Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg | Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Sommersemester 2021 | Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 5

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 17. - 21. Mai 2021
Bitte geben Sie maximal 2 Aufgaben per Übungsgruppensystem zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!
Nutzen Sie dazu den Link `https://uebungen.physik.uni-heidelberg.de/h/1291`

1. *Verständnisfragen*

a) Warum erscheint in der Neumann-Gleichung der Kommutator $[\hat{H}, \rho]$, während in der Heisenberg-Gleichung der Kommutator $[A, \hat{H}]$ erscheint?

b) Welche allgemeinen Eigenschaften können Sie eindimensionalen Wellenfunktionen zuschreiben, die die stationäre Schrödingergleichung lösen? Erläutern Sie ihre Bedeutung.

c) Welche Form haben die Orts- und Impulsoperatoren im Orts- bzw. Impulsraum? Erklären Sie diese Formen und prüfen Sie die Hermitezität.

2. *Endlich tiefer Potentialtopf*

Gegeben sei ein eindimensionales (endlich tiefes) Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$, $a > 0$. Die Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ der gebundenen Energiezustände eines Teilchens in einem solchen inversionsinvarianten eindimensionalen Potential sind stets gerade oder ungerade Funktionen der Ortsvariablen x.

a) Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen

$$\begin{aligned} \kappa a &= Ka\tan(Ka) \quad \text{für gerade Eigenfunktionen,} \\ \kappa a &= -Ka\cot(Ka) \quad \text{für ungerade Eigenfunktionen,} \\ \frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2 &= (Ka)^2 + (\kappa a)^2 \end{aligned}$$

mit $K = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - |E|)}$ und $\kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m|E|}$ für die Energieeigenwerte $-V_0 < E < 0$ der gebundenen Zustände eines Teilchens der Masse m in diesem Potential gelten.

b) Besitzt dieses Potential für beliebiges V_0 und a einen gebundenen Zustand? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. *Projektionsoperatoren*

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}.$$

Ein linearer Operator $\hat{P}$ heißt Projektionsoperator, falls er die Eigenschaft

$$\hat{P}^2 \equiv \hat{P} \circ \hat{P} = \hat{P}$$

erfüllt. Hierbei steht „$\circ$“ für Hintereinanderausführung. Sei weiterhin $\{|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle\}$ das vollständige Orthonormalsystem von Eigenvektoren des linearen Operators $\hat{A}$ mit den nicht-entarteten Eigenwerten a_i zu den Eigenvektoren $|\psi_i\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass der durch $\hat{P}_i \equiv |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$ definierte Operator ein Projektionsoperator ist, und dass $\hat{P}_i^\dagger = \hat{P}_i$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{spec}(\hat{P}_i) \subseteq \{0, 1\}$, dass also 0 und 1 die möglichen Eigenwerte von $\hat{P}_i$ sind.

c) Beweisen Sie die Relation

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^{n} |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$$

und die sog. *Spektraldarstellung* des Operators,

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| .$$

d) Was ist die einfache geometrische Veranschaulichung einer durch $\hat{P}_i$ induzierten Projektion von Vektoren im $\mathbb{R}^3$?

4. Eindimensionale Potentialbarriere

Wir betrachten eine eindimensionale Potentialbarriere der Höhe $V_0 \in \mathbb{R}_+$ und der Tiefe $a \in \mathbb{R}_+$. Der Hamilton-Operator für ein Teilchen der Masse m ist im Ortsraum

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{für } a < x \end{cases} .$$

Wir wollen verallgemeinerte Eigenzustände $\psi(x)$ von $\hat{H}$ zur Energie E finden. Dabei soll zunächst $0 < E < V_0$ gelten. Wir machen den allgemeinen Ansatz (vgl. mit der Vorlesung)

$$\psi(x) = \begin{cases} A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & \text{für } x < 0 \\ C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'x} + D\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'x} & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ E\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + F\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} & \text{für } a < x \end{cases}$$

mit $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie k und k' so, dass dieses $\psi(x)$ ein verallgemeinerter Eigenzustand zur Energie E ist.

