Aufgabe 1 (Frobeniusautomorphismen). **(4 Punkte)**
Sei K ein lokaler Körper mit endlichem Restklassenkörper und L/K eine endliche Galoiserweiterung. Wir bezeichen mit $L^{\mathrm{nr}}/K^{\mathrm{nr}}$ die Erweiterung der jeweiligen maximalen unverzweigten Erweiterungen, sodass $L^{\mathrm{nr}} = L \cdot K^{\mathrm{nr}}$. Wir betrachten die Menge der *Frobeniusautomorphismen*

$$\mathrm{Frob}(L/K) := \{\tilde{\sigma} \in \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{nr}}/K) \mid \exists k \geq 1 \colon \tilde{\sigma}|_{K^{\mathrm{nr}}} = \varphi_K^k\},$$

wobei $\varphi_K \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K) \cong \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_q)$ den Frobeniusmorphismus bezeichne; diese ist offensichtlich abgeschlossen unter Multiplikation. Zeigen Sie, dass für $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Frob}(L/K)$ mit Fixkörper $\Sigma := (L^{\mathrm{nr}})^{\langle \tilde{\sigma} \rangle}$ gilt:

(a) $[\Sigma \colon K] < \infty$, (b) $\Sigma^{\mathrm{nr}} = L^{\mathrm{nr}}$, (c) $\tilde{\sigma} = \varphi_\Sigma$.

Insbesondere besteht $\mathrm{Frob}(L/K)$ genau aus den Frobenii endlicher Teilerweiterungen Σ/K von L^{nr}/K mit $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{nr}}/\Sigma) \cong \hat{\mathbb{Z}}$. Zeigen Sie:

(d) Die Einschränkungsabbildung $\mathrm{Frob}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$, $\tilde{\sigma} \mapsto \tilde{\sigma}|_L$, ist surjektiv.

a) Sei s/k Rkk zu Σ/k.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & L^{nr} = L \cdot K^{nr} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ L \arrow[dr, dash] & & K^{nr} \arrow[dl, dash] \\ & K & \end{tikzcd}$$

$\tau \in \langle \tilde{\sigma} \rangle \subset \mathrm{Gal}(L^{nr}/K)$

$\Rightarrow \tau|_{K^{nr}} = \varphi_K^{n_\tau \cdot k}$

$(\mathrm{Gal}(K^{nr}/K) : \langle \tilde{\sigma}|_{K^{nr}} \rangle) = (\langle \varphi_K \rangle : \langle \varphi_K^k \rangle) = k$

Es gilt $[L^{nr} : K^{nr}] \leq [L:K]$. (Gleichheit falls $[L:K]$ rein verzweigt)

$$[(L^{nr})^{\langle \tilde{\sigma} \rangle} : K] \leq [L^{nr} : K^{nr}] \cdot [(K^{nr})^{\langle \tilde{\sigma}|_{K^{nr}} \rangle} : K] \leq [L:K] \cdot (\langle \varphi_K \rangle : \langle \varphi_K^k \rangle)$$
$$\leq [L:K] \cdot k < \infty$$

b) z.z. $L^{nr}/\Sigma = L^{nr}/(L^{nr})^{\langle \tilde{\sigma} \rangle}$ unv.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & L^{nr} \arrow[dll, dash] \arrow[d, dash] & \\ & & \Sigma^{nr} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ L \arrow[dr, dash] & \Sigma \arrow[d, dash] & & K^{nr} \arrow[dll, dash] \\ & K & & \end{tikzcd}$$

L^{nr}/Σ^{nr} rein verzw.

Sei $\pi \in L^{nr}$ Uniformisierende

c)

Aufgabe 2 (Die Neukirchabbildung). **(4 Punkte)**
Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung lokaler Körper. Wir definieren die Abbildung

$$\tilde{\Upsilon}_{L/K}\colon \mathrm{Frob}(L/K) \longrightarrow K^\times/\mathrm{N}_{L/K}(L^\times), \quad \tilde{\sigma} \mapsto \mathrm{N}_{\Sigma/K}\pi_\Sigma,$$

wobei π_Σ eine Uniformisierende des Fixkörpers Σ von $\tilde{\sigma}$ bezeichne. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\tilde{\Upsilon}_{L/K}$ ist wohldefiniert.

π_Σ wird unter der Operation von $\mathrm{Gal}(\Sigma/K)$ wieder auf eine Uniformisierende gedrückt, da die Galoisgruppe die Bewertung nicht ändert und $\sigma p_\Sigma = p_\Sigma \quad \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(\Sigma/K)$.
Daher ist $N_{\Sigma/K}\pi_\Sigma = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\Sigma/K)} \sigma(\pi_\Sigma) \neq 0$, also $N_{\Sigma/K}\pi_\Sigma \in K^\times$.

