

Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 1

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 19. - 23. April 2021
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. Verständnisfragen

- Nennen und erklären Sie wenigstens zwei physikalische Beobachtungen, die mit der klassischen Physik nicht erklärbar sind und Konzepte der Quantenmechanik benötigen.
- Beschreiben Sie das Stern-Gerlach-Experiment. Was erwarten Sie klassisch? Was ist die tatsächliche Beobachtung? Was passiert, wenn Sie die Atome durch mehrere Stern-Gerlach-Apparaturen schicken?
- Erläutern Sie den Fotoeffekt. Wodurch steht die Beobachtung im Gegensatz zur klassischen Elektrodynamik?

2. Eigenschaften von hermiteschen 2×2 -Matrizen

Eine komplexe Matrix heißt hermitesch, wenn sie gleich ihrer adjungierten Matrix ist. Die adjungierte Matrix erhält man, indem man die ursprüngliche Matrix erst transponiert, also Zeilen und Spalten vertauscht, und dann komplex konjugiert. Hermitesche Matrizen sind für die mathematische Beschreibung der Quantenmechanik äußerst wichtig.

- Welche Bedingungsgleichung können Sie für eine hermitesche 2×2 -Matrix aufstellen?
- Drücken Sie die Eigenwerte einer hermiteschen 2×2 -Matrix mit Hilfe ihrer Determinante und ihrer Spur aus. Warum sind die Eigenwerte immer reell?

Wenn wir später über den Spin eines Teilchens sprechen, werden wir Gebrauch von den Pauli-Matrizen machen. Diese sind folgendermaßen definiert:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Pauli-Matrizen haben Sie bereits in Ihrer Vorlesung Theoretischen Physik 1 in den Übungen kennengelernt.

- Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen
 - hermitesch sind.
 - selbst-invers sind.
 - Elemente der unitären Gruppe $U(2)$, aber nicht der speziellen unitären Gruppe $SU(2)$ sind.
 - die Relation $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \sigma_0 + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$ erfüllen. Hier ist δ_{ij} das Kronecker-Symbol, σ_0 die Einheitsmatrix und ϵ_{ijk} das Levi-Civita-Symbol.

Angelehnt an die euklidische Norm lässt sich eine Matrixnorm gemäß

$$\langle A, B \rangle = \text{Sp}(A^\dagger B)$$

definieren. Dies ist die *Frobeniusnorm* und definiert ein Skalarprodukt für Matrizen.

d) Zeigen Sie, dass eine hermitesche 2×2 -Matrix M eindeutig als

$$M = \sum_{i=0}^3 a_i \sigma_i$$

geschrieben werden kann und somit die σ_i eine Basis bilden. Ist diese Basis orthogonal?

3. Fourier-Transformation

Sie haben bereits vollständige und orthogonale Funktionensysteme kennengelernt, die es ermöglichen, Funktionen als Vektoren aus einem Funktionenraum durch eine Basis darzustellen. Ein in der Physik besonders nützliches System orthogonaler Funktionen ist durch ebene Wellen gegeben, da diese Eigenfunktionen des Laplace-Operators $\Delta = \vec{\nabla}^2$ in kartesischen Koordinaten sind. Die Darstellung wird durch die Fourier-Transformation erreicht. Durch

$$\begin{aligned}\mathcal{FT}[f(x)] &= \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \exp(-ikx) \\ \mathcal{FT}^{-1}[\tilde{f}(k)] &= f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) \exp(ikx)\end{aligned}$$

sind die Transformation und die Rücktransformation gegeben. Bei dieser Definition wurde der Faktor 2π symmetrisch auf Hin- und Rücktransformation aufgeteilt.

a) Berechnen Sie die Fourier-Transformation der Dirac-Delta-Distribution $\delta_D(x - x_0)$. Wie lautet die Transformation für $x_0 = 0$?

b) Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformation einer reellen Funktion $f(x) \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k),$$

wobei $\tilde{f}^*(k)$ die komplexe Konjugation von $\tilde{f}(k)$ bedeutet.

c) Zeigen Sie, dass die folgende Relation gilt (*Plancherels Theorem*):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2$$

d) Zeigen Sie, dass das Faltungstheorem* gilt:

$$\mathcal{FT}[f * g] = \tilde{f}(k) \cdot \tilde{g}(k)$$

e) Berechnen Sie die Fourier-Transformation einer Gauß-Funktion

$$G(0, \sigma; x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

mit Mittelwert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma > 0$. Was fällt Ihnen auf?

