Aufgabe 23

Sei $F(z) = f(z)g(z)$. Dann ist $F'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$. Also ist $\oint_\gamma f'(z)g(z) + f(z)g'(z)\,\mathrm{d}z = \oint_\gamma F'(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Aufgrund der Linearität des Integrals folgt

$$\oint_\gamma f(z)g'(z)\,\mathrm{d}z + \oint_\gamma f'(z)g(z)\,\mathrm{d}z = 0 \Leftrightarrow \oint_\gamma f(z)g'(z)\,\mathrm{d}z = -\oint_\gamma f'(z)g(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Aufgabe 26

Wir wenden die Cauchysche Integralformel an mit $z_0 = a$, da alle Bedingungen nach Aufgabenstellung erfüllt sind und erhalten für $\varphi\colon [0,1] \to D, t \mapsto a + re^{2\pi it}$ folgende Gleichung

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(a+re^{2\pi it})}{a+re^{2\pi it}-a}\cdot 2\pi i\cdot re^{2\pi it}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(a+re^{2\pi it})\,\mathrm{d}t\,.$$

Aufgabe 27

Sei z_0 ein Sternmittelpunkt von E. Es gilt $b'(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$, da eine holomorphe Funktion mit Ableitung 0 lokalkonstant ist. Da aber b insbesondere injektiv ist, erhielten wir daraus einen Widerspruch. Wir definieren $F(z) := \frac{1}{b'(z)}\int_{z_0}^{b(z)} f(b^{-1}((\xi))\,\mathrm{d}\xi$. Nun berechnen wir $F'(z)$. Es gilt

$$F'(z) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\frac{1}{b'(z)}\left(\int_{z_0}^{b(z+\epsilon)} f(b^{-1}(\xi))\,\mathrm{d}\xi - \int_{z_0}^{b(z)} f(b^{-1}(\xi))\,\mathrm{d}\xi\right)$$

Nach Eigenschaft E2, und da E sternförmig ist, können wir analog zum Beweis von E3 schreiben

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\frac{1}{b'(z)}\left(\int_{b(z)}^{b(z+\epsilon)} f(b^{-1}(\xi))\,\mathrm{d}\xi\right)$$

Den Weg $\gamma : [0,1] \to E$ von $b(z)$ nach $b(z+\epsilon)$ parametrisieren wir durch $\gamma(t) = b(z) + t\cdot(b(z+\epsilon) - b(z))$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\frac{1}{b'(z)}\left(\int_0^1 f(b^{-1}(\gamma(t)))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{(b(z+\epsilon)-b(z))}{\epsilon}\frac{1}{b'(z)}\int_0^1 f(b^{-1}(b(z)+t\cdot(b(z+\epsilon)-b(z))))\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{b'(z)}{b'(z)}\cdot\int_0^1 f(b^{-1}(b(z)+t\cdot(b(z+\epsilon)-b(z))))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von f gilt

$$= \int_0^1 f\left(\lim_{\epsilon\to 0} b^{-1}(b(z)+t\cdot(b(z+\epsilon)-b(z)))\right)\,\mathrm{d}t$$

Da b und b^{-1} ebenfalls stetig sind, folgt schließlich

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 f\left(b^{-1}(b(z) + t \cdot (b(\lim_{\epsilon \to 0} z + \epsilon) - b(z)))\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f\left(b^{-1}(b(z) + t \cdot (b(z) - b(z)))\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f\left(b^{-1}(b(z))\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 f\left(z\right) \mathrm{d}t \\
&= f(z)
\end{aligned}
$$

Also ist F eine Stammfunktion von f auf D.