Die Riemannsche Zeta-Funktion

Josua Kugler

03.11.2020

Definition (Riemannsche ζ-Funktion)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Lemma (Konvergenzgebiet)

$\zeta(s)$ *konvergiert normal auf der offenen Halbebene* $\operatorname{Re} s > 1$.

Beweis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}}.$$

$\square$

Lemma (Eulerprodukt)

Die Riemannsche ζ-Funktion lässt sich als absolut konvergentes unendliches Produkt schreiben:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Insbesondere gilt also $\zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re} s > 1$.

Beweis.

$$\frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$\square$

Beweis.

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

□

Beweis.

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} = \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_m^s} + \frac{1}{p_m^{2s}} \dots\right)$$

□

Beweis.

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} \left(p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

Beweis.

$$\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \sum_{\nu_1,\dots,\nu_m=0}^{\infty} \left(p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

$\square$

Beweis.

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{1-p_k^{-s}} = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{\nu_1,\dots,\nu_m=0}^{\infty}\left(p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

$\square$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}} &= \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_m=0}^{\infty} \left(p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}
\end{aligned}
$$

□

Beweis.

$$\lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_m=0}^{\infty} \left(p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}\right)^{-s}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=p_1^{\nu_1}\cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}$$

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_k^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

$\square$

Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \sum_{m=0}^{\infty} p_k^{-ms} \right|$$

$\square$

Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|1-\frac{1}{1-p_k^{-s}}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|1-\sum_{m=0}^{\infty}p_k^{-ms}\right|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|p_k^{-ms}\right|$$

□

Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \sum_{m=0}^{\infty} p_k^{-ms} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left| p_k^{-ms} \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{-s} \right|$$

$\square$

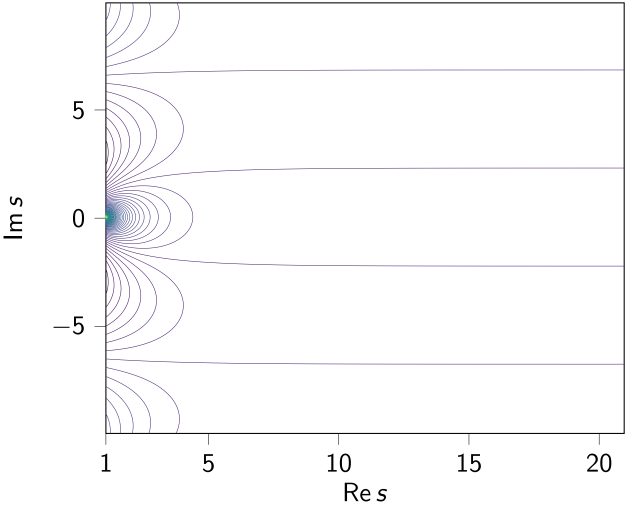


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Betrag.

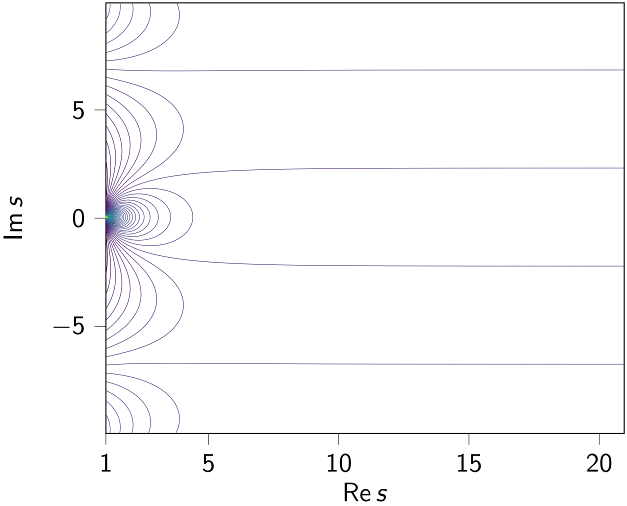


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Realteil.

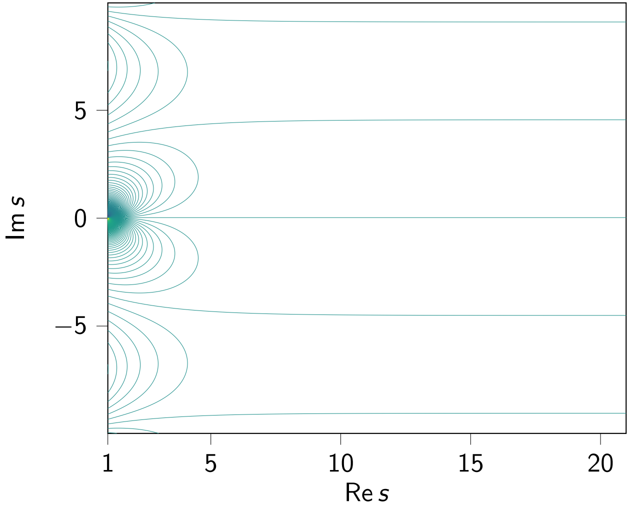


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Imaginärteil.

