0 Unitäre Räume

Ziel: Entwicklung einer analogen Theorie zur reellen Theorie der euklidischen Vektorräume für $\mathbb{C}$-Vektorräume.
Vorwissen: Kenntnis der Theorie der euklidischen Räume (viele Beweise analog)

0.1 Unitäre Räume und der Spektralsatz

Notation. In diesem Abschnitt sei V stets ein endlicher $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Def. 0.1. $h : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt eine Sesquilinearform auf V, falls

(S1) h ist linear im ersten Argument, d.h.

$$h(v_1 + v_2, w) = h(v_1, w) + h(v_2, w), h(\lambda v, w) = \lambda h(v, w)$$

für alle $v_1, v_2, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

(S2) h ist semilinear im zweiten Argument, d.h.

$$h(v, w_1 + w_2) = h(v, w_1) + h(v, w_2), \qquad h(v, \lambda w) = \overline{\lambda} h(v, w)$$

für alle $v, w_1, w_2 \in V, \lambda \in \mathbb{C}$.

Anm.
- *sesqui* heißt 1.5
- In der Literatur gelegentlich auch Semilinearität im ersten Argument und Linearität im zweiten Argument.

Bsp. 0.2. $h : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, h(x, y) = x^t \overline{y}$ ist eine Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2)^t y &= x_1^t y + x_2^t y \\ x^t(\overline{y_1 + y_2}) &= x^t \overline{y_1} + x^t \overline{y_2} \\ x^t \overline{\lambda y} &= \overline{\lambda} x^t \overline{y} \end{aligned}$$

für $x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n$.
h ist für $n > 0$ keine Bilinearform:

$$h\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, i\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right) = (1, 0, \dots, 0)\begin{pmatrix}-i\\0\\\ddots\\0\end{pmatrix} = -i \neq ih\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, i\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right) = i$$

Def. 0.3. V $\mathbb{C}$-Vektorraum, h Sesquilinearform auf V. h heißt **hermitesch** $\iff h(v, w) = \overline{h(v, w)}$ für alle $v, w \in V$.

Anm. In diesem Fall ist $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$ für alle $v \in V$, d.h. $h(v, v) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in V$.

Bsp. 0.4. $h(x, y) := x^t \overline{y}$ aus Bsp. 0.2 ist hermitesch: Für $x, y \in \mathbb{C}^n$ ist $h(y, x) = y^t \overline{x} = (y^t \overline{x})^t = \overline{x}^t (y^t)^t = \overline{x}^t y = \overline{x^t \overline{y}} = \overline{h(x, y)}$. Hier ist $h(x, x) = x^t \overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix}\overline{x_1}, & \ddots & , \overline{x_n}\end{pmatrix} = x_1 \overline{x_1} + \dots + x_n \overline{x_n} = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \in \mathbb{R}$

Def. 0.5. $h : V \times V \to \mathbb{C}$ Sesquilinearform, $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V.

$$M_B = (h(v_i, v_j))_{1 \le i,j \le n} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$$

heißt die Fundamentalmatrix von h bzgl. B. (Darstellungsmatrix).

Bsp. 0.6. Für $h = x^t\overline{y}$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ (kanonische Basis) ist

$$M_B(h) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = E_n$$

Def. 0.7. $M \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. $M^* := \overline{M}^t$ heißt die zu M adjungierte Matrix.
M heißt **hermitesch** $\iff M = M^*$

Anm. Achtung: Nicht verwechseln mit der adjunkten Matrix.

Satz 0.8. $\mathrm{Sesq}(V) := \{h : V \times V \to \mathbb{C} \mid h$ *ist Sesquilinearform*$\}$ *ist ein* $\mathbb{C}$*-Vektorraum. (Untervektorraum von* $\mathbb{C}$*-Vektorraum* $\mathrm{Abb}(V \times V, \mathbb{C})$*). Die Abbildung:*

$$M_B : \mathrm{Sesq}(V) \to M_{n,n}(\mathbb{C}), \quad h \mapsto M_B(h)$$

ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$*-Vektorräumen mit Umkehrabbildung*

$$h_B : M_{n,n}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Sesq}(V), \quad A \mapsto h_B(A)$$

mit

$$h_B(A) : V \times V \to \mathbb{C}, (\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j) \mapsto x^t A \overline{y} \text{ mit } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Es gilt h *hermitesch* $\iff M_B(h)$ *hermitesch.*

Beweis.

