Aufgabe 49

(a) Sei ein Kompaktum K gegeben, sodass $\forall z \in K\colon |z| < R,\ R \in \mathbb{R}_{>0}$. Für $n > 2R$ gilt dann

$$|z^2 - n^2| = |z-n||z+n| > \frac{1}{2}n \cdot \frac{1}{2}n = \frac{1}{4}n^2,$$

also

$$\frac{2z}{z^2-n^2} < \frac{2R}{\frac{1}{4}n^2} < \frac{8R}{n^2}.$$

Sei nun $r := \min_{z\in K} |z|$ (das Minimum existiert, da K kompakt und $|\cdot|$ stetig ist). Dann ist $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{r}$. Damit können wir den gesamten Ausdruck unabhängig von z durch eine konvergente Majorante abschätzen.

(b) Die Ableitung der linken Seite ist gegeben durch

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2(z)} \overset{*}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Wir können die rechte Seite aufgrund der kompakten Konvergenz gliedweise differenzieren und erhalten daher für die Ableitung der rechten Seite

$$-\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2+z^2)}{(z-n)^2(z+n)^2} = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} + \frac{1}{(z+n)^2} = -\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Offensichtlich ist also die Differenz zwischen beiden Ableitungen gleich 0.

(c) Wir berechnen $h\left(\frac{1}{2}\right)$. Wegen $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, lassen wir den ersten Teil sofort weg und sehen

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{\frac{1}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{4} - n^2} \\
&= -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}-n\right)\left(\frac{1}{2}+n\right)} \\
&= -2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \\
&\overset{\text{Teleskop}}{=} -2 + \frac{1}{\frac{1}{2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 50

Wir ermitteln zunächst die ersten 4 Terme der Taylorentwicklung von $\sin^2(\pi z)$, um dann durch Polynomdivision die ersten drei Terme der Laurententwicklung auszurechnen. Es gilt

$$\sin^2(\pi z) = \pi^2 z^2 - \frac{1}{3}\pi^4 z^4 + \mathcal{O}(z^5).$$

Mittels endlicher Polynomdivision erhalten wir für die Laurententwicklung daraus

$$\frac{1}{\sin^2(\pi z)} = \frac{1}{\pi^2 z^2 - \frac{1}{3}\pi^4 z^4 + \mathcal{O}(z^5)} = \frac{1}{\pi^2} z^{-2} + \frac{1}{3} + \mathcal{O}(z).$$

Multiplikation mit π^2 ergibt $\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = z^{-2} + \frac{\pi^2}{3} + \mathcal{O}(z)$. Nun berechnen wir noch die entsprechenden Koeffizienten für die rechte Seite von $(*)$. Da die Reihe kompakt kovergiert und alle Summanden bis auf $\frac{1}{z^2}$ holomorph auf $D_{0,1}(0)$ sind, ist $H(z) = \frac{1}{z^2}$, also $a_{-2} = 1$ und $a_{-1} = 0$. Für a_0 können wir den holomorphen Anteil der rechten Seite an der Stelle $z = 0$ auswerten und erhalten $a_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Vergleich der Laurent-Koeffizienten ergibt schließlich

$$\frac{\pi^2}{3} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \implies \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$