1 Aufgabe 1

Es bezeichne $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Sei

$$V := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) | \text{ es gibt } a, b, c \in \mathbb{C} \text{ sodass } f(x) = a + bx + cx^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

(a) **Z.Z.:** V ist ein endlich-dimensionaler Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Beweis. □

(b) **Z.Z.:** $h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$h(f, g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\, dx := \int_0^1 \mathrm{Re}(f(x)\overline{g(x)})\, dx + i \int_0^1 \mathrm{Im}(f(x)\overline{g(x)})\, dx \in \mathbb{C}$$

ist ein Skalarprodukt auf V. (V, h) ist ein unitärer Raum.

Beweis. □

2 Aufgabe 2

(a) Jede Matrix A induziert durch $(x, y) \mapsto x^t A\overline{y}$ eine Sesquilinearform. Offensichtlich ist außerdem $A = \overline{A}^t$, daher muss die Sesquilinearform hermitesch sein,

$$\overline{h_A(y, x)} = \overline{h_A(y, x)}^t = \overline{y^t A\overline{x}}^t = (\overline{y}^t \overline{A} x)^t = x^t \overline{A}^t y = x^t A y = h_A(x, y).$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 & 3x_2 + i(x_1 - x_3) & x_3 + ix_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \end{pmatrix} \\
&= |x_1|^2 - i\overline{x_1}x_2 + 3|x_2|^2 + i\overline{x_2}(x_1 - x_3) + |x_3|^2 + ix_2\overline{x_3} \\
&= |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + |x_3|^2 + i \cdot (-\overline{x_1}x_2 + \overline{x_2}x_1 - \overline{x_2}x_3 + \overline{x_3}x_2) \\
&= |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + |x_3|^2 + i \cdot ((\overline{x_2}x_1) - \overline{(\overline{x_2}x_1)} + (\overline{x_3}x_2) - \overline{(\overline{x_3}x_2)}) \\
&= |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + |x_3|^2 + i \cdot (2i \cdot \mathrm{Im}(\overline{x_2}x_1) + 2i \cdot \mathrm{Im}(\overline{x_3}x_2)) \\
&= \mathrm{Re}(x_1)^2 + \mathrm{Im}(x_1)^2 + 3\,\mathrm{Re}(x_2)^2 + 3\,\mathrm{Im}(x_2)^2 + \mathrm{Re}(x_3)^2 + \mathrm{Im}(x_3)^2 \\
&\quad - 2(\mathrm{Re}(x_2)\,\mathrm{Im}(x_1) - \mathrm{Im}(x_2)\,\mathrm{Re}(x_1) + \mathrm{Re}(x_3)\,\mathrm{Im}(x_2) - \mathrm{Im}(x_3)\,\mathrm{Re}(x_2)) \\
&= (\mathrm{Re}(x_2) - \mathrm{Im}(x_1))^2 + (\mathrm{Im}(x_2) + \mathrm{Re}(x_1))^2 + (\mathrm{Re}(x_3) - \mathrm{Im}(x_2))^2 + (\mathrm{Im}(x_3) + \mathrm{Re}(x_2))^2 + |x_2|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

woraus die positive Definitheit folgt.

(b) Als Ausgangsbasis für die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung nehmen wir die kanonische Basis des $\mathbb{C}^3$,

$$\{v_1, v_2, v_3\} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wegen $h_A(v_1, v_1) = 1$ ist sofort $w_1 = v_1$. Dann berechnen wir

$$w_2' = v_2 - h_A(v_2, w_1)w_1 = v_2 + i \cdot v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$w_2 = \frac{w_2'}{\sqrt{h_A(w_2', w_2')}} = \frac{w_2'}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit kommt man auf

$$w_3' = v_3 - h_A(v_3, w_1)w_1 - h_A(v_3, w_2)w_2 = v_3 - 0 \cdot w_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und schließlich ist

$$w_3 = \frac{w_3'}{\sqrt{h_A(w_3', w_3')}} = \frac{w_2'}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Folglich ist

$$\underline{w} = \{w_1, w_2, w_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{C}^3, h_A)$

(c) Dafür bestimmen wir zunächst die Darstellungsmatrix von B bzgl. einer Orthonormalbasis von $(\mathbb{C}^3, h_A)$ und wählen dafür $\underline{w}$. Es gilt

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir noch T^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \mid \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right)$$

Folglich ist die Darstellungsmatrix von B bzgl. $\underline{w}$

$$T^{-1} \cdot B \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2i & -i \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

Die dazu adjungierte Matrix ist also die Darstellungsmatrix der adjungierten Abbildung zu $B\cdot$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}$$

und folglich ist $B\cdot$ normal bezüglich (V, h_A). Mit dem Standardskalarprodukt ist $B\cdot$ nicht normal, da die Standardbasis eine Orthonormalbasis darstellt und

$$B \cdot B^* \neq B^* \cdot B$$

(d) $\chi_{\text{char}} = (\lambda - 2) \cdot \lambda \cdot (\lambda - 2i) \implies \{2, 0, 2i\}$ sind Eigenwerte von B. Der Eigenraum zu $\lambda = 2$ ist

$$\operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

zu $\lambda = 0$

$$\operatorname{Lin} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zu $\lambda = 2i$

$$\operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\-i\\-2\end{pmatrix}.$$

Da die Eigenräume alle nur eindimensional sind genügt es,

$$h_A(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}) = 0,$$

$$h_A(\begin{pmatrix}1\\-i\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}) = 0$$

und

$$h_A(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-i\\-2\end{pmatrix}) = 0$$

nachzurechnen.

(e) Wir rechnen es wieder analog zur (c) in einer Orthonormalbasis von (V, h_A) nach und sehen

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&2i\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2i\end{pmatrix},$$

folglich ist $B\cdot$ nicht selbstadjungiert.

3 Aufgabe 3

Sei (V, h) ein unitärer Raum. Für $f \in \operatorname{End}(V)$ bezeichne wie in der Vorlesung $f^* \in \operatorname{End}(V)$ die zu f adjungierte Abbildung.

(a) **Z.Z.:** Für alle $f, g \in \operatorname{End}(V)$ gilt: $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Beweis. Es gilt für $x, y \in V$:

$$h((f \circ g)^*(x), y) = h(x, f(g(y))) = h(f^*(x), g(y)) = h(g^*(f^*(x)), y) = h((g^* \circ f^*)(x), y)$$

□

(b) **Z.Z.:** Für alle $f \in \operatorname{End}(V), \lambda \in \mathbb{C}$ gilt: $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$.

Beweis. Es gilt für $x, y \in V$:

$$h((\lambda f)^*(x), y) = h(x, (\lambda f(y))) \overset{\text{h semilinear}}{=} \overline{\lambda} h(x, f(y)) = \overline{\lambda} = h(f^*(x), y)$$

□

(c) **Z.Z.:** Für alle $f \in \mathrm{End}(V)$ gilt: $f \circ f^*$ und $f^* \circ f$ sind selbstadjungiert.

Beweis. Es gilt für $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} h((f \circ f^*)^*(x), y) &= h((f(f^*(x)))^*, y) = h(x, f(f^*(y))) = h(f^*(x), f^*(y)) \\ &= h(f(f^*(x)), y) = h((f \circ f^*)(x), y) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h((f^* \circ f)^*(x), y) &= h((f^*(f(x)))^*, y) = h(x, f^*(f(y))) = h(f(x), f(y)) \\ &= h(f^*(f(x)), y) = h((f^* \circ f)(x), y) \end{aligned}$$

□