Lemma (θ-Funktion)

Die Thetafunktion, gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z},$$

konvergiert für $\operatorname{Im} z > 0$.

Beweis.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2(\operatorname{Re} z + i(\operatorname{Im} z)} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 \operatorname{Re} z} \right| \cdot \left| e^{i\pi n^2 \cdot i(\operatorname{Im} z)} \right|$$

□

Beweis.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 (\operatorname{Re} z + i(\operatorname{Im} z)} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 \operatorname{Re} z} \right| \cdot \left| e^{i\pi n^2 \cdot i(\operatorname{Im} z)} \right|$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z}$$

Beweis.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 (\operatorname{Re} z + i(\operatorname{Im} z))} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 \operatorname{Re} z} \right| \cdot \left| e^{i\pi n^2 \cdot i(\operatorname{Im} z)} \right|$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z}$$
$$= \sum_{n=-N}^{N} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} + 2 \cdot \sum_{n=N}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z}$$

$\square$

Beweis.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 (\operatorname{Re} z + i(\operatorname{Im} z))} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 \operatorname{Re} z} \right| \cdot \left| e^{i\pi n^2 \cdot i(\operatorname{Im} z)} \right|$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} + 2 \cdot \sum_{n=N}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z}$$

$$\leq \sum_{n=-N}^{N} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} + 2 \cdot \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$\square$

Lemma (θ-Funktion)

Die Thetafunktion, $\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}$, konvergiert für $\operatorname{Im} z > 0$*.*

Behauptung

$\theta(z)$ erfüllt die Thetatransformationsformel ($\sqrt{\cdot}$ bezeichne den Zweig mit positivem Realteil):

$$\theta(z) = \theta\left(-\frac{1}{z}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{z}}$$

$$\Leftrightarrow \theta(it) = \theta\left(-\frac{1}{it}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{it}} = \theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}}.$$

Lemma

Die Funktion

$$R_\infty(s) := \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

ist ganz.

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t(n^2-1)} \overset{t \geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)}$$

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t(n^2-1)} \overset{t \geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)}$$

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$
\begin{aligned}
e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t (n^2-1)} \overset{t \geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi (n^2-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi (n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\pi (n^2-1)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi (n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}
$$

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$
\begin{aligned}
e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t(n^2-1)} \overset{t\geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&\leq B
\end{aligned}
$$

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$
\begin{aligned}
e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t(n^2-1)} \overset{t\geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&\leq B
\end{aligned}
$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq B e^{-\pi t}$.

Beweis.

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq B \cdot \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

Beweis.

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq B \cdot \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$\exists a(s): \ \forall \alpha > a : e^{-\pi\alpha} < \alpha^{-s+1}$

Beweis.

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq B \cdot \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$\exists a(s):\ \forall \alpha > a : e^{-\pi\alpha} < \alpha^{-s+1}$

$$= B \cdot \int_1^a e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + B \cdot \int_a^\infty e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

□

Beweis.

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq B \cdot \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$\exists a(s): \ \forall \alpha > a : e^{-\pi\alpha} < \alpha^{-s+1}$

$$\begin{aligned} &= B \cdot \int_1^a e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + B \cdot \int_a^\infty e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &\leq B \cdot C(s) + B \cdot \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \end{aligned}$$

$\square$

Beweis.

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq B \cdot \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

$\exists a(s):\ \forall \alpha > a : e^{-\pi\alpha} < \alpha^{-s+1}$

$$\begin{aligned} &= B \cdot \int_1^a e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + B \cdot \int_a^\infty e^{-\pi t} t^{s+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &\leq B \cdot C(s) + B \cdot \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &\leq B \cdot C(s) + \frac{B}{a(s)} < \infty \end{aligned}$$

$\square$

Theorem

Die Riemannsche ζ-Funktion besitzt eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, wobei an der Stelle 1 eine einfache Polstelle vorliegt. Außerdem genügt

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| t \mapsto \pi n^2 t$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s}\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
\pi^{-s}\Gamma(s)\frac{1}{n^{2s}} &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \sum_{n=1}^\infty,\ s \mapsto s/2
\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
\sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \sum_{n=1}^\infty,\ s \mapsto s/2
\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
\sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \sum_{n=1}^\infty,\ s \mapsto s/2 \\
\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \sum_{n=1}^\infty n^{-s} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}
$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| t \mapsto \pi n^2 t \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
\sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) \frac{1}{n^{2s}} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Bigg| \sum_{n=1}^\infty,\ s \mapsto s/2 \\
\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}$$

Beweis.

Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\operatorname{Re} s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= \pi^{-\operatorname{Re} s/2}\Gamma(\operatorname{Re} s/2)\zeta(\operatorname{Re} s)$$
$$< \infty$$

gilt nach dem Satz von Fubini/Tonelli für absolut konvergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}\end{aligned}$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \underbrace{\int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_0(s)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_\infty(s)}
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \int_0^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \underbrace{\int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_0(s)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}}_{R_\infty(s)} \\
&= R_0(s) + R_\infty(s)
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} && \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \qquad \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \qquad \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_1^\infty \frac{\theta\left(iu\right) \cdot u^{\frac{1}{2}} - 1}{2} u^{-s/2-1} \mathrm{d}u$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it)-1}{2} t^{s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} && \Big| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\int_1^0 \frac{\theta\left(it^{-1}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} && \Big| u = \frac{1}{t},\ \mathrm{d}u = \frac{-1}{t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(iu\right) \cdot u^{\frac{1}{2}} - 1}{2} u^{-s/2-1} \mathrm{d}u \\
&= \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta\left(it\right) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
$$= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= R_\infty(1-s) + \frac{1}{2} \frac{2}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{2} \frac{2}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2}\cdot t^{\frac{1-s}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}}-1}{2}t^{-s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2}t^{\frac{1-s}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2}t^{-s/2}\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \frac{1}{1-s}t^{\frac{1-s}{2}}\Big|_1^\infty + \frac{1}{s}t^{-\frac{s}{2}}\Big|_1^\infty
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it)-1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}}-1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= R_\infty(1-s) + \frac{1}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty \\
&= R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\ &= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$

$$\xi(s) = R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$
$$\xi(s) = R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

- R_∞ ist ganz

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$

$$\xi(s) = R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

- R_∞ ist ganz
- ξ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$

$$\xi(s) = R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

- R_∞ ist ganz
- ξ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$.
- ξ genügt der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(s)$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(s)$$

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(s)$$

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

Γ ist meromorph auf $\mathbb{C}$ und besitzt keine Nullstellen.

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(s)$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

Γ ist meromorph auf $\mathbb{C}$ und besitzt keine Nullstellen.
$\implies \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$.

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(s)$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

Γ ist meromorph auf $\mathbb{C}$ und besitzt keine Nullstellen.
$\implies \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$. $\implies \zeta(s)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Beweis.

$$\lim_{s\to 0}\zeta(s) = \lim_{s\to 0}\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(\underbrace{R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s}}_{\to\text{const für } s\to 0} - \frac{1}{s}\right)$$

Beweis.

$$\lim_{s\to 0}\zeta(s)=\lim_{s\to 0}\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(\underbrace{R_\infty(s)+R_\infty(1-s)-\frac{1}{1-s}}_{\to\text{const für } s\to 0}-\frac{1}{s}\right)$$

Wegen $\lim_{s\to 0}\Gamma(s/2)=\infty$ erhalten wir

Beweis.

$$\lim_{s\to 0}\zeta(s) = \lim_{s\to 0}\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(\underbrace{R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s}}_{\to\text{const für } s\to 0} - \frac{1}{s}\right)$$

Wegen $\lim\limits_{s\to 0}\Gamma(s/2) = \infty$ erhalten wir

$$= 0 - \lim_{s\to 0}\frac{\pi^{s/2}}{s\cdot\Gamma(s/2)} = -\lim_{s\to 0}\frac{\pi^{s/2}}{2\cdot s/2\cdot\Gamma(s/2)}$$

Beweis.

$$\lim_{s\to 0}\zeta(s) = \lim_{s\to 0}\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(\underbrace{R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s}}_{\to\text{const für } s\to 0} - \frac{1}{s}\right)$$

Wegen $\lim\limits_{s\to 0}\Gamma(s/2) = \infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &= 0 - \lim_{s\to 0}\frac{\pi^{s/2}}{s\cdot\Gamma(s/2)} = -\lim_{s\to 0}\frac{\pi^{s/2}}{2\cdot s/2\cdot\Gamma(s/2)} \\ &= -\lim_{s\to 0}\frac{\pi^{s/2}}{2\cdot\Gamma(s/2+1)} = -\frac{\pi^0}{2\cdot\Gamma(1)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beweis.

