INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 4 — 15. Mai 2020

Abgabe bis Fr. 22.05.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Achtet bei der Abgabe darauf, Eure Abgabe tatsächlich zu bestätigen.
- Genau eine (beliebige) Person pro Abgabegruppe gibt bitte die Lösungen ab, wobei aus denen der Name der zweiten Person, falls vorhanden, klar hervorgeht.
- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei: *Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf*. Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf*. Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.

Themen:

- Offene und abgeschlossene Mengen
- Inneres, Rand und Abschluss
- Skalarprodukte
- Gram-Schmidt-Verfahren

Aufgabe 4.1 (6 Punkte): Aussagen über Mengen

Sei $\mathbb{K}^n$ ein metrischer Raum. Man beweise oder widerlege jeweils:

(a) Sei $d(\cdot,\cdot) : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ eine Metrik und $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei außerdem $\rho : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\rho(x) = \varphi(\|x\|_2),$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm bezeichne, und erfülle zusätzlich

$$d(x, y) = \rho(x - y) \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n.$$

Dann ist ρ eine Norm.[1] $\boxed{3}$

(b) Eine Teilmenge $O \subset \mathbb{K}^n$ ist genau dann offen, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält. $\boxed{1}$

(c) Der Rand ∂M einer Teilmenge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist abgeschlossen. $\boxed{1}$

(d) Für Teilmengen $M \subset \mathbb{K}^n$ gilt $\left(\overline{M}\right)^\circ = \overline{(M^\circ)}$. $\boxed{1}$

[1] Nicht verwirren lassen, es kann durchaus mehrere Normen für einen Vektorraum geben. Man denke bspw. an die euklidische Norm und die Maximumsnorm.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Behauptung ist falsch. Man betrachte die stetige Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1+x}$$

Dann induziert φ eine Metrik, allerdings keine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Die Abbildung:

$$\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto d(x,y) := \rho(x-y) := \varphi(\|x-y\|_2)$$

ist eine Metrik, wobei Definitheit sowie Symetrie sofort klar sind. Für die Dreiecksungleichung betrachte man: Wegen $\varphi'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$ ist φ monoton wachsend, und es gilt somit für beliege $x, y, z \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} d(x,y) = \rho(x-y) &= \varphi(\|x-y\|_2) \\ &\leq \varphi(\|x-z\|_2 + \|z-y\|_2) \\ &= \frac{\|x-z\|_2}{1+\|x-z\|_2+\|z-y\|_2} + \frac{\|z-y\|_2}{1+\|x-z\|_2+\|z-y\|_2} \\ &\leq \frac{\|x-z\|_2}{1+\|x-z\|_2+} + \frac{\|z-y\|_2}{1+\|z-y\|_2} \\ &= \rho(x-z) + \rho(z-y) = d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Folglich ist $d(\cdot,\cdot)$ eine Metrik un des gilt $\rho(x) = \varphi(\|x\|_2)\ \forall x \in \mathbb{K}^n$.
Sei nun $x \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0,1\}$, so ist ρ wegen $\rho(\alpha x) = |\alpha| \frac{\|x\|_2}{1+|\alpha|\|x\|_2} \neq |\alpha|\, \rho(x)$ keine Norm.

(b) Die Aussage ist wahr. Sei $O \subset \mathbb{K}^n$ offen. Angenommen O enthält einen Randpunkt $a \in \partial O$, so gibt es in jeder Umgebung U von a einen Punkt aus dem Komplement O^c. Dies widerspricht aber der Offenheit von O. Also kann O keine Randpunkte enthalten.
Die Menge O enthalte nun keine ihrer Randpunkte. Also gibt es zu jedem Punkt $a \in O$ eine Umgebung, welche keine Punkte aus dem Komplement O^c enthält, d.h. ganz in O liegt. Folglich ist O offen.

(c) Die Aussage ist wahr. Denn $\partial M = (M^\circ \cup (M^c)^\circ)^c$ und somit als Komplement der offenen Menge $M^\circ \cup (M^c)^\circ$ abgeschlossen.

(d) Die Aussage ist falsch. Man betrachte die Menge $M = \{x \in \mathbb{K}^n | |x| \leq 1\}$ für diese gilt:

$$(\overline{M})^\circ = \{x \in \mathbb{K}^n | |x < 1\} \neq \{x \in \mathbb{K}^n | |x| \leq 1\} = \overline{(M^\circ)}$$

(Wichtig: Da Abgeschlossenheit und Offenheit einer Menge sich nicht gegenseitig ausschließen (beachte $\mathbb{K}^n$ ist offen und abgeschlossen zugleich). Ist eine Argumentation über ein solches Argument falsch).