Wir wollen eine von links einlaufende ebene Welle untersuchen und wählen dazu wie in der Vorlesung $A = 1$ und $F = 0$.

b) Finden Sie die notwendigen (Anschluss-)Bedingungen für die anderen Koeffizienten $B, \ldots, E$ in Form eines linearen Gleichungssystems.

Die Koeffizienten C und D können eliminiert werden und man findet

$$B = \frac{(k^2 - k'^2)(1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k'a})}{(k + k')^2 - (k - k')^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k'a}}$$

$$E = \frac{4kk'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'-k)a}}{(k + k')^2 - (k - k')^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k'a}}$$

c) Bestimmen Sie hieraus den Reflexionskoeffizienten $R = |B|^2$ und den Transmissionskoeffizienten $T = |E|^2$, d.h. die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein Teilchen am Potential reflektiert wird bzw. durch das Potential tunnelt. Zeigen Sie $R + T = 1$.

d) Diese Resultate gelten auch, wenn $E \geq V_0$. Wie sieht k' in den Fällen $E \leq V_0$ und $E \geq V_0$ aus? Wie wirkt sich das auf die funktionale Abhängigkeit der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus?

e) Skizzieren Sie den Transmissionskoeffizienten als Funktion von E/V_0 im Bereich $0 \leq E/V_0 \leq 4$, zum Beispiel für $mV_0a^2/\hbar^2 = 8$. Wie groß ist der Transmissionskoeffizient im Fall $E \to V_0$? Bei welchen Energieeigenwerten ist die Barriere vollständig durchlässig?*

---

* *Hinweis:* Zu diesem Aufgabenteil wird es ein Jupyter-Notebook geben. Den Link dazu finden Sie auf der Website der Vorlesung.

Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 5: Lösung

1. Verständnisfragen

a) Der Unterschied zwischen der Neumann- und der Heisenberg-Gleichung liegt in der Form der Operatoren $\hat{\rho}$ und $\hat{A}$. Der Dichteoperator ist eine Summe aus Projektionen auf die Zustände $|n,t\rangle$, wobei die Zeitentwicklung der Zustände durch den Operator $\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t\right)$ gegeben ist. Eine Projektion ist gegeben durch $|n,t\rangle\langle n,t| = \hat{U}(t)\,|n,t_0\rangle\langle n,t_0|\,\hat{U}^{-1}(t)$. Die zeitliche Ableitung von $\hat{\rho}(t)$ führt dann auf die Neumann-Gleichung. In der Heisenberg betrachten wir die zeitliche Ableitung des Operators $\hat{A}_H$ im Heisenberg-Bild. Dieser Operator ist gegeben durch $\hat{A}_H = \hat{U}^{-1}(t)\hat{A}\hat{U}(t)$, da die Zeitentwicklung von den Zuständen auf den Operator übertragen wird: $\langle\psi_t|\,\hat{\mathrm{A}}\,|\psi_t\rangle = \langle\psi_0|\hat{U}^{-1}(t)\,\hat{\mathrm{A}}\,\hat{U}(t)|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\,\hat{\mathrm{A}}_H\,|\psi_0\rangle$. Eine zeitliche Ableitung von $\hat{\mathrm{A}}_H$ führt zur bekannten Heisenberg-Gleichung.
Der Grund für die unterschieldichen Vorzeichen liegt also an der Reihenfolge im Produkt der Zustände: Für den Dichteoperator ist dies Vektor mal Dualvektor und für einen Operator im Heisenberg-Bild ist dies Dualvektor mal Vektor.

