Aufgabe 1

Sei $\mathscr{K}$ die Menge aller Mengen, die (1.1) erfüllen. Sei U eine offene Menge. Wir definieren die Folge abgeschlossener Mengen

$$A_n = \{x \in U : d(x, U^c) \geq \frac{1}{n}\} \subset U.$$

Da zu jedem $x \in U$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $U_{\frac{1}{n}}(x) \subset U$, ist dieses x $\forall n \geq N$ in der Menge A_n enthalten. Daraus folgt $A_n \nearrow U$ und damit $\mu(A_n) \nearrow \mu(U)$. Außerdem ist U die inklusionsminimale offene Menge, die U enthält. Daher sind alle offenen Mengen in $\mathscr{K}$ enthalten. Insbesondere sind also auch $\emptyset$ und X enthalten. Wir betrachten nun den Fall μ σ-endlich, aber nicht endlich. Sei dafür $B \in \mathscr{K}$ mit $\mu(B)$ endlich. Dann darf $\mu(B^c)$ nicht endlich sein, da sonst $\mu(X) = \mu(B) + \mu(B^c) < \infty$ wäre.

Für $M = \{U \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : U \supset B, \text{offen}\}$ gilt $\inf\{\mu(U) | U \subset M\} = \mu(B)$. Es existiert daher eine Folge von offenen Mengen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ mit $U_n \searrow B$. Wir betrachten die Folge $(U_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt $U_n^c \subset B^c \forall n \in \mathbb{N}$, wobei U_n^c abgeschlossen ist. Gilt $U_n \searrow B$, so folgt $U_n^c \nearrow B^c$. Daher gilt $\sup\{\mu(U^c) | U \in M\} \geq \mu(B^c)$. Da aber $U_n^c \subset B^c$ folgt aus der Monotonie des Maßes $\mu(U_n^c) \leq \mu(B^c)$ und damit $\mu(B^c) = \sup\{\mu(U^c) | U \in M\} = \sup\{\mu(U) | U \subset B^c, \text{abgeschlossen}\}$.

Für $M = \{U \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) : U \subset B, \text{abgeschlossen}\}$ gilt $\sup\{\mu(U) | U \subset M\} = \mu(B)$. Es existiert daher eine Folge von offenen Mengen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ mit $U_n \nearrow B$. Wir betrachten die Folge $(U_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt $U_n^c \supset B^c \forall n \in \mathbb{N}$, wobei U_n^c offen ist. Gilt $U_n \nearrow B$, so folgt $U_n^c \searrow B^c$. Daher gilt $\inf\{\mu(U^c) | U \in M\} \leq \mu(B^c)$. Da aber $U_n^c \supset B^c$ folgt aus der Monotonie des Maßes $\mu(U_n^c) \geq \mu(B^c)$ und damit $\mu(B^c) = \inf\{\mu(U^c) | U \in M\} = \inf\{\mu(U) | U \subset B^c, \text{offen}\}$.

Insgesamt erhalten wir $\mu(B^c) = \sup\{\mu(U) | U \subset B^c, \text{abgeschlossen}\} = \inf\{\mu(U) | U \subset B^c, \text{offen}\}$ und damit $B^c \in \mathscr{K}$.

Sei nun $\forall n \in \mathbb{N} : B_n \in \mathscr{K}$. Dann gibt es zu $\epsilon > 0$ abgeschlossene Mengen A_n und offene Mengen U_n mit $A_n \subset B_n \subset U_n$ und $\mu(U_n \setminus A_n) \leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Wir definieren $S \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $U \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Dann gilt $S \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset U$ und $\mu(U \setminus S) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \epsilon$. Die Menge U ist offen, die Menge S im Allgemeinen aber nicht abgeschlossen. Allerdings sind die Mengen $S^k \coloneqq \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ abgeschlossen und es gilt $\mu(S^n) \nearrow \mu(S)$. Daher existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mu(S^N) \geq \mu(S) - \epsilon$. Mit der Wahl $A \coloneqq S^N$ erhalten wir also $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset U$ und $\mu(U \setminus A) \leq 2\epsilon$. Daraus folgt für $\epsilon \searrow 0$ die Aussage $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sup\left\{\mu(U) | U \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \text{abgeschlossen}\right\} = \inf\left\{\mu(U) | U \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \text{offen}\right\}$

Aufgabe 2

(a) Es gilt für $\delta = \frac{1}{n}$.

