k_n,n}$ gilt dann

$$\mu(E_\varepsilon) = \mu(\bigcup_{n=1}^\infty E_{k_n,n}) \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Wir behaupten, dass $f_k \rightrightarrows 0$ in $F_\varepsilon := X \backslash E_\varepsilon = \bigcap F_{k_n,n}$. Nach Konstruktion gilt $F_\varepsilon \subset F_{k_n,n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Mit (3.13) erhalten wir $\sup_{\mathscr{F}_{k_n,n}} |f_k| < \frac{1}{n}$ $\forall j \geq k_n$ und daher $f_k \rightrightarrows 0$. $\square$

Eine Folgerung aus dem Satz von Egorov ist der Satz von Lusin (Übungsaufgabe).

Lemma 3.35 (f.ü. vs. Maßkonvergenz). *Seien $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ messbar.*

(i) Falls $f_k \to f$ im Maß, dann gibt es eine Teilfolge f_{k_j} mit $f_{k_j} \to f$ punktweise f.ü..

(ii) Falls $\mu(X) < \infty$ und $f_k \to f$ f.ü., dann konvergiert $f_k \to f$ im Maß.

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $f = 0$ an.

(i): Da $f_k \to 0$ im Maß gibt es zu $j \in \mathbb{N}$ ein $k_j \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(\{x \in X : |f_{k_j}(x)| > 2^{-j}\}) \leq 2^{-j}.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass k_j streng monoton wächst, d.h. f_{k_j} definiert eine Teilfolge von f_k. Mit der Notation

$$N := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j>n} B_j \qquad \text{für} \qquad B_j := \{x \in X : |f_{k_j}(x)| > 2^{-j}\}$$

erhalten wir also $\mu(B_{k_j}) \leq 2^{-j}$ und daher $\mu(N) = 0$. Für $x \in N^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{j>n} B_j^c$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \notin B_j$ für alle $j \geq n_0$, d.h. $|f_{k_j}(x)| \leq 2^{-j}$ für alle $j \geq n_0$, d.h. $f_{k_j}(x) \to 0$ für $j \to \infty$.

(ii): Sei $\delta > 0$. Nach dem Satz von Egorov gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $E_\varepsilon \subset X$ mit $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, so dass $f_k \rightrightarrows 0$ gleichmässig in $X\backslash E_\varepsilon$. Nach Proposition 3.33 konvergiert $f_k \to 0$ in $X\backslash E_\varepsilon$ im Maß. Zusammen mit der Subadditivität von μ erhalten wir

$$\limsup_{k\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_k| > \delta\}) \;\leq\; \varepsilon + \limsup_{k\to\infty} \mu(\{x \in X\backslash E_\varepsilon : |f_k| > \delta\}) \;\leq 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir die Konvergenz im Maß. □

Aus Konvergenz in L^1 folgt Maßkonvergenz und f.ü. Konvergenz (für eine Teilfolge):

Proposition 3.36 (L^p vs. f.ü.–Konvergenz). *Falls $f_k \to f$ in L^p für ein $1 \leq p \leq \infty$, dann gibt es eine Teilfolge mit $f_{k_j} \to f$ f.ü..*

Beweis. Folgt aus Proposition 3.33 und Lemma 3.35(i). □

Beispiel 3.37 (Vergleich der Konvergenzbegriffe).

(i) *Für $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $f_k(x) = \chi_{(0,\frac{1}{k}]}(x)$ gilt $f_k(x) \to f(x)$ $\forall x \in X$, aber $f_k \not\to f$ in L^1, da $\int f_k = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Sei $a_k := \left(\sum_{j=1}^{j} \frac{1}{j}\right) \bmod 1$ und sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k = \chi_{[a_k,a_{k+1}]}$. Dann gilt $\|f_k\|_{L^1} = \frac{1}{k+1} \to 0$, d.h. $f_k \to 0$ in L^1. Andererseits konvergiert f_k*

konvergiert in keinem Punkt. Es gibt aber Teilfolgen von f_{k_j} mit $f_{k_j} \to 0$ f.ü..

(iii) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{1}{k}\chi_{(k,\infty)}$. Dann gilt $f_k \rightrightarrows 0$ gleichmässig und im Maß, aber $f_k \not\to 0$ in L^1.

Lemma 3.38 (f.ü.-Konvergenz ist nicht durch Metrik induziert). *Es gibt keine Metrik d auf $L^1([0,1], \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, welche die f.ü. punktweise Konvergenz induziert.*

Beweis. Der Beweis wurde in der Vorlesung nicht durchgenommen. Wir argumentieren indirekt und nehmen an es gibt eine Metrik d auf dem metrischen Raum $Z = L^1$, so dass $f_k \to f$ f.ü. , genau dann wenn $d(f_k, f) \to 0$ für beliebige Folgen.

Sei f_k die Folge aus Beispiel 3.37(ii). Dann gilt $f_k \to 0$ in L^1, aber f_k konvergiert nicht punktweise. Nach Proposition 3.36 gibt es zu jeder Teilfolge eine weitere Teilfolge f_{k_j} mit $f_{k_j} \to 0$ f.ü.. Nach Annahme gibt es zu jeder Teilfolge also eine weitere Teilfolge f_{k_j} mit $d(f_{k_j}, 0) \to 0$. Andererseits gilt $d(f_k, 0) \not\to 0$.

Der Widerspruch ergibt sich nun aus der folgenden Aussage: Sei eine Folge f_k in einem metrischen Raum Z und sei $f \in Z$. Falls $d(f_k, f) \not\to 0$, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge f_{k_j} mit $d(f_{k_j}, f) \geq \varepsilon_0$. Insbesondere gibt es für diese Teilfolge keine Teilfolge, welche gegen f konvergiert. $\square$

[4.12.2020]

[7.12.2020]

4 Integrationssätze

4.1 Produktmaße und Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$

In diesem Kapitel sind $(X, \mathscr{E}, \mu)$, $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ Maßräume. Wir konstruieren ein Maß $\mu \times \nu$ auf $X \times Y$. Damit können wir insbesondere das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ konstruieren. Wir wollen insbesondere Mengen der Form $A \times B$ messen können für $A \in \mathscr{E}$ und $B \in \mathscr{F}$. Dies führt auf den Begriff der Produktalgebra:

Definition 4.1 (Produktalgebra). *Die Produktalgebra $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ ist definiert als*

$$\mathscr{E} \times \mathscr{F} := \sigma(\{A \times B : A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}\}) \ \subset \mathscr{P}(X \times Y).$$

Die Produktalgebra erfüllt das Assoziativgesetz, d.h. $(\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2) \times \mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_1 \times (\mathscr{E}_2 \times \mathscr{E}_3)$. Wir schreiben $\mathscr{E}^n$ für das n–fache Produkt von $\mathscr{E}$. Man kann zeigen, dass (Übungsaufgabe)

$$\mathscr{E}_1 \times \ldots \mathscr{E}_n = \sigma(\{A_1 \times \ldots \times A_n : A_i \in \mathscr{E}_i\})$$

