Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I

13. Übungsblatt

keine Abgabe, Besprechung am 6.2.

Aufgabe 1. Sei K ein Körper der Charakteristik ungleich 2, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$ eine Bilinearform. Zeigen Sie: Es existieren eindeutig bestimmte Bilinearformen γ_s, $\gamma_a \in \mathrm{Bil}(V)$ mit

- γ_s ist symmetrisch,
- γ_a ist antisymmetrisch,
- $\gamma = \gamma_s + \gamma_a$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 16 & 8 & 10 \\ -3 & 8 & 4 & 11 \\ 3 & 10 & 11 & 16 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ und Zahlen r_+, r_-, r_0 derart, dass

$$T^t A T = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & \mathbf{0}_{r_0} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Wir betrachten den auf Blatt 12 eingeführten Operator $\int - \,\mathrm{d}x \colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ und die zugehörige Bilinearform $\gamma \colon \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leqslant 2} \to \mathbb{R}, \gamma(f,g) = \left(\int (f \cdot g)\mathrm{d}x\right)(1_{\mathbb{R}}) \left(= \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)$, deren Fundamentalmatrix zur Basis $(1, x, x^2)$ durch

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass γ positiv definit ist.

(b) Bestimmen Sie eine obere Dreiecksmatrix Matrix $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit $T^t T = G$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie eine Matrix $T \in SO(4)$, sodass

$$T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}$$

Diagonalgestalt hat.