1.2. Der Funktionenraum $C[a,b]$

Definition (Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$)

Es sei D ein beschränktes, abgeschlossenes Interval $I = [a,b]$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) stetig.

Dann $\|f\|_\infty := \max\{ |f(x)| \mid x \in [a,b] \}$

(maximum $\exists$ wegen stetigkeit von Absolutbetrag und weil $[a,b]$ beschr. und abgeschl.)

Satz 1.2.1. ($\|\cdot\|_\infty$ vs glm Konvergenz)

Es sei $D = [a,b]$ (beschr. & abgeschl) und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

(i) $(f_n)_n$ konvergiert glm gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$\iff \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0, \ n \to \infty$

(ii) <u>Cauchy-Kriterium</u>

$(f_n)_n$ konvergiert glm auf $[a,b]$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n, m \geq N_0$ gilt $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

Beweis (i) "$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d.

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [a,b]$ und $n \geq N$

$\Rightarrow \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

"$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon > 0$, Wegen $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow \begin{matrix}\forall n \geq N \\ \forall x \in [a,b]\end{matrix} \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$

$= \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow$ glm konvergenz

(ii) "$\Rightarrow$" $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$

d.h. $\exists f : [a,b] \to \mathbb{R}$ s.d. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ glm

Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall n \geq N_0$ und $\forall x \in [a,b]$.

Damit gilt $\forall n, m \geq N_0$ und $\forall x \in [a,b]$

$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|$

$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \underbrace{\max\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)|}_{= \|f_n - f_m\|_\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_0$

"$\Leftarrow$" Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ s.d.

$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N_0$

$\forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow (f_n(x))_n$ konvergiert

$\Rightarrow$ Definiere $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [a,b]$

Dann $\forall n \geq N_0$ $\forall x \in [a,b]$ $|f_n(x) - f(x)| =$

$= \lim\limits_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (f_n)_n$

konvergiert glm gegen f q.e.d.

Bemerkung

$\|\cdot\|_\infty$ erfüllt s.g. **Normeneigenschaften**

(N1) $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, $x \in [a,b]$

Definitheit

(N2) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Homogenität

(N3) $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Dreieckungleichung

folgen direkt aus Eigenschaften des absolut Betrags

Definition: **Der Funktionenraum $C[a,b]$**

definiert durch

$$C[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$$

mit $\|f\|_\infty$ Maximumnorm

ist eine normierte Vektorraum

Satz 1.2.2. $\boxed{\text{Vollständigkeit}}$

Der Raum $C[a,b]$ ist vollständig bzgl. gleichmäßigen Konvergenz, d.h. jede Cauchy-Folge von Funktionen aus $C[a,b]$ besitzt einen Limes in $C[a,b]$

Beweis R.R.