Lineare Algebra 2 — Lösung zu Übungsblatt 12

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Keine Abgabe!

---

44. Aufgabe: *(Beweise/Widerlege)* Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) Jeder Körper ist ein Hauptidealring.

(b) Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\overline{x} \mapsto \overline{4x}$ ist ein $\mathbb{Z}$-Modulisomorphismus, aber kein Isomorphismus von Ringen.

(c) Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Ist $r \otimes m = 0$ in $R \otimes_R M$ mit $r \in R$, $m \in M$, so gilt $r = 0$ oder $m = 0$.

(d) Seien R ein nullteilerfreier Ring und M, N zwei R-Moduln. Sei weiterhin $\varphi\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann gilt $\varphi(T(M)) \subseteq T(N)$.

Lösung:

(a) Wahr: Ist K ein Körper, so sind nach Bemerkung 1.17 (0) und $K = (1)$ die einzigen Ideale in K. Da diese Hauptideale sind und K als Körper insbesondere nullteilerfrei ist, ist K ein Hauptidealring.

(b) Wahr: Wir zeigen zunächst, dass φ wohldefinieret ist: Ist $x - y \in 5\mathbb{Z}$, so ist $4(x-y) \in 5\mathbb{Z}$, da $5\mathbb{Z}$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$ ist. φ ist ein $\mathbb{Z}$-Modulisomorphismus, denn: Für $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}$ gilt $\varphi(\overline{ax+y}) = \overline{4(ax+y)} = a(\overline{4x}) + \overline{4y} = a\varphi(\overline{x}) + \varphi(\overline{y})$. Da $\varphi(\varphi(\overline{x})) = \overline{4 \cdot 4 \cdot x} = \overline{16x} = \overline{x}$ ist, ist φ selbstinvers und damit ein $\mathbb{Z}$-Modulisomorphismus.
Wegen $\varphi(\overline{1}) = \overline{4} \neq \overline{1}$ ist φ kein Isomorphismus von Ringen.

(c) Falsch: Sei $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $r = 2, m = \overline{1}$. Dann ist $2 \otimes \overline{1} = 1 \otimes \overline{2} = 1 \otimes \overline{0} = 0$.

(d) Wahr: Sei $m \in T(M)$. Dann existiert ein $s \in R \setminus \{0\}$, sodass $sm = 0$. Da nun $s\varphi(m) = \varphi(sm) = \varphi(0) = 0$ ist, ist $\varphi(m) \in T(N)$. Die zeigt $\varphi(T(M)) \subseteq T(N)$.

45. Aufgabe: *(Normalformen)* Sei $A \in M_{13,13}(\mathbb{Q})$ eine Matrix mit folgenden Invariantenteilern:

$$c_1(A) = \ldots = c_{10}(A) = 1,\ c_{11}(A) = t,\ c_{12}(A) = t^5 + 2t^3 + t,\ c_{13}(A) = t^7 + 3t^5 + 3t^3 + t.$$

(a) Man bestimme die Determinantenteiler und die Frobenius-Normalform von A.

(b) Man bestimme die Weierstrassteiler und die Weierstrass-Normalform von A.

(c) Man bestimme die Jordan-Normalform von A (aufgefasst als Element von $M_{13,13}(\mathbb{C})$).

Lösung:

(a) Die Determinantenteiler lassen sich direkt mit Folgerung 4.4 bestimmen als

$$d_i(A) = \prod_{j=1}^{i} c_j(A)\,.$$

Also folgt, dass $d_1(A) = \cdots = d_{10}(A) = 1$, $d_{11}(A) = c_{11}(A) = t$, $d_{12}(A) = c_{12}(A) \cdot d_{11}(A) = t(t^5 + 2t^3 + t)$ und $d_{13}(A) = d_{12} \cdot c_{13} = t(t^5 + 2t^3 + t)(t^7 + 3t^5 + 3t^3 + t)$.

