

Algebra II

Sommersemester 2021

Prof. Dr. Alexander Schmidt

Inhaltsverzeichnis

1	Ringe und Ideale	3
2	Moduln	11
3	Tensorprodukte	15
4	Exaktheit	22
5	Flachheit	25
6	Limites	28
7	Lokalisierung	36
8	Injektive und projektive Moduln	45
9	Kategorien	50
10	Abelsche Kategorien	56
11	Adjungierte Funktoren	61
12	Komplexe	63
13	Abgeleitete Funktoren	69
14	Azyklische Objekte	70
15	Universelle δ -Funktoren	71
16	Tor und Ext	73
17	Ext und Erweiterungen	77

<i>Prof. Dr. Alexander Schmidt: Algebra II</i>	2
18 Abgeleitete projektive Limites	79
19 Noethersche Moduln und Ringe	85
20 Jordan-Hölder Reihen (Wiederholung aus der LA II)	90
21 Artinsche Ringe	91

Teil 1 – Kommutative Algebra

1 Ringe und Ideale

Sei A ein kommutativer Ring (wie immer mit 1) und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Die Projektion $\phi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus. Wir erinnern an den folgenden Satz:

Satz 1.1 (Algebra I, Satz 2.5). *Die Zuordnung $\mathfrak{b} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{b})$ induziert eine inklusionserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Ideale in A/\mathfrak{a} und der Menge der Ideale in A , die \mathfrak{a} umfassen.*

Beweisskizze. Man prüft nacheinander folgendes nach:

- $\phi^{-1}(\mathfrak{b})$ ist ein Ideal in A .
- $\phi^{-1}(\mathfrak{b}) \supset \phi^{-1}(0) = \mathfrak{a}$.
- $\phi^{-1}(\mathfrak{b}_1) = \phi^{-1}(\mathfrak{b}_2) \Rightarrow \mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2$ (da ϕ surjektiv).
- Ist $\mathfrak{c} \subset A$ ein Ideal mit $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{a}$, so gilt $\phi^{-1}(\phi(\mathfrak{c})) = \mathfrak{c}$. □

Erinnerung 1.2. • $x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}}$ bedeutet $x - y \in \mathfrak{a}$.

- $x \in A$ heißt **Nullteiler**, wenn ein $y \in A$, $y \neq 0$, mit $xy = 0$ existiert.
- A heißt **nullteilerfrei**, wenn A nicht der Nullring und $0 \in A$ der einzige Nullteiler ist.
- $x \in A$ heißt **Einheit**, wenn ein $y \in A$ mit $xy = 1$ existiert. Die Menge A^\times der Einheiten von A ist eine Gruppe unter Multiplikation.

Beispiel 1.3. $\mathbb{Z}[i]^\times = \{\pm 1, \pm i\}$.

Die Vielfachen ax eines Elements $x \in A$ bilden ein **Hauptideal**. Bezeichnung (x) oder auch Ax . Das **Nullideal** (0) wird auch einfach mit 0 bezeichnet. Es gilt $(1) = A$ und $(x) = A \Leftrightarrow x \in A^\times$.

Erinnerung 1.4. • $\mathfrak{p} \subset A$ heißt **Primideal**, wenn $\mathfrak{p} \neq (1)$ und es gilt $xy \in \mathfrak{p} \Rightarrow (x \in \mathfrak{p} \text{ oder } y \in \mathfrak{p})$.

- $\mathfrak{p} \subset A$ ist Primideal $\Leftrightarrow A/\mathfrak{p}$ ist nullteilerfrei.
- $\mathfrak{m} \subset A$ heißt **Maximalideal** wenn $\mathfrak{m} \neq (1)$ und es kein Ideal \mathfrak{a} mit $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq (1)$ gibt.
- $\mathfrak{m} \subset A$ ist Maximalideal $\Leftrightarrow A/\mathfrak{m}$ ist Körper.
- Jedes Maximalideal ist ein Primideal.
- $f : A \rightarrow B$ Ringhomomorphismus, $\mathfrak{q} \subset B$ Primideal $\Rightarrow f^{-1}(\mathfrak{q}) \subset A$ ist ein Primideal.

Satz 1.5. *Jeder Ring $A \neq 0$ besitzt ein Maximalideal.*

Beweis. Sei Σ die Menge der Ideale $\neq (1)$ in A . Wegen $A \neq 0$ gilt $(0) \subsetneq (1)$ und damit $\Sigma \neq \emptyset$. Wir ordnen Σ durch die Inklusion, d.h. $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.

Sei nun (\mathfrak{a}_α) eine Kette in Σ . Für α, β haben wir $\mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}_\beta$ oder $\mathfrak{a}_\beta \subset \mathfrak{a}_\alpha$. Setze $\mathfrak{a} = \bigcup_{\alpha} \mathfrak{a}_\alpha$. Dann ist \mathfrak{a} ein Ideal: $a \in A, x \in \mathfrak{a} \Rightarrow ax \in \mathfrak{a}$ weil $x \in \mathfrak{a}_\alpha$ für ein α und deshalb $ax \in \mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}$. Es sei nun $x \in \mathfrak{a}_\alpha, y \in \mathfrak{a}_\beta$. Gilt $\mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}_\beta$ so folgt $x + y \in \mathfrak{a}_\beta \subset \mathfrak{a}$, ansonsten gilt $\mathfrak{a}_\beta \subset \mathfrak{a}_\alpha$ und $x + y \in \mathfrak{a}_\alpha \subset \mathfrak{a}$.

Es gilt $\mathfrak{a} \in \Sigma$ wegen $1 \notin \mathfrak{a} = \bigcup \mathfrak{a}_\alpha$ und \mathfrak{a} ist obere Schranke für die Kette (\mathfrak{a}_α) . Zorn's Lemma $\Rightarrow \Sigma$ besitzt (mindestens) ein maximales Element. \square

Korollar 1.6. Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ist in einem Maximalideal enthalten.

Beweis. Nach Satz 1.5 besitzt $0 \neq A/\mathfrak{a}$ mindestens ein Maximalideal. Nach Satz 1.1 erhalten wir ein Maximalideal in A welches \mathfrak{a} umfasst. \square

Korollar 1.7. Jede Nichteinheit ist in einem Maximalideal enthalten.

Beweis. Ist x Nichteinheit, so gilt $Ax \subsetneq A$. Nach Korollar 1.6 ist Ax und somit auch x in einem Maximalideal enthalten. \square

Definition 1.8. A heißt **lokal**, wenn es genau ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$ gibt. Der Körper $k = A/\mathfrak{m}$ heißt der **Restklassenkörper** von A .

Satz 1.9. Es sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein Maximalideal.

- (i) $(A \setminus \mathfrak{m}) \subset A^\times \Rightarrow A$ ist lokal.
- (ii) $1 + \mathfrak{m} \subset A^\times \Rightarrow A$ ist lokal.

Beweis. (i) Sei $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein Ideal. Dann gilt $\mathfrak{a} \cap A^\times = \emptyset$, also $\mathfrak{a} \cap (A \setminus \mathfrak{m}) = \emptyset$, d.h. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. Daher ist \mathfrak{m} das einzige Maximalideal. (ii) Für $x \in A$ ist $Ax + \mathfrak{m}$ ein Ideal. Aus $x \notin \mathfrak{m}$ folgt $Ax + \mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{m}$, also $Ax + \mathfrak{m} = (1)$. Daher existieren $a \in A, y \in \mathfrak{m}$ mit $ax + y = 1$, also $ax = 1 - y \in 1 + \mathfrak{m} \subset A^\times$. Aus $ax \in A^\times$ folgt $x \in A^\times$. Wir erhalten $(A \setminus \mathfrak{m}) \subset A^\times$, also A lokal nach (i). \square

Definition 1.10. Sei A ein kommutativer Ring. $x \in A$ heißt **nilpotent**, wenn $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Nilpotente Elemente sind Nullteiler, die Umkehrung ist i.A. falsch.

Satz 1.11. Die Menge $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$ aller nilpotenten Elemente in A ist ein Ideal. Der Faktorring A/\mathfrak{N} hat keine nilpotenten Elemente $\neq 0$.

Beweis. $x \in \mathfrak{N}, a \in A \Rightarrow ax \in \mathfrak{N}$ (klar). Seien $x, y \in \mathfrak{N}, x^n = 0 = y^m$. Dann gilt $(x + y)^{n+m-1} = 0$ (binomische Formel) also $x + y \in \mathfrak{N}$. Daher ist \mathfrak{N} ein Ideal. Sei nun $x \in A$ und $\bar{x} \in A/\mathfrak{N}$ nilpotent. Dann gilt $\bar{x}^n = 0$ in A/\mathfrak{N} für ein $n \in \mathbb{N}$, also $x^n \in \mathfrak{N}$, und somit $x^{nm} = 0$ für geeignetes $m \in \mathbb{N}$. \square

Definition 1.12. Das Ideal \mathfrak{N} aller nilpotenten Elemente heißt das **Nilradikal**.

Satz 1.13. Das Nilradikal von A ist der Durchschnitt aller Primideale.

Beweis. Sei \mathfrak{N} der Durchschnitt aller Primideale. Sei $x \in \mathfrak{N}$, also $x^n = 0$ für ein n . Dann gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p} : x^n \in \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$. Dies zeigt $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$. Angenommen es gäbe ein $x \in \mathfrak{N}' \setminus \mathfrak{N}$. Sei Σ die Menge aller Ideale $\mathfrak{a} \subset A$ mit

$$x^n \notin \mathfrak{a} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $0 \in \Sigma$ ist Σ nichtleer. Wir ordnen Σ durch Inklusion. Nach Zorns Lemma existiert ein maximales Element $\mathfrak{p} \in \Sigma$.

Behauptung: \mathfrak{p} ist Primideal.

Beweis der Behauptung. Seien $s, t \notin \mathfrak{p}$. Dann gilt $\mathfrak{p} \subsetneq As + \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \subsetneq At + \mathfrak{p}$, also $As + \mathfrak{p}, At + \mathfrak{p} \notin \Sigma$. Nach Definition von Σ existieren $n, m \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in As + \mathfrak{p}$, $x^m \in At + \mathfrak{p}$. Dies impliziert $x^{n+m} \in Ast + \mathfrak{p}$, also $Ast + \mathfrak{p} \notin \Sigma$. Aus $st \in \mathfrak{p}$ würde $\mathfrak{p} = Ast + \mathfrak{p} \in \Sigma$ folgen, also $st \notin \mathfrak{p}$, d.h. \mathfrak{p} ist Primideal. Dies zeigt die Behauptung.

Wegen $\mathfrak{p} \in \Sigma$ gilt $x \notin \mathfrak{p}$. Also $x \notin \mathfrak{N}'$. Widerspruch. \square

Operationen auf Idealen

Sei $(\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ eine nicht notwendig endliche Familie von Idealen. Dann sind

$$\bigcap_{i \in I} \mathfrak{a}_i \quad \text{und} \quad \sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i := \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a}_i \text{ und } \alpha_i = 0 \text{ f.f.a. } i \right\}$$

Ideale in A . Ist $I = \{1, \dots, n\}$ endlich, haben wir das Produkt

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \left\{ \sum_{\text{endl.}} x_1 x_2 \cdots x_n \mid x_i \in \mathfrak{a}_i \right\}$$

Bemerkung 1.14. Durchschnitt, Summe und Produkt sind assoziativ und kommutativ. Desweiteren gilt $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{c}$.

Notation: $\mathfrak{a}^n = \mathfrak{a} \cdots \mathfrak{a}$ (n Faktoren).

Lemma 1.15. (i) $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ falls $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{c}$.

(ii) $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Beweis. (i) OE sei $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. Für ein Element $b + c \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$, $c \in \mathfrak{c}$ gilt $b \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ und daher $c \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$. Gilt umgekehrt $b \in \mathfrak{b}$, $c \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$, so gilt $b + c \in \mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.

(ii) folgt durch Einsetzen der Definitionen. \square

Zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ heißen **relativ prim**, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$. Für relativ prime Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ gilt $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ nach Lemma 1.15(ii).

Nun seien A_1, \dots, A_n Ringe. Ihr Produkt $A = \prod_{i=1}^n A_i$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ist ein Ring mit Einselement $(1, \dots, 1)$. Die Projektionen $A \rightarrow A_i$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ sind Ringhomomorphismen.

Warnung: Die Inklusionen $A_i \hookrightarrow A$, $x_i \mapsto (0, \dots, x_i, \dots, 0)$ sind keine Ringhomomorphismen!

Nun sei A ein Ring und $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ Ideale in A . Wir betrachten den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{a}_i, \\ x &\longmapsto (x + \mathfrak{a}_1, \dots, x + \mathfrak{a}_n). \end{aligned}$$

Lemma 1.16 (Verallgemeinerter Chinesischer Restsatz). (i) Sind für $i \neq j$ die Ideale \mathfrak{a}_i und \mathfrak{a}_j relativ prim, so gilt

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i.$$

(ii) ϕ surjektiv $\iff \mathfrak{a}_i$ und \mathfrak{a}_j sind relativ prim für alle $i \neq j$.

(iii) ϕ injektiv $\iff \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = 0$.

Beweis. (i) $n = 2$ schon bekannt nach Lemma 1.15(ii). $n \geq 3$ per Induktion. Seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ paarweise relativ prime Ideale und $\mathfrak{b} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} \mathfrak{a}_i$. Wegen $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_n = (1)$ für $i = 1, \dots, n-1$, finden wir Elemente $x_i \in \mathfrak{a}_i$, $y_i \in \mathfrak{a}_n$ mit $x_i + y_i = 1$. Es gilt $\prod_{i=1}^{n-1} x_i = \prod_{i=1}^{n-1} (1 - y_i) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}_n}$. Daher gilt $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}_n = (1)$ und

$$\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i = \mathfrak{b}\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_n = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i.$$

(ii): \Rightarrow . Wir zeigen $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = (1)$ falls $i \neq j$. Ohne Einschränkung sei $i = 1$, $j = 2$. Es existiert ein $x \in A$ mit $\phi(x) = (1, 0, \dots, 0)$, also $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}_1}$, $x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}_2}$, so dass

$$1 = (1 - x) + x \in \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$$

(ii): \Leftarrow . Es genügt zu zeigen, dass für alle i das Element $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 an i -ter Stelle) in $\text{im}(\phi)$ liegt. Ohne Einschränkung sei $i = 1$. Wegen $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_i = (1)$ für $i \geq 2$ haben wir Elemente $u_i \in \mathfrak{a}_1$, $v_i \in \mathfrak{a}_i$ mit $u_i + v_i = 1$. Setze $x = \prod_{i=2}^n v_i$.

Dann gilt $x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}_i}$ für $i \geq 2$ und $x = \prod_{i=2}^n (1 - u_i) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}_1}$. Daher gilt $\phi(x) = (1, 0, \dots, 0)$.

(iii) Dies ist klar wegen $\ker(\phi) = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$. \square

Die Vereinigung $\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ zweier Ideale ist i.A. kein Ideal.

Satz 1.17 (Primvermeidung). (i) Es seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ Primideale und \mathfrak{a} ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Dann gilt bereits $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ für ein i .

(ii) Es seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ Ideale und \mathfrak{p} ein Primideal mit $\mathfrak{p} \supset \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$. Dann gilt

$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_i$ für ein i . Aus $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$ für ein i .

Bemerkung 1.18. Eine Umformulierung von (i) ist: Ist \mathfrak{a} in keinem der Primideale \mathfrak{p}_i enthalten, so existiert ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $a \notin \mathfrak{p}_i$ für alle i . Daher kommt der Name „Primvermeidung“.

Beweis von Satz 1.17. Wir zeigen (i) per Induktion nach n in der Form

$$\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n \implies \mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$$

Die Aussage ist trivial für $n = 1$. Sei $n > 1$ und die Aussage richtig für $n - 1$. Dann existiert für jedes $i = 1, \dots, n$ ein $x_i \in \mathfrak{a}$ mit $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ für alle $j \neq i$. Gilt $x_i \notin \mathfrak{p}_i$ für ein i , so sind wir fertig. Im anderen Fall gilt $x_i \in \mathfrak{p}_i$ für alle i . Für

$$y = \sum_{i=1}^n x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} x_{i+2} \cdots x_n$$

gilt dann $y \in \mathfrak{a}$ und $y \notin \mathfrak{p}_i$ für $i = 1, \dots, n$, also $\mathfrak{a} \not\subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$.

(ii) Wir nehmen an, dass $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}_i$ für alle i . Dann existieren Elemente $x_i \in \mathfrak{a}_i$, $x_i \notin \mathfrak{p}$ und wir erhalten

$$x_1 \cdots x_n \in \prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subset \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$$

aber $x_1 \cdots x_n \notin \mathfrak{p}$, da \mathfrak{p} prim. Also folgt $\mathfrak{p} \not\supset \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$.

Gilt schließlich $\mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i$, so haben wir gerade gesehen: $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_{i_0}$ für ein i_0 . Aus

$\mathfrak{a}_{i_0} \subset \mathfrak{p} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i_0}$ folgt $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_{i_0}$. \square

Definition 1.19. Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ setzt man

$$\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\}.$$

Dies ist ein Ideal in A . Das Ideal

$$\text{Ann}(\mathfrak{b}) \stackrel{\text{df}}{=} 0 : \mathfrak{b} = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} = 0\}$$

heißt der **Annulator** von \mathfrak{b} . Für $x \in A$ schreiben wir $\text{Ann}(x) = \text{Ann}((x))$. Für die Menge D der Nullteiler von A gilt nach Definition:

$$D = \bigcup_{x \neq 0} \text{Ann}(x).$$

Beispiel 1.20. Sei $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (m)$, $\mathfrak{b} = (n)$. Dann ist $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ das durch $\frac{m}{\text{ggT}(m,n)}$ erzeugte Hauptideal.

Lemma 1.21. Es gilt

- (i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$.
- (ii) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$.
- (iii) $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = \mathfrak{a} : (\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) : \mathfrak{b}$.
- (iv) $(\bigcap_i \mathfrak{a}_i) : \mathfrak{b} = \bigcap_i (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{b})$.
- (v) $\mathfrak{a} : (\sum_i \mathfrak{b}_i) = \bigcap_i (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}_i)$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 1.22. Das **Radikal** $r(\mathfrak{a})$ eines Ideals \mathfrak{a} ist definiert durch

$$r(\mathfrak{a}) := \{x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

Ist $\phi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ die natürliche Projektion, so gilt

$$r(\mathfrak{a}) = \phi^{-1}(\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})).$$

Daher ist $r(\mathfrak{a})$ ein Ideal.

Lemma 1.23. Es gilt

- (i) $r(\mathfrak{a}) \supset \mathfrak{a}$.
- (ii) $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$.
- (iii) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$.
- (iv) $r(\mathfrak{a}) = (1) \iff \mathfrak{a} = (1)$.
- (v) $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}))$.
- (vi) Für ein Primideal \mathfrak{p} gilt $r(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Satz 1.24. Das **Radikal** $r(\mathfrak{a})$ ist der Durchschnitt aller \mathfrak{a} umfassenden Primideale.

Beweis. Sei $\phi : A \rightarrow A/\mathfrak{a}$ die kanonische Projektion. Dann gilt

$$r(\mathfrak{a}) = \phi^{-1}(\mathfrak{N}(A/\mathfrak{a})) = \phi^{-1}\left(\bigcap_{\mathfrak{p} \subset A/\mathfrak{a}} \mathfrak{p}\right) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subset A \\ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}}} \mathfrak{p}. \quad \square$$

Satz 1.25. Für die Menge D der Nullteiler von A gilt

$$D = \bigcup_{x \neq 0} r(\text{Ann}(x)).$$

Beweis. Für eine Teilmenge(!) $E \subset A$ definieren wir $r(E)$ wie für Ideale. Dann ist $r(E)$ wieder eine Teilmenge und man sieht leicht $r(\bigcup_i E_i) = \bigcup_i r(E_i)$. Für ein Element $x \in r(D)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass x^n Nullteiler ist. Dann ist aber auch schon x Nullteiler. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} D = r(D) &= r\left(\bigcup_{x \neq 0} (\text{Ann}(x))\right) \\ &= \bigcup_{x \neq 0} r(\text{Ann}(x)). \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.26. Sei $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (m)$ und p_1, \dots, p_n seien die (verschiedenen) Primteiler von m . Dann gilt $r(\mathfrak{a}) = (p_1 \cdots p_n)$.

Satz 1.27. $r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b}) = (1) \implies \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$.

Beweis. $r(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = r(r(\mathfrak{a}) + r(\mathfrak{b})) = r((1)) = (1)$, also $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)$. □

Erweiterung und Kontraktion

Sei $f : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus.

Definition 1.28. (i) Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ nennt man

$$\mathfrak{a}^e := Bf(\mathfrak{a}) = \left\{ \sum_{\text{endl.}} b_i f(a_i) \mid b_i \in B, a_i \in \mathfrak{a} \right\}$$

die **Erweiterung** von \mathfrak{a} auf B .

(ii) Für ein Ideal $\mathfrak{b} \subset B$ heißt

$$\mathfrak{b}^c := f^{-1}(\mathfrak{b})$$

die **Kontraktion** von \mathfrak{b} auf A .

Bemerkungen 1.29. • Wir können f in der Form

$$A \xrightarrow{p} f(A) \xrightarrow{i} B$$

faktorisieren. Die Situation für p ist einfach nach Satz 1.1, i ist kompliziert.

- Ist $\mathfrak{q} \subset B$ ein Primideal, so auch $\mathfrak{q}^c \subset A$.
- Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so muss $\mathfrak{p}^e \subset B$ nicht unbedingt ein Primideal sein.

Beispiel 1.30. Wir betrachten $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[i]$.

Frage: Welche Primideale aus \mathbb{Z} „bleiben“ Primideale in $\mathbb{Z}[i]$? Da \mathbb{Z} und $\mathbb{Z}[i]$ euklidisch, also faktoriell sind (siehe Algebra I), stellt sich die Frage: Welche Primzahlen bleiben als Elemente in $\mathbb{Z}[i]$ irreduzibel? Wir brauchen die folgende zahlentheoretische Aussage.

Satz von Lagrange: Eine Primzahl p ist genau dann als Summe zweier Quadratzahlen darstellbar, wenn $p \not\equiv 3 \pmod{4}$.

Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Aus $p = (x+iy) \cdot (x'+iy')$ folgt $p^2 = N(x+iy) \cdot N(x'+iy')$. Sind beides keine Einheiten, so folgt

$$p = N(x+iy) = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2.$$

Also: $p \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow p$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.

Für $p = 2$ gilt $2 = (1+i)(1-i) = -i(1+i)^2$. In Idealen: $(2)^e = (1+i)^2$.

Sei nun $p \equiv 1 \pmod{4}$ und $x, y \in \mathbb{N}$ mit $p = x^2 + y^2$. Dann gilt

$$p = (x+iy)(x-iy).$$

In Idealen $(p)^e = (x+iy) \cdot (x-iy)$. Wegen $N(x+iy) = p$ ist $x+iy$ irreduzibel. Jetzt kann man noch nachrechnen, dass $(x+iy) \nmid (x-iy)$ und erhält:

Zerlegungsgesetz in $\mathbb{Z}[i]$

$$(p)^e = \begin{cases} \text{Primideal, wenn} & p \equiv 3 \pmod{4}, \\ \text{Produkt zweier verschiedener PI, wenn} & p \equiv 1 \pmod{4}, \\ \text{Quadrat eines Primideals, wenn} & p = 2. \end{cases}$$

Im Allgemeinen haben wir die folgenden Aussagen. Es sei $f : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{b} \subset B$ Ideale.

Satz 1.31. (i) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}$, $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}^{ce}$.

(ii) $\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$, $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$

(iii) Sei C die Menge der Ideale in A die Kontraktionen von Idealen aus B sind und E die Menge der Ideale in B die Erweiterungen von Idealen in A sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} C &= \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\}, \\ E &= \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}. \end{aligned}$$

Wir haben Bijektionen

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}^e} \\ \xleftarrow{\mathfrak{b}^c \mapsto \mathfrak{b}} \end{array} E.$$

Beweis. (i) folgt durch Einsetzen der Definitionen.

(ii): Nach (i) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}^c &\subset (\mathfrak{b}^c)^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} \quad \text{und} \\ \mathfrak{b}^c &\supset (\mathfrak{b}^{ce})^c = \mathfrak{b}^{cec}. \end{aligned}$$

Die andere Aussage zeigt man analog.

(iii): Für $\mathfrak{a} \in C$ gilt $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c$ für ein \mathfrak{b} . Also $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{a}$.

Analog: $\mathfrak{b} \in E$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^e$ für $\mathfrak{a} \subset A$ und $\mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{a}^{ece} = \mathfrak{a}^e = \mathfrak{b}$.

Die Bijektion folgt. □

Lemma 1.32. Es seien $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset A$, $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subset B$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^e &= \mathfrak{a}_1^e + \mathfrak{a}_2^e, (\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^c \supset \mathfrak{b}_1^c + \mathfrak{b}_2^c, \\ (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2)^e &\subset \mathfrak{a}_1^e \cap \mathfrak{a}_2^e, (\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)^c = \mathfrak{b}_1^c \cap \mathfrak{b}_2^c, \\ (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)^e &= \mathfrak{a}_1^e \mathfrak{a}_2^e, (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)^c \supset \mathfrak{b}_1^c \mathfrak{b}_2^c, \\ (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}_2)^e &\subset (\mathfrak{a}_1^e : \mathfrak{a}_2^e), (\mathfrak{b}_1 : \mathfrak{b}_2)^c \subset (\mathfrak{b}_1^c : \mathfrak{b}_2^c), \\ r(\mathfrak{a})^e &\subset r(\mathfrak{a}^e), r(\mathfrak{b})^c = r(\mathfrak{b}^c). \end{aligned}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

2 Moduln

Sei R ein Ring, unitär aber hier noch nicht notwendig kommutativ und seien M und N R -(Links-)Moduln. Die Menge der R -Modulhomomorphismen von M nach N wird mit $\text{Hom}_R(M, N)$ bezeichnet und wird zur abelschen Gruppe durch

$$(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m).$$

Ist $R = A$ kommutativ, so wird $\text{Hom}_A(M, N)$ zum A -Modul durch

$$(a\varphi)(m) = a(\varphi(m)).$$

Lemma 2.1. Die natürliche Abbildung

$$\text{Hom}_R(R, M) \rightarrow M, \quad \varphi \mapsto \varphi(1),$$

ist ein Isomorphismus abelscher Gruppen. Ist $R = A$ kommutativ, so ist sie ein Isomorphismus von A -Moduln.

Beweis. Injektivität. $\varphi(1) = 0 \Rightarrow \varphi(r) = r\varphi(1) = 0$ für alle $r \in R$.

Surjektivität: Sei $m \in M$ beliebig. Definiere $\varphi : R \rightarrow M$ durch $\varphi(r) = rm$. Dann bildet sich φ auf m ab. \square

Operationen auf Untermoduln.

Sei M ein R -Modul und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untermoduln. Dann ist $\bigcap_{i \in I} M_i$ ein Untermodul, sowie

$$\sum_{i \in I} M_i = \left\{ \sum_i m_i \mid m_i \in M_i, m_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\}.$$

Dies ist der kleinste Untermodul in M , der alle M_i enthält.

Ist $\mathfrak{a} \subset R$ ein (Links)Ideal und M ein R -(Links)Modul, so definiert man den Untermodul $\mathfrak{a}M \subset M$ durch

$$\mathfrak{a}M = \left\{ \sum_{\text{endl.}} a_i m_i \mid a_i \in \mathfrak{a}, m_i \in M \right\}.$$

Sind N, P Untermoduln in M , so setzt man

$$(N : P) = \{r \in R \mid rP \subset N\}.$$

$(N : P)$ ist ein (Links)Ideal in R . Gilt $P \subset N$, so ist $(N : P) = R$.

Spezialfall:

Definition 2.2.

$$\text{Ann}(M) = (0 : M) = \{r \in R \mid rm = 0 \quad \forall m \in M\}$$

heißt der **Annulator** von M . Es heißt M **treuer** R -Modul, wenn $\text{Ann}(M) = 0$ gilt.

Bemerkung 2.3. Sei $R = A$ kommutativ. Ist M ein A -Modul und $\mathfrak{a} \subset \text{Ann}(M)$ ein Ideal, so können wir M als A/\mathfrak{a} -Modul auffassen: setze $(a + \mathfrak{a})m = am$. Wegen $\mathfrak{a}M = 0$ ist die Definition repräsentantenunabhängig. Als $A/\text{Ann}(M)$ -Modul ist M treu.

Lemma 2.4. Es seien $N, P \subset M$ Untermoduln. Dann gilt

- (i) $\text{Ann}(N + P) = \text{Ann}(N) \cap \text{Ann}(P)$.
- (ii) $(N : P) = \text{Ann}((N + P)/N)$.

Beweis. Übungsaufgabe. \square

Ist M ein freier A -Modul vom Rang n , so gibt es nach Wahl einer Basis einen Isomorphismus $M \cong A^n$ und einen Isomorphismus

$$\operatorname{End}_A(M) \cong \operatorname{Mat}_{n,n}(A).$$

Für eine $n \times n$ -Matrix M über A haben wir die **Adjunkte** M^{ad}

$$M^{ad} = (y_{ij}) \in \operatorname{Mat}_{n,n}(A)$$

mit $y_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{j,i})$, wobei $M_{j,i}$ aus M durch Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte entsteht.

Satz 2.5. (Cramersche Regel) Es gilt

$$M^{ad} \cdot M = M \cdot M^{ad} = \operatorname{diag}(\det(M), \dots, \det(M)).$$

Beweis. Siehe LA I, 4.36. □

Satz 2.6. Sei M ein endlich erzeugter A -Modul, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und $\phi \in \operatorname{End}_A(M)$ mit $\phi(M) \subset \mathfrak{a}M$. Dann genügt ϕ einer Gleichung

$$\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$.

Beweis. Seien x_1, \dots, x_n Erzeuger von M . Für jedes

$$x \in \mathfrak{a}M = \left\{ \sum_{\text{endl.}} \alpha_i y_i \mid \alpha_i \in \mathfrak{a}, y_i \in M \right\}$$

finden wir (stelle y_i als Linearkombination von x_1, \dots, x_n dar) eine Darstellung der Form

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad a_i \in \mathfrak{a}.$$

Somit gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$\phi(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad \text{mit gewissen } a_{ij} \in \mathfrak{a}.$$

Es folgt $\sum_{j=1}^n (\delta_{ij} \phi - a_{ij})(x_j) = 0$, wobei δ_{ij} = Kronecker- δ .

Wir betrachten nun den von ϕ über A in $\operatorname{End}_A(M)$ erzeugten Teilring

$$A[\phi] = \left\{ \sum_{\text{endl.}} a_i \phi^i \right\} \subset \operatorname{End}_A(M),$$

(Konvention: $\phi^0 = \text{id}_M$). Es ist $A[\phi]$ ist kommutativer Ring mit 1 und

$$X := (\delta_{ij}\phi - a_{ij})_{ij}$$

ist eine $n \times n$ -Matrix mit Werten in $A[\phi]$. Nach Satz 2.5 erhalten wir

$$X^{ad} \cdot X = \text{diag}(\det(X)).$$

Durch die Regel $(\sum a_i \phi^i)(x) = \sum a_i \phi^i(x)$ wird M in natürlicher Weise zu einem $A[\phi]$ -Modul. Es gilt

$$X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \quad \text{und daher nach Cramer } \text{diag}(\det(X)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Weil nun aber die x_i den A -Modul M erzeugen, folgt $\det(X) \cdot x = 0$ für alle $x \in M$, d.h. $\det(X) = 0 \in A[\phi] \subset \text{End}_A(M)$. Nach der Leibniz-Formel entwickelt, gilt nun

$$\det(X) = \det((\delta_{ij}\phi - a_{ij})_{ij}) = \phi^n + \alpha_{n-1}\phi^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

mit gewissen $\alpha_i \in \mathfrak{a}$. □

Korollar 2.7. Sei M ein endlich erzeugter A -Modul und \mathfrak{a} ein Ideal mit $\mathfrak{a}M = M$. Dann existiert ein $a \in A$, $a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$, mit $aM = 0$.