Die folgende Aussage ist nützlich:

Lemma 4.2 (Produktalgebra als erzeugtes Dynkinsystem). *Es gilt*

$$\mathscr{E} \times \mathscr{F} \ = \ \delta(\{A \times B : A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}\}),$$

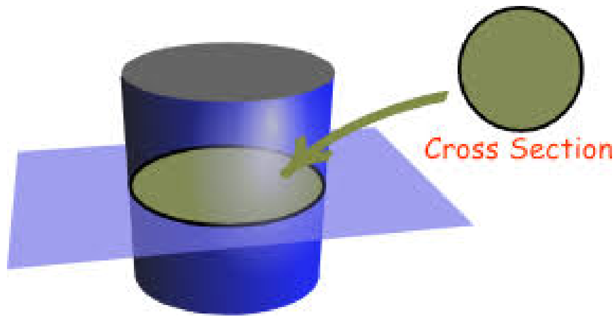

Abbildung 12: Querschnitt einer Menge (Quelle: mathisfun.com)

wobei $\delta(\mathscr{A})$ das kleinste Dynkinsystem ist, welches $\mathscr{A}$ enthält.

Beweis. Man sieht leicht, dass der Durchschnitt von Dynkinsystemen wieder ein Dynkinsystem ist. Das kleinste Dynkinsystem ist, welches $\mathscr{A}$ enthält ist also eindeutig und wohldefiniert. Für $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ mit $F_1 = A_1 \times B_1$, $F_2 = A_2 \times B_2$ gilt $F_1 \cap F_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathscr{F}$, d.h. $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ ist ein π–System. Die Aussage folgt dann aus Proposition 2.15. $\square$

Lemma 4.3 (Borelalgebra auf $\mathbb{R}^n$). $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$.

Beweis. Übungsaufgabe $\square$

Für $E \subset X \times Y$ und $x \in X$, $y \in Y$ definieren wir die Querschnitte (siehe Fig. 12)

- $E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\} \subset Y$,

- $E^y := \{x \in X : (x, y) \in E\} \subset X$.

Proposition 4.4 (Messbarkeit der Querschnitte). *Seien* $(X, \mathscr{E}, \mu)$, $(Y, \mathscr{E}, \nu)$ σ-*endliche Maßräume. Für* $E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}$ *gilt*

(i) $E_x \in \mathscr{F}$ *und* $E^y \in \mathscr{E}$.

(ii) Die Funktion $x \mapsto \nu(E_x)$ *ist* $\mathscr{E}$*–messbar; die Funktion* $y \mapsto \mu(E^y)$ *ist* $\mathscr{F}$*–messbar.*

Beweis. Sei $\mathscr{K} := \{A \times B : A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}\}$.

(i): Sei $x \in X$ fest. Es reicht

$$\mathscr{E} \times \mathscr{F} \;\subset\; \mathscr{F}_x \;:=\; \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathscr{F}\}$$

zu zeigen. Da $\mathscr{K} \subset \mathscr{F}_x$ und da $\mathscr{E} \times \mathscr{F} = \sigma(\mathscr{K})$, reicht es zu zeigen, dass $\mathscr{F}_x$ eine σ-Algebra ist. Wir bemerken zunächst, dass $\emptyset, X \times Y \in \mathscr{F}_x$. Für $E \in \mathscr{F}_x$ gilt $(E^c)_x = (E_x)^c \in \mathscr{F}$ und daher $E^c \in \mathscr{F}_x$. Falls $E_n \in \mathscr{F}_x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)_x = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x) \in \mathscr{F}$ und daher $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{F}_x$. Damit ist $\mathscr{F}_x$ eine σ-Algebra und $\mathscr{E} \times \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_x$.

(ii): Sei zunächst ν endlich. Wir müssen zeigen, dass

$$\mathscr{E} \times \mathscr{F} \;\subset\; \mathscr{D} \;:=\; \{E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F} \;:\; x \mapsto \nu(E_x) \text{ ist } \mathscr{E} \text{ messbar. }\}.$$

Für $A \times B \in \mathscr{K}$ gilt $(A \times B)_x = \chi_A(x)B$. Daher gilt $\nu((A \times B)_x) = \chi_A(x)\nu(B)$ und insbesondere $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$. Da $\mathscr{E} \times \mathscr{F} = \delta(\mathscr{K})$ (Lemma 4.2) reicht es also zu zeigen, dass $\mathscr{D}$

ein Dynkinsystem ist.

Wir bemerken zunächst, dass $\emptyset, X \times Y \in \mathscr{D}$. Für $E \in \mathscr{D}$ ist $x \mapsto \nu((E^c)_x) = \nu((E_x)^c) = \nu(Y) - \nu(E_x)$ messbar, d.h $E^c \in \mathscr{D}$. Seien nun $E_n \in \mathscr{D}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von disjunkten Mengen und sei $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Dann gilt $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)_x = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x)$. Die Mengen $(E_n)_x$ sind disjunkt und daher gilt $\nu(E_x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu((E_n)_x)$. Insbesondere ist $x \mapsto \nu(E_x)$ als Limes einer Folge von messbaren Funktionen messbar. Damit gilt $E \in \mathscr{D}$.

Falls ν nicht endlich sondern nur σ-endlich ist, dann gibt es eine Folge von Mengen $B_n \in X$ mit $\nu(B_n) < \infty$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Insbesondere sind die Masse ν_n, definiert durch $\nu_n(E) := \nu(E \cap B_n)$, endlich. Nach der obigen Argumentation ist $x \mapsto \nu_n(E_x)$ messbar für alle $E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}$. Damit ist auch $x \mapsto \nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(E_x)$ als ein punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen messbar. □

Satz 4.5 (Produktmaß). *Seien $(X, \mathscr{E}, \mu)$, $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann gibt es ein eindeutiges Produktmaß $\mu \times \nu : \mathscr{E} \times \mathscr{F} \to [0, \infty]$, so dass*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \qquad \forall A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}. \tag{4.1}$$

Das Produktmaß erfüllt die Identitäten

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) \qquad \forall E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}. \tag{4.2}$$

Beweis. Nach Proposition 4.4 sind die Funktionen $x \mapsto \nu(E_x)$ und $y \mapsto \mu(E^y)$ messbar und daher ist (4.2) wohldefiniert. Wir definieren $\rho_1,\, \rho_2 : \mathscr{E} \times \mathscr{F} \to [0,\infty]$ durch

$$\rho_1(E) := \int_X \nu(E_x) d\mu, \qquad \rho_2(E) := \int_Y \mu(E^y) d\nu \qquad\qquad \forall E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}.$$

Um zu sehen, dass $\rho_1 : \mathscr{E} \times \mathscr{F}$ ein Maß definiert sei $E_n \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}$ eine Folge von disjunkten Mengen. Dann sind auch die Mengen $E_{n,x} := (E_n)_x$ disjunkt und es gilt $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{n,x}$ und $\nu((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{n,x}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_{n,x})$. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt also

$$\rho_1(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_{n,x})\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X \nu(E_{n,x})\, d\mu, = \sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_1(E_n),$$

d.h. ρ_1 ist σ-additiv und daher ein Maß. Analog ist $\rho_2 : \mathscr{E} \times \mathscr{F} \to [0,\infty]$ ein Maß.