Hinweis: Die Verknüpfung $$ bedeutet die Faltung zweier Funktionen. Die Faltung ist das folgende Integral:

$$[f * g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) g(x - y)$$

Die Faltung ist natürlich in beiden Funktionen symmetrisch, d.h.

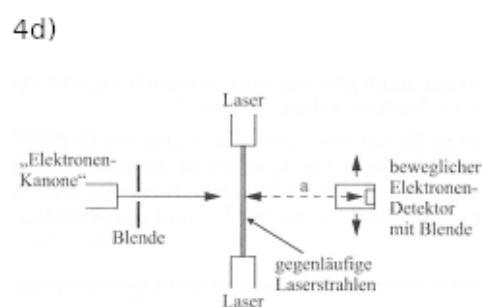
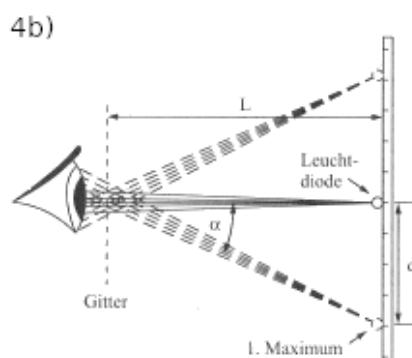
$$[f * g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(x - y) g(y)$$

4. Das Planck'sche Wirkungsquantum

In dieser Aufgabe wollen wir den numerischen Wert des Planck'schen Wirkungsquantums auf verschiedene Weise bestimmen.

- Beschreiben Sie, wie Sie mit Hilfe des Photoeffekts das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmen können. Wie können Sie vorgehen, wenn Ihnen die Austrittsarbeit des Kathodenmaterials nicht bekannt ist? Die Kathode sei aus Cäsium hergestellt mit einer Austrittsarbeit von $W_A = 1.9\text{eV}$. Sie bestrahlen die Fotozelle mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 520\text{nm}$ und bei einer Gegenspannung von $U = 0.45\text{V}$ messen Sie keinen Strom mehr. Bestimmen Sie das Planck'sche Wirkungsquantum.
- Leuchtdioden beginnen erst ab einer Schwellenspannung U_0 an, Licht zu emittieren. Die Wellenlänge λ dieser Strahlung sowie die Schwellenspannung hängen vom Diodenmaterial ab. Betrachten Sie die Zeichnung und erläutern Sie, wie aus der Anordnung zunächst die Wellenlänge und dann das Planck'sche Wirkungsquantum bestimmt werden kann. Das Gitter habe 600 Linien pro mm und Sie messen bei einer Schwellenspannung $U_0 = 2.21\text{V}$ die Abstände $d = 19\text{cm}$ und $L = 50\text{cm}$. Berechnen Sie die Wellenlänge und das Planck'sche Wirkungsquantum.
- Betrachten Sie ein mit Neon gefülltes Franck-Hertz-Rohr und eine daneben aufgestellte Vakuum-Fotozelle. Sie erhöhen die Beschleunigungsspannung am Franck-Hertz-Rohr und beobachten ab $U = 16.6\text{V}$ einen Strom in der Fotozelle, aber keine (sichtbare) Lichtemission. Wenn Sie die Spannung weiter erhöhen, beobachten Sie bei $U = 18.5\text{V}$ neben eines größeren Fotostroms auch ein rötliches Leuchten ($\lambda = 650\text{nm}$) innerhalb des Franck-Hertz-Rohrs. Erklären Sie diese Beobachtung und bestimmen Sie das Planck'sche Wirkungsquantum.
- Die Beugung von Elektronen an einem Lichtgitter, das durch gepulste Laser erzeugt wird, gelang zum ersten Mal 2001. Im gezeigten Versuchsaufbau wird das Lichtgitter durch zwei sich überlagernde, gegenläufige Laserstrahlen realisiert. Die genutzten Laser haben eine Wellenlänge von $\lambda = 532\text{nm}$. Die 'Elektronenkanone' schießt einen Elektronenstrahl mit kinetischer Energie $E_{\text{kin}} = 380\text{eV}$ senkrecht auf das Lichtgitter. Das erste Maximum hat einen Abstand von $d = 55\mu\text{m}$ vom nullten Maximum im beobachteten Interferenzmuster. Der Abstand vom Gitter zum Detektor ist $a = 24\text{cm}$. Überlegen Sie sich, welche Gitterkonstante das Lichtgitter hat, und berechnen Sie das Planck'sche Wirkungsquantum.