Beweis. Wir benutzen Satz 2.6 mit $\phi = \text{id}_M$ und erhalten $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{a}$ mit

$$x + a_{n-1}x + \cdots + a_0x = 0 \quad \text{für alle } x \in M.$$

Setze $a = 1 + a_{n-1} + \cdots + a_0$. □

Satz 2.8. (Nakayamas Lemma) Sei (A, \mathfrak{m}) ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter A -Modul. Dann folgt aus $\mathfrak{m}M = M$, dass $M = 0$.

Beweis. Nach Korollar 2.7 existiert ein $a \in A$, $a \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, mit $aM = 0$. Wegen $a - 1 \in \mathfrak{m}$ folgt $a \in A^\times$. Es folgt $M = 1 \cdot M = a^{-1}aM = a^{-1}0 = 0$. □

Korollar 2.9. Es sei (A, \mathfrak{m}) ein lokaler Ring, M ein endlich erzeugter A -Modul und N ein Untermodul von M . Dann folgt aus $M = \mathfrak{m}M + N$, dass $M = N$.

Beweis. Es gilt $\mathfrak{m}(M/N) = (\mathfrak{m}M + N)/N$. Nach Voraussetzung gilt $\mathfrak{m}(M/N) = M/N$, also $M/N = 0$ nach Satz 2.8. □

Korollar 2.10. Es sei (A, \mathfrak{m}) ein lokaler Ring, $k = A/\mathfrak{m}$ und M ein endlich erzeugter A -Modul. Für Elemente $x_1, \dots, x_n \in M$ sind äquivalent:

- (i) x_1, \dots, x_n erzeugen M als A -Modul.
- (ii) Die Bilder $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ von x_1, \dots, x_n in $M/\mathfrak{m}M$ erzeugen den k -Vektorraum $M/\mathfrak{m}M$.

Beweis. Sei N der durch x_1, \dots, x_n in M erzeugte Untermodul. Die Komposition $N \hookrightarrow M \rightarrow M/\mathfrak{m}M$ hat das Bild $(N + \mathfrak{m}M)/\mathfrak{m}M$. Daher gilt

$$\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \text{ erzeugen } M/\mathfrak{m}M \iff N + \mathfrak{m}M = M \xrightarrow{2.9} N = M. \quad \square$$

3 Tensorprodukte

Es sei A ein kommutativer Ring.

Definition 3.1. Seien M, N, P A -Moduln. Eine Abbildung $f: M \times N \rightarrow P$ heißt **(A-)bilinear**, wenn

- (1) für jedes $m \in M$ ist die Abbildung $N \rightarrow P, n \mapsto f(m, n)$ A -linear.
- (2) für jedes $n \in N$ ist die Abbildung $M \rightarrow P, m \mapsto f(m, n)$ A -linear.

Satz 3.2. Seien A -Moduln M, N gegeben. Es gibt ein Paar (T, g) bestehend aus einem A -Modul T und einer bilinearen Abbildung $g: M \times N \rightarrow T$ mit folgender **Universaleigenschaft**:

Zu jedem A -Modul P und jeder bilinearen Abbildung $f: M \times N \rightarrow P$ existiert ein eindeutig bestimmter A -Modulhomomorphismus $h: T \rightarrow P$, so daß $f = h \circ g$ gilt.

(T, g) ist *eindeutig bis auf kanonische Isomorphie*.

Beweis. Eindeutigkeit: Diese folgt in der üblichen Weise durch Ausnutzung der Universaleigenschaft.

Existenz: Sei $C = A^{(M \times N)} = \bigoplus_{M \times N} A$. Elemente von C sind formale endliche A -Linearkombinationen von Elementen aus $M \times N$. (Man identifiziere ein Element $i \in M \times N$ mit dem Element in C , dessen i -te Komponente gleich 1 und alle anderen Komponenten gleich 0 sind). Wir betrachten den Untermodul D von C der durch alle Elemente der Form

$$\begin{aligned} (x + x', y) &= (x, y) + (x', y) \\ (x, y + y') &= (x, y) + (x, y') \\ a(x, y) &= (ax, y) \\ a(x, y) &= (x, ay) \end{aligned}$$

erzeugt wird und setzen $T = C/D$. Wir bezeichnen das Bild von $1 \cdot (x, y) \in C$ in T mit $x \otimes y$. Dann ist T durch Elemente der Form $x \otimes y$ erzeugt, und diese erfüllen:

$$\begin{aligned} (x + x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y, \\ x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y', \\ (ax) \otimes y &= x \otimes (ay) = a(x \otimes y). \end{aligned}$$

M.a.W.: Die Abbildung $g: M \times N \rightarrow T, (x, y) \mapsto x \otimes y$ ist bilinear.

Ist nun $f: M \times N \rightarrow P$ eine bilineare Abbildung, so erhalten wir wegen der universellen Eigenschaft der direkten Summe einen natürlichen Homomorphismus

$$\bar{f}: A^{(M \times N)} = C \rightarrow P$$

mit $\sum_{\text{endl.}} a_i(x_i, y_i) \rightarrow \sum_{\text{endl.}} a_i f(x_i, y_i)$. \bar{f} verschwindet auf den Erzeugern von D und daher auf ganz D . Daher induziert \bar{f} einen wohldefinierten Homomorphismus

$h : C/D = T \rightarrow P$ mit

$$h(x \otimes y) = \bar{f}((x, y)) = f(x, y).$$

Der Homomorphismus h ist durch die Eigenschaft eindeutig auf einfachen Tensoren und damit insgesamt eindeutig bestimmt. \square

Bemerkungen 3.3. 1) T heißt das **Tensorprodukt** von M und N . Schreibweise: $T = M \otimes_A N$ oder auch $T = M \otimes N$.

Gewöhnungsbedürftig: Die Elemente von $M \otimes N$ sind endliche Summen $\sum_{\text{endl.}} x_i \otimes y_i$, die man nicht immer vereinfachen kann.

2) Für $x \in M$ gilt $x \otimes 0 = 0$ in $M \otimes N$ wegen $x \otimes 0 = x \otimes (0 + 0) = x \otimes 0 + x \otimes 0$. Also $x \otimes 0 = 0$.

3) Wir werden die Konstruktion des Tensorprodukts nicht mehr brauchen, nur die universelle Eigenschaft und, dass das Tensorprodukt von den einfachen Tensoren $x \otimes y$ erzeugt wird, sowie die Rechenregeln.

4) Ist (x_1, \dots, x_m) ein Erzeugendensystem von M und (y_1, \dots, y_n) ein Erzeugendensystem von N , so ist

$$(x_i \otimes y_j)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

ein Erzeugendensystem von $M \otimes N$. Insbesondere ist das Tensorprodukt endlich erzeugter A -Moduln wieder endlich erzeugt.

Bemerkung 3.4. Ist R ein nicht-kommutativer Ring, so kann man das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ zwischen einem R -Rechtsmodul M und einem R -Linksmodul N definieren. Dieses ist (nur noch) eine abelsche Gruppe.

Multitensorprodukt: Sind M_1, \dots, M_n und P A -Moduln, so nennen wir eine Abbildung

$$f : M_1 \times \dots \times M_n \longrightarrow P$$

multilinear, wenn f in jedem Argument linear ist. Ganz analog zeigt man die Existenz des Multi-Tensorprodukts $M_1 \otimes \dots \otimes M_n$, das universell bezüglich multilinearer Abbildungen ist. Es wird durch Multitensoren $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$, $x_i \in M_i$, $i = 1, \dots, n$, erzeugt.

Lemma 3.5. Seien M, N, P A -Moduln. Dann gibt es eindeutig bestimmte A -Modulisomorphismen

- (i) $M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$,
- (ii) $(M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P)$,
- (iii) $(M \oplus N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes P \oplus N \otimes P$,
- (iv) $A \otimes M \xrightarrow{\sim} M$,

so dass entsprechend gilt

- (a) $x \otimes y \mapsto y \otimes x$,
- (b) $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$,
- (c) $(x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$,
- (d) $a \otimes x \mapsto ax$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt dadurch, dass die Abbildungen auf den einfachen Tensoren vorgegeben sind, und diese das Tensorprodukt erzeugen.

(i) Betrachte die Komposition $\bar{\phi} : M \times N \xrightarrow{\text{Vert}} N \times M \xrightarrow{\text{kan}} N \otimes M$, also die Abbildung $\bar{\phi} : M \times N \rightarrow N \otimes M$, $(x, y) \mapsto y \otimes x$. Es ist $\bar{\phi}$ bilinear. Z.B.

$$\bar{\phi}(x_1 + x_2, y) = y \otimes (x_1 + x_2) = y \otimes x_1 + y \otimes x_2 = \bar{\phi}(x_1, y) + \bar{\phi}(x_2, y).$$

Dies zeigt die Existenz einer eindeutig bestimmten Abbildung $\phi : M \otimes N \rightarrow N \otimes M$ mit $\phi(m \otimes n) = n \otimes m$. Umgekehrt erhalten wir $\psi : N \otimes M \rightarrow M \otimes N$ mit $\psi(n \otimes m) = m \otimes n$. Schließlich gilt $\psi \circ \phi = \text{id}_{M \otimes N}$, $\phi \circ \psi = \text{id}_{N \otimes M}$ (weil diese Gleichheiten auf einfachen Tensoren stimmen.)

(ii) Betrachte die Abbildung

$$\bar{\phi} : M \times N \times P \longrightarrow (M \otimes N) \otimes P, \quad (x, y, z) \mapsto (x \otimes y) \otimes z.$$

Diese Abbildung ist trilinear und induziert so eine Abbildung

$$\phi : M \otimes N \otimes P \rightarrow (M \otimes N) \otimes P$$

mit $x \otimes y \otimes z \mapsto (x \otimes y) \otimes z$. Nun fixieren wir ein Element $z \in P$. Die Abbildung

$$\bar{f}_z : M \times N \longrightarrow M \otimes N \otimes P, \quad (x, y) \mapsto x \otimes y \otimes z$$

ist bilinear und induziert eine Abbildung

$$f_z : M \otimes N \longrightarrow M \otimes N \otimes P$$

mit $f_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z$.

Nun betrachten wir $\bar{f} : (M \otimes N) \times P \rightarrow M \otimes N \otimes P$ mit $\bar{f}(t, z) = f_z(t)$ ein Homomorphismus. Desweiteren gilt für festes $t = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in M \otimes N$ dass:

$$\begin{aligned} \bar{f}(t, z_1 + z_2) &= \\ f_{z_1+z_2}(\sum x_i \otimes y_i) &= \sum x_i \otimes y_i \otimes (z_1 + z_2) \\ &= \sum x_i \otimes y_i \otimes z_1 + \sum x_i \otimes y_i \otimes z_2 \\ &= f_{z_1}(\sum x_i \otimes y_i) + f_{z_2}(\sum x_i \otimes y_i) \\ &= \bar{f}(t, z_1) + \bar{f}(t, z_2). \end{aligned}$$

Analog zeigt man $\bar{f}(t, az) = a\bar{f}(t, z)$. Daher ist \bar{f} bilinear und induziert einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f : (M \otimes N) \otimes P \rightarrow M \otimes N \otimes P$ mit

$(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes y \otimes z$. Wir erhalten $f \circ \phi = \text{id}_{M \otimes N \otimes P}$ und $\phi \circ f = \text{id}_{(M \otimes N) \otimes P}$, d.h. ϕ ist ein Isomorphismus $M \otimes N \otimes P \xrightarrow{\sim} (M \otimes N) \otimes P$. Analog konstruiert man einen Isomorphismus

$$\psi : M \otimes N \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P)$$

mit $\psi(x \otimes y \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$ und die Komposition

$$\psi \circ \phi^{-1} : (M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes P)$$

ist ein Isomorphismus der $(x \otimes y) \otimes z$ auf $x \otimes (y \otimes z)$ abbildet.

(iii) Die Kompositionen

$$(M \oplus N) \times P \xrightarrow{((x,y),z) \mapsto (x,z)} M \times P \xrightarrow{\text{kan}} M \otimes P$$

$$(M \oplus N) \times P \xrightarrow{((x,y),z) \mapsto (y,z)} N \times P \xrightarrow{\text{kan}} N \otimes P$$

setzen sich zu einer Abbildung

$$\bar{\phi}(M \oplus N) \times P \rightarrow (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$$

mit $((x, y), z) \mapsto x \otimes z + y \otimes z$ zusammen. Diese Abbildung ist linear in $M \oplus N$

$$\begin{aligned} &\text{und in } P: \text{Z.B. } \bar{\phi}((x_1, y_1) + (x_2, y_2), z) = (x_1 + x_2) \otimes z + (y_1 + y_2) \otimes z \\ &= x_1 \otimes z + x_2 \otimes z + y_1 \otimes z + y_2 \otimes z = (x_1 \otimes z + y_1 \otimes z) + (x_2 \otimes z + y_2 \otimes z) \\ &= \bar{\phi}((x_1, y_1), z) + \bar{\phi}((x_2, y_2), z) \end{aligned}$$

und wir erhalten einen Homomorphismus

$$\phi : (M \oplus N) \otimes P \longrightarrow (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$$

mit $\phi((x, y) \otimes z) = x \otimes z + y \otimes z$.

Umgekehrt betrachten wir $\bar{\psi}_1 : M \times P \rightarrow (M \oplus N) \otimes P$ mit $\bar{\psi}_1(x, z) = (x, 0) \otimes z$ und erhalten $\psi_1 : M \otimes P \rightarrow (M \oplus N) \otimes P$. Analog $\psi_2 : N \otimes P \rightarrow (M \oplus N) \otimes P$. Diese setzen sich zusammen zu einem Homomorphismus $\psi : (M \otimes P) \oplus (N \otimes P) \rightarrow (M \oplus N) \otimes P$ und wieder ist $\phi \circ \psi = \text{id}$, $\psi \circ \phi = \text{id}$.

(iv) $\bar{\phi} : A \times M \rightarrow M$, $\bar{\phi}(a, x) = ax$ induziert $\phi : A \otimes M \rightarrow M$ wie gewünscht. Betrachten wir umgekehrt die zusammengesetzte Abbildung $\psi : M \rightarrow A \times M \mapsto A \otimes M$, $x \mapsto (1, x) \mapsto 1 \otimes x$, so gilt $\phi \circ \psi = \text{id}$ und auch $\psi \circ \phi = \text{id}$ wegen $a \otimes x \mapsto ax \mapsto 1 \otimes ax = a \otimes x$. \square

Korollar 3.6. Es gilt

$$A^m \otimes A^n \cong A^{mn}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} A^m \otimes A^n &= \underbrace{(A \oplus \dots \oplus A)}_{m\text{-mal}} \otimes \underbrace{(A \oplus \dots \oplus A)}_{n\text{-mal}} \\ &= \underbrace{(A \otimes A) \oplus \dots \oplus (A \otimes A)}_{mn\text{-mal}} \\ &= A^{mn}. \end{aligned}$$

\square

Das Tensorprodukt vertauscht nicht nur mit endlichen, sondern auch mit beliebigen direkten Summen

Lemma 3.7. Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von A -Moduln und N ein weiterer A -Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) \otimes N \cong \bigoplus_{i \in I} M_i \otimes N.$$

Beweis. Den Beweis lassen wir als Übungsaufgabe. \square

Korollar 3.8. Ist M ein A -Modul und I eine Indexmenge, so gilt

$$(A^{(I)}) \otimes M \cong M^{(I)}.$$

Beweis. Nach 3.5(iv) gilt $A \otimes M \cong M$. Nach 3.7 folgt

$$(A^{(I)}) \otimes M = \left(\bigoplus_{i \in I} A\right) \otimes M \cong \bigoplus_{i \in I} A \otimes M \cong \bigoplus_{i \in I} M = M^{(I)}. \quad \square$$

Satz 3.9. Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal und M ein A -Modul. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\phi : A/\mathfrak{a} \otimes M \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{a}M$$

mit $(r + \mathfrak{a}) \otimes m \mapsto rm + \mathfrak{a}M$.

Beweis. Wir zeigen zunächst:

Behauptung: jedes Element in $A/\mathfrak{a} \otimes M$ ist von der Form $(1 + \mathfrak{a}) \otimes m$ für ein $m \in M$.

Beweis der Behauptung: Es gilt

$$\sum (a_i + \mathfrak{a}) \otimes m_i = \sum a_i ((1 + \mathfrak{a}) \otimes m_i) = (1 + \mathfrak{a}) \otimes \left(\sum a_i m_i\right).$$

Nun betrachten wir die Abbildung $\bar{\phi} : A/\mathfrak{a} \times M \rightarrow M/\mathfrak{a}M$, $(a + \mathfrak{a}, m) \mapsto am + \mathfrak{a}M$. Diese ist bilinear und induziert die gesuchte Abbildung $\phi : A/\mathfrak{a} \otimes M \xrightarrow{\sim} M/\mathfrak{a}M$. Es bleibt zu zeigen, dass ϕ ein Isomorphismus ist.

Wegen $m + \mathfrak{a}M = \phi((1 + \mathfrak{a}) \otimes m)$ ist ϕ surjektiv. Bleibt zu zeigen, dass ϕ injektiv ist. Sei $x \in \ker(\phi)$. Z.z.: $x = 0 \in A/\mathfrak{a} \otimes M$. Nach der obigen Behauptung können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $x = (1 + \mathfrak{a}) \otimes m$ für ein $m \in M$ gilt. Es folgt $0 = \phi(x) = 1m + \mathfrak{a}M$. Hieraus folgt $m \in \mathfrak{a}M$, also $m = \sum a_i m_i$ mit $a_i \in \mathfrak{a}$, $m_i \in M$. Es folgt

$$\begin{aligned} x &= (1 + \mathfrak{a}) \otimes m = (1 + \mathfrak{a}) \otimes \left(\sum_i a_i m_i\right) = \\ &= \sum_i (1 + \mathfrak{a}) \otimes a_i m_i = \sum_i (a_i + \mathfrak{a}) \otimes m_i = \sum_i (0 + \mathfrak{a}) \otimes m_i = \sum_i 0 = 0. \end{aligned}$$

\square

Korollar 3.10. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset A$ Ideale, so gilt

$$A/\mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b} \cong A/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

Beweis. Man setzt $M = A/\mathfrak{b}$ in 3.9 und erhält

$$A/\mathfrak{a} \otimes A/\mathfrak{b} \cong (A/\mathfrak{b})/\mathfrak{a}(A/\mathfrak{b}).$$

Nun gilt

$$\mathfrak{a}(A/\mathfrak{b}) = \left\{ \sum_{\text{endl.}} a_i(r_i + \mathfrak{b}) \mid a_i \in \mathfrak{a}, r_i \in A \right\} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}.$$

Es folgt

$$(A/\mathfrak{b})/\mathfrak{a}(A/\mathfrak{b}) = (A/\mathfrak{b})/((\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}) = A/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}). \quad \square$$

Funktoriellies Verhalten

Seien $f: M_1 \rightarrow M_2, g: N_1 \rightarrow N_2$ A -Modulhomomorphismen. Dann gibt es eine wohldefinierte A -lineare Abbildung

$$f \otimes g: M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$$

mit $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$.

Grund: Die bilineare Abbildung $M_2 \times N_2 \rightarrow M_2 \otimes N_2, (x, y) \rightarrow x \otimes y$, induziert über f und g eine bilineare Abbildung $M_1 \times N_1 \rightarrow M_2 \otimes N_2$ mit $(x, y) \mapsto f(x) \otimes g(y)$. Nach Universaleigenschaft existiert daher die Abbildung $M_1 \otimes N_1 \rightarrow M_2 \otimes N_2$ wie beschrieben.

Lemma 3.11. Sind f und g surjektiv, so auch $f \otimes g$.

Beweis. Sei $z = x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_n \otimes y_n \in M_2 \otimes N_2$ beliebig. Setze

$$\bar{z} = \bar{x}_1 \otimes \bar{y}_1 + \cdots + \bar{x}_n \otimes \bar{y}_n \in M_1 \otimes N_1$$

mit Urbildern $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ von x_1, \dots, x_n unter f und $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ von y_1, \dots, y_n unter g . Dann gilt $(f \otimes g)(\bar{z}) = z$. \square

Warnung: Sind f und g injektiv, so braucht das $f \otimes g$ nicht zu sein.

Beispiel 3.12. Betrachte die injektiven Homomorphismen von \mathbb{Z} -Moduln:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x, \quad g = \text{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Dann ist

$$f \otimes g: \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

die Nullabbildung wegen

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0$$

für beliebige $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Nun sei $f : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus (man sagt, B ist eine A -Algebra). B wird zum A -Modul durch $ab := f(a)b$. Allgemeiner können wir jeden B -Modul N durch $an := f(a)n$ als A -Modul auffassen.

Definition/Lemma 3.13. Für einen A -Modul M betrachten wir

$$M_B = M \otimes_A B.$$

Für $b \in B$ ist die b -Multiplikationsabbildung $b(m \otimes b') := m \otimes bb'$ wohldefiniert und definiert eine B -Modulstruktur auf M_B . Man nennt M_B den **Basiswechsel von M nach B** .

Beweis. Für festes $b \in B$ ist die Abbildung $M \times B \rightarrow M \otimes_A B$, $(m, b') \mapsto m \otimes bb'$ A -bilinear und induziert somit die b -Multiplikationsabbildung $\cdot b : M \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B$, $b(m \otimes b') := m \otimes bb'$. Dass diese Regel eine B -Modulstruktur auf M_B induziert folgt direkt aus den Rechenregeln für Tensoren. \square

Satz 3.14. Es sei B eine A -Algebra, M ein A -Modul und N ein B -Modul. Dann gibt es natürliche Isomorphismen von B -Moduln

- (i) $\text{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \cong \text{Hom}_A(M, N)$,
- (ii) $(M \otimes_A B) \otimes_B N \cong M \otimes_A N$.

Hier ist die B -Modulstruktur auf $\text{Hom}_A(M, N)$ durch $(bf)(m) = bf(m)$ gegeben und die B -Modulstruktur auf $M \otimes_A N$ durch $b(m \otimes n) = m \otimes bn$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass für $b \in B$ die beschriebene b -Wirkung auf $M \otimes_A N$ wohldefiniert ist, weil $M \times N \rightarrow M \otimes_A N$, $(m, n) \mapsto m \otimes bn$ A -bilinear ist.

(i) Wir betrachten die Abbildung

$$\Phi : \text{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N), \quad \Phi(f)(m) := f(m \otimes 1_B).$$

In der anderen Richtung ist für $g \in \text{Hom}_A(M, N)$ die Abbildung $M \times B \rightarrow N$, $(m, b) \mapsto bg(m)$ A -bilinear und induziert damit einen Homomorphismus $M \otimes_A B \rightarrow N$, $m \otimes b \mapsto bg(m)$. Daher ist

$$\Psi : \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_B(M \otimes_A B, N), \quad \Psi(g)(m \otimes b) = bg(m)$$

wohldefiniert. Man rechnet leicht nach, dass Φ und Ψ zueinander invers sind.

(ii) Für festes $n \in N$ ist $M \times B \rightarrow M \otimes_A N$, $(m, b) \mapsto m \otimes bn$, A -bilinear und induziert $\phi_n : M \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A N$. Die Zuordnung $(M \otimes_A B) \times N \rightarrow M \otimes_A N$, $(m \otimes b, n) \mapsto \phi_n(m \otimes b) = m \otimes bn$ ist B -bilinear und induziert

$$\Phi : (M \otimes_A B) \otimes_B N \rightarrow M \otimes_A N, \quad \Phi((m \otimes b) \otimes n) = m \otimes bn.$$

In der anderen Richtung ist die Abbildung $M \times N \rightarrow (M \otimes_A B) \otimes_B N$, $(m, n) \mapsto (m \otimes 1) \otimes n$ A -bilinear und induziert

$$\Psi : M \otimes_A N \rightarrow (M \otimes_A B) \otimes_B N, \quad \Psi(m \otimes n) = (m \otimes 1) \otimes n.$$

Man rechnet leicht nach, dass Φ und Ψ zueinander invers sind. \square

4 Exaktheit

Sei R ein nicht notwendig kommutativer Ring.

Definition 4.1. Eine (endliche, einseitig oder beidseitig unendliche) Folge

$$\dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} M_n \xrightarrow{\alpha_n} M_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \dots$$

von R -Moduln heißt **exakt an der Stelle n** , wenn $\text{im}(\alpha_{n-1}) = \ker(\alpha_n)$ gilt. Die Folge heißt **exakt**, wenn sie an jeder Stelle exakt ist. Eine exakte Folge der Form $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ heißt **kurze exakte Folge**.

Bemerkung 4.2. Die Folge $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \rightarrow 0$ ist genau dann exakt wenn i injektiv ist, j surjektiv ist und $\ker(j) = \text{im}(i)$ gilt. Insbesondere ist für jeden surjektiven Homomorphismus $\varphi : M \rightarrow N$ die Folge $0 \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ exakt und für jeden injektiven Homomorphismus $\psi : M \rightarrow N$ die Folge $0 \rightarrow M \xrightarrow{\psi} N \rightarrow N/\psi(M) \rightarrow 0$. Für beliebige Moduln M, N ist die Folge $0 \rightarrow M \xrightarrow{i_1} M \oplus N \xrightarrow{p_2} N \rightarrow 0$ exakt.

Lemma 4.3 (Exaktheit von Produkt und Summe). *Sei I eine Indexmenge und seien*

$$M'_i \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} M''_i, \quad i \in I,$$

exakte Folgen von R -Moduln. Dann sind auch die Folgen

$$\bigoplus_{i \in I} M'_i \xrightarrow{\oplus \alpha_i} \bigoplus_{i \in I} M_i \xrightarrow{\oplus \beta_i} \bigoplus_{i \in I} M''_i, \quad \text{und}$$

$$\prod_{i \in I} M'_i \xrightarrow{\prod \alpha_i} \prod_{i \in I} M_i \xrightarrow{\prod \beta_i} \prod_{i \in I} M''_i$$

exakt. Umgekehrt folgt aus der Exaktheit der direkten Summe (analog: aus der Exaktheit des Produkts), dass alle Folgen $M'_i \xrightarrow{\alpha_i} M_i \xrightarrow{\beta_i} M''_i$ exakt sind.

Beweis. Exaktheit kann komponentenweise geprüft werden, daher ist die Aussage für das Produkt offensichtlich. Im Fall der direkten Summe bekommt man Urbilder a priori nur im Produkt. Nimmt man für die 0 (die ja in fast allen Komponenten steht) auch die 0 als Urbild in der jeweiligen Komponente, so liegt das Urbild auch wieder in der direkten Summe. \square

Korollar 4.4. *Sei I eine Indexmenge und*

$$M' \longrightarrow M \longrightarrow M''$$

eine exakte Folge von R -Moduln. Dann sind auch die Folgen

$$M'^{(I)} \longrightarrow M^{(I)} \longrightarrow M''^{(I)} \quad \text{und} \quad M'^I \longrightarrow M^I \longrightarrow M''^I$$

exakt.

Beweis. Es gilt nach Definition $M^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} M$ und $M^I = \prod_{i \in I} M$. Die Aussage folgt daher aus Lemma 4.3. \square

R -Modulhomomorphismen $u : M' \rightarrow M$ und $v : N \rightarrow N'$ induzieren Homomorphismen abelscher Gruppen (im kommutativen Fall von Moduln)

$$\begin{aligned} u^* : \operatorname{Hom}_R(M, N) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M', N), & f &\longmapsto f \circ u, & \text{und} \\ v_* : \operatorname{Hom}_R(M, N) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N'), & f &\longmapsto v \circ f. \end{aligned}$$

Satz 4.5. (i) Sei

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0 \quad (1)$$

eine Folge von R -Moduln. Die Folge (1) ist genau dann exakt, wenn für jeden R -Modul N die Folge abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{v^*} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{u^*} \operatorname{Hom}_R(M', N) \quad (2)$$

exakt ist.

(ii) Sei

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \quad (3)$$

eine Folge von R -Moduln. Die Folge (3) ist genau dann exakt, wenn für jeden R -Modul M die Folge abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N') \xrightarrow{u_*} \operatorname{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{v_*} \operatorname{Hom}_R(M, N'') \quad (4)$$

exakt ist.

Beweis. Wir zeigen (i) und lassen (ii) als Übungsaufgabe. Sei (1) exakt. Wir betrachten (2) für beliebiges N . Es gilt

- $u^* \circ v^* = (v \circ u)^* = 0^* = 0$, also $\operatorname{im}(v^*) \subset \ker u^*$.
- Wegen v surjektiv folgt v^* injektiv.

Sei nun $\varphi \in \ker(u^*) \subset \operatorname{Hom}_R(M, N)$. Dann gilt $\varphi \circ u = 0$, also faktorisiert φ über $M/\operatorname{im}(u) = M/\ker(v) \cong M''$ und wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ & \searrow v & \nearrow \varphi' \\ & M'' & \end{array}$$

Es folgt $\varphi = v^*(\varphi') \in \operatorname{im}(v^*)$. Wir erhalten $\ker(u^*) = \operatorname{im}(v^*)$.

Sei umgekehrt (2) exakt für alle N . Wir betrachten $M \xrightarrow{v} M''$, setzen $N = \operatorname{coker}(v) = M''/\operatorname{im}(v)$ und betrachten die kanonische Projektion $M'' \xrightarrow{\pi} N$. Es ist $v^*(\pi) = \pi \circ v : M \xrightarrow{v} M'' \xrightarrow{\pi} M''/\operatorname{im}(v) = N$ die Nullabbildung. Wegen

v^* injektiv folgt $\pi = 0$, was wegen π surjektiv $N = 0$ impliziert. Daher ist v surjektiv.

Setze nun $N = M''$ und betrachte $\text{id}_{M''} \in \text{Hom}(M'', N)$. Dann gilt

$$0 = 0^*(\text{id}_{M''}) = u^* \circ v^*(\text{id}_{M''}) = (v \circ u)^*(\text{id}_{M''}),$$

also ist $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \xrightarrow{\text{id}_{M''}} M''$ die Nullabbildung, also $\ker(v) \supset \text{im}(u)$.

Setze nun $N = M/\text{im}(u)$ und betrachte die Projektion $\pi : M \rightarrow N$. Es gilt $u^*(\pi) = 0$, also $\pi \in \ker(u^*) = \text{im}(v^*)$. Daher existiert $\varphi \in \text{Hom}(M'', N)$ mit $\pi = v^*(\varphi) = \varphi \circ v$, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{v} & M'' \\ & \searrow \pi & \swarrow \varphi \\ & M/\text{im}(u) & \end{array}$$

kommutiert. Es folgt $\ker(v) \subset \ker(\pi) = \text{im}(u)$. □

Lemma 4.6. (5er-Lemma) Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_4 & & \downarrow \varphi_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R -Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen. Ist φ_1 surjektiv, φ_2, φ_4 Isomorphismen und φ_5 injektiv, so ist φ_3 ein Isomorphismus.

Beweis. Diagrammjagd. □

Lemma 4.7. (Schlangenlemma) Sei

$$\begin{array}{ccccccccc} (0 \longrightarrow) & M' & \xrightarrow{\alpha'} & M & \xrightarrow{\alpha} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\beta'} & N & \xrightarrow{\beta} & N'' & (\longrightarrow 0) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R -Modulhomomorphismen mit exakten Zeilen. Dann gibt es eine natürliche exakte Folge

$$(0 \rightarrow) \ker(\varphi') \rightarrow \ker(\varphi) \rightarrow \ker(\varphi'') \xrightarrow{\delta} \text{coker}(\varphi') \rightarrow \text{coker}(\varphi) \rightarrow \text{coker}(\varphi'') (\rightarrow 0).$$

Die Klammerinhalte sind so zu interpretieren, dass sie in Voraussetzung und Aussage entweder betrachtet oder ignoriert werden können.