Für $A \in \mathscr{E}$ und $B \in \mathscr{F}$ gilt $\nu((A \times B)_x) = \chi_A(x)\nu(B)$ und $\nu((A \times B)_y) = \chi_B(y)\mu(A)$. Insbesondere erhalten wir

$$\rho_1(A \times B) = \int_X \nu((A \times B)_x) d\mu = \int_A \nu(B) d\mu = \mu(A)\nu(B) \;=\; \rho_2(A \times B).$$

Damit gilt (4.1).

Wir haben gesehen, dass $\rho_1 = \rho_2$ auf $\mathscr{K} := \{A \times B : A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}\}$. Um zu zeigen, dass $\rho_1 = \rho_2$ aud $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ wenden wir Proposition 2.17 an. Offensichtlich ist $\mathscr{K}$ ein π–System. Nach Lemma 4.2 gilt $\mathscr{E} \times \mathscr{F} = \sigma(\mathscr{K}) = \delta(\mathscr{K})$. Da die Maßraume σ–endlich sind erhalten wir eine Folge von Mengen $E_n = A_n \times B_n$ mit $\rho_1(E_n) = \rho_2(E_n) < \infty$ und $E_n \to X \times Y$. Eine Anwendung von Proposition 2.17 ergibt also die gewünschte Aussage. $\square$

Insbesondere gilt das Assoziativgesetz $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$. Mit Induktion kann man die Aussage von Satz 4.5 dann für endliche Produkte verallgemeinern.

[7.12.2020]

[11.12.2020]

Wir definieren nun das Lebesguemaß in $\mathbb{R}^n$:

Satz 4.6 (Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$). *Es gibt ein eindeutiges, translationsinvariantes Maß*

$$\mathscr{L}^n : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty] \qquad \textit{mit} \quad \lambda([0,1]^n) = 1.$$

Dieses Maß heißt Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Das Lebesguemaß ist definiert durch $\mathscr{L}^n := (\mathscr{L}^1)^n$, wobei $\mathscr{L}^1 := \lambda$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ ist. Nach Lemma 4.3 gilt $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$. Daher ist $\mathscr{L}^n$ ein Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Eine Anwendung von Proposition 2.17 zeigt, dass das Lebesguemaß mit den geforderten Eigenschaften eindeutig ist. □

- Nach Satz 2.11 kann man das Lebesguessmaß zu einem vollständigen Maß erweitern $\mathscr{L}^n : \mathscr{L}_n \to [0, \infty]$ erweitern. Mengen in $\mathscr{L}_n$ heißen Lebesguemengen oder lebesguemessbar.

- Sei $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ ein Maßraum. Wir sagen, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to Y$ lebesguemessbar ist, falls $f^{-1}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{L}_n$.

Wir benutzen im Folgenden auch die Notation

$$\int f\ dx := \int f d\mathscr{L}^n,$$

Wir erinnern an Notationen aus der Linaren Algebra.

- $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißt Isometrie, falls $|Qv| = |v|\ \forall v \in \mathbb{R}^n$.
- $\mathrm{Sym}(n)$ bezeichnet die Menge der symmetrischen Matrizen $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt nichtnegativ definit, $T \geq 0$, falls $(x, Tx) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Falls $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Isometrie ist, dann gilt $n \leq m$. Außerdem gilt $Q^tQ = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $QQ^t = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ auf $Q(\mathbb{R}^n)$. Für $S \in \mathrm{Sym}(n)$ gibt es eine Orthogonalbasis $(v_i)_{i=1}^n$ und Eigenvektoren $(\lambda_i)_{i=1}^n$ mit $Tv_i = \lambda_i v_i$.

Lemma 4.7 (Polarzerlegung für $m \times n$-Matrizen). *Sei $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$.*

(i) Falls $n \leq m$, dann gibt es $S \in \mathrm{Sym}(n)$ und eine Isometrie $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit

$$T = QS.$$

(ii) Falls $n \geq m$, dann gibt es eine Isometrie $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $S \in \mathrm{Sym}(m)$ mit

$$T = SQ^t.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst $n \le m$ an. Für $C := T^tT$ gilt $C^t = (T^tT)^t = T^tT$ und $(Cx, y) = (Tx, Ty)$, d.h. $C \in \mathrm{Sym}(n)$ und $C \ge 0$. Daher gibt es eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{R}^n$ und $(\mu_i)_{i=1}^n \subset [0, \infty)$ mit $Ce_i = \mu_i e_i$. Wir definieren $\lambda_i := \sqrt{\mu_i}$. Wir behaupten, dass es ein orthornomales System $(f_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ gibt mit

$$Te_i = \lambda_i f_i$$

Für $\lambda_i \ne 0$ definieren wir dafür $f_i := \lambda_i^{-1} Te_i$. Für $\lambda_i, \lambda_j \ne 0$ gilt dann

$$(f_i, f_j) = \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}(Te_i, Te_j) = \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}(Ce_i, e_j) = \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i\lambda_j}(e_i, e_j) = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\delta_{ij},$$

d.h. die so definierten Vektoren f_i sind orthonormal. Falls $\lambda_i \ne 0$, dann ergänzen wir unser System beliebig, so dass $(f_i)_{i=1}^n$ orthonormal ist. Insbesondere ist $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiert durch $Qe_i := f_i$ eine Isometrie. Insbesondere gilt $Q^tQ = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Wir definieren $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $Sf_i = \lambda_i f_i$. Dann ist S symmetrisch und es gilt $T = QS$.

Behauptung (ii) folgt, indem wir (i) auf T^t anwenden. $\square$

Das Lebesguemaß erfüllt die Forderungen des Maßproblems (auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$):

Proposition 4.8 (Eigenschaften des Lebesguemaßes). *Für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

(i) $\mathscr{L}^n(QA + y) = \mathscr{L}^n(A)$ *für* $Q \in O(n)$, $y \in \mathbb{R}^n$ *(Euklidische Invarianz)*

(ii) $\mathscr{L}^n(TA) = |\det T|\mathscr{L}^n(A)$ *für* $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *(Skalierung)*

Beweis. *(i):* Übungsaufgabe.

