Aufgabe 1

a) Wir zeigen p gerade $\implies p^3$ gerade und p ungerade $\implies p^3$ ungerade. Daraus folgt dann per Kontraposition p^3 gerade $\implies p$ gerade und zusammengenommen p gerade $\iff p^3$ gerade.

Beweis. p gerade $\implies p = 2k$ mit $k \in \mathbb{N} \implies p^3 = 8k^3$ und das ist auf jeden Fall gerade.
p ungerade $\implies p = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N} \implies p^3 = (2k+1)^3 = 8k^3 + 12k^2 + 12k + 1 = 2l + 1$ mit $l \in \mathbb{N}$ und dass ist sicher ungerade. $\square$

b) *Beweis durch Widerspruch.* Annahme $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$. O.B.d.A. ist $\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden p und q. Umformen der Gleichung führt zu $p^3 = 2q^3 \implies p^3$ gerade $\implies p$ gerade $\implies p = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Das benutzen wir nun wieder in der oberen Gleichung. $2q^3 = p^3 = (2k)^3 = 8k^3 \implies q^3 = 4k^3 \implies q^3$ gerade $\implies q$ gerade. p und q sind nach Voraussetzung teilerfremd, nun aber beide gerade.$\lightning$ $\square$

Aufgabe 2

(a)

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) = 1+x_1\cdot 1\cdots 1+1\cdot x_2\cdot 1\cdots 1+\cdots+1\cdots x_k\cdots 1+1\cdots x_n+\cdots = 1+\sum_{k=1}^{n} x_k+\cdots \geq 1+\sum_{k=1}^{n} x_k$$

(b)

$$\begin{aligned}
x &\leq y && |\cdot x \\
x\cdot x &\leq y\cdot x && |+xy \\
x^2+xy &\leq 2xy && \\
x(x+y) &\leq 2xy && |\cdot(x+y)^{-1} \\
x &\leq \frac{2xy}{x+y} && \\
x^2 &\leq \left(\frac{2xy}{x+y}\right)^2 && (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq (x-y)^2 && \\
0 &\leq x^2-2xy+y^2 && |+4xy \\
4xy &\leq x^2+2xy+y^2 && |\cdot xy \\
4x^2y^2 &\leq xy(x^2+2xy+y^2) && \\
(2xy)^2 &\leq xy(x+y)^2 && |\cdot(x+y)^{-2} \\
\left(\frac{2xy}{x+y}\right)^2 &\leq xy && (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &\leq (x-y)^2 \\
0 &\leq x^2 - 2xy + y^2 && \mid +4xy \\
4xy &\leq x^2 + 2xy + y^2 && \mid \cdot \frac{1}{4} \\
xy &\leq \frac{(x+y)^2}{4} \\
xy &\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 && (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &\leq y && \mid +y \\
x+y &\leq 2y && \mid \cdot \frac{1}{2} \\
\frac{x+y}{2} &\leq y \\
\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 &\leq y^2 && (4)
\end{aligned}$$

Aus $(1), (2), (3)$ und (4) folgt die Aussage.

(c) *Beweis.*
Induktionsanfang: $n = 2$:

$$\prod_{k=1}^{2-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 = \frac{4}{2} = \frac{2^2}{2!}$$

Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $2 \leq n \in \mathbb{N}$ gelte

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$$

Induktionsschluss: $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{n+1-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \\
=\ &\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
\overset{I.A.}{=}\ &\frac{n^n}{n!} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
=\ &\frac{1}{n!}\left(n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n \\
=\ &\frac{(n+1)^n}{n!} \\
=\ &\frac{(n+1)^{n+1}}{n!(n+1)} \\
=\ &\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

□

(d) *Beweis.*
Induktionsanfang: $n = 4$:

$$2^4 = 16 < 24 = 4!$$

Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n < n!$
Induktionsschluss: $n \to n+1$: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{I.A.}{<} 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!$ □

Aufgabe 3

(a) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ folgt aus der Definition: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon$.
Z.Z.: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon \implies \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n > 0$

Beweis. Wir zeigen die Kontraposition: $\neg(\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n > 0) \implies \neg(\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon)$
$\forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : a_n < 0 \implies \exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : |a_n - a| > \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : &a_n < 0 \\
&- a_n > 0 \\
&a - a_n > a \\
&|a - a_n| > a \\
\implies \exists \varepsilon > 0 : \forall N \in \mathbb{N} : \exists n \geq N : &|a_n - a| > \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 4