Funktionalanalysis

Jan Fuhrmann

Wintersemester 2023/24

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume **7**
- 1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften 8
- 1.2. Vollständigkeit und Kompaktheit 16

2. Hilberträume und die Sätze von Riesz **27**
- 2.1. Skalarprodukte und Hilberräume 27
- 2.2. Orthogonale Projektionen, erster Satz von Riesz 32
- 2.3. Stetige lineare Funktionale, zweiter Satz von Riesz 39
- 2.4. Fourierentwicklung in Hilberträumen 44

3. Funktionalanalytische Grundprinzipien **55**
- 3.1. Lineare Operatoren 55
- 3.2. Der Satz von Baire 61
- 3.3. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit 65
- 3.4. Offene Abbildungen, abgeschlossene Graphen 72

A. Das Lebesgue-Integral **77**

Literatur:

Zu den Themen unseres Kurses

Prinzipiell können Sie jedes Lehrbuch zur (linearen) Funktionalanalysis begleitend zur Vorlesung konsultieren. Die folgende Liste enthält eine Auswahl von Büchern, die ich selbst mehr oder weniger regelmäßig nutze.

- W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, 6. Auflage, Springer (2012)
  (online verfügbar via Uni-Bibliothek)
- H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer (2011)
- J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, 2nd edition, Springer (2007)
- M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Academic Press (1972)
- F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, 4. Auflage, Harri Deutsch (1982)
  (auch englisch "Functional Analysis", französisch "Leçons d'analyse fonctionnelle")
- D. Werner, Funktionalanalysis, 8. Auflage, Springer (2018)
  (online verfügbar via Uni-Bibliothek)
- E. Zeidler, Applied Functional Analysis – Applications to Mathematical Physics, Springer (1995)
- E. Zeidler, Applied Functional Analysis – Main Principles and Their Applications, Springer (1995)

Zum Nachschlagen von Vorkenntnissen

Zum Nachschlagen, Wiederholen oder Vertiefen der benötigten Vorkenntnisse können Sie auf eine riesige Auswahl von Lehrbüchern der Analysis und (linearen) Algebra zurück greifen. Die hier aufgeführten begleiten mich (ggf. in anderen Auflagen) zuverlässig seit meinem eigenen Studium.

- M. Artin, Algebra, Springer (1993)
  (Vektorräume und lineare Abbildungen)
- K. Königsberger, Analysis 2, 5. Auflage (2004)
  (Metrische und topologische Räume, Lebesgue-Integral)
- W. Rudin, Analysis, 5. Auflage, De Gruyter Oldenbourg (2022)
  (Metrische und topologische Räume, Lebesgue-Integral)

Notation:

Viele unserer Aussagen gelten für reelle ebenso wie für komplexe Vektorräume, und wir bezeichnen mit $\mathbb{K}$ stets einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Für reelle Zahlen a, b bezeichnen $a \wedge b$ das Minimum und $a \vee b$ das Maximum von a und b. Diese Schreibweise erweist sich insbesondere für reellwertige Funktionen als nützlich, indem etwa $f \wedge g$ als punktweises Minimum von f und g gelesen wird.

Für eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen Vektorräumen V und W bezeichnen wir mit $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0_W\}$ den Kern und mit $\operatorname{im} f = \{f(v) : v \in V\}$ das Bild von f. Letzteres ergibt natürlich auch für Abbildungen zwischen allgemeinen Mengen Sinn.

Mit $(v_n)_n$ werden wir stets Folgen von Elementen v_n einer gegebenen Menge V bezeichnen. Es handelt sich also einfach um eine Kurzschreibweise für $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n=1}^{\infty} = (v_1, v_2, \dots)$.

Für eine beliebige Teilmenge A einer gegebenen Grundmenge Ω bezeichnen wir mit $\mathbf{1}_A : \Omega \to \mathbb{R}$ die durch

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in \Omega \backslash A \end{cases}$$

gegebene Indikatorfunktion[1].

