Aufgabe 32

(a) Es gilt nach Skript $\Im M\langle z\rangle = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2}$. Daher gilt

$$f(M\langle z\rangle)\overline{g(M\langle z\rangle)}(\Im M\langle z\rangle)^k = (cz+d)^k f(z)\overline{(cz+d)^k g(z)}\frac{y^k}{|cz+d|^{2k}} = f(z)\overline{g(z)}y^k.$$

(b) Sei OE f die Spitzenform. Sei außerdem $\Gamma(N) \subset \Lambda$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2} \\ &\leq \int_{\mathcal{F}} \left|f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}\right| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$g(z)$ ist auf dem gesamten Fundamentalbereich beschränkt, $|\overline{g(z)}| \leq C$.

$$\leq C \cdot \int_{\mathcal{F}} \left|f(z)y^{k-2}\right| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Es gilt $\mathcal{F} \subset [0, N] \times i(0, \infty)$

$$\leq C \cdot \int_0^N \int_0^\infty \left|f(x+iy)y^{k-2}\right| \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

f Spitzenform $\implies \lim\limits_{y\to i\infty} \left|y^k f(z)\right| = \lim\limits_{y\to i\infty} \left|y^k \sum_{n=1}^\infty a_n e^{\frac{2\pi i n z}{N}}\right| \leq \sum_{n=1}^\infty |a_n| \lim\limits_{y\to i\infty} y^k e^{-\frac{2\pi n}{N}y} = 0$

$$\begin{aligned}&\leq C \cdot \int_0^N \left[\int_0^D \left|f(x+iy)y^{k-2}\right| \,\mathrm{d}y + \int_D^\infty \frac{\mathrm{d}y}{y^2}\right] \mathrm{d}x \\ &\leq C \int_0^N \int_0^D \left|f(x+iy)y^{k-2}\right| \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \frac{CN}{D}\end{aligned}$$

Das Integral über eine stetige Funktion auf einem Kompaktum ist endlich

$$< \infty$$

(c) Die Sesquilinearität folgt sofort aus der Kommutativität der Multiplikation und der Linearität des Integrals. Wir verwenden nun den Integraltransformationssatz. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{M\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2} &= \int_{\mathcal{F}} f(M\langle z\rangle)\overline{g(M\langle z\rangle)}(\Im M\langle z\rangle)^k |\det \mathrm{D}(M\langle z\rangle)| \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(\Im M\langle z\rangle)^2} \\ &= \int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k \left|\frac{a(cz+d) - c(az+d)}{(cz+d)^2}\right|^2 (|cz+d|^2)^2 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2} \\ &= \int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{1}{|cz+d|^4}|cz+d|^4 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2} \\ &= \int_{\mathcal{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{y^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 34

(a) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\chi(n) n^{-s}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot n^{-\Re s},$$

da die Werte eines Charakters im Einheitskreis liegen. Für $\alpha > 1$ gilt

$$\int_0^{\infty} n^{-\alpha} \, \mathrm{d}n = \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} \Big|_0^{\infty} = 0.$$

Nach dem Integralkriterium ist die Dirichletreihe $L(s, \chi)$ daher für jedes $s > 1$ absolut konvergent. Sei K ein Kompaktum in $\{s \in \mathbb{C} | \Re s > 1\}$. Dann ist aufgrund der Kompaktheit $\min_{s \in K} s > 1$. Für $\Re s < \Re s'$ gilt schließlich $n^{-\Re s} > n^{-\Re s'}$, woraus die kompakte Konvergenz von $L(s, \chi)$ folgt.

(b) Zunächst zeigen wir, dass das Produkt absolut konvergent ist.

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathrm{ggT}(p,N)=1} \left| 1 - \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right| &\leq \sum_{\mathrm{ggT}(p,N)=1} \left| \frac{1 - \frac{\chi(p)}{p^s} - 1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \right| \\
&\leq \sum_{\mathrm{ggT}(p,N)=1} \frac{|\chi(p)|}{|p^s - \chi(p)|} \\
&\leq \sum_{\mathrm{ggT}(p,N)=1} \frac{|\chi(p)|}{|p^s| - |\chi(p)|} \\
&= \sum_{\mathrm{ggT}(p,N)=1} \frac{1}{p^{\Re s} - 1}
\end{aligned}$$

$p \geq 2, \Re s > 1$

$$\leq \sum_{\mathrm{ggT}(p,N)=1} \frac{2}{p^{\Re s}} \qquad < 2 \cdot L(s, 1) < \infty$$

Nun zeigen wir noch, dass der Wert des Produkts mit $L(s, \chi)$ übereinstimmt. Sei $\mathcal{M} = \{p \in \mathbb{N} \colon p \text{ prim}, \ \mathrm{ggT}(p, N) = 1\}$. Sei p_ν das Element von $\mathcal{M}$, für das es genau $\nu - 1$ kleinere Elemente in $\mathcal{M}$ gibt. Zunächst benutzen wir hier die geometrische Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}
\prod_{\mathrm{ggT}(p,N)=1} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} &= \lim_{M \to \infty} \prod_{\nu=1}^{M} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^s}} \\
&= \lim_{M \to \infty} \prod_{\nu=1}^{M} \sum_{n_\nu=0}^{\infty} \left(\frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^s} \right)^n
\end{aligned}$$

Nach dem Reihenmultiplikationssatz von Cauchy gilt

$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{n_1,\ldots,n_\nu=0}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{M} \left(\frac{\chi(p_\nu)}{p_\nu^s}\right)^{n_\nu}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \sum_{n_1,\ldots,n_\nu=0}^{\infty} \frac{\chi\left(\prod_{\nu=1}^{M} p_\nu^{n_\nu}\right)}{\left(\prod_{\nu=1}^{M} p_\nu^{n_\nu}\right)^s}$$

Genau die Zahlen n, die in ihrer Primfaktorzerlegung nur Primzahlen $p \in \mathcal{M}$ enthalten, erhalten wir durch $\prod_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{n_\nu}$. Für solche n gilt aber $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$.

$$= \sum_{\mathrm{ggT}(n,N)=1} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

Für $\mathrm{ggT}(n, N) \neq 1$ gilt aber bereits $\chi(n) = 0$, da n in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dann nicht mehr invertierbar ist.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-2}$$

$$= L(s, \chi)$$