Aufgabe 4.2 (5 Punkte): Inneres, Rand und Abschluss

Man bestimme das Innere M°, den Rand ∂M und den Abschluss $\overline{M}$ für die folgenden Mengen im $\mathbb{R}^n$:

(a) $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < 1,\ x \in \mathbb{Q}^n\}$, $\boxed{2}$

(b) $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1,\ x_1 = 0\}$, $\boxed{1}$

(c) $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 1\}$ mit $f(x) := \begin{cases} 1, & x \in (-1,1)^n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, $\boxed{1}$

(d) $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 1\}$ mit $g(x) := \frac{3}{2} - f(x)$, wobei f wie in (c) definiert ist. $\boxed{1}$

Dabei bezeichne $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm und $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumsnorm.

Lösungsvorschlag:

Man erinnere sich nochmal an die Definitionen für innere Punkte (Punkte in M für die es eine Umgebung gibt, die komplett in der Menge liegt), Randpunkte (Punkte, für die in jeder Umgebung ein Punkt $Y_1 \in M$ und ein Punkt $Y_2 \in M^c$ liegt) und den Abschluss einer Menge M ($M^\circ \cup \partial M$). Und $M^\circ = \{x \in M | x \text{ ist innerer Punkt}\}$ und $\partial M = \{x \in \mathbb{K}^n | x \text{ ist Randpunkt von } M\}$

(a) $M^\circ = \emptyset$, $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_\infty \leq 1\}$, $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$
Da $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ liegt, existiert in jeder ϵ-Kugel um $x \in M$ ein $y \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{Q}^n$, also ist $y \notin M \Rightarrow M^\circ = \emptyset$
$\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_\infty \leq 1\}$. Denn mit der selben Argumentation wie oben ergibt sich: $M \subset \partial M$.
Da $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ liegt ergibt sich, dass in jeder Umgebung von $x \in \{x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{Q}^n : ||x||_\infty < 1\} =: \tilde{M}$ ein $Y_1 \in M$ und $Y_2 \notin M$ liegt.
Daraus folgt: $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < 1\} = M \cup \tilde{M} \subset \partial M$.
Auch für $x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1$ ist klar, dass es ein $Y_1 \in M$ und $Y_2 \notin M$ gibt, womit gilt: $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\} \subset \partial M$. Sei nun $x \notin \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$, dann $\exists \delta > 0 : \|x\|_\infty \geq 1 + \delta$
$\Rightarrow U_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_\infty < \delta\} \cap M = \emptyset \Rightarrow \partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$.
$\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$. Denn $\overline{M} = \underbrace{M^\circ}_{=\emptyset} \cup \partial M$.

(b) $M^o = \emptyset$, $\partial M = M$, $\overline{M} = \partial M$

Denn $\forall x \in M \exists \epsilon > 0$ sodass: $U_\epsilon(x) \ni x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \epsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin M \Rightarrow$ es gibt keine inneren Punkte $\Rightarrow M^o = \emptyset$. Weiter folgt daraus, da $x \in M$, dass $M \subset \partial M$.
Sei $x \notin M \Rightarrow x_1 \neq 0$ oder $\|x\|_2 > 1$.
Falls $x_1 \neq 0$, dann gilt: $U_{\frac{|x_1|}{2}}(x) \cap M = \emptyset$.
Falls $x_1 = 0$, dann betrachte das Argument aus a. $\Rightarrow \partial M = M$ und $\overline{M} = \underbrace{M^\circ}_{=\emptyset} \cup \partial M$.

(c) $M^o = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty > 1\}$, $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$, $\overline{M} = M$
$M = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin (-1,1)^n\} =$

$\mathbb{R}^n \setminus (-1,1)^n = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \geq 1\}$
Dann gilt: $M^o = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty > 1\}$ denn dann $\exists \delta > 0$ mit $\|x\|_\infty \geq 1 + \delta$ und $U_{\frac{\delta}{2}}(x) \subset M$
Für $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < 1$ gilt: $\exists \epsilon > 0 : \|x\|_\infty \leq 1 - \epsilon$, dann gilt für $U_{\frac{\epsilon}{2}}(x) \cap M = \emptyset$ und da für $x \in M : \|x\|_\infty = 1$ gilt $\forall \epsilon > 0 : \exists y \in M^c : y \in U_\epsilon(x)$,
dann $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ und deshalb $\overline{M} = M$