Die Funktion

$$\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s)+R_\infty(1-s)-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}\right)$$

ist daher

Beweis.

Die Funktion

$$\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s)+R_\infty(1-s)-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}\right)$$

ist daher

- holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

Beweis.

Die Funktion

$$\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s)+R_\infty(1-s)-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}\right)$$

ist daher

- holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.
- stimmt für $\operatorname{Re} s>1$ mit $\zeta(s)$ überein

Beweis.

Die Funktion

$$\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\left(R_\infty(s)+R_\infty(1-s)-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}\right)$$

ist daher

- holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.
- stimmt für $\operatorname{Re} s>1$ mit $\zeta(s)$ überein

$\Longrightarrow$ stellt die gesuchte analytische Fortsetzung für die Riemannsche ζ-Funktion dar!!!

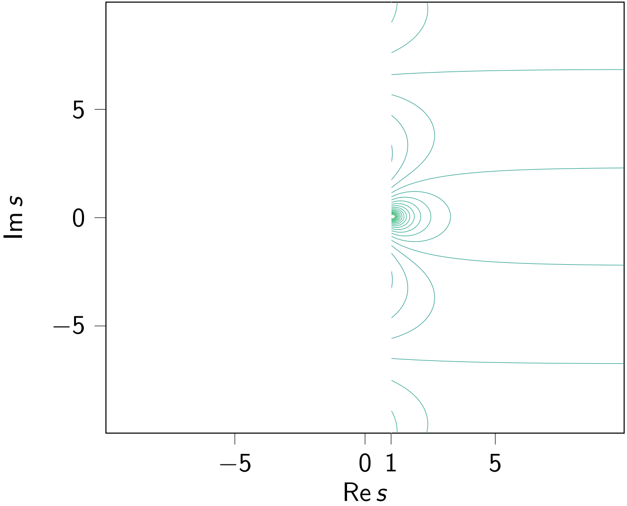


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Betrag

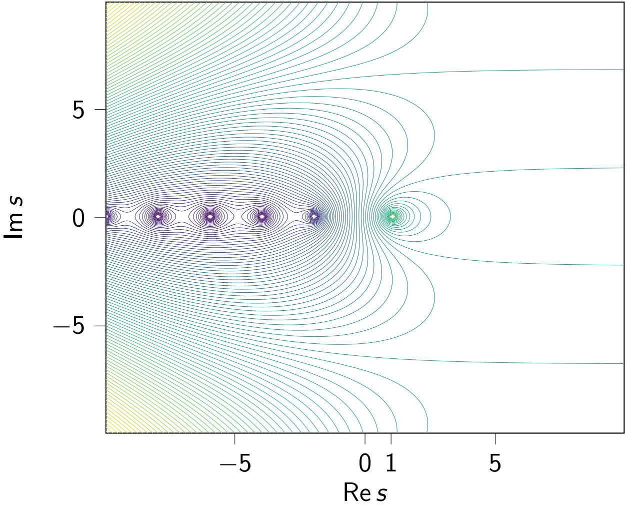


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Betrag