- h_B ist wohldef: $h_B(A)$ ist Sesquilinearform analog zu Rechnung in Bsp. 0.2
- M_B, h_B sind C-linear: klar
- $M_B \circ h_B = \mathrm{id}$, denn: Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{C}) \implies h_B(A)(v_i, v_j) = e_i^t A \overline{e_j} = a_{ij}$ (d.h. Darstellungsmatrix von $h_B(A)$ bzgl. B ist A).
- $h_B \circ M_B = \mathrm{id}$, denn: Sei $h \in \mathrm{Sesq}(V) \implies h_B(M_B(h))(v_i, v_j) = e_i^t M_B(h) \overline{e_j} = h(v_i, v_j) \implies h_B(M_B(h)) = h$
- Für $h \in \mathrm{Sesq}(V)$ ist

$$\begin{aligned} h \text{ hermitesch} &\iff h(w, v) = \overline{h(v, w)} \text{ für alle } v, w \in V \\ &\iff h(v_j, v_i) = \overline{h(v_i, v_j)} \text{ für alle } i, j = 1, \dots, n \\ &\iff M_B(h)^t = \overline{M_B(h)} \\ &\iff M_B(h) = \overline{M_B(h)}^t = M_B(h)^* \end{aligned}$$

$\square$

Satz 0.9. *$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V, h Sesquilinearform auf V.*
Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}}(h) = \left(\overline{T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}}\right)^t M_{\mathcal{A}}(h) \ \ \overline{T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}},$$

wobei $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$.

Def. 0.10. h hermitesche Form.
h heißt **positiv definit** $\iff h(v,v) > 0$ für alle $v \in V, v > 0$. Eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform nennt man auch ein (komplexes) **Skalarprodukt**.

Bsp. 0.11. $V = \mathbb{C}^n, \langle \dot{;} \rangle : \mathbb{C}^n \times C^n, \langle x, y \rangle := x^t \overline{y}$ ist ein Skalarprodukt (Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$), denn $\langle x, x \rangle = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 > 0$ für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$

Def. 0.12. Ein unitärer Raum ist ein Paar (V,h) bestehend aus einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt h auf V.

Def. 0.13. (V,h) unitärer Raum, $v \in V$

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

heißt die **Norm** von V

Satz 0.14. (V,h) *sei ein unitärer Raum. Dann gilt:*

(a) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ *(Dreiecksungleichung)*

(b) $|h(x,y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$ *für alle $x, y \in V$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)*

Beweis. (b) Seien $x, y \in V$.
Falls $x = 0$, dann $h(x,y) = h(0,y) = 0 = ||0|| \cdot ||y||$. Im Folgenden sei also $x \neq 0$.
Setze $\alpha := \frac{h(y,x)}{||x||^2}, w := y - \alpha x$.
$\implies h(w,x) = h(y - \alpha x, x) = h(y - \frac{h(y,x)}{||x||^2} x, x) = h(y,x) - \frac{h(y,x)}{||x^2||} h(x,x) = 0$
$\implies ||y^2|| = ||w + \alpha x||^2 = h(w + \alpha x, w + \alpha x) = ||w||^2 + \alpha\overline{\alpha} h(x,x) = \underbrace{||w||^2}_{\geq 0} + ||\alpha||^2 ||x||^2$
$\implies ||y|| \geq ||\alpha|| \cdot ||x|| = \frac{|h(y,x)|}{||x||^2} ||x|| = \frac{|h(x,y)|}{||x||}$
(a) $||x+y|| = h(x+y, x+y) = ||x||^2 + ||y||^2 + h(x,y) + \underbrace{h(y,x)}_{=\overline{h(x,y)}} = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\,\mathrm{Re}(H(x,y)) \leq$
$||x||^2 + ||y||^2 + 2|h(x,y)| \overset{\text{C.S.}}{|} |x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| = (||x|| + ||y||)^2$ $\square$