Sind V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v \in V$, $A \subset V$ und $\alpha \in K$, so schreiben wir

$$v + A := \{v + w : w \in A\}, \quad \alpha A := \{\alpha w : w \in A\}$$

für die Translation von A um v bzw. die Multiplikation von A mit α.
Ferner bezeichnen wir mit 0_V den Nullvektor im Vektorraum V, lassen das Subskript V aber auch gelegentlich weg, wenn aus dem Kontext klar ist, welches Nullelement gemeint ist.

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $A \subset V$ eine nicht leere Teilmenge, so bezeichnen wir mit

$$< A >= \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K},\ v_1, \dots, v_n \in A \right\}$$

die lineare Hülle von A.

[1] In der Analysis finden Sie dafür oft auch die Bezeichnung charakteristische Funktion unter dem Namen χ_A.

KAPITEL 1

Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

In dieser Vorlesung befassen wir uns mit linearer Funktionalanalysis, also vor allem mit linearen Räumen und Abbildungen zwischen diesen. Aus der Analysis 2 wissen wir, dass lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bzw. $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ notwendigerweise bezüglich der euklidischen Topologie stetig und sogar unter jeder Norm (beliebig oft) differenzierbar sind. Im Kern werden wir uns mit der Verallgemeinerung dieser Beobachtung auf den unendlichdimensionalen Fall beschäftigen, werden aber schnell sehen, dass bereits die Stetigkeit nicht mehr notwendigerweise garantiert ist. Auch andere uns bekannte Aussagen lassen sich nicht direkt verallgemeinern. Folgende aus dem endlichdimensionalen Fall bekannte Aussagen werden wir genauer untersuchen müssen:

- Auf einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V erzeugen alle Normen die gleiche Topologie.
- In einem endlichdimensionalen normierten Vektorraum sind abgeschlossene und beschränkte Mengen kompakt[1]. Insbesondere sind abgeschlossene Einheitskugeln kompakt.
- Lineare Unterräume eines endlichdimensionalen normierten Vektorraums sind abgeschlossen (bzgl. der von der Norm erzeugten Topologie).
- Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist. Genauer gilt für lineare Abbildungen $f : V \to W$ die Dimensionsformel

  $$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}}(\ker f) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{im} f).$$

  In gewissem Sinn mag das zwar noch richtig sein, wenn wir auf beiden Seiten ∞ als Wert zulassen, aber die Aussagekraft für einen der Summanden auf der rechten

[1] Für die euklidischen n-dimensionalen Räume $\mathbb{K}^n$ ist das der Satz von Heine-Borel. Nach dem vorherigen Punkt gilt das dann auch unter allen Normen auf $\mathbb{K}^n$.

Seite ist rechte gering, wenn der andere Summand und die linke Seite unendlich sind.

1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

Wir beginnen mit einer Erinnerung an das Konzept normierter linearer Räume. Dabei handelt es sich um eine spezielle Klasse metrischer Räume, die Sie in der Analysis 2 kennen gelernt haben. Diese wiederum hatten wir als spezielle topologische Räume identifiziert. Viele der hier angegebenen Definitionen und Aussagen sollten Ihnen also bekannt vorkommen. Falls das nicht der Fall ist, können Sie gern in den einschlägigen Lehrbüchern zur Analysis 2 oder elementarer Topologie nachschlagen.

Definition 1.1. *Ein normierter linearer Raum (oder normierter Vektorraum) ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V zusammen mit einer Norm $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ derart, dass für alle $v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$*

(i) $v = 0_V \iff \|v\| = 0$ *(Definitheit)*

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ *(Homogenität)*

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(Dreiecksungleichung)*

gelten.

Da Normen nur auf Vektorräumen Sinn ergeben (wir brauchen die Addition in V inklusive der Null und die Multiplikation mit Skalaren), sprechen wir manchmal kurz von normierten Räumen und wissen dann sofort, dass es sich um normierte *lineare* Räume handeln muss.

Bemerkung. *In der Analysis 2 haben wir gelernt, dass jeder normierte lineare Raum $(V, \|\cdot\|)$ vermöge*

$$d(v, w) = \|v - w\|, \qquad v, w \in V,$$

auch ein metrischer Raum ist. Umgekehrt hatten wir aber gesehen, dass auf jeder nicht leeren Menge etwa die diskrete Metrik definiert werden konnte, auch wenn gar keine lineare Struktur vorlag.

