INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 03 — 15. Mai 2020

Abgabe bis Fr. 15.05.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Achtet bei der Abgabe darauf, Eure Abgabe tatsächlich zu bestätigen.
- Genau eine (beliebige) Person pro Abgabegruppe gibt bitte die Lösungen ab, wobei aus denen der Name der zweiten Person, falls vorhanden, klar hervorgeht.
- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei: *Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf*. Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf*. Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.

Themen:

- Metriken
- Normen
- Hölder-Ungleichung
- Kompaktheit

Aufgabe 3.1 (6 Punkte): Metriken auf den reellen Zahlen

Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien folgende Abbildungen $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, 5$ definiert:

(a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$, $\boxed{1}$

(b) $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$, $\boxed{1}$

(c) $d_3(x,y) = \left|x^2 - y^2\right|$, $\boxed{1}$

(d) $d_4(x,y) = |x - 2y|$, $\boxed{1}$

(e) $d_5(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$. $\boxed{2}$

Man zeige oder widerlege jeweils, dass durch diese Abbildungen jeweils eine Metrik auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.

Lösungsvorschlag:

Zu zeigen sind die drei Axiome einer Metrik:

(1) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Positive Definitheit)

(2) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie)

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung)

(a) d_1 ist keine Metrik, denn die Dreiecksungleichung verletzt ist: Beispielsweise ist für $x = 1$, $y = -1$ und $z = 0$ gilt nämlich

$$d(x,y) = (1-(-1))^2 = 4 \not\leq 2 = (1-0)^2 + (0-(-1))^2 = d(x,z) + d(z,y).$$ $\boxed{1}$

(b) d_2 ist eine Metrik. (M1), (M2) sind klar. (M2) folgt aus folgender Beobachtung:

$$\begin{aligned}(\sqrt{|x-z|}+\sqrt{|z-y|})^2 &= |x-z| + 2\sqrt{|x-z|\cdot|z-y|} + |z-y| \\ &\geq |x-z| + |z-y| \\ &\geq |x-y|\end{aligned} \qquad \boxed{1}$$

(c) d_3 ist keine Metrik, denn(M1) ist verletzt. Für $x = 1$ und $y = -1$ gilt $d(x, y) = 0$, obwohl $x \neq y$. $\boxed{1}$

(d) Auch d_4 ist keine Metrik, denn (M2) ist verletzt. Wählen wir etwa $x = 0$ und $y = 1$, so ist

$$d_4(x, y) = |0 - 2 \cdot 1| = 2 \neq 1 = |1 - 2 \cdot 0| = d_4(y, x). \qquad \boxed{1}$$

(e) d_5 ist eine Metrik. (M1) und (M2) sind wieder klar. (M2) folgt daraus, dass die Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton steigend ist. Dazu betrachten wir die Ableitung:

$$\begin{aligned} & |x-y| \leq |x-z| + |z-y| \\ \Rightarrow\ & \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leq \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|} \\ & \leq \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|} \end{aligned} \qquad \boxed{2}$$

Aufgabe 3.2 (3 Punkte): Normen aus Metriken konstruieren

Sei (X, d) ein metrischer Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ erfülle des Weiteren die Eigenschaften

(E1) $d(y - x, 0) = d(x, y)$,

(E2) $d(\lambda x, 0) = |\lambda|\, d(x, 0)$,

mit $x, y \in X$ und $\lambda \in K$. Man beweise, dass dann durch

$$\|x\|_d := d(x, 0) \quad \forall x \in X$$

eine Norm auf X definiert wird.

<u>**Lösungsvorschlag:**</u>

Wir zeigen die drei Axiome einer Norm:

(1) $\|x\| \leq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Positive Definitheit)

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (Homogenität)

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Zu (N1): Die Positivität $\|x\|_d = d(x, 0) \geq 0$ ist klar. Weiter gilt

$$\|x\|_d = 0 \Leftrightarrow d(x, 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \qquad \boxed{1}$$

Zu (N2): Folgt aus (E2), denn

$$\|\lambda x\|_d = d(\lambda x, 0) \overset{\text{(E2)}}{=} |\lambda| \cdot \|x\|_d. \qquad \boxed{1}$$

Zu (N3): Mit (E1), (E2) und der Dreiecksungleichung für Metriken folgt

$$\begin{aligned}\|x+y\|_d &= d(y-(-x),0) \overset{(E1)}{=} d(-x,y)\\ &\le d(-x,0)+d(0,y) \overset{(E2)}{=} d(x,0)+d(0,y)\\ &\overset{(E1)}{=} d(x,0)+(y-0,0) = \|x\|_d+\|y\|_d.\end{aligned}$$ 1

Aufgabe 3.3 (5 Punkte): Youngsche Ungleichung und Hölder-Ungleichung

Seien $p,q>1$ mit $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

(a) Man zeige zunächst für $a,b\ge 0$ den folgenden Spezialfall der Youngsche Ungleichung:

$$ab \le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass eine zweimal differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ genau dann konvex ist, d. h.

