Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

# Analysis I

WS 19/20

Blatt 01 25.10.2019

ARSnova-Code: 67 52 65 62

**Abgabe bis Do. 31.10.19, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)**

**Informationen:**

- Dieses Übungsblatt ist das erste Übungsblatt, das bewertet wird. Bitte beachten Sie das aufgrund des Feiertags vorgezogene Abgabedatum!
- Bitte schreiben Sie ihre Namen auf Ihre Abgaben, tackern die Zettel, und werfen sie rechtzeitig in den Zettelkasten Ihres Tutors ein.
- Begründen Sie Ihre Schritte und formulieren Sie sie ordentlich aus.
- Achten Sie auf die korrekte mathematische Ausdrucksweise.
- Auch bei den Übungsblättern haben Sie die Möglichkeit, uns Feedback zu geben. Auch dazu nutzen wir `https://arsnova.eu/`. Den Zugangsschlüssel finden Sie oben links unter der Nummer des aktuellen Übungsblattes.

---

**Themen:**

- Vollständige Induktion
- Binomialkoeffizient
- Binomische Formel
- Teleskopsumme

---

### Aufgabe 1.1 (6 Punkte)

Die $n$-te Zahl $F_n$ der Fibonacci-Folge wird rekursiv durch

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{für } n \geq 3$$

mit den Anfangswerten

$$F_1 = F_2 = 1$$

definiert. Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion:

(a) $$1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k = F_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

(b) $$F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + 1, \quad n \in \mathbb{N},\ n \text{ gerade}$$

(c) $$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

**Aufgabe 1.2 (4 Punkte)**

Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(d) $\displaystyle\binom{l+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{l}\binom{m}{k} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}: \; k \leq l$

*Tipp: In dieser Aufgabe ist es einfacher, nicht alle Teilaufgaben mit derselben Methode zu lösen. Die am Seitenanfang aufgeführten Themen reichen aus, um diese Aufgabe zu lösen.*

**Aufgabe 1.3 (5 Punkte)**

Gegeben die Buchstaben $a$, $b$, formen wir „Worte“ $W$ wie folgt:

$$W_1 := a, \quad W_2 := b, \quad W_{n+1} := W_n W_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \; n \geq 2$$

Das heißt es gilt beispielsweise

$$W_3 = ba, \quad W_4 = bab.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion:

(a) $W_n$ besteht aus $F_n$ Buchstaben, $n \in \mathbb{N}$. ($F_n = n$-te Fibonacci-Zahl)

(b) Die Buchstabenkombination „aa“ ist kein Bestandteil des Wortes $W_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 1.4 (5 Punkte)**

Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Anzahl $A(n)$ aller $k$-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ mit

$(*) \quad 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n$

gegeben ist durch

$$A(n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Formal ausgedrückt, ist also zu zeigen, dass

$$\binom{n+k-1}{k} = \left|\left\{(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k \;\middle|\; 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq n\right\}\right|.$$

*Tipp 1: Bei dieser Aufgabe ist eher die Bedeutung des Binomialkoeffizienten und nicht dessen Formel entscheidend. Überlegen Sie sich daher, was der Binomialkoeffizient aussagt und wie Sie diese Bedeutung hier ausnutzen können.*

*Tipp 2: Es kann sinnvoll sein, eine äquivalente auf strikten Ungleichungen beruhende Bedingung zur Bedingung $(*)$ zu finden.*