

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 3

Besprechung in den Übungsgruppen am 4. November 2019

1. Hausaufgabe: Differentialgleichung

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''(x) + y(x) = 0.$$

- Wie viele linear unabhängige Lösungen erwarten Sie und warum?
- Bestimmen Sie die Lösungen in der erwarteten Anzahl mit Hilfe eines integrierenden Faktors. Verwenden Sie hierfür die imaginäre Einheit i , die über die Gleichung $i^2 = -1$ definiert ist. Zeigen Sie, dass die Lösungen linear unabhängig sind, und geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an.
- Schreiben Sie die obige Differentialgleichung in ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um.
- Zeigen Sie mit Hilfe der Lipschitz-Bedingung, dass die Lösung der Differentialgleichung für einen vollständigen Satz von Anfangsbedingungen eindeutig ist. Wie viele Anfangsbedingungen bilden einen vollständigen Satz? Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie die Ergebnisse aus b) und c) verwenden.
- Betrachten Sie nun die Funktion

$$\tilde{y}(x) = A \sin(x) + B \cos(x) \quad \text{mit} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion ebenfalls eine allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung ist.

- Was schließen Sie aus d) und e)?

2. Hausaufgabe: Relativistische Energie

Die Newton'sche Mechanik erklärt sehr erfolgreich viele Alltagsphänomene, steht jedoch in einem fundamentalen Widerspruch zu Vorhersagen der Elektrodynamik. Die spezielle Relativitätstheorie verallgemeinert die Newton'sche Mechanik und löst diesen Widerspruch. Trotzdem ist die Newton'sche Physik nicht falsch, sie gilt lediglich unter gewissen Voraussetzungen. Insbesondere geht sie aus der speziellen Relativitätstheorie hervor, solange diese Voraussetzungen gelten. Man sagt auch, die Newton'sche Physik sei ein Grenzfall der speziellen Relativitätstheorie.

Dieses Prinzip ist deutlich allgemeiner: Wann immer eine neue physikalische Theorie für sich in Anspruch nimmt, eine Erweiterung einer experimentell gut geprüften Theorie darzustellen oder sogar zwei oder mehr Theorien zu vereinigen, müssen die ursprünglichen Theorien als Grenzfälle aus dieser hervorgehen. Was damit gemeint ist, demonstriert diese Aufgabe am Beispiel der relativistischen Energie.

Die Energie eines Teilchens, auf das keine äußeren Kräfte wirken (ein sog. freies Teilchen), ist in der speziellen Relativitätstheorie gegeben als

$$E = \gamma m_0 c^2 \quad \text{mit} \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

wobei m_0 die Ruhemasse des Teilchens ist, v seine Geschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit.

- a) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung von

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

um $x_0 = 0$ bis zur einschließlich zweiten Ordnung. Sie brauchen das Restglied nicht berechnen.

- b) Was ergibt sich somit für die relativistische Energie bis zur Ordnung v^4 ?
- c) In welcher Ordnung der Näherung stimmt die relativistische Energie mit der Energie der klassischen Mechanik überein? Berücksichtigen Sie, dass ein konstanter Energie-Term keinen Einfluss auf die Dynamik des Teilchens hat.
- d) Wann bricht die Näherung der klassischen Mechanik zusammen, wenn man an der Dynamik des Teilchens interessiert ist?*
- e) Kennen Sie Phänomene, bei denen höhere Ordnungen eine Rolle spielen?

3. Präsenzaufgabe: Taylor-Entwicklung wichtiger Funktionen

Führen Sie eine Taylor-Entwicklung der Funktionen

$$f(x) = \sin(ax), \quad g(x) = \cos(ax) \quad \text{und} \quad h(x) = e^{iax} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

um $x_0 = 0$ durch. Hierbei ist i wieder die imaginäre Einheit. Brechen Sie die Entwicklung erst ab, wenn Sie ein Muster erkennen können. Wie können diese Muster mathematisch (als Reihe) formuliert werden? Fällt Ihnen etwas auf, wenn Sie die Entwicklung der obigen Funktionen vergleichen?

4. Verständnisfragen

- a) Formulieren Sie die anschauliche Bedeutung der Lipschitz-Bedingung mit Ihren eigenen Worten.
- b) Was besagt der Taylor'sche Satz, und warum ist er für die Physik so wichtig?
- c) Was ist ein Vektor im allgemeinen, mathematischen Sinn?

*Hinweis: Hier gibt es keine eindeutige Lösung! Überlegen Sie sich selbst ein adäquates Kriterium.