(ii): Nach Lemma 4.7 gibt es $Q \in O(n)$ und $S \in \mathrm{Sym}(n)$ mit $T = QS$. Außerdem gibt es $W \in O(n)$ und $D \in \mathrm{diag}\,(n)$ mit $S = W^t DW$. Nach (i) können können wir also annehmen, dass T diagonal ist, d.h. $T = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\mathscr{L}^n(TE) = |\det T|\mathscr{L}^n(E) = \lambda_1 \ldots \lambda_n \mathscr{L}^n(E). \tag{4.3}$$

Nach Proposition 2.17 reicht es die Aussage für Quader zu zeigen, d.h. wir können annehmen, dass E ein Quader ist. Dann gilt (4.3) offensichtlich. □

4.2 Satz von Fubini

Proposition 4.9 (Tonelli). *Seien $(X, \mathscr{E}, \mu)$, $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ σ-endliche Maßräume, $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$–messbar. Dann sind die Funktionen $x \mapsto f(x, \cdot)$, $x \mapsto \int_Y f(x, \cdot) d\nu$ $\mathscr{E}$-messbar und die Funktion $y \mapsto f(\cdot, y)$ und $y \to \int_X f(\cdot, y) d\mu$ $\mathscr{F}$-messbar. Ausserdem*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) \;=\; \int_X \Big(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x, y) d\mu(x) \Big) d\nu(y). \tag{4.4}$$

Beweis. Falls $f = \chi_E$ mit $E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}$ zu zeigen, dann folgt die Messbarkeit der Funktionen aus Proposition 4.4. Aus Satz 4.5 erhalten wir

$$\mu(E) \;=\; \int_X \nu(E_x)\; d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\; d\nu(y),$$

d.h. (4.4) gilt in diesem Fall. Mit der Linearität des Integrals gilt die Aussage damit für nichtnegative, einfache Funktionen f. Zu jeder messbaren Funktion $f : X \times Y \to [0, \infty]$ gibt es nach nach Satz 3.6 eine monoton wachsende Folge von nichtnegtiven einfachen Funktionen f_n mit $f_n \nearrow f$. Mit dem Satzes von der monotonen Konvergenz erhalten wir dann, dass die Aussage für jede $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$–messbare Funktion $f : X \times Y \to [0, \infty]$ gilt. □

Allgemeiner erhalten wir für integrable Funktionen:

Satz 4.10 (Satz von Fubini). *Seien $(X, \mathscr{E}, \mu)$, $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ σ-endliche Maßräume, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$–messbar. Dann sind die Funktionen $x \mapsto f(x, y)$, $x \mapsto \int_Y f(x, \cdot) d\nu$ $\mathscr{E}$-messbar und die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ und $y \to \int_X f(\cdot, y) d\mu$ $\mathscr{F}$-messbar. Es gilt*

$$\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) = \int_X \Big(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X |f(x, y)| d\mu(x) \Big) d\nu(y).$$

Falls diese Integrale endlich sind, dann sind die folgenden Integrale wohldefiniert und

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Beweis. Dies folgt aus Proposition 4.9 und mit der Zerlegung $f = f_+ - f_-$. Die Details sind Übungsaufgabe. □

Wir bemerken, dass mit den Voraussetzungen von Satz 4.10 $f(x, \cdot)$ im Allgemeinen nur ν– f.ü. integrierbar ist und $f(\cdot, y)$ nur ν– f.ü. integrierbar ist. Allerdings hängt das Integral nicht von Nullmengen ab und ist daher trotzdem wohldefiniert. Mit Fubini kann man das Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel ausrechnen (Übungsaufgabe).

4.3 Transformationssatz

Die Substitutionsregel sagt aus, dass für jeden Diffeomorphismus $\varphi \in C^1(I, J)$

$$\int_J f(y)\, dy = \int_I f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\, dx \qquad \forall f \in C^0(I), \tag{4.5}$$

für Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}$. Frage: Wir haben hier den Betrag von $\varphi'(x)$ genommen. Was ändert sich, wenn wir den Betragstrich weglassen? Der Transformationsatz verallgemeinert (4.5) für höhere Dimensionen. Wir erinnern (Prop. 4.8): Für $E \in \mathscr{B}_n$, $A \in GL(n)$ gilt $A(E) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\mathscr{L}^n(A(E)) = |\det A| \mathscr{L}^n(E). \tag{4.6}$$

Wir wollen (4.6) auf nichtlineare Abbildungen erweitern. Wir zeigen zuerst:

Lemma 4.11. *Sei $\varphi \in C^1(U, V)$, $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen, ein Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$\mathscr{L}^n(\varphi(U)) \leq \int_U |\det D\varphi|\, dx.$$

Beweis. Da φ ein C^1-Diffeomorphismus ist, gilt $\det D\varphi \neq 0$. Wir können daher o.B.d.A $\det D\varphi > 0$ annehmen.

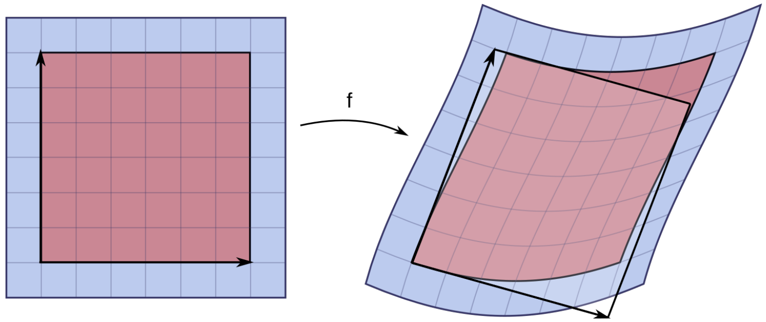

Abbildung 13: Die nichtlineare Funktion f bildet das Rechteck Q auf eine verzerrte Menge $f(Q)$ ab. Die linearisierte Abbildung Df bildet das Quadrat auf ein Parallelepiped ab, welches die Bildmenge lokal approximiert. (Quelle: wikipedia)

Schritt 1: Wir nehmen zuerst an, dass $Q = x^* + [-a, a]^n \subset U$ ein Quader ist mit

$$\begin{aligned} \|D\varphi(x)\| \leq M, \qquad \|D\varphi^{-1}(x)\| \leq M, \qquad && \forall x \in Q, \\ \|D\varphi(x) - D\varphi(y)\| \leq \varepsilon < 1 \qquad && \forall x, y \in Q \end{aligned}$$

für ein $\varepsilon \in (0, 1)$ und ein $M \geq 1$. Wir behaupten, dass dann die folgende Aussage gilt:

$$\mathscr{L}^n(\varphi(Q)) \leq \int_Q \det D\varphi \; dx + C_n \varepsilon M^{2n} \mathscr{L}^n(Q). \tag{4.7}$$

Für eine einfachere Notation nehmen wir $x^* = 0$ und $\varphi(x^*) = 0$ an. Da Q kompakt ist, gibt es $\tilde{x} \in Q$ mit $\det D\varphi(\tilde{x}) = \min_{x \in Q} \det D\varphi(x) > 0$. Mit der Notation $A := D\varphi(\tilde{x})$ gilt also insbesondere $M^{-n} \leq \det A \leq \det D\varphi \leq M^n$. Wir definieren $\psi := A^{-1} \circ \varphi$. Dann gilt

