Lineare Algebra 2 — Lösung zu Übungsblatt 4

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: Do 28.05.2020 um 9:15 Uhr

16. Aufgabe: *(4+2 Punkte, Ähnlichkeit von Matrizen)* Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) In diesem Aufgabenteil soll Bemerkung 4.7 aus der Vorlesung bewiesen werden. Sei dazu L ein Körper, der K als Teilkörper enthält. Man zeige:

(i) Sind $f, g \in K[t]$, so gilt $\mathrm{ggT}_{L[t]}(f, g) = \mathrm{ggT}_{K[t]}(f, g)$.

(ii) Sind $A, B \in M_{n,n}(K)$, so sind äquivalent:

(1) $A \approx B$ in $M_{n,n}(K)$.

(2) $A \approx B$ in $M_{n,n}(L)$.

(b) Sei $A \in M_{n,n}(K)$. Dann ist die Matrix A ähnlich zu ihrer Transponierten A^t.
Hinweis: Man verwende das Kriterium aus dem Satz von Frobenius.

Lösung:

(a) **Zu (i)**. Setze $d_K := \mathrm{ggT}_{K[t]}(f, g)$ und $d_L := \mathrm{ggT}_{L[t]}(f, g)$ (man beachte, dass hiermit die eindeutig bestimmten *normierten* ggT's gemeint sind). Da d_K gemeinsamer Teiler von f und g in $K[t]$ ist, ist d_K auch in $L[t]$ gemeinsamer Teiler von f und g, also gilt

$$d_K \mid d_L \text{ in } L[t]. \tag{$*$}$$

Andererseits hat man wegen Bem. 2.5, da $K[t]$ und $L[t]$ Hauptidealringe sind

$$d_K \in K[t]f + K[t]g \subseteq L[t]f + L[t]g = L[t] \cdot d_L,$$

d.h. $d_L \mid d_K$ in $L[t]$. Zusammen mit ($*$) folgt, dass d_K und d_L assoziiert sind, und weil beide normiert sind, folgt $d_K = d_L$.
Wir merken an, dass sich dieser Beweis direkt auf die Aussage

$$\mathrm{ggT}_{L[t]}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{ggT}_{K[t]}(f_1, \ldots, f_k)$$

für endlich viele $f_1, \ldots, f_k \in K[t]$ ausdehnt.

Zu (ii). Für $\ell = 1, \ldots, n$ bezeichne $d_\ell^K(A) \in K[t]$ bzw. $d_\ell^L(A) \in L[t]$ den ℓ-ten Determinantenteiler von A aufgefasst als Matrix über K bzw. über L, und entsprechend für B. Wir zeigen $d_\ell^L(A) = d_\ell^K(A)$, dann folgt die gewünschte Äquivalenz direkt aus dem Invariantenteilersatz 4.5.
Schreiben wir $f_1, \ldots, f_k \in K[t]$ für die Minoren ℓ-ter Stufe von $P_A \in M_n(K[t])$, so gilt

$$d_\ell^L(A) = \mathrm{ggT}_{L[t]}(f_1, \ldots, f_k) \overset{(a)}{=} \mathrm{ggT}_{K[t]}(f_1, \ldots, f_k) = d_\ell^K(A),$$

womit die Behauptung folgt.

(b) Zunächst gilt

$$P_{A^t} = tE_n - A^t = t(E_n)^t - A^t = (tE_n - A)^t = (P_A)^t.$$

Nach dem Satz von Frobenius 4.2 genügt es zu zeigen, dass P_A und $(P_A)^t$ äquivalent sind. Dies ist nach Satz 3.19 z.B. gleichbedeutend damit, dass sie dieselben Fittingideale besitzen. Bezeichnen wir für ein gegebenes $\ell \in \{1, \dots, n\}$ die $\ell \times \ell$-Untermatrizen von P_A mit $B_1, \dots, B_k$, so ist klar dass die $\ell \times \ell$-Untermatrizen von $(P_A)^t$ durch $B_1^t, \dots, B_k^t$ gegeben sind. Da die Determinante invariant unter Transponieren ist, erhalten wir

$$\mathrm{Fit}_\ell(P_A) = (\det(B_i) \mid i = 1, \dots, k) = (\det(B_i^t) \mid i = 1, \dots, k) = \mathrm{Fit}_\ell((P_A)^t).$$