b) Allgemeine Eigenschaften der Wellenfunktionen sind

i. ψ ist normiert: $||\psi||^2 = \int|\psi|^2\mathrm{d}x = 1$

ii. $\psi \in L_2(C)$: Wellenfunktionen sind quadratintegrabel und gehören zur Äquivalenzklasse $[\psi] = \{\phi \in \mathcal{L}_2(C)|||\phi-\psi|| = 0\}$. Die Äquivalenzklasse ist nötig, um das Problem zu beseitigen, dass die Norm auf einer Domäne C mit Maß Null verschwindet, obwohl die Wellenfunktion verschieden von Null ist. Der Raum $L_2(C)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle\phi,\psi\rangle = \int\phi^*\psi\mathrm{d}x$$

ein Hilbertraum.

iii. ψ muss stetig und differenzierbar sein.

iv. ψ muss Randbedingungen erfüllen:
- Dirichlet-Randbedingungen: $\psi(a) = 0 = \psi(b)$
- Neumann-Randbedingungen: $\psi'(a) = 0 = \psi'(b)$

v. Knotensatz: Der Grundzustand kann keine Nullstelle haben und der n-te angeregte Zustand muss n Knoten- bzw. Nullstellen haben. Dies gilt für das Intervall, in dem die Schrödingergleichung gelöst wird.

c) Die Formen der Operatoren sind:

$$\hat{\mathrm{Q}} = \begin{cases}\vec{x} & \text{(Ortsdarstellung)}\\ \mathrm{i}\hbar\nabla_p & \text{(Impulsdarstellung)}\end{cases}$$

$$\hat{\mathrm{P}} = \begin{cases}-\mathrm{i}\hbar\nabla_x & \text{(Ortsdarstellung)}\\ \vec{p} & \text{(Impulsdarstellung)}\end{cases}$$

Diese Formen kommen durch die Verbindung des Orts- und Impulsraums in der Fouriertransformation zustande.

Ein Operator $\hat{\mathrm{A}}$ ist hermitesch, falls $\langle \hat{\mathrm{A}}\,\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\,\hat{\mathrm{A}}\,\psi\rangle$ gilt. Wir beginnen mit dem Ortsoperator in Ortsdarstellung

$$\langle \hat{\mathrm{Q}}\,\psi|\psi\rangle = \int (\vec{x}\psi)^*\psi \mathrm{d}^3x = \int \vec{x}^*\psi^*\psi \mathrm{d}^3x = \int \psi^*\vec{x}\psi \mathrm{d}^3x = \langle\psi|\,\hat{\mathrm{Q}}\,\psi\rangle\,.$$

Für den Impulsoperator in Ortsdarstellung bekommen wir

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathrm{P}}\,\psi|\psi\rangle &= \int(-\mathrm{i}\hbar\nabla_x\psi)^*\psi \mathrm{d}^3x = \mathrm{i}\hbar\int(\nabla_x\psi^*)\psi\mathrm{d}^3x \\ &= \mathrm{i}\hbar\left(\psi^*\psi|_{-\infty}^{\infty} - \int\psi^*\nabla_x\psi\mathrm{d}^3x\right) = \int\psi^*(-\mathrm{i}\hbar\nabla_x\psi)\mathrm{d}^3x = \langle\psi|\,\hat{\mathrm{P}}\,\psi\rangle\,,\end{aligned}$$

wobei wir ausnutzen, dass die Wellenfunktion im Unendlichen verschwindet. Die selben Rechnungen können wir auch mit den Operatoren in Impulsdarstellung durchführen und kommen zu dem Ergebnis, dass Orts- und Impulsoperatoren hermitesch sind.

2. *Endlich tiefer Potentialtopf*

a) Wir beginnen mit der stationären Schrödinger-Gleichung

$$\begin{aligned}E\psi(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) \\ 0 &= \psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi(x),\end{aligned}$$

die wir mit einem Exponentialansatz lösen können:

$$\psi(x) \propto \exp(\pm \mathrm{i}kx)\,.$$

Der Wert von k ist von der Energie E des Teilchens und dem Potential $V(x)$ abhängig. Wir teilen die x-Achse in drei Bereiche auf, in denen das Potential folgende Werte annimmt:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \qquad \text{(I)} \\ -V_0 & -a \leq x \leq a \qquad \text{(II)} \\ 0 & a < x \qquad \text{(III).}\end{cases}$$