Beweis. Wie ist δ definiert? Wir fassen M' und N' über die Injektionen α' und β' als Untermoduln von M und N auf. Sei $m'' \in \ker(\varphi'') \subset M''$. Wähle $m \in M$ mit $\alpha(m) = m''$. Setze $n = \varphi(m)$. Dann gilt $\beta(n) = \varphi''(\alpha(m)) = \varphi''(m'') = 0 \Rightarrow n \in N'$. Setze $\delta(m'') := n + \text{im}(\varphi') \in \text{coker}(\varphi')$.

Wohldefiniertheit: Sei $\tilde{m} \in M$ ein weiteres Element mit $\alpha(\tilde{m}) = m''$. Dann gilt $m - \tilde{m} \in M'$, also $n = \tilde{n} + \varphi'(m - \tilde{m}) \Rightarrow n + \text{im}(\varphi') = \tilde{n} + \text{im}(\varphi')$.

Exaktheit: Übungsaufgabe in Diagrammjagd. □

5 Flachheit

Satz 5.1. Sei $R = A$ ein kommutativer Ring, und M, N, P A -Moduln. Dann gilt

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)) \cong \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P)$$

Beweis. Wir betrachten die Homomorphismen

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, P)) \xrightleftharpoons[g]{f} \mathrm{Bil}_A(M, N; P)$$

mit $f(\varphi)(x, y) = \varphi(x)(y)$ und $g(\gamma)(x)(y) = \gamma(x, y)$. Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$. Daher folgt die Aussage aus der Universaleigenschaft von \otimes . \square

Sind $f : M \rightarrow N$ und $f' : M' \rightarrow N'$ A -Modulhomomorphismen, so definiert $M \times M' \rightarrow N \otimes_A N', (m, m') \mapsto f(m) \otimes f'(m')$ eine A -bilineare Abbildung und somit einen Homomorphismus $f \otimes f' : M \otimes_A M' \rightarrow N \otimes_A N'$.

Satz 5.2 (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts). Sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ eine exakte Folge von A -Moduln. Dann ist für jeden A -Modul N die Folge

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Nach Satz 4.5 genügt es zu zeigen: Für jeden A -Modul P ist die Folge $0 \rightarrow \mathrm{Hom}_A(M'' \otimes_A N, P) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(M' \otimes_A N, P)$ exakt. Nach Satz 5.1 identifiziert sich diese Folge mit

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M'', P)) &\rightarrow \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M, P)) \\ &\rightarrow \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_A(M', P)), \end{aligned}$$

welche nach Satz 4.5 (erst (i), dann (ii) angewendet) exakt ist. \square

Korollar 5.3. Für einen A -Modul N sind äquivalent:

- (i) Für jede exakte Folge $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ von A -Moduln ist $M' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M'' \otimes_A N$ exakt.
- (ii) Für jede kurze exakte Folge $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ von A -Moduln ist $0 \rightarrow M' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M'' \otimes_A N \rightarrow 0$ exakt.
- (iii) Für jede Inklusion $M' \hookrightarrow M$ ist $M' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N$ injektiv.

Beweis. Die Äquivalenz (ii) \Leftrightarrow (iii) folgt aus Satz 5.2 und (i) \Rightarrow (ii) ist trivial. Nun gelte (ii) und es sei $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ exakt. Setzt man $P' = \text{im}(f) \subset M$ und $P'' = \text{im}(g) \subset M''$, so erhält man drei kurze exakte Folgen $0 \rightarrow \ker(f) \rightarrow M' \rightarrow P' \rightarrow 0$, $0 \rightarrow P' \rightarrow M \rightarrow P'' \rightarrow 0$ und $0 \rightarrow P'' \rightarrow M'' \rightarrow \text{coker}(g) \rightarrow 0$. Diese drei Folgen bleiben exakt nach Tensorieren mit N , d.h. die Folgen $0 \rightarrow \ker(f) \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N \rightarrow P' \otimes_A N \rightarrow 0$, $0 \rightarrow P' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow P'' \otimes_A N \rightarrow 0$ und $0 \rightarrow P'' \otimes_A N \rightarrow M'' \otimes_A N \rightarrow \text{coker}(g) \otimes_A N \rightarrow 0$ sind exakt. Hieraus folgt die Exaktheit von $M' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M'' \otimes_A N$. \square

Definition 5.4. Ein A -Modul N , für den die äquivalenten Eigenschaften von Korollar 5.3 gelten, heißt **flacher** A -Modul.

Lemma 5.5. $\bigoplus_{i \in I} N_i$ flach $\Leftrightarrow N_i$ flach für alle i .

Beweis. Dies folgt direkt aus $M \otimes_A \bigoplus_{i \in I} N_i \cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_A N_i)$ und aus Lemma 4.3. \square

Lemma 5.6. A ist flacher A -Modul.

Beweis. Dies folgt aus $M \otimes_A A \cong M$. \square

Wir sagen N sei direkter Summand in einem freien Modul, wenn ein Modul N' existiert, so dass $N \oplus N'$ frei ist.

Korollar 5.7. Ist N direkter Summand in einem freien Modul, so ist N flach.

Beweis. Nach Lemma 5.5 genügt es zu zeigen: freie Moduln sind flach. Wieder nach Lemma 5.5 genügt es zu zeigen: A ist flach. Dies ist Lemma 5.6. \square

Beispiel 5.8. Sei $A = A_1 \times A_2$ und $\mathfrak{a}_1 = A_1 \times 0$, $\mathfrak{a}_2 = 0 \times A_2$. Dann gilt $A \cong \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$ als A -Moduln. Daher sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ flache A -Moduln.

Bemerkung 5.9. Tensorieren mit einem Modul M erhält Kokerne. Ist M flach, so werden auch Kerne und Bilder erhalten.

Kokerne: $\phi : X \rightarrow X'$ gibt exakte Folge $X \rightarrow X' \rightarrow \text{coker}(\phi) \rightarrow 0$. Tensorieren mit M liefert nach Satz 5.2 die exakte Folge $X \otimes_A M \rightarrow X' \otimes_A M \rightarrow \text{coker}(\phi) \otimes_A M \rightarrow 0$ und somit $\text{coker}(\phi) \otimes_A M = \text{coker}(\phi \otimes_A M)$.

Bilder: Faktorisieren wir $\phi : X \rightarrow X'$ in $X \twoheadrightarrow \text{im}(\phi) \hookrightarrow X'$ und tensorieren mit dem flachen A -Modul M , so erhalten wir $X \otimes_A M \twoheadrightarrow \text{im}(\phi) \otimes_A M \hookrightarrow X' \otimes_A M$ und damit $\text{im}(\phi \otimes_A M) = \text{im}(\phi) \otimes_A M$.

Kerne: Aus der exakten Folge $0 \rightarrow \ker(\phi) \rightarrow X \rightarrow X'$ erhalten wir die exakte Folge $0 \rightarrow \ker(\phi) \otimes_A M \rightarrow X \otimes_A M \rightarrow X' \otimes_A M$, also gilt $\ker(\phi \otimes_A M) = \ker(\phi) \otimes_A M$.

Definition 5.10. Ein A -Modul M heißt **treuflach**, wenn gilt:

$$N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \text{ exakt} \iff N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M \text{ exakt.}$$

Beispiel 5.11. Jeder freie Modul $\neq 0$ ist treuflach (A ist offenbar treuflach, also auch $A^{(I)}$ nach Lemma 4.3).

Eine A -Algebra B heißt (treu)flache Algebra, wenn B (treu)flacher A -Modul ist.

Satz 5.12. Sei B eine flache A -Algebra. Dann sind äquivalent:

- (i) B ist treuflach.
- (ii) $\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a} \quad \forall \mathfrak{a} \subset A$.
- (iii) jedes Primideal von A ist zurückgezogen.
- (iv) jedes Maximalideal von A ist zurückgezogen.
- (v) es gilt $\mathfrak{m}^e \neq (1)$ für jedes Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$.

Insbesondere sind treuflache Homomorphismen injektiv.

Beweis. Wegen $(0)^{ec} = (0)^c = \ker(f)$ ist f genau dann injektiv wenn $(0)^{ec} = (0)$ gilt. Dies zeigt wegen (ii) das “Insbesondere”. Für einen A -Modul M schreiben wir $M_B = M \otimes_A B$ und fügen die folgenden Bedingungen hinzu.

- (vi) $M \neq 0 \implies M_B \neq 0$.
- (vii) die natürliche Abbildung $M \longrightarrow M_B, m \mapsto m \otimes 1$, ist für jeden A -Modul M injektiv.

(i) \implies (vi). Ist $M_B = 0$, so ist die Folge $0 \rightarrow M_B \rightarrow 0$ exakt und aus der Treuflachheit von B folgt die Exaktheit von $0 \rightarrow M \rightarrow 0$, also $M = 0$.

(vi) \implies (i). Sei $N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ so dass $N'_B \xrightarrow{f_B} N_B \xrightarrow{g_B} N''_B$ exakt ist.

Wenden wir Bemerkung 5.9 auf $\phi = g \circ f$ an, erhalten wir $\text{im}(g \circ f)_B = \text{im}(g_B \circ f_B) = 0$, also gilt $\text{im}(g \circ f) = 0$ und daher $g \circ f = 0$. Es folgt $\text{im}(f) \subset \ker(g)$ und wir können den Faktormodul $\ker(g)/\text{im}(f)$ bilden. Erneute Anwendung von Bemerkung 5.9 liefert: $(\ker(g)/\text{im}(f))_B = \ker(g_B)/\text{im}(f_B) = 0$. Wir schließen $\ker(g)/\text{im}(f) = 0$. Daher ist die Folge $N' \rightarrow N \rightarrow N''$ exakt und somit B treuflach.

(vi) \rightarrow (vii). Wir zeigen zunächst:

Behauptung: Sei M ein B -Modul den man durch den Homomorphismus $f : A \rightarrow B$ als A -Modul auffasst. Dann ist der Homomorphismus $\tau : M \rightarrow M_B, m \mapsto m \otimes 1$, injektiv.

Beweis der Behauptung: Die A -bilineare Abbildung

$$M \times B \longrightarrow M, \quad (m, b) \longmapsto bm,$$

induziert einen Homomorphismus $g : M_B \rightarrow M, m \otimes b \mapsto bm$. Es gilt $g \circ \tau = \text{id}_M$. Daher ist τ injektiv.

Sei nun M ein beliebiger A -Modul und $M' = \ker(\tau)$. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M_B$$

induziert die exakte Folge $0 \rightarrow M'_B \rightarrow M_B \hookrightarrow (M_B)_B$, also gilt $M'_B = 0$, und daher $M' = 0$.

(vii) \Rightarrow (ii) Es gilt stets $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}^{ec}$. Setze $M = A/\mathfrak{a}$. Dann ist die Abbildung $A/\mathfrak{a} \rightarrow A/\mathfrak{a} \otimes_A B \stackrel{3.9}{=} B/\mathfrak{a}B = B/\mathfrak{a}^e$ injektiv. Aus $f(a) \in \mathfrak{a}^e$ folgt $a \in \mathfrak{a}$, m.A.W.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{ec}.$$

(ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) und (vii) \Rightarrow (vi) sind trivial.

(iv) \Rightarrow (v). Wäre $\mathfrak{m}^e = (1)$, folgte $\mathfrak{m}^{ec} = (1) \neq \mathfrak{m}$, und \mathfrak{m} wäre kein zurückgezogenes Ideal (vgl. Satz 1.31).

(v) \Rightarrow (vi). Sei $0 \neq x \in M$ und $\mathfrak{a} = \text{Ann}(x)$. Sei $M' = Ax \subset M$. Der Homomorphismus $A \rightarrow M$, $a \mapsto ax$ induziert nach dem Homomorphiesatz einen Isomorphismus $A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} M'$. Nun gilt

$$M'_B \cong A/\mathfrak{a} \otimes_A B = B/\mathfrak{a}B = B/\mathfrak{a}^e$$

Wegen $x \neq 0$ gilt $1 \notin \mathfrak{a}$, also $\mathfrak{a} \subsetneq A$. Daher existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ und wir erhalten $\mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{m}^e \subsetneq B$. Also gilt $M'_B \neq 0$. Da B flach ist, ist die natürliche Abbildung $M'_B \rightarrow M_B$ injektiv, also $M_B \neq 0$. \square

Definition 5.13. Ein Homomorphismus $f : A \rightarrow B$ lokaler Ringe heißt **lokal**, wenn $f(\mathfrak{m}_A) \subset \mathfrak{m}_B$ gilt.

Korollar 5.14. Ein flacher lokaler Homomorphismus lokaler Ringe ist treuflach und insbesondere injektiv.

Beweis. Bedingung (v) von Satz 5.12 ist erfüllt. \square

6 Limites

Definition 6.1. Eine Menge I mit einer Relation \leq heißt **halbgeordnet**, wenn \leq reflexiv und transitiv ist und es gilt: $(i \leq j \text{ und } j \leq i) \Rightarrow i = j$. Die halbgeordnete Menge I heißt **gerichtet**, wenn zu $a, b \in I$ stets ein $c \in I$ mit $a \leq c$ und $b \leq c$ existiert.

Definition 6.2. Sei I eine gerichtete halbgeordnete Menge. Ein über I indiziertes **direktes System** von R -Moduln besteht aus den folgenden Daten

- eine Familie $(M_i)_{i \in I}$ von R -Moduln
- zu jedem Paar $i \leq j$ ein R -Modulhomomorphismus („Übergangsabbildung“) $\varphi_{ij} : M_i \rightarrow M_j$, so dass gilt: $\varphi_{ii} = \text{id}_{M_i}$ und $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ falls $i \leq j \leq k$.

Beispiele 6.3. 1) Sei $I = \mathbb{N}$ mit \leq und

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$$

eine Folge ineinander enthaltener Untermoduln eines R -Moduls M . Die Inklusionen $\varphi_{ij} : M_i \hookrightarrow M_j$ definieren ein direktes System.

2) Sei $I = \mathbb{N}$ mit der multiplikativen Halbordnung, d.h. $i \leq j$ falls $i \mid j$. Setze $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}$ und

$$\varphi_{ij} : \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/j\mathbb{Z}, \quad a + i\mathbb{Z} \longmapsto \frac{j}{i}a + j\mathbb{Z}.$$

3) Sei M ein R -Modul und (M_i) die Familie seiner e.e. Untermoduln (indiziert durch sich selbst und mit \subset als \leq). Dies ist ein direktes System mit den Inklusionen als Übergangsabbildungen.

Sei nun $(M_i)_{i \in I}$ ein direktes System.

Definition 6.4.

$$\varinjlim_{i \in I} M_i = \left(\prod_{i \in I} M_i \right) / \sim$$

mit $m_i \in M_i \sim m_j \in M_j \iff \exists k \in I, i \leq k, j \leq k$ mit $\varphi_{ik}(m_i) = \varphi_{jk}(m_j)$,

heißt der **direkte** (oder auch **induktive**) **Limes** des Systems M_i .

Wir überlegen uns nacheinander

- \sim ist eine Äquivalenzrelation:

- reflexiv, symmetrisch: trivial.
- transitiv, weil I gerichtet.

Sei $m_i \sim m_j$ und $m_j \sim m_k$. Dann existieren $\ell, i \leq \ell, j \leq \ell$: $\varphi_{i\ell}(m_i) = \varphi_{j\ell}(m_j)$ und $m \in I, j \leq m, k \leq m$: $\varphi_{jm}(m_j) = \varphi_{km}(m_k)$. Wähle $n \in I$ mit $\ell, m \leq n$. Dann gilt $\varphi_{in}(m_i) = \varphi_{\ell n}(\varphi_{i\ell}(m_i)) = \varphi_{\ell n}(\varphi_{j\ell}(m_j)) = \varphi_{jn}(m_j) = \varphi_{mn}(\varphi_{jm}(m_j)) = \varphi_{mn}(\varphi_{km}(m_k)) = \varphi_{kn}(m_k)$, also $m_i \sim m_k$.

- es existieren natürliche Abbildungen $\varphi_i : M_i \rightarrow M := \varinjlim_{i \in I} M_i$ für alle $i \in I$ und es gilt für $i \leq j$, dass $\varphi_j \circ \varphi_{ij} = \varphi_i$ (setze M_i in die disjunkte Vereinigung ein und komponiere mit der kanonischen Projektion auf die Faktormenge).
- jedes $m \in M$ liegt in $\text{im}(\varphi_i)$ für ein $i \in I$.
- zu $m, n \in \varinjlim_{i \in I} M$ existiert ein $i \in I$ mit $m, n \in \text{im}(\varphi_i)$ (weil I gerichtet ist)

- $\varinjlim_{i \in I} M_i$ wird zum R -Modul durch:
 - Sei $r \in R$, $m \in \varinjlim_{i \in I} M_i$. Wähle $i \in I$ und $m_i \in M_i$ mit $m = \varphi_i(m_i)$.
 - Setze $rm := \varphi_i(rm_i)$. Dies ist wohldefiniert.
 - Seien $m, n \in \varinjlim_{i \in I} M_i$. Wähle $i \in I$ und $m_i \in M_i$, $n_i \in M_i$ mit $m = \varphi_i(m_i)$, $n = \varphi_i(n_i)$. Setze $m + n = \varphi_i(m_i + n_i)$. Dies ist wohldefiniert.

Lemma 6.5. *Hat I ein maximales Element $i_0 \in I$, so ist*

$$\phi_{i_0} : M_{i_0} \rightarrow M = \varinjlim_{i \in I} M_i$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $m \in M$ beliebig. Dann existiert $i \in I$, $m_i \in M_i$ mit $\varphi_i(m_i) = m$. Wegen $i \leq i_0$ folgt

$$m = \varphi_{i_0} \varphi_{ii_0}(m_i) \in \text{im } \varphi_{i_0}.$$

Daher ist φ_{i_0} surjektiv.

Für $x \in \ker(\varphi_{i_0})$ gilt $\varphi_{i_0}(x) = \varphi_{i_0}(0)$. Nach Definition von \sim folgt die Existenz eines $k \in I$ mit $i_0 \leq k$ und $\varphi_{i_0k}(x) = \varphi_{i_0k}(0) = 0$. Weil i_0 maximal ist, folgt $k = i_0$ und wegen $\varphi_{i_0i_0} = \text{id}_{M_{i_0}}$ folgt $x = 0$. Daher ist φ_{i_0} injektiv. \square

Satz 6.6. *Das Paar*

$$(M = \varinjlim_{i \in I} M_i, (\varphi_i : M_i \longrightarrow M)_{i \in I})$$

erfüllt die folgende Universaleigenschaft:

Sei N ein R -Modul und $\psi_i : M_i \longrightarrow N$, $i \in I$, R -Modulhomomorphismen mit $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij} \quad \forall i \leq j$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter R -Modulhomomorphismus $\psi : M \longrightarrow N$ mit $\psi_i = \psi \circ \varphi_i$, $\forall i$.

Beweis. Wir wählen zu $m \in M$ ein $i \in I$ und $m_i \in M_i$ mit $\varphi_i(m_i) = m$ und setzen $\psi(m) = \psi_i(m_i)$. Das ist offensichtlich die einzig mögliche Definition von ψ . Wir müssen noch nachweisen, dass ψ wohldefiniert ist. Seien also j und $m_j \in M_j$ mit $\varphi_j(m_j) = m$. Z.z.: $\psi_i(m_i) = \psi_j(m_j)$. Nach Definition der Äquivalenzrelation \sim finden wir $k \in I$ mit $i \leq k$, $j \leq k$ und $\varphi_{ik}(m_i) = \varphi_{jk}(m_j)$. Es folgt

$$\psi_i(m_i) = \psi_k(\varphi_{ik}(m_i)) = \psi_k(\varphi_{jk}(m_j)) = \psi_j(m_j). \quad \square$$

Beispiele 6.7. In Beispiel 6.3, 1.) $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M$: $\varinjlim_{i \in \mathbb{N}} M_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subset M$.

In Beispiel 6.3 2): $I = \mathbb{N}$ multiplikativ halbgeordnet, $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\varinjlim_{i \in \mathbb{N}} M_i \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Beweis: Betrachte die natürlichen Isomorphismen

$$\mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} (\frac{1}{i}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \quad a + i\mathbb{Z} \mapsto \frac{a}{i} + \mathbb{Z}.$$

Bezüglich dieser Inklusionen von $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ nach \mathbb{Q}/\mathbb{Z} wird das System M_i isomorph auf das System $(\frac{1}{i}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von Untergruppen von \mathbb{Q}/\mathbb{Z} abgebildet. Daher ist der direkte Limes nichts weiter als die Vereinigung dieser Untergruppen = (ganz) \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . \square

Beispiel 6.3,3): M ein R -Modul und das System seiner endlich erzeugten Untermoduln: der Limes ist M selbst, da jedes Element in einem endlich erzeugten Untermodul enthalten ist.

Es sei $I = \mathbb{N}$ und wir betrachten das konstante System mit Nullabbildungen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots$$

Es gilt

$$\varinjlim_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} = 0$$

wegen $\varphi_{ij}(x) = 0$ für $i < j$.

Satz 6.8. *Es gilt*

$$(i) \quad \left(\varinjlim_{i \in I} M_i \right) \oplus N \cong \varinjlim_{i \in I} (M_i \oplus N).$$

$$(ii) \quad \text{Ist } R = A \text{ kommutativ, so gilt } \left(\varinjlim_{i \in I} M_i \right) \otimes_A N \cong \varinjlim_{i \in I} (M_i \otimes_A N).$$

Beweis. Hier hat man grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Zum einen kann man die expliziten Definitionen auf beiden Seiten vergleichen. Zum anderen kann man nachweisen, dass die jeweils linken und rechten Seiten dieselbe Universaleigenschaft erfüllen. Das lassen wir als Übungsaufgabe. \square

Es seien $(M_i), (N_i)$ zwei über der gleichen gerichteten halbgeordneten Indexmenge I definierte direkte Systeme von R -Moduln.

Definition 6.9. Ein **Homomorphismus** $(f_i)_{i \in I}$ von (M_i) nach (N_i) ist eine Familie von R -Modulhomomorphismen $f_i : M_i \rightarrow N_i$, $i \in I$, so dass $\varphi_{ij}^N \circ f_i = f_j \circ \varphi_{ij}^M$ für alle $i \leq j$ gilt.

Lemma 6.10. $(f_i)_{i \in I}$ induziert einen natürlichen R -Modulhomomorphismus

$$f : \varinjlim_{i \in I} M_i \rightarrow \varinjlim_{i \in I} N_i.$$

Beweis. Sei $N = \varinjlim_{i \in I} N_i$. Die Kompositionen $M_i \rightarrow N_i \rightarrow N$ bilden ein kompatibles System und induzieren nach Universaleigenschaft des direkten Limes einen natürlichen Homomorphismus $\varinjlim_{i \in I} M_i \rightarrow N$. \square

Definition 6.11. Eine Folge

$$(M_i) \xrightarrow{(f_i)} (N_i) \xrightarrow{(g_i)} (K_i)$$

von direkten Systemen heißt **exakt**, wenn für jedes $i \in I$ die Folge von R -Moduln

$$M_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{g_i} K_i$$

exakt ist.

Satz 6.12. Ist $(M_i) \xrightarrow{(f_i)} (N_i) \xrightarrow{(g_i)} (K_i)$ eine exakte Folge direkter Systeme, so ist die Folge

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \xrightarrow{f} \varinjlim_{i \in I} N_i \xrightarrow{g} \varinjlim_{i \in I} K_i$$

exakt.

Beweis. Wegen $g_i \circ f_i = 0$ für alle i folgt $g \circ f = 0$, also $\text{im}(f) \subset \ker(g)$. Wir zeigen Gleichheit. Sei $n \in N = \varinjlim_{i \in I} N_i$ mit $g(n) = 0$. Wähle $i, n_i \in N_i$ mit $n = \varphi_i^N(n_i)$. Dann gilt $\varphi_i^K(g_i(n_i)) = 0 \implies \exists j \geq i : \varphi_{ij}^K(g_i(n_i)) = 0 \implies \varphi_{ij}^N(n_i) \in \ker(g_j) = \text{im}(f_j) \implies \exists m_j \in M_j$ mit $f_j(m_j) = n_j := \varphi_{ij}^N(n_i) \implies n = f(m)$ mit $m = \varphi_j^M(m_j) \in M$. \square

Korollar 6.13. Der direkte Limes eines Systems flacher A -Moduln ist ein flacher A -Modul.

Beweis. Ist $M = \varinjlim M_i$ mit flachen Moduln M_i und $N' \rightarrow N \rightarrow N''$ eine exakte Folge, so ist nach Satz 6.8 (ii) die Folge $M \otimes_A N' \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N''$ der direkte Limes der exakten Folgen $M_i \otimes_A N' \rightarrow M_i \otimes_A N \rightarrow M_i \otimes_A N''$ und daher nach Satz 6.12 exakt. \square

Korollar 6.14. Ist jeder e.e. Untermodul von M flach, so auch M selbst.

Beweis. M ist die Vereinigung, also der direkte Limes seiner e.e. Untermoduln. \square

Definition 6.15. Eine Teilmenge $J \subset I$ heißt **kofinal**, wenn zu jedem $i \in I$ ein $j \in J$ mit $i \leq j$ existiert.

Eine kofinale Teilmenge einer gerichteten halbgeordneten Menge ist wieder gerichtet und durch Einschränkung definiert jedes über I indizierte direkte System $(M_i)_{i \in I}$ ein direktes System $(M_j)_{j \in J}$.

Lemma 6.16. Sei $J \subset I$ kofinal. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi : \varinjlim_{j \in J} M_j \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i \in I} M_i.$$

Beweis. Die natürliche Inklusion

$$\coprod_{j \in J} M_j \hookrightarrow \coprod_{i \in I} M_i$$

induziert nach Austeilen der Äquivalenzrelationen den behaupteten Homomorphismus Φ .

Für $m_j \in M_j$ gelte $\varphi_{ji}(m_j) = 0$ für ein $i \in I$. Da J kofinal in I ist, existiert ein $j' \in J$ mit $i \leq j'$ und somit $\varphi_{jj'}(m_j) = \varphi_{ij'}\varphi_{ji}(m_j) = 0$. Dies zeigt die Injektivität von Φ .

Für $m_i \in M_i$, $i \in I$ existiert ein $j \in J$ mit $i \leq j$. Wegen $\varphi_i(m_i) = \varphi_j\varphi_{ij}(m_j)$, ist Φ surjektiv. \square

Lemma 6.17. Sei I eine abzählbare gerichtete halbgerichtete Menge. Dann hat I ein maximales Element oder es existiert eine kofinale Teilmenge $J \subset I$ mit $J \cong \mathbb{N}$ als halbgeordnete Mengen.

Beweis. Sei $I = \{i_1, i_2, \dots\}$. Wähle $j_1 = i_1$, dann j_2 mit $j_2 \geq j_1$ und $j_2 \geq i_2$, dann $j_3 \geq j_2$, $j_3 \geq i_3, \dots$; und setze $J = \{j_1, j_2, \dots\}$. Dann ist J kofinal, und wenn I kein maximales Element besitzt, gilt $J \cong \mathbb{N}$ als halbgeordnete Menge. \square

Moral: Für abzählbare Limites kann man sich auf den Fall $I = \mathbb{N}$ zurückziehen. Sei (I, \leq) eine gerichtete h.g. Menge.

Definition 6.18. Ein über I indiziertes **projektives System** von R -Moduln besteht aus

- einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von R -Moduln
- zu $i \leq j$ ein R -Modulhomomorphismus $\varphi_{ij} : M_j \rightarrow M_i$ so dass $\varphi_{ii} = \text{id}_{M_i}$ und $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$ falls $i \leq j \leq k$.

Beispiele 6.19. 1) Sei $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \dots$ eine absteigende Folge von Untermoduln eines R -Moduls M . Die Inklusionen $M_j \subset M_i$, $i \leq j$ definieren ein durch \mathbb{N} indiziertes projektives System.

2) $I = \mathbb{N}$, p Primzahl.

$$M_i = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}, \quad i \leq j,$$

die kanonische Projektion.

3) $I = \mathbb{N}$ mit multiplikativer Anordnung $M_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$, und für $i \mid j$ betrachten wir die kanonische Projektion $\mathbb{Z}/j\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$.

Definition 6.20.

$$\varprojlim_{i \in I} M_i = \left\{ (m_i) \in \prod_{i \in I} M_i \mid \varphi_{ij}(m_j) = m_i \quad \forall i \leq j \right\}$$

heißt der **projektive Limes** des projektiven Systems $(M_i)_{i \in I}$.

Bemerkungen 6.21. • $\varprojlim_{i \in I} M_i$ ist ein R -Untermodul von $\prod_{i \in I} M_i$.

• die Projektionen definieren natürliche Homomorphismen

$$\varphi_j : \varprojlim_{i \in I} M_i \longrightarrow M_j$$

für alle $j \in I$.

Satz 6.22. Das Paar

$$(M = \varprojlim_{i \in I} M_i, (\varphi_i)_{i \in I})$$

erfüllt die folgende *Universaleigenschaft*:

Sei N ein R -Modul und $\psi_i : N \longrightarrow M_i$, $i \in I$, Homomorphismen, so dass für $i \leq j$ gilt: $\psi_i = \varphi_{ij} \circ \psi_j$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter R -Modulhomomorphismus $\psi : N \longrightarrow M$ mit $\psi_i = \varphi_i \circ \psi$ für alle $i \in I$.

Beweis. Die ψ_i definieren einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $N \rightarrow \prod_{i \in I} M_i$, dessen Bild in $\varprojlim_{i \in I} M_i$ liegt. \square

Beispiele 6.23. • 6.19, 1) $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ Untermoduln \implies

$$\varprojlim_{i \in \mathbb{N}} M_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i.$$

• 6.19, 2) der projektive Limes heißt \mathbb{Z}_p .

• 6.19, 3) der projektive Limes heißt $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Die Definitionen der Begriffe „Homomorphismus projektiver Systeme“ und „exakte Folge projektiver Systeme“ sind offensichtlich. Ein Homomorphismus $(f_i)_{i \in I} : (M_i) \rightarrow (N_i)$ projektiver Systeme induziert einen Homomorphismus

$$f : \varprojlim_{i \in I} M_i \longrightarrow \varprojlim_{i \in I} N_i$$

im projektiven Limes.

Satz 6.24. Sei

$$0 \longrightarrow (M'_i) \xrightarrow{(f_i)} (M_i) \xrightarrow{(g_i)} (M''_i)$$

eine exakte Folge projektiver Systeme. Dann ist die Folge

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{i \in I} M'_i \xrightarrow{f} \varprojlim_{i \in I} M_i \xrightarrow{g} \varprojlim_{i \in I} M''_i$$

exakt.

Beweis. f ist injektiv wegen des kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim M'_i & \hookrightarrow & \prod_i M'_i \\ \downarrow f & & \downarrow \text{hook} \\ \varprojlim M_i & \hookrightarrow & \prod_i M_i \end{array}$$

und $g \circ f = 0$ ist klar. Wir fassen die M'_i und $\varprojlim M'_i$ über f_i und f als Untermoduln von M_i und $\varprojlim M_i$ auf. Sei $m = (m_i) \in \ker(g)$. Dann gilt $m_i \in \ker(g_i) = M'_i$ für alle i . Deshalb gilt $m \in \varprojlim M'_i$. \square

Bemerkung 6.25. Die Exaktheit nach rechts wird nicht notwendig erhalten.

Beispiel 6.26. Wir betrachten die exakten Folgen projektiver Systeme (über \mathbb{N} indiziert)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot p^{n+1}} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \cdot p & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \text{pr} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot p^n} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Das System links ist über die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} M_{n+1} = \mathbb{Z} & \xrightarrow[\sim]{\cdot p^{n+1}} & p^{n+1}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \\ \downarrow \cdot p & & \downarrow \\ M_n = \mathbb{Z} & \xrightarrow[\sim]{\cdot p^n} & p^n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \end{array}$$

isomorph zum projektiven System

$$p\mathbb{Z} \supset p^2\mathbb{Z} \supset \dots$$

ineinander enthaltener Untergruppen von \mathbb{Z} . Daher ist der projektive Limes isomorph zu

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n \mathbb{Z} = 0.$$

Wir erhalten im projektiven Limes die Folge

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$$

und sehen so, dass \mathbb{Z} injektiv in \mathbb{Z}_p liegt. Aber es existieren Elemente in \mathbb{Z}_p , die nicht in \mathbb{Z} liegen (siehe Übungsaufgaben). Daher werden Surjektionen beim Übergang zum projektiven Limes nicht notwendig erhalten.