$$\mathscr{H}_\delta^s([0,1]) = \inf\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s : [0,1] \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j, \operatorname{diam}(B_j) \leq \delta\right\}$$

$B_j = ([\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}])$ für $1 \leq j \leq n$ stellt eine Überdeckung von $[0,1]$ dar mit $\operatorname{diam}(B_j) \leq \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^{n} \operatorname{diam}([\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}])^s \\
&= n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^s \\
&= n^{1-s}
\end{aligned}$$

Es gilt nun $\mathscr{H}^s([0,1]) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{H}^s_{\frac{1}{n}}([0,1]) = \lim_{n\to\infty} n^{1-s} = 0$ für $s > 1$. Aufgrund der Translationsinvarianz, Subadditivität und Monotonie von $\mathscr{H}^s$ gilt also $\mathscr{H}^s(A) = 0 \forall A \subset \mathbb{R}$.

(b) Sei $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ mit $\operatorname{diam}(B_j) \leq \delta$. Wegen $H^{s^*}(A) < \infty$ existieren Familien $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^{s^*} < \infty$. Wir betrachten also eine solche Familie $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Es gilt dann für $s = s^* + \epsilon,\ \epsilon > 0$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s = \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^{(s^*+\epsilon)} \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s \cdot \delta^\epsilon = \delta^\epsilon \cdot \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s.$$

Für $\delta \to 0$ gilt dann also

$$\lim_{\delta\to 0} \underbrace{\delta^\epsilon}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s}_{<\infty} = 0$$

und damit $\mathscr{H}^s(A) = 0$.

(c) Sei $A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j$ mit $\operatorname{diam}(B_j) \leq \delta$. Wegen $H^{s^*}(A) > 0$ existieren Familien $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^{s^*} > 0$. Wir betrachten also eine solche Familie $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Es gilt dann für $s = s^* - \epsilon,\ \epsilon > 0$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s = \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^{(s^*-\epsilon)} \geq \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s \cdot \delta^{-\epsilon} = \delta^{-\epsilon} \cdot \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s.$$

Für $\delta \to 0$ gilt dann also

$$\lim_{\delta\to 0} \underbrace{\delta^\epsilon}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s}_{>0} = \infty$$

und damit $\mathscr{H}^s(A) = \infty$.

(d) Abzählbares $A = \{x_1, \ldots, \}$ kann dargestellt werden als $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{x_j\}$. Dabei ist $\operatorname{diam}(\{x_j\})^s = 0^s \overset{s\geq 0}{=} 0$ und damit $\sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s = \sum_{j\in\mathbb{N}} 0 = 0$, also $\mathscr{H}^s(A) = 0 \forall s > 0$ und daher $\dim A = 0$.

(e) Wir können A schreiben als Vereinigung von offenen Intervallen. Da jedes offene Intervall eine rationale Zahl enthält, ist die Vereinigung Insbesondere abzählbar. Für jede Überdeckung $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eines Intervalls (a,b) gilt

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(C_i) \geq b - a > 0.$$

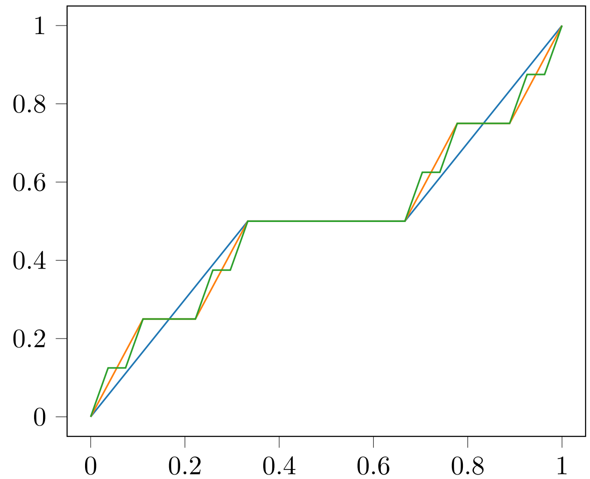

Abbildung 1: f_1, f_2 und f_3.