Hinweis: Zur Bestimmung der Gitterkonstante denken Sie an stehende Wellen.



Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 1: Lösung

1. Verständnisfragen

- a) Hier gibt es natürlich mehr als zwei mögliche Antworten:
- Stern-Gerlach-Experiment: Erklärung in Aufgabenteil b)
 - Fotoeffekt und damit einhergehende Lichtquantenhypothese: Erklärung in Aufgabenteil c)
 - Stabilität von Atomen: Der Rutherford'sche Streuversuch lag ein Atommodell nahe, bei dem Elektronen um einen kompakten, positiv geladenen Kern kreisen. Nach den Gesetzen der Elektrodynamik müssen die beschleunigten Elektronen Strahlung abgeben, somit Energie verlieren und daher in kurzer Zeit in den Kern stürzen.
 - Spektrallinien: Atome können nur bestimmte Energien aufnehmen bzw. abgeben. Zwar hat schon Joseph von Fraunhofer (1787-1826) bereits die Absorptionslinien verschiedener Elemente im Sonnenlicht beobachtet, jedoch kam die Deutung und Erklärung dafür erst viel später.
 - Hohlraumstrahlung: Man beobachtet eine Temperaturabhängigkeit sowohl der Intensität aber auch der Frequenz der Hohlraumstrahlung. Nimmt man den Gleichverteilungssatz an, so bekommt jede Schwingungsmode dieselbe Energie $k_B T$ unabhängig von der Frequenz. Daraus ergibt sich die spektrale Energiedichte

$$\rho_R(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T.$$

Dies ist die Rayleigh-Jeans-Formel, die für kleine Frequenzen eine gute Näherung ist. Allerdings divergiert mit dieser Formel die Energiedichte der Strahlung. Dies ist eine falsche Vorhersage der klassischen Physik.

Nimmt man an, dass zwischen der Boltzmann-Verteilung und dem gesuchten Strahlungsgesetz ein Zusammenhang besteht, findet man das Wien'sche Strahlungsgesetz:

$$\rho_W(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}.$$

Bei großen Frequenzen funktioniert dieses Strahlungsgesetz sehr gut, allerdings ist seine theoretische Begründung bestenfalls unbefriedigend.

Erst durch die Annahme, dass der Energieaustausch zwischen den Atomen in der Umrandung des Hohlraums und dem Strahlungsfeld nicht kontinuierlich, sondern gequantelt passiert, konnte Max Planck (1900) das korrekte Strahlungsgesetz herleiten.

- vi. Compton-Effekt: Monochromatisches Röntgenlicht wird an Materie gestreut. Man beobachtet mit zunehmendem Streuwinkel eine zunehmende Wellenlänge der gestreuten Strahlung. Dies ist mit dem klassischen Bild der elektromagnetischen Welle nicht verträglich, da die Elektronen mit derselben Frequenz schwingen würden wie die einfallende Welle und daher Strahlung mit derselben Frequenz ausstrahlen. Die Lösung liegt im Teilchenbild, in dem die größere Wellenlänge einem Energieverlust entspricht. Die verlorene Energie wird dem Rückstoßelektron übergeben.

