Aufgabe 2

(a) Es gibt $N!$ Permutationen, allerdings ist die Reihenfolge der ersten N_2 Teilchen egal, genauso wie die Reihenfolge der letzten N_1 Teilchen.

(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k_B} S &= \ln(\Omega) \\
&= \ln N! - \ln N_2! - \ln N_1! \\
&\approx N \ln N - N - N_2 \ln N_2 + N_2 - N_1 \ln N_1 + N_1 \\
&= N \ln N - (N - N_1) \ln N_2 - N_1 \ln N_1 \\
&= N \ln\left(\frac{N}{N_2}\right) - N_1 \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)
\end{aligned}
$$

Für die Temperatur gilt

$$
\begin{aligned}
\beta &= \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} \\
&= \frac{\partial N \ln\left(\frac{N}{N_2}\right) - N_1 \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}{\partial E} \\
&= N \frac{N_2}{N} \frac{\partial \frac{N(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{E - N\epsilon_1}}{\partial E} - \frac{\partial N_1}{\partial E} \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right) + N_1 \frac{N_2}{N_1} \frac{\partial \frac{N\epsilon_2 - E}{E - N\epsilon_1}}{\partial E} \\
&= -N_2 N \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{(E - N\epsilon_1)^2} + \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right) + N_2 \frac{-(E - N\epsilon_1) - (N\epsilon_2 - E)}{(E - N\epsilon_1)^2} \\
&= \frac{1}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)
\end{aligned}
$$

Nun berechnen wir daraus

$$
T = \frac{1}{k_B \beta} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{k_B \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}.
$$

(c) Sowohl für $N_2 \to 0$ als auch für $N_2 \to \infty$ geht die Temperatur also gegen 0. Für $N_2 > N/2$ wird der Logarithmus und damit auch die Temperatur negativ.

(d) Es gilt

$$
\frac{1}{k_B} S = \ln(\Omega) = (2N - 1) \ln(E) + \ln(\delta E) - \ln((2N - 1)!) + N \ln\left(\frac{4\pi^3 R^2 m}{h_0^3 \omega}\right)
$$

Daraus berechnen wir

$$
\beta = \frac{\partial \ln \Omega}{\partial E} = \frac{2N - 1}{E}
$$

und

$$
T = \frac{1}{k_B \beta} = \frac{E}{k_B (2N - 1)}
$$