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R},\ \forall\lambda\in[0,1]$$

erfüllt, wenn ihre zweite Ableitung nichtnegativ ist. 3

(b) Seien nun zusätzlich $a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n\in\mathbb{R}$. Man folgere mithilfe der Youngschen Ungleichung, die Hölder-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n |a_ib_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$ 2

Motivation: Auf den ersten Blick mag diese Aufgabe wenig mit unseren aktuellen Themen zu tun haben. Bei etwas genauerer Betrachtung entdecken wir aber auf der rechten Seite die p- bzw. q-Norm im $\mathbb{R}^n$, wo wir dann $a=(a_1,\ldots,a_n)^T,\ b=(b_1,\ldots,b_n)^T\in\mathbb{R}^n$ schreiben. Der Ausdruck auf der linken Seite ähnelt bis auf die Betragsstriche dem euklidischen Skalarprodukt oder wir identifizieren ihn als Summennorm eines Vektors $c\in\mathbb{R}$, der definiert ist durch $c_i=a_i\cdot b_i,\ i=1,\ldots,n$. Und tatsächlich erhalten wir für $p=q=2$ die diskrete Variante der uns bereits bekannten Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Skalarprodukte und Normen.

Außerdem ist der zu führende Beweis der Prototyp für den Beweis der Hölder-Ungleichung

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p\cdot\|g\|_q,$$

wobei $f\in\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu),\ g\in\mathcal{L}^q(X,\mathcal{A},\mu)$ ist, wobei wiederum $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein sog. Maßraum ist und $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)$ der Raum der p-fach Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist. Keine Sorge, Ihr müsst noch nicht wissen, was Maßräume und das Lebesgue-Integral sind, dies wird Euch erst nächstes Semester begegnen, aber nun wisst Ihr zumindest wofür man die Hölder-Ungleichung denn braucht ;)

Die Hölder-Ungleichung ist wiederum die Grundlage für die Minkowski-Ungleichung

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p+\|g\|_p,$$

die zeigt, dass die L^p-Normen die Dreiecksungleichung erfüllen und somit tatsächlich Normen sind.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir zeigen zunächst für $a, b \geq 0$ die Ungleichung

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ohne Einschränkungen seien dazu $a, b > 0$, da bei $a = 0$ oder $b = 0$ folgt sofort

$$0 \leq \frac{a^p}{q} \text{ oder } 0 \leq \frac{b^q}{q} \text{ bzw. } 0 \leq 0$$ $\boxed{0.5}$

wobei $\frac{a^p}{p}, \frac{b^q}{q} > 0$, für $a, b > 0$. Wegen

$$\frac{d^2}{dx^2} e^x = e^x > 0$$

ist die Exponentialfunktion (strikt) konvex. Da für $p, q > 1$ des Weiteren $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \in (0, 1)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt, folgt damit

$$\begin{aligned} ab &= e^{\ln(a)} \cdot e^{\ln(b)} = e^{\frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q)} \\ &\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{p} e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(b^q)} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \end{aligned}$$ $\boxed{1}$

wobei wir

$$\ln(a) = \frac{1}{p} \cdot p \cdot \ln(a) \overset{\text{Log.gesetze}}{=} \frac{1}{p} \cdot \ln(a^p)$$ $\boxed{0.5}$

genutzt haben.
Zu $(*)$: Hier nutzen wir die Konvexität der Exponentialfunktion mit $\lambda = \frac{1}{p}$. Denn es ist

$$(1 - \lambda) = (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}) = \frac{1}{q}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} e^{\lambda \overbrace{\ln(a^p)}^{x} + (1-\lambda) \overbrace{\ln(b^q)}^{y}} &\leq \lambda e^{\ln(a^p)} + (1 - \lambda) e^{\ln(b^q)} \\ &= \frac{1}{p} e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\ln(b^q)} \end{aligned}$$ $\boxed{1}$

(b) Kommen wir nun zu der eigentlichen Behauptung: Ohne Einschränkungen seien $\|a\|_p, \|b\|_q > 0$. Dann folgt mit der obigen Ungleichung

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|}{\|a\|_p} \cdot \frac{|b_i|}{\|b\|_q} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^p}{\|a\|_p^p p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i|^q}{\|b\|_q^q q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \Rightarrow &\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_q \end{aligned}$$ $\boxed{2}$

und damit die Behauptung.

