Aufgabe 1 (Galoiskohomologie). **(4 Punkte)**
Sei $K := \mathbb{Q}_3(\zeta_{12})$ für eine primitive zwölfte Einheitswurzel ζ_{12} und K^{nr} die maximale unverzweigte Erweiterung von K. Weiter sei $G := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K)$ und $\mu_8 \subseteq K^{\mathrm{nr}}$ die Gruppe der achten Einheitswurzeln. Wir betrachten μ_8 als G-Modul mit der von $(K^{\mathrm{nr}})^\times$ eingeschränkten G-Wirkung. Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus $\mathrm{H}^1(G,\mu_8) \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ existiert.

Aufgrund der Unverzweigtheit gilt $\mathrm{Gal}(K^{nr}/K) = \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$ wenn k den Restklassenkörper von K bezeichnet.
Es gilt $\mathrm{char}(k) = 3 \Rightarrow (\mathrm{char}(k), 8) = 1$.

$\mathbb{Q}_3(\zeta_4)/\mathbb{Q}_3$ unverzweigt $\Rightarrow$ korrespondierende Erweiterung $\ell/\mathbb{F}_3$ mit $[\ell:\mathbb{F}_3] = [\mathbb{Q}_3(\zeta_4):\mathbb{Q}_3] = 2 \Rightarrow \ell = \mathbb{F}_9$.
$\mathbb{Q}_3(\zeta_4) \subset \mathbb{Q}_3(\zeta_{12}) \Rightarrow \ell \subset k \Rightarrow \mathbb{F}_9 \subset k \Rightarrow \underline{\zeta_8 \in k}$ für eine primitive EW ζ_8

$$\Rightarrow H^1(G,\mu_8) = H^1(\mathrm{Gal}(k^{sep}/k), \mu_8) = H^1(G_k, \mu_8) \underset{\text{Lemma 8.2}}{\cong} k^*/(k^*)^8$$

Da k^* als Einheitengruppe eines endlichen Körpers zyklisch ist, folgt

$$k^*/(k^*)^8 \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

$\square$

Aufgabe 2 (Zwischenkörper und Normuntergruppen). **(5 Punkte)**
Seien $K = \mathbb{Q}_3$ und $M = \mathbb{Q}_3(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(a) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung M/K. Welche Erweiterungen sind un-, rein, zahm, und wild verzweigt?

Die Erweiterung ist galoissch als Zerfällungskörper der Polynomfamilie $(X^2-2,\ X^2-3)$. Nach Alg 1 gilt dann

$$G = \mathrm{Gal}(M/K) = \left\{ id,\ \sigma_1 = \begin{smallmatrix}\sqrt{2}\mapsto -\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\mapsto\sqrt{3}\end{smallmatrix},\ \sigma_2 = \begin{smallmatrix}\sqrt{2}\mapsto \sqrt{2}\\ \sqrt{3}\mapsto -\sqrt{3}\end{smallmatrix},\ \sigma_1\sigma_2 \right\}$$

Die Untergruppen sind gegeben durch $\{id,\sigma_1\}$, $\{id,\sigma_2\}$, $\{id, \sigma_1\sigma_2\}$.

$$M^{\langle\sigma_1\rangle} = K(\sqrt{3}),\quad M^{\langle\sigma_2\rangle} = K(\sqrt{2}),\quad M^{\langle\sigma_1\sigma_2\rangle} = K(\sqrt{6}).$$

Korollar 8.104 AZT 1: $u \in U_K \Rightarrow K(\sqrt{u})$ unverzweigt

Es gilt $|2|_3 = 1$, $|3|_3 = \frac{1}{3}$, $|6|_3 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow K(\sqrt{2})$ unverzweigt

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K : |x|_3 \le 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_3 : v_3(x) \ge 0\}$$

$$\mathfrak{p}_K = \{x \in K : |x|_3 < 1\} = \{x \in \mathbb{Q}_3 : v_3(x) > 0\}$$