(d) $M^o = M$, $\partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$, $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$
$M = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{2} - f(x) \leq 1\} = (-1,1)^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < 1\}$, dann folgt analog zu $c : \partial M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty = 1\}$ sowie $M^o = M$ und $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$

Aufgabe 4.3 (6 Punkte): Skalarprodukte

Sei $a < b \in \mathbb{R}$. Wir betrachten einen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\tilde{V}$ und einen linearen Unterraum $V \subset \tilde{V}$. Dabei sind $\tilde{V}$ und V wiederum Teilmengen des Raumes $C([a,b])$, also des Raumes der stetigen Funktionen von $[a,b] \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Dabei ist $\tilde{V}$ definiert als

$$\tilde{V} := \{f \in C([a,b]) \mid \text{Es gibt eine Zerlegung } \Delta \text{ (abhängig von } f) \text{ von } [a,b], \text{ sodass } f \text{ auf den abgeschlossenen Teilintervallen differenzierbar ist}\}.$$

In anderen Worten: $\tilde{V}$ ist der Raum der stetigen Funktionen, die stückweise differenzierbar sind. Weiter ist $V \subset \tilde{V}$ definiert als

$$V := \left\{ f \in \tilde{V} \;\middle|\; f(a) = f(b) = 0 \right\}.$$

Weiter sei eine Abbildung $(\cdot,\cdot) : \tilde{V} \times \tilde{V} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f,g) := \int_a^b f'(x) g'(x) \mathrm{d}x \quad \forall f, g \in \tilde{V}.$$

Dabei werden f' und g' stückweise gebildet. Man zeige

(a) $(\cdot,\cdot)$ ist <u>kein</u> Skalarprodukt auf $\tilde{V}$. $\boxed{3}$

(b) $(\cdot,\cdot)$ ist <u>ein</u> Skalarprodukt auf V. $\boxed{3}$

<u>Lösungsvorschlag:</u>

(a) Sei

$$\tilde{V} := \{f \in C([a,b]) \mid \text{Es gibt eine Zerlegung } \Delta \text{ (abhängig von } f) \text{ von } [a,b], \text{ sodass } f \text{ auf den abgeschlossenen Teilintervallen stetig differenzierbar ist}\}.$$

Dann ist $\tilde{V}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und V ein Untervektorraum. Die Abbildung $(\cdot,\cdot)$ wohldefiniert und bilinear, da der Ableitungsoperator linear ist, d.h. für $f_1, f_2, g \in \tilde{V}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\langle c_1 f_1 + c_2 f_2, g \rangle &= \int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)'(x) g'(x) dx \\
&= \int_a^b (c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x)) g'(x) dx \\
&= \int_a^b c_1 f_1'(x) g'(x) dx + \int_a^b c_2 f_2'(x) g'(x) dx \\
&= c_1 (f_1, g) + c_2 (f_2, g)
\end{aligned}$$

Offenbar ist $(\cdot,\cdot)$ symetrisch, wegen der Kommutativität von $(\mathbb{R},\cdot)$
Allerdings ist $(\cdot,\cdot)$ nicht positiv definit, denn es gilt zwar
$(f,f)=\int_a^b (f'(x))^2 dx \geq 0 \; \forall f \in \tilde{V}$,
aber $g \equiv 1 \in \tilde{V} \setminus \{0\}$, und
$(g,g)=\int_a^b (g'(x))^2 dx = \int_a^b 0 dx = 0$.

(b) Die Linearität und Symetrie würde schon in (a) gezeigt. D.h es ist noch die positive Definitheit zu zeigen:
Sei $f \in V$ mit $\int_a^b (f'(x))^2 dx = (f,f) = 0$, dann existiert eine Zerlegung
$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, dann gilt:

$$0 = \int_a^b (f'(x))^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(x))^2 dx}_{=:S_i \geq 0}$$

weil f auf $[x_i, x_{i+1})$ stetig ist gilt: $f'(x) = 0$, denn angenommen $f'(x) \neq 0$, dann existiert $[\alpha,\beta] \subset [x_i, x_{i+1})$ und $z > 0$, sodass $(f'(x))^2 \geq z \forall x \in [\alpha,\beta]$ Was ein Widerspruch zu $S_i = 0$ ist. Also gilt: $f'(x) = 0 \forall x \in [a,b], x \neq x_i, i = 1,\cdots,n-1$, daraus folgt $\forall x \in [x_0, x_1)$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s) ds = 0$$

und weil $f$stetig auf $[a,b]$ folgt daraus, dass $f(x_1) = 0$. Mit derselben Argumentation setzt man dies auf $[x_1, x_2)$ fort. Daraus folgt $f(x) = 0 \forall x \in [a,b]$

