Funktionalanalysis - Übungsblatt 0

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: keine, nicht bewertetes Präsenzübungsblatt

Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum mit der zugehörigen Familie der offenen Mengen $\mathcal{T}$. In Lemma 1.5 der Vorlesung wurde behauptet, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie definiert. Dies geschieht vermöge der induzierten Metrik $d(x,y) := \|x-y\|$ und der folgenden Übungsaufgabe.

Aufgabe 0.1

Sei (V, d) ein metrischer Raum und definiere $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(V)$ (Potenzmenge von V) durch

$$U \in \mathcal{T} \quad :\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in U \;\exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } B_\varepsilon(x) \subset U.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf V definiert. Zeigen Sie weiterhin, dass $(V, \mathcal{T})$ **hausdorff'sch** ist, d.h. alle Punkte $x, y \in V$, $x \neq y$ besitzen disjunkte offene Umgebungen

$$\forall x, y \in V, x \neq y \,\exists\, U_x, U_y \in \mathcal{T} \text{ mit } x \in U_x, y \in U_y, U_x \cap U_y = \emptyset.$$

Aufgabe 0.2

Sei (V, d) ein metrischer Raum und $M \subset V$ eine Menge. Zeigen Sie, dass der Abschluss $\overline{M}$ gegeben ist durch

$$\{v \in V : \text{ für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } w \in M \text{ mit } d(v,w) < \varepsilon\}.$$

Aufgabe 0.3

Sei V ein Vektorraum und $\|\cdot\|, |[\cdot]|$ zwei Normen auf V. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|, |[\cdot]|$ genau dann äquivalent sind, wenn für jede Folge $(v_n)_n$ in V gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |[v_n]| = 0.$$

Hinweis: Sie dürfen Lemma 1.12 verwenden.

Aufgabe 0.4

Sei (V, d) ein vollständig metrischer Raum und $M \subset V$. Zeigen Sie, dass M genau dann abgeschlossen ist, wenn $(M, d\,|_{M\times M})$ ebenfalls vollständig ist.