Bemerkung. *Ist in Punkt (i) nur die Implikation $v = 0 \implies \|v\| = 0$ erfüllt, kann $\|v\|$ also auch für nicht triviale Vektoren verschwinden, so heißt $\|\cdot\|$ eine Halbnorm (oder Seminorm). Die Menge $N = \{v \in V : \|v\| = 0\}$ ist dann wegen der Homogenität und der Dreiecksungleichung ein Vektorraum, und wir erhalten durch Faktorisierung einen Vektorraum V/N, auf dem $\|\cdot\|$ zu einer Norm wird[2]. Sie kennen diese Konstruktion aus der Maßtheorie von der Konstruktion der Räume $L_p(\mu)$.*

[2] Genauer ist für jede Restklasse $v + N$ die Norm $|v + w\|$ unabhängig vom Repräsentanten, also unabhängig von $w \in N$, definiert.

Die üblichen Verdächtigen $\mathbb{K}^n$ zusammen mit den p-Normen

$$\|v\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p \in [1,\infty), \\ \max\limits_{k=1,\dots,n} |v_k| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

kennen wir schon. Das verallgemeinern wir schnell auf die natürlichen unendlichdimensionalen Versionen.

Beispiel 1. *Mit $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bezeichnen wir den Vektorraum der $\mathbb{K}$-wertigen Zahlenfolgen $v = (v_k)_{k\geq 1}$. Wir sehen sofort, dass $\mathbb{K}^n$ mit dem linearen Unterraum der spätestens nach n Gliedern abbrechenden Folgen identifizierbar ist. Jedes $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ liefert nämlich eine eindeutige Folge $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:*

$$v_k = \begin{cases} x_k & \text{für } k = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{für } k > n. \end{cases}$$

Dass Summen und skalare Vielfache solcher abbrechenden Folgen wieder spätestens bei n abbrechen, ist offensichtlich, also handelt es sich tatsächlich um einen linearen Unterraum.
Auf $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ definieren wir analog zu den bekannten p-Normen

$$\|v\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^\infty |v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p \in [1,\infty), \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |v_k| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

und stellen sofort fest, dass wir im allgemeinen nicht davon ausgehen können, dass $\|v\|_p \in [0,\infty)$ gilt, wie es sich für eine Norm gehört. Das führt uns zur Definition der Räume der zur pten Potenz (absolut) summierbaren (bzw. im Fall $p = \infty$: der beschränkten) Folgen:

$$\ell_p^{\mathbb{K}} := \left\{ v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|v\|_p < \infty \right\}.$$

Versehen mit $\|\cdot\|_p$ wird $\ell_p^{\mathbb{K}}$ zu einem normierten Vektorraum. Wir rechnen das für den Fall $p = \infty$ nach, für $p < \infty$ können Sie das als Übung unter Verwendung der Rechenregeln für absolut konvergente Reihen und einiger Eigenschaften der Potenzfunktionen selbst überprüfen.
Die Endlichkeit der Norm haben wir durch die Definition von $\ell_\infty^{\mathbb{K}}$ erzwungen, die müssen wir also nicht mehr untersuchen.
Zunächst ist die triviale Folge $0 \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ natürlich beschränkt, also ist $0 \in \ell_\infty$ (wir lassen das $\mathbb{K}$ oft weg, wenn entweder klar oder unerheblich ist, welcher Körper gemeint ist), und es gilt $\|0\|_\infty = \sup_k |0| = 0$. Ist umgekehrt $v \neq 0$, so existiert ein k_0 mit $v_{k_0} \neq 0$, und dann ist $\|v\|_\infty \geq |v_{k_0}| > 0$. Das zeigt die Definitheit.
Für $v \in \ell_\infty$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $|v_k| \leq \|v\|_\infty$. Ist nun $\alpha \in \mathbb{K}$, so folgt $|(\alpha v)_k| = |\alpha||v_k| \leq |\alpha|\|v\|_\infty$, also $\|\alpha v\| \leq |\alpha|\|v\|_\infty$ und insbesondere $\alpha v \in \ell^\infty$. Umgekehrt führen wir die Annahme $\|\alpha v\|_\infty < |\alpha|\|v\|_\infty$ $\|\alpha v\|_\infty = |\alpha|\|v\|_\infty - \delta$ für ein $\delta > 0$ zum Widerspruch.

