Minimal auf**spannende** Bäume

Nico Haaf und Josua Kugler

19.05.20

Motivation

- Konstruktion verbundener Netzwerke:

Motivation

- Konstruktion verbundener Netzwerke:
    - Telekommunikation

Motivation

Abbildung: [Abb4] Haupt-Internetverbindungen des Europäischen Netzwerks

Motivation

- Konstruktion verbundener Netzwerke:
  - Telekommunikation
  - Wasser- und Elektrizitätsversorgung

Motivation

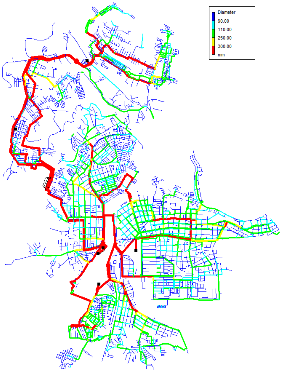


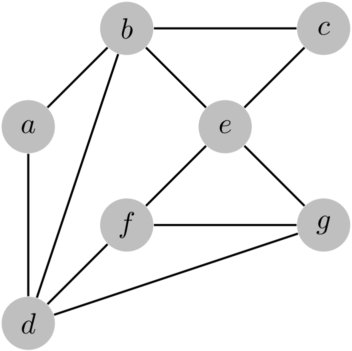
Abbildung: [Abb5] Wasserversorgungsnetzwerk in einer Stadt

Motivation

- Konstruktion verbundener Netzwerke:
    - Telekommunikation
    - Wasser- und Elektrizitätsversorgung

Grundlegende Definitionen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E.

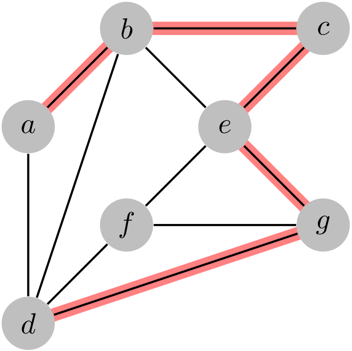


Grundlegende Definitionen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E.

Definition (Pfad)

$v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ mit Kanten
$e = (v_{i-1}, v_i) \in E \quad \forall 1 \leq i \leq n$



Grundlegende Definitionen

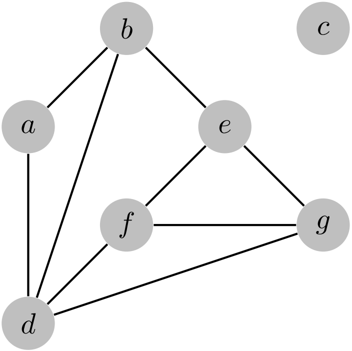
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E.

Definition (zusammenhängend)

$\forall v_1, v_2 \in V \exists$ Pfad von v_1 nach v_2.

Definition (Zusammenhangskomponenten)

maximal zusammenhängende Teilgraphen



Grundlegende Definitionen

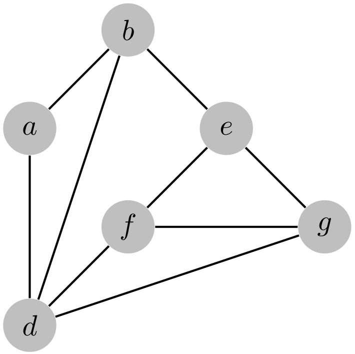
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E.

Definition (zusammenhängend)

$\forall v_1, v_2 \in V \exists$ Pfad von v_1 nach v_2.

Definition (Zusammenhangskomponenten)

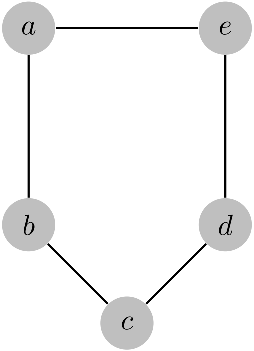
maximal zusammenhängende Teilgraphen



Allgemeine Definitionen

Definition (Kreis)

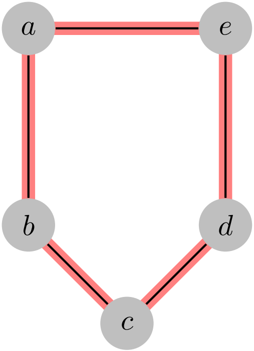
Ist $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ mit $n > 1$ ein Pfad, so heißt $(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_0)$ Kreis.



Allgemeine Definitionen

Definition (Kreis)

Ist $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ mit $n > 1$ ein Pfad, so heißt $(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_0)$ Kreis.



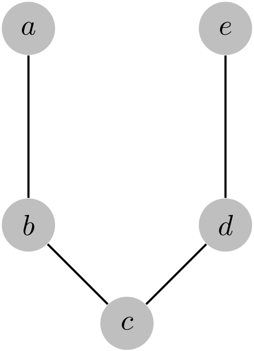
Allgemeine Definitionen

Definition (Kreis)

Ist $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ mit $n > 1$ ein Pfad, so heißt $(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_0)$ Kreis.

Definition

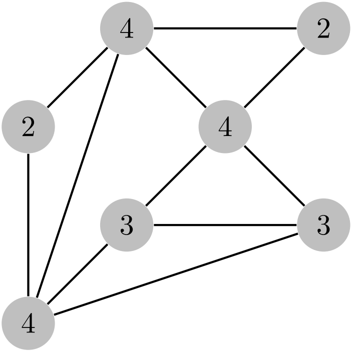
Einen Graphen ohne Kreise nennt man **azyklisch**.



Allgemeine Definitionen

Definition (Grad)

$d(v) = |\{e \in E | v \in e\}|$



Definition Baum

Definition

Ein Baum ist eine ausdauernde und verholzende Samenpflanze mit einer dominierende Sprossachse, die durch sekundäres Dickenwachstum an Umfang zunimmt.

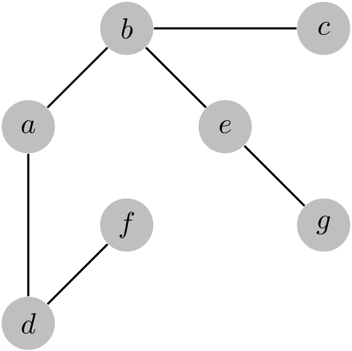
Definition Baum

Nein Spass, jedes Kind weiß, dass das so nicht stimmt. In Wirklichkeit ist das ganz anders.

Definition Baum

Definition (Baum)

zusammenhängender, azyklischer Graph



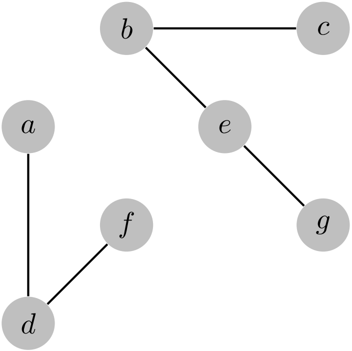
Definition Baum

Definition (Baum)

zusammenhängender, azyklischer Graph

Definition (Wald)

Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind



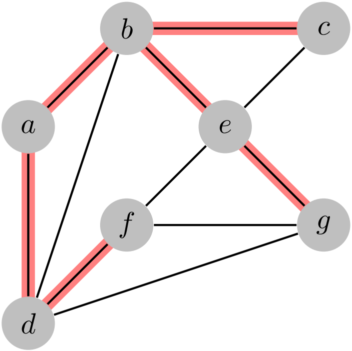
Definition Baum

Definition (Baum)

zusammenhängender, azyklischer Graph

Definition (aufspannender Baum)

Ein **aufspannender Baum** eines Graphen G ist ein Baum, der alle Knoten von G enthält.



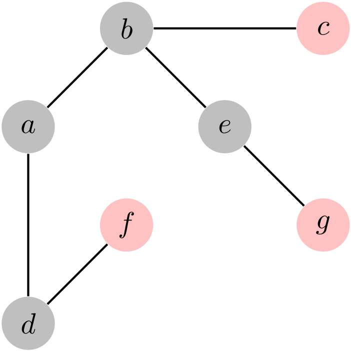
Definition Baum

Definition (Baum)

zusammenhängender, azyklischer Graph

Definition (Blatt)

Ein Knoten eines Baums mit Grad 1 heißt **Blatt**.



Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

In einem Baum gibt es genau einen Pfad zwischen zwei Knoten.

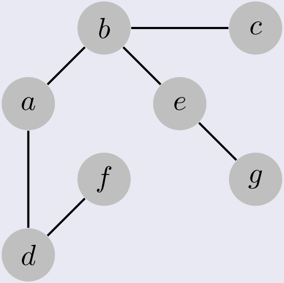
Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

In einem Baum gibt es genau einen Pfad zwischen zwei Knoten.

Beweis.

- Zusammenhang $\Longrightarrow \exists$ Pfad.



$\square$

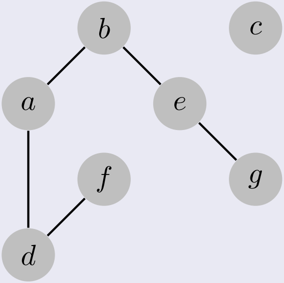
Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

In einem Baum gibt es genau einen Pfad zwischen zwei Knoten.

Beweis.

- Zusammenhang $\Longrightarrow \exists$ Pfad.



$\square$

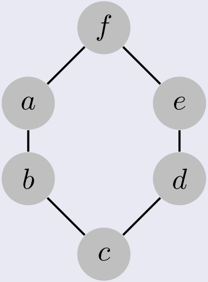
Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

In einem Baum gibt es genau einen Pfad zwischen zwei Knoten.

Beweis.

- Zusammenhang $\implies \exists$ Pfad.
- Annahme: Es gibt verschiedene Pfade zwischen v_1 und v_2 $\implies$ Kreis $\implies$ $\lightning$.



$\square$

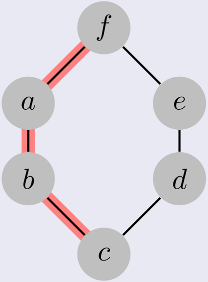
Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

In einem Baum gibt es genau einen Pfad zwischen zwei Knoten.

Beweis.

- Zusammenhang $\implies \exists$ Pfad.
- Annahme: Es gibt verschiedene Pfade zwischen v_1 und v_2 $\implies$ Kreis $\implies$ ↯.



□

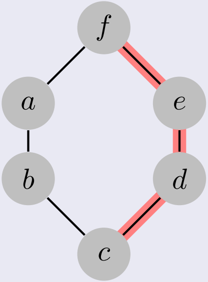
Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

In einem Baum gibt es genau einen Pfad zwischen zwei Knoten.

Beweis.

- Zusammenhang $\implies \exists$ Pfad.
- Annahme: Es gibt verschiedene Pfade zwischen v_1 und v_2 $\implies$ Kreis $\implies$ ↯.



$\square$

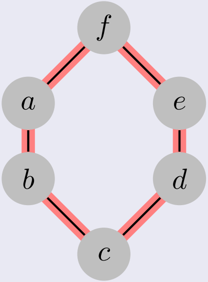
Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

In einem Baum gibt es genau einen Pfad zwischen zwei Knoten.

Beweis.

- Zusammenhang $\implies \exists$ Pfad.
- Annahme: Es gibt verschiedene Pfade zwischen v_1 und v_2 $\implies$ Kreis $\implies$ ↯.



$\square$

Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

Ein Baum ist minimal zusammenhängend und maximal kreisfrei.

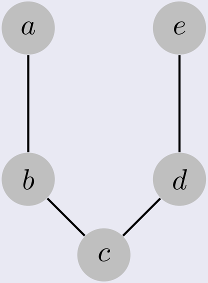
Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

Ein Baum ist minimal zusammenhängend und maximal kreisfrei.

Beweis.

- Kante entfernen



□

Grundlegende Eigenschaften eines Baums

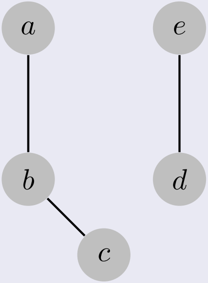
Lemma

Ein Baum ist minimal zusammenhängend und maximal kreisfrei.

Beweis.

- Kante entfernen

$\Longrightarrow$ Pfad unterbrochen



$\square$

Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

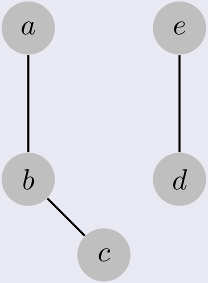
Ein Baum ist minimal zusammenhängend und maximal kreisfrei.

Beweis.

- Kante entfernen

$\Longrightarrow$ Pfad unterbrochen

$\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow}$ nicht mehr zusammenhängend



$\square$

Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

Ein Baum ist minimal zusammenhängend und maximal kreisfrei.

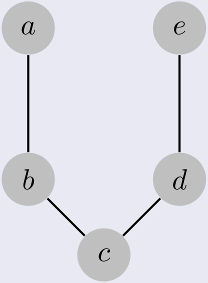
Beweis.

- Kante entfernen

$\Longrightarrow$ Pfad unterbrochen

$\xRightarrow{\text{Lemma 1}}$ nicht mehr zusammenhängend

- Kante hinzufügen



$\square$

Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

Ein Baum ist minimal zusammenhängend und maximal kreisfrei.

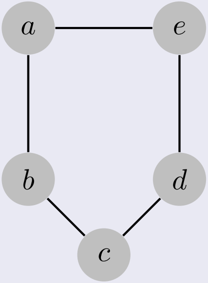
Beweis.

- Kante entfernen

  $\Longrightarrow$ Pfad unterbrochen

  $\xRightarrow{\text{Lemma 1}}$ nicht mehr zusammenhängend
- Kante hinzufügen

  $\Longrightarrow$ neuer Weg



$\square$

Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

Ein Baum ist minimal zusammenhängend und maximal kreisfrei.

Beweis.

- Kante entfernen

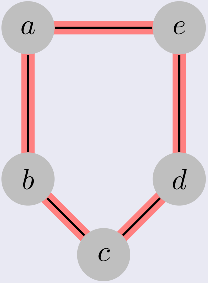
$\Longrightarrow$ Pfad unterbrochen

$\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow}$ nicht mehr zusammenhängend

- Kante hinzufügen

$\Longrightarrow$ neuer Weg

$\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow}$ Kreis



□

Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

Ein Baum mit n Knoten besitzt $n-1$ Kanten.

Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

Ein Baum mit n Knoten besitzt $n-1$ Kanten.

Beweis.

- Induktionsanfang:
  1 Knoten $\implies$ 0 Kanten

$\square$

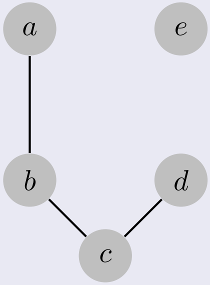
Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

Ein Baum mit n Knoten besitzt $n-1$ Kanten.

Beweis.

- Induktionsanfang:
  1 Knoten $\implies$ 0 Kanten
- Induktionsschritt:
  $k \to k+1$ Knoten $\implies$ $+1$ Kante, sonst Kreis.



$\square$

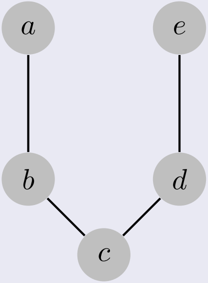
Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

Ein Baum mit n Knoten besitzt $n-1$ Kanten.

Beweis.

- Induktionsanfang:
  1 Knoten $\implies$ 0 Kanten
- Induktionsschritt:
  $k \to k+1$ Knoten $\implies$ $+1$ Kante, sonst Kreis.



$\square$

Grundlegende Eigenschaften eines Baums

Lemma

In einem Baum gibt es genau einen Pfad zwischen zwei Knoten.

Lemma

Ein Baum ist minimal zusammenhängend und maximal kreisfrei.