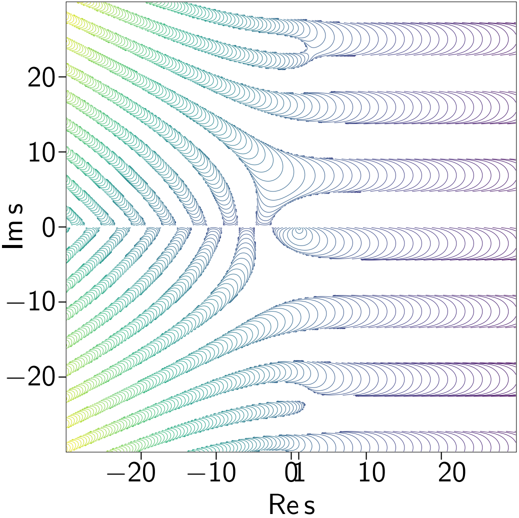


Abbildung: Imaginärteil der ζ-Funktion

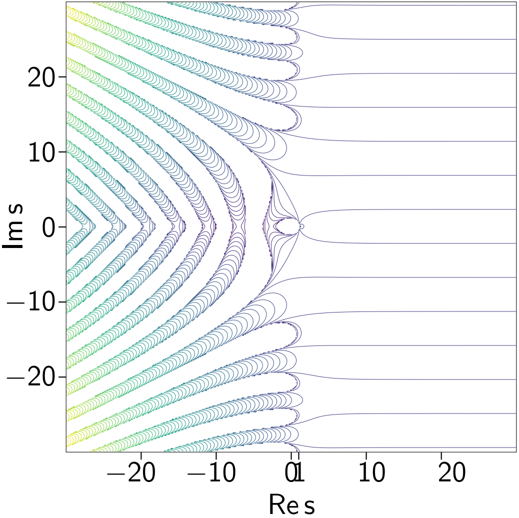


Abbildung: Realteil der ζ-Funktion

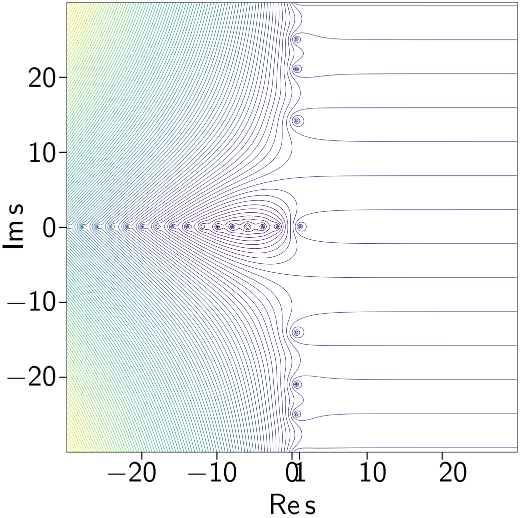


Abbildung: Betrag der ζ-Funktion

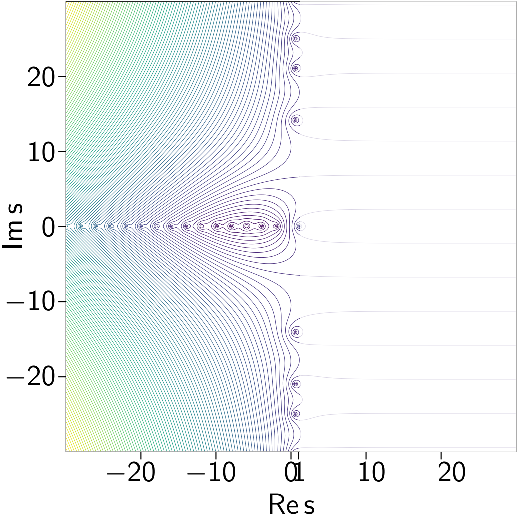


Abbildung: Betrag der ζ-Funktion

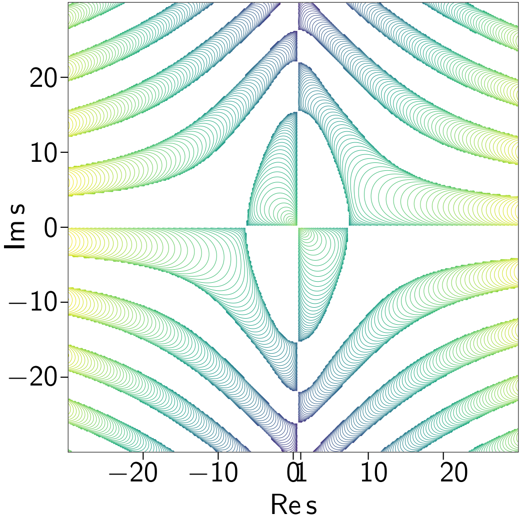


Abbildung: Imaginärteil der ξ-Funktion

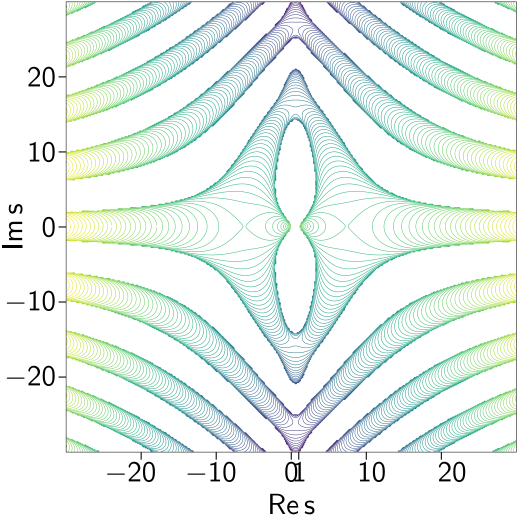


Abbildung: Realteil der ξ-Funktion

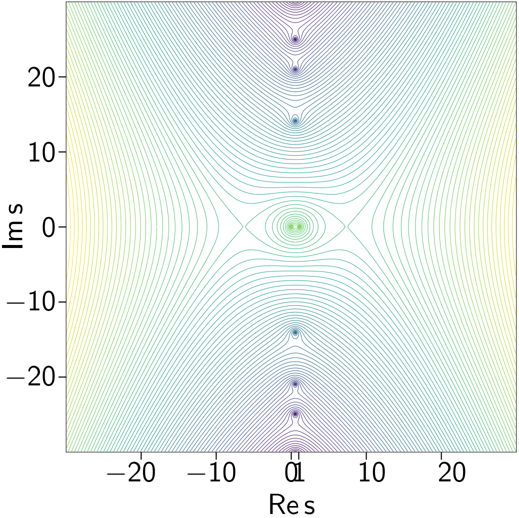


Abbildung: Betrag der ξ-Funktion

Nullstellenverteilung der ξ-Funktion

Lemma

$$\xi(s) = 0 \implies 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$$

Beweis.

Aufgrund der Eulerproduktdarstellung gilt

- $0 \neq \zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s) \quad \forall \operatorname{Re} s > 1$

□

Nullstellenverteilung der ξ-Funktion

Lemma

$$\xi(s) = 0 \implies 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$$

Beweis.

Aufgrund der Eulerproduktdarstellung gilt

- $0 \neq \zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s) \quad \forall \operatorname{Re} s > 1$
- $\implies \xi(s) \neq 0 \Leftrightarrow \xi(1-s) \neq 0 \quad \forall \operatorname{Re} s > 1$

$\square$

Nullstellenverteilung der ξ-Funktion

Lemma

$$\xi(s) = 0 \implies 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$$