Wäre $\alpha = 0$, so stünde hier $0 = 0 - \delta$, was völlig unmöglich ist. Ist aber $|\alpha| > 0$, so fänden wir nach der Definition des Supremums ein k_0 derart, dass

$$|v_{k_0}| \geq \|v\|_\infty - \frac{\delta}{2|\alpha|}, \quad \textit{also} \quad \|v\|_\infty \leq |v_{k_0}| + \frac{\delta}{2|\alpha|}$$

wäre. Damit berechnen wir nach unserer Annahme:

$$|\alpha||v_{k_0}| \leq |\alpha|\|v\|_\infty - \delta \leq |\alpha| \left(|v_{k_0|+\frac{\delta}{2|\alpha|}} \right) - \delta = |\alpha||v_{k_0}| - \frac{\delta}{2},$$

was auch ein Widerspruch ist. Damit haben wir auch die Homogenität gezeigt.
Zur Dreiecksungleichung stellen wir fest, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$|(v+w)_k| = |v_k + w_k| \leq |v_k| + |w_k| \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty.$$

Nehmen wir das Supremum über alle k, so erhalten wir sofort die Dreiecksungleichung, die uns auch nochmal sichert, dass die Summe zweier beschränkter Folgen wieder beschränkt ist.
Wir haben also gezeigt, dass ℓ_∞ tatsächlich ein Vektorraum ist und $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm darauf darstellt.

Bemerkung. *Die Konstruktion der Räume ℓ_p folgt einem allgemeinen Konzept. Ist auf einem Vektorraum V eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty]$ definiert, die bis auf die Endlichkeit alle Eigenschaften einer Norm hat, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine Quasinorm und stellen fest, dass wegen der Homogenität und der Dreiecksungleichung $W = \{v \in V : \|v\| < \infty\}$ ein Untervektorraum von V ist, auf dem $\|\cdot\|$ eine Norm ist.*

Man beachte den Unterschied zum endlichdimensionalen Fall. Bei weitem nicht alle Folgen $v \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ gehören zu einem der Räume ℓ_p, und die Räume enthalten nicht die gleichen Folgen als Elemente[3]. Schließlich sind unendliche Summen bzw. Suprema unendlicher Mengen nicht zwingend endlich. Das ist auch schon die Grundlage der in den einführenden Bemerkungen erwähnten scheiternden Verallgemeinerungen von Aussagen aus der endlichdimensionalen linearen Algebra bzw. Analysis 2.

Bemerkung. *In Erinnerung an die Maßtheorie (aus der höheren Analysis oder Wahrscheinlichkeitstheorie) stellen wir fest, dass es sich bei den ℓ_p-Räumen um Spezialfälle der $L_p(\mu)$-Räume handelt, den Räumen (von Äquivalenzklassen) jener messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{K}$, für die*

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \textit{für } p \in [1, \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| & \textit{für } p = \infty \end{cases}$$

endlich ist. Die Räume ℓ_p hatten wir als Spezialfälle für $\Omega = \mathbb{N}$, versehen mit der Potenzmenge als σ-Algebra und dem Zählmaß als Maß erkannt. Die Folgenräume haben die

[3] Sie rechnen leicht nach, dass $\ell_p \subsetneq \ell_q$ für $p < q$ gilt. Denken Sie etwa an eine durch $v_k = k^{-r}$ gegebene Folge, wobei $r > 0$ so gewählt ist, dass $rp < 1 < rq$ gilt.

angenehme Eigenschaft, dass man auf die Identifizierung fast überall übereinstimmender Funktionen verzichten kann, da es bezüglich des Zählmaßes keine nicht trivialen Nullmengen gibt. Jede der Äquivalenzklassen besteht also aus genau einem Repräsentanten. In dieser Vorlesung werden wir uns nicht explizit mit Maß- und Integrationstheorie beschäftigen, aber in vielen Situationen auf das Lebesgue-Integral zurück greifen. Neben den Folgenräumen werden diese L_p-Räume für das Lebesgue-Maß auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sowie deren Abkömmlinge eine wichtige Rolle spielen. Die nötigen Aussagen werden wir im Anhang A sammeln; dort können Sie jederzeit nachschlagen.

