Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2020/21

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. M. Leonhardt

Blatt 09
Abgabetermin: Freitag, 22.01.2021, 9:15 Uhr

Aufgabe 1. *(Galoisgruppe)* (6 Punkte) Es sei $f = X^4 - 4X^2 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$. Bestimmen Sie einen Zerfällungskörper L von f über $\mathbb{Q}$ sowie $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ und alle Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$. *(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für eine Nullstelle α von f die Menge der Nullstellen von f gleich $\{\pm\alpha, \pm 3/\alpha\}$ ist.)*

Aufgabe 2. *(Beispiele)* (6 Punkte, je 1 Punkt) Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{7})/\mathbb{Q}$ ist eine Galoiserweiterung.

(b) Es sei $f = X^4 + 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ und L über $\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper von f. Dann ist $[L : \mathbb{Q}]$ ein Teiler von 24.

(c) Es sei $L/\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 2$. Dann ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ zyklisch.

(d) Es sei $L/\mathbb{Q}$ ein Zerfällungskörper eines Polynoms von Grad 3. Dann hat $L/\mathbb{Q}$ höchstens 4 echte Zwischenkörper.

(e) Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und $f = X^4 - a \in K[X]$ irreduzibel sowie L/K ein Zerfällungskörper von f. Dann ist $\mathrm{Gal}(L/K)$ nicht zyklisch.

(f) Es sei L/K eine endliche Galoiserweiterung. Dann hat L/K höchstens $2^{[L:K]}$ viele Zwischenkörper.

Aufgabe 3. *(Kreisteilungskörper)* (6 Punkte, je 3 Punkte) Es sei $n \geq 3$ und $L = \mathbb{Q}(\mu_n)$.

(a) Bestimmen Sie die von der komplexen Konjugation induzierte Permutation π von μ_n. Wir wählen eine primitive n-te Einheitswurzel $\zeta_n \in \mathbb{C}$ und identifizieren $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit μ_n via $k \mapsto \zeta_n^k$. Bestimmen Sie die von π induzierte Permutation von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass $[L : L \cap \mathbb{R}] = 2$ sowie $L \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta_n + \zeta_n^{-1})$.

Aufgabe 4. *(Funktionenkörper)* (6 Punkte; je 2 Punkte) Es sei K ein Körper und $L = K(Y)$ der Funktionenkörper in der Variablen Y.

(a) Zeigen Sie, dass es für jedes $a \in K$ ein eindeutiges $\sigma_a \in \mathrm{Aut}_K(L)$ gibt mit $\sigma_a(Y) = Y + a$.

(b) Es sei $G := \{\sigma_a \mid a \in K\}$. Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}_K(L)$ ist, die isomorph zu $(K, +)$ ist. Falls K unendlich ist, zeigen Sie weiter $L^G = K$.

(c) Nun sei $\mathrm{char}(K) = p > 0$ und $H := \{\sigma_a \mid a \in \mathbb{F}_p\} \subset G$. Zeigen Sie, dass $L^H = K(Z)$ mit $Z = Y^p - Y$.