Hier ist $V_0 > 0$ und $a > 0$. Damit finden wir für k in den Bereichen (I) und (III) $\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$, wobei $-V_0 < E < 0$, und im Bereich (II) $K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - |E|)}$.
Dann benutzen wir die Symmetrie des Potentials, um etwas über die Wellenfunktionen auszusagen:

$$V(x) = V(-x) \Rightarrow \psi_n(x) = \psi_n(-x) = (-1)^n\psi_n(x) \tag{1}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und Energieeigenwerten $E_0 < E_1 < E_2 < .. < 0$. Für die Lösungen müssen wir außerdem fordern, dass sie in großen Abständen vom Potential verschwinden

$$\lim_{x\to\pm\infty}\psi_n(x) = 0. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) können wir die Form der geraden und ungeraden Wellenfunktionen bestimmen

$$\psi_{2n}(x) = \begin{cases} B\,\mathrm{e}^{\kappa x} \\ A\cos(Kx) \\ C\,\mathrm{e}^{-\kappa x}\end{cases}$$

$$\psi_{(2n+1)}(x) = \begin{cases} B'\,\mathrm{e}^{\kappa x} \\ A'\sin(Kx) \\ -C'\,\mathrm{e}^{-\kappa x}\end{cases}$$

Wir betrachten zuerst die *geraden* Wellenfunktionen: Die Stetigkeit der Wellenfunktion und ihrer ersten Ableitung bei $x = -a$ und $x = a$ führen auf dieselbe Bedingung:

$$\begin{aligned} A\cos(Ka) &= C\exp(-\kappa a) \\ -AK\sin(Ka) &= -C\kappa\exp(-\kappa a) \end{aligned}$$

Wir teilen die zweite durch die erste Gleichung, multiplizieren mit a und erhalten die gesuchte Bedingung

$$Ka\tan(Ka) = \kappa a.$$

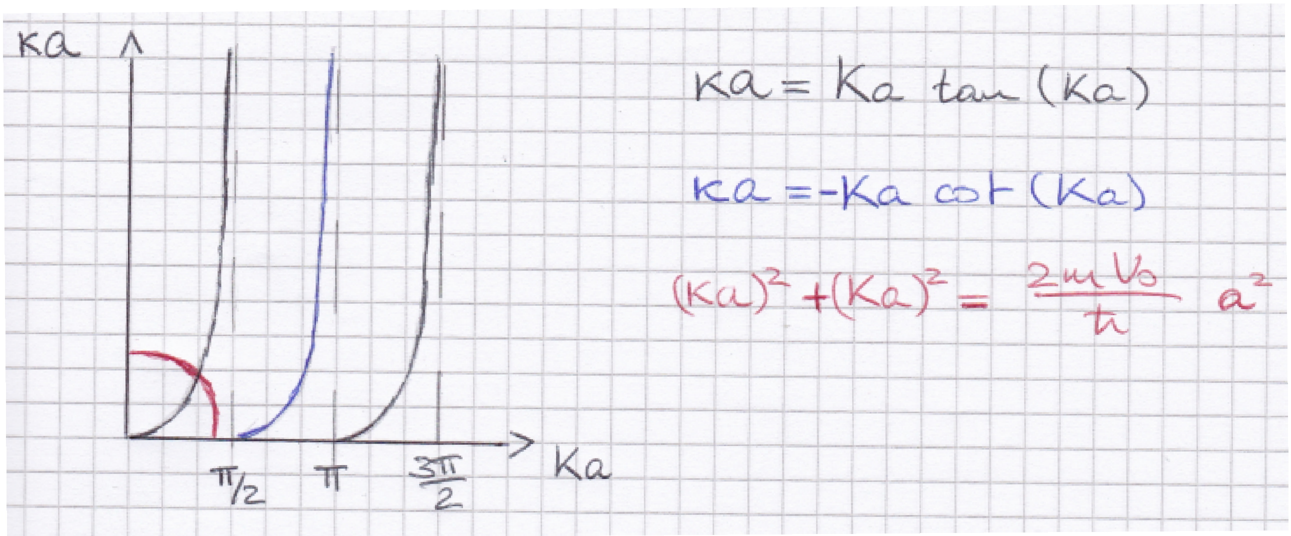
Dasselbe können wir für *ungerade* Wellenfunktionen wiederholen:

$$\begin{aligned} A'\sin(Ka) &= -C'\exp(-\kappa a) \\ A'K\cos(Ka) &= C'\kappa\exp(-\kappa a) \\ \rightarrow \qquad \kappa a &= -Ka\cot(Ka). \end{aligned}$$

Die dritte Bedingung erhalten wir durch Addition unserer Definitionen von κ und K:

$$(Ka)^2 + (\kappa a)^2 = a^2\frac{2m}{\hbar^2}\left((V_0 - |E|) + |E|\right) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}a^2.$$

b) Es gibt wenigstens einen gebundenen Zustand. Die Aufgabe lässt sich am einfachsten graphisch lösen



3. *Projektionsoperatoren*

a)

$$\hat{P}_i^2 = \left(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)\left(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) = |\psi_i\rangle\underbrace{\langle\psi_i|\psi_i\rangle}_{=1}\langle\psi_i| = |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \hat{P}_i$$

Damit ist $\hat{P}_i$ ein Projektionsoperator. Außerdem gilt

$$\hat{P}_i^\dagger = \left(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)^\dagger = \left(\langle\psi_i|\right)^\dagger\left(|\psi_i\rangle\right)^\dagger = |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \hat{P}_i.$$

b) Sei $|f\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{P}_i$ mit Eigenwert λ, sodass

$$\begin{aligned} \hat{P}_i |f\rangle &= \lambda |f\rangle \\ \hat{P}_i^2 |f\rangle &= \lambda \hat{P}_i |f\rangle \\ \hat{P}_i |f\rangle &= \lambda^2 |f\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad (\lambda - \lambda^2)|f\rangle = 0$$

Also muss $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ sein.

c) Sei $|\phi\rangle \in V$ beliebig. Da $\{|\psi_1\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle\}$ nach Voraussetzung vollständig ist, kann $|\phi\rangle$ in dieser Basis entwickelt werden,

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i |\psi_i\rangle \qquad \text{mit} \qquad f_i \in \mathbb{C}.$$

Anwendung von $\sum_{i=1}^{n} |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$ auf $|\phi\rangle$ führt damit auf

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| f_j |\psi_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_j |\psi_i\rangle \underbrace{\langle\psi_i|\psi_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} f_i |\psi_i\rangle = |\phi\rangle$$

und damit $\sum_{i=1}^{n} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \hat{I}$, da $|\phi\rangle$ beliebig war.

Die Spektraldarstellung des Operators $\hat{A}$ wird folgendermaßen gezeigt. Da die $|\psi_i\rangle$ Eigenvektoren von $\hat{A}$ sind, gilt

$$\hat{A}|\phi\rangle = \hat{A}\sum_{i=1}^{n} f_i|\psi_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i |\psi_i\rangle.$$

Andererseits gilt aber auch, dass

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i f_j |\psi_i\rangle \underbrace{\langle\psi_i|\psi_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i |\psi_i\rangle.$$

Da $|\phi\rangle$ beliebig war, gilt somit

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|.$$

d) Für ein $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\vec{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \vec{e}_i$ mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_i$. In diesem Fall ist

$$\hat{P}_i \vec{v} = \vec{e}_i (\vec{e}_i \cdot \vec{v}) = v_i \vec{e}_i.$$

$\hat{P}_i$ projiziert also den Anteil von $\vec{v}$ in Richtung $\vec{e}_i$ (parallele Projektion).