Auch hier haben wir uns wieder auf lineare Unterräume des ursprünglichen Raums messbarer Funktionen (genauer: Äquivalenzklassen solcher) zu beschränken, auf denen die Normen endlich sind.

Notation. Wenn wir vom normierten Vektorraum ℓ_p oder $L_p(\mu)$ bzw. $L_p(\Omega)$ sprechen, meinen wir – sofern nicht ausdrücklich anders gesagt – den mit der natürlichen Norm $\|\cdot\|_p$ versehenen Raum. Die Norm gehört also, anders als im endlichdimensionalen Fall, praktisch zum Raum selbst.

Vom üblichen Betrag in $\mathbb{R}$ kennen wir folgende Aussage, deren Beweis wir aus der Analysis 1 praktisch wortgleich übernehmen können.

Lemma 1.2 (Dreiecksungleichung nach unten). *Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so gilt $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$ für alle $v, w \in V$.*

Beweis. Übung (siehe Analysis 1). □

Folgende Definition dürfte eine Wiederholung sein, aber der Vollständigkeit halber müssen wir sie hier noch einmal angeben.

Definition 1.3. *In einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ definieren wir zu $v \in V$ und $r > 0$ die offene Kugel vom Radius r um v durch*

$$B_r(v) = \{w \in V : \|v - w\| < r\},$$

und die abgeschlossene Kugel vom Radius r um v durch

$$\bar{B}_r(v) = \{w \in V : \|v - w\| \leq r\}.$$

Die offene bzw. abgeschlossene Einheitskugel in V sind durch

$$B_V = B_1(0_V) \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{B}_V = \bar{B}_1(0_V)$$

gegeben.

Wie in jedem metrischen Raum[4] erlauben uns die offenen Kugeln die Definition offener Mengen.

[4]In einem metrischen Raum wird eine offene Kugel durch $B_r(v) = \{w \in V : d(v, w) < r\}$ definiert.

Definition 1.4. *Eine Teilmenge $U \subset V$ eines normierten Vektorraums $(V, \|\cdot\|)$ heißt offen, falls zu jedem $v \in V$ ein $r > 0$ derart existiert, dass $B_r(v) \subset U$ gilt.*
Die Familie $\mathcal{T}$ der offenen Mengen ist die von $\|\cdot\|$ erzeugte Topologie über V.

Manchmal schreiben wir $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ für die von $\|\cdot\|$ erzeugte Topologie. Das wird spätestens dann relevant, wenn wir verschiedene Normen oder auch gar nicht von einer Norm erzeugte Topologien auf einem gegebenen Vektorraum betrachten.
Dass es sich bei den so definierten Systemen offener Mengen tatsächlich um Topologien handelt, besagt das folgende Lemma, dessen Aussagen gerade die definierenden Eigenschaften eines Systems offener Mengen (also einer Topologie) sind.

Lemma 1.5. *Für die von $\|\cdot\|$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}$ über einem normierten Vektorraum V gelten:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{T}$ *(die leere Menge und der gesamte Raum sind stets offen)*

(ii) *Ist $\mathcal{I}$ eine beliebige (nicht leere) Indexmenge und sind $U_i \in \mathcal{T}$, $i \in \mathcal{I}$, so ist $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$ (beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen)*

(iii) *Sind $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ (endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen)*

Beweis. Übungsblatt 0 □

Selbstverständlich sind (nach Dreiecksungleichung) alle offenen Kugeln offen (also in $\mathcal{T}$), wie Sie sich schnell überzeugen. Wir werden gleich sehen, dass auch der Begriff der *abgeschlossenen* Kugel durchaus sinnvoll gewählt ist.

Definition 1.6. *Die Norm $\|\cdot\|$ auf dem Vektorraum V heißt stärker als die Norm $|[\cdot]|$ auf V, wenn die von $|[\cdot]|$ erzeugte Topologie in der von $\|\cdot\|$ erzeugten enthalten ist.*
Zwei Normen $\|\cdot\|$, $|[\cdot]|$ auf dem gleichen Vektorraum heißen äquivalent, wenn sie die gleiche Topologie erzeugen.