Dieses Ideal wird von 3 erzeugt, also ist 3 eine Uniformisierende. Wegen $(2,3)=1$ ist nach Lemma 8.113 die Erweiterung $K(\sqrt{3})$ rein zahm verzweigt von Grad 2

Nach Lemma 8.114 ist dann $K(\sqrt{2},\sqrt{3})$ als Komposition einer zahm verzweigten mit einer unverzweigten Erweiterung zahm verzweigt. Insbesondere sind alle Teilerweiterungen und damit auch $K(\sqrt{6})$ zahm verzweigt.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}_3(\sqrt{2},\sqrt{3}) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}_3(\sqrt{2}) \arrow[dr, dash, "e=1"'] & \mathbb{Q}_3(\sqrt{6}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}_3(\sqrt{3}) \arrow[dl, dash, "e=2"] \\
 & \mathbb{Q}_3 &
\end{tikzcd}$$

Wir verwenden Satz 8.115 aus AZT 7:

Da es keine echte Zwischenerweiterung $K(\sqrt{6})/L/K$ gibt, muss $K(\sqrt{6})$ entweder von der Form $K(e\sqrt{\pi})$, also in diesem Fall $K(2\sqrt{3})$ sein oder unverzweigt sein.

Da aber $K(2\sqrt{3}) \neq K(\sqrt{6})$ ist also $K(\sqrt{6})$ auch unverzweigt.

(b) Bestimmen Sie für jeden Zwischenkörper L/K von M/K die Untergruppe $N_{L/K}(L^\times)$ von $K^\times$.

~~$N_{L/K}(L^\times) = K^\times$ nach 3b~~

Es gilt nach Homomorphiesatz $N_{L/K}(L^\times) = L^\times / \ker(N_{L/K})$.

Alle Galoisgruppen der echten Teilerweiterungen sind zyklisch

Nach Hilberts Satz 90 ist $\ker(N_{L/K}) = \{ \frac{x}{\sigma(x)} \mid x \in L^\times \}$ für einen Erzeuger σ der Galoisgruppe $Gal(L/K)$

$$L^\times = \mathbb{Z} \times \mathcal{O}_L^\times, \qquad K^\times = \mathbb{Z} \times \mathcal{O}_K^\times$$

Es gilt $|\sigma(x)| = |x|$ nach AZT 7

$$\Rightarrow \left| \frac{x}{\sigma(x)} \right|_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \ker(N_{L/K}) \subset \mathcal{O}_L^\times$$

Daher genügt es ~~zu~~ zunächst $\tilde{N}_{L/K} : \mathcal{O}_L^\times \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times$ zu betrachten.

Ist L/K unverzweigt, so gilt $\mathcal{O}_L^\times / \ker(\tilde{N}_{L/K}) \simeq \mathcal{O}_K^\times$.

$$L^\times / \ker(N_{L/K}) \cong \frac{\mathbb{Z} \times \mathcal{O}_L^\times}{\mathbb{Z} \times \ker(\tilde{N}_{L/K})} \cong \mathbb{Z} \times \mathcal{O}_L^\times / \ker(\tilde{N}_{L/K}) \cong \mathbb{Z} \times \mathcal{O}_K^\times$$

An echten Teilerweiterungen bleibt noch $L = K(\sqrt{3})$.

$$\tilde{N}_{L/K} : \mathcal{O}_L^\times \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times$$
$$x \longmapsto x \cdot \sigma(x)$$

$$a + \sqrt{3}b \longmapsto (a + \sqrt{3}b)(a - \sqrt{3}b) = a^2 - 3b^2$$

Nach Satz 8.777 ~~ist~~ aber $\sqrt{3}$ eine Uniformisierende.