- vii. Materiewellen: In der Optik kann unter bestimmten Bedingungen Lichtausbreitung durch Strahlen oder durch Wellen nach dem Huygens'schen Prinzip beschrieben werden. Strahlenoptik funktioniert solange die Wellenlänge des Lichts deutlich kleiner ist als die Größe des Objekts, an dem das Licht gestreut wird. Ansonsten treten Beugungs- und Interferenzerscheinungen auf, die durch den Wellencharakter von Licht erfasst werden. Motiviert durch diese Probleme in der Optik stellte sich Louis de Broglie (1892-1987) die Frage, ob auch Materie bei genügend kleinen Längenskalen eine Wellennatur besitzt. Streuung und Interferenz von einem Elektronenstrahl an einem Lichtgitter wird in Aufgabe 4d) betrachtet.
- viii. Franck-Hertz-Versuch: Dieser Versuch wurde 1914 durchgeführt und ist einer der ersten Belege für diskrete Energieniveaus von Atome. Elektronen werden in einem elektrischen Feld beschleunigt, welches mit einem Gas gefüllt ist. Nur bei bestimmten Beschleunigungsspannungen, d.h. diskreten Energien, wird Energie von den Elektronen auf das Gas übertragen. Die Beobachtung zeigt dann einen verschwindenden Strom im Gegenfeld (hinter dem Beschleunigungsfeld) und eine leuchtende Schicht in dem Gas.
- b) Im Stern-Gerlach-Experiment wird ein Strahl aus Silberatomen durch ein inhomogenes Magnetfeld gesendet. Aufgrund des Bahndrehimpulses der Elektronenkonfiguration haben die Atome ein magnetisches Moment, sodass der Strahl im inhomogenen Magnetfeld abgelenkt wird. Klassisch erwartet man eine kontinuierliche Verbreiterung des Strahls, da man eine statistische Verteilung der Drehimpulse erwartet. Stattdessen beobachtet man eine Aufspaltung des Strahls in zwei Teilstrahlen. Also sind nur zwei Richtungen für den Drehimpuls bzw. das magnetische Moment der Atome möglich.
- Für mehrere aufeinander folgende Stern-Gerlach-Apparaturen findet man folgende Beobachtung: Nehmen wir an, dass der Strahl in x -Richtung propagiert und das Magnetfeld in z -Richtung weist. Nach dieser Apparatur schicken wir einen der Teilstrahlen durch ein weiteres inhomogenes Magnetfeld, das in z -Richtung ausgerichtet ist. Dann wird der Teilstrahl nicht noch einmal aufgespalten und weiter in z -Richtung abgelenkt. Richtet man das zweite Magnetfeld aber in y -Richtung aus, beobachtet man eine erneute Aufspaltung des Strahls. Das bedeutet, dass die Messung des magnetische Moments in z -Richtung nicht das magnetische Moment in y -Richtung festlegt. Schickt man einen der Strahlen wieder durch ein inhomogenes Magnetfeld in z -Richtung, beobachtet man eine weitere Aufspaltung. Also geht durch die Messung des magnetischen Moments in y -Richtung jegliche Kenntnis über das magnetische Moment in z -Richtung verloren.
- c) Beim Fotoeffekt werden Elektronen durch Wechselwirkung mit einem Strahlungsfeld aus einer Kathode gelöst. Falls die Strahlung genügend Energie hat, dann wird die Austrittsarbeit des Kathodenmaterials von der Strahlung geleistet und die restliche Energie in Form von kinetischer Energie an das Elektron abgegeben. In der klassischen Elektrodynamik propagiert Strahlung als Welle. Diese Wellen würden zu einer Oszillation der Elektronen führen. Klassisch erwartet man, dass eine hohe Intensität des Lichts zum Herauslösen von Elektronen und damit zu einem Fotostrom führt. Allerdings beobachtet man bei Erhöhung der Intensität keinen Fotostrom. Ein Fotostrom und damit das Herauslösen von Elektronen tritt nur auf, wenn die Wellenlänge und damit die Energie des Lichts ausreicht. Dies ist nur möglich, wenn Licht auch Teilcheneigenschaften besitzen kann.