Für die Frobenius-Normalform, nehme die nicht-konstanten Invariantenteiler und benenne neu nach Satz 5.4

$$g_1 = c_{11}(A) = t\,, \quad g_2 = c_{12}(A) = t^5 + 2t^3 + t\,, \quad g_3 = c_{13}(A) = t^7 + 3t^5 + 3t^3 + t\,.$$

Die einzelnen Begleitmatrizen sind dadurch direkt bestimmbar

$$B_{g_1} = 0\,, \quad B_{g_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{g_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indem man im Folgenden B_{g_1}, B_{g_2} und B_{g_3} von oben einsetzt, ist die Frobenius-Normalform dann über Satz 5.4 gegeben durch

$$A \approx B_{g_1, g_2, g_r} = \begin{pmatrix} B_{g_1} & & \\ & B_{g_2} & \\ & & B_{g_3} \end{pmatrix}$$

(b) Die Weierstrassteiler entstehen nach Satz 5.8 aus den Invariantenteilern als Zerlegung in teilerfremde Polynome, die Potenzen irreduzibler Polynome sind. Es gilt nun zuerst, diese Weierstrassteiler $h_{i,j}$ zu bestimmen, wobei i den ursprünglichen Invariantenteiler beschreibt, und j die verschiedenen teilerfremden Polynome durchnummeriert.

Da $c_{11}(A)$ bereits irreduzibel ist, gilt $h_{1,1} = t$. Weiterhin lässt sich $c_{12}(A)$ in t und $(t^2 + 1)^2$ zerlegen, also $h_{2,1} = t$ und $h_{2,2} = (t^2+1)^2 = t^4 + 2t^2 + 1$. Diese sind offensichtlich teilerfremd und Potenzen irreduzibler Polynome. Zuletzt lässt sich $c_{13}(A)$ als Produkt von t und $(t^2+1)^3$ schreiben, wobei diese wieder teilerfremd und Potenzen von irreduziblen Polynomen sind ($h_{3,1} = t$, $h_{3,2} = (t^2 + 1)^3 = t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 1$).

Nach Satz 5.8 ist die Weierstrass-Normalform dann gegeben durch die Begleitmatrizen dieser Polynome über

$$A \approx B_{h_{1,1}, h_{2,1}, h_{2,2}, h_{3,1}, h_{3,2}} = \begin{pmatrix} B_{h_{1,1}} & & & & \\ & B_{h_{2,1}} & & & \\ & & B_{h_{2,2}} & & \\ & & & B_{h_{3,1}} & \\ & & & & B_{h_{3,2}} \end{pmatrix}$$

wobei die Begleitmatrizen $B_{h_{1,1}} = B_{h_{2,1}} = B_{h_{3,1}} = 0$ und $B_{h_{2,2}}$, $B_{h_{3,2}}$ konkret wie folgt aussehen:

$$B_{h_{2,2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{h_{3,2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Wenn man die Matrix A als ein Element von $M_{13,13}(\mathbb{C})$ auffasst, ergeben sich die folgenden

Weierstrassteiler:

$$
\begin{aligned}
h_{1,1} &= t \\
h_{2,1} &= t \\
h_{2,2} &= (t-i)^2 \\
h_{2,3} &= (t+i)^2 \\
h_{3,1} &= t \\
h_{3,2} &= (t-i)^3 \\
h_{3,3} &= (t+i)^3
\end{aligned}
$$

Diese erhalten wir, da die Weierstraßteiler (als Polynome über $\mathbb{Q}[t]$) aus der vorherigen Teilaufgabe sich über $\mathbb{C}[t]$ weiter faktorisieren lassen.
Damit ergeben sich folgende Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_7$ mit Vielfachheiten $e_1, ..., e_7$:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0, & e_1 &= 1 \\
\lambda_2 &= 0, & e_2 &= 1 \\
\lambda_3 &= i, & e_3 &= 2 \\
\lambda_4 &= -i, & e_3 &= 2 \\
\lambda_5 &= 0, & e_4 &= 1 \\
\lambda_6 &= i, & e_4 &= 3 \\
\lambda_7 &= -i, & e_5 &= 3
\end{aligned}
$$

Wie in Bemerkung 5.10 beschrieben, bestimmen wir jetzt die zugehörigen Jordanblöcke. Es gilt, dass $J(0,1) = 0$ und $J(i,2)$, $J(-i,2)$ gegeben sind durch:

$$
J(i,2) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad J(-i,2) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}
$$