Lemma

Ein Baum mit n Knoten besitzt $n - 1$ Kanten.

Der Satz von Cayley

Sei ein $G = (E, K)$ ein vollständiger Graph (n Konten und $\binom{n}{2}$ Kanten). Sei $t(n)$ die Anzahl und T die Menge der aufspannenden Bäume. Seien die Konten von G von 1 bis n durchnummeriert.

Der Satz von Cayley

Sei ein $G = (E, K)$ ein vollständiger Graph (n Konten und $\binom{n}{2}$ Kanten). Sei $t(n)$ die Anzahl und T die Menge der aufspannenden Bäume. Seien die Konten von G von 1 bis n durchnummeriert.

Theorem

Es gilt: $t(n) = n^{n-2}$.

Der Satz von Cayley

Theorem

Es gilt: $t(n) = n^{n-2}$.

Beweis.

- Abb: $T \xrightarrow{\sim}$ Menge der $(n-2)$ -Tupel, Einträge aus $\{1, ..., n\}$.

Der Satz von Cayley

Theorem

Es gilt: $t(n) = n^{n-2}$.

Beweis.

- Abb: $T \xrightarrow{\sim}$ Menge der $(n-2)$ -Tupel, Einträge aus $\{1, ..., n\}$.
- Zuordnung durch Prüfer-Code

Der Satz von Cayley

Beweis.

- Abb: $T \xrightarrow{\sim}$ Menge der $(n-2)$ -Tupel, Einträge aus $\{1, ..., n\}$.
- Zuordnung durch Prüfer-Code
-   1. Finde Knoten Grad 1 mit minimaler Nummer v. Nachbar von v ist a_1.
    2. Entferne v und indizierte Kante. Gehe zu (1), führe $n-2$ mal aus. Gesuchtes Tupel ist $(a_1, ..., a_{n-2})$.

$\square$

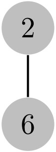
Der Satz von Cayley

Beweis.

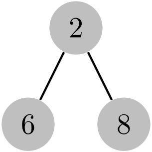
- Abb: $T \xrightarrow{\sim}$ Menge der $(n-2)$ -Tupel, Einträge aus $\{1, ..., n\}$.
- Zuordnung durch Prüfer-Code
- 1. Finde Knoten Grad 1 mit minimaler Nummer v. Nachbar von v ist a_1.
  2. Entferne v und indizierte Kante. Gehe zu (1), führe $n-2$ mal aus. Gesuchtes Tupel ist $(a_1, ..., a_{n-2})$.
- 1. Suche minimales b_1 nicht in $(a_1, ..., a_{n-2})$. Dies ergibt Kante $b_1 a_1$.
  2. Suche das minimale $b_2 \neq b_1$ nicht in $(a_2, ..., a_{n-2})$, usw.

□

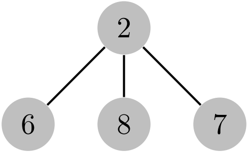
$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$
$(b_1, \ldots, b_i) = (6)$



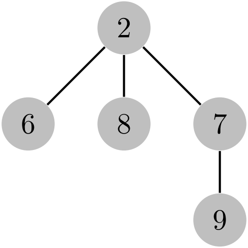
$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$
$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8)$



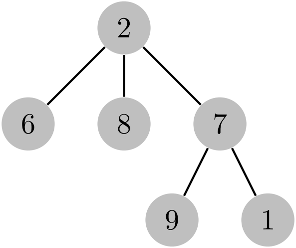
$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$
$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8, 2)$



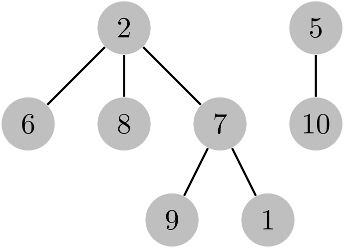
$(a_1, \dots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$
$(b_1, \dots, b_i) = (6, 8, 2, 9)$



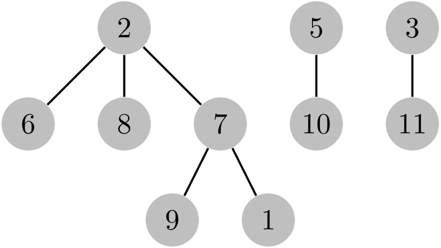
$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$
$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8, 2, 9, 7)$



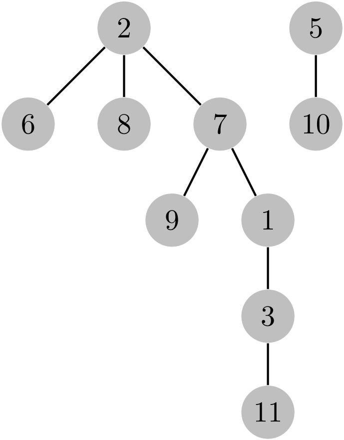
$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$
$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8, 2, 9, 7, 10)$



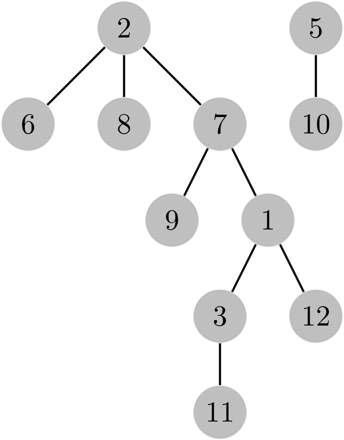
$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$
$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8, 2, 9, 7, 10, 11)$



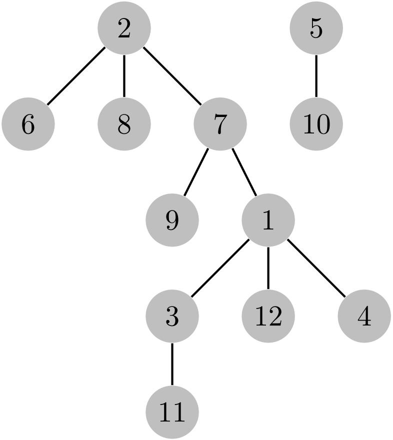
$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$
$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8, 2, 9, 7, 10, 11, 3)$



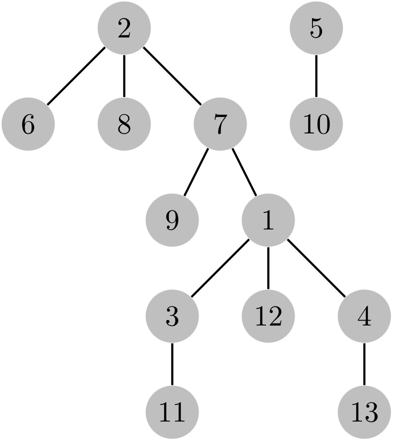
$$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$$
$$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8, 2, 9, 7, 10, 11, 3, 12)$$



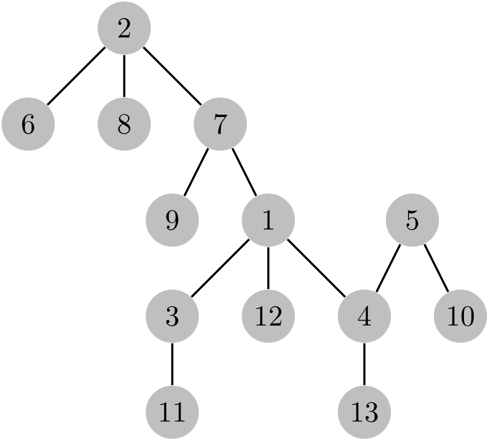
$$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$$
$$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8, 2, 9, 7, 10, 11, 3, 12, 1)$$



