Aufgabe 35

(a) Wir stellen im Folgenden $\wp(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)$ durch (α, β) dar. Für $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ gilt

$$M\langle\tau\rangle = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}.$$

Die Wirkung von M auf das Gitter ist also gegeben durch $\omega_1 \mapsto a\omega_1 + b\omega_2$ und $\omega_2 \mapsto c\omega_1 + d\omega_2$. Insbesondere erhalten wir

$$\alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \mapsto \alpha(a\omega_1 + b\omega_2) + \beta(c\omega_1 + d\omega_2) = (a\alpha + c\beta)\omega_1 + (b\alpha + d\beta)\omega_2.$$

Es gilt daher $\phi(M)(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta) \cdot M$. Aufgrund der Periodizität von $\wp$ ist

$$(\alpha, \beta) \sim (a + \alpha, b + \beta) \qquad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
\phi(T)e_1 &= (1/2, 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1/2, 1/2) && = e_3 \\
\phi(T)e_2 &= (0, 1/2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 1/2) && = e_2 \\
\phi(T)e_3 &= (1/2, 1/2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1/2, 1) \overset{\text{mod Gitter}}{\equiv} (1/2, 0) && = e_1 \\
\phi(S)e_1 &= (1/2, 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 1/2) && = e_2 \\
\phi(S)e_2 &= (0, 1/2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1/2, 0) \overset{\text{mod Gitter}}{\equiv} (1/2, 0) && = e_1 \\
\phi(S)e_3 &= (1/2, 1/2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-1/2, 1/2) \overset{\text{mod Gitter}}{\equiv} (1/2, 1/2) && = e_3
\end{aligned}$$

Also gilt $\phi(T) = (13)$ und $\phi(S) = (12)$ (Permutationen können auf kanonische Weise als Element von $\mathrm{Bij}(\{e_1, e_2, e_3\})$ aufgefasst werden).

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
(132) &= (12)(13) = \phi(S)\phi(T) = \phi(ST) \\
(123) &= (13)(12) = \phi(T)\phi(S) = \phi(TS) \\
(23) &= (12)(123) = \phi(T)\phi(ST) = \phi(TST) \\
() &= (12)(12) = \phi(S)\phi(S) = \phi(S^2)
\end{aligned}$$

Damit sind für alle 6 Elemente von $\Gamma/\Gamma[2]$ Vertreter bestimmt.

(c) $\lambda|_0 M$ erhalten wir einfach, indem wir die e_i gemäß der von M induzierten Permutation auf $\{e_1, e_2, e_3\}$ vertauschen. Es genügt daher, wenn M das Vertretersystem durchläuft. Dann erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\lambda|_0 T &= (13)\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} = \frac{e_1-e_2}{e_3-e_2} && = \lambda^{-1} \\
\lambda|_0 S &= (12)\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} = \frac{e_3-e_1}{e_2-e_1} && = 1-\lambda \\
\lambda|_0 ST &= (132)\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} = \frac{e_2-e_1}{e_3-e_1} && = \frac{1}{1-\lambda} \\
\lambda|_0 TS &= (123)\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} = \frac{e_1-e_3}{e_2-e_3} && = 1-\lambda^{-1} \\
\lambda|_0 TST &= (23)\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} && = \frac{1}{1-\lambda^{-1}} = \frac{\lambda}{\lambda-1} \\
\lambda|_0 S^2 &= ()\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} = \frac{e_3-e_2}{e_1-e_2} && = \lambda
\end{aligned}
$$

Aufgabe 36

Alle Reihen in dieser Aufgabe sind absolut konvergent, da der Ausdruck $P(n) \cdot e^{2\pi i \tau n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ geht für ein beliebigies Polynom P, solange $\Im\tau > 0$. Das ist aber nach Voraussetzung gegeben.

(a) Wir reduzieren die Aussage für $k = 2$ mittels Äquivalenzumformungen auf die triviale Gleichung $0 = 0$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau+n)^{-2} = (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i n\tau}$$

Wegen Aufgabe 48 folgt

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)} = (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i n\tau}$$

Exponentialzerlegung des Sinus

$$
\begin{aligned}
\frac{(2\pi i)^2}{(e^{i\pi\tau}-e^{-i\pi\tau})^2} &= (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i n\tau} \\
1 &= \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i n\tau}\left[e^{2\pi i\tau}-2+e^{-2\pi i\tau}\right] \\
1 &= \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i(n+1)\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} -2n e^{2\pi i n\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i(n-1)\tau} \\
1 &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)e^{2\pi i n\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} -2n e^{2\pi i n\tau} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{2\pi i n\tau} \\
1 &= 1 - 2e^{2\pi i\tau} + 2e^{2\pi i\tau} + \sum_{n=2}^{\infty}[(n-1)-2n+(n+1)]e^{2\pi i n\tau} \\
1 &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0
\end{aligned}
$$

Die Aussage für $k \geq 3$ folgt per Induktion. Sei die Identität für festes k bewiesen. Dann gilt

$$(-1)^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau+n)^{-k} = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n\tau}$$

Ableiten ergibt

$$
\begin{aligned}
(-1)^{k+1} \cdot k \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau+n)^{-(k+1)} &= \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}(2\pi i n) e^{2\pi i n\tau} \\
(-1)^{k+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau+n)^{-(k+1)} &= \frac{(2\pi i)^{k+1}}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{2\pi i n\tau}
\end{aligned}
$$

(b) Es gilt

$$G_k(\tau) = \sum_{(c,d)\in\{0\}\times\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (c\tau+d)^{-k} + \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\times\mathbb{Z}} (c\tau+d)^{-k}$$

k gerade

$$= 2 \cdot \sum_{d=1}^{\infty} d^{-k} + \sum_{c\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \sum_{d=-\infty}^{\infty} (c\tau+d)^{-k}$$

Für negatives c substituieren wir $d = -d$, da d über ganz $\mathbb{Z}$ summiert wird. Wegen k gerade ändert sich aber der Wert der Reihe dadurch nicht. Außerdem können wir noch $(-1)^k = 1$ einfügen

$$= 2\zeta(k) + 2\sum_{c=1}^{\infty}(-1)^k \sum_{d=-\infty}^{\infty} (c\tau+d)^{-k}$$

Mit Aufgabenteil (a) folgt

$$
\begin{aligned}
&= 2\zeta(k) + 2\sum_{c=1}^{\infty} \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i n(c\tau)} \\
&= 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n,c=1}^{\infty} n^{k-1} e^{2\pi i \tau(nc)}
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun alle Summanden mit $(nc) = N$ und summieren dann über N.

$$
\begin{aligned}
&= 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{nc=N, n,c\in\mathbb{N}} n^{k-1} e^{2\pi i N\tau} \\
&= 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{n|N} n^{k-1} e^{2\pi i N\tau} \\
&= 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{N=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(N) e^{2\pi i N\tau}
\end{aligned}
$$