

Die Riemannsche Zeta-Funktion

Josua Kugler

03.11.2020

Definition (Riemannsche ζ -Funktion)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Lemma (Konvergenzgebiet)

$\zeta(s)$ konvergiert auf der offenen Halbebene $\operatorname{Re} s > 1$.

Beweis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{e^{\log(n) \cdot \operatorname{Re} s}} \right| \cdot \left| \frac{1}{e^{i \cdot \log(n) \cdot \operatorname{Im} s}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} s}}.$$



Lemma (Eulerprodukt)

Die Riemannsche ζ -Funktion lässt sich als absolut konvergentes unendliches Produkt schreiben:

$$\zeta(s) = \prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{1 - p_k^{-s}}.$$

Insbesondere gilt also $\zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re} s > 1$.

Beweis.

$$\frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$



Beweis.

$$\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}}$$



Beweis.

$$\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} = \left(1 + \frac{1}{p_1^s} + \frac{1}{p_1^{2s}} \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_m^s} + \frac{1}{p_m^{2s}} \dots\right)$$



Beweis.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\ &= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s}\end{aligned}$$



Beweis.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\ &= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s} \\ &= \sum_{n=p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}\end{aligned}$$



Beweis.

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s}\end{aligned}$$



Beweis.

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s} \\&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\end{aligned}$$



Beweis.

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{p_k^{\nu s}} \\&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_m=0}^{\infty} (p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m})^{-s} \\&= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}} n^{-s} \\ \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\end{aligned}$$



Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \sum_{\nu=0}^{\infty} p_k^{-\nu s} \right|$$



Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \sum_{\nu=0}^{\infty} p_k^{-\nu s} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |p_k^{-\nu s}| \end{aligned}$$



Beweis. (Absolute Konvergenz).

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 - p_k^{-s}} \right| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \sum_{\nu=0}^{\infty} p_k^{-\nu s} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |p_k^{-\nu s}| \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| \end{aligned}$$



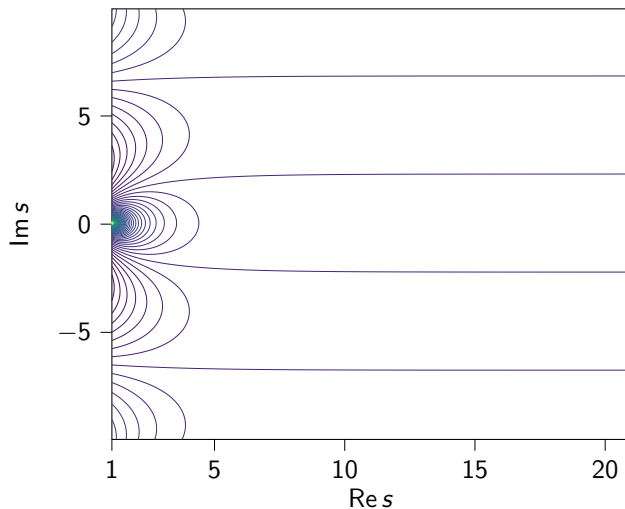


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Betrag.

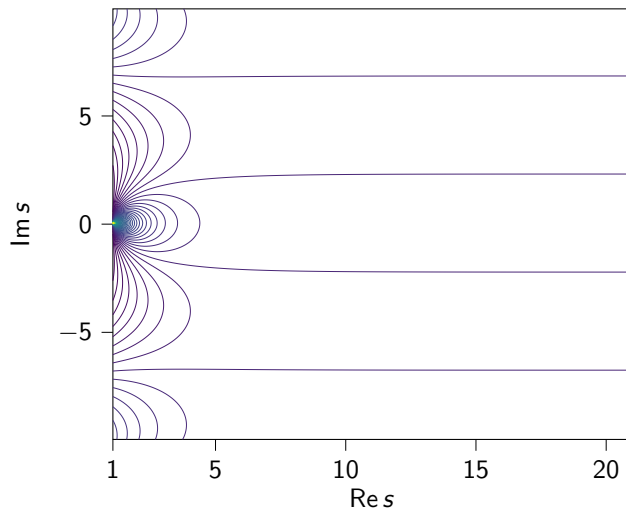


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Realteil.