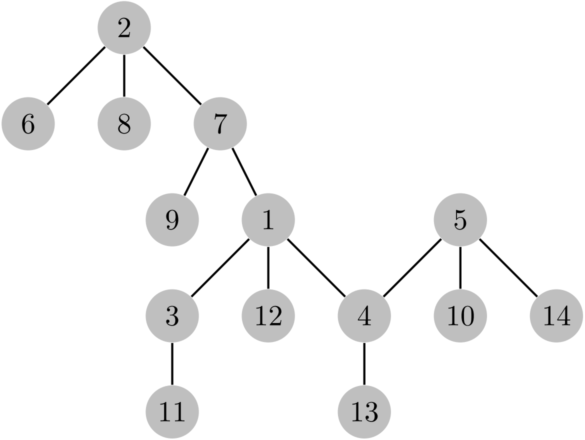
$$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$$
$$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8, 2, 9, 7, 10, 11, 3, 12, 1, 13)$$



$$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$$
$$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8, 2, 9, 7, 10, 11, 3, 12, 1, 13, 4)$$



$(a_1, \ldots, a_{n-2}) = (2, 2, 7, 7, 1, 5, 3, 1, 1, 4, 4, 5)$
$(b_1, \ldots, b_i) = (6, 8, 2, 9, 7, 10, 11, 3, 12, 1, 13, 4,)$
Die letze Kante ergibt sich aus $f_i = d_i - 1$, in diesem Fall: $(5, 14)$

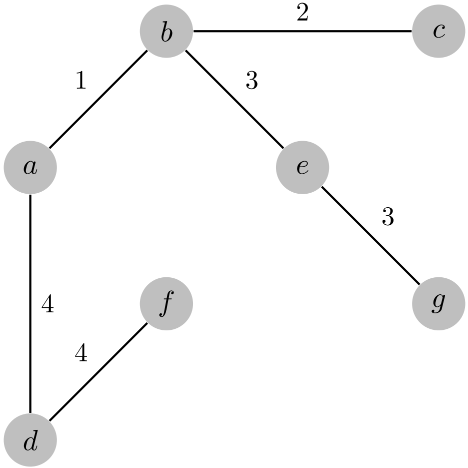


Allgemeine Definitionen

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Funktion $w : E \to \mathbb{R}$ heißt gewichteter Graph.

Allgemeine Definitionen



Allgemeine Definitionen

Definition

Ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Funktion $w : E \to \mathbb{R}$ heißt gewichteter Graph.

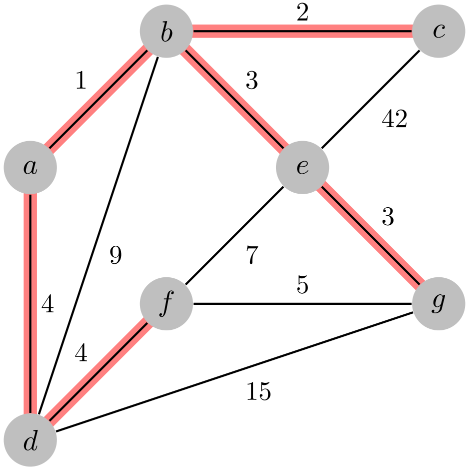
Definition

Der minimale Spannbaum $G' = (V, E')$ eines gewichteten, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ ist ein aufspannender Baum, für den

$$\sum_{e \in E'} w(e)$$

minimal ist.

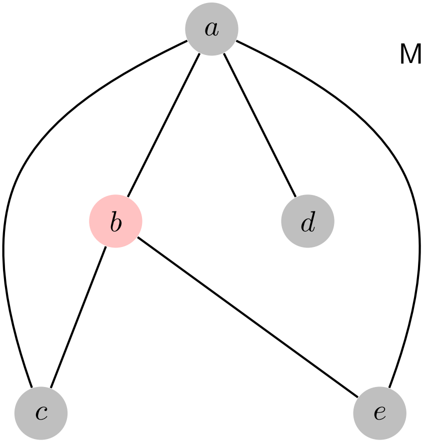
Allgemeine Definitionen



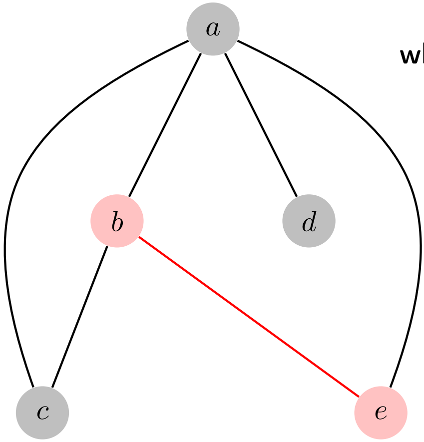
Tiefensuche

Eingabe: ungewichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E)$, Startknoten $v \in V$
Ausgabe: aufspannender Baum von G

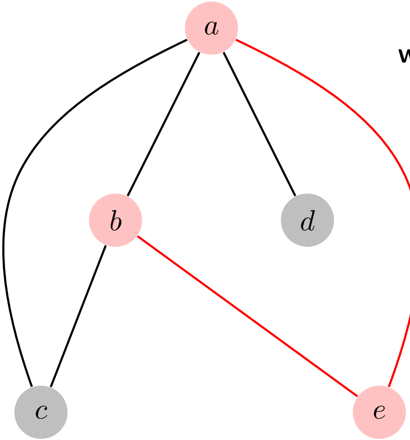
(1) Markiere v.
(2) **while** $\exists$ unmarkierte Knoten
(3) **if** $\exists$ unmarkierte Kanten $e = (v, w)$
(4) **if** w markiert **then** entferne e aus G.
(5) **else** markiere e und w.
Setze $v = w$.
(6) **else**
(7) Setze v auf den zuletzt markierten Knoten.



Markiere v



while $\exists$ unmarkierte Knoten
if $\exists$ unmarkierte Kanten $e = (v, w)$
if w markiert **then** $E = E \setminus \{e\}$
else markiere e, w.
Setze $v = w$.
else
Setze v auf den zuletzt markierten Knoten.



while $\exists$ unmarkierte Knoten

if $\exists$ unmarkierte Kanten $e = (v, w)$

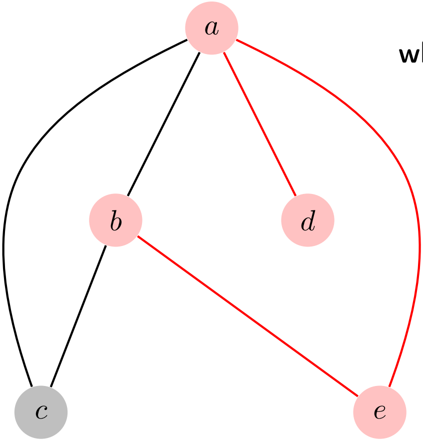
if w markiert **then** $E = E \setminus \{e\}$

else markiere e, w.

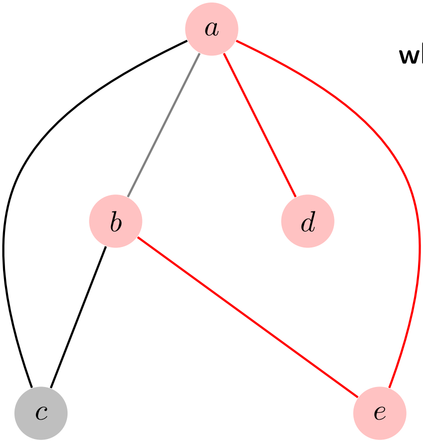
Setze $v = w$.

else

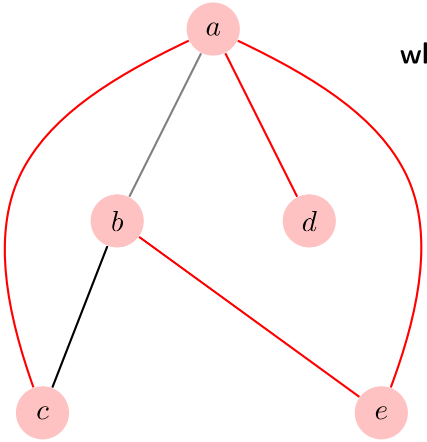
Setze v auf den zuletzt markierten Knoten.



while $\exists$ unmarkierte Knoten
if $\exists$ unmarkierte Kanten $e = (v, w)$
if w markiert **then** $E = E \setminus \{e\}$
else markiere e, w.
Setze $v = w$.
else
Setze v auf den zuletzt markierten Knoten.



while $\exists$ unmarkierte Knoten
  if $\exists$ unmarkierte Kanten $e = (v, w)$
    if w markiert **then** $E = E \setminus \{e\}$
      else markiere e, w.
      Setze $v = w$.
else
  Setze v auf den zuletzt markierten Knoten.



while $\exists$ unmarkierte Knoten
  if $\exists$ unmarkierte Kanten $e = (v, w)$
    if w markiert **then** $E = E \setminus \{e\}$
      else markiere e, w.
      Setze $v = w$.
else
  Setze v auf den zuletzt markierten Knoten.

