Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

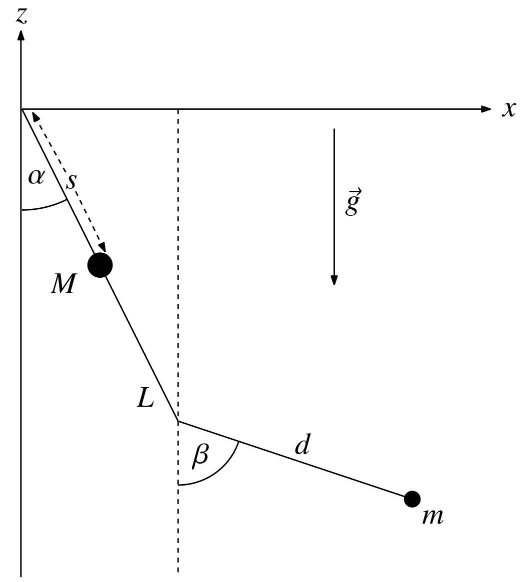
Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 3

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 11. Mai 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Doppelpendel*

An einer Pendelstange der Länge L sei ein zweites Pendel der Masse m und Länge d befestigt. Die Masse M des ersten Pendels sitze in einer festen Entfernung s vom Aufhängepunkt. Die Bewegung des so entstandenen Doppelpendels sei auf die x-z-Ebene beschränkt. Die beiden Massen seien als Punktmassen, die Verbindungsstäbe als masselos angenommen. Das Pendel sei dem als homogen anzunehmenden Gravitationsfeld der Erde mit Gravitationsbeschleunigung $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ ausgesetzt.



a) Stellen Sie die Langrange-Funktion in geeigneten generalisierten Koordinaten auf.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen aus der Langrange-Funktion her.

c) Zeigen Sie, dass es eine Lösung gibt, bei der der zeitliche Verlauf von α und β übereinstimmt. Was bedeutet die Lösung anschaulich?*

Anmerkung: Eine Glocke mit einem Klöppel ist ein System, das einem Doppelpendel entspricht. Die speziellen Lösungen des Aufgabenteils c) sind natürlich höchst unerwünscht, weil die Glocke dann nicht läutet. Bei der Neuinstallation der Glocken am Kölner Dom kam es tatsächlich bei einer der Glocken zu einer solchen Situation. Erst nach Veränderung einiger Parameter gab diese einen Ton von sich.

2. *Rutschen vom Tisch*

Ein Teil eines mechanischen Systems hänge über die Kante eines Tisches. Die Bewegung verlaufe in der Ebene senkrecht zur Tischkante, Reibungskräfte seien zu vernachlässigen. Das System bestehe aus (i) zwei Massenpunkten der Masse m, die durch einen masselosen Faden der Länge L verbunden sind; (ii) einer homogenen Kette der Masse M und Länge L.

a) Bestimmen Sie für beide Fälle die Lagrange-Funktion.

b) Leiten Sie für beide Fälle die Bewegungsgleichungen aus der Lagrange-Funktion her, und lösen Sie diese unter der Annahme, dass ein Teil des Systems anfangs mit der Länge $\ell_0 < L$ über den Tisch hängt und bei $t = 0$ plötzlich losgelassen wird.

c) Geben Sie für beide Fälle die Energie an, und zeigen Sie explizit, dass diese erhalten ist.

** Hinweis:* Benutzen Sie, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix der beiden Differentialgleichungen für den Winkel α für eine nicht-triviale Lösung verschwindet.

3. *Symmetrischer schwerer Kreisel*

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, lautet die Lagrange-Funktion eines schweren symmetrischen Kreisels mit den Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$, der Masse m und dem Abstand des Schwerpunktes vom Fixpunkt s mit den Euler'schen Winkeln ϑ, φ und ψ

$$\mathcal{L} = \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2\right) + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}\right)^2 - mgs\cos\vartheta .$$

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen.

b) Bestimmen Sie die drei Erhaltungsgrößen.

4. *Verständnisfragen*

a) Was sind verallgemeinerte Kräfte und in welchem Sinn sind sie verallgemeinert? Haben sie dieselbe Einheit wie die Kraft in der Newton'schen Formulierung der klassischen Mechanik?

b) Diskutieren Sie mit eigenen Worten die Bedeutung der Lagrange-Gleichungen zweiter Art und vergleichen Sie diese mit der Aussage des 2. Newton'schen Axioms.

c) Was ist ein verallgemeinerter Impuls?