Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 1

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 19. - 23. April 2021
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. Verständnisfragen

a) Nennen und erklären Sie wenigstens zwei physikalische Beobachtungen, die mit der klassischen Physik nicht erklärbar sind und Konzepte der Quantenmechanik benötigen.

b) Beschreiben Sie das Stern-Gerlach-Experiment. Was erwarten Sie klassisch? Was ist die tatsächliche Beobachtung? Was passiert, wenn Sie die Atome durch mehrere Stern-Gerlach-Apparaturen schicken?

c) Erläutern Sie den Fotoeffekt. Wodurch steht die Beobachtung im Gegensatz zur klassischen Elektrodynamik?

2. Eigenschaften von hermiteschen 2 × 2-Matrizen

Eine komplexe Matrix heißt hermitesch, wenn sie gleich ihrer adjungierten Matrix ist. Die adjungierte Matrix erhält man, indem man die ursprüngliche Matrix erst transponiert, also Zeilen und Spalten vertauscht, und dann komplex konjugiert. Hermitesche Matrizen sind für die mathematische Beschreibung der Quantenmechanik äußerst wichtig.

a) Welche Bedingungsgleichung können Sie für eine hermitesche 2×2-Matrix aufstellen?

b) Drücken Sie die Eigenwerte einer hermiteschen 2×2-Matrix mit Hilfe ihrer Determinante und ihrer Spur aus. Warum sind die Eigenwerte immer reell?

Wenn wir später über den Spin eines Teilchens sprechen, werden wir Gebrauch von den Pauli-Matrizen machen. Diese sind folgendermaßen definiert:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Pauli-Matrizen haben Sie bereits in Ihrer Vorlesung Theoretischen Physik 1 in den Übungen kennengelernt.

c) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen
   i. .. hermitesch sind.
   ii. .. selbst-invers sind.
   iii. .. Elemente der unitären Gruppe $U(2)$, aber nicht der speziellen unitären Gruppe $SU(2)$ sind.
   iv. .. die Relation $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\sigma_0 + \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k$ erfüllen. Hier ist δ_{ij} das Kronecker-Symbol, σ_0 die Einheitsmatrix und ϵ_{ijk} das Levi-Civita-Symbol.

Angelehnt an die euklidische Norm lässt sich eine Matrixnorm gemäß

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Sp}(A^\dagger B)$$

definieren. Dies ist die *Frobeniusnorm* und definiert ein Skalarprodukt für Matrizen.

d) Zeigen Sie, dass eine hermitesche 2×2-Matrix M eindeutig als

$$M = \sum_{i=0}^{3} a_i \sigma_i$$

geschrieben werden kann und somit die σ_i eine Basis bilden. Ist diese Basis orthogonal?

3. Fourier-Transformation

Sie haben bereits vollständige und orthogonale Funktionensysteme kennengelernt, die es ermöglichen, Funktionen als Vektoren aus einem Funktionenraum durch eine Basis darzustellen. Ein in der Physik besonders nützliches System orthogonaler Funktionen ist durch ebene Wellen gegeben, da diese Eigenfunktionen des Laplace-Operators $\Delta = \vec{\nabla}^2$ in kartesischen Koordinaten sind. Die Darstellung wird durch die Fourier-Transformation erreicht. Durch

$$\mathcal{FT}[f(x)] = \tilde{f}(k) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x) \exp(-\mathrm{i}kx)$$
$$\mathcal{FT}^{-1}[\tilde{f}(k)] = f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \tilde{f}(k) \exp(\mathrm{i}kx)$$

sind die Transformation und die Rücktransformation gegeben. Bei dieser Definition wurde der Faktor 2π symmetrisch auf Hin- und Rücktransformation aufgeteilt.

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformation der Dirac-Delta-Distribution $\delta_D(x - x_0)$. Wie lautet die Transformation für $x_0 = 0$?

b) Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformation einer reellen Funktion $f(x) \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k),$$

wobei $\tilde{f}^*(k)$ die komplexe Konjugation von $\tilde{f}(k)$ bedeutet.

c) Zeigen Sie, dass die folgende Relation gilt (*Plancherels Theorem*):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k |\tilde{f}(k)|^2$$

d) Zeigen Sie, dass das Faltungstheorem* gilt:

$$\mathcal{FT}[f * g] = \tilde{f}(k) \cdot \tilde{g}(k)$$

e) Berechnen Sie die Fourier-Transformation einer Gauß-Funktion

$$G(0, \sigma; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

mit Mittelwert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma > 0$. Was fällt Ihnen auf?