Tiefensuche Korrektheitsbeweis

Beweis.

- G' ist zusammenhängend: Induktion, w ist immer mit v verbunden.

$\square$

Tiefensuche Korrektheitsbeweis

Beweis.

- G' ist zusammenhängend: Induktion, w ist immer mit v verbunden.
- G' ist kreisfrei: Induktion, durch Hinzufügen entstehen keine Kreise.

$\square$

Tiefensuche Korrektheitsbeweis

Beweis.

- G' ist zusammenhängend: Induktion, w ist immer mit v verbunden.
- G' ist kreisfrei: Induktion, durch Hinzufügen entstehen keine Kreise.
- G' enthält alle Knoten: Sonst Widerspruch zum Zusammenhang von G.

□

Grundlegende Definitionen

Sei S eine endliche Menge und $U \subseteq P(S)$ Familie von Teilmengen.

Grundlegende Definitionen

Sei S eine endliche Menge und $U \subseteq P(S)$ Familie von Teilmengen.

Definition

Das Paar $M = (S, U)$ heißt **Matroid** und U die Familie der **unabhängigen Mengen** von M, wenn gilt:

1. $\emptyset \in U$
2. $A \in U, B \subseteq A \implies B \in U$
3. $A, B \in U,\ \#B = \#A + 1 \implies \exists v \in B \setminus A$ mit $A \cup \{v\} \in U$

Grundlegende Definitionen

Sei S eine endliche Menge und $U \subseteq P(S)$ Familie von Teilmengen.

Definition

Das Paar $M = (S, U)$ heißt **Matroid** und U die Familie der **unabhängigen Mengen** von M, wenn gilt:

1. $\emptyset \in U$
2. $A \in U, B \subseteq A \implies B \in U$
3. $A, B \in U,\ \#B = \#A + 1 \implies \exists v \in B \setminus A$ mit $A \cup \{v\} \in U$

Definition

Eine maximale unabhängige Menge heißt eine **Basis** des Matroids. Alle Basen enthalten die gleiche Anzahl von Elementen, der **Rang** $r(M)$ des Matroids.

Matroide und Vektorräume

Begriffsverwandtschaft mit Matrix:

Matroide und Vektorräume

Begriffsverwandtschaft mit Matrix:

- $S \cong$ Menge der Spaltenvektoren einer Matrix.

Matroide und Vektorräume

Begriffsverwandtschaft mit Matrix:

- $S \cong$ Menge der Spaltenvektoren einer Matrix.
- $U \cong$ Menge der linear unabhängigen Systeme bestehend aus Vektoren $\in S$.

Matroide und Vektorräume

Begriffsverwandtschaft mit Matrix:

- $S \cong$ Menge der Spaltenvektoren einer Matrix.
- $U \cong$ Menge der linear unabhängigen Systeme bestehend aus Vektoren $\in S$.
- Basis $\cong$ maximal linear unabhängiges System (Basis des Bildes der Matrix).

Matroide und Vektorräume

Begriffsverwandtschaft mit Matrix:

- $S \cong$ Menge der Spaltenvektoren einer Matrix.
- $U \cong$ Menge der linear unabhängigen Systeme bestehend aus Vektoren $\in S$.
- Basis $\cong$ maximal linear unabhängiges System (Basis des Bildes der Matrix).
- Rang $\cong$ Anzahl der Vektoren einer Basis, Rang der Matrix.

Matroide und Vektorräume

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{a}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{b}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{c}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{d} \}$$

$$\begin{aligned} U = &\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \\ &\{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \\ &\{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}\} \end{aligned}$$

$$\underline{e} = \{a, b, c\}$$

$$\operatorname{rang}(S, U) = 3$$

Matroide und Graphen

Sei $W \subseteq P(E)$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder eines Graphen $G = (V, E)$.

Lemma

Ist $G = (V, E)$ Graph, so ist $M = (E, W)$ ein Matroid.

Matroide und Graphen

Sei $W \subseteq P(E)$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder eines Graphen $G = (V, E)$.

Lemma

Ist $G = (V, E)$ Graph, so ist $M = (E, W)$ ein Matroid.

Beweis.

- Axiom 1

$\square$

Matroide und Graphen

Sei $W \subseteq P(E)$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder eines Graphen $G = (V, E)$.

Lemma

Ist $G = (V, E)$ Graph, so ist $M = (E, W)$ ein Matroid.

Beweis.

- Axiom 1
- Axiom 2

$\square$

Matroide und Graphen

Sei $W \subseteq P(E)$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder eines Graphen $G = (V, E)$.

Lemma

Ist $G = (V, E)$ Graph, so ist $M = (E, W)$ ein Matroid.

Beweis.

- Wälder $W = (V, A)$, $W' = (V, B)$ mit $\#B = \#A + 1$.
  Zusammenhangskomponenten $T_1, ..., T_m$, Eckenmengen $V_1, ..., V_m$,
  Kantenmengen $A_1, ..., A_m$.

Matroide und Graphen

Sei $W \subseteq P(E)$ die Familie der Kantenmenge aller Wälder eines Graphen $G = (V, E)$.

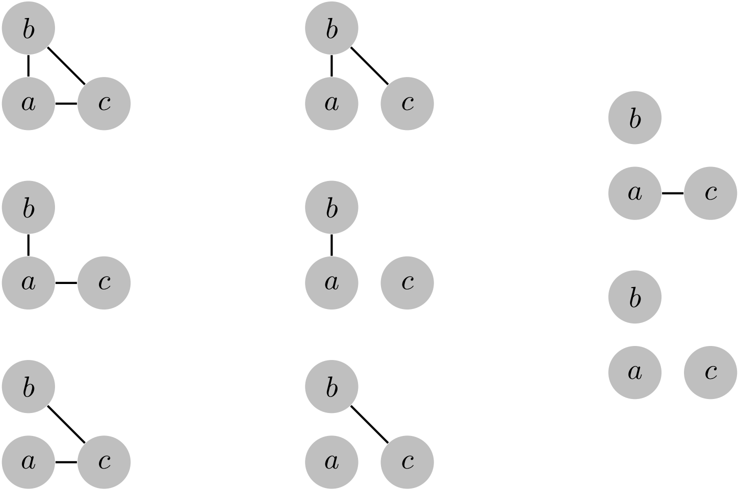
Lemma

Ist $G = (V, E)$ Graph, so ist $M = (E, W)$ ein Matroid.

Beweis.

- Wälder $W = (V, A)$, $W' = (V, B)$ mit $\#B = \#A + 1$.
  Zusammenhangskomponenten $T_1, ..., T_m$, Eckenmengen $V_1, ..., V_m$,
  Kantenmengen $A_1, ..., A_m$.
- Nun: $\#A_i = \#V_i - 1$, $V = V_1 \cup ... \cup V_m$, $A = A_1 \cup ... \cup A_m$.
  $\#B > \#A \implies \exists$ Kante $k \in B$, die V_s, V_t verbindet.
  Dann ist $W'' = (V, A \cup k)$ Wald.

Das Matroid $M = (V, W)$



Matroide und Graphen - Folgerungen

Korollar

Basen von $M = (E, W)$ sind die aufspannenden Wälder.

