Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 7
Abgabe: *Freitag, 04.06.2021, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Faserprodukte). **(6 Punkte)**
Sei $\mathtt{C}$ eine Kategorie und seien $f : B \to A$, $g : C \to A$ zwei Morphismen in $\mathtt{C}$ mit gemeinsamen Ziel. Ein *Faserprodukt* von B und C über A ist ein Objekt $D = B \times_A C$, zusammen mit zwei Morphismen $f' : D \to C$, $g' : D \to B$, so dass $gf' = fg'$ und folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:
Für jedes Objekt T und Morphismen $r : T \to C$ und $s : T \to B$ mit $gr = fs$ gibt es genau einen Morphismus $t : T \to D$, so dass $r = f't$ und $s = g't$, d.h. folgendes Diagramm lässt sich eindeutig zu einem kommutativen Diagramm ergänzen:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\exists! t"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "r"'] & & \\
& D \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "f"] \\
& C \arrow[r, "g"] & A
\end{tikzcd}$$

Ein Faserprodukt ist, falls es existiert, eindeutig bis auf einen eindeutigen Isomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Falls D existiert und f ein Monomorphismus ist, so ist auch f' ein Monomorphsimus.

(b) In der Kategorie $\mathtt{Set}$ der Mengen existieren alle Faserprodukte.

(c) Ist $\mathtt{C} = \mathtt{A}$ eine abelsche Kategorie, so existieren alle Faserprodukte. *Hinweis:* Seien $p_1 : B \oplus C \to B$, $p_2 : B \oplus C \to C$ die kanonischen Projektionen. Man setze $q = fp_1 - gp_2 : B \oplus C \to A$ und betrachte $(D \xrightarrow{m} B \oplus C) = \ker(q)$. Zeigen Sie, dass $(D, f' = p_2 m, g' = p_1 m)$ die universelle Eigenschaft des Faserprodukts $B \times_A C$ erfüllt.

(d) Ist $\mathtt{C} = \mathtt{A}$ eine abelsche Kategorie und f ein Epimorphismus, so ist auch f' ein Epimorphismus.

Aufgabe 2 (Adjungierte Funktoren). **(6 Punkte)**
Sei $f \colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus zwischen (kommutativen) Ringen (mit Eins). Jeder B-Modul N ist auch ein A-Modul vermöge der Skalarmultiplikation $a \cdot n := f(a) \cdot n$ für $a \in A$ und $n \in N$. Dies liefert einen Funktor $f^\# \colon B\text{-}\mathtt{Mod} \to A\text{-}\mathtt{Mod}$ (Einschränkung der Skalarmultiplikation). Umgekehrt werden für einen A-Modul M die A-Moduln $B \otimes_A M$ und $\mathrm{Hom}_A(B, M)$ mit den Multiplikationsabbildungen

$$\begin{aligned} B \times (B \otimes_A M) &\to B \otimes_A M, & (b, d \otimes m) &\mapsto (bd) \otimes m, \\ B \times \mathrm{Hom}_A(B, M) &\to \mathrm{Hom}_A(B, M), & (b, \phi) &\mapsto \big[d \mapsto \phi(db)\big] \end{aligned}$$

in natürlicher Weise zu B-Moduln. Zeigen Sie:

(a) Der additive Funktor $B \otimes_A - \colon A\text{-}\mathtt{Mod} \to B\text{-}\mathtt{Mod}$ ist linksadjungiert und der additive Funktor $\mathrm{Hom}_A(B, -) : A\text{-}\mathtt{Mod} \to B\text{-}\mathtt{Mod}$ ist rechtsadjungiert zum Funktor $f^\#$.

(b) Folgern Sie aus (a): Der Funktor $f^\#$ ist exakt[1], für jeden projektiven A-Modul P ist $B \otimes_A P$ ein projektiver B-Modul und für jeden injektiven A-Modul I ist $\mathrm{Hom}_A(B, I)$ ein injektiver B-Modul.

---

[1] Dies hätte man direkt auch einfacher zeigen können

Aufgabe 3 (Eulercharakteristik). **(6 Punkte)**
Sei K ein Körper und sei $\mathtt{VR}_K^{<\infty}$ die (abelsche) Kategorie der endlich-dimensionalen K-Vektorräume mit K-linearen Abbildungen. Für einen Komplex $A^\bullet$ in $\mathtt{VR}_K^{<\infty}$ definieren wir seine *Euler-Charakteristik* als

$$\chi(A^\bullet) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K H^i(A^\bullet),$$

falls nur endlich viele der $H^i(A^\bullet)$ nicht verschwinden; andernfalls existiert die Euler-Charakteristik nicht. Zeigen Sie:

(a) Sei $0 \to A^\bullet \to B^\bullet \to C^\bullet \to 0$ eine kurze exakte Folge von Komplexen in $\mathtt{VR}_K^{<\infty}$. Existieren zwei der drei Euler-Charakteristiken $\chi(A^\bullet)$, $\chi(B^\bullet)$ und $\chi(C^\bullet)$, so existiert auch die dritte und es gilt

$$\chi(B^\bullet) = \chi(A^\bullet) + \chi(C^\bullet).$$

(b) Angenommen, nur endlich viele der A^i sind verschieden von 0. Dann existiert die Euler-Charakteristik von $A^\bullet$, und es gilt

$$\chi(A^\bullet) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_K A^i.$$

Hinweis: Benutzen Sie jeweils den Rangsatz für kurze exakte Folgen (spalten Sie dazu die lange exakte Kohomologiefolge in kurze exakte Folgen auf).

Aufgabe 4 (Prägarben abelscher Gruppen). **(6 Punkte)**
Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathscr{T}(X)$ die Menge der offenen Teilmengen von X. Die Inklusionsrelation liefert eine halbgeordnete Menge $\big(\mathscr{T}(X),\subseteq\big)$ und nach Aufgabe 3 von Blatt 6 erhalten wir eine Kategorie $\mathtt{Offen}(X) := \mathrm{Kat}(\mathscr{T}(X))$. Eine *Prägarbe abelscher Gruppen* auf X ist ein Funktor $\mathtt{Offen}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathtt{Ab}$.

(a) Zeigen Sie: Für $A \in \{\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ definiert

$$\underline{A}\colon \mathtt{Offen}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathtt{Ab}, \quad U \mapsto \mathscr{C}(U,A)$$

eine Prägarbe abelscher Gruppen auf X, wobei $\mathscr{C}(U,A)$ die abelsche Gruppe der stetigen Abbildungen von U nach A mit der punktweisen Addition ist, wobei A die Teilraumtopologie von $\mathbb{C}$ trägt.

Ein *Morphismus von Prägarben* $F,G\colon \mathtt{Offen}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathtt{Ab}$ ist eine natürliche Transformation $F \to G$. Zeigen Sie:

(b) Ist $\varphi\colon F \to G$ ein Morphismus von Prägarben abelscher Gruppen, so definert

$$\ker(\varphi)\colon \mathtt{Offen}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathtt{Ab}, \quad U \mapsto \ker\big(\varphi(U)\colon F(U) \to G(U)\big),$$

eine Prägarbe abelscher Gruppen und der kanonische Morphismus $\ker(\phi) \to F$ von Prägarben ist ein Kern. Dual dazu erhält man, durch umdrehen aller Pfeile, die entsprechende Aussage für Kokerne.

(c) Die Kategorie $\mathtt{PSh}_{\mathtt{Ab}}(X)$ der Prägarben abelscher Gruppen auf X ist eine abelsche Kategorie.

Zusatzaufgabe 5 (Funktorkategorien). **(4 Punkte)**
Eine Kategorie $\mathtt{C}$ heißt *klein*, falls die Klasse $\mathrm{ob}(\mathtt{C})$ eine Menge ist. Sei $\mathtt{C}$ eine kleine Kategorie und sei $\mathtt{D}$ eine beliebige Kategorie. Zeigen Sie:

(a) Die Klasse $\mathtt{Fun}(\mathtt{C},\mathtt{D})$ der Funktoren von $\mathtt{C}$ nach $\mathtt{D}$ bildet wieder eine Kategorie, deren Morphismen die natürlichen Transformationen zwischen Funktoren sind, die *Funktorkategorie*.

Ein Funktor $F\colon \mathtt{C} \to \mathtt{D}$ heißt *volltreu*, falls für alle Paare c,c' von Objekten aus $\mathtt{C}$ die induzierte Abbildung $\mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(c,c') \to \mathrm{Mor}_{\mathtt{D}}(F(c),F(c'))$ eine Bijektion ist. Für jedes Objekt $c \in \mathrm{ob}(\mathtt{C})$ definiert die Zuordnung $d \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(d,c)$ einen Funktor $\mathrm{Mor}_{\mathtt{C}}(-,c)\colon \mathtt{C}^{\mathrm{op}} \to \mathtt{Set}$ in die Kategorie der Mengen (Beispiel 9.10). Zeigen Sie:

(b) Die Zuordnung $c \mapsto Mor_{\mathtt{C}}(-,c)$ definiert einen volltreuen Funktor $\mathtt{C} \to \mathtt{Fun}(\mathtt{C}^{\mathrm{op}},\mathtt{Set})$.
Hinweis: Verwenden Sie das Yoneda-Lemma.