**Hinweis:* Die Verknüpfung $*$ bedeutet die Faltung zweier Funktionen. Die Faltung ist das folgende Integral:

$$[f * g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y f(y) g(x - y)$$

Die Faltung ist natürlich in beiden Funktionen symmetrisch, d.h.

$$[f * g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y f(x - y) g(y)$$

4. *Das Planck'sche Wirkungsquantum*

In dieser Aufgabe wollen wir den numerischen Wert des Planck'schen Wirkungsquantums auf verschiedene Weise bestimmen.

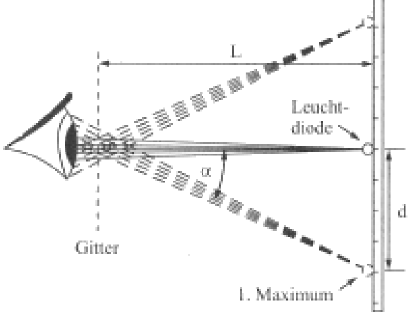
a) Beschreiben Sie, wie Sie mit Hilfe des Fotoeffekts das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmen können. Wie können Sie vorgehen, wenn Ihnen die Austrittsarbeit des Kathodenmaterials nicht bekannt ist? Die Kathode sei aus Cäsium hergestellt mit einer Austrittsarbeit von $W_A = 1.9$eV. Sie bestrahlen die Fotozelle mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 520$nm und bei einer Gegenspannung von $U = 0.45$V messen Sie keinen Strom mehr. Bestimmen Sie das Planck'sche Wirkungsquantum.

b) Leuchtdioden beginnen erst ab einer Schwellenspannung U_0 an, Licht zu emittieren. Die Wellenlänge λ dieser Strahlung sowie die Schwellenspannung hängen vom Diodenmaterial ab. Betrachten Sie die Zeichnung und erläutern Sie, wie aus der Anordnung zunächst die Wellenlänge und dann das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmt werden kann. Das Gitter habe 600 Linien pro mm und Sie messen bei einer Schwellenspannung $U_0 = 2.21$V die Abstände $d = 19$cm und $L = 50$cm. Berechnen Sie die Wellenlänge und das Planck'sche Wirkungsquantum.

c) Betrachten Sie ein mit Neon gefülltes Franck-Hertz-Rohr und eine daneben aufgestellte Vakuum-Fotozelle. Sie erhöhen die Beschleunigungsspannung am Franck-Hertz-Rohr und beobachten ab $U = 16.6$V einen Strom in der Fotozelle, aber keine (sichtbare) Lichtemission. Wenn Sie die Spannung weiter erhöhen, beobachten Sie bei $U = 18.5$V neben eines größeren Fotostroms auch ein rötliches Leuchten ($\lambda = 650$nm) innerhalb des Franck-Hertz-Rohrs. Erklären Sie diese Beobachtung und bestimmen Sie das Planck'sche Wirkungsquantum.

d) Die Beugung von Elektronen an einem Lichtgitter, das durch gepulste Laser erzeugt wird, gelang zum ersten Mal 2001. Im gezeigten Versuchsaufbau wird das Lichtgitter durch zwei sich überlagernde, gegenläufige Laserstrahlen realisiert. Die genutzten Laser haben eine Wellenlänge von $\lambda = 532$nm. Die 'Elektronenkanone' schießt einen Elektronenstrahl mit kinetischer Energie $E_{\text{kin}} = 380$eV senkrecht auf das Lichtgitter. Das erste Maximum hat einen Abstand von $d = 55\mu$m vom nullten Maximum im beobachteten Interferenzmuster. Der Abstand vom Gitter zum Detektor ist $a = 24$cm. Überlegen Sie sich, welche Gitterkonstante das Lichtgitter hat, und berechnen Sie das Planck'sche Wirkungsquantum.
Hinweis: Zur Bestimmung der Gitterkonstante denken Sie an stehende Wellen.

4b)



4d)