UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

10. Übungsblatt - Lösungsskizzen

Aufgabe 36 (t-Test auf Gleichheit der Erwartungswerte, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

Laut dem Händler eines Feuerwerkgeschäfts fliegen die Raketen des Typs "Barock" mindestens genauso hoch wie Raketen des Typs "Renaissance". Wir wollen diese Aussage überprüfen und kaufen dazu 8 "Barock"- und 12 "Renaissance"-Raketen. Für unsere Nachforschung nehmen wir an, dass für beide Typen die Flughöhe normalverteilt ist mit einer mittleren Flughöhe μ_B ("Barock") bzw. μ_R ("Renaissance") und gleicher, unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Wir messen folgende Flughöhen (in Metern) bei unseren Raketen:

"Barock"	39.7	47.5	37.4	46.6	40.2	48.4	39.0	37.2				
"Renaissance"	47.0	39.2	45.5	38.7	43.0	43.1	40.4	45.0	43.4	48.6	45.7	43.8

Führen Sie einen Zweistichproben t-Test (Satz 26.43) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und entscheiden Sie, ob wir dem Händler bzgl. der Flughöhe der beiden Raketentypen vertrauen sollten oder nicht. Hierbei sollte der Fehler 1. Art dem peinlichen Fehler entsprechen, dem Händler zu misstrauen, obwohl er Recht hat.
Hinweis: *Quantile der t-Verteilung:* $t_{18,0.95} = 1.734$, $t_{19,0.95} = 1.729$, $t_{20,0.95} = 1.725$.

Lösung 36.

Laut Aufgabe beobachten wir $X_1, ..., X_m \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}_{(\mu_R,\sigma^2)}$ ("Renaissance"-Raketen) und $Y_1, ..., Y_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}_{(\mu_B,\sigma^2)}$ ("Barock"-Raketen), wobei die $X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n$ gemeinsam unabhängig sind. Hierbei ist $n = 8$ und $m = 12$. Wir wollen einen Zweistichproben t-Test für die Hypothesen

$$H_0 : \mu_R \leq \mu_B \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu_R > \mu_B$$

durchführen. Dann ist der Fehler 1. Art gerade die Situation, sich dafür zu entscheiden, dass "Renaissance"-Raketen höher fliegen als "Barock"-Raketen, obwohl dies gar nicht stimmt (d.h. in dem Fall misstrauen wir dem Händler, obwohl er Recht hat).
Laut 26.43 lautet der Zweistichproben t-Test auf Gleichheit der Erwartungswerte zum Niveau α:

$$\phi^*(X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n) = \begin{cases} 1, & T_{m,n} > c^* \\ 0, & T_{m,n} \leq c^*, \end{cases}$$

wobei $c^* = t_{m+n-2,1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$-Quantil der t_{m+n-2}-Verteilung ist und $T_{m,n}$ unten definiert wird.

Hier ist:

$$
\begin{aligned}
\overline{X_m} &:= \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = 43.62,\\
\overline{Y_n} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = 42.0,\\
S_X^2 &:= \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X_m})^2 = 9.17,\\
S_Y^2 &:= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y_n})^2 = 22.01,\\
S^2 &:= \frac{1}{m+n-2}\Big((m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2\Big) = 14.16,\\
T_{m,n} &:= \frac{\sqrt{\frac{mn}{m+n}}(\overline{X_m}-\overline{Y_n})}{S} = 0.94.
\end{aligned}
$$

Nun ist $t_{m+n-2,1-\alpha} = t_{18,0.95} = 1.734$, d.h. wir haben

$$T_{m,n} = 0.94 < 1.734 = t_{m+n-2,1-\alpha} = c^*.$$

Damit ist $\phi^*(X_1,...,X_m,Y_1,...,Y_n) = 0$, d.h. auf Basis des Tests und unseren Beobachtungen können wir zum Niveau $\alpha = 0.05$ die Aussage des Händlers nicht in Zweifel ziehen.

