Namen: ______________________

____

Aufgabe	3.1	3.2	3.3	Z3.1	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 3

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 3.1 (Regularität von Maßen) **5 Punkte**

Sei X ein metrischer Raum und sei $\mu\colon \mathscr{B}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ ein σ–endliches Maß. Zeigen Sie, dass μ ein reguläres Maß ist, das heißt, dass für alle $A \in \mathscr{B}(X)$ gilt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\ K \text{ abgeschlossen}\} = \inf\{\mu(U) : A \subset U,\ U \text{ offen}\}. \tag{1.1}$$

Hinweis: Der Fall für endliche Maße ist im Skript unter Proposition 2.19 behandelt und Sie dürfen die Aussage für endliche Maße auch ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 3.2 (Hausdorff–Dimension) **5 Punkte**

Zu $s \geq 0$ bezeichne $\mathscr{H}^s$ das Hausdorff–Maß aus Aufgabe 2.2. Zu $A \subset \mathbb{R}$ definieren wir die Hausdorff–Dimension von A durch

$$\dim(A) \coloneqq \inf\{s \geq 0 : \mathscr{H}^s(A) = 0\}. \tag{2.1}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{H}^s = 0$ für $s > 1$.

b) Sei $A \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls ein $s^* \geq 0$ existiert, so dass $\mathscr{H}^{s^*}(A) < \infty$, dann ist $\mathscr{H}^s(A) = 0$ für alle $s > s^*$.

c) Sei $A \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls ein $s^* > 0$ existiert, so dass $\mathscr{H}^{s^*}(A) > 0$, dann ist $\mathscr{H}^s(A) = \infty$ für alle $s < s^*$.

d) Sei $A \subset \mathbb{R}$ höchstens abzählbar. Bestimmen Sie $\dim(A)$.

e) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ nicht–leer und offen. Bestimmen Sie $\dim(\Omega)$.

Aufgabe 3.3 (Lebesgue–, aber nicht Borel–messbare Menge) **5 Punkte**

Sei $f_k\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definiert durch

$$f_0(x) \coloneqq x, \qquad f_{k+1}(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2} f_k(3x) & \text{für alle } x \in [0, \frac{1}{3}), \\ \frac{1}{2} & \text{für alle } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{1}{2}(1 + f_k(3x-2)) & \text{für alle } x \in (\frac{2}{3}, 1]. \end{cases} \tag{3.1}$$

a) Zeigen Sie mittels Fallunterscheidung

$$\max_{x\in[0,1]} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f_{k-1}(x)| \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

b) Zeigen Sie, dass die Folge f_k gleichmäßig gegen eine stetige und monoton steigende Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ konvergiert.

Wir definieren nun $g\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ durch

$$g(y) \coloneqq \inf\{x \in [0,1] : f(x) = y\} \qquad \text{für alle } y \in [0,1], \tag{3.3}$$

wobei $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ den Grenzwert aus b) bezeichnet.

Abgabe bis spätestens 26.11.2020, 18:00 Uhr in Moodle.

c) Zeigen Sie, dass $f \circ g = \mathrm{id}$ und folgern Sie hieraus, dass g injektiv ist.

d) Zeigen Sie, dass g eine Borel–messbare Funktion ist, und dass $g([0,1]) \subset \mathcal{C}$, wobei $\mathcal{C}$ die Cantor–menge aus Lemma 2.20 bezeichnet.

e) Sei $V \subset [0,1]$ eine nicht Lebesgue–messbare Menge. Zeigen Sie, dass $g(V)$ Lebesgue–, aber nicht Borel–messbar ist.

Zusatzufgabe 3.1 (Messbarkeitskriterium für Erzeugendensystem) **3 Punkte**

Seien $(X, \mathscr{E})$ und $(Y, \mathscr{F})$ zwei messbare Räume und sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$ mit $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{F}$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ genau dann $(\mathscr{E}, \mathscr{F})$ messbar ist, wenn $f^{-1}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{E}$.

Abgabe bis spätestens 26.11.2020, 18:00 Uhr in Moodle.