Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2020/21

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. M. Leonhardt

Blatt 13 — Probeklausur
Keine Abgabe. Lösungsskizze am 19.02.2021 auf Mampf

Die Probeklausur besitzt den halben Umfang der Klausur und besteht (wie auch die Klausur) aus zwei Teilen.

- Der erste Teil besteht aus 10 (in der Klausur: 20) Multiple-Choice-Aufgaben (Wert: jeweils 1 Punkt). Auf jede Frage gibt es drei Antwortmöglichkeiten, von denen mindestens eine und höchstens drei richtig sind. Kreuzen Sie die richtigen Antworten (und nur diese) an. Nur bei vollständig korrekter Lösung erhalten Sie einen Punkt, ansonsten gibt es keinen.

- Der zweite Teil besteht aus 2 (in der Klausur: 4) umfangreicheren Aufgaben (Wert insgesamt 20 (in der Klausur: 40) Punkte). Alle Rechnungen und Beweisschritte sollen hier ausführlich, klar und logisch nachvollziehbar dargestellt werden. Alle Ergebnisse und Definitionen aus der Vorlesung dürfen dabei als bekannt vorausgesetzt werden.

---

1. Teil: Multiple Choice
(jede Frage 1 Punkt)

1. Welche der folgenden Polynome $f \in \mathbb{Q}[X]$ sind irreduzibel?

☐ $f = X^3 + X^2 + X + 1$.

☐ $f = X^5 + 3X^2 + 6X - 3$.

☐ $f = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.

2. Sei R ein faktorieller Ring, $p \in R$ prim und $f \in R[T]$, $\deg(f) \geq 1$, ein normiertes Polynom. Welche der folgenden Implikationen sind stets korrekt?

☐ f ist reduzibel in $Q(R)[T] \Rightarrow f$ ist reduzibel in $R[T]$.

☐ f ist reduzibel in $R[T] \Rightarrow f$ ist reduzibel in $R/(p)[T]$.

☐ f ist reduzibel in $R/(p)[T] \Rightarrow f$ ist reduzibel in $Q(R)[T]$.

3. Das Polynom $X^5 - 2 \in \mathbb{F}_5[X]$ ist

☐ irreduzibel.

☐ separabel.

☐ normiert.

4. Sei $M/L/K$ eine Folge von Körpererweiterungen. Welche der folgenden Implikationen sind stets korrekt?

☐ M/K galoissch $\Rightarrow L/K$ galoissch.

☐ M/K algebraisch $\Rightarrow L/K$ algebraisch.

☐ M/K rein inseparabel $\Rightarrow L/K$ rein inseparabel.

5. Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung von Körpern mit Galoisgruppe G. Welche der folgenden Aussagen sind stets korrekt?

- ☐ Ist H eine Untergruppe von G, so ist L^H/K eine separable Körpererweiterung vom Grad $(G:H)$.
- ☐ Sind H, H' zwei beliebige Untergruppen von G mit $H \subset H'$, so gilt $L^H \subset L^{H'}$.
- ☐ Ist E ein Zwischenkörper von L/K, so ist $\mathrm{Gal}(L/E)$ eine Untergruppe von G.

6. Welche der folgenden Körpererweiterungen sind galoissch?

- ☐ $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{29})/\mathbb{Q}$.
- ☐ $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/7})/\mathbb{Q}$.
- ☐ $\mathbb{Q}(\sqrt[7]{29}, e^{2\pi i/7})/\mathbb{Q}$.

7. Welche der folgenden Gruppen sind zyklisch?

- ☐ $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{27}/\mathbb{F}_3)$.
- ☐ $\mathbb{F}_{27} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation als Gruppenoperation.
- ☐ $\mathbb{F}_{27}$ mit der Addition als Gruppenoperation.

8. Sei $K = \mathbb{F}_{11}(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{F}_{11}$ in der Unbestimmten T und L/K eine normale Erweiterung vom Grad 5. Folgende Aussagen sind stets korrekt:

- ☐ L/K ist galoissch.
- ☐ Es existiert ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ und $\alpha^5 \in K$.
- ☐ L/K ist rein inseparabel.

9. Sei t eine Unbestimmte und $K/\mathbb{F}_2(t)$ eine Erweiterung vom Grad 2. Welche der folgenden Aussagen sind stets korrekt?

- ☐ $K/\mathbb{F}_2$ ist eine endliche Erweiterung.
- ☐ $K/\mathbb{F}_2$ ist vom Transzendenzgrad 1.
- ☐ $K/\mathbb{F}_2(t)$ ist rein inseparabel.

10. Sei T eine Unbestimmte. Die Erweiterung $\mathbb{C}(T)/\mathbb{C}(T^3)$ ist

- ☐ normal und rein inseparabel.
- ☐ separabel, aber nicht normal.
- ☐ galoissch.

2. Teil: Ausführliche Antworten

Aufgabe A. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd und $\zeta_m, \zeta_n \in \overline{\mathbb{Q}}$ eine primitive m-te bzw. n-te Einheitswurzel.

(a) Es sei $d \neq 1$ ein Teiler von n. Zeigen Sie, dass kein Element von $\mu_m = \langle \zeta_m \rangle$ Ordnung d hat. Folgern Sie $\mu_m \cap \mu_n = \{1\}$. (2P)

(b) Es sei $\zeta := \zeta_m \zeta_n$. Zeigen Sie, dass ζ eine primitive mn-te Einheitswurzel ist. Folgern Sie $\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta)$. (3P)

(c) Bestimmen Sie die Körpergrade $[\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}]$ und zeigen Sie $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\zeta_m)] = [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\zeta_n)] = [\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}]$. (3P)

(d) Es sei $L = \mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{Q}(\zeta_m)$. Zeigen Sie $L = \mathbb{Q}$. (2P) *(Hinweis: Zeichnen Sie zunächst das sich aus (c) ergebende Körperdiagramm.)*

Aufgabe B. Es sei $f = T^5 - 3 \in \mathbb{Q}[T]$ und $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom f in $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel und separabel ist. (2P)

(b) Es sei $\zeta_5 := e^{2\pi i/5}$. Zeigen Sie $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \zeta_5)$. (3P)

(c) Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung vom Grad 20 ist. (3P)

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ der einzige Zwischenkörper K von $L/\mathbb{Q}$ ist mit $[K : \mathbb{Q}] = 4$. (2P)