

# Lineare Algebra 2 — Lösung zu Übungsblatt 7

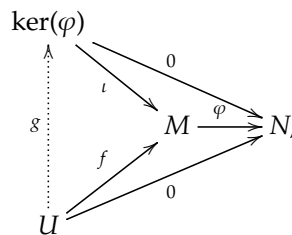
Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel  
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: Do 18.06.2020 um 9:15 Uhr

**26. Aufgabe:** (6 Punkte, Universelle Eigenschaft des Kerns) Seien  $R$  ein Ring,  $M$  und  $N$  zwei  $R$ -Moduln und  $\varphi: M \rightarrow N$  ein  $R$ -Modulhomomorphismus. Sei  $\iota: \ker(\varphi) \rightarrow M$  die kanonische Inklusion. Man zeige, dass das Paar  $(\ker(\varphi), \iota)$  die folgende Eigenschaft erfüllt:

(UK) Zu jedem  $R$ -Modul  $U$  und jedem  $R$ -Modulhomomorphismus  $f: U \rightarrow M$  mit  $\varphi \circ f = 0$  gibt es einen eindeutig bestimmten  $R$ -Modulhomomorphismus  $g: U \rightarrow \ker(\varphi)$  mit  $f = \iota \circ g$ ,



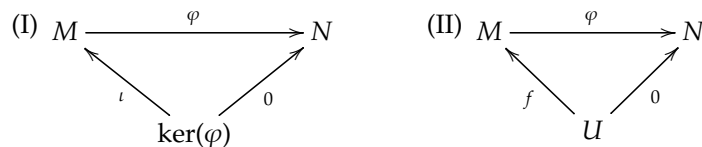
d.h. die Abbildung von Mengen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(U, \ker(\varphi)) &\rightarrow \{f \in \text{Hom}_R(U, M) \mid \varphi \circ f = 0\} \\ g &\mapsto \iota \circ g \end{aligned}$$

ist bijektiv.

**Lösung:**

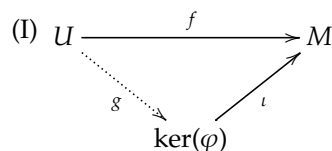
Wir betrachten zunächst die einzelnen (kommutativen) Teildigramme.



(I) Dies gilt für alle  $R$ -Modulhomomorphismen, denn  $\varphi(\iota(\ker(\varphi))) = \varphi(\ker(\varphi)) = \{0\}$  und damit  $\varphi \circ \iota = 0$ .

(II) Dies entspricht gerade der Voraussetzung, dass  $\varphi \circ f = 0$  gilt. Da  $\varphi(f(U)) = \{0\}$ , muss also  $f(U) \subseteq \ker(\varphi)$  gelten.

Wir suchen nun einen  $R$ -Modulhomomorphismus  $g$ , sodass das Diagramm



kommutiert. Aus (II) wissen wir, dass  $f(U) \subseteq \ker(\varphi)$  gilt, wir können also  $f$  einschränken auf den Homomorphismus

$$g := f|_{\ker(\varphi)}: U \rightarrow \ker(\varphi), \quad x \mapsto f(x).$$

Offenbar gilt damit  $\iota \circ g = f$  und  $g$  ist eindeutig bestimmt. Denn für eine weitere Abbildung  $g'$  mit diesen Eigenschaften gilt  $\iota \circ g = f = \iota \circ g'$  und da die Inklusion  $\iota$  eine injektive Abbildung ist, folgt daraus schon  $g = g'$ .

**27. Aufgabe:** (2+4 Punkte, Direkte Summen von freien Moduln) Seien  $R$  ein Ring und  $(M_i)_{i \in I}$  eine Familie von freien  $R$ -Moduln. Sei  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ . In dieser Aufgabe soll mit Hilfe der universellen Eigenschaften von direkten Summen und freien Moduln gezeigt werden, dass  $M$  frei ist. Sei dazu  $(x_{i,j})_{j \in J_i}$  eine Basis von  $M_i$ . Wir setzen

$$K := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times J_i)$$

und betrachten  $(x_{i,j})_{(i,j) \in K}$  via der kanonischen Inklusionen  $q_i: M_i \rightarrow M$  als Familie von Elementen von  $M$ . Sei  $N$  ein Modul mit einer Familie von Elementen  $(y_{i,j})_{(i,j) \in K}$  aus  $N$ .

- (a) Man zeige, dass es für alle  $i \in I$  einen eindeutigen  $R$ -Modulhomomorphismus  $f_i: M_i \rightarrow N$  mit  $f_i(x_{i,j}) = y_{i,j}$  für alle  $j \in J_i$  gibt.
- (b) Man folgere aus (a) und der universellen Eigenschaft der direkten Summe, dass  $(M, (x_{i,j})_{(i,j) \in K})$  die Eigenschaft (UF) erfüllt,  $M$  also frei ist.

**Lösung:**

- (a) Sei  $i \in I$ . Anwendung der universellen Eigenschaft freier Moduln (UF) aus Satz 7.7 auf das Paar  $(M_i, (x_{i,j})_{j \in J_i})$  liefert zu dem  $R$ -Modul  $N$  und der Familie  $(y_{i,j})_{j \in J_i}$  einen eindeutigen  $R$ -Modulhomomorphismus  $f_i: M_i \rightarrow N$  mit  $f_i(x_{i,j}) = y_{i,j}$  für alle  $j \in J_i$ . M.a.W. ist die Abbildung

$$\Phi_i: \text{Hom}_R(M_i, N) \rightarrow N^{J_i}, \varphi \mapsto (\varphi(x_{i,j}))_{j \in J_i}$$

bijektiv, da die Familie  $(y_{i,j})_{j \in J_i} \in N^{J_i}$  beliebig war.

- (b) Um einzusehen, dass das Paar  $(M, (x_{i,j})_{(i,j) \in K})$  die universelle Eigenschaft (UF) erfüllt, müssen wir gemäß Satz 7.7 zeigen, dass die Abbildung

$$\text{Hom}_R(M, N) \rightarrow N^K, f \mapsto (f(x_{i,j}))_{(i,j) \in K}$$

für jeden  $R$ -Modul  $N$  bijektiv ist.

Setzen wir  $f_i := f \circ q_i: M_i \rightarrow N$  für jedes  $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ , so ist nach der UE der direkten Summe 7.4 die Abbildung

$$\text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, N), f \mapsto (f_i)_{i \in I}$$

bijektiv, und unter Verwendung der Bijektionen  $\Phi_i: \text{Hom}_R(M_i, N) \rightarrow N^{J_i} = \prod_{j \in J_i} N$  aus (a) erhalten wir die Bijektivität von

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(M, N) &\longrightarrow \prod_{i \in I} N^{J_i} = \prod_{(i,j) \in K} N = N^K, \\ f &\longmapsto (\Phi_i(f_i))_{i \in I} = (f(x_{i,j}))_{(i,j) \in K} \end{aligned}$$

(beachte, dass wir gemäß der Angabe die Identifikationen  $x_{i,j} = q_i(x_{i,j}) \in M$  verwenden).

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.