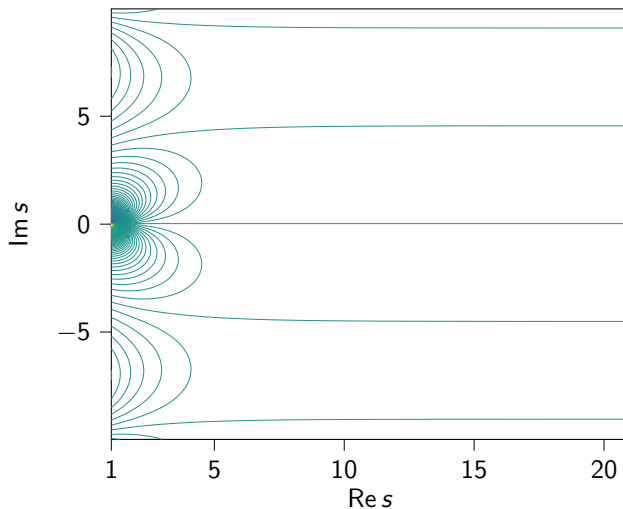


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Imaginärteil.

Lemma (θ -Funktion)

Die Thetafunktion, gegeben durch

$$\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z},$$

konvergiert für $\operatorname{Im} z > 0$.

Beweis.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 (\operatorname{Re} z + i(\operatorname{Im} z))} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 \operatorname{Re} z} \right| \cdot \left| e^{i\pi n^2 \cdot i(\operatorname{Im} z)} \right|$$



Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 (\operatorname{Re} z + i(\operatorname{Im} z))} \right| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 \operatorname{Re} z} \right| \cdot \left| e^{i\pi n^2 \cdot i(\operatorname{Im} z)} \right| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z}\end{aligned}$$



Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 (\operatorname{Re} z + i(\operatorname{Im} z))} \right| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 \operatorname{Re} z} \right| \cdot \left| e^{i\pi n^2 \cdot i(\operatorname{Im} z)} \right| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} \\ &= \sum_{n=-N}^N e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} + 2 \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z}\end{aligned}$$



Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 (\operatorname{Re} z + i(\operatorname{Im} z))} \right| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| e^{i\pi n^2 \operatorname{Re} z} \right| \cdot \left| e^{i\pi n^2 \cdot i(\operatorname{Im} z)} \right| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} \\ &= \sum_{n=-N}^N e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} + 2 \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} \\ &\leq \sum_{n=-N}^N e^{-\pi n^2 \operatorname{Im} z} + 2 \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\end{aligned}$$



Lemma (θ -Funktion)

Die *Thetafunktion*, $\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 z}$, konvergiert für $\text{Im } z > 0$.

Behauptung

$\theta(z)$ erfüllt die *Thetatransformationsformel* ($\sqrt{\cdot}$ bezeichne den Zweig mit positivem Realteil):

$$\begin{aligned}\theta(z) &= \theta\left(-\frac{1}{z}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{z}} \\ \Leftrightarrow \theta(it) &= \theta\left(-\frac{1}{it}\right) \cdot \sqrt{\frac{i}{it}} = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Lemma

Die Funktion

$$R_{\infty}(s) := \int_1^{\infty} \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

ist ganz.

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t (n^2 - 1)} \stackrel{t \geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi (n^2 - 1)}$$

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$\begin{aligned} e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t(n^2-1)} \stackrel{t \geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\ &= \sum_{n=1}^N e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \end{aligned}$$

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$\begin{aligned} e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t(n^2-1)} \stackrel{t \geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\ &= \sum_{n=1}^N e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\ &\leq \sum_{n=1}^N e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$\begin{aligned} e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t(n^2-1)} \stackrel{t \geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\ &= \sum_{n=1}^N e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\ &\leq \sum_{n=1}^N e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\leq B \end{aligned}$$

Beweis.

Abschätzen der Reihe ergibt

$$\begin{aligned} e^{\pi t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t(n^2-1)} \stackrel{t \geq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\ &= \sum_{n=1}^N e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-\pi(n^2-1)} \\ &\leq \sum_{n=1}^N e^{-\pi(n^2-1)} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\leq B \end{aligned}$$

Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} \leq B e^{-\pi t}$.

Beweis.

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} \leq B \cdot \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2}$$



Beweis.

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} \leq B \cdot \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2}$$

$$\exists a(s) : \forall t > a : e^{-\pi t} < t^{-\frac{s}{2}-1}$$



Beweis.

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} \leq B \cdot \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2}$$

$$\exists a(s) : \forall t > a : e^{-\pi t} < t^{-\frac{s}{2}-1}$$

$$= B \cdot \int_1^a e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2} + B \cdot \int_a^\infty e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2}$$



Beweis.