Aufgabe 37 (Rechenregeln für stochastische Konvergenz, 2 = 1.5 + 0.5 Punkte).
Sei $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) **Continuous Mapping Theorem für zwei Komponenten:**
Für $n\in\mathbb{N}$ seien $Y_n, Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $y, z \in \mathbb{R}$ deterministische Konstanten mit $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y$ und $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} z$. Sei $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in (y,z) stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann $h(Y_n,Z_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(y,z)$ folgt.

Hinweis: *Nutzen Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit von h mit den Normen $\|\cdot\|_1$ (1-Norm) und $|\cdot|$ (Betrag).*

(b) Für $n\in\mathbb{N}$ seien $X_n, Y_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a, x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x,\quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y,\quad a_n \to a \quad\Longrightarrow\quad a_n\cdot X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a\cdot x + y.$$

Lösung 37. (a) Sei $\varepsilon > 0$. Da h stetig in (y,z) ist, gibt es $\delta > 0$, sodass

$$\forall (y',z')\in\mathbb{R}^2 : \|(y',z')-(y,z)\|_1 < \delta \quad\Rightarrow\quad |h(y',z')-h(y,z)| < \varepsilon.$$

Entsprechend bedeutet dies:

$$\forall (y',z')\in\mathbb{R}^2 : |h(y',z')-h(y,z)| \geq \varepsilon \quad\Rightarrow\quad \|(y',z')-(y,z)\|_1 \geq \delta.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|h(Y_n, Z_n) - h(y,z)| \geq \varepsilon) \quad &\leq \quad \mathbb{P}(\|(Y_n, Z_n) - (y,z)\|_1 \geq \delta) \\
&= \quad \mathbb{P}(|Y_n - y| + |Z_n - z| \geq \delta) \\
&\leq \quad \mathbb{P}(|Y_n - y| \geq \delta/2 \text{ oder } |Z_n - z| \geq \delta/2) \\
&\leq \quad \mathbb{P}(|Y_n - y| \geq \delta/2) + \mathbb{P}(|Z_n - z| \geq \delta/2) \\
&\overset{Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} z, Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y}{\longrightarrow} \quad 0 \quad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Dies zeigt $h(Y_n, Z_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(y,z)$.

(b) Dies ist eine direkte Folgerung aus (a): Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann als Folge (konstanter) Zufallsvariablen aufgefasst werden. Offensichtlich gilt dann für alle $\varepsilon > 0$ und n groß genug, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$:

$$\mathbb{P}(|a_n - a| \geq \varepsilon) \overset{n \text{ groß genug}}{=} \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

d.h. $a_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$. Die Funktionen $h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h_1(x,y) = x \cdot y$ und $h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, h_2(x,y) = x + y$ sind stetig.
Aus $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $a_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ folgt: $a_n X_n = h_1(a_n, X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h_1(a, X) = aX$.
Aus $a_n X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$ folgt: $a_n X_n + Y_n = h_2(a_n X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h_2(aX, Y) = aX + Y$.
Das war zu zeigen.

Aufgabe 38 (Fast-sichere und stochastische Konvergenz, 2 Punkte).
Es sei $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Weisen Sie nach, dass für Zufallsvariablen auf diesem Raum $\mathbb{P}$-fast sichere Konvergenz und $\mathbb{P}$-stochastische Konvergenz übereinstimmen.

Lösung 38.

Auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum gilt die Implikation $(\xrightarrow{\mathbb{P}-\text{f.s.}}) \implies (\xrightarrow{\mathbb{P}})$. Für die Rückrichtung führen wir einen Widerspruchsbeweis:
Es gälte $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, aber $X_n \overset{\mathbb{P}-\text{f.s.}}{\not\longrightarrow} X$. Wir definieren

$$A := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} \in 2^\Omega.$$

Im Falle $\mathbb{P}(A) = 0$ wäre $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}-\text{f.s.}} X$. Daher muss nach Annahme $\mathbb{P}(A) > 0$ gelten. Da Ω abzählbar ist (und somit auch A), gilt die Darstellung (Additivität des Maßes)

$$\sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(A) > 0.$$

Also existiert ein $\omega_0 \in A$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_0\}) > 0$. Wegen $\omega_0 \in A$ gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad |X_{n_k}(\omega_0) - X(\omega_0)| \geq \varepsilon_0$$