2. Eigenschaften von hermiteschen 2×2 -Matrizen

- a) Betrachten wir eine beliebige 2×2 -Matrix und ihre Adjungierte:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}.$$

Da M hermitesch sein soll, gilt $M = M^\dagger$. Also muss gelten: $a, d \in \mathbb{R}$ und $b = c^*$. Also kann jede hermitesche 2×2 -Matrix als

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & d \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, d \in \mathbb{R} \text{ und } b \in \mathbb{C}$$

geschrieben werden.

b) Die Eigenwertgleichung lautet

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M - \lambda \mathbb{1}_2) \\ &= \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - b^*b \\ &= \lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp} M + \det M \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{\operatorname{Sp} M}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Sp} M}{2}\right)^2 - \det M}. \end{aligned}$$

Da die Spur reell ist, muss die Wurzel auch reell sein, damit die Eigenwerte reell sind. Das lässt sich leicht überprüfen:

$$\left(\frac{\operatorname{Sp} M}{2}\right)^2 - \det M = \frac{a^2 + d^2 + 2ad}{4} - ad + |b|^2 = \frac{(a - d)^2}{4} + |b|^2 \geq 0$$

Damit müssen die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ reell sein.

c) Die Eigenschaften der Pauli-Matrizen sind schnell gezeigt.

- i. Die Hermitizität lässt sich durch direktes Aufschreiben oder das Ergebnis aus a) überprüfen.
- ii. Selbstinvers bedeutet, dass $\sigma_i^2 = \mathbb{1}_2$ gilt.

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0 \quad \checkmark \\ \sigma_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0 \quad \checkmark \\ \sigma_3^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

- iii. Elemente der unitären Gruppe $U(2)$ erhalten das komplexe Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x^* y$. Es wurde in der PTP1 gezeigt, dass dies diejenigen komplexen Matrizen M sind, deren Adjungierte gleich der Inversen, also $M^\dagger = M^{-1}$, sind. Mit den Eigenschaften i. und ii. wurde also schon gezeigt, dass die Pauli-Matrizen Elemente der unitären Gruppe sind.

Die spezielle unitäre Gruppe $SU(2)$ ist eine Untergruppe der $U(2)$ mit positiver Determinante. Kurzes Ausrechnen der Determinanten der drei Pauli-Matrizen ergibt:

$$\det \sigma_i = -1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

iv. Die Relation wurde für $i = j$ bereits mit Eigenschaft ii. gezeigt. Für $i \neq j$ betrachten wir:

$$\begin{aligned}\sigma_1 \sigma_2 &= i \varepsilon_{123} \sigma_3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} &= i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \checkmark\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 \sigma_3 &= i \varepsilon_{231} \sigma_1 \\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_3 \sigma_1 &= i \varepsilon_{312} \sigma_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_2 \sigma_1 &= i \varepsilon_{213} \sigma_3 \\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \checkmark\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 \sigma_3 &= i \varepsilon_{132} \sigma_2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_3 \sigma_2 &= i \varepsilon_{321} \sigma_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} &= -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark\end{aligned}$$

d) Abweichend von der Aufgabenstellung benennen wir die Koeffizienten in der Summe α_μ und nummerieren mit dem Index $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Dann lautet die gegebene Relation:

$$M = \sum_{\mu=0}^3 \alpha_\mu \sigma_\mu = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 + \alpha_3 & \alpha_1 - i\alpha_2 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_0 - \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Mit unserer Benennung der Matrixeinträge aus Aufgabenteil a) erhalten wir zunächst

$$a = \alpha_0 + \alpha_3, \quad b = \alpha_1 - i\alpha_2, \quad b^* = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad d = \alpha_0 - \alpha_3$$

Daraus ergibt sich für die Koeffizienten

$$\alpha_0 = \frac{a+d}{2}, \quad \alpha_1 = \operatorname{Re}(b), \quad \alpha_2 = -\operatorname{Im}(b), \quad \alpha_3 = \frac{a-d}{2}.$$

Damit sind alle Koeffizienten reell und die Pauli-Matrizen bilden zusammen mit der Einheitsmatrix eine Basis.