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} \leq B \cdot \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2}$$

$$\exists a(s) : \forall t > a : e^{-\pi t} < t^{-\frac{s}{2}-1}$$

$$\begin{aligned} &= B \cdot \int_1^a e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2} + B \cdot \int_a^\infty e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2} \\ &\leq B \cdot C(s) + B \cdot \int_a^\infty \frac{dt}{t^2} \end{aligned}$$



Beweis.

$$\int_1^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}} \frac{dt}{t} \leq B \cdot \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2}$$

$$\exists a(s) : \forall t > a : e^{-\pi t} < t^{-\frac{s}{2}-1}$$

$$\begin{aligned} &= B \cdot \int_1^a e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2} + B \cdot \int_a^\infty e^{-\pi t} t^{\frac{s}{2}+1} \frac{dt}{t^2} \\ &\leq B \cdot C(s) + B \cdot \int_a^\infty \frac{dt}{t^2} \\ &\leq B \cdot C(s) + \frac{B}{a(s)} < \infty \end{aligned}$$



Theorem

Die Riemannsche ζ -Funktion besitzt eine analytische Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, wobei an der Stelle 1 eine einfache Polstelle vorliegt. Außerdem genügt

$$\xi(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$.

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} \quad | t \mapsto \pi n^2 t$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} && | t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{dt}{t} && | \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s}\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} && | t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{dt}{t} && | \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\ \pi^{-s} \Gamma(s) n^{-2s} &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t} && \left| \sum_{n=1}^\infty, s \mapsto s/2 \right.\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} && | t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{dt}{t} && | \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\ \sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) n^{-2s} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t} && \left| \sum_{n=1}^\infty, s \mapsto s/2 \right.\end{aligned}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} & | t \mapsto \pi n^2 t \\ &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{dt}{t} & | \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s}\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{-s} \Gamma(s) n^{-2s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t} \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty}, s \mapsto s/2 \right.$$

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

Sei $\operatorname{Re} s > 1$.

$$\begin{aligned}
 \Gamma(s) &= \int_0^\infty e^{-t} t^s \frac{dt}{t} && | t \mapsto \pi n^2 t \\
 &= \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} (\pi n^2 t)^s \frac{dt}{t} && | \cdot \pi^{-s} \cdot n^{-2s} \\
 \sum_{n=1}^\infty \pi^{-s} \Gamma(s) n^{-2s} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^s \frac{dt}{t} && \left| \sum_{n=1}^\infty, s \mapsto s/2 \right. \\
 \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}
 \end{aligned}$$

Beweis.

Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{\operatorname{Re} s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \pi^{-\operatorname{Re} s/2} \Gamma(\operatorname{Re} s/2) \zeta(\operatorname{Re} s) \\ &< \infty\end{aligned}$$

gilt nach dem Satz von Fubini/Tonelli für absolut konvergente Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}.$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}}_{R_0(s)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}}_{R_\infty(s)}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 t} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \underbrace{\int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}}_{R_0(s)} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}}_{R_\infty(s)} \\ &= R_0(s) + R_\infty(s)\end{aligned}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

$$\left| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right.$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t}$$

$$\left| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left| u = \frac{1}{t}, \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \right.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} & \left| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &= - \int_1^0 \frac{\theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} & \left| u = \frac{1}{t}, \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \right. \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} & \Big| \theta(it) &= \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \\ &= - \int_1^0 \frac{\theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{dt}{t^2} & \Big| u &= \frac{1}{t}, \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} & \left| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &= - \int_1^0 \frac{\theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{dt}{t^2} & \left| u = \frac{1}{t}, \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \right. \\ &= \int_1^\infty \frac{\theta(iu) \cdot u^{\frac{1}{2}} - 1}{2} u^{-s/2-1} du \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_0^1 \frac{\theta(it) - 1}{2} t^{s/2} \frac{dt}{t} & \left| \theta(it) = \theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &= - \int_1^0 \frac{\theta(it^{-1}) \cdot t^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{s/2+1} \frac{dt}{t^2} & \left| u = \frac{1}{t}, \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \right. \\ &= \int_1^\infty \frac{\theta(iu) \cdot u^{\frac{1}{2}} - 1}{2} u^{-s/2-1} du \\ &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) \cdot t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}}{2} \cdot t^{-s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$R_0(s) = \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\
 &= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\
 &= R_\infty(1-s) + \frac{1}{2} \frac{2}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{2} \frac{2}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty
 \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \frac{1}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_0(s) &= \int_1^\infty \frac{\theta(it) - 1}{2} \cdot t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} + \int_1^\infty \frac{t^{\frac{1}{2}} - 1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{\frac{1-s}{2}} \frac{dt}{t} - \int_1^\infty \frac{1}{2} t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= R_\infty(1-s) + \frac{1}{1-s} t^{\frac{1-s}{2}} \Big|_1^\infty + \frac{1}{s} t^{-\frac{s}{2}} \Big|_1^\infty \\ &= R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = R_{\infty}(s) + R_0(s)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) &= R_\infty(s) + R_0(s) \\ &= R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}\end{aligned}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = R_{\infty}(s) + R_0(s)$$