(Der Beweis hierfür erfolgt analog zu $\sum_{i\in\mathbb{N}})\operatorname{diam}(C_i) \geq 1$ für $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $[0,1] \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$.) Insbesondere gilt also aufgrund der Monotonie von $\mathscr{H}^s$ $\mathscr{H}^1(A) \geq b-a > 0$. Wegen $\mathscr{H}^s(A) = 0 \forall s > 1$ gilt daher

$$\dim A = \inf\{s \geq 0 \colon \mathscr{H}^s(A) = 0\} = 1.$$

Aufgabe 3

(a) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

$0 \leq x < \frac{1}{3}$ In diesem Fall gilt $|f_{k+1}(x) - f_k x| = |\frac{1}{2} f_k(3x) - \frac{1}{2} f_{k-1}(3x)| = \frac{1}{2}|f_k(3x) - f_{k-1}(3x)|$. Daher gilt also $\max_{x\in[0,\frac{1}{3}]} |f_{k+1}(x) - f_k x| \leq \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|$.

$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ Dann gilt $f_{k+1}(x) = f_k(x) = f_{k-1}(x) = \frac{1}{2}$. Daraus folgt $\max_{x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]} |f_{k+1}(x) - f_k x| = 0 \leq \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|$.

$\frac{2}{3} < x \leq 1$ In diesem Fall gilt $|f_{k+1}(x) - f_k x| = |\frac{1}{2}(1 + f_k(3x-2)) - \frac{1}{2}(1 + f_{k-1}(3x-2))| = \frac{1}{2}|f_k(3x-2) - f_{k-1}(3x-2)|$. Daher gilt also $\max_{x\in[\frac{2}{3},1]} |f_{k+1}(x) - f_k x| \leq \frac{1}{2} \max_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|$.

Insgesamt folgt die Behauptung.

(b) Die Stetigkeit und Monotonie von f_k sowie $f[0,1] = [0,1]$ folgen bereits, wenn $\forall k \in \mathbb{N}_0$ folgende Bedingungen gelten:

$f_k(0) = 0.$ Der Beweis folgt induktiv wegen $f_0(0) = 0$ und $f_{k+1}(0) = \frac{1}{2} f_k(3 \cdot 0) = \frac{1}{2} f_k(0)$, also $f_k(0) = 0 \implies f_{k+1}(0) = 0$.

$f_k(1) = 1.$ Der Beweis folgt induktiv wegen $f_0(1) = 1$ und $f_{k+1}(1) = \frac{1}{2}(1 + f_k(3-2)) = \frac{1}{2}(1 + f_k(1)) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

$\lim\limits_{x \nearrow \frac{1}{3}} f_{k+1}(x) = \frac{1}{2}.$ Es gilt $\lim\limits_{x \nearrow \frac{1}{3}} f_{k+1}(x) = \frac{1}{2} f_k(3 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} f_k(1) = \frac{1}{2}$.

$\lim_{x \searrow \frac{2}{3}} f_{k+1}(x) = \frac{1}{2}$. Es gilt $\lim_{x \searrow \frac{2}{3}} f_{k+1}(x) = \frac{1}{2}(1 + f_k(3 \cdot \frac{2}{3} - 2)) = \frac{1}{2}(1 + f_k(0)) = \frac{1}{2}$.

$f_k'(x) \geq 0$. Der Beweis erfolgt wieder per Induktion. Zunächst gilt $f_0'(x) = 1 > 0$. Für den Induktionsschritt machen wir eine Fallunterscheidung.

$0 \leq x < \frac{1}{3}$ $f_{k+1}'(x) = \frac{3}{2} f_k'(3x) \geq 0$.

$\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ $f_{k+1}'(x) = 0 \geq 0$.

$\frac{2}{3} < x \leq 1$ $f_{k+1}'(x) = \frac{3}{2} f_k'(3x - 2) \geq 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [0,1]} |f_1(x) - f_0(x)| &= \max(\max_{x \in [0, \frac{1}{3})} \frac{3}{2}x - x, \ \max_{x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} |\frac{1}{2} - x|, \ \max_{x \in (\frac{2}{3}, 1]} |\frac{1}{2}(1 + 3x - 2) - x|) \\
&= \max(\max_{x \in [0, \frac{1}{3})} \frac{1}{2}x, \ \frac{1}{6}, \ \max_{x \in (\frac{2}{3}, 1]} |\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - x|) \\
&= \max(\frac{1}{6}, \ \frac{1}{6}, \ \max_{x \in (\frac{2}{3}, 1]} |\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}|) \\
&= \max(\frac{1}{6}, \ \frac{1}{6}) \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Wegen Teilaufgabe a gilt:

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [0,1]} |f_{k+1}(x) - f_k x| &\leq \frac{1}{2} \max_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f_{k-1}(x)| \\
&\leq \frac{1}{2^k} \max_{x \in [0,1]} |f_1(x) - f_0(x)| \\
&= \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Damit gilt also $\lim_{k \to \infty} \max_{x \in [0,1]} |f_{k+1}(x) - f_k x| = \lim_{k \to \infty} 2^{-k} \frac{1}{6} = 0$. Also ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge. Bei gleichmäßiger Stetigkeit bleibt Monotonie und Stetigkeit erhalten. Somit ist die Aussage bewiesen

(c) Da f eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist, gilt $\inf\{x \in [0,1] \colon f(x) = y\} \in \{x \in [0,1] \colon f(x) = y\}$. Es gilt also $f(g(y)) = f(\inf\{x \in [0,1] \colon f(x) = y\}) = y$. Wäre g nicht injektiv, so gäbe es $x \neq y$ mit $g(x) = g(y)$ und insbesondere also $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$. Das ist aber ein Widerspruch.

(d) Behauptung: g ist monoton wachsend.

Beweis. Sei $y > y'$ und $x = g(y)$ sowie $x' = g(y')$. Da f monoton wächst, können wir schließen

$$f(x) = y > y' = f(x') \quad \implies \quad x > x'.$$

Damit erhalten wir $y > y' \implies g(y) = x > x' = g(y')$, g ist also monoton wachsend. $\square$

Nach Lemma 3.3(ii) ist g daher borelmessbar. $g([0,1])$ ist eine Teilmenge von $[0,1]$. Allerdings liegt keines der Elemente von $g([0,1])$ im Inneren eines Intervalls, auf dem f konstant bleibt. Betrachten wir nur die Intervalle, auf denen f_k nichtkonstant ist, so erhalten wir für f_0 das Intervall $I_{0,1} = [0,1]$. Aus diesem entfernen wir nun das mittlere offene Drittel und erhalten für f_1 die beiden kompakten Intervalle $I_{1,1} = \frac{1}{3}[0,1]$, $I_{1,2} = \frac{1}{3}[2,3]$. Auf $I_{1,1}$ ist $f_2 = \frac{1}{2}f_1(3x)$ genau auf denselben Intervallen wie $f_1(3x)$ nichtkonstant, also auf $I_{2,1} = \frac{1}{3}I_{1,1} = \frac{1}{9}[0,1]$ und $I_{2,2} = \frac{1}{3}I_{1,2} = \frac{1}{9}[2,3]$. Auf $I_{1,2}$ ist analog $f_2 = \frac{1}{2}(1 + f_1(3x-2))$ genau auf denselben Intervallen wie $f_1(3x-2)$ nichtkonstant, also auf $I_{2,3} = \frac{1}{3}(I_{1,1}+2) = \frac{1}{9}[6,7]$ und $I_{2,4} = \frac{1}{3}(I_{1,2}+2) = \frac{1}{9}[8,9]$. Induktiv erhalten wir die kompakten Intervalle $I_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, 2^n$.

Als Folgerung schließen wir $g([0,1]) \subset \mathcal{C}$.

(e) Wegen $g([0,1]) \subset \mathcal{C}$ ist auch $g(V) \subset \mathcal{C}$. Da $\mathcal{C}$ aber eine Lebesgue-Nullmenge ist, muss aufgrund der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes auch $g(V)$ als Teilmenge einer Nullmenge lebesgue-messbar sein.

Angenommen, $g(V)$ wäre Borel-messbar, d.h. $g(V) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Da g Borel-messbar ist, würde das aber bereits $V \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ implizieren. Damit wäre V Borel-messbar und somit auch Lebesgue-messbar. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, also kann $g(V)$ nicht Borel-messbar sein.

Zusatzaufgabe

Die eine Richtung der Äquivalenz ist trivial. Es gelte $f^{-1}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{E}$. Zu zeigen bleibt also $f^{-1}(\mathscr{F}) = f^{-1}(\sigma(\mathscr{A})) \subset \mathscr{E}$.

Beweis. Wir zeigen also, dass die Menge $\mathscr{M} = \{A \in \sigma(\mathscr{A}) | f^{-1}(A) \in \mathscr{E}\} = \sigma(\mathscr{A})$ ist.

- Wegen $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$ gilt $\emptyset, X \in \mathscr{M}$.
- Sei A in $\mathscr{M}$. Wegen Aufgabe 0.2b liegt dann auch A^c in $\mathscr{M}$.
- Seien $A_n \in \mathscr{M}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Wegen Aufgabe 0.2c liegt dann auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in $\mathscr{M}$.

Damit ist also $\sigma(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M} \subset \sigma(\mathscr{A})$, was zu zeigen war. □