Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 10
Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 5. Februar

Sie können bei jeder Aufgabe die Ergebnisse der vorherigen nutzen, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben. Sie können maximal 16 Punkte erreichen.

45. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Fixiere ein nichtleeres Gebiet D in $\mathbb{C}$ und die Riemannsche Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie:

(a) Jede meromorphe Funktion auf D definiert eine holomorphe Funktion $D \to \widehat{\mathbb{C}}$ zwischen Riemannschen Flächen.

(b) Es gibt genau eine holomorphe Funktion $D \to \widehat{\mathbb{C}}$ zwischen Riemannschen Flächen, die nicht von einer meromorphen Funktion auf D kommt.

46. Aufgabe: (2+2+1+1 = 6 Punkte) Seien j und $\lambda(\tau) = (e_3(\tau) - e_2(\tau))/(e_1(\tau) - e_2(\tau))$ die Modulfunktionen aus der Vorlesung. Sei $p(\tau) = \frac{4(1-\lambda+\lambda^2)^3}{27\lambda^2(1-\lambda)^2}$ für $\tau \in \mathbb{H}$ und $\lambda = \lambda(\tau)$ wie oben. Zeigen Sie:

(a) p ist eine holomorphe Modulfunktion auf $\mathbb{H}$ zur Kongruenzgruppe $\Gamma[2]$.

(b) Verwenden Sie Aufgabe 35, um zu zeigen, dass p eine Modulfunktion zur vollen Modulgruppe Γ ist. Folgern Sie $p(\tau) = P(j(\tau))$ für ein komplexes Polynom P.

(c) Zeigen Sie, dass P den Grad Eins hat, also $P(j) = a_1 j + a_0$ für gewisse $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$.

(d) Zeigen Sie $\lambda(i) = \frac{1}{2}$ und $\lambda(\rho) = \rho$ für $\rho = \exp(\pi i/3)$. Folgern Sie $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$.

Dies zeigt $p = j$. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 35.

47. Aufgabe: (2+2+2= 6 Punkte) Für $a \in \mathbb{Z}^2$ und $b \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 + (-1)^{a_2} b_1, a_2 + b_2) \in \mathbb{R}^2 .$$

Zeigen Sie:

(a) $G = (\mathbb{Z}^2, *)$ ist eine nichtabelsche Gruppe und operiert glatt durch $*$ von links auf der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^2$.

(b) Diese Gruppenoperation von G auf X ist frei und glatt, der Quotient $G \setminus \mathbb{R}^2$ ist also eine Mannigfaltigkeit.

(c) Man kann zwar $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ als Riemannsche Fläche auffassen, aber $G \setminus \mathbb{C}$ wird so nicht zu einer Riemannschen Fläche.

48. Aufgabe: (4 Punkte) Seien $p_1 : X_1 \to Y_1$ und $p_2 : X_2 \to Y_2$ Überlagerungen topologischer Räume. Dann ist das Produkt

$$p_1 \times p_2 : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2 \quad , \quad (x_1, x_2) \mapsto (p_1(x_1), p_2(x_2)))$$

ebenfalls eine Überlagerung.

49. Aufgabe: (2+2+2+2=8 Punkte) Sei $N \geq 2$ eine natürliche Zahl. Wir konstruieren die Modulkurven Y_N und X_N als Riemannsche Flächen. Zeigen Sie:

(a) $\overline{\Gamma}(N)$ operiert frei und holomorph auf $\mathbb{H}$ und definiert so eine zusammenhängende Riemannsche Fläche $Y_N = \overline{\Gamma}(N) \setminus \mathbb{H}$.

(b) Es gibt $y_0 > 0$ sodass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ mit $\mathrm{Im}(z_i) > y_0$ und $z_1 = \gamma \langle z_2 \rangle$ für ein $\gamma \in \Gamma(N)$ gilt $z_1 - z_2 \in N\mathbb{Z}$. Folgern Sie: Sei U das Bild von $\{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Im}(z) > y_0\}$ in Y_N, dann ist

$$f : U \to \mathbb{E} \quad , \quad z \mapsto \exp(2\pi i z/N)$$

eine injektive holomorphe Abbildung von Riemannschen Flächen (eine Immersion). Das Bild von f ist eine Kreisscheibe um Null.

(c) Konstruieren Sie auf $Y_N \cup \{i\infty\}$ eine Struktur als zusammenhängende Riemannsche Fläche, die Y_N als offene Untermannigfaltigkeit enthält.

(d) Sei $\mathcal{S}_N$ die Menge der Spitzen zu $\Gamma(N)$. Konstruieren Sie auf $X_N = Y_N \cup \mathcal{S}_N$ eine Struktur als kompakte zusammenhängende Riemannsche Fläche, die Y_N als offene Untermannigfaltigkeit enthält und in der $\mathcal{S}_N$ diskret ist.

Die meromorphen Modulformen vom Gewicht Null zu $\Gamma(N)$ entsprechen also den meromorphen Funktionen auf X_N.