$$\xi(s) = R_{\infty}(s) + R_{\infty}(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = R_{\infty}(s) + R_0(s)$$

$$\xi(s) = R_{\infty}(s) + R_{\infty}(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

- R_{∞} ist ganz

Beweis.

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$

$$\xi(s) = R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

- R_∞ ist ganz
- ξ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Beweis.

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = R_\infty(s) + R_0(s)$$

$$\xi(s) = R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}$$

- R_∞ ist ganz
- ξ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
- ξ genügt der Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$

Beweis.

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \xi(s)$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(s)$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

Beweis.

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \xi(s)$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\xi(s)$$

Γ ist meromorph auf \mathbb{C} und besitzt keine Nullstellen.

Beweis.

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \xi(s)$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s)$$

Γ ist meromorph auf \mathbb{C} und besitzt keine Nullstellen.

$\Rightarrow \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}$ ist holomorph auf \mathbb{C} .

Beweis.

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \xi(s)$$
$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s)$$

Γ ist meromorph auf \mathbb{C} und besitzt keine Nullstellen.

$\Rightarrow \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}$ ist holomorph auf \mathbb{C} .

$\Rightarrow \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Beweis.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(\underbrace{R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}}_{\Rightarrow \text{beschränkt für } s \rightarrow 0} \right)$$

Beweis.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(\underbrace{R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}}_{\Rightarrow \text{beschränkt für } s \rightarrow 0} \right)$$

Wegen $\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s/2) = \infty$ erhalten wir

Beweis.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(\underbrace{R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}}_{\Rightarrow \text{beschränkt für } s \rightarrow 0} \right)$$

Wegen $\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s/2) = \infty$ erhalten wir

$$= 0 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi^{s/2}}{s \cdot \Gamma(s/2)} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi^{s/2}}{2 \cdot s/2 \cdot \Gamma(s/2)}$$

Beweis.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(\underbrace{R_\infty(s) + R_\infty(1-s) - \frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}}_{\Rightarrow \text{beschränkt für } s \rightarrow 0} \right)$$

Wegen $\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s/2) = \infty$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &= 0 - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi^{s/2}}{s \cdot \Gamma(s/2)} = - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi^{s/2}}{2 \cdot s/2 \cdot \Gamma(s/2)} \\ &= - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\pi^{s/2}}{2 \cdot \Gamma(s/2 + 1)} = - \frac{\pi^0}{2 \cdot \Gamma(1)} = - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beweis.

Die Funktion

$$\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(R_{\infty}(s) + R_{\infty}(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right)$$

ist daher

Beweis.

Die Funktion

$$\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(R_{\infty}(s) + R_{\infty}(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right)$$

ist daher

- holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Beweis.

Die Funktion

$$\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(R_{\infty}(s) + R_{\infty}(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right)$$

ist daher

- holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- stimmt für $\operatorname{Re} s > 1$ mit $\zeta(s)$ überein

Beweis.

Die Funktion

$$\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \left(R_{\infty}(s) + R_{\infty}(1-s) - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s} \right)$$

ist daher

- holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
- stimmt für $\operatorname{Re} s > 1$ mit $\zeta(s)$ überein

\implies stellt die gesuchte analytische Fortsetzung für die Riemannsche ζ -Funktion dar!!!

Exkurs.