Daher erzeugt $\sqrt{3}$ das Maximalideal $P_L \subset O_L$. Daher ist $b=0$ $\Rightarrow$ $\tilde{N}_{L/K}: O_L^\times \longrightarrow O_K^\times$

$a \longmapsto a^2$.

$$\Rightarrow N_{L/K}(L^\times) \cong \mathbb{Z} \times \tilde{N}_{L/K}(O_L^\times) \cong \mathbb{Z} \times (O_L^\times)^2$$

Aufgabe 3 (Brauergruppe endlicher Körper). **(3 Punkte)**

Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie:

(a) Die Brauergruppe $\mathrm{Br}(K)$ ist trivial.

Es gilt $\mathrm{Br}(K) = \bigcup_{\substack{K \subset E \subset K^{sep} \\ E/K \text{ endl. gal.}}} \mathrm{Br}(E/K)$

$\mathrm{Br}(E/K) = H^2(G, E^\times)$ $\quad G := \mathrm{Gal}(E/K)$

Da G endlich zyklisch und E endlich ist, gilt $h(G,E) = 1$.

$$\Rightarrow |\hat{H}^1(G, E^\times)| = |\hat{H}^0(G, E^\times)|$$

Da G zyklisch ist, folgt $|H^2(G, E^\times)| = |H^1(G, E^\times)|$

Wegen Hilbert Satz 90 ist aber $H^1(G, E^\times) = 0$

G zyklisch $\Rightarrow \hat{H}^0(G, E^\times) = 0$

$$\Rightarrow H^2(G, E^\times) = 0 \Rightarrow \mathrm{Br}(E/K) = 0 \Rightarrow \mathrm{Br}(K) = 0$$

(b) Für jede endliche Körpererweiterung L/K mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ ist $\hat{\mathrm{H}}^0(G, L^\times) = 0$ und die Normabbildung $\mathrm{N}_{L/K}: L^\times \to K^\times$ ist surjektiv.

Wir haben in der a) bereits gezeigt, dass für endliche zyklische G und endliches L $\hat{H}^0(G, L^\times) = 0$ gilt.

Es ist aber $0 = \hat{H}^0(G, L^\times) = K^\times / N_{L/K}(L^\times) \Rightarrow N_{L/K}(L^\times) = K^\times$ $\square$

Aufgabe 4 (Das Galois-Symbol). **(6 Punkte)**

Sei K ein Körper, K^{sep} ein separabler Abschluss und $G_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ die absolute Galoisgruppe. Ferner bezeichne $\mu_n \subset K^{\mathrm{sep}}$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Nach Vorlesung existiert ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\delta\colon K^\times \to \mathrm{H}^1(G_K, \mu_n)$ mit Kern $(K^\times)^n$. Zeigen Sie:

(a) Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd} K^\times \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\text{Inkl.}"'] & \mathrm{H}^1(G_K, \mu_n) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ L^\times \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1(G_L, \mu_n) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L^\times \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{N}_{L/K}"'] & \mathrm{H}^1(G_L, \mu_n) \arrow[d, "\mathrm{cor}"] \\ K^\times \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1(G_K, \mu_n) \end{tikzcd}$$

kommutieren. *Hinweis:* Betrachten Sie die exakte Folge $1 \to \mu_n \to (K^{\mathrm{sep}})^\times \xrightarrow{(-)^n} (K^{\mathrm{sep}})^\times \to 1$.

$$\begin{tikzcd} K^\times \arrow[r] \arrow[d] & H^1(G_K, K^\times) \arrow[d, "res"] \\ L^\times \arrow[r] & H^1(G_L, L^\times) \end{tikzcd}$$

$$1 \to \mu_n \to (K^{sep})^\times \xrightarrow{(-)^n} (K^{sep})^\times \xrightarrow{\delta} H^1(G_K, \mu_n) \to H^1(G_K, K$$

$$\begin{tikzcd} H^i(G, A) \arrow[r] \arrow[d, "H^i(f)"'] & H^i(H, A) \arrow[d, "H^i(f)"] \\ H^i(G, B) \arrow[r] & H^i(H, B) \end{tikzcd}$$