4. Eindimensionale Potentialbarriere

a) Die Wellenzahlen k und k' richten sich nach dem Wert des Potentials $V(x)$. Außerhalb der Potentialbarriere ist das Potential gleich Null. Daher ist dort die Wellenzahl

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\mathrm{i}k)^2 = E \quad \to \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E.$$

Innerhalb der Barriere nimmt das Potential den Wert $V_0 > 0$ an, also

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\mathrm{i}k')^2 + V_0 = E \quad \to \quad k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0).$$

b) Die notwendigen (Anschluss-)Bedingungen sind gegeben durch die Forderung der Stetigkeit der Wellenfunktion und ihrer Ableitung bei $x = 0$ und bei $x = a$. Wir benutzen $A = 1$ und $F = 0$ und setzen in $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ an den Stellen ein

- $\underline{x = 0}$:

$$\begin{aligned} 1 + B &= C + D \\ k(1 - B) &= k'(C - D) \end{aligned}$$

- $\underline{x = a}$:

$$\begin{aligned} C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'a} + D\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'a} &= E\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} \\ k'\left(C\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'a} - D\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'a}\right) &= kE\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} \end{aligned}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der ersten beiden Gleichungen und der zweiten beiden Gleichungen können die Koeffizienten C und D eliminiert werden und man erhält für die Koeffizienten B und E die gegebenen Ausdrücke. Wie erwartet sind B und E symmetrisch unter $k' \to -k'$, da nur k'^2 physikalisch relevant ist.

c) Der Reflexionskoeffizient wird bestimmt durch den Koeffizienten B:

$$\begin{aligned} R = |B|^2 &= \frac{(k^2 - k'^2)^2(2 - 2\cos(2k'a))}{(k + k')^4 + (k - k')^4 - 2(k - k')^2(k + k')^2\cos(2k'a)} \\ &= \frac{4(k^2 - k'^2)^2\sin^2(k'a)}{16k^2k'^2 + 4(k^2 - k'^2)\sin^2(k'a)} \\ &= \frac{(k^2 - k'^2)^2\sin^2(k'a)}{4k^2k'^2 + (k^2 - k'^2)\sin^2(k'a)} \\ &= \frac{V_0^2\sin^2(k'a)}{4E(E - V_0) + V_0^2\sin^2(k'a)} \\ &= \left(1 + \frac{4\frac{E}{V_0}\left(\frac{E}{V_0} - 1\right)}{\sin^2(k'a)}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass $2\cos\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$ und $k^2 - k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}V_0$ gilt. Der Transmissionskoeffizient ist durch E bestimmt:

$$\begin{aligned} T = |E|^2 &= \frac{16k^2k'^2}{16k^2k'^2 + 4(k^2 + k'^2)\sin^2(k'a)} \\ &= \frac{4E(E - V_0)}{4E(E - V_0) + V_0^2\sin^2(k'a)} \\ &= \left(1 + \frac{\sin^2(k'a)}{4\frac{E}{V_0}\left(\frac{E}{V_0} - 1\right)}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Addition von T und R zeigt, dass $R + T = 1$ gilt.

d) Für $E < V_0$ ist k' rein imaginär. In diesem Fall wird aus $\sin^2(k'a)$ ein $-\sinh(|k'|a)$ und die eingehende Welle wird innerhalb des Potential gedämpft.

e) Die Skizze können Sie mit dem Jupyter-Notebook erstellen. Wir betrachten den Grenzfall $E \to V_0$:

$$\sin^2(k'a) = \sin^2\sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}a^2} \simeq \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}a^2 \quad \text{für } E \simeq V_0.$$

Dann gilt im Grenzfall

$$\lim_{E\to V_0} T = \lim_{E\to V_0} \frac{4E(E-V_0)}{4E(E-V_0) + V_0^2 \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2} a^2} = \frac{1}{1+\frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2}}.$$

Die Barriere wird vollständig durchlässig, falls $\sin^2(k'a) = 0$ und damit $T = 1$. Dann muss $k'a = n\pi$ mit $n \in \mathbb{N}_+ \setminus 0$. Also ist bei Energien

$$E = V_0 + \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

die Barriere vollständig durchlässig.