Für das linearisierte System gilt

$$\begin{cases} r' &= \frac{1}{2}r \\ \theta' &= 1 \end{cases}$$

Beide Differentialgleichungen besitzen offensichtlich eine eindeutige Lösung, wir erhalten

$$\psi_t \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot e^{\frac{1}{2}t} \\ \theta + t \end{pmatrix}.$$

Da hier stets $r \in (0,1)$ liegt, ist $\tau(r,\theta)$ wohldefiniert. Wir führen eine kurze Nebenrechnung durch:

$$\begin{aligned} \tau(\phi_t(r,\theta)) &= \log\left(\frac{1 - \frac{r^2e^t}{1-r^2+r^2e^t}}{3\frac{r^2e^t}{1-r^2+r^2e^t}}\right) \\ &= \log\left(\frac{1-r^2+r^2e^t-r^2e^t}{3r^2e^t}\right) \\ &= \log\left(\frac{1-r^2}{3r^2}\right) - \log(e^t) \\ &= \tau(r,\theta) - t \end{aligned}$$

Insbesondere ist auch $\tau(\phi_t(r,\theta))$ ein sinnvoller Wert. Es gilt nun

$$h \circ \phi_t = \psi_{-\tau(\phi_t(r,\theta))} \circ \phi_{\tau(\phi_t(r,\theta))}\left(\phi_t(r,\theta)\right)$$

Nach Teilaufgabe (iv) und (iii) folgt

$$\begin{aligned} &= \psi_{-\tau(\phi_t(r,\theta))} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \tau(\phi_t(r,\theta)) + t + \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau(\phi_t(r,\theta))} \\ -\tau(\phi_t(r,\theta)) + \tau(\phi_t(r,\theta)) + t + \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Nebenrechung erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau(r,\theta)+\frac{1}{2}t} \\ t + \theta \end{pmatrix} \\ &= \psi_t \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau(r,\theta)} \\ \theta \end{pmatrix} \\ &= \psi_t \circ \psi_{-\tau(r,\theta)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \tau(r,\theta) + \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wieder nutzen wir Teilaufgabe 4

$$\begin{aligned} &= \psi_t \circ \psi_{-\tau(r,\theta)} \circ \phi_{\tau(r,\theta)}(r,\theta) \\ &= \psi_t \circ h \end{aligned}$$

Folglich sind ψ_t und ϕ_t auf der Einheitskreisscheibe konjugiert.