Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 9 - Update-Nr.: 1 26. Juni 2020

Abgabe bis Fr. 03.07.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Themen:

- Umkehrabbildung
- Lagrange-Multiplikatoren
- Differentialgleichung höherer Ordnung
- Wronski-Determinante

Aufgabe 9.1 (5 Punkte): Jacobi-Matrix einer Umkehrabbildung

Man bestimme für die Funktion

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} yz \\ x + 2z \\ xy \end{pmatrix}$$

die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ sowie die Jacobi-Matrizen $D_f(x, y, z)$ und $D_g(u, v, w)$ und rechne nach, dass die Identität

$$D_g(u, v, w) = D_f(x, y, z)^{-1}$$

für den Punkt $(x, y, z)^{\mathrm{T}} = (2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ gilt.

Bemerkung: Wir haben in der Vorlesung keine allgemeingültige Formel für die Umkehrabbildung gehabt, von daher müsst Ihr Euren mathematischen Spürsinn einsetzen, um die Umkehrabbildung auszurechnen.

Aufgabe 9.2 (5 Punkte): Abstand eines Punktes zu einer Menge

Die Ebene P und der Zylinder Z seien gegeben durch

$$P := \left\{(x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 1\right\} \quad \text{und} \quad Z := \left\{(x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Die Ebene P schneidet dabei den Zylinder Z in einer Ellipse. Man berechne den minimalen quadrierten euklidischen Abstand dieser Ellipse zum Ursprung $(0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren.

Bemerkung: Zur Klassifizierung der kritischen Punkte soll es uns an dieser Stelle reichen, die Werte der Zielfunktion an diesen kritischen Punkten zu betrachten. Im Allgemeinen reicht das <u>nicht</u>, siehe auch den schriftlichen Nachtrag zur Zentralübung vom 25.06.20!

Bemerkung: Wir betrachten hier den quadrierten Abstand, um eine hübschere Zielfunktion zu haben.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte): Quadratisches Optimierungsproblem

Man löse das folgende quadratische Optimierungsproblem mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren.

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^3} \quad & 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + x_2x_3 + 3x_3^2 + 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ & -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{aligned}$$

Tipp: Diese Aufgabe lässt sich am elegantesten lösen, wenn man das Optimierungsproblem in der Form

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^3} \quad & \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx - c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} \quad & Ax - b = 0 \end{aligned}$$

mit passenden Matrizen und Vektoren Q, A, b und c schreibt und auch danach in Matrixform weiter rechnet.

Aufgabe 9.4 (6 Punkte): Differentialgleichungen

(a) Man forme das System von Differentialgleichungen 4. Ordnung für $v = (v_1, v_2)^{\mathrm{T}} : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ mit $T > 0$, gegeben durch

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}t^4}v_2(t) - a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}v_1(t) = f(t), \\ & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}v_1(t) + bv_2(t) = g(t) \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g : [0, T] \to \mathbb{R}$, in ein äquivalentes System 1. Ordnung um. $\boxed{2}$

(b) Man zeige für die Differentialgleichung 2. Ordnung für $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ mit $T > 0$, gegeben durch

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u(t) + p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) + q(t)u(t) = 0$$

mit $p, q \in \mathcal{C}([0, T])$, dass die *Wronski-Determinante* $W(t)$, gegeben durch

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_1(t) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2(t) \end{pmatrix}$$

für zwei Lösungen u_1, u_2 von $(*)$, selber wieder die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W(t) = -p(t)W(t), \quad t \in [0, T]$$

erfüllt. $\boxed{4}$