$\psi(0) = 0$, $D\psi = A^{-1}D\varphi$, $D\psi(0) = \mathrm{Id}$ und $\det D\psi = (\det A)^{-1} \det D\varphi$. Insbesondere

$$\|D\psi - \mathrm{Id}\,\| \;\leq\; \|A^{-1}\|\|D\varphi - \mathrm{Id}\,\| \;\leq M\varepsilon.$$

Zusammen mit (4.6) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^n(\varphi(Q)) \;&=\; \mathscr{L}^n((A \circ \psi)(Q)) \;=\; (\det A)\mathscr{L}^n(\psi(Q)),\\
\int_Q \det D\varphi \; dx \;&\geq\; \det A \int_Q 1 \; dx \;\geq\; (\det A)\mathscr{L}^n(Q).
\end{aligned}$$

Da $M^n \geq \det A$ reicht es für den Beweis von (4.7) also zu zeigen, dass

$$\mathscr{L}^n(\psi(Q)) \leq \; (1 + C_n M^n \varepsilon)\mathscr{L}^n(Q).$$

Für $x \in Q = [-a,a]^n$ gilt $|x| \leq \sqrt{n}a$. Daher folgt für $1 \leq i \leq n$

$$|(\psi(x) - x)_i| = \Big| \int_0^1 \frac{d}{dt}\psi_i(tx) - x_i \; dt \Big| \;\leq \int_0^1 \|D\psi(tx) - \mathrm{Id}\,\||x| \; dt \leq M\varepsilon\sqrt{n}a.$$

Damit erhalten wir $\psi(Q) \subset a[-1 - M\varepsilon\sqrt{n}, 1 + M\varepsilon\sqrt{n}]^n$ und daher

$$\mathscr{L}^n(\psi(Q)) \leq \; (1 + M\varepsilon\sqrt{n})^n(2a)^n = (1 + M^n\varepsilon\sqrt{n})^n\mathscr{L}^n(Q) \;\leq\; (1 + C_n M^n \varepsilon)\mathscr{L}^n(Q).$$

Schritt 2: Abschluss des Beweises. Sei zuerst $V \Subset U$. Da $u \in C^1(\overline{V})$ gibt es also ein $M \geq 1$

und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ (M, δ hängen von V ab) mit

$$\|D\varphi(x) - D\varphi(y)\| \leq \varepsilon \qquad \forall x, y \in X \text{ mit } |x - y| < \delta,$$
$$\|D\varphi(x)\| + \|D\varphi^{-1}(x)\| \leq M \qquad \forall x \in V$$

Zu V gibt es eine Zerlegung $V = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ in halboffene Quader Q_i mit Mittelpunkten $x_*^{(i)}$, so dass $\operatorname{diam} Q_i < \delta$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (Übungsaufgabe). Dann gelten in jedem Quader die Voraussetzungen aus Schritt 1 und wir erhalten

$$\mathscr{L}^n(\varphi(Q_i)) \leq \int_{Q_i} |\det D\varphi|\ dx + C_n \varepsilon M^{2n} \mathscr{L}^n(Q_i).$$

Summation über i ergibt im Grenzwert $\varepsilon \to 0$

$$\mathscr{L}^n(\varphi(V)) \leq \int_V |\det D\varphi|\ dx + \limsup_{\varepsilon \to 0} C_n \varepsilon M^{2n} \mathscr{L}^n(V) \ = \int_V |\det D\varphi|\ dx,$$

d.h. die Behauptung des Lemmas gilt für V. Sei nun $V_k \nearrow U$ eine monoton steigende Folge offener Mengen mit $V_k \Subset U$ und $\mathscr{L}^n(U \backslash V_k) \to 0$. Dann erhalten wir $0 \leq \chi_{V_k} \det D\varphi \nearrow \det D\varphi$ und aus dem Satz der monotonen Konvergenz folgt damit

$$\mathscr{L}^n(U) \ \leftarrow \ \mathscr{L}^n(V_k) \ \leq \ \int_{V_k} |\det D\varphi|\ dx \ \to \ \int_U |\det D\varphi|\ dx \quad \text{für } k \to \infty.$$

$\square$

Satz 4.12 (Transformationssatz). *Seien $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen, $F \in L^1(V)$ und sei $\varphi \in C^1(U,V)$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt $F \circ \varphi \in L^1(U)$ und*

$$\int_{\varphi(U)} F \, dx \;=\; \int_U (F \circ \varphi) |\det D\varphi| \, dx.$$

Beweis. Wir können o.B.d.A. $F \geq 0$ annehmen, ansonsten zerlegen wir $F = F_+ - F_-$ und zeigen die Aussage des Satzes separat für $F_\pm$. Da $F \in L^1(V)$ ist, gibt es eine Folge von einfachen Funktionen $F_k = \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{kj} \chi_{B_{kj}}$ mit $B_{kj} = \varphi(A_{kj}) \subset U$, A_{kj} messbar, mit $F_k \nearrow F$ f.ü.. Aus Lemma 4.11 und der Linearität des Integrals erhalten wir $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\int_V F_k dy = \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{kj} \mathscr{L}^n(\varphi(A_{kj})) \;\leq \sum_{k=1}^{N_k} \alpha_{kj} \int_{A_{kj}} |\det D\varphi| \, dx = \int_U (F_k \circ \varphi) |\det D\varphi| \, dx,$$

Wir definieren

$$G_k := (F_k \circ \varphi) |\det D\varphi|, \qquad\qquad G := (F \circ \varphi) |\det D\varphi|,$$

d.h. $G_k \nearrow G$ f.ü.. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz erhalten wir also

$$\int_V F \, dy = \lim_{k \to \infty} \int_V F_k \, dy \leq \lim_{k \to \infty} \int_U G_k \, dx = \int G \, dx. \tag{4.8}$$

Sei nun $\psi = \varphi^{-1} \in C^1(V, U)$. Da $|\det D\varphi| = |\det D\psi \circ \varphi|^{-1}$ erhalten wir

$$F_k = (G_k \circ \psi)|\det D\psi|, \qquad\qquad F = (G \circ \psi)|\det D\psi|.$$

Mit den gleichen Argumenten wir im Beweis von (4.8) erhalten wir

$$\int G\ dx \le \lim_{k\to\infty} \int G_k\ dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\varphi(U)} F_k\ dx = \int F\ dx. \tag{4.9}$$

Aus (4.8)–(4.9) erhalten wir die gewünschte Identität

$$\int (F \circ \varphi)|\det D\varphi| = \int G\ dx = \int_{\varphi(U)} F\ dx.$$

□

Für $n = 1$ mit $U = (a, b)$, $a < b$, und $V = \varphi(U)$ erhalten wir die Substitutionsregel.

