

Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 10

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 6. Juli 2020

Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. Hohlraumstrahlung

Unter Hohlraumstrahlung versteht man die elektromagnetische Strahlung innerhalb eines abgeschlossenen Hohlraums im thermischen Gleichgewicht mit seinen Wänden. Ihr Druck ist durch

$$P = \frac{\varepsilon}{3}$$

gegeben, wobei $\varepsilon \equiv E/V$ die Energiedichte ist, die nur von der Temperatur T abhängt, also $\varepsilon = \varepsilon(T)$.

- a) Zeigen Sie mit Hilfe des 1. Hauptsatzes und mit der Annahme, dass die Entropie S als Funktion der Temperatur T und des Volumens V aufgefasst werden kann, dass

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \quad (\text{I})$$

gilt. Leiten Sie daraus und unter der Annahme zweifacher stetiger Differenzierbarkeit der Funktion $E(T, V)$ die folgende Maxwell-Relation her,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V. \quad (\text{II})$$

Berechnen Sie mit Hilfe von (I) und (II)

- b) die Energiedichte $\varepsilon(T)$,
- c) die Entropie $S(T, V)$

der Hohlraumstrahlung.

2. Thermodynamik eines Gummibandes

Ein eindimensionales Gummiband habe im ungespannten Zustand die Länge L_0 . Die Spannung des Gummibandes bei einer Länge $L > L_0$ sei experimentell als

$$\sigma = bT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right)$$

mit konstantem $b > 0$ bestimmt worden. Die Wärmekapazität des Gummibandes bei konstanter Länge, $C_L \equiv T (\partial S / \partial T)_L$, sei unabhängig von der Temperatur, also $C_L(T, L) = C_L(L)$. Die innere Energie E des Gummibandes ist durch

$$dE = T dS + \sigma dL$$

gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass die Änderung der inneren Energie ΔE des Gummibandes als Funktion von T und L relativ zu dem Punkt (T_0, L_0) durch

$$\Delta E = C_{L,0} (T - T_0)$$

mit $C_L(L) = C_{L,0} = \text{const.}$ gegeben ist, also unabhängig von der Länge des Gummibandes ist. Finden und nutzen Sie hierfür Relationen, die analog zu (I) und (II) sind.

- b) Zeigen Sie, dass die Änderung der Entropie ΔS des Gummibandes als Funktion von T und L relativ zu dem Punkt (T_0, L_0) durch

$$\Delta S = C_{L,0} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + b\left(\frac{3L_0}{2} - \frac{L^2}{2L_0} - \frac{L_0^2}{L}\right)$$

gegeben ist.

3. Radius-Masse-Relation von Weißen Zwergen

Weißer Zwerge sind die Endprodukte der Sternentwicklung von massearmen Sternen und entstehen, wenn der nukleare Kernbrennstoff in den Kernen solcher Sterne verbraucht ist. Sie werden allein durch den Fermi-Druck der Elektronen gegen den gravitativen Kollaps stabilisiert, solange ihre Massen kleiner sind als ungefähr 1,44 Sonnenmassen. Bei noch größeren Massen entstehen entweder Neutronensterne oder Schwarze Löcher.

Bestimmen Sie, ausgehend vom Fermi-Druck von nicht-relativistischen Elektronen

$$P_F = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n_e^{5/3},$$

wobei h das Planck'sche Wirkungsquantum ist, m_e die Elektronenmasse und n_e die Anzahldichte der Elektronen, und der Bedingung für hydrostatisches Gleichgewicht

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2},$$

wobei G die Gravitationskonstante ist, $M(r)$ die Masse innerhalb des Radius r und ρ die Massendichte, wie der Radius eines Weißen Zwerges mit seiner Masse skaliert. Nehmen Sie dafür an, dass ein Weißer Zwerg effektiv nur aus Teilchen derselben Art zusammengesetzt ist. *

4. Verständnisfragen

- Erklären Sie die funktionale Form der Maxwell-Verteilung.
- Begründen Sie, warum man in der Thermodynamik angeben muss, welche Größen bei partiellen Ableitungen thermodynamischer Funktionen konstant gehalten werden müssen.
- Erklären Sie die Begriffe Wärmekapazität und der spezifischen Wärme und begründen Sie, warum Wärmekapazitäten davon abhängen, unter welchen Bedingungen sie gemessen oder berechnet werden.

*Hinweis: Beim Aufstellen von Skalierungsrelationen (z.B. $a \sim b$, gelesen „a skaliert wie b“) interessiert man sich nur für die Proportionalität verschiedener Größen zueinander, ohne die Proportionalitätskonstanten festzulegen, und ersetzt dabei eine Ableitung dy/dx schlicht durch den zugehörigen Quotienten y/x . Skalierungsrelationen gelten somit immer dann exakt, wenn die abhängige Variable y proportional zu einer Potenz der unabhängigen Variablen x ist, also $y \propto x^n$, denn dann ist $dy/dx \propto nx^{n-1} = nx^n/x \propto y/x$.

Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 10: Lösungen

1. Hohlraumstrahlung

a) Der erste Hauptsatz besagt

$$dE = \delta Q - \delta W = T dS - P dV. \quad (I)$$

Die Energie kann also als Funktion der Entropie und des Volumens aufgefasst werden kann, sodass $E = E(S, V)$. Das Differential der Entropie $S(T, V)$ ist durch

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \quad (II)$$

gegeben. Setzt man (II) in den ersten Hauptsatz (I) ein, so ergibt sich

$$dE = T \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \right] - P dV = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \right] dV.$$

Außerdem muss ebenfalls

$$dE = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV$$

gelten. Vergleicht man die beiden vorherigen Ausdrücke, so ist leicht zu sehen, dass

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \quad (III)$$

gelten muss. Betrachtet man die zweiten Ableitung von E , so muss

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial T} \stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 E}{\partial T \partial V} \quad (IV)$$

gelten. Die linke Seite ist durch

$$\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial T} = \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_T T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = T \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$$

gegeben, wobei der linke Ausdruck von (III) verwendet wurde. Die rechte Seite von (IV) ist durch

$$\frac{\partial^2 E}{\partial T \partial V} = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_V \left[T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P \right] = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + T \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

gegeben. Aufgrund von (IV) muss also

$$T \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} \stackrel{!}{=} \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T + T \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

gelten. Da außerdem $\partial^2 S / (\partial V \partial T) \stackrel{!}{=} \partial^2 S / (\partial T \partial V)$ gelten muss, ist also

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V. \quad (V)$$

b) Der rechte Ausdruck von (III) zusammen mit (V) ergibt

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P.$$

Da $E(T, V) = \varepsilon(T) V$ und $P = \varepsilon/3$ ist, sowie

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$$

ist, folgt daraus also

$$\varepsilon = \frac{T}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Die Energiedichte ε hängt nur von T ab, sodass wir nun d anstatt ∂ schreiben können. Somit folgt aus dem vorherigen Ausdruck

$$4\varepsilon = T \frac{d\varepsilon}{dT}.$$

Trennung der Variablen führt auf

$$4 \frac{dT}{T} = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon},$$

was mit der Integrationskonstanten C zu

$$4 \ln T = \ln T^4 = \ln \varepsilon + C$$

integriert werden kann. Exponentieren führt auf

$$T^4 = \frac{1}{a} \varepsilon$$

mit $a \equiv e^{-C}$ oder

$$\varepsilon(T) = aT^4.$$

Dies ist das *Stefan-Boltzmann-Gesetz*.

c) Das Differential der Entropie $S(T, V)$ ist durch (II) gegeben. Mit dem linken Ausdruck von (III) ergibt sich

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T} \frac{d\varepsilon}{dT} = \frac{V}{T} \cdot 4aT^3 = 4aVT^2.$$

Aus (V) folgt

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{3} \frac{d\varepsilon}{dT} = \frac{1}{3} \cdot 4aT^3 = \frac{4}{3}aT^3,$$

sodass also

$$dS = 4aVT^2 dT + \frac{4}{3}aT^3 dV.$$

ist. Hieraus kann man sofort ablesen, dass

$$S(T, V) = \frac{4}{3}aVT^3 + S_0$$

sein muss, wobei S_0 eine Integrationskonstante ist. Nach dem dritten Hauptsatz geht $S \rightarrow 0$, wenn $T \rightarrow 0$ geht. Dies impliziert, dass $S_0 = 0$ sein muss. Demnach ist die Entropie durch

$$S(T, V) = \frac{4}{3}aVT^3$$

gegeben.

2. Thermodynamik eines Gummibandes

- a) Zuerst sollen hier die für die spätere Rechnung benötigten Relationen analog zu Aufgabe 1 gefunden werden. Für die innere Energie des Gummibandes gilt

$$dE = T dS + \sigma dL. \quad (\text{VI})$$

Mit den Ersetzungen $\sigma \rightarrow -P$ und $L \rightarrow V$ bekommt man exakt den 1. Hauptsatz der Thermodynamik, und die Herleitung der benötigten Relationen erfolgt analog zu Aufgabe 1a). Die gesuchten Relationen lauten somit

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_L = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T + \sigma \quad (\text{VII})$$

sowie

$$\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right)_L.$$

Aus dem vorherigen Ausdruck folgt mit

$$\sigma = bT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right)$$

sofort

$$\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = -\frac{\sigma}{T}.$$

Damit verschwindet die Ableitung der inneren Energie nach der Länge des Gummibandes,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial L}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T + \sigma = -\sigma + \sigma = 0.$$

Die innere Energie darf also nur von der Temperatur, aber nicht von der Länge abhängen. Mit

