Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2021/22

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. K. Hübner

Blatt 10
Abgabetermin: Freitag, 21.1.2022, 09:30 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte). Zeigen Sie: $3 \mid h_{\mathbb{Q}(\zeta_{23})}$.
Hinweis: Bestimmen Sie die Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ und wenden Korollar 5.43 an.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

(a) Es seien a, b, c teilerfremde positive ganze Zahlen, sodass $a^2 + b^2 = c^2$. Zeigen Sie, dass dann a oder b (aber nicht beide) gerade ist.

(b) Falls a gerade ist, finden Sie teilerfremde positive ganze Zahlen x und y, sodass

$$a = 2xy \qquad b = x^2 - y^2 \qquad c = x^2 + y^2.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Gleichung $u^4 + v^4 = w^2$ keine Lösung hat für positive ganze Zahlen u, v, w. Insbesondere gilt Fermats letzter Satz für $n = 4$.
Hinweis: Konstruieren Sie aus einer Lösung (u, v, w) *mit Hilfe von Teil (b) eine weitere Lösung* (u', v', w') *mit* $w' < w$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei K ein Zahlkörper und S eine endliche Menge von Null verschiedener Primideale von $\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie: es existiert ein $a \in \mathcal{O}_K$ mit $\mathcal{O}_K[\frac{1}{a}] = \mathcal{O}_{K,S}$.

Aufgabe 4 (8 Punkte). Sei A ein Dedekindring mit Quotientenkörper K. Zeigen Sie:

(a) Ein nullteilerfreier Ring B ist genau dann noethersch von Krulldimension höchstens 1, wenn für alle $b \in B \smallsetminus \{0\}$ der Faktorring B/bB endliche Länge hat.

(b) Sei $a \in A$ und M ein torsionsfreier A-Modul, sodass $K \otimes_A M$ endlich-dimensional als K-Vektorraum ist. Dann gilt

$$\ell(M/aM) \leq \ell(A/aA) \cdot \dim_K(K \otimes_A M).$$

Hinweis: Reduzieren Sie auf den Fall, dass M *endlich erzeugt ist. Wählen Sie eine Basis von* $K \otimes_A M$*, die in* M *enthalten ist. Sei* F *der Untermodul von* M*, der von den Elementen der Basis erzeugt wird. Tensorieren Sie die exakte Folge* $F \to M \to M/F \to 0$ *mit* A/a^nA *und stellen Sie eine Beziehung zwischen den Längen der einzelnen Terme auf. Betrachten Sie dann den Limes für* $n \to \infty$.

(c) Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Dann ist jeder Ring B mit $A \subseteq B \subseteq L$ noethersch und höchstens eindimensional.

(d) Satz 3.34 aus der Vorlesung ist auch für endliche nichtseparable Erweiterungen richtig.