Beweis.

Aufgrund der Eulerproduktdarstellung gilt

- $0 \neq \zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s) \quad \forall \operatorname{Re} s > 1$
- $\implies \xi(s) \neq 0 \Leftrightarrow \xi(1-s) \neq 0 \quad \forall \operatorname{Re} s > 1$
- $\implies \xi(s) \neq 0 \quad \forall \operatorname{Re} s < 0$

$\square$

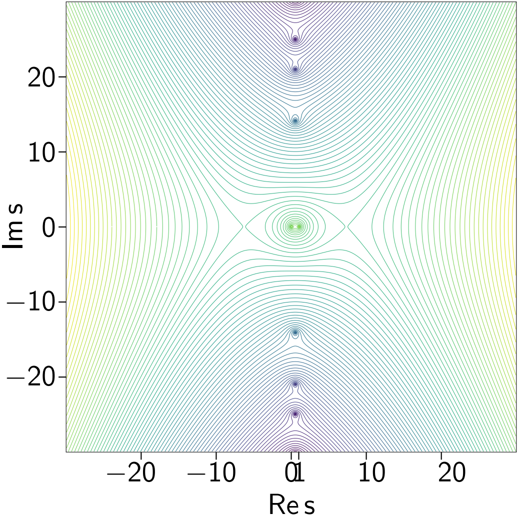


Abbildung: Betrag der ξ-Funktion

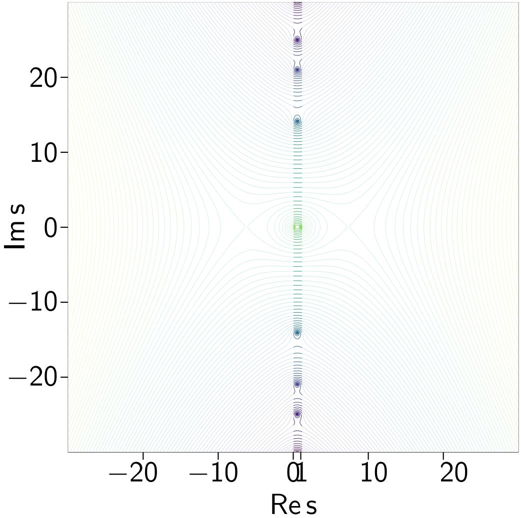


Abbildung: Betrag der ξ-Funktion

Nullstellenverteilung der ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

Nullstellenverteilung der ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

- $\xi(s) = 0$ nur für $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.

Nullstellenverteilung der ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

- $\xi(s) = 0$ nur für $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.
- Genau für die Polstellen von $\Gamma(s/2)$ gilt $\frac{\pi^{2/s}}{\Gamma(s/2)} = 0$.

Nullstellenverteilung der ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

- $\xi(s) = 0$ nur für $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.
- Genau für die Polstellen von $\Gamma(s/2)$ gilt $\frac{\pi^{2/s}}{\Gamma(s/2)} = 0$.
- $\implies \frac{\pi^{2/s}}{\Gamma(s/2)} = 0 \qquad \forall s \in \{-2, -4, \dots\}$.