Alternativ macht man sich leicht klar, dass sich P_A und $(P_A)^t$ auf dieselbe Elementarteilergestalt bringen lassen. Hat man nämlich P_A mit dem Gauß'schen Verfahren 3.8 diagonalisiert, so wende man dieselbe Prozedur auf $(P_A)^t$ an, wobei man nun anstelle jeder Zeilenoperation die entsprechende Spaltenoperation durchführe, und umgekehrt. Damit erhält man, dass P_A und $(P_A)^t$ dieselben Elementarteiler besitzen und daher nach Satz 3.19 äquivalent sind.
Als Matrixmultiplikation formuliert: Seien $S, T \in \mathrm{GL}_n(K[t])$, sodass die Matrix

$$E := S \cdot P_A \cdot T$$

Elementarteilergestalt hat. Dann folgt

$$E = E^t = (S \cdot P_A \cdot T)^t = T^t \cdot (P_A)^t \cdot S^t.$$

17. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Invarianten- und Determinantenteiler)*

(a) Man berechne die Invarianten- und Determinantenteiler der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -11 & -11 & -32 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Q}).$$

(b) Man untersuche mit Hilfe des Invariantenteilersatzes, ob die folgenden Matrizen in $M_{3,3}(\mathbb{Q})$ ähnlich zueinander sind:

$$B = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ -8 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 12 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf die charakteristische Matrix $P_A := tE_4 - A$ an. Die Invariantenteiler sind dann die eindeutigen, normierten Polynome auf der Diagonalen.

$$P_A = \begin{pmatrix} t-10 & 11 & 11 & 32 \\ 1 & t & 2 & -4 \\ -1 & 1 & t-1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & t+6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & t-1 & 4 \\ 1 & t & 2 & -4 \\ t-10 & 11 & 11 & 32 \\ -2 & 2 & 2 & t+6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & t-1 & 4 \\ 0 & t+1 & t+1 & 0 \\ 0 & t+1 & t^2-11t+21 & 4t-8 \\ 0 & 0 & -2t+4 & t-2 \end{pmatrix} \mid \cdot (-1) \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t+1 & t+1 & 0 \\ 0 & t+1 & t^2-11t+21 & 4t-8 \\ 0 & 0 & -2t+4 & t-2 \end{pmatrix} \sim \dots$$

Nach einigen weiteren Schritten folgt schließlich

$$P_A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^3-3t^2+4 \end{pmatrix}.$$

(Ein ausführliches Beispiel zur vollständigen Anwendung des Gauß-Algorithmus findet sich zum Beispiel in der Lösung zu Aufgabe 15 auf Blatt 4)

Die Determinantenteiler ergeben sich gemäß Folgerung 4.4 aus dem Produkt der Invariantenteiler, wir erhalten demnach:

$$\begin{aligned} c_1(A) &= 1 & d_1(A) &= 1 \\ c_2(A) &= 1 & d_2(A) &= 1 \\ c_3(A) &= t-2 & d_3(A) &= t-2 \\ c_4(A) &= t^3-3t^2+4 = (t+1)(t-2)^2 & d_4(A) &= (t+1)(t-2)^3. \end{aligned}$$

(b) Nach dem Invariantenteilersatz gilt die Äquivalenz

$$B \approx C \iff d_l(B) = d_l(C) \text{ für alle } l \in \{1,2,3\}.$$

Sind B und C ähnlich haben sie also insbesondere die gleichen charakteristischen Polynome, denn

$$\chi_B^{\mathrm{char}}(t) = d_3(B) = d_3(A) = \chi_B^{\mathrm{char}}(t).$$

Diese Bedingung ist aber nicht erfüllt, denn wir erhalten

$$\begin{aligned} \chi_B^{\mathrm{char}}(t) &= \det(P_B) = t^3-3t^2+3t-1, \\ \chi_C^{\mathrm{char}}(t) &= \det(P_C) = t^3-2t^2-t+2. \end{aligned}$$

Somit sind B und C nicht ähnlich.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.