Es gilt die Duplikationsformel und der Ergänzungssatz:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot s}{2}\right)}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1-s-1}} \cdot \Gamma(1-s)$$

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

$$\zeta(s) = \pi^{s-1} \cdot \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(1-s)$$

$$= \pi^{s-1} \cdot 2^s \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

Beispiel

$$\zeta(s) = \pi^{s-1} \cdot 2^s \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

$$\zeta(-1) = \pi^{-2} \cdot 2^{-1} \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot -1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$$

Beispiel

$$\zeta(s) = \pi^{s-1} \cdot 2^s \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$$

$$\zeta(-1) = \pi^{-2} \cdot 2^{-1} \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \Gamma(2) \zeta(2) = \frac{1}{2\pi^2} \cdot -1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi^2}{6} = -\frac{1}{12}$$

$$-\frac{1}{12} = \zeta(-1) \text{ „} = \text{“ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = 1 + 2 + 3 + \dots$$

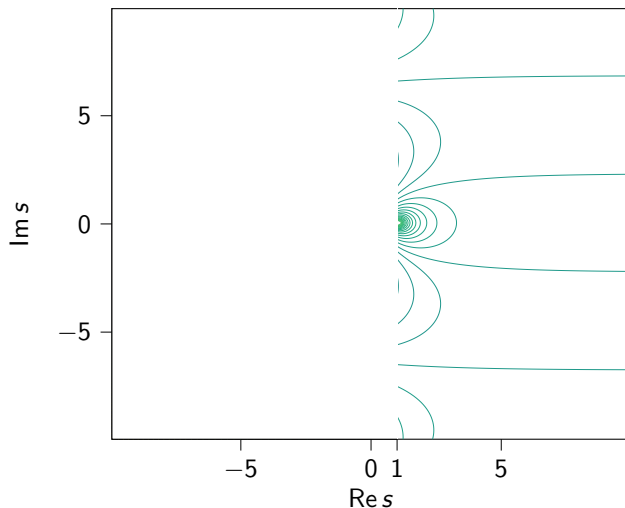


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Betrag

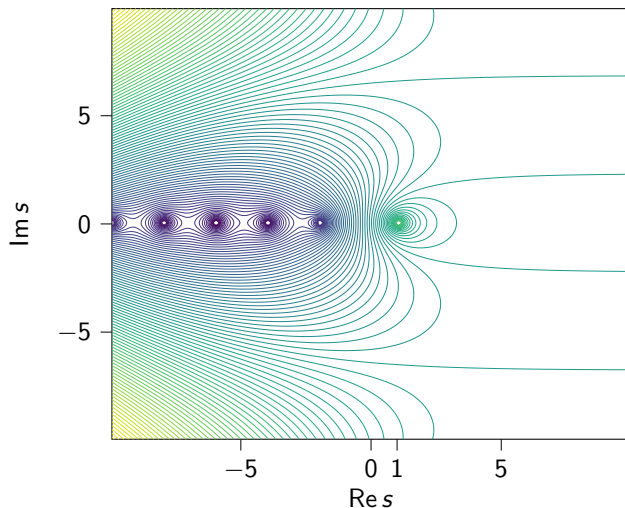


Abbildung: Konturplot, Linien entsprechen gleichem Betrag

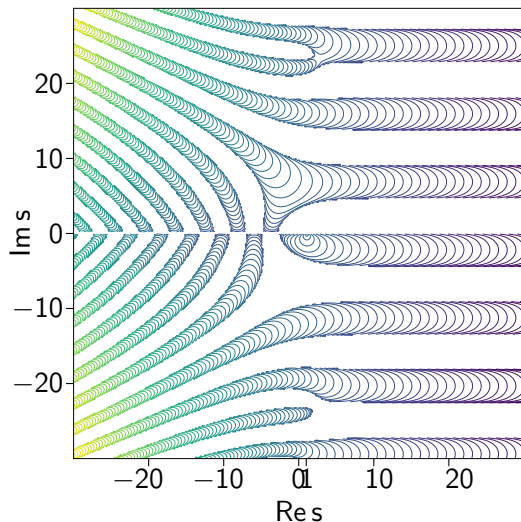


Abbildung: Imaginärteil der ζ -Funktion

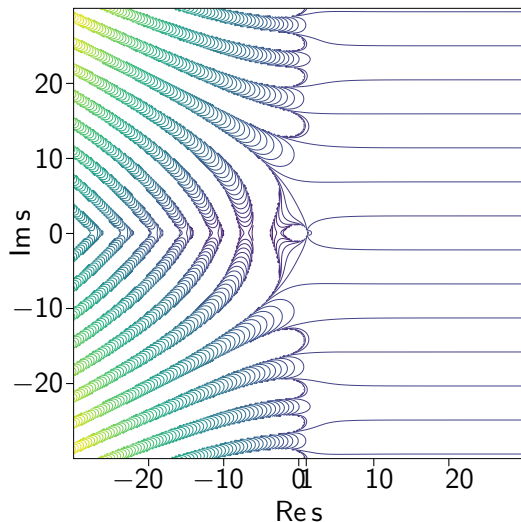


Abbildung: Realteil der ζ -Funktion

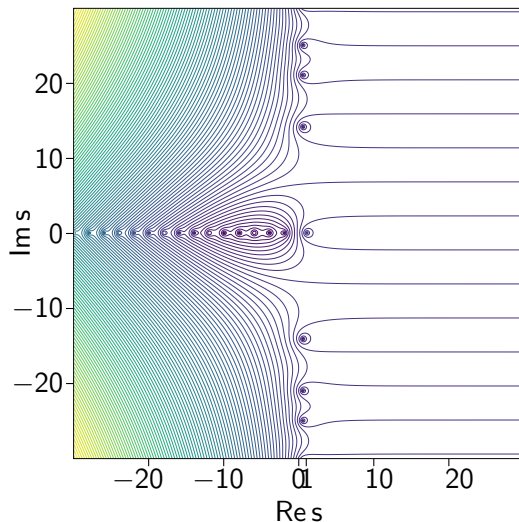


Abbildung: Betrag der ζ -Funktion

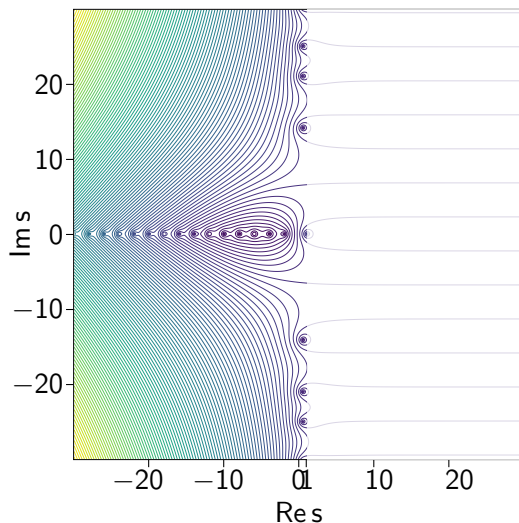


Abbildung: Betrag der ζ -Funktion

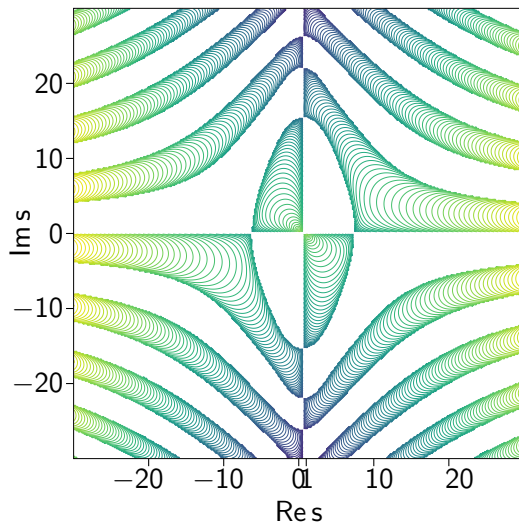


Abbildung: Imaginärteil der ζ -Funktion

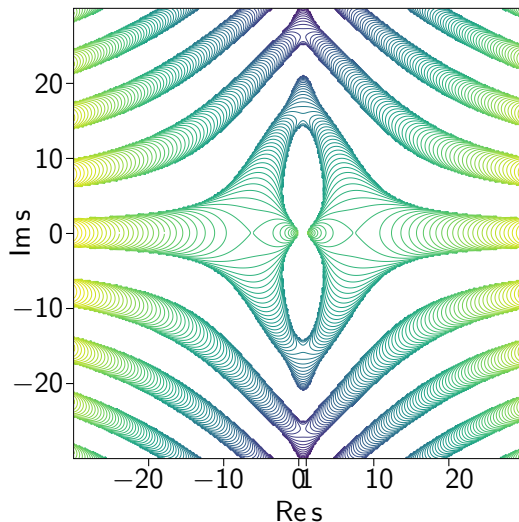


Abbildung: Realteil der ζ -Funktion

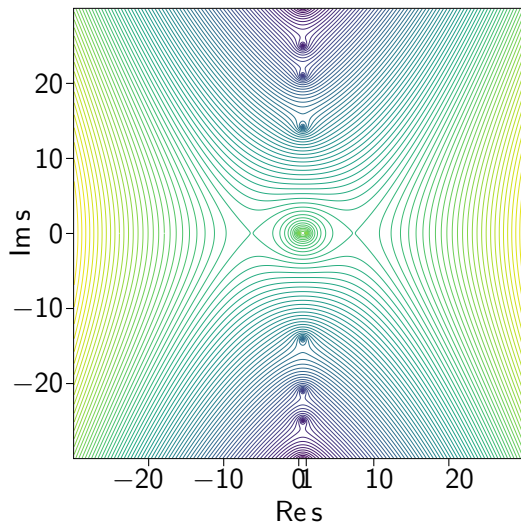


Abbildung: Betrag der ζ -Funktion

Nullstellenverteilung der ξ -Funktion

Lemma

$$\xi(s) = 0 \implies 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$$

Beweis.