Bemerkung 4.13 (Das zurückgezogene Maß). *Sei $\varphi : U \to V$ eine Abbildung. Für ein Maß μ auf V (signiert oder nicht signiert) definiert $(\varphi^*\mu)(A) := \mu(\varphi(A))$ ein Maß auf U. Dieses Maß heißt das zurückgezogene (pull-back) Maß von μ bezüglich φ. Mit dieser Definition erhalten wir sofort die Identität*

$$\int_{\varphi(U)} d\mu \ := \ \int_U d(\varphi^*\mu)$$

geschrieben werden. Aus dieser Perspektive sagt der Transformationssatz dann aus, dass

$$\varphi^*(\mathscr{L}^n) \ = \ |\det D\varphi| \mathscr{L}^n.$$

Der Transformationssatz lässt sich benutzen, um in Polarkoordinaten und sphärischen Koordinaten zu integrieren:

Lemma 4.14 (Polarkordinaten & sphärische Koordinaten).

(i) Sei $\Phi : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \backslash N$ *mit* $N := \{(x_1, 0) : x_1 \geq 0\}$ *gegeben durch* $\Phi(r,\varphi) = \big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big)$. *Dann gilt für* $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)\ dx_1 dx_2 \ = \ \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ r d\varphi dr.$$

(ii) Sei $\Phi :\ (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3 \backslash N$ *mit* $N := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$ *und* $\Phi(r,\theta,\varphi) := (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$. *Dann gilt für* $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f dx = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta\ d\varphi d\theta dr.$$

Beweis. *(i):* Man sieht leicht, dass Φ mit ein C^1-Diffeomorphismus ist und

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi. \end{pmatrix}, \qquad \det D\varphi(r,\theta) = r.$$

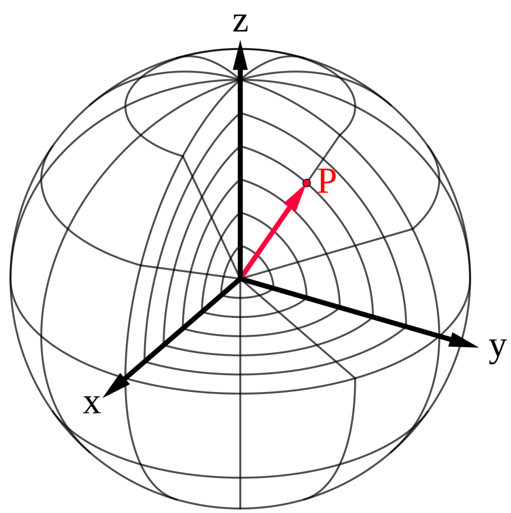

Abbildung 14: Sphärische Koordinaten. (Quelle: wikipedia)

(ii): Offensichtlich ist Φ ein C^1-Diffeomorphismus und

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}, \ \det D\varphi(r,\theta) = r^2\sin\theta.$$

$\square$

Wir berechnen das Integral über die Gausskurve:

Beispiel 4.15.

(i) Die Fläche der Kreisscheibe $B_R \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich nun leicht berechnen:

$$\mathscr{L}^2(B_1) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_R}(x_1) dx_1 = \int_0^R \Big(\int_0^{2\pi} r \; d\varphi \Big) dr = 2\pi r.$$

(ii) Das Volumen von $B_R \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\mathscr{L}^3(B_R) = \int_0^R \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \; d\varphi d\theta \; dr \; = \frac{2\pi R^3}{3} \Big(\int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta \Big) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

(iii) Das Integral der Gaussfunktion ist

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \; dx = \sqrt{\pi}.$$

Die erhält man durch die folgende Rechnung in Polarkoordinaten:

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \; dx \Big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \; dxdy \; = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \; dr = 2\pi \Big[\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big]_0^{\infty} = \pi.$$

Der Transformationssatz kann verallgemeinert werden für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zwischen Räumen verschiedener Dimension. Dies führt auf die Areaformel und Koareaformel. Auch der Satz von Fubini ist dann eine Konsequenz der Koareformel. Die Jacobiedeterminante gibt die lokale Volumenänderungen bei der Transformation durch einen Diffeomorphismus $f \in \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ an. Eine Jacobideterminante erhalten wir auch bei der Berechnung von Flächeninhalten: Falls $n = 2$, $m = 3$ und $f \in \operatorname{Lip}(A, \mathbb{R}^m)$, dann ist die

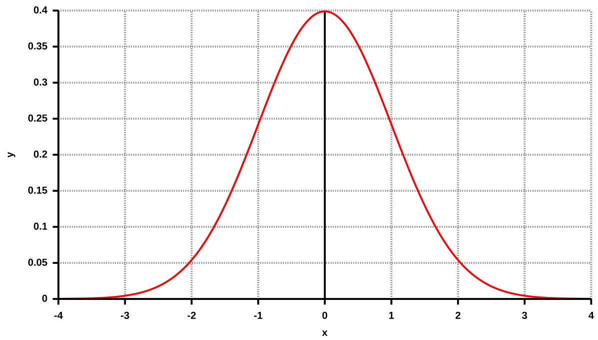

Abbildung 15: Die Gaußfunktion (Quelle: wikipedia)

Fläche $\mathscr{H}^2(f(A))$ gegeben durch:

$$\mathscr{H}^2(f(A)) \;=\; \int_A Df^t(x) \circ Df(x)\; d\mathscr{L}^2(x).$$

Allgemein motiviert dies die folgende Definition:

Definition 4.16 (Jacobi Determinante). *Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an $x \in \mathbb{R}^n$ ist die* *Jacobi Determinante* *gegeben durch*

$$Jf(x) \;:=\; \begin{cases} \sqrt{\det(Df(x)^t \circ Df(x))}, & \textit{falls } n \leq m, \\ \sqrt{\det(Df(x) \circ Df(x)^t)}, & \textit{falls } n > m, \end{cases}$$

wobei $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Jacobimatrix von f ist.

Sowohl bei der Areaformel als auch der Areaformel wird das Bild $f(A)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ in 'Niveaumengen' $f^{-1}(y) \cap A$ aufgeteilt und über diese integriert. Die Areaformel $(n \leq m)$ verallgemeinert den Transformationssatz auf Funktionen, welche nicht injektiv sein müssen und welche auch eine niedrigerdimensionale Fläche beschreiben können. Die Koareaformel $(n \geq m)$ ist eine als nichtlineare Verallgemeinerung des Satzes von Fubini verstehen. [**?**, p.112]:

Satz 4.17 (Areaformel und Koareaformel für Lipschitzfunktionen). *Sei* $f \in \operatorname{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *und sei* $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathscr{L}^n$*-messbar.*

(i) Falls $n \leq m$*, dann gilt*

$$\int_A Jf(x)\, d\mathscr{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}^0(A \cap f^{-1}(y))\, d\mathscr{H}^n(y) \qquad \textit{(Areaformel)}$$

(ii) Falls $n \geq m$*, dann gilt*

$$\int_A Jf(x)\, d\mathscr{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(y))\, d\mathscr{L}^m(y). \qquad \textit{(Koareaformel)}$$

Der Beweis ist nicht Teil der Vorlesung. Die Idee des Beweis besteht darin, die Aussage zuerst für die Linearisierung zu zeigen und dann eine Zerlegung der Eins zu nutzen (ähnlich wie beim Beweis des Transformationssatzes).