Die Orthogonalität lässt sich mit der Frobenius-Norm überprüfen. Es muss gelten

$$\langle \sigma_\mu, \sigma_\nu \rangle = \operatorname{Sp}(\sigma_\mu^\dagger \sigma_\nu) \begin{cases} \neq 0 & \text{für } \mu = \nu, \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier gilt für die Indizes $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Auch hier haben wir den Fall $\mu = \nu$ bereits in Aufgabenteil c)ii. überprüft und für die Einheitsmatrix σ_0 ist dies offensichtlich. Für $\mu = 0$ und $\nu = i \in \{1, 2, 3\}$ ergibt sich

$$\operatorname{Sp}(\sigma_0^\dagger \sigma_i) = \operatorname{Sp}(\sigma_i) = 0,$$

sowie für $\mu, \nu \in \{1, 2, 3\}$ mit $\mu \neq \nu$ und Relation c)iv.

$$\operatorname{Sp}(\sigma_\mu^\dagger \sigma_\nu) = \operatorname{Sp}(i\epsilon_{ijk}\sigma_k) = i\epsilon_{ijk}\operatorname{Sp}(\sigma_k) = 0,$$

da die Spur aller Pauli-Matrizen exakt Null ist. Also ist die Basis $1_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ orthogonal.

3. Fourier-Transformation

a) Wir setzen die Dirac-Delta-Distribution in die erste Transformationsgleichung ein:

$$\mathcal{FT}[\delta_D(x - x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_D(x - x_0) \exp(-ikx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}.$$

Zusammen mit der Rücktransformation folgt eine Darstellung der Dirac-Delta-Distribution durch

$$\delta_D(x - x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x_0)}.$$

Diese Relation werden wir später nutzen. Falls $x_0 = 0$ gilt, dann ist dies eine Konstante

$$\mathcal{FT}[\delta_D(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

b) Für $f(x) \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{f}^*(k) &= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \exp(-ikx) \right]^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) \exp(+ikx) \\ &\stackrel{\boxed{f \text{ reell}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \exp(-i(-k)x) = \tilde{f}(-k) \end{aligned}$$

c) Plancherel's Theorem

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx |f(x)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) f^*(x) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) e^{ikx} \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k') e^{ik'x} \right]^* \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{f}^*(k') e^{i(k-k')x} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{f}(k) \tilde{f}^*(k') \delta_D(k - k') \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) \tilde{f}^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2
 \end{aligned}$$

d) Faltungstheorem

$$\begin{aligned}
 [f * g](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} f(y) g(x-y) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) e^{iky} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{\sqrt{2\pi}} \tilde{g}(k') e^{ik'(x-y)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{f}(k) \tilde{g}(k') e^{ik'x} \delta_D(k - k') \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{f}(k) \tilde{g}(k) e^{ikx} = \mathcal{FT}^{-1}[\tilde{f}(k) \cdot \tilde{g}(k)]
 \end{aligned}$$

e) Die Fouriertransformation der Gauß-Funktion mit Mittelwert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma > 0$ berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{FT}[G(0, \sigma; x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - ikx} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x+i\sigma^2 k)^2}{2\sigma^2} - \frac{\sigma^2 k^2}{2}} \\
 &= \frac{e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+i\sigma^2 k)^2}{2\sigma^2}}
 \end{aligned}$$

Hier wurde in der zweiten Zeile der Exponent durch eine quadratische Ergänzung umgeschrieben. Das Integral in der letzten Zeile muss durch ein Integral über eine geschlossene Kurve in der komplexen Ebene gelöst werden. Hier benutzen wir, dass die Funktion

$$f(z) = e^{-\frac{(x+i\sigma^2 k)^2}{2\sigma^2}}$$

holomorph ist und deshalb der Cauchy'sche Integralsatz

$$\int_C f(z) dz = 0$$

gilt. Hier ist C eine geschlossene Kurve in der komplexen Ebene. Wir integrieren entlang folgender Kurve $C = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ mit den Stücken