(b) Ist $\tilde{\sigma}|_L = \mathrm{id}_L$, so ist $\tilde{\Upsilon}_{L/K}(\tilde{\sigma}) = 1$.

$$\tilde{\sigma}|_L = id|_L \Rightarrow L \subset (L^{nr})^{\langle\tilde{\sigma}\rangle} = \Sigma \Rightarrow L^{nr}/\Sigma/L/K$$

$$\Rightarrow N_{\Sigma/K} = N_{L/K} \circ N_{\Sigma/L} \text{ nach Afg 1}$$

$$\Rightarrow N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma) \in N_{L/K} L^\times \Rightarrow N_{\Sigma/K}(\pi_\Sigma) = 1 \in K^\times/N_{L/K} L^\times$$

Seien nun $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 \in \mathrm{Frob}(L/K)$ und wir setzen $\tilde{\sigma}_3 := \tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1$. Für $i \in \{1,2,3\}$ sei Σ_i der Fixkörper von $\tilde{\sigma}_i$ und π_i eine Uniformisierende von. Man kann zeigen, dass $\mathrm{N}_{\Sigma_3/K}(\pi_3) \equiv \mathrm{N}_{\Sigma_1/K}(\pi_1)\cdot \mathrm{N}_{\Sigma_2/K}(\pi_2) \mod \mathrm{N}_{L/K}(L^\times)$. Folgern Sie daraus:

(c) Die Abbildung $\tilde{\Upsilon}_{L/K}$ induziert einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus (*Neukirchabbildung*)

$$\Upsilon_{L/K}\colon \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow K^\times/\mathrm{N}_{L/K}(L^\times), \quad \sigma \mapsto \tilde{\Upsilon}_{L/K}(\tilde{\sigma}),$$

wobei $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Frob}(L/K)$ eine Fortsetzung von σ bezeichne (welche nach Aufgabe 1(d) existiert).

Wohldefiniertheit: Seien $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_3$ Fortsetzungen von σ.
Dann ist $\tilde{\sigma}_2 = \tilde{\sigma}_3/\tilde{\sigma}_1$ eine Fortsetzung von id.

$$\Rightarrow \tilde{\Upsilon}_{L/K}(\tilde{\sigma}_3) = N_{\Sigma_3/K}(\pi_3) = N_{\Sigma_1/K}(\pi_1)\cdot N_{\Sigma_2/K}(\pi_2) = \tilde{\Upsilon}_{L/K}(\tilde{\sigma}_1)\cdot \underbrace{\tilde{\Upsilon}(\tilde{\sigma}_2)}_{=1} = \tilde{\Upsilon}_{L/K}(\tilde{\sigma}_1)$$

Gruppenhom: $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Gal}(L/K)$ mit Fortsetzungen $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$. Dann ist offensichtlich
$\tilde{\sigma}_3 := \tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2$ eine Fortsetzung von $\sigma_1\sigma_2$.

$$\Rightarrow \Upsilon_{L/K}(\sigma_1\sigma_2) = \tilde{\Upsilon}_{L/K}(\tilde{\sigma}_3) = N_{\Sigma_3/K}(\pi_3) = N_{\Sigma_1/K}(\pi_1)\cdot N_{\Sigma_2/K}(\pi_2)$$
$$= \tilde{\Upsilon}_{L/K}(\tilde{\sigma}_1)\cdot \tilde{\Upsilon}_{L/K}(\tilde{\sigma}_2) = \Upsilon_{L/K}(\sigma_1)\cdot \Upsilon_{L/K}(\sigma_2)$$

✓

Aufgabe 3 (Zerfällungsmodul). **(4 Punkte)**
Seien G eine endliche Gruppe, $\gamma \in \mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z})$ ein Erzeuger, wobei wir $\mathbb{Z}$ mit der trivialen G-Wirkung verstanden wissen, und $\mathbb{Z}(\gamma)$ der zugehörige Klassenmodul. Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus $\mathbb{Z}(\gamma) \cong \mathbb{Z}[G]$ von G-Moduln existiert.

$$\mathbb{Z}(\gamma) = \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{g \in G\setminus\{1\}} \mathbb{Z} b_g$$

Nach VL haben wir 2 kurze exakte Folgen:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z}[\gamma] \xrightarrow{\varphi} I_G \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

$$0 \longrightarrow I_G \longrightarrow \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

z.z.: <u>Beide zerfallen</u>

(1): $\exists p: \mathbb{Z}[\gamma] \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $p \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$

$(c, (a_g b_g)_g) \longmapsto c$

Nach Alg II zerfällt daher (1)

(2): $\exists s: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[G]$ mit $s \circ \varepsilon = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$

$c \longmapsto c \cdot e$

Nach Alg II zerfällt daher (2).

$$\Rightarrow \quad \mathbb{Z}[\gamma] \cong \mathbb{Z} \oplus I_G \cong \mathbb{Z}[G] \qquad \square$$