Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis I

WS 19/20

Blatt 02 31.10.2019

ARSnova-Code: 67 52 65 62

Abgabe bis Fr. 08.11.19, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)

Informationen:

- Bitte schreiben Sie ihre Namen auf Ihre Abgaben, tackern die Zettel, und werfen sie rechtzeitig in den Zettelkasten Ihres Tutors ein.
- Begründen Sie Ihre Schritte und formulieren Sie sie ordentlich aus.
- Achten Sie auf eine korrekte mathematische Ausdrucksweise.
- Den Zugangsschlüssel für `https://arsnova.eu/` finden Sie oben links unter der Nummer des aktuellen Übungsblattes.

Themen:

- Widerspruchsbeweis
- Irrationale Zahlen
- Vollständige Induktion
- Folgenkonvergenz

Hinweise zur Bearbeitung:

- Bei Aufgabe 2.3, Aufgabenteil (b) reicht es nicht aus, schlicht die Grenzwertbildung und das Quadrieren zu vertauschen. In der Tat wäre ein Vertauschen aus mathematischer Sicht erlaubt, aber die entsprechenden Erkenntnisse wurden bisher noch nicht in dieser Vorlesung behandelt. Sie sollen hier das Konvergenzkriterium, wie es in der Vorlesung und der Zentralübung am Mittwoch, den 30.10.19, besprochen wurde, verwenden!
- Um anzugeben, dass eine Zahl $x > 0$ auf die nächste natürliche Zahl aufgerundet werden soll, nutzen Sie bitte die „obere Gaußklammer“ $\lceil\ \rceil$. Sprich es gilt beispielsweise $\lceil 6/5 \rceil = 2$. Dies ist bei den Aufgaben 2.3 und 2.4 nützlich.
- Nutzen Sie bei der Bonusaufgabe statt der Schreibweise $a = a_0.d_1d_2\dots d_n$ die Schreibweise $a = a_0 + \sum_{k=1}^{n} d_i$. Zum einen ist diese Notation sauberer, zum anderen hilft sie die Aufgabe zu lösen.

Aufgabe 2.1 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie für $p \in \mathbb{Z}$, dass

$$p^3 \text{ gerade} \iff p \text{ gerade}.$$

(b) Nutzen Sie das Ergebnisse aus (a), um $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ zu zeigen.

Aufgabe 2.2 (7 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen und Gleichungen. Dabei ist der Operator $\prod_{i=1}^n$ das multiplikative Analogon zum Operator $\sum_{k=1}^n$. D. h. es gilt

$$\prod_{k=1}^n a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $x_k, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}$. Dann gilt, falls für alle k gilt $x_k \geq 0$, dass

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k.$$

(b) Sei $0 < x \leq y, x, y \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$x^2 \leq \left(\frac{2xy}{x+y}\right)^2 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq y^2.$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Dann gilt

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}.$$

(d) Sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$. Dann gilt $2^n < n!$.

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Zeigen Sie, dass

(a) $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : 2a > a_n > 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2$

Aufgabe 2.4 (6 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe des in der Vorlesung und der Zentralübung besprochenen Konvergenzkriteriums, dass

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n-1}{n^2+1}\right) = 1,$

(b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n!}\right) = 0,$

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3^n}\right) = 0.$

Tipp: Sie dürfen ohne Beweis nutzen, dass $\ln(n) \leq n\ \forall n \in \mathbb{N}$ *und dass* $(1 - \ln(3)) < 0$.

Bonusaufgabe 2.5 (5 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung konstruierte Einschließung $((a_n, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ von $\sqrt{2}$ mit $a_1 = 1.4,\ b_1 = 1.5$ tatsächlich die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $|a_n - b_n| \leq 10^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$