GDL Übungsblatt 3

1	2	3	4	Σ

Josua Kugler, Ann Cathrin Wesener

1)

z.z.: $y'(t) = f(t)\,g(y) \quad y(t_0) = y_0$ eindeutige globale Lösung

Offensichtlich ist $y(t) = y_0$ eine Lösung des AWP.

Ang. $\exists\ y_2(t)$ sd. $y_2'(t) = f(t)\,g(y_2(t))$ mit $y_2(t)$ nicht konstant um t_0, d.h. $\forall\ \delta \in (0, \delta^*]$ ist

$y_2(t_0+\delta) \neq y_0$ und $y_2(t_0+\delta') = y_0+\varepsilon' \vee y_2(t_0+\delta') = y_0 - \varepsilon'$, $y'(t) > 0 \vee y'(t) < 0$ für $t \in (t_0, t_0+\delta']$

Dann ist:

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta'} f(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_0+\delta'} \frac{y_2'(t)}{g(y_2(t))}\,dt = \int_{y_0}^{y_0+\varepsilon'} \frac{dy}{g(y)} < \infty \quad ↯$$

zur Annahme $\Rightarrow$ $y_2(t)$ konstant um t_0

t_0 ist beliebig $\Rightarrow$ Zerteile $\mathbb{R}$ in ε-große Intervalle $\Rightarrow$ von neuem Startpunkt t_1 ist wieder $y(t_1) = y_0$ die Lösung die konstante Funktion, dies lässt sich induktiv fortführen.

$\Rightarrow$ auf ganz $\mathbb{R}$ ist y als Lösung konstant.

2)

(a) Ang. $\exists\ \tilde{t} \in I_0$ sd. $\phi(\tilde{t}) \geq \psi(\tilde{t}) \Rightarrow \exists$ kleinstes t_1 sd $\psi(t_1) = \phi(t_1)$ und $\phi'(t_1) \geq \psi'(t_1)$

$\phi'(t) - f(t,\phi(t)) < \psi'(x) - f(t,\psi(t)) \quad \forall t \in I_0.$

$\Rightarrow \phi'(t_1) < \psi'(t_1)$ ↯, also ist $\phi(t) < \psi(t) \ \forall\ t \in I_0$

(b) Es ist $v(t_0) \leq y(t_0)$ und $v'(t) < y'(t) = f(t,y) \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$: $v(t) < y(t)$ auf $(t_0, t_0+\varepsilon)$

Weiter ist $v'(t) - f(t, v(t)) < 0 = y'(t) - f(t, y(t)) \overset{(a)}{\Rightarrow} v(t) < y(t)$

w analog wie oben.