INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 11 - Update-Nr.: 2 10. Juli 2020

Abgabe bis Fr. 17.07.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Dies ist das letzte Übungsblatt. Für die Klausurzulassung sind 110 Punkte insgesamt ausreichend!
- Wir haben ein Infodokument hochgeladen, das Euch darüber informiert, welche Bestandteile und Themen der Veranstaltung relevant für die Klausur sind.

Themen:

- Globale Existenz
- Fundamentalmatrix
- Taylor-Polynome mithilfe von DGLn
- Lösbarkeitsbedingungen für RWPs

Aufgabe 11.1 (6 Punkte): Globale Existenz bei linearer Beschränktheit

Die Funktion $f(t,x)$ in dem Anfangswertproblem (AWP)

$$(*) \quad \begin{aligned} &u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \geq t_0 \\ &u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

sei auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ stetig und *linear beschränkt*, d. h. es gelte

$$\|f(t,u(t))\| \leq \alpha(t)\,\|u(t)\| + \beta(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen und nicht-negativen Funktionen α, β.

(a) Man zeige, dass dann das AWP $(*)$ eine globale, d. h. auf ganz $[t_0, \infty)$ (bzw. sogar auf ganz $\mathbb{R}$) definierte Lösung u besitzt. Diese muss jedoch nicht notwendigerweise eindeutig sein. 4

Tipp: Gronwall-Lemma

(b) Man untersuche, ob die beiden Funktionen

$$f_1\left(t, x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}\right) = t\,|x_1|^{\frac{1}{2}} + \sin(t)x_2,$$
$$f_2\left(t, x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}\right) = e^{-t^2|x_1|} + x_1\left(1 + x_2^2\right)^{-1}$$

jeweils auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ linear beschränkt sind. *Vorschlag zum Weiterdenken: Man denke darüber nach, wann die Lösungen von AWPs mit f_1, f_2 eindeutig sind. Dies ist aber nicht Teil der Aufgabe.* 2

Lösungsvorschlag:

(a) Nach dem Existenzsatz von Peano und dem Fortsetzungssatz existiert eine lokale Lösung $u(t)$ der AWA mit einem (im Sinne der Inklusion) maximalen Existenzintervall $I_{max} = [t_0, t_*)$.
Dabei ist entweder $t_* = \infty$, d.h. $u(t)$ ist globale Lösung, oder im Falle $t_* < \infty$ wird $\max_{x\in[t_0,t]} \|u(x)\|$ unbeschränkt für $t \to t_*$.
Sei $u(t)$ eine (zunächst) lokale Lösung der gegebenen AWA mit Existenzintervall $[t_0, t_*)$.
Wäre nun $t_* < \infty$, so müsste aufgrund der Stetigkeit gelten $\max_{x\in[t_0,t]} \|u(x)\| \to \infty$ für $t \to t_*$.
Auf dem Intervall $[t_0, t_*)$ sind (nach Voraussetzung) die stetigen Funktionen α und β gleichmäßig beschränkt durch Konstanten A_* bzw. B_*.
Für jedes $t < t_*$ ist nun nach VL

$$u(t) \;=\; u_0 \;+\; \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds$$

und folglich wegen der linearen Beschränktheit von f mithilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|u(t)\| &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s))\| \, ds\\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\, \|u(s)\| + \beta(s) ds\\ &\leq \|u_0\| + A_* \int_{t_0}^{t} \|u(s)\| \, ds + B_*(t_* - t_0).\end{aligned}$$

Mit dem Gronwallschen Lemma folgt hieraus:

$$\|u(t)\| \;\leq\; e^{A_*(t_*-t_0)} \cdot \Big(\|u_0\| \;+\; B_*(t_* - t_0)\Big) \quad \text{(unabhängig von t!)}$$

Dies bedeutet aber, dass $\|u(t)\|$ für $t \to t_*$ beschränkt bleibt.
Widerspruch.