Nullstellenverteilung der ζ-Funktion

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

- $\xi(s) = 0$ nur für $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.
- Genau für die Polstellen von $\Gamma(s/2)$ gilt $\frac{\pi^{2/s}}{\Gamma(s/2)} = 0$.
- $\implies \frac{\pi^{2/s}}{\Gamma(s/2)} = 0 \qquad \forall s \in \{-2, -4, \dots\}$.

Folgerung.

ζ besitzt die „trivialen Nullstellen“ bei $s = -2n,\ n \in \mathbb{N}$ und die Nullstellen von ξ, die allesamt im „kritischen Streifen“ $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ liegen.

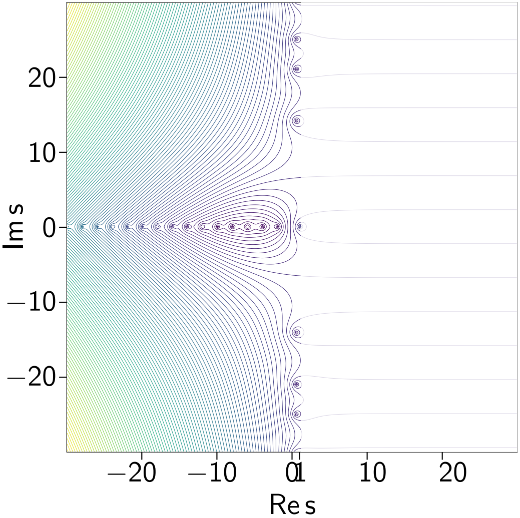


Abbildung: Betrag der ζ-Funktion

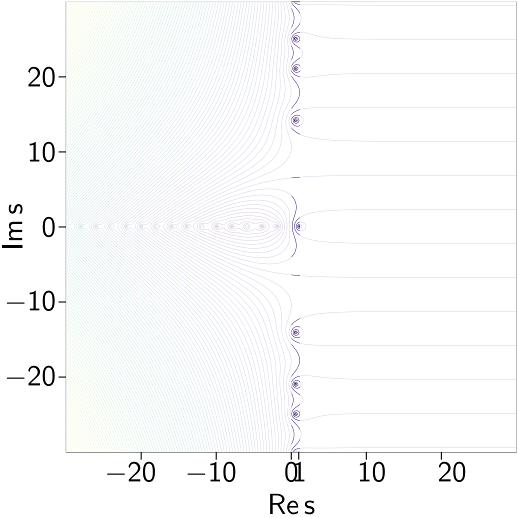


Abbildung: Betrag der ζ-Funktion

Vermutung (Riemannsche Hypothese)

Abgesehen von den „trivialen“ Nullstellen bei $s = -2n,\ n \in \mathbb{N}$ haben alle Nullstellen Realteil $\frac{1}{2}$.

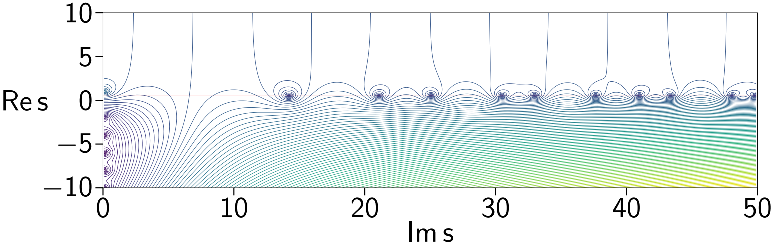


Abbildung: Absolutbetrag der ζ-Funktion bei $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ von $\operatorname{Im} s = 0$ bis $\operatorname{Im} s = 50$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

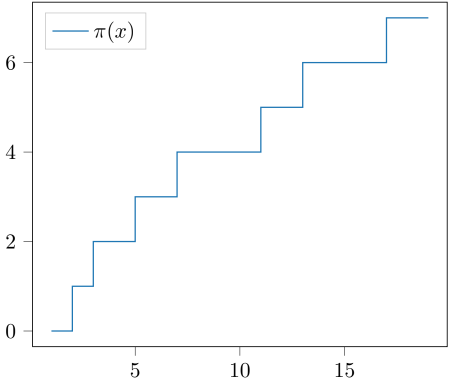


Abbildung: $\pi(x)$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

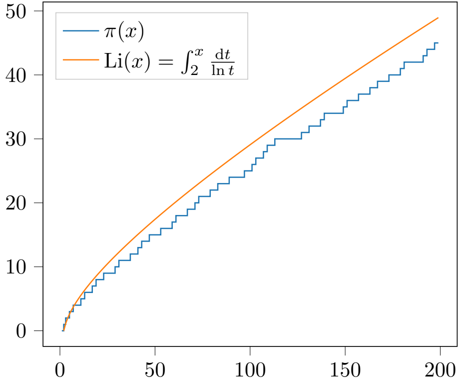


Abbildung: Eine Annäherung für $\pi(x)$.