Def. 0.15. $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V
$(v_1, \ldots, v_n)$ heißt eine **Orthogonalbasis** (OB) von $V \overset{\text{Def}}{\iff} h(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$ und **Orthonormalbasis** (ONB) von $V \overset{\text{Def}}{\iff} h(v_i, v_j) = \delta_{ij}$.

Satz 0.16. *(V, h) unitärer Raum. Dann hat V eine ONB*

Beweis. **g.z.z.:** (V, h) hat eine OB (normieren der Basisvektoren liefert dann ONB). Beweis per Induktion nach $n = \dim V$.
$n = 0, 1$: trivial.
$n \geq 2$. Wähle $v_1 \in V, v_1 \neq 0$
Setze $H \coloneqq \{w \in V | h(w, v_1) = 0\}$
Die Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{C}, w \mapsto h(w, v_1)$ ist Linearform mit $\ker \varphi = H$.
$\implies \dim H = \dim \ker \varphi = \dim V - \dim \operatorname{im} \varphi \in \{n, n-1\}$
Wegen $h(v_1, v_1) > 0$ ist $v_1 \notin H$, somit $\dim H = n - 1$.
$\implies (H, h|_{H \times H})$ ist ein unitärer Raum der Dimension $n - 1$.
$\implies H$ hat ONB $(v_2, \ldots, v_n) \implies (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ist OB von V. □

Anm. Gram-Schmidt-Verfahren (wie über $\mathbb{R}$) liefert Algorithmus zur Bestimmung einer Orthonormalbasis.

Def. 0.17. (V, h) unitärer Raum, $U \subseteq V$ Untervektorraum
$U^\perp = \{v \in V \mid h(v, u) = 0\}$ für alle $u \in U$ heißt das **othogonale Komplement** zu U. U, W Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$ und $h(u, w) = 0$ für alle $u \in U, w \in W$. Dann heißt V die **orthogonale direkte Summe** von U und W.

Notation. $V = U \hat{\oplus} W$

Satz 0.18. *(V, h) unitärer Raum, $U \subseteq V$ Untervektorraum. Dann gilt:*

$$V = U \hat{\oplus} U^\perp$$

Beweis. (1) Behauptung: $V = U + U^\perp$, denn: Sei $(u_1, \ldots, u_n)$ ONB von U ($\exists$ nach 0.16)
Sei $v \in V$. Setze $v' \coloneqq v - \sum_{j=1}^{m} h(v, u_j) u_j$. Für $i = 1, \ldots, m$ ist

$$h(v', u_i) = h(v, u_i) - \sum_{j=1}^{m} h(v, u_j) \underbrace{h(u_j, u_i)}_{\delta_{ij}} = h(v, u_i) - h(v, u_i) = 0.$$

$$\implies v' \in U^\perp$$
$$\implies v = \underbrace{v'}_{\in U^\perp} + \underbrace{\sum_{j=1}^{m} h(v, u_j) u_j}_{\in U} \in U + U^\perp$$

(2) $U \cap U^\perp = \{0\}$, denn $u \in U \cap U^\perp \implies h(u, u) = 0 \implies u = 0$

(3) Wegen (1) und (2) ist $V = U \oplus U^\perp$.

□

Def. 0.19. $(V, h_V), (W, h_W)$ unitäre Räume, $\varphi : V \to W$ lin. Abb.
φ heißt **unitär** $\iff h_W(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = h_V(v_1, v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

Anm. Ist $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ ein unitärer Endomorphismus, dann ist φ ein Isomorphismus, denn: φ ist injektiv wegen $\varphi(v) = 0 \implies 0 = h(\varphi(v), \varphi(v)) = h(v, v) \implies v = 0$. Wegen $\dim V < \infty$ folgt φ surjektiv.