Lemma 6.27. Sei $J \subset I$ eine kofinale Teilmenge. Dann ist für jedes projektive System $(M_i)_{i \in I}$ die natürliche Abbildung

$$\varprojlim_{i \in I} M_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{j \in J} M_j$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Für ein

$$(m_i)_{i \in I} \in \varprojlim_{i \in I} M_i = \left\{ \prod_{i \in I} M_i \mid \varphi_{ii'}(m_{i'}) = m_i \quad \forall i \leq i' \right\}$$

ergeben sich die m_i für $i \in I \setminus J$ eindeutig aus den m_j für $j \in J$, da nämlich J kofinal in I ist. \square

Bemerkung 6.28. Man kann direkte und projektive Limites auch von Systemen von Mengen, Gruppen und Ringen bilden. Die Konstruktionen und universellen Eigenschaften bleiben die gleichen und kommutieren mit dem Vergessen von Struktur.

7 Lokalisierung

Sei A ein kommutativer Ring mit 1.

Definition 7.1. Eine Teilmenge $S \subset A$ heißt **multiplikativ abgeschlossen**, wenn $1 \in S$ und es gilt $s, s' \in S \Rightarrow ss' \in S$.

Problem. Die Relation \sim auf $A \times S$ mit $(a, s) \sim (a', s') \iff as' - a's = 0$ ist im Allgemeinen **keine** Äquivalenzrelation (nur wenn A nullteilerfrei).

Definition 7.2. Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Die Lokalisierung $S^{-1}A$ ist definiert durch

$$S^{-1}A = A \times S / \sim$$

mit

$$(a, s) \sim (a', s') \stackrel{\text{df}}{=} \exists s'' \in S \text{ mit } s''(as' - a's) = 0.$$

$S^{-1}A$ ist ein kommutativer Ring mit 1 durch

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}, \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'},$$

wobei $\frac{a}{s} \in S^{-1}A$ die Äquivalenzklasse von (a, s) bezüglich \sim bezeichnet.

Wir zeigen, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist. Dass die algebraischen Operationen auf $S^{-1}A$ wohldefiniert sind, lassen wir als Übungsaufgabe.

- \sim reflexiv und symmetrisch: klar.
- Transitivität: es gelte $(a, s) \sim (a', s')$ und $(a', s') \sim (a'', s'')$. Also existieren $t_1, t_2 \in S$ mit $t_1(as' - a's) = 0 = t_2(a's'' - a''s')$.
Hieraus folgt
 $0 = t_1t_2s''(as' - a's) + t_1t_2s(a's'' - a''s') = t_1t_2s'(as'' - a''s)$, also $(a, s) \sim (a'', s'')$.

Beispiele 7.3. • Sei $x \in A$ ein Element. Dann ist $S = \{1, x, x^2, \dots\}$ multiplikativ abgeschlossen. Man setzt $A_x = S^{-1}A$.

- Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist (dies ist sogar gdw.) $S = A \setminus \mathfrak{p}$ multiplikativ abgeschlossen. Man setzt $A_{\mathfrak{p}} := S^{-1}A$ (die Lokalisierung von A bei \mathfrak{p}).
- Sei A nullteilerfrei, also (0) ist Primideal:

$$Q(A) := A_{(0)} = (A \setminus \{0\})^{-1}A$$

ist per definitionem der Quotientenkörper von A .

Lemma 7.4. Es gilt

$$S^{-1}A = 0 \iff 0 \in S.$$

Beweis. \Leftarrow Sei $0 \in S$. Wegen $0 \cdot (as' - a's) = 0$ für alle $a, a' \in A, s, s' \in S$, besteht $S^{-1}A$ aus genau einem Element.

\Rightarrow Gilt $S^{-1}A = 0$, so folgt insbesondere $(1, 1) \sim (0, 1)$. Also existiert $s \in S$ mit $0 = s(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = s$. \square

Korollar 7.5. $A_x = 0 \iff x$ nilpotent.

Die Abbildung $\varphi : A \rightarrow S^{-1}A, a \mapsto \frac{a}{1}$ ist ein Ringhomomorphismus. Wegen $\frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} = \frac{1}{1}$ bildet sich jedes $s \in S$ nach $(S^{-1}A)^{\times}$ ab.

Lemma 7.6. (Universaleigenschaft der Lokalisierung)

Zu jedem Ringhomomorphismus $f : A \rightarrow B$ mit $f(s) \in B^\times$ für alle $s \in S$ existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus $g : S^{-1}A \rightarrow B$ mit $f = g \circ \varphi$.

Beweis. Existenz: Setze $g(\frac{a}{s}) = f(s)^{-1} \cdot f(a)$

Wohldefiniertheit: Übungsaufgabe.

Eindeutigkeit: Für g ist die obige Gleichung zwingend

$$\begin{aligned} g(\frac{a}{s}) = g(\frac{1}{s} \cdot a) &= g(\frac{1}{s})g(a) \\ &= g(s)^{-1}g(a) \\ &= f(s)^{-1}f(a) \end{aligned}$$

□

Ist A nullteilerfrei und sind $S \subset T$ multiplikativ abgeschlossene Teilmengen mit $0 \notin T$, so ist der natürliche Homomorphismus

$$\phi_{S,T} : S^{-1}A \longrightarrow T^{-1}A$$

injektiv. Grund $\phi_{S,T}(\frac{a}{s}) = 0 \Rightarrow \exists t \in T$:

$$ta = 0 \implies a = 0 \implies \frac{a}{s} = 0.$$

Für $T = A \setminus \{0\}$ erhalten wir

$$S^{-1}A \subset Q(A) \quad \text{für} \quad S \subset A \setminus \{0\}.$$

Als Teilring eines Körpers ist $S^{-1}A$ wieder nullteilerfrei.

Für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ setzen wir

$$S^{-1}\mathfrak{a} = \left\{ \frac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in \mathfrak{a}, s \in S \right\}.$$

Dies ist ein Ideal in $S^{-1}A$. Es gilt bzgl. $\phi : A \rightarrow S^{-1}A$, dass $\mathfrak{a}^e = S^{-1}\mathfrak{a}$.

Grund: jedes Element in \mathfrak{a}^e ist von der Form $\sum_{\text{endl.}} \frac{a_i}{s_i}$, $a_i \in \mathfrak{a}$, $s_i \in S$. Suche Hauptnenner.

Satz 7.7. Für den kanonischen Homomorphismus $\phi : A \rightarrow S^{-1}A$ gilt:

- (i) Jedes Ideal in $S^{-1}A$ ist von der Form $\mathfrak{a}^e = S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.
- (ii) Für $\mathfrak{a} \subset A$ gilt

$$\mathfrak{a}^{ec} = \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s).$$

Insbesondere gilt $\mathfrak{a}^e = (1) \Leftrightarrow \mathfrak{a} \cap S \neq \emptyset$.

- (iii) $\mathfrak{a} \subset A$ ist Kontraktion eines Ideals in $S^{-1}A \Leftrightarrow$ für kein $s \in S$ ist $s + \mathfrak{a}$ Nullteiler in A/\mathfrak{a} .

- (iv) Die Zuordnung $\mathfrak{p} \mapsto S^{-1}\mathfrak{p}$ gibt eine Bijektion zwischen den Primidealen in $S^{-1}A$ und den Primidealen $\mathfrak{p} \subset A$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.
- (v) S^{-1} kommutiert mit endlichen Summen, endlichen Produkten und endlichen Durchschnitten von Idealen, sowie mit Radikalbildung.

Beweis. (i) Sei $\mathfrak{b} \subset S^{-1}A$ ein Ideal und sei $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$. Dann gilt $\frac{x}{1} = \frac{s}{1} \cdot \frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$, also $x \in \mathfrak{b}^c$ also $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}^{ce}$. Dies zeigt $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}^{ce}$. Die Inklusion $\mathfrak{b}^{ce} \subset \mathfrak{b}$ gilt nach Satz 1.31, also gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{ce}$. Insbesondere ist jedes Ideal in $S^{-1}A$ erweitert.

(ii) Für $x \in \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$ gilt $sx \in \mathfrak{a}$ für ein $s \in S$, also $\frac{x}{1} = \frac{sx}{s} \in \mathfrak{a}^e$, und somit $x \in \mathfrak{a}^{ec}$. Sei nun $x \in \mathfrak{a}^{ec} = (S^{-1}\mathfrak{a})^c$. Dann gilt $\frac{x}{1} = \frac{a}{s}$ für gewisse $a \in \mathfrak{a}$, $s \in S \Rightarrow (xs - a)t = 0$ für ein $t \in S \Rightarrow xst = at \in \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \bigcup_{s \in S} (\mathfrak{a} : s)$.

(iii) $\mathfrak{a} \in C \stackrel{1.31}{\Leftrightarrow} \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a} \Leftrightarrow \mathfrak{a}^{ec} \subset \mathfrak{a} \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} (sx \in \mathfrak{a} \text{ für ein } s \in S \Rightarrow x \in \mathfrak{a}) \Leftrightarrow \text{kein } s \in S \text{ ist Nullteiler in } A/\mathfrak{a}$.

(iv) Sei $\mathfrak{q} \subset S^{-1}A$ ein Primideal. Dann ist $\mathfrak{q}^c \subset A$ ein Primideal mit $\mathfrak{q}^c \cap S = \emptyset$ (ansonsten existierte $s \in S$ mit $\frac{s}{1} \in \mathfrak{q}$, also $\frac{1}{1} = \frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1} \in \mathfrak{q}$ Widerspruch.). Nach (i) ist \mathfrak{q} selbst eine Erweiterung. Nach Satz 1.31 folgt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^{ce}$. Daher ist die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Primideale in} \\ S^{-1}A \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q}^c} \left\{ \begin{array}{c} \text{Primideale } \mathfrak{p} \subset A \text{ mit} \\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \end{array} \right\}$$

injektiv. Bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ und \bar{S} das Bild von S in A/\mathfrak{p} . Die natürliche Abbildung $S^{-1}A \rightarrow \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p})$, $\frac{a}{s} \mapsto \frac{\bar{a}}{\bar{s}}$ induziert den Isomorphismus

$$S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p} \cong \bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p}).$$

Wegen $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ folgt $0 \notin \bar{S}$, also $\bar{S} \subset A/\mathfrak{p} \setminus \{0\}$ und weil A/\mathfrak{p} nullteilerfrei ist, ist $\bar{S}^{-1}A/\mathfrak{p} \subset Q(A/\mathfrak{p})$ auch nullteilerfrei. Daher ist $\mathfrak{p}^e = S^{-1}\mathfrak{p}$ ein Primideal in $S^{-1}A$.

Schließlich gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$ wegen

$$x \in \mathfrak{p}^{ec} \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} \exists s \in S \text{ mit } sx \in \mathfrak{p} \stackrel{\mathfrak{p} \cap S = \emptyset}{\Leftrightarrow} x \in \mathfrak{p}.$$

Dies zeigt die Surjektivität.

(v) Unter Beachtung von $S^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^e$ folgt dies aus Lemma 1.21 und Lemma 1.23. \square

Korollar 7.8. Ist \mathfrak{N} das Nilradikal von A , so ist $S^{-1}\mathfrak{N}$ das Nilradikal von $S^{-1}A$.

Beweis. $\mathfrak{N} = r((0))$. \square

Korollar 7.9. Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal, so ist $A_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Ring mit Maximalideal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Die Primideale in $A_{\mathfrak{p}}$ stehen in 1 : 1 Korrespondenz zu den Primidealen in A , die in \mathfrak{p} enthalten sind.

Beweis. Setze $S = A \setminus \mathfrak{p}$ in Satz 7.7 (iv). \square

Satz 7.10. Sei $f : A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ für ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ genau dann, wenn $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$.

Beweis. Dieselbe Aussage für (nicht notwendig Prim-) Ideale ist Satz 1.31. Es verbleibt daher zu zeigen, dass ein Primideal, das Kontraktion eines Ideals ist, auch Kontraktion eines Primideals ist. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein kontrahiertes Primideal. Nach Satz 1.31 gilt $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{ec}$. Sei S das Bild von $A \setminus \mathfrak{p}$ in B . Beachte: S ist multiplikativ abgeschlossen. Wegen $\emptyset = \mathfrak{p} \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^{ec} \cap (A \setminus \mathfrak{p})$ folgt $\mathfrak{p}^e \cap S = \emptyset$. Daher ist $S^{-1}(\mathfrak{p}^e) \subset S^{-1}B$ ein Ideal $\neq (1)$. Nach Korollar 1.6 existiert ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}B$ mit $S^{-1}(\mathfrak{p}^e) \subset \mathfrak{m}$. Sei \mathfrak{q} das Urbild von \mathfrak{m} in B . Dann ist \mathfrak{q} ein Primideal mit $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^e$, $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$. Wir erhalten $\mathfrak{q}^c \supset \mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}^c \cap (A \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$, also $\mathfrak{q}^c \subset \mathfrak{p}$. Wir erhalten $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$. \square

Korollar 7.11. Sei $f : A \rightarrow B$ ein flacher Ringhomomorphismus. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist treuflach.
- (ii) jedes Primideal in A ist Urbild eines Primideals in B .
- (iii) jedes Maximalideal in A ist Urbild eines Maximalideals in B .

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Nach Satz 5.12 gilt $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p} \ \forall \mathfrak{p}$. Nach Satz 7.10 existiert ein Primideal $\mathfrak{q} \subset B$ mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$.

(i) \Rightarrow (iii). Nach Satz 5.12 gilt $\mathfrak{m}^e \neq (1)$. Sei $\mathfrak{n} \subset B$ ein Maximalideal mit $\mathfrak{m}^e \subset \mathfrak{n}$. Dann gilt $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}^c \subsetneq (1)$, also $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^c$.

(ii) \Rightarrow (i) und (iii) \Rightarrow (i). Nach Satz 1.31 (iii) gilt $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ für jedes Primideal (bzw. $\mathfrak{m}^{ec} = \mathfrak{m}$ für jedes Maximalideal). Nach Satz 5.12 folgt die Treuflachheit. \square

Lokalisierung von Moduln

Sei A ein kommutativer Ring und $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

Definition 7.12. Für einen A -Modul M sei $S^{-1}M = M \times S / \sim$ mit

$$(m, s) \sim (m', s') \iff \exists t \in S : t(s'm - sm') = 0.$$

Die Äquivalenzklasse von (m, s) wird mit $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ bezeichnet.

$S^{-1}M$ wird zum $S^{-1}A$ -Modul durch:

- $\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'}$
- $\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{s'} = \frac{am}{ss'}$.

Ein Homomorphismus $f : M' \rightarrow M$ induziert einen Homomorphismus $S^{-1}f : S^{-1}M' \rightarrow S^{-1}M$ durch $S^{-1}f\left(\frac{m'}{s}\right) := \frac{f(m')}{s}$.

Satz 7.13. Die Operation S^{-1} ist exakt, d.h. für jede exakte Folge $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ von A -Moduln ist die Folge von $S^{-1}A$ -Moduln $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ exakt.

Beweis. Wegen $g \circ f = 0$ folgt $S^{-1}g \circ S^{-1}f = 0$, also $\text{im}(S^{-1}f) \subset \ker(S^{-1}g)$. Sei $\frac{m}{s} \in \ker(S^{-1}f)$. Dann gilt $\frac{g(m)}{s} = 0$ in $S^{-1}M''$, daher existiert ein $t \in S$ mit $tg(m) = 0$ in M . Also $tm \in \ker(g) = \text{im}(f)$. Wähle $m' \in M'$ mit $f(m') = tm$. Dann gilt $S^{-1}f\left(\frac{m'}{ts}\right) = \frac{m}{s} \implies \ker(S^{-1}f) = \text{im}(S^{-1}f)$. \square

Korollar 7.14. Sei M ein A -Modul und $N, P \subset M$ Untermoduln. Dann gilt

- (i) $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P$.
- (ii) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$.
- (iii) $S^{-1}M/S^{-1}N \cong S^{-1}(M/N)$.

Beweis. Wegen der Exaktheit der Lokalisierung sind $S^{-1}N, S^{-1}P, \dots$ Untermoduln von $S^{-1}M$.

(i) Es ist $S^{-1}(N + P)$ die Menge aller Elemente der Form $\frac{n+p}{s} \in S^{-1}M$ mit $n \in N, p \in P, s \in S$. Dies ist offensichtlich ein Untermodul von $S^{-1}N + S^{-1}P$, welches die Menge aller Elemente der Form $\frac{n}{s} + \frac{p}{t}$ mit $n \in N, p \in P, s, t \in S$ ist. Nun gilt

$$\frac{n}{s} + \frac{p}{t} = \frac{tn + sp}{st} \in S^{-1}(N + P),$$

was Gleichheit zeigt.

(ii) Hier ist die Inklusion $S^{-1}(N \cap P) \subset S^{-1}N \cap S^{-1}P$ offensichtlich. Sei nun $x \in S^{-1}N \cap S^{-1}P$, d.h. es gibt Darstellungen $x = \frac{n}{s} = \frac{p}{t}$, $n \in N, p \in P, s, t \in S$. Nach Definition existiert $r \in S$ mit $rtn = rsp \in N \cap P$. Es gilt daher $x = \frac{rtn}{rts} \in S^{-1}(N \cap P)$.

Für (iii) wendet man die Exaktheit der Lokalisierung Satz 7.13 auf die exakte Folge $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$ an. \square

Satz 7.15. Es existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}A \otimes_A M & \xrightarrow{\sim} & S^{-1}M \\ \frac{a}{s} \otimes m & \longmapsto & \frac{am}{s} \end{array}$$

Beweis. Die Abbildung $S^{-1}A \times M \longrightarrow S^{-1}M, \left(\frac{a}{s}, m\right) \longmapsto \frac{am}{s}$ ist A -bilinear und induziert den Homomorphismus im Satz. Nennen wir ihn f . Wegen $\frac{m}{s} = f\left(\frac{1}{s} \otimes m\right)$ ist f surjektiv. Sei nun

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \in S^{-1}A \otimes_A M$$

ein beliebiges Element und setze $s = \prod_{i=1}^n s_i$ und $t_i = \prod_{j \neq i} s_j$.

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s_i} \otimes m_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i t_i}{s} \otimes m_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m = \frac{1}{s} \otimes \sum_{i=1}^n a_i t_i m_i.$$

Daher ist jedes Element in $S^{-1}A \otimes_A M$ von der Form $\frac{1}{s} \otimes m$.

Sei nun $\frac{1}{s} \otimes m \in \ker(f)$. Dann gilt $\frac{m}{s} = 0$ in $S^{-1}M \implies tm = 0$ für ein $t \in S \implies \frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0$. Dies zeigt die Injektivität. \square

Korollar 7.16. $S^{-1}A$ ist eine flache A -Algebra.

Beweis. Nach Satz 7.15 ist Tensorieren mit $S^{-1}A$ dasselbe, wie nach S zu Lokalisieren. Nach Satz 7.13 ist Lokalisierung exakt. \square

Lemma 7.17. Für A -Moduln M, N existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N & \xrightarrow{\sim} & S^{-1}(M \otimes_A N) \\ \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} & \longmapsto & \frac{m \otimes n}{st} \end{array}$$

Beweis. Nach Satz 7.15 haben wir

$$S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \cong (S^{-1}A \otimes_A M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}A \otimes_A N).$$

Nach Satz 3.14(ii) ist dies isomorph zu $S^{-1}A \otimes_A M \otimes_A N$, was wiederum nach Satz 7.15 isomorph zu $S^{-1}(M \otimes_A N)$ ist. Die Gesamtabbildung ist die angegebene. \square

Definition 7.18. Eine Eigenschaft E von A oder eines A -Moduls M heißt **lokale Eigenschaft** wenn gilt

A (oder M) erfüllt $E \Leftrightarrow A_{\mathfrak{p}}$ (oder $M_{\mathfrak{p}}$) erfüllt E für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$.

Satz 7.19. Sei M ein A -Modul. Dann sind äquivalent:

- (i) $M = 0$.
- (ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle Primideale \mathfrak{p} .
- (iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle Maximalideale \mathfrak{m} .

Hierbei ist $M_{\mathfrak{p}} = S^{-1}M$ mit $S = A \setminus \mathfrak{p}$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) ist trivial.

(iii) \Rightarrow (i). Sei $0 \neq x \in M$. Wir zeigen: es existiert ein Maximalideal \mathfrak{m} mit $\frac{x}{1} \neq 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$. Wir betrachten den Annulator $\text{Ann}(x) := \{a \in A \mid ax = 0\}$. Dies ist ein Ideal $\neq A$, daher existiert ein Maximalideal \mathfrak{m} mit $\text{Ann}(x) \subset \mathfrak{m}$. Wäre nun $\frac{x}{1} = 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$, so existierte ein $s \in A \setminus \mathfrak{m}$ mit $sx = 0$. Aber $s \notin \text{Ann}(x)$. Widerspruch. \square

Satz 7.20. Sei $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ eine Folge von A -Moduln. Dann sind äquivalent:

- (i) $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ exakt.

- (ii) $M'_p \xrightarrow{f_p} M_p \xrightarrow{g_p} M''_p$ exakt $\forall p$
 (iii) $M'_m \xrightarrow{f_m} M_m \xrightarrow{g_m} M''_m$ exakt $\forall m$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) folgt aus der Exaktheit der Lokalisierung und (ii) \Rightarrow (iii) ist trivial.

(iii) \Rightarrow (i): Da Lokalisierung exakt ist, kommutiert sie mit Kernen, Kokernen und Bildern. Wir erhalten $0 = \text{im}(g_m \circ f_m) = \text{im}(g \circ f)_m \forall m$. Nach Satz 7.19 gilt also $g \circ f = 0$. Wir erhalten $\text{im}(f) \subset \ker(g)$ und wollen Gleichheit zeigen. Sei $N = \ker(g)/\text{im}(f)$. Wegen der Exaktheit der Lokalisierung gilt $N_m = \ker(g_m)/\text{im}(f_m) = 0 \forall m$, also $N = 0$. \square

Korollar 7.21. (i) $f : M \rightarrow N$ ist injektiv $\Leftrightarrow f_m : M_m \rightarrow N_m$ ist injektiv $\forall m$.

(ii) $f : M \rightarrow N$ ist surjektiv $\Leftrightarrow f_m : M_m \rightarrow N_m$ ist surjektiv $\forall m$.

Beweis. Man wende Satz 7.20 auf die Folge $0 \rightarrow M \rightarrow N$ bzw. auf die Folge $M \rightarrow N \rightarrow 0$ an. \square

Korollar 7.22. Es sind äquivalent:

- (i) M ist flacher A -Modul.
 (ii) M_p ist flacher A_p -Modul $\forall p$.
 (iii) M_m ist flacher A_m -Modul $\forall m$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) Für jeden A_p -Modul N gilt nach Satz 7.15: $N \otimes_{A_p} M_p = N \otimes_{A_p} \otimes_{A_p} \otimes_A M \stackrel{3.14}{=} N \otimes_A M$. Daher ist M_p flacher A_p -Modul wenn M flacher A -Modul ist.

(ii) \Rightarrow (iii) ist trivial.

(iii) \Rightarrow (i). Sei $N' \rightarrow N \rightarrow N''$ exakt. Wegen $(N \otimes_A M)_m = N_m \otimes_{A_m} M_m$ ist für jedes m die Folge

$$(N' \otimes_A M)_m \longrightarrow (N \otimes_A M)_m \longrightarrow (N'' \otimes_A M)_m$$

exakt, also nach Satz 7.20 auch $N' \otimes_A M \longrightarrow N \otimes_A M \longrightarrow N'' \otimes_A M$. \square

Später werden wir zeigen, dass endlich erzeugte flache Moduln über einem lokalen Ring frei sind. Korollar 7.22 ist für endlich erzeugte Moduln also zu lesen als: „flach = lokal frei“.

Sei A nullteilerfrei und M ein A -Modul.

Definition 7.23. $TM = \{x \in M \mid ax = 0 \text{ für ein } a \neq 0\}$

heißt der **Torsionsuntermodul** von M . M heißt **torsionsfrei**, wenn $TM = 0$.

Lemma 7.24. Sei A nullteilerfrei. Dann ist jeder flache A -Modul torsionsfrei.

Beweis. Sei M ein flacher A -Modul. Für $0 \neq a \in A$ tensorieren wir die exakte Folge $0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} A$ mit M und erhalten die exakte Folge

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a} M.$$

Die Exaktheit bedeutet, dass $ax = 0$ nur für $x = 0$ auftritt. Da $a \neq 0$ beliebig war, ist M torsionsfrei. \square

Mit A sind auch die Lokalisierungen $A_{\mathfrak{p}}$ nullteilerfrei und wir können somit auch über Torsionsfreiheit über den $A_{\mathfrak{p}}$ sprechen.

Satz 7.25. *Es sind äquivalent:*

- (i) M ist torsionsfrei.
- (ii) $M_{\mathfrak{p}}$ ist torsionsfrei $\forall \mathfrak{p}$.
- (iii) $M_{\mathfrak{m}}$ ist torsionsfrei $\forall \mathfrak{m}$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Es sei $S = A \setminus \mathfrak{p}$ und $\frac{x}{s} \in M_{\mathfrak{p}}$ ein Torsionselement, d.h. es existiert $a \neq 0, t \in S$ mit $\frac{a}{t} \frac{x}{s} = 0$. Daher existiert ein $r \in S$ mit $rax = 0$. Folglich gilt $x \in TM = 0$, d.h. $x = 0$ und $M_{\mathfrak{p}}$ ist torsionsfrei.

(ii) \Rightarrow (iii) trivial.

(iii) \Rightarrow (i). Sei $M_{\mathfrak{m}}$ torsionsfrei $\forall \mathfrak{m}$ und $0 \neq x \in TM$. Dann existiert ein $a \neq 0$ mit $ax = 0$. Wähle ein Maximalideal $\mathfrak{m} \supset \text{Ann}(x)$. Es gilt $\frac{a}{1} \neq 0$ in $A_{\mathfrak{m}}$ und $\frac{a}{1} \cdot \frac{x}{1} = 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$, also $\frac{x}{1} = 0$ in $M_{\mathfrak{m}}$, also existiert $s \in A \setminus \mathfrak{m}$ mit $sx = 0$. Aber $s \notin \text{Ann}(x)$. Widerspruch. \square

Teil 2: Homologische Algebra

8 Injektive und projektive Moduln

Es sei R ein Ring. Im folgenden verstehen wir unter einem nicht weiter spezifizierten R -Modul implizit stets einen R -Links-Modul. Alle Ergebnisse dieses Abschnitts gelten auch für R -Rechts-Moduln.

Definition 8.1. (i) Ein R -Modul I heißt **injektiver** R -Modul, wenn für jede Injektion $i : M' \subset M$ die induzierte Abbildung $\text{Hom}_R(M, I) \rightarrow \text{Hom}_R(M', I)$ surjektiv ist. M.a.W.: Jeder R -Modulhomomorphismus $M' \rightarrow I$ besitzt eine Fortsetzung auf M .

(ii) Ein R -Modul P heißt **projektiver** R -Modul, wenn für jede Surjektion $N \rightarrow N''$ die induzierte Abbildung $\text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \text{Hom}_R(P, N'')$ surjektiv ist. M.a.W.: Jeder R -Modulhomomorphismus $\varphi : P \rightarrow N''$ besitzt eine Hebung nach N .

Wegen der Linksexaktheit des Hom-Funktors (siehe Satz 4.5) kann man dies auch so sagen:

I ist genau dann injektiv, wenn $\text{Hom}_R(-, I)$ exakte Folgen von R -Moduln in exakte Folgen abelscher Gruppen überführt.

P ist genau dann projektiv, wenn $\text{Hom}_R(P, -)$ exakte Folgen von R -Moduln in exakte Folgen abelscher Gruppen überführt.

Lemma 8.2. Für eine kurze exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0 \quad (*)$$

sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i) es existiert ein Untermodul $N \subset M$ mit $j|_N : N \xrightarrow{\sim} M''$.
- (ii) es existiert ein Homomorphismus $p : M \rightarrow M'$ mit $p \circ i = \text{id}_{M'}$.
- (iii) es existiert ein Homomorphismus $s : M'' \rightarrow M$ mit $j \circ s = \text{id}_{M''}$.
- (iv) Es gibt einen Isomorphismus zwischen exakten Folgen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{j} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \varphi \downarrow i & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{i'} & M' \oplus M'' & \xrightarrow{p''} & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Man sagt dann, dass die Folge $(*)$ **zerfällt**. In diesem Fall gilt insbesondere $M \cong M' \oplus M''$.

Beweis. (i) \Rightarrow (iii): Definiere s als die Komposition $M'' \xrightarrow{(j|_N)^{-1}} N \xrightarrow{\text{kan}} M$.

(iv) \Rightarrow (i): Setze $N = \varphi^{-1}(0 \oplus M'')$.

(iv) \Rightarrow (ii): Definiere p als Komposition $M \xrightarrow{\varphi} M' \oplus M'' \xrightarrow{p'} M'$.

(ii) \Rightarrow (iv): Definiere $\varphi = (i' \circ p) + i'' \circ j$.

(iii) \Rightarrow (iv): Definiere $\psi = i \circ p' + s \circ p'' : M' \oplus M'' \rightarrow M$. Nach dem 5er-Lemma ist ψ ein Isomorphismus und man definiert $\varphi = \psi^{-1}$. \square

Lemma 8.3. (i) *Ein R -Modul I ist genau dann injektiv, wenn jede kurze exakte Folge*

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

mit R -Moduln M, N zerfällt.

(ii) *Ein R -Modul P ist genau dann projektiv, wenn jede kurze exakte Folge*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

mit R -Moduln M, N zerfällt.

Beweis. (i) Sei I injektiv und $0 \rightarrow I \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} N \rightarrow 0$ exakt. Per definitionem existiert ein $p : M \rightarrow I$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \uparrow i & \searrow p & \\ I & \xrightarrow{\text{id}_I} & I \end{array}$$

kommutiert, also $p \circ i = \text{id}_I$, und die Folge zerfällt.

Sei umgekehrt I mit der beschriebenen Eigenschaft gegeben, $M' \subset M$ R -Moduln und $\varphi : M' \rightarrow I$ ein R -Homomorphismus. Wir setzen

$$J := I \times M / \{(-\varphi(m'), m') \mid m' \in M'\}.$$

Die natürliche Abbildung $\psi : I \rightarrow J, x \mapsto \overline{(x, 0)}$ ist injektiv, denn wir haben: $\overline{(x, 0)} = 0 \text{ in } J \implies x = -\varphi(m'), 0 = m' \implies x = -\varphi(0) = 0$.

Nach Annahme zerfällt die exakte Folge $0 \rightarrow I \xrightarrow{\psi} J \rightarrow \text{coker}(\psi) \rightarrow 0$, also existiert ein $p : J \rightarrow I$ mit $p \circ \psi = \text{id}_I$. Sei nun $\tau : M \rightarrow J$ die natürliche Abbildung $m \mapsto \overline{(0, m)}$. In J gilt

$$\overline{(\varphi(m'), 0)} = \overline{(0, m')}$$

Daher gilt für jedes $m' \in M'$:

$$p \circ \tau(m') = p(\overline{(0, m')}) = p(\overline{(\varphi(m'), 0)}) = p(\psi(\varphi(m'))) = \varphi(m').$$

Daher setzt $p \circ \tau$ die Abbildung φ fort und I ist injektiver R -Modul.

$$\text{Bild: } \begin{array}{ccc} M' & \hookrightarrow & M \\ \downarrow \varphi & \searrow p & \downarrow \tau \\ I & \xrightarrow{\psi} & J \end{array}$$

(ii) Analog (Pfeile umdrehen) Übungsaufgabe. \square

Lemma 8.4. (i) $\prod_{i \in I} M_i$ ist genau dann injektiv, wenn M_i injektiv für alle $i \in I$.