(b) (i) Wir betrachten f_1. Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\|f_1(t, x)\| &\leq |t| \cdot \underbrace{|x_1|^{1/2}}_{\leq |x_1|+1} + \underbrace{|\sin(t)|}_{\leq 1} \cdot |x_2| \;\leq\; |t| \cdot \big(|x_1| + 1\big) + |x_2|\\ &\leq \big(|t| + 1\big) \cdot \|x\| + |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Damit ist f_1 linear beschränkt mit

$$\alpha(t) = |t| + 1 \quad \text{und} \quad \beta(t) = |t|.$$

(ii) Wir betrachten f_2. Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ist hier

$$\|f_2(t, x)\| \;\leq\; \underbrace{e^{-t^2\cdot|x_1|}}_{\leq 1} + |x_1| \cdot \underbrace{\big(1 + x_2^2\big)^{-1}}_{\leq 1} \;\leq\; 1 + |x_1| \;\leq\; \|x\| + 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Also ist f_2 linear beschränkt mit

$$\alpha(t) = 1 \quad \text{und} \quad \beta(t) = 1.$$

Zusatz bzgl. der Eindeutigkeit der Lösungen:
(i) Für $x_1 \neq 0$ ist f_1 lokal Lipschitz-stetig, solange $u(t) \neq 0$ ist, und somit in diesen Fällen nach Eindeutigkeitssatz eindeutig.
(ii) Da f_2 sogar global Lipschitz-stetig ist, ist die Lösung der AWA stets eindeutig nach Eindeutigkeitssatz.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte): Taylor-Entwicklung bei DGLn

Man berechne das Taylor-Polynom $T_4(u, t, t_0 = 0)$ mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ der 4. Ordnung der Lösung $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$
\begin{aligned}
&u''(t) = -\sin(u(t)) - 2u'(t), \quad t \geq 0,\\
&u(0) = 0,\\
&u'(0) = 1.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Man muss dazu nicht die Lösung u tatsächlich berechnen!

MOTIVATION: Dies zeigt uns erneut, wie mächtig die Taylor-Entwicklung ist! Wir können mithilfe des Taylor-Polynoms also Lösungen von Anfangswertproblemen approximieren, selbst wenn wir diese gar nicht berechnen können, wie etwa im Falle des Räuber-Beute-Modells.

Lösungsvorschlag:

Dreimalige Differentiation der DGL ergibt unter Verwendung der Ketten- und Produktregel:

$$
\begin{aligned}
u'' &= -\sin(u) - 2u'\\
u''' &= -\cos(u)u' - 2u''\\
u^{(4)} &= \sin(u)(u')^2 - \cos(u)u'' - 2u'''
\end{aligned}
$$

Einsetzen der Anfangswerte $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$ liefert:

$$
\begin{aligned}
u''(0) &= -0 - 2 \cdot 1 = -2\\
u'''(0) &= -1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 3\\
u^{(4)}(0) &= 0 - 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -4
\end{aligned}
$$

Damit folgt für das Taylorpolynom $T_4(u, t, 0)$ 4. Ordnung:

$$\underline{\underline{T_4(u,t,0)}} = \sum_{k=0}^{4} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k = 0 + 1t - \frac{2}{2}t^2 + \frac{3}{6}t^3 - \frac{4}{24}t^4 = \underline{\underline{t - t^2 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{6}t^4}}$$

Aufgabe 11.3 (4 Punkte): Fundamentalmatrix für DGL-System

Ein Differentialgleichungssystem $u'(t) = A(t)u(t) + (1, t)^{\mathrm{T}}$ habe die Fundamentalmatrix

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2 - t + 1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimmte die Matrix $A(t)$ des Differentialgleichungssystems sowie die Lösung $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ für das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
&u'(t) = A(t)u(t) + (1, t)^{\mathrm{T}}, \quad t \geq 0,\\
&u(0) = (1, 0)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

Lösungsvorschlag:

(i) Bestimmung von $A(t)$:
Die Fundamentalmatrix Φ erfüllt per Definition die Gleichung

$$\Phi'(t) \;=\; A(t) \cdot \Phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{wobei} \quad \Phi(0) = I.$$

Wegen

$$\det \Phi(t) \;=\; 1 \;\neq\; 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ist die gegebene Matrix $\Phi(t)$ invertierbar für alle $t \in \mathbb{R}$, sodass sich $A(t)$ berechnen lässt durch

$$A(t) \;=\; \Phi'(t) \cdot \Phi(t)^{-1}.$$

Dabei ist

$$\Phi'(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2t & 2t-1 \end{pmatrix}$$

und (z.B. nach der Cramerschen Regel)

$$\Phi(t)^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & -t \\ -t^2 & 1+t \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\underline{\underline{A(t)}} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2t & 2t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 & -t \\ -t^2 & 1+t \end{pmatrix} \;=\; \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ 2t - t^2 & t-1 \end{pmatrix}}}$$