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \{z \in \mathbb{C} | -b \leq \operatorname{Re}(z) \leq a; \operatorname{Im}(z) = 0\} \\
 L_2 &= \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) = a; 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \sigma^2 k\} \\
 L_3 &= \{z \in \mathbb{C} | -b \leq \operatorname{Re}(z) \leq a; \operatorname{Im}(z) = \sigma^2 k\} \\
 L_4 &= \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) = -b; 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \sigma^2 k\}
 \end{aligned}$$

Wir werten die Integrale entlang dieser Wege aus und bilden dann die Grenzwerte für $a, b \rightarrow \infty$. So finden wir für die Wege L_1 und L_3

$$\begin{aligned}\int_{L_1} dz f(z) &= \int_{-b}^a dz e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \\ \int_{L_3} dz f(z) &= \int_a^{-b} dz e^{-\frac{(z+i\sigma^2 k)^2}{2\sigma^2}},\end{aligned}$$

wobei das letzte Integral exakt das ist, welches wir lösen wollen. Für das Integral entlang L_2 benutzen wir die *ML*-Ungleichung. Diese besagt

$$|f(z)| \leq M \Rightarrow \left| \int_{\gamma} dz f(z) \right| \leq ML(\gamma),$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge der Kontur γ ist. Wir parametrisieren den Weg L_2 mit $0 \leq t \leq 1$, sodass

$$f(z) = e^{-\frac{(a+i\sigma^2 kt)^2}{2\sigma^2}} = e^{-\frac{a^2 - \sigma^4 k^2 t^2}{2\sigma^2} + 2ia\sigma^2 kt} \Rightarrow |f(z)| = e^{-\frac{a^2 - \sigma^4 k^2 t^2}{2\sigma^2}} \leq e^{-\frac{a^2 - \sigma^4 k^2}{2\sigma^2}}.$$

Mit der *ML*-Ungleichung finden wir

$$\left| \int_{L_2} dz f(z) \right| \leq \sigma^2 k e^{-\frac{a^2 - \sigma^4 k^2}{2\sigma^2}}.$$

Im Limes $a \rightarrow \infty$ verschwindet die rechte Seite. Dasselbe Argument können wir für den Weg L_4 wiederholen.

Zusammenfassend finden wir

$$\begin{aligned}\int_C dz f(z) &= \int_{L_1} dz f(z) + \int_{L_2} dz f(z) + \int_{L_3} dz f(z) + \int_{L_4} dz f(z) = 0 \\ \int_{-b}^a dz e^{-\frac{(x+i\sigma^2 k)^2}{2\sigma^2}} &= \int_{-b}^a dz e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} + \int_{L_2} dz f(z) + \int_{L_3} dz f(z)\end{aligned}$$

Und damit für den Grenzwert

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^a dx e^{-\frac{(x+i\sigma^2 k)^2}{2\sigma^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} = \sqrt{2\pi}\sigma,$$

, wobei wir auf der rechten Seite benutzt haben, dass der Grenzwert der Summe derselbe wie die Summe der Grenzwerte ist, da die Grenzwerte existieren.

Also ist die Fourier-Transformation der Gauß-Funktion mit Mittelwert $\mu = 0$ und Varianz $\sigma > 0$

$$\mathcal{FT}[G(0, \sigma; x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}} = \sigma^{-1} G(0, \sigma^{-1}; k)$$

wieder eine Gauß-Funktion mit Mittelwert $\mu = 0$ aber Varianz $\sigma^{-1} > 0$. Aus einer breiten Gauß-Funktion mit Breite σ wird also eine schmale Gauß-Funktion mit Breite σ^{-1} .

