AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

14. Januar 2022

Modulformen 1 – Übungsblatt 10

Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei $\mathrm{w} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gerade und seien $F, G : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^{\mathrm{w}+1}$ zwei C^∞-Funktionen mit

$$\varphi_M^*(F(x,y)) = \pi(M) \cdot F(x,y), \quad \varphi_M^*(\mathrm{d}G(x,y)) = \pi(M) \cdot \mathrm{d}G(x,y) \qquad \text{für alle } M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{\partial \mathcal{F}} [F \mid \mathrm{d}G] = 0$$

gilt, wobei einfach und im positiven Sinne längs des Randes des Standardfundamentalbereichs $\mathcal{F}$ der Aktion von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ integriert werde.

Hinweis: Unterteilen Sie die Integrationskurve geschickt in Teilstücke und integrieren Sie einzeln längs derselben.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathrm{w} \in \mathbb{N}$ gerade. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathrm{Bild}\,(\mathbb{P}(I_2) - \mathbb{P}(ST)) = \mathrm{Kern}\,\left(\mathbb{P}(I_2) + \mathbb{P}(ST) + \mathbb{P}\left((ST)^2\right)\right)$$

gilt.

Als Querverbindung zwischen Modulformen und der analytischen Zahlentheorie dienen L-Funktionen und **Dirichlet-Reihen** (nach Johann Peter Gustav Lejeune DIRICHLET), deren Stellenwert wir in der bisherigen Vorlesung unberücksichtigt ließen. Im Rahmen einer Aufgabenserie wird beginnend mit diesem Übungszettel jeweils eine Aufgabe, die weiterhin regulär in die Punktevergabe eingeht und somit nicht als Bonusaufgabe deklariert ist, diese Materie studieren.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Generalvoraussetzung: Sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n$ eine Spitzenform vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$ gerade.

Definition: [Hecke-L-Funktion]
Unter der Generalvoraussetzung nennt man die DIRICHLET-Reihe

$$L(f,s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) n^{-s}$$

die **Hecke-L-Funktion** von f.

(a) Zeigen Sie, dass $L(f,s)$ gleichmäßig absolut auf Kompakta in der durch $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1$ gegebenen Halbebene konvergiert und dort also eine holomorphe Funktion darstellt.

Hinweis: Nutzen Sie die Abschätzung nach HECKE von Übungsblatt 3.

Mithilfe der **Mellin-Transformation** (nach Hjalmar MELLIN), die wir hier außen vor lassen wollen, kann man die Hecke-L-Funktion holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen. Hierzu sei

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} \exp(-x) x^{s-1} \, \mathrm{d}x \quad \text{für } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(s) > 0$$

die so genannte **Gamma-Funktion**, mit der der Satz von HECKE wie folgt formuliert werden kann:

Satz: [Holomorphe Fortsetzung von $L(f,s)$ auf $\mathbb{C}$]
Unter der Generalvoraussetzung definiert man

$$L^*(f,s) := (2\pi)^{-s} \cdot \Gamma(s) \cdot L(f,s)$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > k$. Dann gilt für die Funktion $s \mapsto L^*(f,s)$:

- Sie hat eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$.
- Sie ist beschränkt in jedem Vertikalstreifen $\{s \in \mathbb{C} \mid \nu_1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq \nu_2 \text{ mit } \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}\}$.
- Sie erfüllt die Funktionalgleichung $L^*(f, k-s) = (-1)^{k/2} \cdot L^*(f,s)$.

(b) Weisen Sie nach:

$$\int_0^{\infty} f(z) z^s \, \mathrm{d}z = i^{s+1} \cdot L^*(f, s+1) \quad \text{für } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(s) > \tfrac{k}{2} .$$

Anmerkung:
Für $s \in \{0, \cdots, \mathrm{w}\}$ mit $\mathrm{w} = k+2$ heißen die Werte des Integrals aus (b) **Periodenintegrale**. Sie sind offensichtlich mit den von uns studierten Einträgen der Periodenabbildung verwandt und kommen im nächsten Kapitel zum Einsatz.

Abgabe: online über MaMpf bis Freitag, den 21. Januar 2022, spätestens um 12 Uhr s. t.