Matroide und Graphen - Folgerungen

Korollar

Basen von $M = (E, W)$ sind die aufspannenden Wälder.

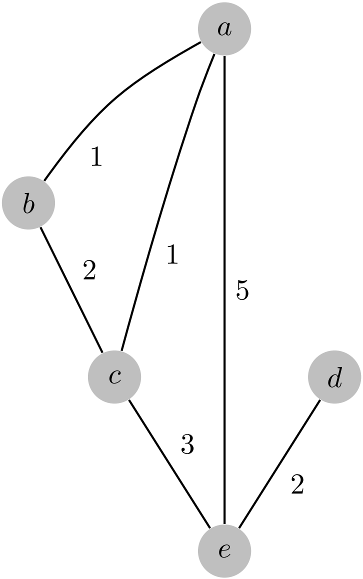
Korollar

Rang des Matroids ist $r(M) = \#V - t$, wobei t die Anzahl der Komponenten von G ist.

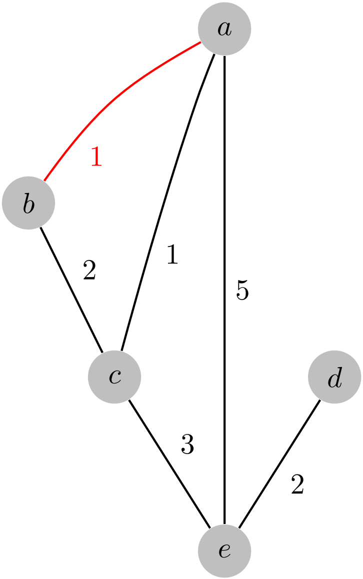
Algorithmus von Kruskal

Eingabe: gewichteter Graph $G = (V, E)$, Funktion $w : E \to \mathbb{R}$
Ausgabe: minimaler Spannbaum $G'(V, E')$ von G

(1) **while** $|E'| < |V| - t$
(2) betrachte Kante e aus G mit $w(e) = \min_{e \in E} w(e)$
(3) **if** G' mit e azyklisch **then** e von G zu G'
(4) **else** entferne e in G



$$G' = (V, \emptyset)$$



while $|E'| < |V| - 1$

betrachte Kante e aus G mit

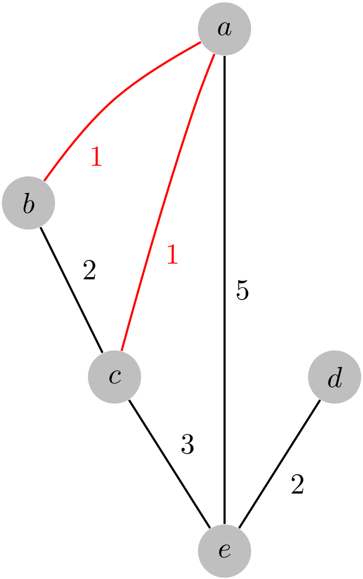
$$w(e) = \min_{e \in E} w(e),$$

Setze

$$E = E \setminus \{e\}$$

if G' mit e azyklisch

$$E' = E' \cup \{e\}$$



while $|E'| < |V| - 1$

betrachte Kante e aus G mit

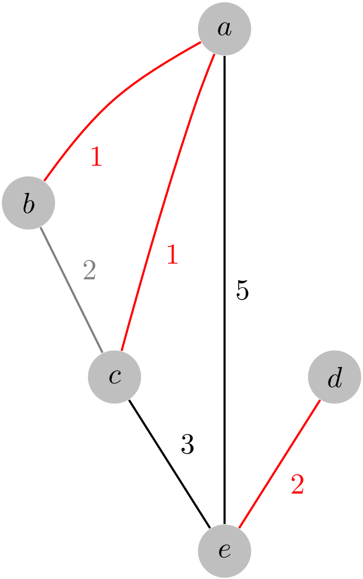
$$w(e) = \min_{e \in E} w(e),$$

Setze

$$E = E \setminus \{e\}$$

if G' mit e azyklisch

$$E' = E' \cup \{e\}$$



while $|E'| < |V| - 1$

betrachte Kante e aus G mit

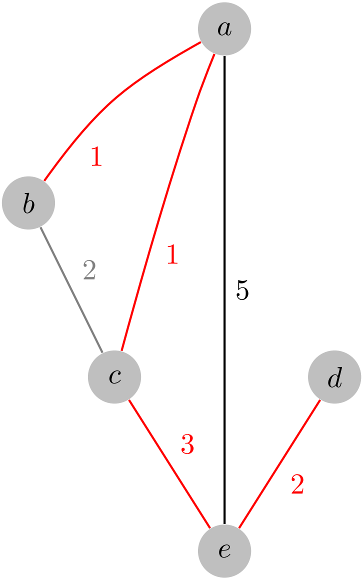
$$w(e) = \min_{e \in E} w(e),$$

Setze

$$E = E \setminus \{e\}$$

if G' mit e azyklisch

$$E' = E' \cup \{e\}$$



while $|E'| < |V| - 1$

betrachte Kante e aus G mit

$$w(e) = \min_{e \in E} w(e),$$

Setze

$$E = E \setminus \{e\}$$

if G' mit e azyklisch

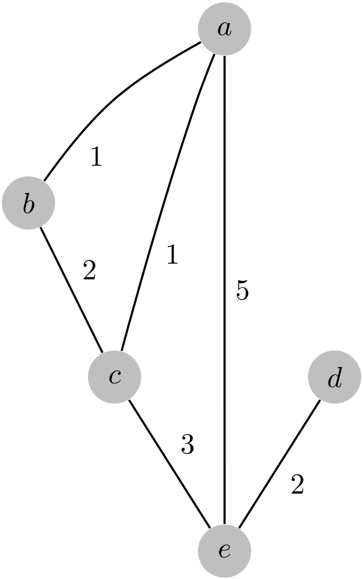
$$E' = E' \cup \{e\}$$

Algorithmus von Kruskal in Matroidsprache

Theorem

$M = (E, W)$ Matroid mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$.
Algorithmus liefert minimalen Spannbaum:

1. *Sei $A_0 = \emptyset \in W$.*
2. *Ist $A_i = \{a_1, ..., a_i\} \subseteq E$, so sei $X_i = \{e \in E \setminus A_i \mid A_i \cup \{e\} \in W\}$. Falls $X_i = \emptyset$, so ist A_i gesuchte Basis. Andernfalls wähle ein $a_{i+1} \in X_i$ mit minimalem Gewicht, und setze $A_{i+1} = A_i \cup \{a_{i+1}\}$. Iteriere (2).*



$M(E, W)$ Matroid, w Gewichtung.

$A_0 = \emptyset$, $X_0 = E$.

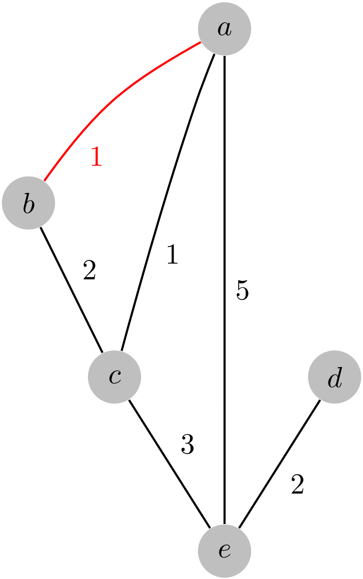
In unserem Beispiel:

$i = 0$

$A_0 = \emptyset$

$X_0 =$

$\{(a, b), (b, c), (a, c), (a, e), (c, e), (e, d)\}$



while $X_i \neq \emptyset$

$a_i \in X_{i-1}$ mit minimalem Gewicht.