Aufgrund der Eulerproduktdarstellung gilt

$$\blacksquare \quad 0 \neq \zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s) \quad \forall \operatorname{Re} s > 1$$



Nullstellenverteilung der ξ -Funktion

Lemma

$$\xi(s) = 0 \implies 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$$

Beweis.

Aufgrund der Eulerproduktdarstellung gilt

- $0 \neq \zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s) \quad \forall \operatorname{Re} s > 1$
- $\implies \xi(s) \neq 0 \Leftrightarrow \xi(1-s) \neq 0 \quad \forall \operatorname{Re} s > 1$



Nullstellenverteilung der ξ -Funktion

Lemma

$$\xi(s) = 0 \implies 0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$$

Beweis.

Aufgrund der Eulerproduktdarstellung gilt

- $0 \neq \zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s) \quad \forall \operatorname{Re} s > 1$
- $\implies \xi(s) \neq 0 \Leftrightarrow \xi(1-s) \neq 0 \quad \forall \operatorname{Re} s > 1$
- $\implies \xi(s) \neq 0 \quad \forall \operatorname{Re} s < 0$



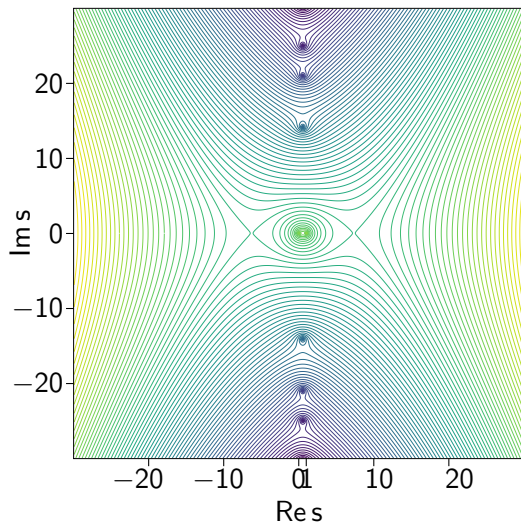


Abbildung: Betrag der ζ -Funktion

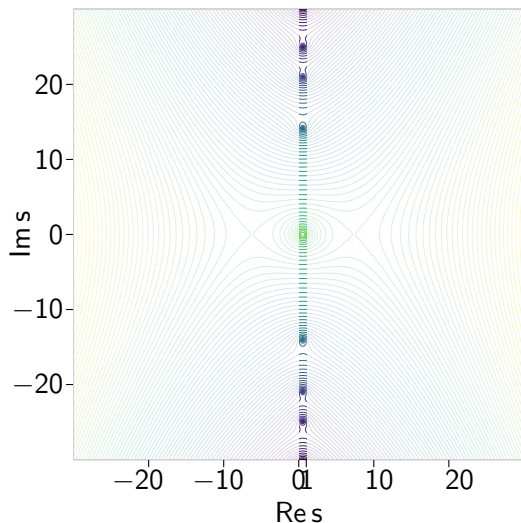


Abbildung: Betrag der ζ -Funktion

Nullstellenverteilung der ζ -Funktion

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s)$$

Nullstellenverteilung der ζ -Funktion

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s)$$

- $\xi(s) = 0$ nur für $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.

Nullstellenverteilung der ζ -Funktion

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s)$$

- $\xi(s) = 0$ nur für $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.
- Genau für die Polstellen von $\Gamma(s/2)$ gilt $\frac{\pi^{2/s}}{\Gamma(s/2)} = 0$.

Nullstellenverteilung der ζ -Funktion

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s)$$

- $\xi(s) = 0$ nur für $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.
- Genau für die Polstellen von $\Gamma(s/2)$ gilt $\frac{\pi^{2/s}}{\Gamma(s/2)} = 0$.
- $\implies \frac{\pi^{2/s}}{\Gamma(s/2)} = 0 \quad \forall s \in \{0, -2, -4, \dots\}$.