Zwei Normen sind also äquivalent, wenn jede der beiden stärker als die andere ist.

Lemma 1.7. *Zwei Normen $\|\cdot\|$, $|[\cdot]|$ auf einem Vektorraum sind genau dann äquivalent, wenn Konstanten $C \geq c > 0$ derart existieren, dass für alle $v \in V$*

$$c\|v\| \leq |[v]| \leq C\|v\| \tag{1.1}$$

gilt.

Beweis. Zum Beweis der Äquivalenz der Normen genügt es zu zeigen, dass in jeder offenen Kugel bezüglich $\|\cdot\|$ eine offene Kugel bezüglich $|[\cdot]|$ liegt und umgekehrt. Dann finden wir nämlich zu einer Menge U und einem $v \in U$ stets genau dann eine in U liegende ε-Kugel bezüglich $\|\cdot\|$ um v, wenn wir eine solche bezüglich $|[\cdot]|$ finden.

Zu $\varepsilon > 0$ und $v \in V$ gilt

$$B_{\varepsilon,|[\cdot]|}(v) = \{w : |[v-w]| < \varepsilon\} \subset \{w : c\|v-w\| < \varepsilon\} = B_{\frac{\varepsilon}{c},\|\cdot\|}(v)$$

und umgekehrt $B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(v) \subset B_{C\varepsilon,|[\cdot]|}(v)$, wie verlangt.

Zur Notwendigkeit der Bedingung nehmen wir an, wir hätten zu jedem $C_n = n$ ein $v_n \in V$ derart, dass $|[v_n]| > n\|v_n\|$ ist, dass also die rechte Ungleichung nicht gilt. Dank der Homogenität beider Normen gilt dann auch für $w_n := \frac{v_n}{\|v_n\|}$ (man beachte, dass die v_n notwendigerweise von 0 verschieden sind):

$$|[w_n]| > n \left\| \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\| = n.$$

Die Einheitskugel $U = B_{1,|[\cdot]|}(0)$ ist offen in $(V, |[\cdot]|)$, also nach Annahme der Äquivalenz auch in $(V, \|\cdot\|)$. Zu $0 \in U$ müssten wir also ein $\varepsilon > 0$ derart finden, dass $B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(0) \subset U$ gilt. In $B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(0)$ liegen nun aber alle $\frac{\varepsilon}{2} w_n$, also gilt für alle n:

$$\frac{\varepsilon}{2} w_n \in B_{\varepsilon,\|\cdot\|}(0) \subset U = B_{1,|[\cdot]|}(0), \quad \text{also} \quad \frac{\varepsilon}{2}|[w_n]| \leq 1.$$

Das steht aber für $n > \frac{2}{\varepsilon}$ im Widerspruch zu $|[w_n]| > n$.
Völlig symmetrisch führen wir auch die Annahme, die linke Ungleichung gälte nicht, zu einem Widerspruch. $\square$

In diesem Beweis haben wir einige sehr mächtige Tricks benutzt, die Beweise zu normierten Vektorräumen oft erleichtern. Zum einen haben wir uns im zweiten Teil auf Kugeln um den Ursprung beschränkt. Das funktioniert, weil V dank der Vektorraumstruktur überall lokal gleich aussieht. Die Kugel $B_\varepsilon(0)$ unterscheidet sich also nicht von $B_\varepsilon(v)$. Tatsächlich liegt ja w genau dann in $B_\varepsilon(v)$, wenn $w - v$ in $B_\varepsilon(0)$ liegt. Zweitens haben wir benutzt, dass Kugeln eines gegebenen Radius wegen der Homogenität einfach durch Aufblähen oder Schrumpfen aus solchen mit Radius 1 hervorgehen: $v \in B_1(0) \iff \varepsilon v \in B_\varepsilon(0)$, d.h.:

$$B_\varepsilon(w) = \{w + \varepsilon v : v \in B_1(0)\}.$$

Das Studium der Einheitskugel eines normierten Vektorraums verrät uns also schon alles über, was wir über Kugeln in diesem Raum wissen müssen, insbesondere charakterisiert die Einheitskugel die Norm und die von ihr erzeugte Topologie vollständig. Da Kugeln auch Umgebungen eindeutig charakterisieren, erhalten wir insbesondere folgende Aussage.