Das bedeutet aber

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon_0) \geq \mathbb{P}(\{\omega_0\}) > 0,$$

daher kann nicht $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon_0) = 0$ gelten. Damit ist die Annahme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ verletzt. Widerspruch.

Aufgabe 39 (Stochastische Konvergenz und Konvergenz in $\mathscr{L}_2$, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $U \sim \text{Exp}_1$ eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1 und $V \sim \text{Par}_{(1,1)}$ eine Pareto-verteilte Zufallsvariable mit stetiger Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\mathbb{f}^U(v) = \exp(-v)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(v) \text{ und } \mathbb{f}^V(v) = \frac{1}{v^2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(v),$$

und $X_n := n \cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(U)$ sowie $Y_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(V)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Überprüfen Sie, ob $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen einen Grenzwert konvergieren.

(b) Überprüfen Sie, ob $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im quadratischen Mittel (d.h. in $\mathscr{L}_2$) gegen einen Grenzwert konvergieren.

Lösung 39. (a) Ein nicht-konstanter stochastischer Grenzwert ist bei solch einfachen Strukturen unüblich. Wir erwarten also eine Konstante als Grenzwert. Um eine Vermutung für diese Konstante zu bekommen, kann man zum Beispiel überprüfen, wogegen $\mathbb{E}X_n$ bzw. $\mathbb{E}Y_n$ konvergiert. Das weist dann aber noch keine stochastische Konvergenz nach.
Idee für X_n: Es ist $\mathbb{E}X_n = n \cdot \mathbb{P}(U \geq n) = n \cdot e^{-n} \to 0$. Das liefert die Vermutung, dass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Wir weisen dies nach: Sei $\varepsilon > 0$. Für $n \geq \varepsilon$ (d.h. n groß genug) gilt:

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(n \cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(U) \geq \varepsilon) \overset{n \text{ groß genug}}{=} \mathbb{P}(U \geq n) = e^{-n} \to 0.$$

Idee für Y_n: Der Erwartungswert-Ansatz klappt hier nicht, aber in Hinsicht auf X_n liegt der Grenzwert 0 nahe. Sei also $\varepsilon > 0$. Für $\sqrt{n} \geq \varepsilon$ (d.h. n groß genug) gilt:

$$\mathbb{P}(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(\sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(V) \geq \varepsilon) \overset{n \text{ groß genug}}{=} \mathbb{P}(V \geq n) = \frac{1}{n} \to 0.$$

(Strenggenommen müsste man $\mathbb{P}(U \geq n), \mathbb{P}(V \geq n)$ gar nicht ausrechnen, weil das gerade Eins minus die Verteilungsfunktion ist, die für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert).

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass wenn ein Limes im quadratischen Mittel existiert, dieser (mit Wahrscheinlichkeit 1) gleich dem stochastischen Limes sein muss. Wir müssen also jeweils nur überprüfen, ob

$$X_n \xrightarrow{L^2} 0, \qquad Y_n \xrightarrow{L^2} 0$$

gilt. Ist dies nicht der Fall, so existiert kein Limes im quadratischen Mittel.
Für X_n: Hier ist

$$\mathbb{E}[|X_n - 0|^2] = n^2 \cdot \mathbb{P}(U \geq n) = n^2 \cdot e^{-n} \to 0,$$

d.h. $X_n \xrightarrow{L^2} 0$.
Für Y_n: Hier ist

$$\mathbb{E}[|Y_n - 0|^2] = n \cdot \mathbb{P}(V \geq n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \not\to 0.$$

Daher ist $Y_n \overset{L^2}{\not\to} 0$.