(ii) $\bigoplus_{i \in I} P_i$ ist genau dann projektiv, wenn P_i projektiv für alle $i \in I$.

Beweis. Wir beachten nacheinander, dass:

- $\text{Hom}_R(-, \prod_{i \in I} M_i) = \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(-, M_i)$,
- $\text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} P_i, -) = \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(P_i, -)$
- ein Produkt von Folgen ist genau dann exakt, wenn alle einzelnen Folgen exakt sind (Lemma 4.3).

Daher folgt Lemma 8.4 aus den Definitionen. \square

Satz 8.5. Ein Modul ist genau dann projektiv, wenn er direkter Summand in einem freien Modul ist.

Beweis. Wegen $\text{Hom}_R(R, M) = M$ ist R projektiver R -Modul. Wegen Lemma 8.4 sind somit freie Moduln projektiv. Nochmalige Anwendung von Lemma 8.4 ergibt, dass direkte Summanden in freien R -Moduln projektiv sind. Ist nun P projektiv, so wähle freien R -Modul F und Surjektion $F \twoheadrightarrow P \xrightarrow{8.3} P$ ist direkter Summand in F . \square

Korollar 8.6. Jeder R -Modul ist Faktormodul eines projektiven R -Moduls.

Beweis. Jeder Modul ist Faktormodul eines freien Moduls. \square

Satz 8.7. Sei A ein kommutativer lokaler Ring. Dann ist jeder endlich erzeugte projektive A -Modul frei.

Beweis. Sei P endlich erzeugt, projektiv und $x_1, \dots, x_n \in P$ so gewählt, dass $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in P/\mathfrak{m}P$ eine A/\mathfrak{m} -Vektorraumbasis bilden. Wir betrachten den Homomorphismus $\pi : A^n \rightarrow P$, der die Basiselemente von A^n auf x_1, \dots, x_n schickt. Nach dem Nakayama-Lemma ist π surjektiv. Sei $Q = \ker(\pi)$. Da P projektiv ist, gilt

$$A^n \cong P \oplus Q.$$

Insbesondere ist Q endlich erzeugt (weil Faktormodul von A^n) und wir erhalten $\mathfrak{a}Q = \mathfrak{a}A^n \cap Q$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.

Für $x \in Q$ gilt $\pi(x) = 0$. Da nach Konstruktion $\pi : (A/\mathfrak{m})^n \xrightarrow{\sim} P/\mathfrak{m}P$ ein Isomorphismus ist, folgt $x \in \mathfrak{m}A^n \cap Q = \mathfrak{m}Q$. Folglich gilt $Q = \mathfrak{m}Q$, und daher $Q = 0$ nach dem Nakayama-Lemma. Wir erhalten $P \cong A^n$. \square

Satz 8.8. Sei A ein Hauptidealring. Dann ist jeder projektive A -Modul frei.

Beweis. Über einem Hauptidealring ist jeder Untermodul eines freien Moduls frei. Jeder projektive Modul ist direkter Summand in, also insbesondere Untermodul eines freien Moduls. \square

Wie sehen injektive Moduln aus?

Definition 8.9. Sei A kommutativ und nullteilerfrei. Ein A -Modul M heißt **teilbar**, wenn für jedes $a \in A$, $a \neq 0$, die Abbildung $a : M \rightarrow M$, $m \mapsto am$, surjektiv ist. M heißt **eindeutig teilbar**, wenn diese Abbildungen sogar Isomorphismen sind.

Bemerkung 8.10. Jeder Faktormodul eines teilbaren Moduls ist teilbar

$$\begin{array}{ccc} M & \twoheadrightarrow & M'' \\ a \downarrow & & \downarrow a \\ M & \twoheadrightarrow & M''. \end{array}$$

Beispiel 8.11. $A = \mathbb{Z}$: \mathbb{Q} ist eindeutig teilbarer \mathbb{Z} -Modul. \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ist teilbar.

Satz 8.12. Sei A ein Hauptidealring. Dann sind die injektiven A -Moduln genau die teilbaren A -Moduln.

Beweis. Sei I injektiv. Die Injektion, $a \neq 0$, $A \xrightarrow{a} A$ impliziert die Surjektion $I = \text{Hom}(A, I) \xrightarrow{a} I = \text{Hom}(A, I)$. Daher ist I teilbar. (Hier haben wir nur ausgenutzt, dass A nullteilerfrei ist).

Sei nun I teilbar, $M \subset N$ und $\varphi : M \rightarrow I$ gegeben. Wir betrachten die Menge Σ aller Paare (M', φ') mit $M \subset M' \subset N$, $\varphi' : M' \rightarrow I$ mit $\varphi'|_M = \varphi$. Wir geben Σ die Halbordnung $(M', \varphi') \leq (M'', \varphi'')$ falls $M' \subset M''$ und $\varphi''|_{M'} = \varphi'$. Nach Zorn's Lemma hat Σ ein maximales Element. Sei (M', φ') maximal. Angenommen $M' \neq N$. Wähle $x \in N \setminus M'$ beliebig und setze $M'' = \langle M', x \rangle$. Wir betrachten die exakte Folge

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M'' \longrightarrow M''/M' \longrightarrow 0.$$

M''/M' ist von $\bar{x} = x + M'$ erzeugt, also zyklisch. Wir betrachten den surjektiven Homomorphismus $\varepsilon : A \twoheadrightarrow M''/M'$, $a \mapsto a\bar{x}$. Ist ε ein Isomorphismus, so ist $M''/M' \cong A$ frei, insbesondere projektiv und es gilt $M'' \cong M' \oplus A$. Dann können wir φ' auf M'' fortsetzen (zum Beispiel indem wir die zweite Komponente auf Null abbilden). Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von (M', φ') .

Also ist ε nicht injektiv und es gilt $M''/M' \cong A/(a)$ mit einem Element $0 \neq a \in A$. Insbesondere gilt $ax \in M'$. Da I teilbar ist, existiert ein $y \in I$ mit $ay = \varphi'(ax)$. Wir definieren nun $\varphi'' : M'' \rightarrow I$ durch

$$\varphi''(z + bx) := \varphi'(z) + by, \quad z \in M', \quad b \in A.$$

Dies ist wohldefiniert: gilt $z_1 + b_1x = z_2 + b_2x$, so folgt

$$(b_1 - b_2)x = z_2 - z_1 \in M'$$

und daher $b_1 - b_2 \in (a)$, also $b_1 - b_2 = ac$, $c \in A$. Hieraus folgt $acx = z_2 - z_1 \in M'$ und

$$\begin{aligned} (\varphi'(z_1) + b_1y) - (\varphi'(z_2) + b_2y) &= \varphi'(z_1 - z_2) + cay = \varphi'(z_1 - z_2) + c\varphi'(ax) \\ &= \varphi'(z_1 - z_2) + \varphi'(acx) = \varphi'(z_1 - z_2 + acx) = \varphi'(0) = 0. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi''|_{M'} = \varphi'$, erhalten wir einen Widerspruch zur Maximalität von (M', φ') . Es folgt $M' = N$. Daher ist I injektiv. \square

Korollar 8.13. \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ist eine injektive abelsche Gruppe.

$R^* \stackrel{\text{df}}{=} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ wird zum R -(Links-)Modul durch $r\varphi(s) = \varphi(sr)$.

Definition 8.14. Ein R -Modul M heißt **kofrei**, wenn er isomorph zu einem (evtl. unendlichen) Produkt von R^* ist.

Lemma 8.15. Für jeden R -Modul M existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$\text{Hom}_R(M, R^*) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Beweis. Die Homomorphismen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_R(M, R^*) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \varphi &\longmapsto (m \mapsto \varphi(m)(1)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\longrightarrow \text{Hom}_R(M, R^*) \\ \psi &\longmapsto [m \mapsto (\varphi_m : R \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z})] \\ &\quad \varphi_m(r) = \psi(rm) \end{aligned}$$

sind zueinander invers. \square

Satz 8.16. Kofreie R -Moduln sind injektiv.

Beweis. Nach Lemma 8.4 genügt es z.z., dass R^* injektiv ist. Dies ist äquivalent zur Exaktheit von $\text{Hom}_R(-, R^*)$. Diese folgt aus Lemma 8.15 und weil \mathbb{Q}/\mathbb{Z} ein injektiver \mathbb{Z} -Modul ist. \square

Lemma 8.17. Sei M ein R -Modul und $0 \neq m \in M$. Dann existiert ein R -Modulhomomorphismus $\varphi : M \rightarrow R^*$ mit $\varphi(m) \neq 0$.

Beweis. Nach Lemma 8.15 (und seinem Beweis) genügt es z.z., dass zu jeder abelschen Gruppe M und zu jedem $0 \neq m \in M$ ein \mathbb{Z} -Homomorphismus $\psi : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\psi(m) \neq 0$ existiert.

Sei $N = \langle m \rangle \subset M$. Dann gilt $N \cong \mathbb{Z}$ oder $N \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \geq 2$.

In jedem Fall existiert ein Homomorphismus $\psi : N \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mit $\psi(m) \neq 0$. Da \mathbb{Q}/\mathbb{Z} injektiver \mathbb{Z} -Modul ist, dehnt sich ψ auf ganz M aus. \square

Korollar 8.18. Jeder R -Modul ist Untermodul eines kofreien, also insbesondere eines injektiven R -Moduls.

Beweis. Wähle gemäß Lemma 8.17 zu jedem $0 \neq m \in M$ ein $\varphi_m : M \rightarrow R^*$ mit $\varphi_m(m) \neq 0$. Wir erhalten die Injektion

$$M \hookrightarrow \prod_{\substack{m \in M \\ m \neq 0}} R^*,$$

die in der m -Komponente gerade durch φ_m gegeben wird. \square

Satz 8.19. Ein R -Modul ist genau dann injektiv, wenn er direkter Faktor in einem kofreien Modul ist.

Beweis. Wähle eine Injektion $I \hookrightarrow M$ mit M kofrei. Da I injektiv ist, ist I direkter Faktor (= direkter Summand) in M . Umgekehrt sind nach Lemma 8.4 direkte Faktoren in kofreien Moduln injektiv. \square

9 Kategorien

Eine **Kategorie** \mathcal{C} ist gegeben durch drei Daten und drei Axiome.

Die Daten:

- (1) eine Klasse $\text{ob}(\mathcal{C})$ von Objekten
- (2) Zu beliebigen $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ eine Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ von „Morphismen von A nach B “
- (3) Zu jedem Tripel $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ein Verknüpfungsgesetz

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, C) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, C).$$

Bemerkung 9.1. Ein Element $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ schreibt man in der Form $f : A \rightarrow B$. A heißt **Quelle** und B heißt **Ziel** von f . Für $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ schreibt man die Verknüpfung als $g \circ f : A \rightarrow C$ oder einfach als gf .

Die Axiome:

(A1) Die Mengen $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ und $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B')$ sind disjunkt falls $A \neq A'$ oder $B \neq B'$.

Bemerkung 9.2. (A1) bedeutet: jeder Morphismus hat eine eindeutige Quelle und ein eindeutiges Ziel.

(A2) Sind $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ Morphismen, so gilt

$$h(gf) = (hg)f \quad (\text{Assoziativität}).$$

(A3) Zu jedem Objekt A gibt es einen Morphismus $1_A : A \rightarrow A$ (die „Identität“), so dass für beliebige $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow A$ gilt

$$f1_A = f, \quad 1_A g = g.$$

Bemerkung 9.3. 1_A ist eindeutig bestimmt (Argument wie bei Gruppen: $1_A = 1_A 1'_A = 1'_A$). Man benutzt häufig auch die Bezeichnung id_A anstelle von 1_A .

Beispiele 9.4. • (Mengen): Die Kategorie der Mengen mit Mengenabbildungen
 • $R\text{-Mod}$: die Kategorie der R -Links-Moduln mit R -Modulhomomorphismen, (R Ring)
 • analog $\text{Mod-}R$: Rechtsmoduln
 • Top: die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen.

Definition 9.5. Die **entgegengesetzte Kategorie** \mathcal{C}^{op} ist die Kategorie mit den gleichen Objekten wie \mathcal{C} und

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(B, A).$$

Bemerkung 9.6. Der Übergang von \mathcal{C} zu \mathcal{C}^{op} bedeutet nichts weiter, als alle Pfeile umzudrehen. Es gilt $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$.

Definition 9.7. Ein (kovarianter) **Funktor** F von einer Kategorie \mathcal{C} in eine Kategorie \mathcal{D} ist eine Regel, die jedem Objekt A von \mathcal{C} ein Objekt $FA \in \text{ob}(\mathcal{D})$ und jedem Morphismus $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ einen Morphismus $F(f) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(FA, FB)$ zuordnet, so dass gilt: $F(fg) = F(f)F(g)$ und $F(1_A) = 1_{FA}$.

Beispiele 9.8. 1) Vergiss-Funktoren z.B.

$$F : R\text{-Mod} \rightarrow (\text{Mengen}), \quad FM = M,$$

(wir vergessen Struktur).

2) Jedes $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ induziert einen Funktor

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow (\text{Mengen}),$$

der durch $B \longmapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ und

$$(f : B \rightarrow B') \mapsto (f_* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B'), g \mapsto fg)$$

gegeben ist.

Definition 9.9. Ein **kontravarianter Funktor** von \mathcal{C} nach \mathcal{D} ist ein Funktor von \mathcal{C}^{op} nach \mathcal{D} .

Beispiel 9.10. Jedes $B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ induziert den kontravarianten Funktor

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, B) : \mathcal{C}^{\text{op}} \longrightarrow (\text{Mengen}),$$

der durch $A \longmapsto \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ und

$$f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', A) \mapsto (f^* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B), g \mapsto gf)$$

gegeben ist.

Definition 9.11. Das **Produkt** $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ zweier Kategorien hat als Objekte Paare (C, D) , $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$, $D \in \text{ob}(\mathcal{D})$ und

$$\text{Mor}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C_1, D_1), (C_2, D_2)) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2) \times \text{Mor}_{\mathcal{D}}(D_1, D_2).$$

Sprechweise: Ein „**Bifunktor** von \mathcal{C} kreuz \mathcal{D} nach \mathcal{E} “ ist ein (gewöhnlicher) Funktor

$$F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}.$$

Beispiele 9.12. •

$$\begin{aligned} \oplus : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} &\longrightarrow R\text{-Mod} \\ (M, N) &\longmapsto M \oplus N \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \otimes_A : A\text{-Mod} \times A\text{-Mod} &\longrightarrow A\text{-Mod} \\ (M, N) &\longmapsto M \otimes_A N \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \text{Mor} : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} &\longrightarrow (\text{Mengen}) \\ (M, N) &\longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N) \end{aligned}$$

Definition 9.13. • $f : A \rightarrow B$ heißt **Monomorphismus**, wenn für jedes C und beliebige $g_1, g_2 : C \rightarrow A$ gilt $fg_1 = fg_2 \implies g_1 = g_2$.

• $g : A \rightarrow B$ heißt **Epimorphismus** wenn für jedes C und beliebige $f_1, f_2 : B \rightarrow C$ gilt: $f_1g = f_2g \implies f_1 = f_2$.

• $f : A \rightarrow B$ heißt **Isomorphismus**, wenn ein $g : B \rightarrow A$ existiert mit

$$fg = 1_B, \quad gf = 1_A.$$

Bemerkung 9.14. • f Monomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ Epimorphismus in \mathcal{C}^{op} .

• f Isomorphismus in $\mathcal{C} \Leftrightarrow f$ Isomorphismus in \mathcal{C}^{op} .

• Sei $f : A \rightarrow B$ ein Isomorphismus und $g : B \rightarrow A$ wie in der Definition von Isomorphie. Dann ist g eindeutig bestimmt: Haben g_1 und g_2 diese Eigenschaft, so gilt

$$g_1 = g_1(\text{id}_B) = g_1(fg_2) = (g_1f)g_2 = \text{id}_A g_2 = g_2.$$

Man bezeichnet das eindeutig bestimmte g mit f^{-1} (der inverse Morphismus).

Lemma 9.15. f Isomorphismus $\Rightarrow f$ Mono- und Epimorphismus.

Beweis. Sei $g : B \rightarrow A$ invers zu $f : A \rightarrow B$, C beliebig und $\alpha_1, \alpha_2 : C \rightarrow A$ mit $f\alpha_1 = f\alpha_2$. Dann folgt

$$\alpha_1 = \text{id}_A \alpha_1 = (gf)\alpha_1 = g(f\alpha_1) = g(f\alpha_2) = (gf)\alpha_2 = \text{id}_A \alpha_2 = \alpha_2.$$

Also ist f ein Monomorphismus. Epimorphismus zeigt man analog oder argumentiert so: f Isomorphismus in $\mathcal{C} \Rightarrow f$ Isomorphismus in $\mathcal{C}^{\text{op}} \Rightarrow f$ Monomorphismus in $\mathcal{C}^{\text{op}} \Rightarrow f$ Epimorphismus in \mathcal{C} . \square

Bemerkung 9.16. Die Umkehrung gilt i.A. nicht. Man betrachte z.B. die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen und den Morphismus

$$f : (\mathbb{R}, \text{diskrete Topologie}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \text{Standardtopologie}),$$

der auf der Menge \mathbb{R} einfach die Identität ist. Dann ist f Mono- und Epimorphismus, aber kein Isomorphismus (es gibt kein stetiges Inverses).

Definition 9.17. Seien $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine **natürliche Transformation** $t : F \rightarrow G$ ist eine Regel die jedem $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ einen Morphismus $t_A : FA \rightarrow GA$ zuordnet, so dass für jeden Morphismus $f : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{t_A} & GA \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ FB & \xrightarrow{t_B} & GB \end{array}$$

kommutiert.

Beispiele 9.18. • Wir betrachten für ein $p \in \mathbb{N}$ die Funktoren

$$\begin{aligned} \text{id} : \mathcal{A}b &\longrightarrow \mathcal{A}b, & A &\longmapsto A, \\ \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} : \mathcal{A}b &\longrightarrow \mathcal{A}b, & A &\longmapsto A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = A/pA, \end{aligned}$$

Die kanonischen Projektionen $A \longrightarrow A/pA$ geben eine natürliche Transformation zwischen diesen Funktoren.

• Sei $K\text{-Vec}$ die Kategorie der K -Vektorräume, wobei K ein Körper ist. Sei $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ der duale Vektorraum. Die Einsetzabbildung $V \rightarrow V^{**}$, $v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$, induziert eine natürliche Transformation der Funktoren id und $(\)^{**}$ von $K\text{-Vec}$ nach $K\text{-Vec}$.

• Jeder Morphismus $\psi : A \rightarrow A'$ in \mathcal{C} induziert eine natürliche Transformation

$$\psi^* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', -) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$$

von Funktoren $\mathcal{C} \rightarrow (\text{Mengen})$ durch

$$\begin{aligned} (\psi^*)_B : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B) &\longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ \psi \end{aligned}$$

• Jeder Morphismus $\psi : B \rightarrow B'$ in \mathcal{C} induziert eine natürliche Transformation

$$\psi_* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, B) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, B')$$

von Funktoren $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow (\text{Mengen})$ durch

$$\begin{aligned} (\psi_*)_A : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) &\longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B') \\ \varphi &\longmapsto \psi \circ \varphi \end{aligned}$$

Definition 9.19. Eine natürliche Transformation t heißt **natürliche Äquivalenz**, wenn $t_A : FA \rightarrow GA$ für jedes $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ein Isomorphismus in \mathcal{D} ist.

Bemerkung 9.20. Ist $t : F \rightarrow G$ eine natürliche Äquivalenz, so gibt es $t^{-1} : G \rightarrow F$ mittels $(t^{-1})_A = (t_A)^{-1} : GA \rightarrow FA$. Man schreibt $F \cong G$.

Beispiel 9.21. Sei $K\text{-Vec}^f$ die Kategorie der endlich-dimensionalen K -Vektorräume. Die natürliche Transformation $t_V : V \rightarrow V^{**}$ ist eine natürliche Äquivalenz.

Definition 9.22. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ heißt **Kategorienäquivalenz**, wenn es einen Funktor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ und natürliche Äquivalenzen $FG \cong \text{id}_{\mathcal{D}}$, $GF \cong \text{id}_{\mathcal{C}}$ gibt.

Beispiele 9.23. • Der Funktor

$$\begin{array}{ccc} (K\text{-Vec}^f)^{\text{op}} & \longrightarrow & K\text{-Vec}^f \\ V & \longmapsto & V^* \end{array}$$

ist eine Kategorienäquivalenz. Der Umkehrfunctor ist auch wieder $V \mapsto V^*$. D.h. die Kategorie $K\text{-Vec}^f$ ist selbstdual.

• Sei $\mathcal{A}b^f$ die Kategorie der endlichen abelschen Gruppen. Wir betrachten den Funktor

$$\begin{array}{ccc} * : (\mathcal{A}b^f)^{\text{op}} & \longrightarrow & \mathcal{A}b^f \\ A & \longmapsto & \text{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array}$$

Analog wie bei Vektorräumen haben wir die Einsetzabbildung

$$A \longrightarrow A^{**}, \quad a \longmapsto (\varphi \longmapsto \varphi(a)),$$

die injektiv ist, also ein Isomorphismus (weil endliche Gruppen). D.h. auch die Kategorie $\mathcal{A}b^f$ ist selbstdual.

• Weil K bzw. \mathbb{Q}/\mathbb{Z} injektive Objekte sind, sind die obigen Selbstdualitäten sogar exakt, d.h. sie überführen exakte Folgen in exakte Folgen. (Wir bezeichnen eine Folge $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ in der entgegengesetzten Kategorie als exakt, wenn die Folge $M' \leftarrow M \leftarrow M''$ exakt in der Ausgangskategorie ist.) Es gibt keine exakte Selbstdualität der Kategorie $\mathcal{A}b$, da der direkte Limes exakt ist, der projektive im allgemeinen aber nicht.

Satz 9.24. Sei \mathcal{C} eine Kategorie, $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt und $F : \mathcal{C} \rightarrow (\text{Mengen})$ ein Funktor. Dann ist die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} \{\text{nat. Transf. } t : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightarrow F\} & \longrightarrow & F(A) \\ t & \longmapsto & t_A(\text{id}_A) \end{array}$$

bijektiv.

Beweis. Sei $t : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightarrow F$ eine natürliche Transformation. Dann haben wir für jedes $B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und jedes $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A) & \xrightarrow{t_A} & F(A) \\ \phi_* = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)(\phi) \downarrow & & F(\phi) \downarrow \\ \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) & \xrightarrow{t_B} & F(B) \end{array}$$

Wegen $\phi = \phi_*(\text{id}_A)$ folgt

$$t_B(\phi) = F(\phi)(t_A(\text{id}_A)).$$

Daher ist t bereits durch das Element $t_A(\text{id}_A)$ festgelegt. Andererseits kann man bei gegebenem $a \in F(A)$ diese Gleichung zur Definition einer natürlichen Transformation $t^a : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightarrow F$ heranziehen, die definiert ist durch

$$(t^a)_B(\phi) := F(\phi)(a)$$

Es gilt $(t^a)_A(\text{id}_A) = a$. □

Korollar 9.25 (Yoneda-Lemma). *Die Zuordnung*

$$(\psi : A' \rightarrow A) \longmapsto (\psi^* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', -))$$

ist eine Bijektion zwischen der Menge der Morphismen $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', A)$ und der Menge der natürlichen Transformationen von Funktoren $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', -)$. Es ist ψ genau dann ein Isomorphismus, wenn ψ^ eine natürliche Äquivalenz ist.*

Beweis. Wir setzen $F = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', -)$ in Satz 9.24 und erhalten eine Bijektion zwischen den natürlichen Transformationen von $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$ nach $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', -)$ und der Menge $F(A) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', A)$, die durch $t \mapsto t_A(\text{id}_A)$ gegeben ist. Die inverse Bijektion ist dadurch gegeben, dass $\psi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', A)$ sich auf die natürliche Transformation t^ψ abbildet, die auf $B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ durch $t_B^\psi : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B)$, $\phi \mapsto F(\phi)(\psi)$ definiert ist. Nun ist $F(\phi) = \phi_* : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', B)$, also gilt $F(\phi)(\psi) = \phi_*(\psi) = \phi\psi = \psi^*(\phi)$. Das zeigt die behauptete Bijektion.

Ist $\psi : A' \rightarrow A$ ein Isomorphismus, so existiert ein $\phi : A \rightarrow A'$ mit $\phi\psi = \text{id}_{A'}$ und $\psi\phi = \text{id}_A$. Also gilt $\phi^*\psi^* = (\psi\phi)^* = (\text{id}_A)^* = \text{id}_{\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)}$ und $\psi^*\phi^* = (\phi\psi)^* = (\text{id}_{A'})^* = \text{id}_{\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', -)}$. Daher ist ϕ^* invers zu ψ^* und ψ^* eine natürliche Äquivalenz. Umgekehrt sei ψ^* eine natürliche Äquivalenz. Dann existiert ein Inverses $t = (\psi^*)^{-1}$. Nach dem ersten Teil gilt $t = \phi^*$ für ein eindeutig bestimmtes $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, A')$. Wir behaupten nun, dass ϕ invers zu ψ ist. Hierzu beachten wir, dass $(\phi\psi)^* = \psi^*\phi^* = \psi^*t = \text{id}_{\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A', -)} = \text{id}_{A'}$ gilt, woraus, weil die Zuordnung $f \mapsto f^*$ bijektiv ist, $\phi\psi = \text{id}_{A'}$ folgt. Genauso zeigt man $\psi\phi = \text{id}_A$. Das beendet den Beweis. □

Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Objekten der Kategorie \mathcal{C} .

Definition 9.26. Ein **Produkt** (A, p_i) der Familie $(A_i)_i$ ist ein Objekt A zusammen mit Morphismen $p_i : A \rightarrow A_i$, $i \in I$, so dass die folgende Universaleigenschaft gilt: Zu jedem Objekt B und jeder Familie $(f_i : B \rightarrow A_i)_{i \in I}$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $f : B \rightarrow A$ mit $f_i = p_i f$ für alle i .

Bemerkung 9.27. Zwei Produkte der Familie (A_i) sind kanonisch isomorph (Standardargument mit Hilfe der Universaleigenschaft). Man spricht daher oft von *dem* Produkt und schreibt $A = \prod_{i \in I} A_i$.

Beispiele 9.28. Wir betrachten für eine Primzahl p die Familie abelscher Gruppen $(\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z})_{i \in \mathbb{N}}$.

- in der Kategorie der zyklischen abelschen Gruppen haben keine zwei Elemente der Familie ein Produkt.
- in der Kategorie der endlichen abelschen Gruppen hat die Familie kein Produkt.
- in der Kategorie der abelschen Torsionsgruppen hat die Familie ein Produkt (welches?), das nicht mit dem gewöhnlichen kartesischen Produkt übereinstimmt.
- in der Kategorie der abelschen Gruppen und der Gruppen ist das Produkt gerade das kartesische Produkt.

Dreht man alle Pfeile um erhält man das Koproduct. Am schnellsten:

Definition 9.29. Das **Koproduct** \coprod ist das Produkt in \mathcal{C}^{op} .

Beispiele 9.30. • In (Mengen) ist das Koproduct die disjunkte Vereinigung.

- In abelschen Gruppen ist das Koproduct die direkte Summe.
- In Gruppen existiert ein Koproduct, das sogenannte *freie Produkt* (wie definiert man das?)

10 Abelsche Kategorien

Definition 10.1. Ein Objekt E einer Kategorie \mathcal{C} heißt **Endobjekt**, wenn für jedes Objekt M die Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, E)$ aus genau einem Element besteht. A heißt **Anfangsobjekt**, wenn für jedes M die Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, M)$ aus genau einem Element besteht. Ein Objekt $0 \in \text{ob}(\mathcal{C})$ heißt **Nullobjekt**, wenn es sowohl Anfangs- als auch Endobjekt ist.

Bemerkung 10.2. Anfangs- bzw. Endobjekte sind (wenn sie existieren) bis auf eindeutigen Isomorphismus bestimmt. Hat \mathcal{C} ein Nullobjekt 0 , so enthält für beliebige $A, B \in \mathcal{C}$ die Menge $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ein spezielles Element, nämlich die Komposition $A \rightarrow 0 \rightarrow B$. Dieses nennt man den **Nullmorphimus**.

Beispiele 10.3. • In (Mengen) ist \emptyset ein Anfangs- und die 1-elementige Menge ein Endobjekt.

- In $R\text{-Mod}$ ist der Nullmodul 0 ein Nullobjekt.

Definition 10.4. Eine Kategorie \mathcal{A} heißt **additiv**, wenn gilt:

- \mathcal{A} hat ein Nullobjekt,
- in \mathcal{A} existieren endliche Produkte, und
- für alle $A, B \in \text{ob}(\mathcal{A})$ trägt $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B)$ die Struktur einer abelschen Gruppe mit dem Nullmorphismus als Nullelement, und so dass für A, B, C die Verknüpfung

$$\text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \times \text{Mor}_{\mathcal{A}}(B, C) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, C)$$

bilinear ist.

Bemerkung 10.5. In additiven Kategorien nennt man die Morphismen oft Homomorphismen und schreibt $\text{Hom}_{\mathcal{A}}$ anstelle von $\text{Mor}_{\mathcal{A}}$. Die Komposition mit dem Nullhomomorphismus ist stets Null. Z.B: $0 \circ f = (0+0) \circ f = 0 \circ f + 0 \circ f \Rightarrow 0 = 0 \circ f$.

Satz 10.6. Sei \mathcal{A} eine additive Kategorie und $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Sei $i_1 : A_1 \rightarrow A_1 \times A_2$ gegeben durch 1_{A_1} und $A_1 \xrightarrow{0} A_2$ und $i_2 : A_2 \rightarrow A_1 \times A_2$ durch $A_2 \xrightarrow{0} A_1$ und 1_{A_2} . Dann ist $(A_1 \times A_2, i_1, i_2)$ das Koproduct von A_1 und A_2 .

Beweis. Wir beginnen mit einer

Behauptung:

$$i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_{A_1 \times A_2} : A_1 \times A_2 \longrightarrow A_1 \times A_2.$$

Beweis der Behauptung: Es gilt

$$\begin{aligned} p_1(i_1 p_1 + i_2 p_2) &= p_1 i_1 p_1 + p_1 i_2 p_2 \\ &= 1_{A_1} p_1 + (A_2 \xrightarrow{0} A_1) p_2 \\ &= p_1 + (A_1 \times A_2 \xrightarrow{0} A_1) \\ &= p_1 \\ &= p_1(1_{A_1 \times A_2}) \end{aligned}$$

und analog: $p_2(i_1 p_1 + i_2 p_2) = p_2 = p_2(1_{A_1 \times A_2})$. Daher folgt die Behauptung aus der Universaleigenschaft des Produkts.

Wir zeigen nun die Universaleigenschaft des Koproducts für $(A_1 \times A_2, i_1, i_2)$. Es seien Homomorphismen $f_1 : A_1 \rightarrow B$ und $f_2 : A_2 \rightarrow B$ gegeben. Wir definieren $f : A_1 \times A_2 \rightarrow B$ durch $f = f_1 p_1 + f_2 p_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f i_1 &= f_1 p_1 i_1 + f_2 p_2 i_1 \\ &= f_1, \end{aligned}$$

und $f i_2 = f_2$ zeigt man analog. Dies zeigt die Existenz.