(ii) Lösung des AWPs:
Wegen der Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ hat der Lösungsraum des homogenen Problems die Form $\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1+t \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t^2 - t + 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Für die partikuläre Lösung $u_b(t)$ gilt:

$$u_b(t) \;=\; \Phi(t) \cdot \left(\int_0^t \Phi(s)^{-1} b(s) ds \;+\; c \right),$$

wobei hier $b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ und $c \in \mathbb{R}$ durch die Randbedingung vorgegeben ist.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad u_b(t) \quad &= \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2-t+1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} s^2-s+1 & -s \\ -s^2 & 1+s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} ds \right) \\
&= \begin{pmatrix} c_1 + t(c_1+c_2) \\ t^2(c_1+c_2) - c_2 t + c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2-t+1 \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} 1-s \\ s \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} c_1 + t(c_1+c_2) \\ t^2(c_1+c_2) - c_2 t + c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2-t+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 + t(c_1+c_2) \\ t^2(c_1+c_2) - c_2 t + c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 + t(c_1+c_2+1) + \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{1}{2}t^3 + t^2(c_1+c_2+\frac{1}{2}) - tc_2 + c_2 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$
\begin{aligned}
u(t) \quad &= \quad u_b(t) \quad + \quad \alpha \begin{pmatrix} 1+t \\ t^2 \end{pmatrix} \quad + \quad \beta \begin{pmatrix} t \\ t^2-t+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 + \alpha + t(c_1+c_2+\alpha+\beta+1) + \frac{1}{2}t^2 \\ c_2 + \beta - t(c_2+\beta) + t^2(c_1+c_2+\alpha+\beta+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}t^3 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Einsetzen des Anfangswertes $u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt:

$$
u(0) \quad = \quad \begin{pmatrix} c_1+\alpha \\ c_2+\beta \end{pmatrix} \quad \stackrel{!}{=} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1-\alpha, \quad c_2 = -\beta \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 + \alpha + \beta = 1
$$

Die Lösung vereinfacht sich schließlich zu

$$
\underline{\underline{u(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 + 2t + \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^3 \end{pmatrix},}} \quad t \geq 0.
$$

Anmerkung:
Man sieht hier schön, dass es durchaus passieren kann, dass unendlich viele Lösungen existieren. In diesem Beispiel verschwinden im letzten Schritt jedoch c_1, c_2, α, β aus der gesamten Gleichung, weshalb hier tatsächlich eine eindeutige Lösung vorliegt.

Aufgabe 11.4 (6 Punkte): Lösbarkeit von Randwertproblemen

Ein Randwertproblemsystem 1. Ordnung

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad t \in D := [a,b] \subset \mathbb{R},$$
$$B_a y(a) + B_b y(b) = g$$

mit $b > a$, (konstanten) Matrizen $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{n\times n}$, einem (konstanten) Vektor $g \in \mathbb{R}^n$ und den stetigen Matrix- bzw. Vektorfunktionen $A : D \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ ist (nach Satz 5.6.1 der Vorlesung) eindeutig lösbar genau dann, wenn

$(*)\quad B_a + B_b\phi(b) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär

ist, wobei ϕ die Fundamentalmatrix ist, die

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t), \quad t \in D,$$
$$\phi(a) = I$$

erfüllt, wobei $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichne.

(a) Man zeige: Für ein Randwertproblem 2. Ordnung (RWP-2.Ord.)

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = \varphi(t), \quad t \in D,$$
$$\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \eta_0,$$
$$\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \eta_1,$$

mit $p, q, \varphi \in \mathcal{C}([a,b])$ und $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$ sowie $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$, ist die Bedingung für eindeutige Lösbarkeit

$$(**)\quad \det \begin{pmatrix} \alpha_0 u_1(a) + \alpha_1 u_1'(a) & \alpha_0 u_2(a) + \alpha_1 u_2'(a) \\ \beta_0 u_1(b) + \beta_1 u_1'(b) & \beta_0 u_2(b) + \beta_1 u_2'(b) \end{pmatrix} \neq 0$$

für ein beliebiges Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ der homogenen Gleichung mit

$$\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

äquivalent zu obigen Bedingung für eindeutige Lösbarkeit $(*)$, wenn man das RWP 2. Ordnung als System 1. Ordnung umschreibt.