4. Planck'sches Wirkungsquantum

- a) In einer Fotozelle werden Elektronen durch Photonen aus dem Kathodenmaterial herausgelöst. Dadurch entsteht ein messbarer Strom. Durch Anlegen einer Gegenspannung U_g können die Elektronen die Anode nicht mehr Erreichen und es fließt kein Strom. Für die Energie der Photonen gilt

$$h\nu = eU_g + W_A,$$

wobei $E_{\text{kin}} = eU_g$ die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen und W_A die Austrittsarbeit ist. Bei bekannter Frequenz ν der Photonen und Austrittsarbeit kann das Planck'sche Wirkungsquantum h bestimmt werden. Falls die Austrittsarbeit nicht bekannt ist, kann der Versuch mit Licht einer anderen Frequenz ν' wiederholt werden, sodass W_A aus der Gleichung eliminiert werden kann.

Mit den gegebenen Werten finden wir

$$h = \frac{eU_g + W_A}{\nu} = \frac{\lambda(eU_g + W_A)}{c} \simeq \frac{5.2 \cdot 10^{-7} \text{m} \cdot (0.45 + 1.9) \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{J}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \simeq 6.52 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$$

- b) Durch das Gitter im Abstand L von der Diode lässt sich im Auge ein Interferenzbild sehen, welches auf die Skala bei der Diode abgebildet werden kann. Die Wellenlänge λ ergibt sich aus dem Abstand d zwischen der Diode und dem 1. Maximum. Das Planck'sche Wirkungsquantum kann nach Bestimmung der Wellenlänge λ zusammen mit der Schwellenspannung U_0 berechnet werden aus

$$h \frac{c}{\lambda} = eU_0.$$

Mit der Gitterkonstanten $b = \frac{1}{600} \text{mm}$ und den gegebenen Werten ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda &= b \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \arctan \frac{d}{L} \simeq 592 \text{nm} \\ h &= \frac{\lambda eU_0}{c} = \frac{5.92 \cdot 10^{-7} \text{m} \cdot 2.21 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{J}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \simeq 6.98 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

- c) Die Spannung von $U = 16.6 \text{V}$ entspricht der ersten Anregungsenergie von Neon und das emittierte Licht liegt im Ultraviolett. Bei der höheren Spannung von $U = 18.5 \text{V}$ wird das Neon auf den nächst-höheren Energiezustand angeregt. Das rötliche Licht mit Wellenlänge $\lambda = 650 \text{nm}$ entspricht dem Übergang von diesem Energiezustand zum ersten Anregungszustand und hat eine Energie von $\Delta E = (18.5 - 16.6) \text{eV} = 1.9 \text{eV}$. Daraus ergibt sich für das Planck'sche Wirkungsquantum

$$h = \frac{\lambda \Delta E}{c} \simeq \frac{6.5 \cdot 10^{-7} \text{m} \cdot 1.9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{J}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \simeq 6.59 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$$

- d) Die Laserstrahlen bilden zusammen eine stehende Welle. Diese stehende Welle ergibt das Lichtgitter, sodass der Knotenabstand die Gitterkonstante b ergibt.

$$b = \frac{\lambda}{2} = 266 \text{nm}$$

Aus der Position des ersten Maximums kann die deBroglie-Wellenlänge der Elektronen bestimmt werden:

$$\lambda_B = b \cdot \sin \alpha \simeq b \cdot \tan \alpha = \frac{bd}{a} \simeq \frac{266 \cdot 10^{-9} \text{m} \cdot 55 \cdot 10^{-6} \text{m}}{24 \cdot 10^{-2} \text{m}} \simeq 60.96 \text{pm}.$$

Die Energie der Elektronen ist so gering, dass eine relativistische Rechnung nicht notwendig ist. Dann ergibt sich für den Impuls

$$p = \sqrt{2 \cdot m_e \cdot E} \simeq \sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{kg} \cdot 380 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{J}} \simeq 1.052 \cdot 10^{-23} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Die deBroglie-Wellenlänge ist gegeben durch die Relation $\lambda_B = h/p$ und somit ist das Planck'sche Wirkungsquantum

$$h = \lambda_B \cdot p \simeq 60.96 \cdot 10^{-12} \text{m} \cdot 1.052 \cdot 10^{-23} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \simeq 6.41 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}.$$