$A_i = A_{i-1} \cup \{a_i\}$

$X_i = \{e \in E \setminus A_i | A_i \cup \{e\} \in W\}$

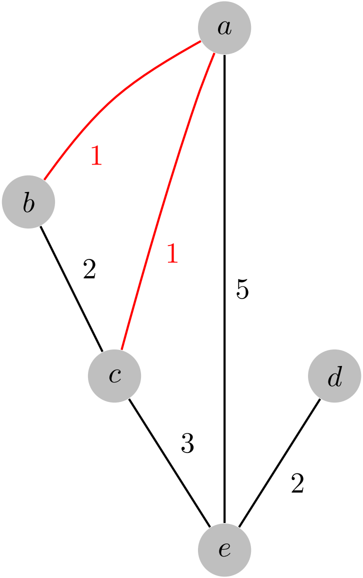
$i++$

In unserem Beispiel:

$i = 1$

$A_1 = \{(a, b)\}$

$X_1 = \{(b, c), (a, c), (a, e), (c, e), (e, d)\}$



while $X_i \neq \emptyset$

$a_i \in X_{i-1}$ mit minimalem Gewicht.

$A_i = A_{i-1} \cup \{a_i\}$

$X_i = \{e \in E \setminus A_i | A_i \cup \{e\} \in W\}$

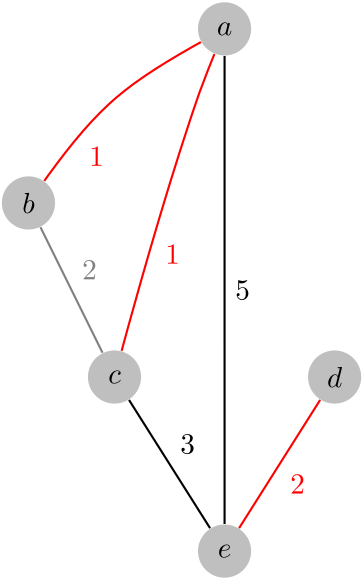
$i++$

In unserem Beispiel:

$i = 2$

$A_2 = \{(a, b), (a, c)\}$

$X_2 = \{(a, e), (c, e), (e, d)\}$



while $X_i \neq \emptyset$

$a_i \in X_{i-1}$ mit minimalem Gewicht.

$A_i = A_{i-1} \cup \{a_i\}$

$X_i = \{e \in E \setminus A_i | A_i \cup \{e\} \in W\}$

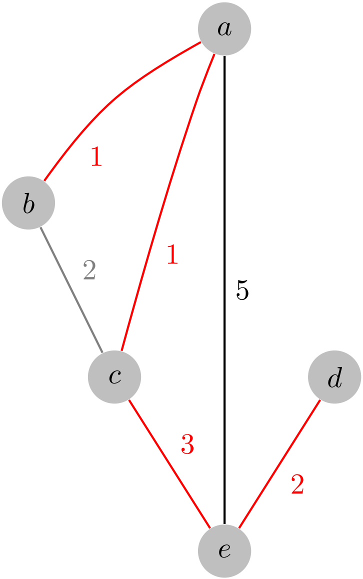
$i++$

In unserem Beispiel:

$i = 3$

$A_3 = \{(a,b),(a,c),(e,d)\}$

$X_3 = \{(a,e),(c,e)\}$



while $X_i \neq \emptyset$

$a_i \in X_{i-1}$ mit minimalem Gewicht.

$A_i = A_{i-1} \cup \{a_i\}$

$X_i = \{e \in E \setminus A_i | A_i \cup \{e\} \in W\}$

$i++$

In unserem Beispiel:

$i = 4$

$A_4 = \{(a,b),(a,c),(e,d),(c,e)\}$

$X_4 = \emptyset$

Greedy-Algorithmus auf gewichtetem Matroid - Korrektheitsbeweis

Beweis.

- Sei $A = \{a_1, ..., a_r\}$ die erhaltene Menge.

$\square$

Greedy-Algorithmus auf gewichtetem Matroid - Korrektheitsbeweis

Beweis.

- Sei $A = \{a_1, ..., a_r\}$ die erhaltene Menge.
- Axiom 3 $\implies$ A ist Basis.

$\square$

Greedy-Algorithmus auf gewichtetem Matroid - Korrektheitsbeweis

Beweis.

- Sei $A = \{a_1, ..., a_r\}$ die erhaltene Menge.
- Axiom 3 $\implies$ A ist Basis.
- Konstruktion und Axiom 2 $\implies$ $w(a_1) \leq ... \leq w(a_r)$.

$\square$

Greedy-Algorithmus auf gewichtetem Matroid - Korrektheitsbeweis

Beweis.

- Sei $A = \{a_1, ..., a_r\}$ die erhaltene Menge.
- Axiom 3 $\implies$ A ist Basis.
- Konstruktion und Axiom 2 $\implies$ $w(a_1) \leq ... \leq w(a_r)$.
- Angenommen $B = \{b_1, ..., b_r\}$ wäre eine Basis mit $w(B) < w(A)$ mit $w(b_1) \leq ... \leq w(b_r)$. Dann existiert minimaler Index i mit $w(b_i) < w(a_i)$ wobei $i \geq 2$ gilt.

□

Greedy-Algorithmus auf gewichtetem Matroid - Korrektheitsbeweis

Beweis.

- Sei $A = \{a_1, ..., a_r\}$ die erhaltene Menge.
- Axiom 3 $\implies$ A ist Basis.
- Konstruktion und Axiom 2 $\implies$ $w(a_1) \leq ... \leq w(a_r)$.
- Angenommen $B = \{b_1, ..., b_r\}$ wäre eine Basis mit $w(B) < w(A)$ mit $w(b_1) \leq ... \leq w(b_r)$. Dann existiert minimaler Index i mit $w(b_i) < w(a_i)$ wobei $i \geq 2$ gilt.
- $A_{i-1} = \{a_1, ..., a_{i-1}\}$, $B_i = \{b_1, ..., b_i\}$ unabhängige Mengen. Axiom 3 $\implies$ $\exists\, b_j \in B_i \setminus A_{i-1}$ sodass $A_{i-1} \cup \{b_j\} \in U$. Nun $w(b_j) \leq w(b_i) < w(a_i)$ $\implies$ Widerspruch.

$\square$

Algorithmus von Prim

Eingabe: zusammenhängender, gewichteter Graph $G = (V, E)$, Funktion $w : E \to \mathbb{R}$, Startknoten $v \in V$

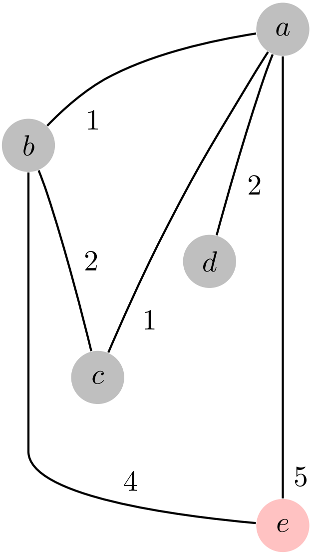
Ausgabe: minimaler Spannbaum $G'(V, E')$ von G

(1) $V' = \{v\}$

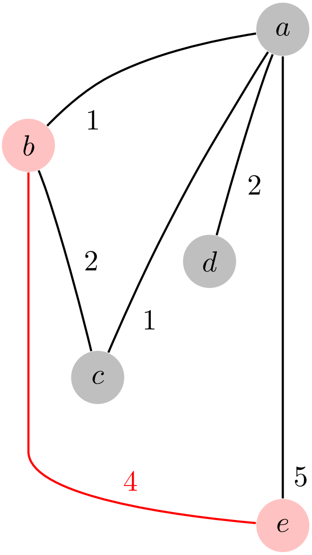
(2) **while** $|V'| < |V|$

(3) betrachte Kante $e \in \{(w, u) | w \in V', u \notin V'\}$ mit minimalem Gewicht