Kurzfassung: Man zeige, dass die Bedingung $(**)$ für die eindeutige Lösbarkeit von (RWP-2.Ord.) äquivalent zur Bedingung $(*)$ für eindeutige Lösbarkeit ist, wenn man (RWP-2.Ord.) als System 1. Ordnung formuliert. 3

(b) Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u''(t) + u(t) = 1$$

hat die allgemeine Lösung

$$u(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + 1$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, die durch die Randbedingungen festgelegt werden, und $u : D \to \mathbb{R}$.

Für die folgenden drei Randwertbedingungen prüfe man, ob das entstehende Randwertproblem 2. Ordnung das Lösbarkeitskriterium $(**)$ aus Aufgabenteil (a) erfüllt und bestimme wieviele Lösungen für die Randwertprobleme jeweils existieren:

(i) $u(0) = u(\pi/2) = 0, \quad D = [0, \pi/2]$,

(ii) $u(0) = u(\pi) = 0, \quad D = [0, \pi]$,

(iii) $u(0) = u(\pi) = 1, \quad D = [0, \pi]$. 3

Lösungsvorschlag:

(a) Das RWP 2. Ordnung lässt sich schreiben als

$$u' \;=\; Au + f \quad \text{mit} \quad u = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix},$$

sowie

$$B_a u(a) + B_b u(b) \;=\; g \quad \text{mit} \quad B_a = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{pmatrix}.$$

Die Fundamentalmatrix zu dem System 1. Ordnung ist

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix},$$

wobei nach Voraussetzung gilt:

$$\Phi(a) \;=\; \begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Eindeutigkeitsbedingung $(*)$ ist nun

$$B_a \;+\; B_b \cdot \Phi(t) \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} \;:= M$$

regulär.
Dabei können wir M schreiben als

$$\begin{aligned} M \;&=\; \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{pmatrix} \;+\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} \alpha_0 u_1(a) + \alpha_1 u_1'(a) & \alpha_0 u_2(a) + \alpha_1 u_2'(a) \\ \beta_0 u_1(b) + \beta_1 u_1'(b) & \beta_0 u_2(b) + \beta_1 u_2'(b) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da M regulär ist genau dann, wenn $\det M \neq 0$, folgt somit die Behauptung.

(b) Es ist $\{u_1 = \cos,\ \ u_2 = \sin\}$ ein Fundamentalsystem des DGL-Systems.

(i) Wegen

$$\cos(0) = 1,\ \ \cos(\pi/2) = 0 = \sin(0) \quad \text{und} \quad \sin(\pi/2) = -1$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(\pi/2) & u_2(\pi/2) \end{pmatrix} \;=\; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; 1 \;\neq\; 0$$

und

$$\begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1'(0) & u_2'(0) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; I.$$

$\Rightarrow$ Lösbarkeitsbedingung $(**)$ ist erfüllt, d.h. es gibt genau eine Lösung.

(ii) Wegen

$$\cos(0) = 1,\ \ \cos(\pi) = -1 \quad \text{und} \quad \sin(0) = 0 = \sin(\pi)$$

ist hier

$$\det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(\pi) & u_2(\pi) \end{pmatrix} \;=\; \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;=\; 0.$$

$\Rightarrow$ Lösbarkeitsbedingung $(**)$ ist nicht erfüllt, d.h. es gibt keine eindeutige Lösung. Die Koeffizienten c_1, c_2 der allgemeinen Lösung $u(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + 1$ ergeben sich nun aus den Randbedingungen:

$$x = 0: \ \ c_1 \cdot 0 + c_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -1;$$

$$x = \pi: \ \ c_1 \cdot 0 - c_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 1.$$

Da dies nicht erfüllbar ist, gibt es keine Lösung.

(iii) Genau wie in (ii) ist $(**)$ nicht erfüllt, d.h. es gibt keine eindeutige Lösung. Analog zu (ii) ergeben sich die Koeffizienten wieder aus den Randbedingungen:

$$x = 0: \ \ c_1 \cdot 0 + c_2 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0,\ \ c_1 \in \mathbb{R} \ \text{beliebig};$$

$$x = \pi: \ \ c_1 \cdot 0 - c_2 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0,\ \ c_1 \in \mathbb{R} \ \text{beliebig}.$$

$$\Rightarrow c_2 = 0,\ \ c_1 \in \mathbb{R} \ \text{beliebig}$$

Also hat die Lösung die Form

$$u(t) = c_1 \sin(t) + 1 \quad \text{mit} \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

d.h. es gibt unendlich viele Lösungen.