Zur Eindeutigkeit: Sei $f' : A_1 \times A_2 \rightarrow B$ mit $f' i_1 = f_1$ und $f' i_2 = f_2$ gegeben. Nach der Behauptung folgt $f' = f'(i_1 p_1 + i_2 p_2) = f_1 p_1 + f_2 p_2 = f$. \square

In additiven Kategorien bezeichnet man das endliche Koproduct = Produkt mit \oplus . Man benutzt \oplus auch für beliebige Koproducte (falls sie existieren)

Lemma 10.7. Es seien $f, g : A \rightarrow B$ Homomorphismen in einer additiven Kategorie \mathcal{A} . Dann gilt

$$f + g = \{f, g\} \langle 1_A, 1_A \rangle,$$

wobei $\{f, g\} : A \oplus A \rightarrow A$ durch die Universaleigenschaft des Koproducts und $\langle 1_A, 1_A \rangle : A \rightarrow A \oplus A$ durch die Universaleigenschaft des Produkts gegeben ist.

Insbesondere ist die Addition auf den Hom-Mengen einer additiven Kategorie bereits eindeutig durch die Kategorie selbst bestimmt.

Beweis. Es gilt nach dem Beweis von Satz 10.6: $\{f, g\} = fp_1 + gp_2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \{f, g\} \langle 1_A, 1_A \rangle &= (fp_1 + gp_2) \langle 1_A, 1_A \rangle \\ &= fp_1 \langle 1_A, 1_A \rangle + gp_2 \langle 1_A, 1_A \rangle \\ &= f + g. \end{aligned}$$

□

Definition 10.8. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen additiven Kategorien heißt **additiv**, wenn für $A, A' \in \mathcal{A}$ die natürliche Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, FA')$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist.

Lemma 10.9. Ist F additiv, so gilt $F(A_1 \oplus A_2) \cong FA_1 \oplus FA_2$.

Beweis. Wir betrachten die natürliche Abbildung

$$\langle F(p_1), F(p_2) \rangle : F(A_1 \oplus A_2) \rightarrow FA_1 \oplus FA_2.$$

In der Gegenrichtung betrachten wir

$$F(i_1)p_1 + F(i_2)p_2 : FA_1 \oplus FA_2 \rightarrow F(A_1 \oplus A_2).$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass die Morphismen zueinander invers sind wenn F additiv ist. □

In Zukunft werden wir von Funktoren zwischen additiven Kategorien stillschweigend annehmen, dass sie additiv sind.

Definition 10.10. Sei $f : A \rightarrow A'$ ein Homomorphismus in einer additiven Kategorie. Ein Homomorphismus $i : B \rightarrow A$ heißt **Kern** von f , wenn $fi = 0$ und zu jedem $g : C \rightarrow A$ mit $fg = 0$ ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $h : C \rightarrow B$ mit $g = ih$ existiert:

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow{f} & A' \\ \uparrow & & \nearrow g & & \\ h \downarrow & & C & & \end{array}$$

Bemerkung 10.11. Zwei Kerne sind natürlich isomorph.

Lemma 10.12. Ein Kern ist (wenn er existiert) ein Monomorphismus.

Beweis. Sind $h_1, h_2 : C \rightarrow B$ Homomorphismen mit $ih_1 = ih_2 =: g$, so gilt $fg = 0$ und daher ist $h_1 = h_2$ nach Universaleigenschaft. \square

Definition 10.13. Kokern (drehe alle Pfeile um).

Lemma 10.14. Kokerne sind Epimorphismen. \square

Definition 10.15. Eine additive Kategorie \mathcal{A} heißt **abelsche Kategorie**, wenn gilt:

- Jeder Homomorphismus hat Kern und Kokern,
- jeder Monomorphismus ist der Kern seines Kokerns und jeder Epimorphismus ist der Kokern seines Kerns,
- jeder Morphismus f kann in der Form $f = i\varepsilon$ mit i Monomorphismus und ε Epimorphismus geschrieben werden.

Satz 10.16. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie und f ein Homomorphismus in \mathcal{A} der sowohl Monomorphismus als auch Epimorphismus ist. Dann ist f ein Isomorphismus.

Beweis. Es sei $f : A \rightarrow B$ sowohl ein Epimorphismus als auch ein Monomorphismus. Dann ist $0 \rightarrow A$ der Kern von f und genauso auch der Kern von $A \xrightarrow{\text{id}_A} A$. Daher sind, weil Epimorphismen, sowohl f als auch id_A Kokern von $0 \rightarrow A$, und damit isomorph:

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & \nearrow f & \uparrow \\ 0 \longrightarrow & A & \\ & \searrow \text{id}_A & \downarrow \\ & & A \end{array}$$

Somit ist f gleich der Komposition des Isomorphismus id_A mit einem weiteren Isomorphismus und damit ein Isomorphismus. \square

Beispiele 10.17. • Die Kategorie $\mathcal{A}b$ der abelschen Gruppen ist abelsch.

- $R\text{-Mod}$, $\text{Mod-}R$ sind abelsche Kategorien,
- Die Kategorie der freien R -Moduln ist additiv, aber i.A. nicht abelsch (es sei denn, R ist ein Körper).
- Prägarben und Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum sind abelsche Kategorien.
- Sei G eine Gruppe. Die Kategorie der G -Moduln ist eine abelsche Kategorie.

Definition 10.18. Ein **Unterobjekt** B in \mathcal{A} ist ein Monomorphismus $i : B \rightarrow A$. Man schreibt oft (lax) $\text{coker}(i) = A/B$.

Das **Bild** eines Homomorphismus $f : A \rightarrow B$ ist $\text{im}(f) = \ker(\text{coker}(f))$ (also ein Unterobjekt in B).

Das **Kobild** $\text{coim}(f) = \text{coker}(\ker(f))$ ist gerade $A/\ker(f)$.

Eine Folge $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ in \mathcal{A} heißt **exakt**, wenn $\text{im}(f) \cong \ker(g)$.

Den Beweis des nächsten Satzes lassen wir weg.

Satz 10.19. Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Dann gilt:

- (i) Der natürliche Homomorphismus $\text{coim}(f) \rightarrow \text{im}(f)$ ist ein Isomorphismus, d.h. es gilt der Homomorphiesatz.
- (ii) Es gilt das 5er-Lemma.
- (iii) Es gilt das Schlangenlemma.
- (iv) Eine Folge $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \rightarrow 0$ in \mathcal{A} ist genau dann exakt, wenn für jedes $N \in \mathcal{A}$ die Folge abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M'', N) \xrightarrow{v^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \xrightarrow{u^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M', N)$$

exakt ist.

- (v) Eine Folge $0 \rightarrow N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ in \mathcal{A} ist genau dann exakt, wenn für jedes $M \in \mathcal{A}$ die Folge abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N') \xrightarrow{u_*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N) \xrightarrow{v_*} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N'')$$

exakt ist.

Definition 10.20. Ein Funktor zwischen abelschen Kategorien heißt **exakt**, wenn er exakte Folgen in exakte Folgen überführt.

Definition 10.21. $I \in \mathcal{A}$ heißt **injektiv**, falls sich jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \swarrow & \searrow \\ i \uparrow & & g \\ A & \xrightarrow{f} & I \end{array}$$

in dem i ein Monomorphismus ist und f ein beliebiger Morphismus, kommutativ durch ein g ergänzen lässt.

$P \in \mathcal{A}$ heißt **projektiv**, wenn P als Objekt von \mathcal{A}^{op} injektiv ist. M.a.W., wenn sich jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ p \downarrow & \nearrow g & \\ A & \xleftarrow{f} & P \end{array}$$

mit p ein Epimorphismus und f beliebig, durch ein g kommutativ ergänzen lässt.

Bemerkung 10.22. Ist $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ eine exakte Folge in \mathcal{A} und A' injektiv oder A'' projektiv, so zerfällt die Folge.

Lemma 10.23. (i) I ist genau dann injektiv, wenn der Funktor

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, I) : \mathcal{A}^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{A}b$$

exakt ist.

(ii) P ist genau dann projektiv, wenn der Funktor $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}b$ exakt ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 10.19 und den Definitionen. \square

Bemerkung 10.24. Ist eine Kategorie \mathcal{A} additiv bzw. abelsch, so gilt dies auch für die entgegengesetzte Kategorie \mathcal{A}^{op} . Denn der einzige Teil der Definitionen, der nicht invariant unter Umkehrung der Pfeile ist, ist die Existenz endlicher Produkte. Da nach Satz 10.6 endliche Produkte aber zugleich Koprodukte sind, bleibt auch diese Eigenschaft unter Pfeilumkehr erhalten.

11 Adjungierte Funktoren

Seien \mathcal{C}, \mathcal{D} Kategorien und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren.

Definition 11.1. F ist **linksadjungiert** zu G (und G **rechtsadjungiert** zu F , Schreibweise: $F \dashv G$), wenn eine natürliche Äquivalenz

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G-) \cong \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F-, -)$$

von Bifunktoren: $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow (\text{Mengen})$ existiert.

Sind \mathcal{C}, \mathcal{D} additive Kategorien und F, G additive Funktoren, so wird stillschweigend angenommen, dass eine Äquivalenz von Bifunktoren $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}b$ vorliegt.

Beispiele 11.2. 1) Sei $\mathcal{C} = \mathcal{D} = A\text{-Mod}$. Sei N ein A -Modul. Wir betrachten die Funktoren

$$A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}, \quad M \mapsto M \otimes_A N,$$

und

$$A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}, \quad P \mapsto \text{Hom}_A(N, P).$$

Dann gilt (vergleiche Satz 5.1) in natürlicher Weise

$$\text{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \cong \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, P)).$$

Wir erhalten die Funktorenadjunktion

$$- \otimes_A N \dashv \text{Hom}_A(N, -).$$

2) Sei $\mathcal{C} = K\text{-Vec}$, $\mathcal{D} = (\text{Mengen})$, $F : K\text{-Vec} \rightarrow (\text{Mengen})$ der Vergiss-Funktor und $G : (\text{Mengen}) \rightarrow K\text{-Vec}$, $M \rightarrow K^{(M)} = \text{Vektorraum mit Basis } M$.

Dann gilt

$$\text{Hom}_{K\text{-Vec}}(GM, V) = \text{Mor}_{(\text{Mengen})}(M, FV)$$

also $G \dashv F$.

Satz 11.3. Es seien \mathcal{A}, \mathcal{B} abelsche Kategorien, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ additive Funktoren und sei $F \dashv G$ (im additiven Sinne). Dann gilt:

- (i) F ist rechtsexakt, d.h., ist $A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ exakt in \mathcal{A} , so ist $FA' \rightarrow FA \rightarrow FA'' \rightarrow 0$ exakt in \mathcal{B} .
- (ii) G ist linksexakt, d.h., ist $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B''$ exakt in \mathcal{B} , so ist $0 \rightarrow GB' \rightarrow GB \rightarrow GB''$ exakt in \mathcal{A} .
- (iii) Ist F exakt, so überführt G Injektive in Injektive.
- (iv) Ist G exakt, so überführt F Projektive in Projektive.

Beweis. F induziert einen Funktor $F^{\text{op}} : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}^{\text{op}}$ und analog $G^{\text{op}} : \mathcal{B}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{A}^{\text{op}}$. Es gilt $G^{\text{op}} \dashv F^{\text{op}}$. Daher genügt es, (i) und (iii) zu zeigen.

(i) Für $A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ exakt und $B \in \mathcal{B}$ beliebig ist

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A'', GB) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, GB) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', GB)$$

exakt, also auch

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA'', B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(FA', B).$$

Hieraus folgt die Exaktheit von

$$FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA'' \longrightarrow 0.$$

(iii) Sei $I \in \mathcal{B}$ injektiv. Zu zeigen: Der Funktor

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GI)$$

ist exakt. Nun gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-, GI) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F-, I)$$

und weil F exakt und I injektiv ist, ist der Funktor auf der rechten Seite exakt. \square

12 Komplexe

Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie.

Definition 12.1. Ein **Komplex** A^\bullet in \mathcal{A} ist eine Folge von Objekten und Homomorphismen

$$\dots \longrightarrow A^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} A^0 \xrightarrow{d_0} A^1 \xrightarrow{d_1} A^2 \dots,$$

so dass $d_i \circ d_{i-1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt. Man nennt die Homomorphismen d_i auch die **Differentiale** des Komplexes und schreibt die Bedingung lax in der Form $d^2 = 0$.

Definition 12.2. Ein **Homomorphismus** $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ zwischen zwei Komplexen ist eine Familie $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Homomorphismen $f_i : A^i \rightarrow B^i$, so dass für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt: $d_i^B \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i^A$, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}^A} & A^i & \xrightarrow{d_i^A} & A^{i+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & f_{i-1} \downarrow & & f_i \downarrow & & f_{i+1} \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & B^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}^B} & B^i & \xrightarrow{d_i^B} & B^{i+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

kommutiert.

Bemerkung 12.3. Komplexe in \mathcal{A} zusammen mit Homomorphismen von Komplexen bilden wieder eine abelsche Kategorie. Kerne, Kokerne und endliche Produkte bilden sich an jeder Stelle separat.

Definition 12.4. $Z^i = \ker(d_i) \subset A^i$ heißen die **i -Kozykel** von A^\bullet .

$B^i = \mathrm{im}(d_{i-1}) \subset A^i$ heißen die **i -Koränder**.

$H^i(A^\bullet) = Z^i / B^i$ heißt die **i -te Kohomologiegruppe** von A^\bullet .

Bemerkung 12.5. Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ induziert Homomorphismen $Z^i(f) : Z^i A^\bullet \rightarrow Z^i B^\bullet$, $B^i(f) : B^i A^\bullet \rightarrow B^i B^\bullet$ und $H^i(f) : H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet)$ für alle i .

Satz 12.6 (Verallgemeinertes Schlangenlemma). Sei

$$0 \rightarrow A^\bullet \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge von Komplexen (d.h. für jedes i ist $0 \rightarrow A^i \rightarrow B^i \rightarrow C^i \rightarrow 0$ exakt). Dann existiert eine natürliche lange exakte Folge

$$\cdots \rightarrow H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet) \rightarrow H^i(C^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(A^\bullet) \rightarrow \cdots$$

Beweis. Wir haben für jedes $i \in \mathbb{Z}$ das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A^i & \rightarrow & B^i & \rightarrow & C^i \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A^{i+1} & \rightarrow & B^{i+1} & \rightarrow & C^{i+1} \rightarrow 0. \end{array}$$

Das Schlangenlemma (Anfangs- bzw. Endteil) liefert uns daher für beliebiges i exakte Folgen $0 \rightarrow Z^i(A^\bullet) \rightarrow Z^i(B^\bullet) \rightarrow Z^i(C^\bullet)$ und $A^i/B^i(A^\bullet) \rightarrow B^i/B^i(B^\bullet) \rightarrow C^i/B^i(C^\bullet) \rightarrow 0$. Diese passen für i und $i+1$ gemeinsam in das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} A^i/B^i(A^\bullet) & \rightarrow & B^i/B^i(B^\bullet) & \rightarrow & C^i/B^i(C^\bullet) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & Z^{i+1}(A^\bullet) & \rightarrow & Z^{i+1}(B^\bullet) & \rightarrow & Z^{i+1}(C^\bullet), \end{array}$$

in dem die vertikalen Abbildungen durch die Differentiale d der jeweiligen Komplexe induziert sind. Das Schlangenlemma liefert eine exakte Folge

$$H^i(A^\bullet) \rightarrow H^i(B^\bullet) \rightarrow H^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(A^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(B^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(C^\bullet).$$

Diese exakten Folgen für alle i setzen sich zu der behaupteten langen exakten Folge zusammen. \square

Definition 12.7. Eine **injektive Auflösung** von $A \in \mathcal{A}$ ist ein Komplex

$$0 \rightarrow I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \rightarrow \cdots$$

bestehend aus injektiven Objekten in \mathcal{A} , mit $H^i(I^\bullet) = 0$ für $i \geq 1$ zusammen mit einem Isomorphismus $A \xrightarrow{\sim} \ker(d_0) = H^0(I^\bullet)$.

Eine **projektive Auflösung** ist eine injektive Auflösung in \mathcal{A}^{op} , d.h. ein Komplex

$$\cdots \rightarrow P^{-2} \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \rightarrow 0$$

bestehend aus projektiven Objekten in \mathcal{A} , mit $H^i(P^\bullet) = 0$, $i \leq -1$, zusammen mit einem Isomorphismus $H^0(P^\bullet) \xrightarrow{\sim} A$.

Bemerkung 12.8. Man benutzt gerne die untere Nummerierung $P_i = P^{-i}$ und schreibt dann $H_i(-) = H^{-i}(-)$.

Definition 12.9. \mathcal{A} hat **genügend viele Injektive**, wenn zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ein Monomorphismus $i : A \rightarrow I$ in ein injektives Objekt I existiert. \mathcal{A} hat **genügend viele Projektive**, wenn \mathcal{A}^{op} genügend viele Injektive hat.

Beispiele 12.10. • $R\text{-Mod}$ hat genügend viele Injektive (Korollar 8.18) und genügend viele Projektive (Korollar 8.6).

- Die Kategorie der endlich erzeugten abelschen Gruppen hat genügend viele Projektive aber nicht genügend Injektive.
- die Kategorie der Garben abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum hat genügend viele Injektive aber nicht genügend viele Projektive.

Satz 12.11. \mathcal{A} habe genügend viele Injektive. Dann hat jedes Objekt von \mathcal{A} eine injektive Auflösung. Für eine exakte Folge $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$ existieren kompatible injektive Auflösungen, d.h. ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & I'^2 & \longrightarrow & I'^1 & \longrightarrow & I''^2 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & I'^1 & \longrightarrow & I'^0 & \longrightarrow & I''^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & I'^0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I''^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{g} & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

so dass alle I'^n, I^n, I''^n injektiv sind.

Beweis. Induktive Konstruktion einer injektiven Auflösung I^\bullet von A :

1. Schritt: Wähle $A \hookrightarrow I^0$.
2. Schritt: Wähle

$$I^0/A \hookrightarrow I^1.$$

n -ter Schritt: Wähle $I^{n-2}/\text{im}(I^{n-3}) \hookrightarrow I^{n-1}$.

Nun sei $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Folge. Wir wählen Monomorphismen in Injektive: $i' : A' \hookrightarrow I'^0$ und $i'' : A'' \hookrightarrow I''^0$. Wegen der Injektivität von I'^0 finden wir einen Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow I'^0$, der i' fortsetzt. Dann setzen wir $I^0 = I'^0 \oplus I''^0$ und definieren $i : A \rightarrow I^0$ durch ϕ in der ersten und $i'' \circ g$ in der zweiten Komponente. Da i'' Monomorphismus ist, gilt $\ker(i) \subset \ker g = A'$ und da i' Monomorphismus ist, folgt $\ker(i) = 0$. Wir erhalten somit ein kommutatives

Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I'^0 & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I''^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow i' & & \uparrow i & & \uparrow i'' \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{g} & A'' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

in dem die Pfeile in der oberen Zeile gerade die natürliche Inklusion und Projektion sind. Das Schlangenlemma liefert uns die kurze exakte Folge

$$0 \rightarrow \operatorname{coker}(i') \rightarrow \operatorname{coker}(i) \rightarrow \operatorname{coker}(i'') \rightarrow 0$$

und wir können die Konstruktion induktiv fortsetzen. \square

Satz 12.12. *\mathcal{A} habe genügend viele Projektive. Dann hat jedes Objekt von \mathcal{A} eine projektive Auflösung. Für eine exakte Folge $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$ existieren kompatible projektive Auflösungen, d.h. ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & P'_2 & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P''_2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P'_1 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P''_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P'_0 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & P''_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f} & A & \xrightarrow{g} & A'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

so dass alle P'_n, P_n, P''_n projektiv sind.

Beweis. Man wende Satz 12.11 in \mathcal{A}^{op} an. \square

Definition 12.13. Seien $f, g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ zwei Komplexhomomorphismen f und g heißen **homotop**, wenn Homomorphismen $D^i : A^{i+1} \rightarrow B^i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ existieren, so dass $f - g = dD + Dd$ gilt. Schreibweise: $f \sim g$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 A^0 & \xrightarrow{d} & A^1 & \xrightarrow{d} & A^2 & \xrightarrow{d} & A^3 \\
 f \Downarrow g & \swarrow D & f \Downarrow g & \swarrow D & f \Downarrow g & \swarrow D & f \Downarrow g \\
 B^0 & \xrightarrow{d} & B^1 & \xrightarrow{d} & B^2 & \xrightarrow{d} & B^3
 \end{array}$$

Bemerkung 12.14. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.

Lemma 12.15. Aus $f \sim g$ folgt

$$H^i(f) = H^i(g) : H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet)$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Auf $Z^i(A^\bullet)$ gilt:

$$f - g = dD : Z^i(A^\bullet) \longrightarrow B^i(B^\bullet) \subset Z^i(B^\bullet).$$

Daher gilt $H^i(f - g) = 0$, und folglich $H^i(f) = H^i(g)$. □

Bemerkung 12.16. Es gelte $f \sim g : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ und es sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein (additiver) Funktor in eine weitere abelsche Kategorie. Dann gilt auch $Ff \sim Fg : FA^\bullet \rightarrow FB^\bullet$.

Grund: Ist $f \sim g$ durch die Familie von Homomorphismen $D^i : A^{i+1} \rightarrow B^i$ realisiert, so gibt uns die Familie $F(D^i)$ eine Homotopie zwischen $F(f)$ und $F(g)$.

Definition 12.17. Ein Komplexhomomorphismus $f : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ heißt **Homotopieäquivalenz**, wenn $g : B^\bullet \rightarrow A^\bullet$ existiert mit $g \circ f \sim \text{id}_A$ und $f \circ g \sim \text{id}_B$.

Bemerkung 12.18. Ist f eine Homotopieäquivalenz, so ist $H^i(f) : H^i(A) \rightarrow H^i(B)$ ein Isomorphismus für alle i . Solche Homomorphismen nennt man **Quasiisomorphismen**. Nicht jeder Quasiisomorphismus ist eine Homotopieäquivalenz:

Man betrachte den Nullmorphismus

$$0 : 0^\bullet \longrightarrow A^\bullet = [0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0].$$

Beide Komplexe sind exakt, ihre Kohomologie ist daher Null und der Nullmorphismus somit ein Quasiisomorphismus. Der Nullmorphismus ist aber keine Homotopieäquivalenz, weil er es dann nach Bemerkung 12.16 auch nach Anwendung eines beliebigen Funktors wäre. Wendet man aber den Funktor $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ an, so erhält man

$$0 : 0^\bullet \longrightarrow A^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = [0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0]$$

was kein Quasiisomorphismus (und damit insbesondere auch keine Homotopieäquivalenz) ist, da $A^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nichttriviale Kohomologie hat.

Satz 12.19. Gegeben seien zwei Komplexe

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & \varphi \downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

und ein Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$. Wir nehmen an:

- Die obere Zeile ist exakt.
- Alle I^i , $i \geq 0$, sind injektiv.

Dann existiert ein Komplexhomomorphismus f von der oberen zur unteren Zeile mit $f_{-1} = \varphi$. Beliebige zwei solche f sind homotop.

Beweis. Existenz: Nach Definition von Injektivität setzt sich $A \rightarrow B \rightarrow I^0$ zu einem Homomorphismus $f_0 : E^0 \rightarrow I^0$ fort. Dies macht das erste Quadrat

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E^0 \\ & & \varphi \downarrow & & f_0 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & I^0 \end{array}$$

kommutativ. Nun müssen wir f_1 definieren. Wir schreiben das zweite Quadrat in der Form

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & E^0/A & \longrightarrow & E^1 \\ & & f_0 \downarrow & & \\ & & I^0/\text{im}(B) & \longrightarrow & I^1 \end{array}$$

Weil nun I^1 injektiv ist, finden wir $f_1 : E^1 \rightarrow I^1$. Dies setzt man induktiv fort und erhält $f = (f_i)$.

Der Beweis der Eindeutigkeit bis auf Homotopie ist sehr technisch und wir lassen ihn aus. \square

Korollar 12.20 ($A = B$, $\varphi = \text{id}_A$). *Zwei injektive Auflösungen desselben Objekts sind homotopieäquivalent, die Homotopieäquivalenz ist wohlbestimmt bis auf Homotopie.*

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \text{id}_A & & & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & J^0 & \longrightarrow & J^1 & \longrightarrow & J^2 & \longrightarrow & \dots \end{array},$$

in dem in der oberen und der unteren Zeile jeweils eine injektive Auflösung von A steht. Nach Satz 12.19 existieren Komplexhomomorphismen $f : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$ und $g : J^\bullet \rightarrow I^\bullet$, eindeutig bis auf Homotopie, die das folgende Diagramm kommutativ machen.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & I^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \text{id}_A \uparrow \downarrow \text{id}_A & & g_0 \uparrow \downarrow f_0 & & g_1 \uparrow \downarrow f_1 & & g_2 \uparrow \downarrow f_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & J^0 & \longrightarrow & J^1 & \longrightarrow & J^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Nun kann man sich dasselbe Diagramm anschauen, aber zweimal mit I^\bullet und $gf : I^\bullet \rightarrow I^\bullet$. Da id_{I^\bullet} auch id_A fortsetzt, sagt uns die Eindeutigkeitsaussage von Satz 12.19, dass $gf \sim \text{id}_{I^\bullet}$. Analog erhält man $fg \sim \text{id}_{J^\bullet}$. Daher sind f und g zueinander inverse Homotopieäquivalenzen. \square

Korollar 12.21. *Sei I^\bullet ein exakter, injektiver Komplex mit $I^i = 0$ für $i \ll 0$. Dann ist die Inklusion $0^\bullet \rightarrow I^\bullet$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $I^i = 0$ für $i < 0$ (verschieben). Dann sind 0^\bullet und I^\bullet beides injektive Auflösungen von 0. \square

Bemerkung 12.22. Die Bedingung $I^i = 0$ für $i \ll 0$ ist notwendig (aber Gegenbeispiele schwer zu konstruieren).

13 Abgeleitete Funktoren

Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven und sei $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor in eine abelsche Kategorie \mathcal{B} .

Wir wählen für $A \in \mathcal{A}$ eine injektive Auflösung $A \rightarrow I^\bullet$ und setzen

$$R^i F(A) = H^i(FI^\bullet).$$

Nach Korollar 12.20 gibt eine andere injektive Auflösung in kanonischer Weise isomorphe Gruppen $R^i F(A)$. Ist nun $\varphi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus und $A \rightarrow I^\bullet$ und $B \rightarrow J^\bullet$ injektive Auflösungen, so existiert nach Satz 12.19 ein bis auf Homotopie eindeutiges $f : I^\bullet \rightarrow J^\bullet$ mit $H^0(f) = \varphi$. So wird für alle $i \in \mathbb{Z}$ die Zuordnung $A \mapsto R^i F(A)$ zu einem Funktor $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

Definition 13.1. $R^i F(-) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt der **i -te rechtsabgeleitete Funktor** des linksexakten Funktors F .

Lemma 13.2. Es gilt $R^i F = 0$ für $i < 0$ und $R^0 F = F$. Ist F exakt, so gilt $R^i F = 0$ für $i > 0$.

Beweis. $R^i F = 0$ für $i < 0$ folgt direkt aus der Definition, wegen $R^i F A = H^i(FI^\bullet)$ und weil I^\bullet im negativen Bereich Null ist. Wir betrachten den exakten Komplex

$$0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$$

Da F linksexakt ist, folgt die Exaktheit von $0 \rightarrow FA \rightarrow FI^0 \rightarrow FI^1$, was $FA = \ker(FI^0 \rightarrow FI^1) = H^0(FI^\bullet)$ und somit $R^0 F = F$ zeigt. Analog ist, wenn F exakt ist, der ganze Komplex

$$0 \rightarrow FA \rightarrow FI^0 \rightarrow FI^1 \rightarrow FI^2 \rightarrow \dots$$

exakt, also $R^i F = 0$ für $i > 0$ in diesem Fall. □

Satz 13.3. Für jede exakte Folge $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ in \mathcal{A} existieren natürliche Abbildungen

$$\delta^i : R^i F(A'') \longrightarrow R^{i+1} F(A')$$

für jedes $i \geq 0$, so dass die (lange) Folge

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow R^i F A' \rightarrow R^i F A \rightarrow R^i F A'' \rightarrow \\ R^{i+1} F A' \rightarrow R^{i+1} F A \rightarrow R^{i+1} F A'' \rightarrow \dots \end{aligned}$$

exakt ist. Ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein Homomorphismus exakter Folgen, so kommutiert für alle $i \geq 0$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R^i F(A'') & \xrightarrow{\delta} & R^{i+1} F(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^i(FB'') & \xrightarrow{\delta} & R^{i+1} F(B'). \end{array}$$

Beweis. Wir wählen nach Satz 12.11 kompatible Auflösungen

$$0 \longrightarrow I'^{\bullet} \longrightarrow I^{\bullet} \longrightarrow I''^{\bullet} \longrightarrow 0$$

von A' , A und A'' . Da I' aus Injektiven besteht, zerfällt für jedes i die exakte Folge

$$0 \longrightarrow I'^i \longrightarrow I^i \longrightarrow I''^i \longrightarrow 0.$$

(was aber mitnichten bedeutet, dass die Folge von Komplexen $0 \rightarrow I'^{\bullet} \rightarrow I^{\bullet} \rightarrow I''^{\bullet} \rightarrow 0$ zerfällt!) Daher ist auch die Folge

$$0 \longrightarrow FI'^i \longrightarrow FI^i \longrightarrow FI''^i \longrightarrow 0$$

exakt. Das verallgemeinerte Schlangenlemma für die exakte Folge von Komplexen

$$0 \longrightarrow FI'^{\bullet} \longrightarrow FI^{\bullet} \longrightarrow FI''^{\bullet} \longrightarrow 0$$

gibt das Ergebnis. Die Kompatibilität unter Homomorphismen zwischen kurzen exakten Folgen ist sehr technisch und wir lassen sie weg. \square

Linksabgeleitete Funktoren: Man drehe alle Pfeile um:

$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sei rechtsexakter Funktor und \mathcal{A} habe genügend viele Projektive. Wir wählen für jedes Objekt A eine projektive Auflösung

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

und setzen $L_i F(A) := H_i(FP_{\bullet})$.

– alles analog –

14 Azyklische Objekte

Wie vorher sei \mathcal{A} abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven und $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor.

Definition 14.1. $A \in \mathcal{A}$ heißt **F-azyklisch**, wenn $R^i F A = 0$ für alle $i \geq 1$ gilt.

Lemma 14.2. Injektive sind F-azyklisch.

Beweis. $A \rightarrow [0 \rightarrow A \rightarrow 0 \rightarrow \dots]$ ist eine injektive Auflösung von A und somit

$$R^i F(A) = H^i([0 \rightarrow F(A) \rightarrow 0 \rightarrow \dots]) = 0 \text{ für } i \geq 1. \quad \square$$

Satz 14.3. Sei $A \rightarrow I^\bullet$ eine Auflösung durch F -azyklische, d.h.

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots$$

ist exakt und I^i ist F -azyklisch für alle $i \geq 0$. Dann gibt es kanonische Isomorphismen

$$R^i F A \cong H^i(F I^\bullet).$$

Beweis. Diesen Satz beweist man mit Hilfe von *Spektralfolgen*. Man kann diese vermeiden, aber dann wird der Beweis sehr technisch (siehe z.B. Lang's Algebra-Buch). Wir lassen den Beweis weg. \square

15 Universelle δ -Funktionen

Sei wie vorher \mathcal{A} eine abelsche Kategorie.

Definition 15.1. Ein (**exakter**) **δ -Funktork** $H = (H^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist eine Familie von Funktoren $H^n : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zusammen mit Homomorphismen $\delta : H^n(C) \rightarrow H^{n+1}(A)$ für jede kurze exakte Folge $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ in \mathcal{A} , so dass gilt

(i) δ ist funktoriell, d.h. ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen in \mathcal{A} so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(C') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C) \end{array}$$

in \mathcal{B} .

(ii) Für jede kurze exakte Folge $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ in \mathcal{A} ist die lange Folge

$$\dots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \longrightarrow H^{n+1}(A) \longrightarrow \dots$$

exakt in \mathcal{B} .