Analog bildet man $J(i,3)$, $J(-i,3)$ dann als $3x3$-Matrizen.
Mit Satz 5.11 und nach Einsetzen der obigen Jordanblöcke ist die Jordannormalform gegeben durch:

$$
A \approx \begin{pmatrix}
J(-i,2) & & & & & & \\
& J(-i,3) & & & & & \\
& & J(0,1) & & & & \\
& & & J(0,1) & & & \\
& & & & J(0,1) & & \\
& & & & & J(i,2) & \\
& & & & & & J(i,3)
\end{pmatrix}
$$

46. Aufgabe: *(Kleinstes gemeinsames Vielfaches)* Seien R ein Hauptidealring und $a, b \in R$. Ein Element $k \in R$ heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches* von a und b, wenn $(k) = (a) \cap (b)$ gilt.

(a) Man zeige, dass k genau dann ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b ist, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

  (i) $a \mid k$ und $b \mid k$.

  (ii) Ist $c \in R$ mit $a \mid c$ und $b \mid c$ so gilt $k \mid c$.

(b) Sei k ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b, und sei d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b. Man zeige, dass $k \cdot d$ und $a \cdot b$ zueinander assoziierte Elemente sind.

Lösung:

(a) Wir haben folgende Äquivalenzen:
(i) $\iff k \in (a) \cap (b) \iff (k) \subseteq (a) \cap (b)$.
(ii) $\iff$ Ist $c \in (a) \cap (b)$, so gilt $c \in (k) \iff (a) \cap (b) \subseteq (k)$.

(b) Zunächst gilt: Ist $d = 0$, so muss nach Definition der Teilbarkeit auch $a = b = 0$ gelten und somit $0 = kd = ab$. Wir können also $d \neq 0$ annehmen.
Wir müssen zeigen: (I) $ab \mid kd$ und (II) $kd \mid ab$.
Zu (I): Da $(d) = (a) + (b)$ ist, erhalten wir mit Aufgabe 8(b), dass $(kd) = (k)(d) = (a) \cap (b) \cdot [(a) + (b)] \subseteq (a)(b) = (ab)$. Somit gilt $ab \mid kd$.
Zu (II): Da $d \mid a$ und $d \mid b$, gilt auch $d \mid ab$, d.h. es existiert ein $r \in R$, sodass $dr = ab$. Außerdem existieren $s, t \in R$ mit $ds = a$ und $dt = b$. Dann folgt $dr = ab = dbs = dat$. Da R nullteilerfrei ist und $d \neq 0$, dürfen wir kürzen und erhalten $r = bs = at$, also $a \mid r$ und $b \mid r$. Damit folgt mit Bedingung (ii), dass $k \mid r$. Also gilt $kd \mid dr = ab$.

47. Aufgabe: *(Tensorprodukte und äußere Potenzen)* Sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Man zeige:

(a) Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi\colon V^* \otimes_K V \to K$ mit

$$\varphi(f \otimes v) = f(v) \quad \text{für } f \in V^*, v \in V.$$

(b) Seien $v_1, v_2 \in V$, sodass die Familie (v_1, v_2) linear unabhängig ist und sei $v \in V$. Dann sind äquivalent:

(i) $v \in \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$.
(ii) $v \wedge v_1 \wedge v_2 = 0$ in $\bigwedge^3 V$.

Lösung:

(a) Wir zeigen im folgenden, dass die Abbildung

$$\beta\colon V^* \times V \to K \;\text{ mit }\; \beta(f, v) = f(v)$$

K-bilinear ist.
Die Linearität der ersten Komponente ergibt sich aus der Vektorraumstruktur von V^*, denn es gilt

$$(r \cdot f + g)(v) := r \cdot f(v) + g(v)$$

für $f, g \in V^*, r \in R, v \in V$.
Die Linearität der zweiten Komponente resultiert aus der Linearität von $f \in V^*$.
Aus der Universellen Eigenschaft des Tensorprodukts folgt nun, dass eine eindeutig bestimmte Abbildung $\varphi\colon V^* \otimes_K V \to K$ existiert mit

$$\varphi(f \otimes v) = \beta(f, v) = f(v) \quad \text{für } f \in V^*, v \in V$$

