Aufgabe 1

Wir verwenden vollständige Induktion nach der Anzahl der Stützstellen. Der Induktionsanfang ist trivial, sei also die Behauptung für $n-1$ Stützstellen bewiesen. Jede Permutation von n Stützstellen lässt sich als Komposition von Vertauschungen zweier Elemente schreiben. Sei also eine Permutation $\tilde{x_1}, \dots, \tilde{x_n}$ von $x_1, \dots, x_n$ gegeben, wobei $\tilde{x_i} = x_j, \tilde{x_j} = x_i$ und sonst $\tilde{x_k} = x_k$ gelte. Dann gilt

$$y[x_i, \dots, x_j] = \frac{y[x_{i+1}, \dots, x_j] - y[x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i} = \frac{y[\tilde{x_{i+1}}, \dots, \tilde{x_{j-1}}, \tilde{x_i}] - y[\tilde{x_j}, \tilde{x_{i+1}}, \dots, \tilde{x_{j-1}}]}{\tilde{x_i} - \tilde{x_j}}$$

Nun nutzen wir die Induktionsvoraussetzung. Da $j-i-1 \leq n-1$ gilt, können wir die Einträge der y vertauschen. Daher gilt

$$y[x_i, \dots, x_j] = \frac{y[\tilde{x_i}, \dots, \tilde{x_{j-1}}] - y[\tilde{x_{i+1}}, \dots, \tilde{x_j}]}{\tilde{x_i} - \tilde{x_j}} = y[\tilde{x_i}, \tilde{x_j}].$$

Da sonst keine Elemente vertauscht wurden, erhalten wir schon die Behauptung.

Aufgabe 2

Es existiert auf jeden Fall eine geeignete Funktion, deren Ableitung gleich der Ableitung der Spline-Funktion an den Rändern ist. Daher werden Hermite-Randbedingungen erfüllt und wir können Satz 21.6 anwenden. Es gilt daher $\max_{x\in[0,1]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{N^4} \max_{x\in[0,1]} |16\pi^4 \sin(2\pi x)| = \frac{16\pi^4}{N}$. Wählen wir also $N = \lceil 2\pi 10^3 \rceil$, so erhalten wir $\max_{x\in[0,1]} |f(x) - s(x)| \leq 10^{-12}$.

Aufgabe 3

Es gilt $x_0 = 0, y_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2}, y_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \pi, y_2 = 1,\ x_3 = \frac{3\pi}{2}, y_3 = \frac{1}{2}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{4}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = \frac{1}{2} \\
c_1 &= \frac{1}{4}\left(y_0 + y_1 e^{-i\frac{2\pi}{4}} + y_2 e^{-i\frac{4\pi}{4}} + y_3 e^{-i\frac{6\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-i\frac{1}{2} - 1 + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \\
c_2 &= \frac{1}{4}\left(y_0 + y_1 e^{-i\frac{4\pi}{4}} + y_2 e^{-i\frac{8\pi}{4}} + y_3 e^{-i\frac{12\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = 0 \\
c_3 &= \frac{1}{4}\left(y_0 + y_1 e^{-i\frac{6\pi}{4}} + y_2 e^{-i\frac{12\pi}{4}} + y_3 e^{-i\frac{18\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(i\frac{1}{2} - 1 - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= 2x(x-6) + x^2 - 2(x-2) \\
f_1''(x) &= 2(x-6) + 2x + 2x - 2 \\
f_1''(x_0) &= 2(0-6) + 0 - 2 \neq 0
\end{aligned}$$

Also verletzt f_1 die natürlichen Randbedingungen und liegt daher nicht in $S(X)$. Schränken wir f_2 auf die beiden Teilintervalle ein, so erhalten wir $g \coloneqq f_2|_{[0,1]} = -\frac{1}{2}x^3$ und $h \coloneqq f_2|_{[1,2]} = (x-1)^3 - \frac{1}{2}x^3$. Nun müssen wir die Bedingungen prüfen. Es gilt $g'(x) = -\frac{3}{2}x^2$, $g''(x) = -3x$ und $h'(x) = 3(x-1)^2 - \frac{3}{2}x^2$, $h''(x) = 6(x-1) - 3x$. Die Stetigkeit ist erfüllt wegen $g(1) = -\frac{1}{2} = h(1)$, die Stetigkeit der ersten Ableitung gilt wegen $g'(1) = -\frac{3}{2} = 3(1-1)^2 - \frac{3}{2} = h'(1)$, die Stetigkeit der zweiten Ableitung folgt aus $g''(1) = -3 = 6(1-1) - 3 = h''(x)$ und die Randbedingungen gelten wegen $g''(0) = 0$ und $h''(2) = 6 - 6 = 0$. Also ist $f_2 \in S(X)$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= 3x^2 + 2x \\ f_3''(x) &= 6x + 2 \\ f_3''(x_0) &= 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Also verletzt f_3 die natürlichen Randbedingungen und kann daher nicht in $S(x)$ liegen.

(b) Es gilt

$$s(x) = \begin{cases} 1 + 4(x-1) + 4.5(x-1)^2 + 1.5(x-3)^2 & |x \in [0,1] \\ 8 + 8.5(x-2) - 1.5(x-2)^3 & |x \in [1,2] \end{cases},$$

die Berechnung erfolgte dabei mit dem Programm aus Aufgabe 5.

Aufgabe 5