(4) $E = E \setminus \{e\}, E' = E' \cup \{e\}, V' = V' \cup \{u\}$



$V' = \{v\}$



while $|V'| < |V|$
Wähle

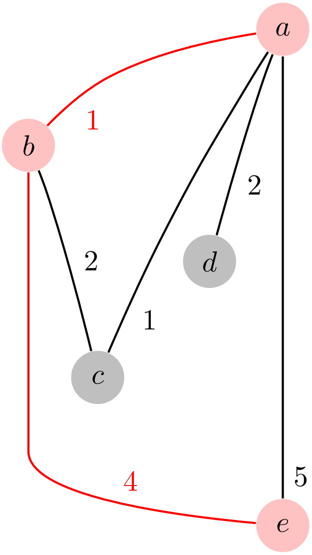
$$e \in \{(v,u) \in E | v \in V', u \notin V'\},$$

mit $w(e)$ minimal.
Setze dann

$$E = E \setminus \{e\},$$

$$E' = E' \cup \{e\},$$

$$V' = V' \cup \{w\}$$



while $|V'| < |V|$

Wähle

$$e \in \{(v,u) \in E | v \in V', u \notin V'\},$$

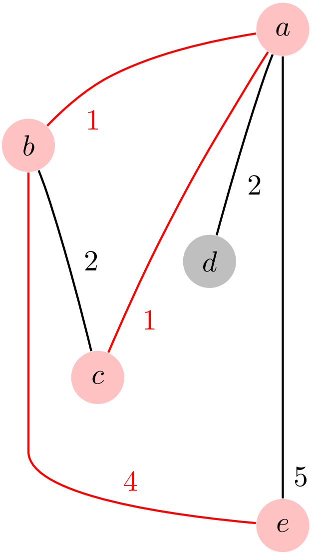
mit $w(e)$ minimimal.

Setze dann

$$E = E \setminus \{e\},$$

$$E' = E' \cup \{e\},$$

$$V' = V' \cup \{w\}$$



while $|V'| < |V|$

Wähle

$$e \in \{(v, u) \in E | v \in V', u \notin V'\},$$

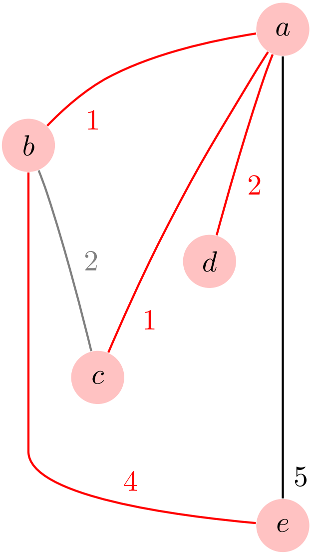
mit $w(e)$ minimal.

Setze dann

$$E = E \setminus \{e\},$$

$$E' = E' \cup \{e\},$$

$$V' = V' \cup \{w\}$$



while $|V'| < |V|$

Wähle

$$e \in \{(v,u) \in E | v \in V', u \notin V'\},$$

mit $w(e)$ minimal.

Setze dann

$$E = E \setminus \{e\},$$

$$E' = E' \cup \{e\},$$

$$V' = V' \cup \{w\}$$

Ausblick

- Negative Gewichte

Ausblick

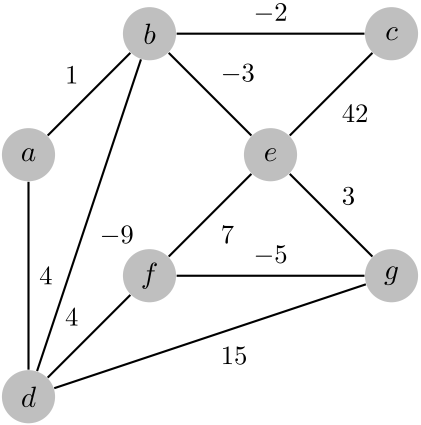


Abbildung: Graph mit negativen Gewichten

Ausblick

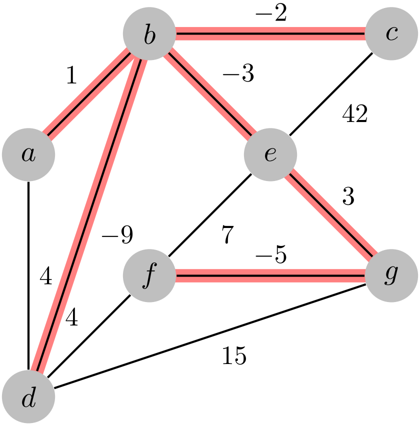


Abbildung: Graph mit negativen Gewichten

Ausblick

- Negative Gewichte (Kruskal)
- Computernetzwerke und Steiner-Bäume

Ausblick

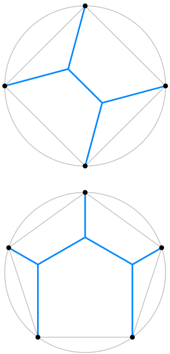


Abbildung: [Abb2] Steiner Bäume

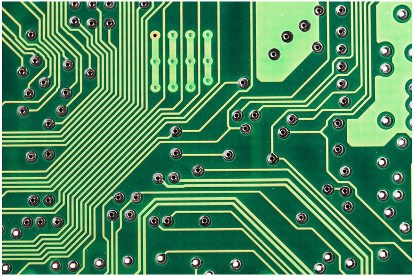


Abbildung: [Abb3] Computerchip Platine

Ausblick

- Negative Gewichte (Kruskal)
- Computernetzwerke und Steiner-Bäume
- Traveling-Salesman-Problem

Ausblick

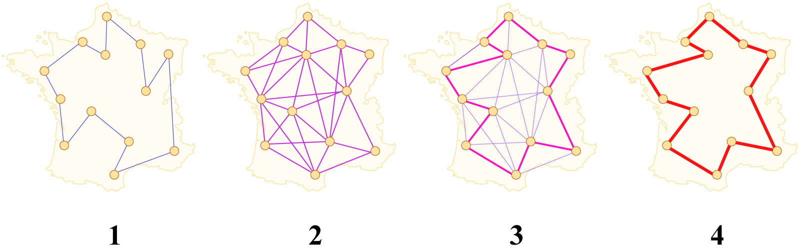


Abbildung: [Abb6] Traveling-Salesman-Problem

Ausblick

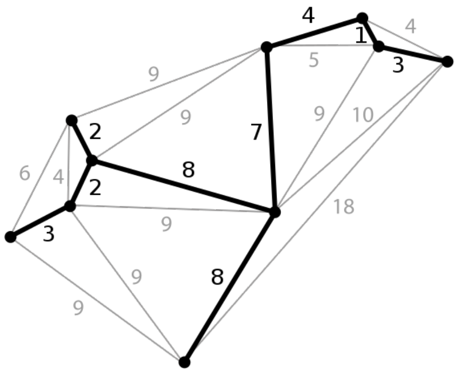


Abbildung: [Abb7] Traveling-Salesman-Problem

Ausblick

- Negative Gewichte (Kruskal)
- Computernetzwerke und Steiner-Bäume
- Traveling-Salesman-Problem (Approximation)

Abbildungsverzeichnis

Abb1 : Ma, Wen-Jong; Hu, Chin-Kun; Amritkar, Ravindra. (2004). Stochastic dynamical model for stock-stock correlations. Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics. 70. 026101. 10.1103/PhysRevE.70.026101.

Abb2 : Martin Janecke, https://prlbr.de/2019/euclidean-steiner-trees-in-regular-polygons/

Abb3 : Bild von Michael Schwarzenberger auf Pixabay.

Abb4 : Hillmann, Peter; Stiemert, Lars; Rodosek, Gabi; Rose, Oliver. (2015). Dragoon: Advanced modelling of IP geolocation by use of latency measurements. 438-445. 10.1109/ICITST.2015.7412138.

Abb5 : Balut, Alicja; Brodziak, Rafał; Bylka, Jędrzej; Zakrzewski, Przemysław. (2019). Ranking Approach to Scheduling Repairs of a Water Distribution System for the Post-Disaster Response

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

1 J.A.Bondy, U.S.R.Murty, Graph Theory with applications

2 Martin Aigner, Diskrete Mathematik, S.123-131

3 Martin Aigner, Graphentheorie, S.133-154

4 Stephan Hußmann, Brigitte Lutz-Westphal, Diskrete Mathematik erleben