(b) (i)$\Rightarrow$(ii) Sei $v \in \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$, dann existieren $k_1, k_2 \in K$, sodass $v = k_1 v_1 + k_2 v_2$. Damit folgt

$$v \wedge v_1 \wedge v_2 = (k_1 v_1 + k_2 v_2) \wedge v_1 \wedge v_2 = k_1 \underbrace{(v_1 \wedge v_1 \wedge v_2)}_{=0} + k_2 \underbrace{(v_2 \wedge v_1 \wedge v_2)}_{=0} = 0$$

aus den Rechenregeln von äußeren Potenzen, wobei die zwei vorletzten Terme verschwinden, da das Wegde-Produkt alternierend ist.

(ii)$\Rightarrow$(i) Wir zeigen die Behauptung durch Kontraposition.
Sei also die Familie (v, v_1, v_2) linear unabhängig. So lässt sich (v, v_1, v_2) zu einer Basis $(v, v_1, v_2, w_3, ..., w_{n-1})$ von V ergänzen, wobei $\dim(V) = n$.
Nach Satz 9.9 der Vorlesung existiert nun eine Basis von $\bigwedge^3 V$ mit $v \wedge v_1 \wedge v_2$ als Basisvektor, daher ist $v \wedge v_1 \wedge v_2 \neq 0$ in $\bigwedge^3 V$.

48. Aufgabe: *(Endliche abelsche Gruppen)* Man bestimme alle abelschen Gruppen mit 720 Elementen (bis auf Isomorphie).
Hinweis: Man gebe eine Liste abelscher paarweise nicht isomorpher Gruppen an, so dass jede abelsche Gruppe mit 720 Elementen zu einer dieser isomorph ist. Man begründe warum dies der Fall ist.

Lösung: Wir wollen alle Möglichkeiten auflisten, die Zahl 720 folgendermaßen darzustellen:

$$720 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_{p,1}+\ldots+n_{p,s_p}} \tag{1}$$

mit $s_p \in \mathbb{N}_0$ (wobei $s_p = 0$ für fast alle $p \in \mathbb{P}$) und $1 \leq n_{p,1} \leq \ldots \leq n_{p,s_p}$. Folgerung 13.12 sagt uns, dass sich aus dieser Liste eine wie im obigen Hinweis beschriebene Liste gewinnen lässt. Der Darstellung (1) entspricht dabei die abelsche Gruppe

$$\bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}/p^{n_{p,1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p^{n_{p,s_p}}.$$

Da

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

sind die relevanten Primzahlen $2, 3$ und 5. Zunächst möchten wir die möglichen s_2 und die $n_{2,1}, \ldots n_{2,s_2}$ auflisten. Diese entsprechen den Möglichkeiten, die Zahl 4 in positive ganze Summanden in aufsteigender Reihenfolge zu zerlegen:

$$\begin{aligned} 4&, \\ 1+3&, \\ 2+2&, \\ 1+1+2&, \\ 1+1+1+1&. \end{aligned}$$

Dabei entspricht die Zerlegung "4" dem Datum $(s_2 = 1, n_{2,1} = 4)$, die Zerlegung "1 + 3" dem Datum $(s_2 = 2, n_{2,1} = 1, n_{2,2} = 3)$ usw. Nun wenden wir uns der Primzahl 3 zu, welche den Exponenten 2 hat, also erhalten wir die Zerlegungen

$$\begin{aligned} 2&, \\ 1+1&. \end{aligned}$$

Schließlich hat die 5 den Exponenten 1, also haben wir da nur die triviale Zerlegung "1". Insgesamt erhalten wir $5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$ Möglichkeiten für die Darstellung (1), also gibt es bis auf

Isomorphie nur die folgenden 10 abelschen Gruppen der Ordnung 720:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/5, \\
\mathbb{Z}/16 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5, \\
\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/5, \\
\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5, \\
\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/5, \\
\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5, \\
\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/5, \\
\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5, \\
\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/5, \\
\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus Z/5.
\end{aligned}
$$

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.