Bem 0.20. (V, h) unitärer Raum, $B = (v_1, \dots, v_n)$ ONB von (V, h)
Dann ist die Abbildung $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (V, h), e_i \mapsto v_i$ ein unitärer Isomorphismus, d.h. (V, h) ist unitär isomorph zu $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

Beweis. $h(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = h(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j\rangle$ $\square$

Def. 0.21. Sei $A \in M_{n,n}$. Dann heißt A **unitär** $\overset{\text{Def}}{\iff} A^* \cdot A = E_n$. Außerdem definieren wir $U(n) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) | A \text{ ist unitär}\}$. $U(n)$ ist eine Gruppe bzgl. „$\cdot$ “, die **unitäre Gruppe** vom Rang n. Schließlich ist $SU(n) := \{A \in U(n) | \det(A) = 1\}$ eine Untergruppe von $U(n)$, die **spezielle unitäre Gruppe**.

Bem 0.22. $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$. Dann sind äquivalent.:

(i) A ist unitär

(ii) Die Abbildung $(C^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle), x \mapsto Ax$ ist unitär. Hierbei ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt.

Beweis. $\langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t\overline{Ay} = x^tA^t\overline{A}\overline{y}$
Es gilt: Die Abbildung aus (ii) unitär

$$\begin{aligned}
&\iff x^tA^t\overline{A}\overline{y} = \langle x, y\rangle = x^t\overline{y} \text{ für alle } x, y \in \mathbb{C}^n \\
&\iff h_{(e_1,\dots,e_n)}(A^t\overline{A}) = h_{(e_1,\dots,e_n)}(E_n) && \text{(vgl. Definition 0.7)} \\
&\overset{0.7}{\iff} A^t\overline{A} = E_n \\
&\iff \overline{A}^t(A^t)^t = E_n \\
&\iff \overline{A}^tA = E_n \\
&\iff A^*A = E_n \\
&\iff A \text{ ist unitär}
\end{aligned}$$

$\square$

Bem 0.23. (V, h) unitärer Raum, $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann existiert genau ein $f^* \in \operatorname{End}(V)$ mit

$$h(f(x), y) = h(x, f^*(y)) \qquad \text{für alle } x, y \in V$$

f^* heißt die **zu f adjungierte Abbildung**. Ist B eine ONB von (V, h), dann ist $M_B(f^*) = M_B(f)^*$

Beweis. Analog zu LA1, 19/20, Def. + Lemma 5.48 $\square$

Def. 0.24. (v, h) unitärer Raum, $f \in \operatorname{End}(V), A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$.
f heißt **selbstadjungiert** $\overset{\text{Def.}}{\iff} f^* = f$
f heißt **normal** $\overset{\text{Def.}}{\iff} f^* \circ f = f \circ f^*$
A heißt **selbstadjungiert** $\overset{\text{Def.}}{\iff} A^* = A$
A heißt **normal** $\overset{\text{Def.}}{\iff} A^*A = AA^*$

Anm. A selbstadjungiert $\iff A$ hermitesch

Bem 0.25. (V, h) unitärer Raum, $f \in \mathrm{End}(V)$.
Dann gilt:

(a) f unitär $\implies$ f normal

(b) f selbstadjungiert $\implies$ f normal

Für $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ gilt: A unitär $\implies$ A normal, A selbstadjungiert $\implies$ A normal.

Beweis. (a) Seien $v, w \in V$

$$\overset{f \text{ Iso.(da unitär)}}{\implies} h(v, f^{-1}(w)) \overset{f \text{ unitär}}{h} (f(v), f(f^{-1}(w))) = h(f(v), w)$$
$$\overset{0.23 \text{ Eind.}^*}{f} = f^{-1} \implies f^* \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V = f \circ f^{-1} = f \circ f^*$$

(b) f selbstadjungiert $\implies$ $f^* = f$ $\implies$ $f^* \circ f = f \circ f = f \circ f^*$

□