Gewöhnliche Differentialgleichungen - Übungsblatt 1

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Christian Düll

Abgabe: 29. Oktober, 11:00 Uhr in die Zettelkästen 12 bzw 13 (Mathematikon)

Aufgabe 1.1 4 Punkte

Wir definieren für $T > 0$

$$V := \{v \in C^0([0,T];\mathbb{R}^n) \mid \|v\| < \infty\}, \qquad \text{mit } \|v\|_V := \sup_{t\in(0,T]} \frac{\|v(t)\|}{t}.$$

Zeigen Sie, dass $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum ist.
Hinweis: Um einen passenden Grenzwert zu finden, können Sie ohne Beweis verwenden, dass der Raum der stetigen beschränkten Funktionen $(C_b^0((0,T]), \|\cdot\|_\infty)$ *vollständig ist. Hierbei ist* $\|f\|_\infty = \sup_{t\in(0,T]} \|f(t)\|$ *die Supremumsnorm.*

Aufgabe 1.2 4 Punkte

Zu $T > 0$ sei die Funktion $F : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig und erfülle für ein $\rho < 1$

$$|F(t,v) - F(t,w)| \leq \frac{\rho}{t}|v-w| \qquad \text{für } t \in (0,T], v, w \in \mathbb{R}^n$$

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = F(t,y), & t \in [0,T], \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

genau eine Lösung $y \in C^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ besitzt. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor.

a) Zeigen Sie, dass sich das Anfangswertproblem (1) in ein äquivalentes Fixpunktproblem in V (siehe Definition von Aufgabe 1.1) umschreiben lässt.

b) Wenden Sie auf das äquivalente Fixpunktproblem den Banachschen Fixpunksatz an, um zu zeigen, dass (1) eine eindeutige Lösung besitzt.

Aufgabe 1.3 4 Punkte

Gegeben seien das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = t + y, & t \geq 0 \\ y = 0, & t = 0 \end{cases}.$$

Verwenden Sie die Fixpunktiteration K^n wie im Satz von Picard-Lindelöf, um iterativ eine Lösungsdarstellung zu finden. Überprüfen Sie zunächst, ob der Satz anwendbar ist.

Aufgabe 1.4 4 Punkte

Es sei $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen.

a) Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie, dass f genau dann lokal Lipschitz-stetig bezüglich y, gleichmäßig in t ist, wenn zu jedem $(t^*, y^*) \in D$ eine Umgebung $U \subset D$ existiert, sodass

$$L^* := \sup_{\substack{(t,y_1),(t,y_2)\in U \\ y_1 \neq y_2}} \frac{\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\|}{\|y_1 - y_2\|} < \infty.$$

b) Sei nun $f \in C^1(D;\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass dann f lokal Lipschitz-stetig bezüglich y gleichförmig in t ist.