Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 10

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: Do 09.07.2020 um 9:15 Uhr

---

36. Aufgabe: *(4 Punkte, Äußere Potenzen von Abbildungen)* Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

und f_A die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{A\cdot} \mathbb{R}^3$. Man berechne die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\bigwedge^2 f_A \colon \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \to \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$ von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$, wobei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Definition: Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Dann heißt M *flach*, wenn für alle injektiven R-Modulhomomorphismen $\varphi \colon N \to L$ mit R-Moduln N, L auch $\varphi \otimes \mathrm{id}_M \colon N \otimes_R M \to L \otimes_R M$ (oder äquivalent $\mathrm{id}_M \otimes \varphi \colon M \otimes_R N \to M \otimes_R L$) injektiv ist.

37. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Flache Moduln)* Seien R ein Ring und M ein R-Modul.

(a) Man zeige: Ist M endlich erzeugt und frei, so ist M flach.

(b) Seien M flach und N ein weiterer flacher R-Modul. Sei $\varphi \colon M \to N$ ein injektiver R-Modulhomomorphismus. Man zeige, dass $\varphi \otimes \varphi \colon M \otimes_R M \to N \otimes_R N$ injektiv ist.
Hinweis: Man schreibe $\varphi \otimes \varphi = (\mathrm{id}_N \otimes \varphi) \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}_M)$.

(c) Man gebe ein Beispiel eines Ringes R und eines R-Moduls M, der nicht flach ist.

38. Aufgabe: *(3+3+2 Punkte, Die Determinante und Injektivität)* Seien R ein Ring und M ein endlich erzeugter freier R-Modul. Man zeige:

(a) Seien N ein weiterer endlich erzeugter freier R-Modul und $\varphi \colon M \to N$ ein injektiver R-Modulhomomorphismus. Dann ist $\bigwedge^2 \varphi \colon \bigwedge^2 M \to \bigwedge^2 N$ injektiv.
Hinweis: Man verwende Aufgabe 35 und Aufgabe 37.

(b) Seien $m_1, m_2 \in M$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

  (i) Die Familie (m_1, m_2) ist linear unabhängig.
  (ii) Aus $r(m_1 \wedge m_2) = 0$ in $\bigwedge^2 M$ mit $r \in R$ folgt bereits $r = 0$.

Hinweis: Für die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) betrachte man den R-Modulhomomorphismus $\psi \colon R^2 \to M$ mit $\psi(e_i) = m_i$ für $i = 1, 2$, wobei (e_1, e_2) die Standardbasis von R^2 bezeichnet.

(c) Seien nun $\mathrm{Rang}(M) = 2$ und $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

  (i) φ ist injektiv.
  (ii) $\det(\varphi) \in R$ ist kein Nullteiler.

39. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Exakte Folgen)* Seien $N = \mathbb{Z}$ und $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Seien weiterhin $f \colon N \to N \oplus M$ und $g \colon N \oplus M \to M$ gegeben durch

$$f(n) = (2n, 0) \quad \text{und} \quad g(n, (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots)) = (\overline{n}, \overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots)$$

für $n \in N$ und $(\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots) \in M$. Man zeige:

(a) Die Folge $0 \to N \xrightarrow{f} N \oplus M \xrightarrow{g} M \to 0$ ist eine kurze exakte Folge von $\mathbb{Z}$-Moduln.

(b) Die Folge aus (a) zerfällt nicht.
Hinweis: Man betrachte das Element $x = (1, 0, 0, \dots) \in M$ und verwende, dass $2x = 0$ gilt.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.