MOTIVATION: Hier handelt es sich um ein grundlegendes Approximationsverfahren (Finite-Elemente-Methode) für eine Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, die durch eine Differentialgleichunjg mit Randbedingungen, eine sog. Randwertaufgabe, (implizit) festgelegt ist. Als Beispiele diene

$$\begin{aligned} -u''(x) &= r(x), \quad x \in [a,b], \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned}$$

für eine gegebene rechte Seite $r \in C([a,b])$. Anstatt nach einer zweimal (stetig) differenzierbaren Funktion u mit der Eigenschaft zu suchen, sucht man nach einer stetigen, stückweise differenzierbaren Funktion u, die auch die Randvorgaben und für die gilt

$$(u', v') = (r, v) \quad \forall v \in V.$$

Ein Näherungsverfahren entsteht dadurch, dass ein u_Δ mit $u_\Delta(a) 0 u_\Delta(b) = 0$ gesucht wird, das

$$(u'_\Delta, v') = (r, v) \quad \forall v \text{ mit } v(a) = v(b) = 0.$$

Schlussendlich erhält man aus dieser Bedingung ein lineares Gleichungssystem mithilfe dessen Lösung man eine solche Approximation u_Δ konstruieren kann. Finite Elemente Methoden sind äußerst wichtige Werkzeuge zum numerischen Lösen, bzw. Simulieren von partiellen Differentialgleichungen, die in vielen praxisrelevanten Prozessen auftreten. Für Details sei auf entsprechende Lehrbücher und die Vorlesung Finite Elemente Methoden verwiesen. (Der Textausschnitt stammt aus Knabner, Peter, and Wolf Barth. Lineare Algebra. Springer Berlin Heidelberg, 2013, p. 115-117. Dort findet Ihr auch ein paar mehr Informationen zu dieser Aufgabe.)

Aufgabe 4.4 (3 Punkte): Gram-Schmidt-Verfahren

Man orthonormalisiere die Polynome $1,\ t,\ t^2,\ t^3 \in C([0,1])$ mithilfe des Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren bzgl. des Skalarpodukts

$$(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Lösungsvorschlag:

Man betrachte zu dem Skalarprodukt $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ die induzierte Norm
$\|x\|^2 = (f,f) = \int_0^1 f(t)f(t)dt$
Aus dem Gram-Schmidt-Verfahren erhält man: für $w_i = t^{i-1}, i \in \{1, \cdots, 4\}$

$$v_1' = w_1, \left\|v_1'\right\|^2 = \int_0^1 1^2 dt = 1, v_1 = \frac{v_1'}{\|v_1'\|} = 1$$
$$v_2' = w_2 - (w_2,v_1)v_1 = t - \int_0^1 t dt = t - \frac{1}{2}, \left\|v_2'\right\|^2 = \int_0^1 (t-\frac{1}{2})^2 dt = \frac{1}{12}, v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \sqrt{3}(2t-1)$$
$$v_3' = w_3 - (w_3,v_1)v_1 - (w_3,v_2)v_2 = t^2 - \int_0^1 t^2 dt - (\int_0^1 t^2\sqrt{3}(2t-1)dt)\sqrt{3}(2t-1) = t^2 - t + \frac{1}{6},$$
$$\left\|v_3'\right\|^2 = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt = \frac{1}{180}, v_3 = \frac{v_3'}{\|v_3'\|} = \sqrt{5}(6t^2-6t+1)$$

$$\begin{aligned} v_4' &= w_4 - (w_4,v_1)v_1 - (w_4,v_2)v_2 - (w_4,v_3)v_3 \\ &= t^3 - \int_0^1 t^3 dt - \int_0^1 t^3\sqrt{3}(2t-1)dt\sqrt{3}(2t-1) - \int_0^1 t^3\sqrt{5}(6t^2-6t+1)dt\sqrt{5}(6t^2-6t+1) \\ &= t^3 - \frac{1}{4} - \frac{9}{20}(2t-1) - \frac{1}{4}(6t^2-6t+1) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + (\frac{3}{2} - \frac{9}{10})t + \frac{9}{20} - \frac{1}{2} \\ &= \left\|v_4'\right\|^2 = \int_0^1 (t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20})^2 dt = \frac{1}{2800}, \\ v_4 &= \frac{v_4'}{\|v_4'\|} = \sqrt{7}(20t^3 - 30t^2 + 12t - 1) \end{aligned}$$