Ein **Homomorphismus** $f : H \rightarrow H'$ zwischen δ -Funktoren ist eine Familie natürlicher Transformationen $f^n : H^n \rightarrow H'^n$, $n \in \mathbb{Z}$, von Funktoren $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$,

so dass für jede exakte Folge $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ in \mathcal{A} und jedes $n \in \mathbb{Z}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \\ \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} \\ H^n(C) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) \end{array}$$

kommutiert.

Beispiel 15.2. \mathcal{A} habe genügend viele Injektive und $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sei linksexakt. Dann ist $H^n := R^n F$ ein δ -Funktork.

Konvention: Ist ein δ -Funktork H^n nur für gewisse Indizes n gegeben, so setzen wir $H^n = 0$ für alle anderen Indizes.

Definition 15.3. Ein δ -Funktork $H = (H^n)_{n \geq 0} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ heißt **universell**, wenn für jeden δ -Funktork $H' = (H'^n)_{n \geq 0} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sich jede natürliche Transformation $f^0 : H^0 \rightarrow H'^0$ eindeutig zu einem Homomorphismus $f : H \rightarrow H'$ von δ -Funktoren ausdehnt.

Bemerkung 15.4. Das bedeutet, dass sich jeder linksexakte Funktork H^0 höchstens auf eine Weise (d.h. wenn existent, dann bis auf Isomorphie eindeutig) zu einem universellen δ -Funktork ausdehnen lässt.

Definition 15.5. Ein Funktork F heißt **auslöscher**, wenn zu jedem $A \in \mathcal{A}$ ein Monomorphismus $A \xrightarrow{u} A'$ existiert mit $F(u) = 0$.

Satz 15.6. Ein δ -Funktork $H = (H^n)_{n \geq 0}$ ist universell, wenn für jedes $n \geq 1$ der Funktork H^n auslöscher ist.

Beweis. Sei $H' = (H'^n)_{n \geq 0}$ ein beliebiger δ -Funktork von \mathcal{A} nach \mathcal{B} und sei $f^0 : H^0 \rightarrow H'^0$ eine natürliche Transformation. Wir gehen per Induktion vor und nehmen an, dass wir bereits die Existenz eindeutig bestimmter natürlicher Transformationen $f^i : H^i \rightarrow H'^i$, $i = 0, \dots, n$, welche mit δ kommutieren, gezeigt haben. Sei $A \in \mathcal{A}$ und sei $0 \rightarrow A \xrightarrow{u} I \rightarrow J \rightarrow 0$ eine exakte Folge so dass $H^{n+1}(u) = 0$. Dann erhalten wir einen eindeutig bestimmten Morphismus $f^{n+1} : H^{n+1}(A) \rightarrow H'^{n+1}(A)$ aus dem kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(I) & \longrightarrow & H^n(J) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) & \xrightarrow{0} & H^{n+1}(I) \\ \downarrow f^n & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\ H^n(I) & \longrightarrow & H^n(J) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(A) & & \end{array}$$

Es verbleibt zu zeigen, dass f^{n+1} funktoriell ist und mit δ kommutiert. Das lassen wir weg. \square

Korollar 15.7. \mathcal{A} habe genügend viele Injektive und $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ sei linksexakt. Dann ist $(R^n F)_{n \geq 0}$ ein universeller δ -Funktork.

Beweis. Injektive sind F -azyklisch, also $R^n F(I) = 0$ für $n \geq 1$. Für $A \in \mathcal{A}$ existiert ein injektives Objekt I mit $A \xrightarrow{u} I$, also ist $R^n F(u) : R^n F A \rightarrow R^n F I = 0$ (zwangsläufig) die Nullabbildung. Daher ist $R^n F$ auslöschar für alle $n \geq 1$ und das Ergebnis folgt aus Satz 15.6. \square

Schlussbemerkung: Dies ist die klassische Theorie ($\hat{=}$ partielle Ableitung in der Analysis). Es lohnt sich die allgemeinere Theorie („Abgeleitete Kategorien“) zu lernen. Für fortgeschrittene Anwendungen wird zunehmend die Sprache der „ ∞ -Kategorien“ verwendet.

16 Tor und Ext

Sei A ein kommutativer Ring und N ein A -Modul. Wir betrachten den rechtsexakten Funktor

$$- \otimes_A N : A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}.$$

In $A\text{-Mod}$ existieren genügend viele Projektive, also existiert $L_n(- \otimes_A N) : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$.

Berechnung: Wähle projektive Auflösung $P_\bullet \rightarrow M$. Dann gilt $L_n(- \otimes_A N)(M) = H_n(P_\bullet \otimes_A N)$.

Behauptung: Flache A -Moduln sind $(- \otimes_A N)$ -azyklisch.

Grund: Wähle eine flache Auflösung $Q_\bullet \rightarrow N$ und betrachte den Funktor $(F_n)_{n \geq 0}$ der gegeben ist durch

$$F_n(M) := H_n(M \otimes_A Q_\bullet).$$

Dann gilt:

- $F_0(M) = M \otimes_A N$ (weil $M \otimes_A -$ rechtsexakt ist).
- $(F_n)_{n \geq 0}$ ist ein δ -Funktork: Ist $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ exakt, so auch

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A Q_\bullet \longrightarrow M \otimes_A Q_\bullet \longrightarrow M'' \otimes_A Q_\bullet \longrightarrow 0$$

weil alle Q_i flach sind. Das verallgemeinerte Schlangenlemma 12.6 liefert uns die lange exakte Folge.

- Ist M flach, so gilt $F_n M = 0$ für alle $n \geq 1$ (weil dann $M \otimes_A (\rightarrow Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow N \rightarrow 0)$ exakt ist).
- Für $n \geq 1$ ist F_n auslöschar (jeder Modul ist Faktormodul eines freien, also eines flachen)

Wir erhalten nach Satz 15.6:

$$F_n(-) = L_n(- \otimes_A N)$$

Insbesondere sind flache Moduln $(- \otimes_A N)$ -azyklisch.

Nach Satz 14.3 können wir $L_n(- \otimes_A N)(M)$ durch eine flache Auflösung von M und nach dem Obigen auch durch eine flache Auflösung von N berechnen. Wir erhalten

$$L_n(- \otimes_A N)(M) \cong L_n(M \otimes_A -)(N)$$

Man nennt diesen Funktor

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N).$$

Als Anwendung zeigen wir

Satz 16.1. *Sei A ein Ring und*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

eine exakte Folge von A -Moduln mit M'' flach. Dann ist für jeden A -Modul N die Folge

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Dies folgt aus $\mathrm{Tor}_1^A(M'', N) = 0$ und der langen exakten Folge für die abgeleiteten Funktoren. \square

Satz 16.2. *Sei A ein lokaler Ring mit Maximalideal \mathfrak{m} und $k = A/\mathfrak{m}$. Sei M ein endlich erzeugter A -Modul. Dann sind äquivalent*

- (i) M ist frei.
- (ii) M ist projektiv.
- (iii) M ist flach.
- (iv) $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}, M) = 0$ für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.

Hat A die Eigenschaft, dass Untermoduln endlich erzeugter Moduln endlich erzeugt sind, so sind (i)–(iv) äquivalent zu

$$(v) \mathrm{Tor}_1^A(k, M) = 0.$$

Beweis. (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) sind klar.

((iv) bzw. (v)) \Rightarrow (i) Seien $x_1, \dots, x_n \in M$ Elemente, so dass $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in M/\mathfrak{m}M$ eine k -Vektorraumbasis bilden. Nach dem Nakayama-Lemma wird M durch seine Elemente x_1, \dots, x_n erzeugt. Sei $F = A^n$ und $\phi : A^n \rightarrow M$ gegeben durch $\phi(e_i) = x_i$. Sei $E = \ker(\phi)$. Die exakte Folge

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

liefert nach Tensorieren mit $k = A/\mathfrak{m}$ die exakte Folge

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(k, M) \longrightarrow k \otimes_A E \longrightarrow k \otimes_A F \xrightarrow{1 \otimes \phi} k \otimes_A M \longrightarrow 0.$$

Nun ist $1 \otimes \varphi$ eine surjektive Abbildung zwischen n -dimensionalen k -Vektorräumen ($k \otimes_A M \cong A/\mathfrak{m} \otimes_A M = M/\mathfrak{m}M$), also ein Isomorphismus. Daher gilt

$$E/\mathfrak{m}E = k \otimes_A E = 0,$$

also $E = \mathfrak{m}E$. Wüssten wir, dass E endlich erzeugt ist, so folgte $E = 0$ nach dem Nakayama-Lemma. Da E Untermodul des endlich erzeugten Moduls F ist, zeigt dies (v) \Rightarrow (i).

Im allgemeinen Fall sei $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in E$ beliebig und $\mathfrak{a}_x = (a_1, \dots, a_n)$ (ein endlich erzeugtes Ideal in A). Tensoriert man $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$ mit A/\mathfrak{a}_x und nutzt $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{a}_x, M) = 0$, erhält man die Inklusion $E/\mathfrak{a}_x E \hookrightarrow F/\mathfrak{a}_x F$, also $\mathfrak{a}_x E = \mathfrak{a}_x F \cap E$.

Insbesondere gilt $x \in \mathfrak{a}_x E = \mathfrak{a}_x \mathfrak{m}E \subset \mathfrak{a}_x \mathfrak{m}F$. Es folgt für $i = 1, \dots, n$, dass $a_i \in \mathfrak{a}_x \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{a}_x \subset \mathfrak{a}_x \mathfrak{m}$. Hiermit folgt $\mathfrak{a}_x = \mathfrak{m} \mathfrak{a}_x$, also $\mathfrak{a}_x = 0$ nach Nakayama. Dies zeigt $x = 0$, also $E = 0$. Daher ist $M \cong F$ frei. \square

Korollar 16.3. *Sei A ein Ring und M ein endlich erzeugter A -Modul. Dann sind äquivalent*

- (i) M ist flacher A -Modul.
- (ii) $M_{\mathfrak{p}}$ ist freier $A_{\mathfrak{p}}$ -Modul für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$.
- (iii) $M_{\mathfrak{m}}$ ist freier $A_{\mathfrak{m}}$ -Modul für jedes Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$.

Beweis. Flachheit ist eine lokale Eigenschaft und Satz 16.2. \square

Satz 16.4. *Ist A ein Hauptidealring, so gilt*

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = 0, \quad n \geq 2$$

für beliebige A -Moduln M und N .

Beweis. Da über einem Hauptidealring Untermoduln von freien Moduln frei sind, hat M (analog N) eine freie Auflösung der Form $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow 0$. \square

Satz 16.5. *Sei M eine abelsche Gruppe. Dann gilt*

$$TM \cong \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Beweis. Wir betrachten die exakte Folge $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$. Diese induziert (\mathbb{Q} ist flach) eine exakte Folge

$$0 = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow$$

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

und $TM = \ker(M \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. \square

Analog: Für $\text{Hom}(-, -)$.

Es gilt:

$$R^n \text{Hom}_R(-, N)(M) = R^n \text{Hom}_R(M, -)(N)$$

und man bezeichnet diese Gruppe mit

$$\text{Ext}_R^n(M, N).$$

Kann berechnet werden durch projektive Auflösung von M (= injektive Auflösung in $(R\text{-Mod})^{\text{op}}$) oder injektive Auflösung von N .

Satz 16.6. *Ist A ein Hauptidealring, so gilt*

$$\text{Ext}_A^n(M, N) = 0, \quad n \geq 2,$$

für beliebige A -Moduln M und N .

Beweis. Da über einem Hauptidealring Untermoduln von freien Moduln frei sind, hat M eine freie Auflösung der Form $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow 0$. Alternativ: über einem Hauptidealring sind Faktormoduln injektiver (=teilbarer) Moduln teilbar. Daher hat N eine injektive Auflösung der Form $0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow 0$. \square

Satz 16.7. *Sei $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen und M, N A -Moduln. Dann gilt*

(i) Für alle n gilt:

$$S^{-1} \text{Tor}_n^A(M, N) \cong \text{Tor}_n^{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

(ii) Hat M eine Auflösung $F_\bullet \rightarrow M$ durch endlich erzeugte freie A -Moduln, so gilt für alle n :

$$S^{-1} \text{Ext}_A^n(M, N) \cong \text{Ext}_{S^{-1}A}^n(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

Beweis. Es sei $F = A^{(X)}$ der freie A -Modul über einer nicht notwendig endlichen Menge X . Dann gilt für jedes N :

$$S^{-1}(F \otimes_A N) = S^{-1}N^{(X)} = (S^{-1}N)^{(X)} = (S^{-1}F \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N).$$

Nun wenden wir dies auf eine freie Auflösung von M an. Da deren Lokalisierung eine freie Auflösung von $S^{-1}M$ als $S^{-1}A$ -Modul ist, erhalten wir (i).

Ist X endlich, so gilt

$$S^{-1} \text{Hom}_A(F, N) = S^{-1}N^X = (S^{-1}N)^X = \text{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}F, S^{-1}N)$$

Nun wenden wir dies auf eine freie Auflösung von M an und erhalten (ii) im selben Stil wie (i). \square

Bemerkung 16.8. Satz 16.7 (ii) wendet sich z.B. auf endlich erzeugte Moduln über *noetherschen* Ringen an.

17 Ext und Erweiterungen

Es seien M, N zwei R -Moduln. Wir definieren die Menge $E(M, N)$ als die Menge aller exakten Folgen

$$0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$$

bis auf die Äquivalenzrelation: es gibt einen Homomorphismus $\phi : E \rightarrow E'$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & E & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\ & & \text{id} \downarrow \wr & & \phi \downarrow & & \text{id} \downarrow \wr & & \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & E' & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \end{array}$$

kommutiert (dann ist ϕ automatisch ein Isomorphismus, also ist die Relation symmetrisch). Die Menge $E(M, N)$ hat ein ausgezeichnetes Element, nämlich die zerfallende Erweiterung $0 \rightarrow N \rightarrow N \oplus M \rightarrow M \rightarrow 0$.

Wir wählen einen projektiven Modul P und eine Surjektion $\epsilon : P \twoheadrightarrow M$. Sei $K = \ker(\epsilon)$, d.h. wir erhalten eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

und somit eine exakte Folge

$$\text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \text{Hom}_R(K, N) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^1(P, N) = 0.$$

Somit gilt $\text{Ext}_R^1(M, N) \cong \text{coker}(\text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \text{Hom}_R(K, N))$. Nun sei $x \in E(M, N)$ die Isomorphieklasse der Erweiterung

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow E \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Da P projektiv ist, können wir $\epsilon : P \rightarrow M$ zu $\phi : P \rightarrow E$ heben. Wir betrachten das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & E & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\ & & \phi|_K \uparrow & & \phi \uparrow & & \text{id} \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & P & \xrightarrow{\epsilon} & M & \rightarrow & 0 \end{array}$$

und definieren eine Abbildung $\Psi : E(M, N) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, N)$ durch

$$\Psi(x) = \text{das Bild von } \phi|_K \text{ in}$$

$$\text{Ext}_R^1(M, N) = \text{coker}(\text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \text{Hom}_R(K, N)).$$

Satz 17.1. Die Abbildung Ψ ist wohldefiniert, hängt nicht von der Auswahl der Surjektion $\epsilon : P \twoheadrightarrow M$ ab und definiert eine Bijektion

$$E(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_R^1(M, N),$$

welche die zerfallende Erweiterung in $E(M, N)$ auf das Nullelement in $\text{Ext}_R^1(M, N)$ abbildet.

Beweis. Ist ϕ' ein weiterer Homomorphismus $P \rightarrow E$, der $\epsilon : P \rightarrow M$ hebt, so faktorisiert $\phi - \phi'$ über die Inklusion $N \hookrightarrow E$. Daher unterscheiden sich $\phi|_K$ und $\phi'|_K$ um die Einschränkung eines Homomorphismus $P \rightarrow N$ auf K und haben daher gleiches Bild in $\text{Ext}_R^1(M, N) \cong \text{coker}(\text{Hom}_R(P, N) \rightarrow \text{Hom}_R(K, N))$. Daher ist Ψ wohldefiniert. Zerfällt die Erweiterung, so erhalten wir

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xleftarrow{s} & E & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \phi|_K \uparrow & & \phi \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\epsilon} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Es ist dann $s \circ \phi$ eine Fortsetzung von $\phi|_K$ auf P und daher bildet sich die zerfallende Erweiterung unter Ψ auf Null ab.

Wir konstruieren nun ein Inverses zu Ψ . Sei $y \in \text{Ext}_R^1(M, N)$, $0 \rightarrow K \rightarrow P \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$ wie oben und $\psi : K \rightarrow N$ ein Vertreter von y . Wir setzen

$$E = (N \times P) / \{(-\psi(k), k), k \in K\}.$$

(Mit anderen Worten, wir identifizieren in $N \times P$ die Elemente $(0, k)$ und $(\psi(k), 0)$, $k \in K$.) Wir erhalten die exakte Folge

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{n \mapsto (n, 0)} E \xrightarrow{(n, p) \mapsto \epsilon(p)} M \longrightarrow 0,$$

in der die zweite Abbildung wegen $K = \ker(\epsilon)$ wohldefiniert ist. Wir nennen die Äquivalenzklasse dieser exakten Folge $\Phi(y)$ und müssen zeigen, dass die Konstruktion unabhängig von der Auswahl von ψ ist. Sei $\psi' : K \rightarrow N$ ein weiterer Vertreter von y . Dann gilt $\psi' - \psi = \phi|_K$ für einen Homomorphismus $\phi : P \rightarrow N$. Wir betrachten den Modul $E' = (N \times P) / \{(-\psi'(k), k), k \in K\}$ und müssen zeigen, dass die exakten Folgen $0 \rightarrow N \rightarrow E' \rightarrow M \rightarrow 0$ und $0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ äquivalent sind. Dazu betrachten wir den Homomorphismus

$$N \times P \longrightarrow N \times P, (n, p) \longmapsto (n - \phi(p), p).$$

Er hat die inverse Abbildung $(n, p) \mapsto (n + \phi(p), p)$ und ist daher ein Isomorphismus. Wegen $\psi'(k) - \phi(k) = \psi(k)$ für alle $k \in K$, überführt dieser Isomorphismus den Untermodul $\{(-\psi'(k), k), k \in K\}$ in den Untermodul $\{(-\psi(k), k), k \in K\}$ und induziert so einen Isomorphismus $E' \xrightarrow{\sim} E$, der sich zu einem Isomorphismus der entsprechenden exakten Folgen fortsetzt. Diese sind somit äquivalent und daher $\Phi(y)$ wohldefiniert.

Die Komposition $\phi : P \xrightarrow{(0, \text{id})} N \times P \rightarrow E$ ist eine Fortsetzung von $\psi : K \rightarrow N$ zu einem Homomorphismus $\phi : P \rightarrow E$. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & E & \xrightarrow{(n, p) \mapsto \epsilon(p)} & M \rightarrow 0 \\ & & \psi = \phi|_K \uparrow & & \phi \uparrow & & \uparrow \text{id}_M \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & P & \xrightarrow{\epsilon} & M \rightarrow 0. \end{array}$$

An diesem Diagramm und der Konstruktion der Abbildung Ψ sieht man, dass $\Psi(\Phi(y)) = y$ gilt. Sind wir umgekehrt von der exakten Folge $0 \rightarrow N \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$ gestartet, so faktorisiert der Homomorphismus $N \times P \rightarrow E$, $(n, p) \mapsto n + \phi(p)$ über den Faktormodul modulo $\{(-\psi(k), k), k \in K\}$. Wir erhalten so einen Homomorphismus exakter Folgen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & E & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\ & & \text{id}_N \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \text{id}_M \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & N \times P / \{(-\psi(k), k), k \in K\} & \rightarrow & M \rightarrow 0. \end{array}$$

Die beiden Folgen sind somit äquivalent, was übersetzt in unsere Konstruktionen $\Phi(\Psi(x)) = x$ für alle $x \in E(M, N)$ bedeutet. Daher sind Ψ und Φ zueinander invers.

Die Unabhängigkeit der Konstruktion von der Auswahl der Surjektion $\epsilon : P \rightarrow M$ lassen wir weg. \square

Bemerkung 17.2. Man kann die Bijektion $E(M, N) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_R^1(M, N)$ auch mit Hilfe einer Einbettung $N \hookrightarrow I$ in einen injektives Objekt konstruieren.

18 Abgeleitete projektive Limites

Sei \mathcal{A} eine abelsche Kategorie. Unsere Indexmenge ist stets $I \cong \mathbb{N}$ und wir schreiben projektive Systeme in der Form

$$(M_n, d_n) = \cdots \rightarrow M_3 \xrightarrow{d_2} M_2 \xrightarrow{d_1} M_1.$$

Ein Homomorphismus zwischen Systemen ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & M'_3 & \longrightarrow & M'_2 & \longrightarrow & M'_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Die Kategorie der projektiven Systeme bezeichnen wir mit $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Produkte, Kerne, Kokerne, etc. bilden sich stufenweise. Daher ist $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ eine abelsche Kategorie.

Satz 18.1. *Hat \mathcal{A} genügend viele Injektive, so auch $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Ein Objekt (I_n, d_n) von $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ist genau dann injektiv, wenn für alle n das Objekt I_n injektiv in \mathcal{A} und $d_n : I_{n+1} \rightarrow I_n$ ein zerfallender Epimorphismus ist.*

Beweis. Für $m \in \mathbb{N}$ betrachten wir die exakten Funktoren

$$V_m : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}, (A_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto A_m$$

und

$$U_m : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, A \mapsto (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{\text{id}} A \xrightarrow{\text{id}} \cdots \xrightarrow{\text{id}} A) \quad (A \text{ an Position 1 bis } m).$$

Ein Homomorphismus von $U_m(A)$ in ein System (B_n, d_n) ist eindeutig durch einen Homomorphismus $A \rightarrow B_m$ gegeben, daher haben wir Adjunktionen $U_m \dashv V_m$ für alle m . Zudem ist U_m exakt. Nach Satz 11.3 überführt V_m Injektive in Injektive. Für ein injektives $(I_n, d_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ist daher $I_n \in \mathcal{A}$ injektiv für alle n .

Wir bezeichnen die (abelsche) Produktkategorie („ \mathcal{A} hoch abzählbar“) mit $\mathcal{A}^{|\mathbb{N}|}$ und betrachten die exakten Funktoren

$$V : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{|\mathbb{N}|}, (A_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (A_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

$$P : \mathcal{A}^{|\mathbb{N}|} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left(\prod_{i=1}^n A_n, p_n \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

wobei $p_n : \prod_{i=1}^{n+1} A_i \rightarrow \prod_{i=1}^n A_i$ die kanonische Projektion ist.

Wir haben die Adjunktion $V \dashv P$, die gegeben ist, indem wir einem Element $(\phi_n) \in \text{Hom}_{\mathcal{A}^{|\mathbb{N}|}}(V(A_n, d_n), (B_n))$ das Element in $\text{Hom}_{\mathcal{A}^{\mathbb{N}}}((A_n, d_n), P(B_n))$ zuordnen, das durch

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1} & \xrightarrow{(\phi_1 \circ d^n, \phi_2 \circ d^{n-1}, \dots, \phi_{n+1})} & \prod_{i=1}^{n+1} B_i \\ \downarrow d_n & & \downarrow p_n \\ A_n & \xrightarrow{(\phi_1 \circ d^{n-1}, \dots, \phi_n)} & \prod_{i=1}^n B_i \end{array}$$

gegeben ist (hier bedeutet d^n die n -fache Hintereinanderausführung der Übergangsabbildung d). Weil V exakt ist, überführt P Injektive in Injektive. Ein $(I_n) \in \mathcal{A}^{|\mathbb{N}|}$ ist genau dann injektiv, wenn alle I_n injektiv in \mathcal{A} sind. Da \mathcal{A} genügend viele Injektive hat, finden wir für $(A_n, d_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ein Injektives $(I_n) \in \mathcal{A}^{|\mathbb{N}|}$ und einen Monomorphismus $V(A_n, d_n) \hookrightarrow (I_n)$. Weil P exakt ist, induziert dies einen Monomorphismus

$$(A_n, d_n) \xhookrightarrow{\iota} PV(A_n, d_n) \hookrightarrow P(I_n),$$

wobei ι die kanonische Abbildung ist, die per Adjunktion durch $\text{id}_{V(A_n, d_n)}$ gegeben ist. Daher hat $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ genügend viele Injektive.

Sei nun (I_n, d_n) injektiv. Dann hat die Inklusion $\iota : (I_n, d_n) \hookrightarrow PV(I_n, d_n)$ einen Schnitt s und wir erhalten Schnitte zu den d_n durch die Abbildungen $s_{n+1} \circ i_n \circ \iota_n$:

$$\begin{array}{ccc} I_{n+1} & \xhookrightarrow{\iota_{n+1}} & \prod_{i=1}^{n+1} I_i \\ \downarrow d_n & \xleftarrow{s_{n+1}} & \downarrow p_n \\ I_n & \xhookrightarrow{\iota_n} & \prod_{i=1}^n I_i \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow i_n \\ \downarrow i_n \end{array}$$

Schließlich sei (I_n, d_n) mit injektiven I_n und zerfallenden Surjektionen d_n gegeben. Dann gilt $I_{n+1} \cong \ker(d_n) \oplus I_n$, so dass $\ker(d_n)$ injektiv ist für alle n . Induktiv konstruiert man einen Isomorphismus

$$(I_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}} \cong P(\ker(d_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}).$$

Nach dem oben gezeigten ist (I_n, d_n) injektiv. \square

Ist \mathcal{A} eine abelsche Kategorie in der abzählbare projektive Limites existieren, so ist der Funktor $\varprojlim : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}$ rechtsadjungiert zum Funktor „konstantes System“

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \quad A \mapsto (\cdots \xrightarrow{\text{id}} A \xrightarrow{\text{id}} A)$$

(die Adjunktion ist nur eine Umformulierung der Universaleigenschaft von \varprojlim). Insbesondere ist \varprojlim linksexakt, was wir im Fall $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ bereits in Satz 6.24 gesehen hatten. Hat \mathcal{A} genügend viele Injektive, so existieren also die Rechtsableitungen

$$\varprojlim^n := R^n \varprojlim : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}, \quad n \geq 0.$$

Korollar 18.2. Ist $J \subset I \cong \mathbb{N}$ kofinal, so haben wir Isomorphismen

$$\varprojlim_{i \in I}^n A_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{j \in J}^n A_j$$

für alle $n \geq 0$.

Beweis. Ist $(A_i)_{i \in I} \rightarrow (I_i^\bullet)_{i \in I}$ eine injektive Auflösung in \mathcal{A}^I , so ist $(A_j)_{j \in J} \rightarrow (I_j^\bullet)_{j \in J}$ eine injektive Auflösung in \mathcal{A}^J und wir erhalten nach Lemma 6.27, dass

$$\varprojlim_{i \in I}^n A_i = H^n(\varprojlim_{i \in I} (I_i^\bullet)) = H^n(\varprojlim_{j \in J} (I_j^\bullet)) = \varprojlim_{j \in J}^n A_j. \quad \square$$

Wir betrachten für $m \geq 0$ das verschobene System $A[m] = (A_{n+m}, d_{n+m})_{n \in \mathbb{N}}$. Wir haben einen Homomorphismus $kan : A[m] \rightarrow A$ durch

$$\begin{array}{ccc} A_{n+m+1} & \xrightarrow{d^m} & A_{n+1} \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ A_{n+m} & \xrightarrow{d^m} & A_n \end{array}$$

Satz 18.3. kan induziert Isomorphismen $\varprojlim^i A[m] \xrightarrow{\sim} \varprojlim^i A$ für alle $i \geq 0$.

Beweis. Es genügt, den Fall $m = 1$ zu betrachten. Für $i = 0$ haben wir für jedes $B \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{konst.}(B), A[1]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathrm{konst.}(B), A)$$

(der Morphismus $B \rightarrow A_1$ ergibt sich als Komposition $B \rightarrow A_2 \xrightarrow{d} A_1$) und somit

$$\mathrm{Hom}(B, \varprojlim A[1]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(B, \varprojlim A)$$

Yoneda liefert $\varprojlim A[1] \xrightarrow{\sim} \varprojlim A$. Der allgemeine Fall ergibt sich dadurch, dass für eine injektive Auflösung $\tilde{A} \hookrightarrow I^\bullet$, $A[1] \rightarrow I[1]^\bullet$ eine injektive Auflösung ist. \square

Korollar 18.4. Angenommen es gibt zu jedem n ein m , so dass $A_{n+m} \xrightarrow{d^m} A_n$ die Nullabbildung ist (man nennt so ein System ein **Mittag-Leffler-Nullsystem**, kurz ML-Null). Dann gilt

$$\varprojlim_n^i A_n = 0$$

für alle $i \geq 0$.

Beweis. Nach Übergang zu einem kofinalen Teilsystem können wir annehmen, dass $d : A_{n+1} \rightarrow A_n$ für alle n die Nullabbildung ist. Dann ist $\mathrm{kan} : A[1] \rightarrow A$ die Nullabbildung und somit die induzierte Abbildung $\varprojlim^i A[1] \rightarrow \varprojlim^i A$ sowohl Null als auch ein Isomorphismus. \square

Von jetzt an sei R ein Ring und $\mathcal{A} = R\text{-Mod}$ (oder $\mathrm{Mod}\text{-}R$, oder allgemeiner eine abelsche Kategorie in der wir mit Elementen rechnen dürfen). Für $m \geq n$ setzen wir $d_{m,n} = d_n \circ \cdots \circ d_{m-1} : M_m \rightarrow M_n$.

Definition 18.5. Ein projektives System (M_n, d_n) von R -Moduln hat die **Mittag-Leffler-Eigenschaft (ML)** wenn zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $N \geq n$ mit

$$\mathrm{im}(d_{m,n} : M_m \rightarrow M_n) = \mathrm{im}(d_{N,n} : M_N \rightarrow M_n) \quad \forall m \geq N \quad \text{existiert.}$$

Bemerkung 18.6. Wir haben

$$M_n \supset \mathrm{im}(d_{n+1,n}) \supset \mathrm{im}(d_{n+2,n}) \supset \mathrm{im}(d_{n+3,n}) \supset \cdots$$

und die ML-Eigenschaft besagt, dass diese fallende Folge für jedes $n \in \mathbb{N}$ stationär wird.

Beispiele 18.7. • Jedes System mit surjektiven Übergangsabbildungen erfüllt ML (Stabilisierung bei M_n).

- Jedes ML-Null-System erfüllt ML (Stabilisierung bei $0 \subset M_n$).
- Jedes System von R -Moduln endlicher Länge erfüllt ML.

Theorem 18.8. Sei $(M_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein projektives System von R -Moduln. Dann gilt

$$\varprojlim_n^i M_n = 0 \quad \text{für } i \geq 2.$$

Hat (M_n, d_n) die ML-Eigenschaft, so gilt

$$\varprojlim_n^i M_n = 0 \quad \text{für } i \geq 1.$$

Lemma 18.9. Sei $0 \rightarrow (M'_n) \rightarrow (M_n) \rightarrow (M''_n) \rightarrow 0$ eine exakte Folge projektiver Systeme von R -Moduln. Sind die Übergangsabbildungen in M' alle surjektiv, so ist die Folge

$$0 \rightarrow \varprojlim_n M'_n \rightarrow \varprojlim_n M_n \rightarrow \varprojlim_n M''_n \rightarrow 0$$

exakt.