Aufgabe 3.4 (6 Punkte): Voraussetzungen des Satzes von Heine und Borel

Im Banachraum $\mathcal{C}([0,1])$ aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, sei

$$B_1 := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$$

die abgeschlossene Einheitskugel. Um sie von der offenen Kugel zu unterscheiden, nutzen wir hier B statt K als Bezeichnung.

(a) Man konstruiere eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \in B_1$ mit $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$f_n(x)f_m(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1],\ \forall n \neq m.$$ 3

(b) Man zeige, dass eine solche Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine bzgl. der Sumpremumsnorm konvergente Teilfolge besitzt. 3

Bemerkung: Aufgabenteil (b) kann mithilfe der beschriebenen Eigenschaften auch gelöst werden, ohne dass man eine konkrete Folge in (a) konstruiert hat.

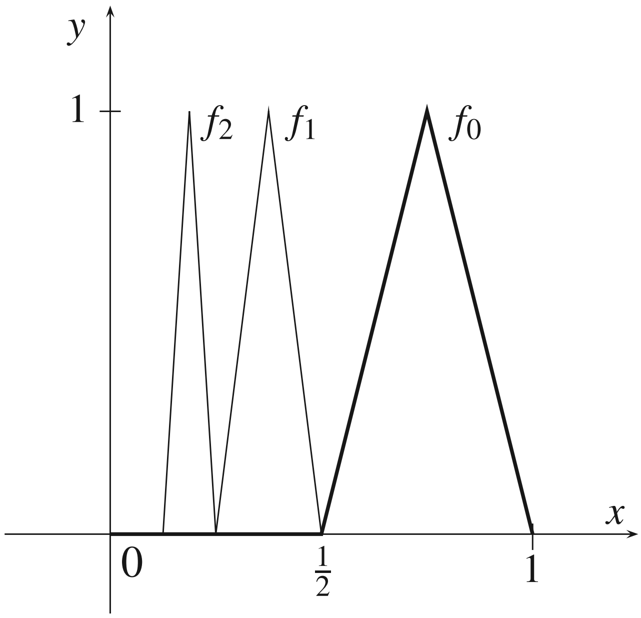
Motivation: Damit ist gezeigt, dass B_1 nicht kompakt ist, obwohl B_1 abgeschlossen und beschränkt ist. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Heine und Borel (Satz 2.2.5 aus der Vorlesung)? Nach dem Beweis zu dem Satz findet Ihr eine Bemerkung, dass der Satz von Heine und Borel nur für endlich-dimensionale Vektorräume gilt. Allerdings ist $\mathcal{C}([0,1])$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, wie bereits in einem Video zu offenen Fragen kurz erwähnt. Mit der Aufgabe soll also nochmal die Bedeutung der Voraussetzung der endlichen Dimension betont werden.

Lösungsvorschlag:

(a) Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Funktion:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 4x-2, & \text{falls } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}, \\ -4x+4, & \text{falls } \frac{3}{4} \leq x < 1, \\ 0 & \text{falls } x \geq 1. \end{cases}$$ 2

Für $n \geq 0$ setzen wir $f_n(x) := f(2^n x)$, $0 \leq x < 1$, siehe Abblidung. Offenbar gilt$\|f_n\| = 1$ für alle $n \geq 0$. Da die Funktion f_n nur im offenen Intervall $(2^{-n-1}, 2^{-n})$ von 0 verschiedene Werte annimmt, folgt $f_n f_m = 0$ für alle $n \neq m$. 1



(b) Behauptung: Ist $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, eine beliebige Folge von Funktionen mit den Eigenschaften in a), so folgt

$$\|f_n - f_m\| \geq 1 \text{ für alle } n \neq m.$$ $\boxed{1}$

Da f_n stetig und $[0,1]$ kompakt ist, nimmt f_n das Maximum seines Betrages an, es gibt also einen Punkt $a \in [0,1]$ mit $|f_n(a)| = \|f_n\| = 1$. Aus $f_n f_m = 0$ folgt nun $f_m(a) = 0$, also

$$\|f_n - f_m\| \geq |f_n(a) - f_m(a)| = 1.$$ $\boxed{1}$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Daraus folgt aber, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ besitzen kann, denn eine solche Teilfolge wäre eine Cauchyfolge und die Normen $\|f_{n_i} - f_{n_j}\|$ müssten für $i, j \to \infty$ beliebig klein werden, was hier nicht der Fall ist. $\boxed{1}$

Zusatzinfo: Insgesamt haben wir also bewiesen, dass es in der abgeschlossenen Einheitskugel $K(1)$ des normierten Vektorraums $C([0,1])$ eine Folge gibt, die keine konvergente Teilfolge besitzt. Nach Bolzano-Weierstraß ist $K(1)$ also nicht kompakt.