Nullstellenverteilung der ζ -Funktion

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)} \xi(s)$$

- $\xi(s) = 0$ nur für $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$.
- Genau für die Polstellen von $\Gamma(s/2)$ gilt $\frac{\pi^{2/s}}{\Gamma(s/2)} = 0$.
- $\implies \frac{\pi^{2/s}}{\Gamma(s/2)} = 0 \quad \forall s \in \{0, -2, -4, \dots\}$.

Folgerung.

ζ besitzt die „trivialen Nullstellen“ bei $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}$ und die Nullstellen von ξ , die allesamt im „kritischen Streifen“ $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$ liegen.

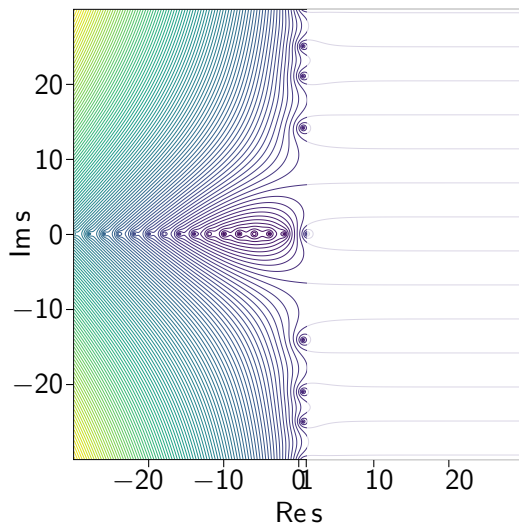


Abbildung: Betrag der ζ -Funktion

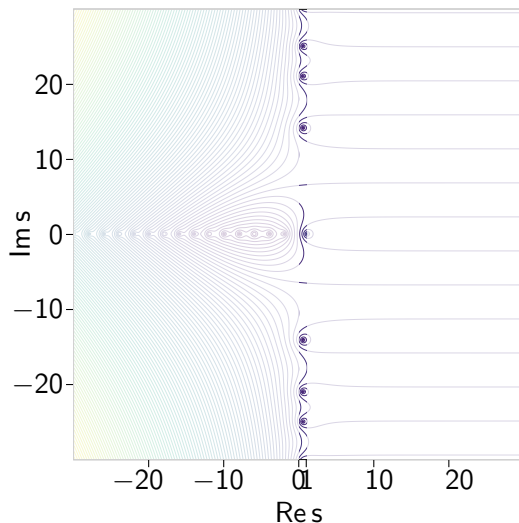


Abbildung: Betrag der ζ -Funktion

Vermutung (Riemannsche Hypothese)

Abgesehen von den „trivialen“ Nullstellen bei $s = -2n$, $n \in \mathbb{N}$ haben alle Nullstellen Realteil $\frac{1}{2}$.

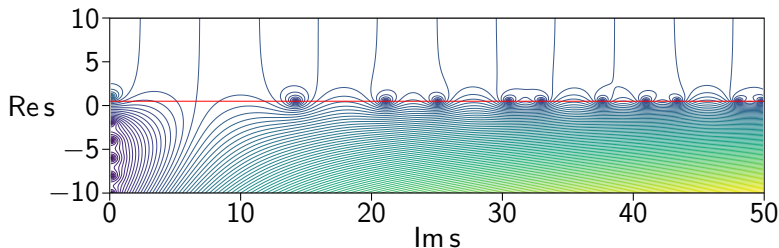


Abbildung: Absolutbetrag der ζ -Funktion bei $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ von $\operatorname{Im} s = 0$ bis $\operatorname{Im} s = 50$

Definition

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & n \text{ ist quadratfrei und hat } k \text{ Primfaktoren} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(1) = \mu(6) = \mu(10) = \mu(15) \\ -1 &= \mu(2) = \mu(3) = \mu(5) = \mu(30 = 2 \cdot 3 \cdot 5) \\ 0 &= \mu(4) = \mu(8) = \mu(9) = \mu(12 = 2^2 \cdot 3) \end{aligned}$$

Lemma

Es gilt

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

für $\operatorname{Re} s > 1$.

Beweis.

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$



Theorem

Die Gleichung

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ ist äquivalent zur Riemannschen Hypothese.

Literaturverzeichnis



J. Neukirch.

Algebraische Zahlentheorie.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.



E. Freitag., R. Busam

Funktionentheorie 1.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.