Die Areaformel sagt also aus, dass das $\mathscr{H}^n$–Maß der Menge $f(A) \subset \mathbb{R}^m$ berechnet werden kann als das Integral über die Jacobimatrix. Dabei wird die Multiplizität einberechnet, falls f nicht injektiv ist. Beachte, dass Lipschitzstetige Funktionen nach dem Satz von Rademacher fast überall differenzierbar sind [**?**, p. 96, Theorem 1]. Als Spezialfälle erhalten wir die Formeln für Flächeninhalte und Kurvenlängen:

- Falls $n = 1$ und falls $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ injektiv ist mit $\gamma = 0$ für $x \notin I \subset \mathbb{R}$, dann erhalten wir die Kurvenlänge von $f(\gamma)$:

$$\mathscr{H}^1(\gamma(I)) \;=\; \int_I |\gamma'(x)| \; d\mathscr{L}^1(x).$$

  Falls γ nicht injektiv ist, dann erhalten wir die Kurvenlänge mit Multiplizität.

- Falls $n \geq m$ und falls $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$ die Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf den $\mathbb{R}^m$ ist, dann erhalten wir

$$\mathscr{L}^n(A) \;=\; \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}^{n-m}(A \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^{n-m})) \; d\mathscr{L}^m(y),$$

  Dies ist der Satz von Fubini für konstante Integranden.

- Im Fall $m = 1$ und mit der Notation $E_t = \{x \in \Omega : f > t\}$ erhalten wir die Formel

$$\int_A |\nabla f(x)| \; dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} |\partial E_t|(\Omega) \; dt,$$

- Falls $f(x) = |x|$, dann gilt insbesondere $\nabla f = \frac{x}{|x|}$ und $Jf(x) = 1$ und daher

$$\mathscr{L}^n(A) \;=\; \int_0^\infty \mathscr{H}^{n-1}(A \cap \partial B_r) \; d\mathscr{L}^1(r).$$

Abbildung 16: Glättung eines Bildes durch lokale Mittelung der Funktionswerte

Dies entspricht Integration in Polarkoordinaten.

4.4 Faltungsoperator und Approximation durch glatte Funktionen

Mit der bisher entwickelten Integrationstheorie können wir den sogenannten Faltungsoperator einführen. Die grundlegende Idee ist, dass wir eine Funktion lokal mitteln und glätten wollen. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir dann

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon(x)} f(y)\, dy \;= \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon(0)} f(x-y)\, dy \;=\; \int f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\, dy,$$

wobei

$$\varphi_\varepsilon(x) \;:=\; \frac{1}{|B_\varepsilon|}\chi_{B_\varepsilon} \;=\; \frac{1}{|B_1|\varepsilon^n}\chi_{B_1}(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Mathematisch erwarten wir, dass die f_ε regulärer ist als f und das $f_\varepsilon \to f$ für $\varepsilon \to 0$ in einer geeigneten Norm. Allgemeiner definieren wir:

Definition 4.18 (Faltung). *Die Faltung* $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *von* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *ist*

$$(f * g)(x) := \int f(y)g(x-y)dy.$$

Eine Anwendung des Satzes von Fubini zeigt, dass die Faltung wohldefiniert ist und eine integrable Funktion definiert. Der Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit Addition und Faltung ist ein kommutativer Ring ohne Eins. Frage: Welche verallgemeinerte Funktion ersetzt die Eins?:

Proposition 4.19 (Faltung ist ein Ring). *Für* $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *gilt*

(i) $f * (g + \lambda h) = f * g + \lambda(f * h)$ *(Linearität)*

(ii) $f * g = g * f$. *(Kommutativität)*

(iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ *(Assoziativität)*

Beweis. *(i):* Folgt direkt aus der Definition.

(ii): Mit der Variablentransformation $z = x - y$ gilt

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(z)f(x-z)\ dz = (g * f)(x).$$

(iii): Mit dem Satz von Fubini und $w = y - z$, $v = x - z$ gilt

$$
\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \iint f(x-y)g(y-z)h(z)\ dydz \ = \iint f(x-z-w)g(w)h(z)\ dydw \\
&= \iint f(v-w)g(w)h(x-v)\ dydv\ = (f * (h * g))(x)
\end{aligned}
$$

und benutze (ii). □

man sieht direkt, dass $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$, $\|f*g\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1$ und $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_q$. Diese Abschätzung lässt sich wie folgt verallgemeinen. Das folgende Lemma zeigt auch, dass die Faltung für eine größere Klasse von Funktionen wohldefiniert ist:

Lemma 4.20 (Youngsche Ungleichung). *Es gelte Für $p, q, r \in [1, \infty]$ gelte*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ gilt dann $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Beweis von Lemma 4.20. Frage: Warum ist die Bedingung an pq, r richtig? Sei $F := |f|$, $G := |g|$. Dann gilt $|f * g| \leq F * G$ und es reicht die entsprechende Aussage für F und G zu zeigen. Mit Proposition 4.9 folgt, dass $F * G$ auch messbar ist. Für $\alpha, \beta \in [0, 1]$ (wobei

α, β später festgelegt werden) berechnen wir

$$\begin{aligned}
|(F * G)(x)| &\leq \int |F(x)||G(y-x)|dy \\
&= \int |F(y)|^{p(1-\alpha)}|G(y-x)|^{q(1-\beta)}|F(y)|^{p(\frac{1}{p}-1+\alpha)}|G(y-x)|^{q(\frac{1}{q}-1+\beta)}dy
\end{aligned}$$

Wir definieren $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1$, wobei $\frac{1}{p_1} = 1 - \alpha$, $\frac{1}{p_2} = 1 - \beta$ und $r = p_3$, d.h.

$$\alpha + \beta \;=\; 1 + \frac{1}{r}. \tag{4.10}$$

Anwendung der verallgemeinerten Hölderungleichung ergibt dann

$$\begin{aligned}
|(F * G)(x)| \leq \Big(\int |F(y)|^p dx \Big)^{1-\alpha} \Big(\int |G(y-x)|^q dy \Big)^{1-\beta} \\
\times \Big(\int |F(y)|^{rp(\frac{1}{p}-1+\alpha)}|G(y-x)|^{rq(\frac{1}{q}-1+\beta)}dy \Big)^{1/r}
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\int |(F * G)(x)|^r dx \\
&\quad \leq \|F\|_p^{(1-\alpha)pr}\|G\|_q^{(1-\beta)qr} \iint |F(y)|^{rp(\frac{1}{p}-1+\alpha)}|G(y-x)|^{rq(\frac{1}{q}-1+\beta)}dydx \\
&\quad = \|F\|_p^{(1-\alpha)pr}\|G\|_q^{(1-\beta)qr} \int |F(y)|^{rp(\frac{1}{p}-1+\alpha)}dy \int |G(x)|^{rq(\frac{1}{q}-1+\beta)}dx.
\end{aligned}$$

