Namen: ____________________

____

Aufgabe	11.1	11.2	11.3	Z11.1	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 11

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 11.1 (Lineare Approximation durch Tangentialraum) **5 Punkte**

Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine C^1–Mannigfaltigkeit der Dimension n und sei $p \in M$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{r} \sup \Big\{ \operatorname{dist}(x, p + T_pM) : x \in M \cap B_r(p) \Big\} \xrightarrow{r \searrow 0} 0. \tag{1.1}$$

Hinweis: Zur Erinnerung: Für $x \in \mathbb{R}^m$ und $A \subset \mathbb{R}^m$ nicht–leer ist $\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{|x - y| : y \in A\}$. Überlegen Sie sich zuerst, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p = 0$ gewählt werden kann. Stellen Sie dann die Mannigfaltigkeit um 0 lokal als Graph und lokal durch eine Parametrisierung φ dar, und bedenken Sie, dass $\varphi(x) - \varphi(0) = \mathrm{D}\varphi(0)x + o(|x|)$.

Aufgabe 11.2 (Integration auf Graphen) **5 Punkte**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g \in C^1(U)$. Sei $M := \operatorname{graph}(g) \subset \mathbb{R}^m$ mit $m = n + 1$.

a) Sei $p \in M$. Bestimmen Sie T_pM und N_pM. Begründen Sie ihre Antwort.

b) Sei $f \in L^1(M)$. Zeigen Sie, dass

$$\int_M f \, \mathrm{d}\mathscr{H}^n = \int_U f(x, h(x)) \sqrt{1 + |\nabla h(x)|^2} \, \mathrm{d}\mathscr{L}^n(x). \tag{2.1}$$

c) Sei $U = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ und $g(x) = 3(1 - |x|^2)$. Sei $F \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $F(y) = (y_1, 0, 0)^\intercal$. Berechnen Sie

$$\int_M F \cdot \nu \, \mathrm{d}\mathscr{H}^2, \tag{2.2}$$

wobei $\nu \colon M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ die äußere Normale

$$\nu(x, g(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla g(x) \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

bezeichnet.

Hinweis: Beispiel 5.7 erweist sich als nützlich. Zu b): Zeigen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\det(\mathbf{1}_n + v^\intercal v) = 1 + |v|^2$ indem Sie v zu einer Orthogonalbasis ergänzen.

Aufgabe 11.3 (Satz von Gauß) **5 Punkte**

a) Zeigen Sie, dass die äußere Normale $\nu \colon \mathbb{S}^{m-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ gegeben ist durch $\nu = \mathrm{id}$.

b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt mit C^1–Rand. Sei $\nu \colon \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{S}^{m-1}$ die äußere Normale. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\partial\Omega} x \cdot \nu(x) \, \mathrm{d}\mathscr{H}^{m-1} = m\mathscr{L}^m(\Omega). \tag{3.1}$$

Folgern Sie hieraus, dass $\mathscr{H}^{m-1}(\mathbb{S}^{m-1}) = m\mathscr{L}^m(B)$, wobei $B := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} x_1^4 \, \mathrm{d}\mathscr{H}^2(x)$.

Abgabe bis spätestens 11.02.2021, 14:00 Uhr in Moodle.

Zusatzaufgabe 11.1 (Greensche Formeln) **3 Punkte**
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1–Rand. Sei $\nu\colon \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ die äußere Normale an $\partial\Omega$. Zu einer Funktion $f \in C^2(\Omega)$ definieren wir die Differentialoperatoren

$$\Delta f \coloneqq \operatorname{div}(\nabla f), \qquad \partial_\nu f \coloneqq \nabla f \cdot \nu. \tag{4.1}$$

Seien $\varphi, \psi \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß die drei Greenschen Formeln:

a) $\displaystyle\int_\Omega \Delta\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu\varphi \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}.$

b) $\displaystyle\int_\Omega \varphi\,\Delta\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \varphi\,\partial_\nu\psi \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}.$

c) $\displaystyle\int_\Omega \varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \varphi\,\partial_\nu\psi - \psi\,\partial_\nu\varphi \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}.$