Korollar 1.8. *Die Normen $\|\cdot\|$ und $|[\cdot]|$ auf dem Vektorraum V sind genau dann äquivalent, wenn für jede Folge $(v_n)_n$ in V gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 0 \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} |[v_n]| = 0.$$

Beweis. Übung.
Man erinnere sich daran, dass Konvergenz bzgl. einer Topologie über V bedeutet:

$$v_n \to v \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{Für jede Umgebung } U \text{ von } v \text{ ex. } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } v_n \in U \text{ f.a. } n \geq n_0.$$

Eine Umgebung von v ist im topologischen Sinn einfach eine Menge U, die eine offene Menge W mit $v \in W \subset U$ enthält. In normierten Räumen können wir uns um kugelförmige Umgebungen beschränken, also:

$$v_n \to v \iff \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ ex. } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } v_n \in B_\varepsilon(v) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Äquivalente Topologien ergeben also für genau die gleichen Folgen Konvergenz (mit gleichem Grenzwert). □

Da wir normierte Vektorräume als spezielle topologische Räume identifiziert haben, können wir uns über Stetigkeit unterhalten. Dabei benutzen wir ohne Beweis, dass in normierten Vektorräumen wie in allen metrischen Räumen ε-δ-Stetigkeit (wie auch Folgenstetigkeit, aber dafür brauchen wir noch Grenzwerte) äquivalent zur topologischen Definition (Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen sind offen) ist.

Korollar 1.9. *Die Norm auf einem normierten Vektorraum ist eine stetige Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, wenn wir $\mathbb{R}$ mit seinem Standardbetrag versehen.*

Beweis. Das ist gerade die Aussage der Dreiecksungleichung nach unten. □

Ebenso schnell rechnen wir folgende Aussage nach.

Lemma 1.10. *Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, so sind die Vektorraumoperationen*

$$(v, w) \mapsto v + w \quad (V \times V \to V), \qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha v \quad (\mathbb{K} \times V \to V)$$

stetig bezüglich $\|\cdot\|$.

Beweis. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gilt für $v, w, \tilde{v}, \tilde{w} \in V$ mit $\|v - \tilde{v}\|, \|w - \tilde{w}\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$:

$$|\|\tilde{w} + \tilde{v}\| - \|w + v\|| \leq \|(\tilde{w} + \tilde{v}) - (w + v)\| \leq \|\tilde{w} - w\| + \|\tilde{v} - v\| < 2\delta = \varepsilon.$$

Die Addition ist also sogar gleichmäßig stetig. Analog gilt zu gegebenen $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$ und $\varepsilon > 0$ für $\tilde{\alpha} \in \mathbb{K}$, $\tilde{v} \in V$ mit

$$\|\tilde{v} - v\|, |\tilde{\alpha} - \alpha| < \delta = \frac{\varepsilon}{2(1 + |\alpha| + \|v\|)} \wedge \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} :$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\alpha}\tilde{v} - \alpha v\| &= \|(\tilde{\alpha}\tilde{v} - \tilde{\alpha}v) + (\tilde{\alpha}v - \alpha v)\| \\
&\leq \|\tilde{\alpha}(\tilde{v} - v)\| + \|(\tilde{\alpha} - \alpha)v\| \\
&= |\tilde{\alpha} - \alpha + \alpha|\|\tilde{v} - v\| + |\tilde{\alpha} - \alpha|\|v\| \\
&< (\delta + |\alpha|)\delta + \delta\|v\| \; < \; \delta^2 + \delta(1 + |\alpha| + \|v\|) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Die Aussage dieses Lemmas bedeutet schlicht, dass V unter der von der Norm erzeugten Topologie ein topologischer Vektorraum ist.
Wir erinnern auch noch an die Definition abgeschlossener Mengen. In einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt eine Teilmenge $A \subset X$ abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X \backslash A$ offen ist. In metrischen Räumen und erst recht in normierten Vektorräumen haben wir eine oft deutlich leichter zu überprüfende Bedingung. Dazu müssen wir noch die Konzepte konvergenter Folgen wiederholen, die wir bereits angedeutet haben.

