

Analysis I
WS 19/20

Blatt 06

29.11.2019

ARSnova-Code: 67 52 65 62

Abgabe bis Fr. 06.12.19, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)

Themen:

- Konvergenz von Folgen
- Häufungspunkte
- Teilfolgen
- Limes superior, Limes inferior

Aufgabe 6.1 (9 Punkte): Konvergenz von Folgen

Untersuchen Sie nachstehende Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte:

(a) $a_n := \frac{6n^2+3n-1}{9n^2-81}, \quad n \in \mathbb{N}$

1

(b) $a_n := \frac{7^n+(-13)^n}{(-7)^n+13^n}, \quad n \in \mathbb{N}$

1

(c) $a_n := \binom{42n}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$

1

(d) $a_n := \frac{n^3}{\binom{2n}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}$

1

(e) $a_n := \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

1

(f) $a_n := \frac{\pi n + 2 \sin(n)}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

1

(g) $a_n := \sqrt[n]{x^n + y^n}, \quad x, y \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$

1

(h) $a_n := \frac{n^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$

1

(i) $a_n := \frac{n^n}{(2n)!}, \quad n \in \mathbb{N}$

1

Aufgabe 6.2 (2 Punkte): Produktfolgen

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, aber nicht notwendigerweise konvergente, Folge in \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte): Mischfolge zweier Folgen

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathbb{R} und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Mischfolge mit

$$\begin{aligned} c_{2n-1} &:= a_n, & n \in \mathbb{N}, \\ c_{2n} &:= b_n, & n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = s \in \mathbb{R}$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = s.$$

Aufgabe 6.4 (5 Punkte): Häufungspunkte, Limes superior, Limes inferior

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathbb{R} . Bestimmen Sie alle Häufungspunkte und insbesondere den Limes inferior sowie den Limes superior der Folgen

(a) $a_n := \frac{(-1)^n}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)},$ 1

(b) $b_n := \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } n \text{ durch } 10 \text{ teilbar,} \\ \frac{(-1)^n n^2 + 2}{(n+2)^2} & , \text{ sonst,} \end{cases}$ 2

(c) $c_n := \frac{(-1)^n}{2} + \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{3}$ 2