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_L = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L = C_L(L_0)$$

lässt sich nun das totale Differential dE integrieren,

$$dE = C_L(L_0) dT \quad \Rightarrow \quad \Delta E = C_L(L_0) (T - T_0).$$

Da E nur von T abhängen darf, muss die Wärmekapazität ebenfalls eine Konstante $C_L(L_0) = C_{L,0} = \text{const.}$ sein, und die innere Energie des Gummibandes relativ zum Punkt (L_0, T_0) ist

$$\Delta E(T) = C_{L,0} (T - T_0).$$

- b) Das totale Differential der Entropie lautet nun

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_L dT + \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T dL = \frac{C_{L,0}}{T} dT - \frac{\sigma}{T} dL.$$

Da $C_{L,0}$ unabhängig von L ist und σ/T unabhängig von T , kann das Differential direkt integriert werden,

$$\Delta S(T, L) = C_{L,0} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \int_{L_0}^L dL' \frac{\sigma}{T}.$$

Mit

$$\int_{L_0}^L dL' \frac{\sigma}{T} = b \int_{L_0}^L dL' \left(\frac{L'}{L_0} - \frac{L_0^2}{L'^2} \right) = b \left(\frac{L^2 - L_0^2}{2L_0} + \frac{L_0^2}{L} - \frac{L_0^2}{L_0} \right) = b \left(\frac{L^2}{2L_0} + \frac{L_0^2}{L} - \frac{3L_0}{2} \right)$$

erhält man für die Änderung der Entropie des Gummibandes relativ zum Punkt (T_0, L_0) zu

$$\Delta S(T, L) = C_{L,0} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + b \left(\frac{3L_0}{2} - \frac{L^2}{2L_0} - \frac{L_0^2}{L} \right).$$

3. Radius-Masse-Relation von Weißen Zwergen

Für den Fermi-Druck der Elektronen gilt

$$P_F \propto n_e^{5/3} \sim \frac{M^{5/3}}{R^5},$$

da $n_e \sim M/V$ und $V \sim R^3$ ist. Aus der Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichts folgt

$$\frac{dP}{dr} \sim \frac{P}{R} \sim \frac{M\rho}{R^2} \sim \frac{M^2}{R^5},$$

da $\rho \sim M/R^3$ gilt. Mit $P = P_F$ gilt also

$$\frac{M^{5/3}}{R^6} \sim \frac{M^2}{R^5}.$$

Aufgelöst nach R gilt also

$$R \sim M^{-1/3}.$$

Weiße Zwerge mit größerer Masse sind demnach kleiner als Weiße Zwerge mit kleinerer Masse.

4. Verständnisfragen

- a) In einem Gas im thermodynamischen Gleichgewicht kann die Geschwindigkeitsverteilung nicht mehr von der Richtung der Bewegung abhängen, weil alle Richtungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten müssen. Also kann die Verteilung nur vom Betrag von der Geschwindigkeit oder, äquivalent dazu, nur vom ihrem Quadrat abhängen. Weiterhin müssen die Wahrscheinlichkeiten dafür voneinander unabhängig sein, in welcher Raumrichtung sich die Teilchen bewegen. Zusammengenommen muss also das Produkt der Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeitsquadrate in allen Koordinatenrichtungen gleich der Verteilungsfunktion der Summe der Geschwindigkeitsquadrate sein. Die einzige Funktion, die dieser Forderung genügt, ist die Exponentialfunktion $C \exp(-av^2)$ mit einer Konstanten $a > 0$.
- b) Die explizite Angabe der konstant zu haltenden Größe ist in der Thermodynamik deswegen wichtig, weil oft ganz andere Größen als die expliziten oder „natürlichen“ unabhängigen Variablen der thermodynamischen Funktionen konstant gehalten werden müssen. So betrachten man z.B. die Entropie gemäß des 1. Hauptsatzes in natürlichen Variablen als Funktion der Energie und des Volumens, muss aber bei der Betrachtung der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck eine andere Größe als die Energie oder das Volumen konstant halten, nämlich den Druck.
- c) Die Wärmekapazität beschreibt die Aufnahmefähigkeit eines Systems für Wärme. Sie ist durch den Quotienten aus aufgenommener Wärmemenge und Temperaturänderung gegeben. Die Wärmekapazität selbst ist noch keine Materialgröße, weil sie davon abhängt, wie viele Teilchen bzw. welche Masse das System enthält. Deswegen führt man die spezifische Wärme ein, indem man die Wärmekapazität entweder durch die Stoffmenge oder die Masse teilt.

Die spezifische Wärme hängt davon ab, welcher äußere Zustandsparameter bei der Wärmeaufnahme konstant gehalten wird. So ist die spezifische Wärme bei konstantem Druck größer als die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, weil das Gas bei konstantem Druck mechanische Arbeit verrichten kann, indem es sein Volumen vergrößert. Diese Arbeit muss der zugeführten Wärme entnommen werden, sodass für eine vorgegebene Temperaturerhöhung eine größere Wärmemenge aufgenommen werden muss.