Wir fordern $rp(\frac{1}{p} - 1 + \alpha) = p$ und $(\frac{1}{q} - 1 + \beta) = q$. Daraus folgt $\alpha = \frac{1}{q}$, $\beta = \frac{1}{p}$ und insbesondere gilt auch (4.10). Wir erhalten

$$\int |(F * G)(x)|^r dx = \|F\|_p^{(1-\frac{1}{q})pr+p} \|G\|_q^{(1-\frac{1}{p})qr+q} = \|F\|_p^r \|G\|_q^r < \infty.$$

□

Als nächstes zeigen wir, dass Faltung und Ableitung vertauschen. In der Tat, formal gilt

$$\partial_i (f * \varphi)(x) = \partial_i \int f(y)\varphi(x-y)\; dy = \int f(y)\partial_i \varphi(x-y)\; dy = (f * \varphi)(x).$$

Lemma 4.21 (Faltung und Ableitung vertauschen). *$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p < \infty$ und sei $\varphi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $f * \varphi \in C^k$ und*

$$\partial^\alpha (f * \varphi) = f * (\partial^\alpha \varphi) \;\in\; C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \qquad\qquad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha| \le k$$

Insbesondere ist $f * \varphi$ glatt, falls φ glatt ist.

Beweis. Wir zeigen den Fall für $|\alpha| = 1$, d.h. $\partial^\alpha = \partial_i$, $1 \le i \le n$. Die allgemeine Aussage folgt aus vollständiger Induktion. Wir berechnen den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{t}\big((f * \varphi)(x + te_1) - (f * \varphi)(x)\big) = \int f(y)\frac{1}{t}\big(\varphi(x + te_1 - y) - \varphi(x)\big)\; dy.$$

Da $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert zu festem $x \in \mathbb{R}^n$ der Integrand punktweise gegen $f(y)\partial_i\varphi(y-x)$. Außerdem ist der Differenzenquotient punktweise gleichmäßig beschränkt. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt daher im Limes $t \to 0$,

$$\partial_1(f * \varphi)(x) = \int f(y)\partial_i\varphi(x-y)\ dy\ = (f * \partial_i\varphi)(x),$$

d.h. f ist differenzierbar. Aus der Young'schen Ungleichung erhalten wir $\partial_1(f*\varphi) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|\partial_1(f * \varphi)\|_p \le \|f\|_p\|\partial_i\varphi\|_1 < \infty$. $\square$

Die Faltung kann benutzt werden, um Funktionen zu approximieren:

Satz 4.22 (Faltungsapproximation). *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p < \infty$. Für $\varepsilon > 0$ sei*

$$\varphi_\varepsilon\ :=\ \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}) \qquad \textit{für ein } \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \textit{mit} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\ dx\ =\ 1.$$

Dann gilt $f * \varphi_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$f * \varphi_\varepsilon \to f \qquad \textit{in } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \textit{für } \varepsilon \to 0.$$

Beweis. Aus Lemma 4.20 folgt $f * \varphi_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Es bleibt $f_\varepsilon := f * \varphi_\varepsilon \to f$ in L^p zu zeigen. Wir nehmen zuerst an, dass die Konvergenz für $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ gilt. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\delta > 0$ wählen wir $F \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|F - f\|_p < \delta$ und setzen $F_\varepsilon := F * \varphi_\varepsilon$. Damit gilt

$F_\varepsilon \to F$ in L^p und $\|F_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \leq \|\zeta_\varepsilon\|_1 \|F - f\|_p \leq \delta$. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}
\limsup_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon - f\|_p &\leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \big(\|f_\varepsilon - F_\varepsilon\|_p + \|F_\varepsilon - F\|_p + \|F - f\|_p\big) \\
&\leq 2\delta + \lim_{\varepsilon\to 0} \|F_\varepsilon - F\|_p \leq 2\delta.
\end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ beliebig ist, folgt die Aussage. Für den Beweis können wir also $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ annehmen.

Der Fall $p = 1$: Wir nehmen zuerst $p = 1$ und außerdem $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ an. Da f gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $K := \operatorname{spt} f$ ist, gibt es zu $\delta > 0$ ein $r > 0$ mit $\|f(\cdot + h) - f\|_{C^0} < \frac{\delta}{2K}$, falls $|h| < r$. Damit gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{|h|<r} |f(x+h) - f(x)| \; dx < \delta. \tag{4.11}$$

Wir wählen δ, r, so dass (4.11) gilt. Außerdem gilt nach Konstruktion

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon \; dx \;=\; 1 \quad \forall \varepsilon > 0, \qquad \text{und} \qquad \int_{B^c_r(0)} \varphi_\varepsilon(y) \; dy \;\to\; 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Wir schreiben

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\varphi_\varepsilon(y) \; dy \\
&\leq \int_{B_r(x)} |f(x-y) - f(x)||\varphi_\varepsilon(y)| \; dy + \int_{B^c_r(x)} |f(x-y) - f(x)||\varphi_\varepsilon(y)| \; dy.
\end{aligned}$$

Für den ersten Term erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_r(x)} |f(x-y) - f(x)||\varphi_\varepsilon(y)| \; dy \;\leq \|\varphi\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{|y|<r} |f(x-y) - f(x)| \; dx \;\leq\; C\delta.$$

Für ε hinreichend klein gilt dann außerdem

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{B_r^c(x)} |f(x-y) - f(x)||\varphi_\varepsilon(y)| \; dydx \;\leq 2\|f\|_1 \|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(B_r^c)} \;\leq\; \delta.$$

Beide Abschätzungen zusammen ergeben $\|f_\varepsilon - f\|_1 \leq 2\delta$. Da δ beliebig gewählt werden kann erhalten wir $f_\varepsilon \to f$ in L^1 für $\varepsilon \to 0$.

Der Fall $1 < p < \infty$*:* Mit der Youngschen Ungleichung gilt $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1 < C$ für eine Konstante $C < \infty$, welche nicht von ε abhanegt. Damit erhalten wir für $1 < p < \infty$,

$$\|f_\varepsilon - f\|_p^p \leq \|f_\varepsilon - f\|_\infty^{p-1} \|f_\varepsilon - f\|_1 \leq C\|f_\varepsilon - f\|_1 \to 0.$$

□

Korollar 4.23. *Sei* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$*. Dann gibt es eine Folge von* $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $f_k \to f$ *in* $L^p(\mathbb{R}^n)$*.*

Beweis. Folgt aus Satz 4.22. □