Aufgabe 40 (Stochastische Konvergenz und $\mathscr{L}_2$-Konvergenz, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

In dieser Aufgabe untersuchen wir die Beziehung zwischen den beiden Konvergenzarten $\xrightarrow{L^2}$ (im quadratischen Mittel) und $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ (stochastisch).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen.

(a) Sei $U \sim U_{[0,1]}$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ und $X_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, aber nicht $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ gilt.

(b) Es gelte $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und es gebe $\alpha > 0$ mit $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}], \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] < \infty$. Zeigen Sie, dass dann folgt: $X_n \xrightarrow{L^2} X$.
Hinweis: *Nutzen Sie* $1 = \mathbb{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}} + \mathbb{1}_{\{|X_n-X|\leq\varepsilon\}}$ *und die Hölder-Ungleichung für Erwartungswerte: Sind* $Y, Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *Zufallsvariablen, so gilt für* $p, q > 0$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*:* $\mathbb{E}[|Y \cdot Z|] \leq \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[|Z|^q]^{1/q}$.

(c) Zeigen Sie, dass die X_n, X aus (a) die Bedingungen aus (b) nicht erfüllen.

Lösung 40.

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Für n groß genug ist $\sqrt{n} > \varepsilon$. Dann haben wir

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U) > \varepsilon) \overset{n \text{ groß genug}}{=} \mathbb{P}(U \in [0, \frac{1}{n}]) \overset{U\sim U[0,1]}{=} \frac{1}{n} \to 0.$$

Dies zeigt $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
Weiter haben wir (beachte $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$, quadrieren einer Indikatorfunktion verpufft wirkungslos):

$$\mathbb{E}[(X_n - 0)^2] = n \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)] = n \cdot \mathbb{P}(U \in [0, \frac{1}{n}]) \overset{U\sim U[0,1]}{=} n \cdot \frac{1}{n} = 1 \not\to 0,$$

d.h. $X_n \xrightarrow{L^2} X$ gilt nicht.

(b) Es ist (wir wenden die Hölder-Ungleichung an mit $p = \frac{2+\alpha}{2}$ und $q = \frac{2+\alpha}{\alpha}$):

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(X_n - X)^2] \\
= \quad & \mathbb{E}[(X_n - X)^2 \mathbb{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}] + \mathbb{E}[(X_n - X)^2 \mathbb{1}_{\{|X_n-X|\leq\varepsilon\}}] \\
\overset{(X_n-X)^2 \leq 2(X_n^2+X^2)}{\leq} \quad & 2 \underbrace{\mathbb{E}[X_n^2 \mathbb{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}]}_{\leq \mathbb{E}[|X_n|^{2p}]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}^q_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}]^{1/q}} + 2 \underbrace{\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}]}_{\leq \mathbb{E}[|X|^{2p}]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}^q_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}}]^{1/q}} \\
& + \mathbb{E}[\underbrace{(X_n - X)^2}_{\leq \varepsilon^2} \underbrace{\mathbb{1}_{\{|X_n-X|\leq\varepsilon\}}}_{\leq 1}] \\
\leq \quad & 2\Big(\mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}]^{\frac{2}{2+\alpha}} + \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}]^{\frac{2}{2+\alpha}}\Big) \cdot \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} + \varepsilon^2
\end{aligned}$$

Da $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}], \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] < \infty$ und $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, schließen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] \leq \varepsilon^2.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt mit $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0,$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0$. Damit ist $X_n \xrightarrow{L^2} X$ gezeigt.

(c) Da $X = 0$, ist offensichtlich $\mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] = 0 < \infty$ für alle $\alpha > 0$. Allerdings gilt für alle $\alpha > 0$:

$$\mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}] = n^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)] = n^{1+\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{n} = n^{\frac{\alpha}{2}},$$

sodass $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}] = \infty$. Das bedeutet, die Voraussetzungen von (b) sind nicht erfüllt.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **08. Februar 2021, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`