Beweis von Lemma 18.9. Es genügt, die Surjektivität rechts zu zeigen. Sei also $(x''_m) \in \varprojlim_n M''_m$ beliebig. Wir konstruieren induktiv ein Urbild $(x_n) \in \varprojlim_n M_n$. Zunächst wählen wir ein Urbild $x_1 \in M_1$ von $x''_1 \in M''_1$. Angenommen, wir haben für $i = 1, \dots, n$ Urbilder $x_i \in M_i$ von $x''_i \in M''_i$ mit $d(x_i) = x_{i-1}$, $i = 2, \dots, n$ konstruiert. Dann konstruieren wir $x_{n+1} \in M_{n+1}$ so:

Wähle zunächst irgendein Urbild $y_{n+1} \in M_{n+1}$ von $x''_{n+1} \in M''_{n+1}$. Dann liegt $x_n - d(y_{n+1})$ in $M'_n = \ker(M_n \rightarrow M''_n)$. Wir wählen ein $z_{n+1} \in M'_{n+1}$ mit $d(z_{n+1}) = x_n - d(y_{n+1})$. Dann ist $x_{n+1} := y_{n+1} + z_{n+1}$ auch ein Urbild von x''_{n+1} und es gilt $d(x_{n+1}) = d(y_{n+1}) + x_n - d(y_{n+1}) = x_n$. \square

Beweis von Theorem 18.8. Wir nehmen zunächst an, dass alle Übergangsabbildungen in M surjektiv sind und wählen eine injektive Auflösung $M \rightarrow I^\bullet$. Nach Satz 18.1 sind auch in allen I^i die Übergangsabbildungen surjektiv und gleiches gilt auch für jedes Faktorsystem von I^i . Zerhackt man die lange exakte Folge

$$0 \rightarrow M \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$$

in kurze exakte und wendet Lemma 18.9 an, erhält man die exakte Folge

$$0 \rightarrow \varprojlim M \rightarrow \varprojlim I^0 \rightarrow \varprojlim I^1 \rightarrow \dots$$

und somit $\varprojlim^i M = 0$ für $i \geq 1$. Ist nun M beliebig und $M \hookrightarrow I$ mit injektivem I gewählt, so hat $\widetilde{M} := \text{coker}(M \hookrightarrow I)$ surjektive Übergangsabbildungen und wir erhalten

$$\varprojlim^i M = \varprojlim^{i-1} \widetilde{M} = 0 \quad \text{für } i \geq 2.$$

Nun sei M ein ML-System. Wir definieren ein Untersystem $(N_n) \subset (M_n)$ durch

$$N_n = \bigcap_{m \geq n} d_{m,n}(M_m).$$

Zeigen wir zunächst, dass dies wirklich ein Untersystem ist, d.h. dass $d_n(N_{n+1}) \subset N_n$ gilt. Das sieht man an dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 N_{n+1} & & \cdots & \hookrightarrow & \text{im}(d_{n+2,n+1}) & \hookrightarrow & \text{im}(d_{n+1,n+1}) & \hookrightarrow & M_{n+1} \\
 \vdots & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 N_n & & \cdots & \hookrightarrow & \text{im}(d_{n+2,n}) & \hookrightarrow & \text{im}(d_{n+1,n}) & \hookrightarrow & M_n
 \end{array}$$

Da (M_n) die ML-Eigenschaft hat, hat das System (N_n) überdies surjektive Übergangsabbildungen. Stabilisiert sich die untere Zeile bei $\text{im}(d_{n+m,n})$, d.h. gilt $N_n = \text{im}(d_{n+m,n})$, so ist der induzierte Homomorphismus $M_{n+m}/N_{n+m} \rightarrow M_n/N_n$ Null. Das System (M_n/N_n) hat daher die ML-Null-Eigenschaft. Mithilfe von Korollar 18.4 und dem obigen Ergebnis für Systeme mit surjektiven Übergangsabbildungen erhalten wir die exakte Folge

$$\begin{array}{ccccc}
 \varprojlim^1(N_n) & \longrightarrow & \varprojlim^1(M_n) & \longrightarrow & \varprojlim^1 M_n/N_n \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 0 & & & & 0
 \end{array}$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung 18.10. Für die Gültigkeit aller Aussagen in diesem Abschnitt, insbesondere von Lemma 18.9 ist es zwingend notwendig, dass die Indexmenge abzählbar ist.

Teil 3: Kommutative Algebra fortgesetzt

19 Noethersche Moduln und Ringe

Lemma 19.1. *Sei A ein kommutativer Ring und M ein A -Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) *Jede aufsteigende Kette*

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots \subset M$$

von Untermoduln wird stationär (d.h. es existiert ein n mit $M_{n+i} = M_n$ $\forall i \geq 0$).

(ii) *Jede nichtleere Menge von Untermoduln von M hat ein maximales Element bzgl. „ \subset “.*

Beweis. (i) \Rightarrow (ii). Ist (ii) falsch, so existiert eine nichtleere Menge T von Untermoduln ohne maximales Element und wir können induktiv eine nicht-abbrechende Kette konstruieren.

(ii) \Rightarrow (i). Die Menge $T = \{M_1, M_2, \dots\}$ hat ein maximales Element, sagen wir M_n . Dann bricht die Kette bei M_n ab. \square

Definition 19.2. Ein A -Modul M heißt **noethersch**, wenn die äquivalenten Bedingungen von Lemma 19.1 erfüllt sind.

Beispiel 19.3. $\ell_A(M) < \infty \Rightarrow M$ noethersch.

Lemma 19.4. *Ein A -Modul M ist genau dann noethersch, wenn jeder Untermodul von M endlich erzeugt ist.*

Beweis. \Rightarrow Sei $N \subset M$ ein Untermodul. Dann ist auch N noethersch. Wir betrachten die (nichtleere) Menge T der endlich erzeugten Untermoduln von N . Diese hat ein maximales Element N_0 . Angenommen $N_0 \subsetneq N$. Wähle $x \in N \setminus N_0$. Dann ist

$$N_0 + Ax \subset N$$

auch endlich erzeugt im Widerspruch zur Maximalität von N_0 . Also $N_0 = N$ und N ist endlich erzeugt.

\Leftarrow Sei $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ eine Kette. Setze $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Dann ist N endlich erzeugt also $N = M_n$ für ein n . Daher wird die Kette stationär. \square

Korollar 19.5. *Endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring sind noethersch.*

Beweis. Sei M endlich erzeugt und $N \subset M$ ein beliebiger Untermodul. Wir wählen eine Surjektion $\phi : F \twoheadrightarrow M$, wobei F ein freier Modul von endlichem Rang ist und erhalten die Surjektion $\phi^{-1}(N) \twoheadrightarrow N$. Nach dem Elementarteilersatz für Hauptidealringe (siehe LA II) ist $\phi^{-1}(N) \subset F$ frei von endlichem Rang und daher N endlich erzeugt. \square

Lemma 19.6. Sei

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

exakt. Dann gilt

$$M \text{ noethersch} \iff M' \text{ und } M'' \text{ noethersch.}$$

Beweis. \Rightarrow Jede aufsteigende Kette in M' (bzw. M'') gibt im Bild (bzw. Urbild) eine aufsteigende Kette in M , die stationär werden muss.

\Leftarrow Sei $M_1 \subset M_2 \subset \dots$ eine aufsteigende Kette in M . Dann erhalten wir die aufsteigenden Ketten

$$\begin{aligned} M_1 \cap M' &\subset M_2 \cap M' \subset \dots \subset M' \quad \text{und} \\ M_1 + M'/M' &\subset M_2 + M'/M' \subset \dots \subset M''. \end{aligned}$$

Diese werden stationär, woraus wegen der exakten Folgen

$$0 \longrightarrow M_i \cap M' \longrightarrow M_i \longrightarrow (M_i + M')/M' \longrightarrow 0$$

und dem 5er Lemma folgt, dass auch die ursprüngliche Kette stationär wird. \square

Korollar 19.7. Sind M_i , $i = 1, \dots, n$, noethersch, so auch $\bigoplus_{i=1}^n M_i$.

Beweis. Dies folgt per Induktion aus der exakten Folge

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \longrightarrow 0$$

\square

Definition 19.8. Ein Ring A heißt **noetherscher Ring**, wenn A noethersch als A -Modul ist (^{19.4} jedes Ideal ist endlich erzeugt).

Beispiel 19.9. Jeder Hauptidealring ist noethersch.

Satz 19.10. Sei A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter A -Modul. Dann ist M noethersch.

Beweis. M ist Faktormodul von A^n . Daher folgt die Aussage aus Korollar 19.7 und Lemma 19.6. \square

Satz 19.11. *Ist A noethersch, so auch jede endliche A -Algebra.*

Beweis. Sei $A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und B endlich erzeugter A -Modul. Nach Satz 19.10 ist B noetherscher A -Modul, also erst recht noetherscher B -Modul. \square

Korollar 19.12. *Ist A noethersch und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist A/\mathfrak{a} ein noetherscher Ring.*

Beweis. A/\mathfrak{a} ist eine endliche A -Algebra. \square

Beispiel 19.13. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines normierten Polynoms $T^n + a_{n-1}T + \dots + a_0$ mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Dann ist die \mathbb{Z} -Algebra $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{C}$ eine endliche \mathbb{Z} -Algebra, also noethersch.

Satz 19.14. *Sei A noethersch und $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen. Dann ist $S^{-1}A$ noethersch.*

Beweis. Die Ideale in $S^{-1}A$ sind alle von der Form $S^{-1}\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ (siehe Satz 7.7 (ii)) und daher endlich erzeugt. \square

Satz 19.15 (Hilbertscher Basissatz). *Ist A noethersch, so auch der Polynomring $A[T]$.*

Beweis. Wir müssen zeigen: Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A[T]$ ist endlich erzeugt. Sei $\mathfrak{b} \subset A$ die Teilmenge welche aus den Leitkoeffizienten der Elemente in \mathfrak{a} gebildet wird. (Den Leitkoeffizienten des Nullpolynoms definieren wir als Null.) Es ist \mathfrak{b} ein Ideal in A . Da A noethersch ist, ist \mathfrak{b} endlich erzeugt, etwa $\mathfrak{b} = (a_1, \dots, a_n)$. Sei $f_i \in \mathfrak{a}$ von der Form $a_i T^{r_i} +$ niedere Terme, $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a} \subset A[T]$ das von f_1, \dots, f_n erzeugte Ideal und $r = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$. Nun sei

$$f = aT^m + \text{niedere Terme}$$

ein Element von \mathfrak{a} . Dann gilt $a \in \mathfrak{b}$. Sei $a = \sum_{i=1}^n u_i a_i$, $u_i \in A$. Gilt $m \geq r$, so liegt

$$f - \sum_{i=1}^n u_i f_i T^{m-r_i}$$

in \mathfrak{a} und hat Grad $< m$. Induktiv erhalten wir ein $g \in \mathfrak{a}$, $\deg(g) < r$, mit

$$f = g + h, \quad h \in \mathfrak{a}'.$$

Sei $M = A + AT + \dots + AT^{r-1} \subset A[T]$. Die gerade gemachte Rechnung zeigt, dass

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap M) + \mathfrak{a}'$$

gilt. Nun ist M ein endlich erzeugter A -Modul, also noethersch. Damit ist $\mathfrak{a} \cap M \subset M$ auch endlich erzeugter A -Modul und weil \mathfrak{a}' endlich erzeugter $A[T]$ -Modul ist, ist \mathfrak{a} endlich erzeugter $A[T]$ -Modul. \square

Bemerkung 19.16. Eine kleine Modifikation des Beweises liefert auch die Aussage

$$A \text{ noethersch} \implies A[[T]] \text{ noethersch.}$$

Wir werden dies später als Spezialfall eines allgemeineren Satzes erhalten.

Korollar 19.17. Jede endlich erzeugte Algebra über einem noetherschen Ring ist ein noetherscher Ring.

Beweis. Sei A noethersch. Wegen

$$A[T_1, \dots, T_n] = A[T_1, \dots, T_{n-1}][T_n]$$

folgt aus Satz 19.15 und per Induktion nach n , dass $A[T_1, \dots, T_n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ noethersch ist. Jede endlich erzeugte A -Algebra ist Faktoring eines solchen und somit noethersch nach Korollar 19.12. \square

Satz 19.18. In einem noetherschen Ring enthält jedes Ideal \mathfrak{a} eine Potenz seines Radikals $r(\mathfrak{a})$.

Beweis. $r(\mathfrak{a})$ ist endlich erzeugt. Sei $r(\mathfrak{a}) = (a_1, \dots, a_n)$ und sei $a_i^{e_i} \in \mathfrak{a}$, $i = 1, \dots, n$. Setze $m = \sum_{i=1}^n (e_i - 1) + 1$. Dann ist $r(\mathfrak{a})^m$ erzeugt von Elementen der Form $\prod_{i=1}^n a_i^{r_i}$ mit $\sum r_i = m$. Also $r_i \geq e_i$ für ein $1 \leq i \leq n$ und deshalb liegen diese Elemente in \mathfrak{a} . \square

Korollar 19.19. In einem noetherschen Ring ist das Nilradikal nilpotent.

Beweis. Wende Satz 19.18 auf $\mathfrak{a} = (0)$ an. \square

Satz 19.20. Jeder endlich erzeugte flache Modul M über einem noetherschen Ring A ist projektiv.

Beweis. M hat eine Auflösung durch endlich erzeugte freie Moduln. Nach Satz 16.7 und Satz 16.2 folgt für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$, jedes $n \geq 1$ und jeden A -Modul N :

$$\mathrm{Ext}_A^n(M, N)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Ext}_{A_{\mathfrak{p}}}^n(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}) = 0,$$

was nach Satz 7.19 $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = 0$ impliziert. Also ist $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ exakt, und daher M projektiv. \square

Definition 19.21. Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ heißt **irreduzibel**, falls gilt:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \implies \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ oder } \mathfrak{a} = \mathfrak{c}.$$

Beispiel 19.22. \mathfrak{p} Primideal $\Rightarrow \mathfrak{p}$ irreduzibel (siehe Satz 1.17 (ii)).

Lemma 19.23. *In einem noetherschen Ring hat jedes Ideal \mathfrak{a} eine Darstellung*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n$$

mit irreduziblen Idealen \mathfrak{a}_i .

Beweis. Sei T die Menge der Ideale ohne diese Eigenschaft. Im Fall $T = \emptyset$ ist man fertig. Ansonsten existiert nach Lemma 19.1 ein maximales Element $\mathfrak{a} \in T$. Insbesondere ist \mathfrak{a} selbst nicht irreduzibel, also existieren $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$. Also $\mathfrak{b}, \mathfrak{c} \notin T$. Daher gilt $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_n$, \mathfrak{b}_i irreduzibel, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{c}_m$, \mathfrak{c}_i irreduzibel. $\Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{c}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{c}_m$ Widerspruch. \square

Satz 19.24. *A noethersch, $\mathfrak{a} \subsetneq A$ irreduzibel $\Rightarrow r(\mathfrak{a})$ Primideal.*

Beweis. Übergang zu A/\mathfrak{a} : Ohne Einschränkung $\mathfrak{a} = (0)$, $r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{N}$ (Ist \mathfrak{a} irreduzibel, so auch das Nullideal in A/\mathfrak{a} . Außerdem ist $r(\mathfrak{a})$ das Urbild des Nilradikals von A/\mathfrak{a}).

Also z.z.: (0) irreduzibel $\Rightarrow \mathfrak{N}$ Primideal. Seien $x, y \in A$ mit $xy \in \mathfrak{N}$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $(xy)^n = 0$.

1. Fall $y^n = 0 \Rightarrow y \in \mathfrak{N}$ fertig.

2. Fall $y^n \neq 0$. Wir betrachten die aufsteigende Folge

$$\text{Ann}((x^n)) \subset \text{Ann}((x^{2n})) \subset \text{Ann}((x^{3n})) \subset \dots$$

Da A noethersch ist, existiert ein m mit $\text{Ann}(x^{nm}) = \text{Ann}(x^{n(m+1)})$.

Behauptung: $(x^{nm}) \cap (y^n) = (0)$.

Beweis der Behauptung: $a \in (y^n) \Rightarrow ax^n = 0$. $a \in (x^{nm}) \Rightarrow a = bx^{nm}$, $b \in A$. Es folgt $bx^{n(m+1)} = ax^n = 0$, also $b \in \text{Ann}(x^{n(m+1)}) = \text{Ann}(x^{nm})$. Daher gilt $a = bx^{nm} = 0$.

Da (0) irreduzibel ist, folgt aus der gerade bewiesenen Behauptung, dass $(x^{nm}) = 0$ gilt, also folgt $x \in \mathfrak{N}$. \square

Korollar 19.25. *In einem noetherschen Ring enthält jedes Primideal ein minimales Primideal. Es gibt nur endlich viele minimale Primideale.*

Beweis. Es gilt $\mathfrak{N} = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n$ mit \mathfrak{a}_i irreduzibel, $i = 1, \dots, n$. Daher gilt $\mathfrak{N} = r(\mathfrak{N}) = r(\mathfrak{a}_1) \cap \cdots \cap r(\mathfrak{a}_n)$ und $\mathfrak{p}_i = r(\mathfrak{a}_i)$ ist Primideal nach Satz 19.24. Wir sortieren die \mathfrak{p}_i so, dass $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$, $1 \leq r \leq n$, minimal in $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$ sind.

Ist nun \mathfrak{p} ein Primideal, so gilt

$$\mathfrak{p} \supset \mathfrak{N} = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r$$

Nach Primvermeidung 1.17 (ii) folgt $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_i$ für ein i , $1 \leq i \leq r$. Daher sind $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ minimal unter allen Primidealen und jedes Primideal enthält eines dieser Primideale. Insbesondere sind $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ alle minimalen Primideale. \square

20 Jordan-Hölder Reihen (Wiederholung aus der LA II)

Vorbemerkung: Alles in diesem Abschnitt Gesagte gilt auch im Fall dass der Ring A nicht kommutativ ist. Man muss dann nur allen Begriffen, wie Modul, Ideal usw., die Vorsilbe Links- bzw. Rechts- voranstellen.

Definition 20.1. Ein A -Modul $M \neq 0$ heißt **einfach** wenn es außer 0 und M keinen anderen Untermodul von M gibt.

Lemma 20.2. Ein einfacher Modul M ist isomorph zu A/\mathfrak{m} für ein Maximalideal $\mathfrak{m} \subset A$. Umgekehrt sind solche Moduln einfach.

Beweis. Die Untermoduln von A/\mathfrak{m} entsprechen 1-1 den Untermoduln von A die \mathfrak{m} umfassen (vgl. Satz 1.1). Also:

$$A/\mathfrak{m} \text{ einfach} \iff \text{es gibt kein Ideal } \mathfrak{a} \text{ mit } \mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq A.$$

Ist nun M einfach und $0 \neq x \in M$, so gilt $0 \neq Ax \subseteq M$, also $M = Ax$.

Die Surjektion: $A \xrightarrow{\varphi} M, a \mapsto ax$ zeigt $M \cong A/\ker(\varphi)$ und wie eben gesehen, muss $\ker(\varphi)$ ein Maximalideal sein. \square

Definition 20.3. Eine **Filtrierung der Länge n** eines A -Moduls M ist eine Folge

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

von Untermoduln. Die **Länge $\ell(M)$** von M ist definiert durch

$$\ell(M) = \sup\{n \mid \text{es ex. Filtr. der Länge } n \text{ von } M\}.$$

Bemerkung 20.4. $\ell(M) < \infty \Rightarrow M$ noethersch, insbesondere endlich erzeugt.

Beispiele 20.5. 1.) $\ell(M) = 0 \iff M = 0$.

2.) $\ell(M) = 1 \iff M$ einfach.

3.) $A = k$ Körper $\Rightarrow \ell(M) = \dim_k M$.

Lemma 20.6. Sei $\ell(M) = n < \infty$ und $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ eine Filtrierung der Länge n . Dann sind die Faktoren M_{i+1}/M_i , $i = 0, \dots, n-1$ einfache Moduln.

Beweis. Wäre M_{i+1}/M_i nicht einfach, so gäbe es einen Untermodul $0 \subsetneq \bar{N} \subsetneq M_{i+1}/M_i$. Dieser entspricht einem Untermodul $M_i \subsetneq N \subsetneq M_{i+1}$. So finden wir eine Filtrierung der Länge $n+1$. \square

Satz 20.7 (Satz von Jordan-Hölder). Sei $0 = M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ eine Filtrierung, so daß M_{i+1}/M_i einfach ist für $i = 0, \dots, n-1$. Dann gilt $n = \ell(M)$. Ist $0 = M'_0 \subseteq M'_1 \subseteq \cdots \subseteq M'_n = M$ eine weitere Filtrierung der Länge n , so sind die Folgen von Faktormoduln

$$(M_1/M_0, \dots, M_n/M_{n-1}), (M'_1/M'_0, \dots, M'_n/M'_{n-1})$$

bis auf die Reihenfolge und bis auf Isomorphie die gleichen.

Definition 20.8. Eine Filtrierung wie in Satz 20.7 heißt **Jordan-Hölder-Reihe**. Die Faktoren heißen die **Jordan-Hölder-Faktoren** und sind, bis auf die Reihenfolge, unabhängig von der Auswahl der J-H-Reihe.

Korollar 20.9. Ist

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Folge, so gilt

$$\ell(M') + \ell(M'') = \ell(M).$$

Insbesondere gilt

$$\ell(M \oplus N) = \ell(M) + \ell(N).$$

Beweis. Ist $0 = M'_0 \subsetneq M'_1 \subsetneq \dots \subsetneq M'_n = M'$ eine Filtrierung der Länge n , so ist $0 = i(M'_0) \subsetneq i(M'_1) \subsetneq \dots \subsetneq i(M'_n) = i(M') \subset M$ eine Filtrierung der Länge n oder $n+1$, also $\ell(M') = \infty \Rightarrow \ell(M) = \infty$. Analog ist $0 = M''_0 \subsetneq \dots \subsetneq M''_n = M''$ eine Filtrierung der Länge n , so ist

$$0 \subseteq j^{-1}(M''_0) \subsetneq \dots \subsetneq j^{-1}(M''_n) = M$$

eine Filtrierung der Länge n oder $n+1$ von M also $\ell(M'') = \infty \Rightarrow \ell(M) = \infty$.

Sei nun $\ell(M') = n' < \infty$, $\ell(M'') = n'' < \infty$.

Seien $0 = M'_0 \subsetneq \dots \subsetneq M'_{n'} = M'$ und $0 = M''_0 \subsetneq \dots \subsetneq M''_{n''} = M''$ J-H-Reihen. Dann ist $0 = i(M'_0) \subsetneq i(M'_1) \subsetneq \dots \subsetneq i(M'_{n'}) = j^{-1}(M''_0) \subsetneq j^{-1}(M''_1) \subsetneq \dots \subsetneq j^{-1}(M''_{n''}) = M$ eine J-H-Reihe für M . Also gilt $\ell(M) = n' + n''$. Schließlich betrachten wir für A -Moduln M und N die zerfallende exakte Folge

$$0 \rightarrow M \rightarrow M \oplus N \rightarrow N \rightarrow 0,$$

und erhalten die $\ell(M \oplus N) = \ell(M) + \ell(N)$. □

21 Artinsche Ringe

Definition 21.1. Ein A -Modul M heißt **artinsch**, wenn jede absteigende Kette

$$M_1 \supset M_2 \supset \dots$$

von Untermoduln stationär wird. A heißt **artinscher Ring**, wenn A als A -Modul artinsch ist.

Dies ist äquivalent dazu, dass jede nichtleere Menge von Untermoduln ein minimales Element besitzt (analoges Argument wie im Beweis von Lemma 19.1).

Beispiele 21.2. • $\ell_A(M) < \infty \Rightarrow M$ artinsch.

- Körper sind artinsche Ringe.
- Endliche Ringe sind artinsch.
- \mathbb{Z} ist nicht artinsch.

Lemma 21.3. Sei $A = k$ ein Körper und V ein k -Vektorraum. Dann sind äquivalent:

- (i) $\dim_k V < \infty$.
- (ii) $\ell_k(V) < \infty$.
- (iii) V ist noethersch.
- (iv) V ist artinsch.

Beweis. Lineare Algebra. □

Lemma 21.4. Sei $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ exakt. Dann gilt:

$$M \text{ artinsch} \iff M' \text{ und } M'' \text{ artinsch.}$$

Beweis. Analog zu Lemma 19.6. □

Korollar 21.5. M_1, \dots, M_n artinsch $\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M_i$ artinsch.

Beweis. analog wie Korollar 19.7. □

Satz 21.6. $\ell_A(M) < \infty \iff M$ artinsch und noethersch.

Beweis. \Rightarrow klar.

\Leftarrow Sei $M \neq 0$ (sonst alles klar). Nach Lemma 19.1 angewendet auf die Menge aller echten Untermoduln von $M =: M_0$ existiert ein maximaler Untermodul $M_1 \subsetneq M_0$ (also M_0/M_1 einfacher Modul). Desweiteren existiert ein maximaler Untermodul $M_2 \subsetneq M_1$ usw. Da M artinsch ist muss gelten $M_n = 0$ für ein n . Daher ist $0 = M_n \subsetneq \dots \subsetneq M_1 \subsetneq M_0 = M$ eine Kompositionsreihe und es gilt $\ell_A(M) < \infty$. □

Satz 21.7. Ist A ein artinscher Ring, so ist jede endliche A -Algebra auch artinscher Ring.

Beweis. Analog zu Satz 19.11. □

Korollar 21.8. Ist A artinsch und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist auch A/\mathfrak{a} artinsch.

Beweis. A/\mathfrak{a} ist eine endliche A -Algebra. □

Satz 21.9. Ist A artinsch und $S \subset A$ multiplikativ abgeschlossen, so ist auch $S^{-1}A$ artinsch.

Beweis. Wir betrachten den kanonischen Ringhomomorphismus $A \rightarrow S^{-1}A$. Nach Satz 7.7 (i) ist jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset S^{-1}A$ erweitert, es gilt somit $\mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}$ nach Satz 1.31 (iii). Ist nun

$$\mathfrak{b}_1 \supset \mathfrak{b}_2 \supset \dots \tag{*}$$

eine fallende Folge von Idealen in $S^{-1}A$, so ist

$$\mathfrak{b}_1^c \supset \mathfrak{b}_2^c \supset \dots \tag{**}$$

eine fallende Folge von Idealen in A , die stationär wird, weil A artinsch ist. Wegen $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{b}_i^{ce}$ wird dann auch die Folge (*) stationär. Daher ist auch $S^{-1}A$ artinsch. □

Bislang war alles völlig analog zum noetherschen Fall. Dieser erste Eindruck hat aber keinen Bestand:

Satz 21.10. *In einem artinschen Ring ist jedes Primideal maximal.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist $B = A/\mathfrak{p}$ artinsch und nullteilerfrei. Sei $x \in B$, $x \neq 0$. Die Kette $(x) \supset (x^2) \supset \dots$ wird stationär, also gilt $(x^n) = (x^{n+1})$ für ein n , d.h. $x^n = x^{n+1} \cdot y$ für ein $y \in B$. Kürzen im nullteilerfreien Ring B liefert $1 = xy$, also $x = y^{-1} \in B^\times$. Daher ist $B = A/\mathfrak{p}$ ein Körper und somit \mathfrak{p} Maximalideal. \square

Satz 21.11. *In einem artinschen Ring existieren nur endlich viele Maximalideale.*

Beweis. Erinnerung an Primvermeidung Satz 1.17

$$\mathfrak{p} \supset \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \implies \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}_i \quad \text{für ein } i.$$

Das bedeutet insbesondere: sind $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ paarweise verschiedene Maximalideale, so gilt $\mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{n-1} \supsetneq \mathfrak{m}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_n$. Gäbe es nun unendlich viele Maximalideale im artinschen Ring A , so erhielten wir die nicht stationäre Kette $\mathfrak{m}_1 \supsetneq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supsetneq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \supsetneq \dots$ Widerspruch. \square

Satz 21.12. *In einem artinschen Ring ist das Nilradikal nilpotent.*

Beweis. Wir betrachten die Folge $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{N}^2 \supset \dots$. Da A artinsch ist, gilt $\mathfrak{N}^k = \mathfrak{N}^{k+1} = \dots =: \mathfrak{a}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Gilt $\mathfrak{a} = (0)$, sind wir fertig. Sei $\mathfrak{a} \neq (0)$ und Σ die Menge aller Ideale \mathfrak{b} mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq (0)$.

Wegen $\mathfrak{a} \neq (0)$ gilt $(1) \in \Sigma$, also $\Sigma \neq \emptyset$. Da A artinsch ist, hat die Menge Σ ein minimales Element, sagen wir \mathfrak{c} . Wegen $\mathfrak{c}\mathfrak{a} \neq (0)$ existiert $x \in \mathfrak{c}$ mit $(x)\mathfrak{a} \neq (0)$ und aus $(x) \subset \mathfrak{c}$ folgt $(x) = \mathfrak{c}$ wegen Minimalität. Nun gilt $((x)\mathfrak{a})\mathfrak{a} = x\mathfrak{a}^2 = x\mathfrak{a} \neq (0)$. Also $(x)\mathfrak{a} \in \Sigma$ und wegen $(x)\mathfrak{a} \subset (x)$ folgt $(x)\mathfrak{a} = (x)$. Daher gilt $x = xy$ für ein $y \in \mathfrak{a}$ und folglich $x = xy = xy^2 = xy^3 = \dots$. Aber $y \in \mathfrak{a} = \mathfrak{N}^k \subset \mathfrak{N}$, also ist y nilpotent, also $x = 0$. Hieraus folgt $(x)\mathfrak{a} = 0$ im Widerspruch zu $(x) \in \Sigma$. Daher gilt $\mathfrak{a} = 0$. \square

Lemma 21.13. *Sei A ein Ring, so dass endlich viele, nicht notwendig verschiedene Maximalideale $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ existieren mit*

$$\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = (0).$$

Dann ist A genau dann noethersch, wenn artinsch.

Beweis. Wir betrachten die Kette

$$A \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = (0).$$

Dann gilt:

A noethersch $\xLeftrightarrow{19.6} \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i+1}$ noetherscher A -Modul $\forall i$.

Nun ist $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i+1}$ ein A/\mathfrak{m}_{i+1} -Vektorraum. Also können wir nach Lemma 21.3 die Äquivalenz fortsetzen:

$\iff \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i / \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i+1}$ ist artinscher A -Modul $\forall i \xLeftrightarrow{21.4} A$ artinsch. \square

Satz 21.14. A artinsch $\iff A$ noethersch und jedes Primideal ist maximal.

Beweis. \Rightarrow Nach Satz 21.10 genügt es zu zeigen, dass A noethersch ist. Seien $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ die endlich vielen Maximalideale von A und sei k so dass $\mathfrak{N}^k = 0$. Dann gilt $\mathfrak{m}_1^k \cdots \mathfrak{m}_n^k = (\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n)^k \subset (\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n)^k = \mathfrak{N}^k = 0$.

Nach Lemma 21.13 folgt A noethersch.

\Leftarrow Nach Korollar 19.25 hat A nur endlich viele minimale Primideale. Diese sind maximal nach Voraussetzung. Daher gilt $\mathfrak{N} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$ und es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{N}^k = (0)$ nach Korollar 19.19. Daher gilt $(\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n)^k = 0$. Wie oben, aber rückwärts schließt man A artinsch. \square

Satz 21.15. Jeder artinsche Ring ist endliches Produkt lokaler artinscher Ringe.

Beweis. Wir beachten zunächst, dass wegen

$$\begin{aligned} r(\mathfrak{m}_1^k + \mathfrak{m}_2^l) &= r(r(\mathfrak{m}_1^k) + r(\mathfrak{m}_2^l)) = r(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) \\ &= r(1) = (1) \Rightarrow \mathfrak{m}_1^k + \mathfrak{m}_2^l = (1), \end{aligned}$$

Potenzen verschiedener Maximalideale stets koprim sind.

Seien nun $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ die Maximalideale von A . Wie im Beweis von Satz 21.14 sieht man die Existenz eines $k \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{m}_1^k \cdots \mathfrak{m}_n^k = (0)$. Nun gilt $\mathfrak{m}_i^k + \mathfrak{m}_j^k = (1)$ für $i \neq j$, und daher (siehe Lemma 1.16) ist der Homomorphismus

$$A \longrightarrow \prod_{i=1}^n A/\mathfrak{m}_i^k$$

ein Isomorphismus. Die Ringe A/\mathfrak{m}_i^k sind artinsch und lokal, da das einzige Maximalideal genau $\mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^k \subset A/\mathfrak{m}_i^k$ ist. \square

Bemerkung 21.16. Man kann zeigen, dass die Zerlegung in Satz 21.15 eindeutig ist.