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

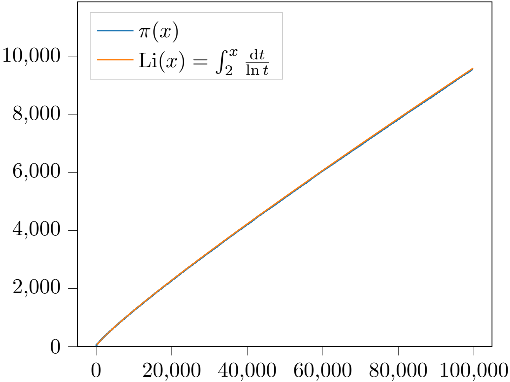


Abbildung: Eine Annäherung für $\pi(x)$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

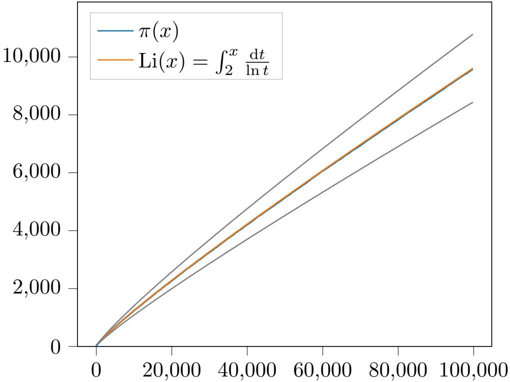


Abbildung: $|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| \leq 0.2795 \frac{x}{(\log x)^{3/4}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\log x}{6.455}}\right) \forall x \geq 229$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

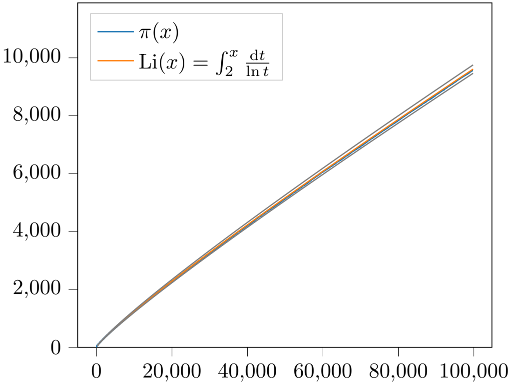


Abbildung: $|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < \frac{\sqrt{x}\log(x)}{8\pi} \forall x \geq 2657$

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

Lemma

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d < e^{\gamma} n \log\log n + \frac{0.6483\ n}{\log\log n}$$

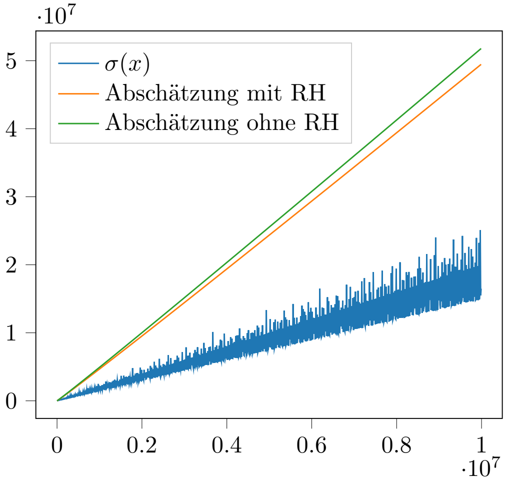
Theorem (Robin, 1984)

Die Abschätzung

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n$$

ist äquivalent zur Riemannschen Hypothese.

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese



Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

Definition

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & n \text{ ist quadratfrei und hat } k \text{ Primfaktoren} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma

Es gilt

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

für $\operatorname{Re} s > 1$ *mit*

Konsequenzen der Riemannschen Hypothese

Beweis.

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

□

Theorem

Die Gleichung

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ *ist äquivalent zur Riemannschen Hypothese.*

Literaturverzeichnis

J. Neukirch.
Algebraische Zahlentheorie.
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.

E. Freitag., R. Busam
Funktionentheorie 1.
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

T. Trudgian
Updating the error term in the prime number theorem.
Ramanujan Journal. 39 (2):225-234.