Definition 1.11. *Eine Folge $(v_n)_n$ in einem metrischen Raum (V, d) heißt Cauchyfolge, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart existiert, dass $d(v_n, v_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Die Folge $(v_n)_n$ heißt konvergent, falls ein $v \in V$ derart existiert, dass $\lim_{n\to\infty} d(v, v_n) = 0$ gilt. In diesem Fall heißt v der[a] Grenzwert der Folge, und wir schreiben $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ oder $v_n \to v$ für $n \to \infty$.*

[a]Wir erinnern uns, dass eine Folge in einem metrischen Raum höchstens einen Grenzwert haben kann.

An dieser Stelle ist eine kleine Warnung angebracht. Haben wir auf einer gegebenen Menge verschiedene Metriken, so muss die Konvergenz bezüglich einer Metrik keineswegs die bezüglich der anderen implizieren. Wir hatten bereits festgestellt: Sollten zwei Metriken (bzw. im Fall normierter linearer Räume zwei Normen) für genau die gleichen Folgen Konvergenz (gegen die gleichen Grenzwerte) liefern, so bedeutet das, dass sie die gleiche Topologie erzeugen, also äquivalent sind. Diese Aussage formulieren wir nochmal in anderer Form als ein Lemma, das ebenfalls nur der Wiederholung dient.

Lemma 1.12. *Eine Teilmenge $A \subset V$ eines metrischen Raums (V, d) ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(v_n)_n$ in A der Grenzwert $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ ebenfalls in A liegt.*

Das liefert auch eine geeignete Definition des Abschlusses von Teilmengen metrischer Räume.

Definition 1.13. *Ist $M \subset V$ Teilmenge des metrischen Raums (V, d), so bezeichnen wir den Abschluss $\bar{M}$ von M (in (V, d)) als die Menge aller Grenzwerte von Folgen in M:*

$$\bar{M} = \{v \in V : \lim_{n\to\infty} v_n = v \ \text{ für eine Folge } (v_n)_n \text{ mit } v_n \in M \text{ für alle } n\}.$$

Selbstverständlich ist $\bar{M}$ damit abgeschlossen, und es gilt $M \subset \bar{M}$ (man betrachte konstante Folgen). Genauer ist $\bar{M}$ die nach Mengeninklusion kleinste abgeschlossene Teilmenge von V, die M enthält[5]:

$$\bar{M} = \bigcap_{M \subset A \subset V,\, A \text{ abgeschl.}} A.$$

[5]Unsere Definition stimmt also mit der Definition des Abschlusses für allgemeine topologische Räume überein.

Eine weitere nützliche Charakterisierung des Abschlusses nähert sich dem Problem über kleine Abstände. Der Abschluss einer Menge ist die Menge aller Berührungsspunkte von M. Das sind all jene Punkte, für die jede (ε-)Umgebung mindestens einen Punkt aus M enthält.

Lemma 1.14. *Der Abschluss $\bar{M}$ einer Teilmenge $M \subset V$ eines metrischen Raums (V, d) ist durch*

$$\bar{M} = \{v \in V : \text{ Für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } w \in M \text{ mit } d(v, w) < \varepsilon.\}$$

gegeben.

Beweis. Übungsblatt 0 □

Auch hier haben wir wieder gute Nachrichten mit Blick auf normierte Vektorräume.

Lemma 1.15. *(i) Sind U ein Untervektorraum eines Vektorraums V und $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, so ist auch $\bar{U}$ ein Untervektorraum von V.*
(ii) In einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ gilt für alle $v \in V$ und $\varepsilon > 0$:

$$\bar{B}_\varepsilon(v) = \overline{B_\varepsilon(v)}.$$

Beweis. Übung (man überprüfe für (i), dass $\bar{U}$ unter den Vektorraumoperationen abgeschlossen ist). □

Bemerkung. *Eine beliebige Menge M mit mindestens zwei Elementen, versehen mit der diskreten Metrik, zeigt sofort, dass Aussage (ii) in allgemeinen metrischen Räumen nicht gelten muss.*