Probeklausur “Funktionentheorie 1”

Name ______________________________

Geburtsort: ______________________________

Geburtstag: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Hiermit versichere ich, nicht zum Kreis der Ansteckungsverdächtigen nach §7 der Coronaverordnung zu zählen, insbesondere dass ich nicht im Kontakt zu einer mit dem Coronavirus infizierten Person stehe oder stand, wenn seit dem letzten Kontakt noch nicht 14 Tage vergangen sind, sowie dass ich keine typischen Symptome einer Infektion mit dem Coronavirus, namentlich Geruchs- und Geschmacksstörungen, Fieber, Husten sowie Halsschmerzen, aufweise.
I hereby affirm that I do not belong to the group of suspects of infection according to §7 of the Corona Ordinance, in particular that I neither am nor have been in contact with a person infected with the corona virus if 14 days have not yet passed since the last contact, and that I do not show any typical symptoms of an infection with the corona virus, namely odour and taste disorders, fever, cough and sore throat.

Datum und Unterschrift: ______________________________

- Bitte verwenden Sie blaue oder schwarze Tinte, keine Bleistifte.
- Hilfsmittel wie Taschenrechner oder Formelzettel sind nicht erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt genau zwei Stunden.

Viel Erfolg!

Multiple-Choice-Aufgaben

Markieren Sie wahre Aussagen mit einem "w" und falsche mit einem "f".
Jede Aussage ist einen Punkt wert.
Sei D ein beliebiges Gebiet in $\mathbb{C}$. Wir schreiben $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ für die Riemannsche Zahlenkugel.

1. ☐ Jede Polynomfunktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
2. ☐ Jede Polynomfunktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist holomorph.
3. ☐ Jede nichtkonstante Polynomfunktion $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist surjektiv.
4. ☐ Sei $f : E \to E$ eine holomorphe Abbildung des Einheitskreises in sich mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| < |z|$ für alle $z \in E$.
5. ☐ Es gibt eine holomorphe Abbildung $f : E \to E$ des Einheitskreises in sich mit $f(0) = 0$ sodass $|f(z)| < |z|$ für alle $z \in E$.
6. ☐ Das Bild eines Gebietes unter einer holomorphen Funktion ist immer ein Gebiet.
7. ☐ Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen archimedisch angeordneten Körper.
8. ☐ Die komplexe Konjugation ist holomorph.
9. ☐ Möbiustransformationen sind bijektive Abbildugnen $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.
10. ☐ Die meromorphen Funktionen auf D bilden einen Körper.
11. ☐ Ist $f : D \to \mathbb{C}$ einmal komplex differenzierbar, dann auch unendlich oft.
12. ☐ Die Funktion $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}\ ,\ z \mapsto z^{-1}$ hat eine holomorphe Stammfunktion.
13. ☐ Die Funktion $\mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}\ ,\ z \mapsto z^{-2}$ hat eine holomorphe Stammfunktion.
14. ☐ Jede nichtkonstante holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist beschränkt.
15. ☐ Es gibt eine konforme Äquivalenz $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leqslant 0} \to E$.
16. ☐ Jedes Elementargebiet ist einfach zusammenhängend.
17. ☐ Jedes einfach zusammenhängende Gebiet ist ein Elementargebiet.
18. ☐ Die komplexe Sinusfunktion ist $2\pi\mathbb{Z}$-periodisch.
19. ☐ Die komplexe Sinusfunktion ist beschränkt.
20. ☐ Für jede meromorphe Funktion $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ ist das Residuum gegeben durch
$$\mathrm{Res}_0(f) = \lim_{z \to 0} z f(z)\ .$$
21. ☐ Der Imaginärteil einer holomorphen Funktion ist harmonisch.
22. ☐ Jedes Elementargebiet ist ein Gebiet.
23. ☐ Für jede holomorphe bijektive Funktion $f : D_1 \to D_2$ zwischen Gebieten D_1, D_2 ist auch die Umkehrfunktion holomorph.

24. ☐ Für jede injektive holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.

25. ☐ Jede holomorphe Funktion ist reell differenzierbar.

26. ☐ Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 3$, dann ist $f = g$.

27. ☐ Seien $f : E \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Gilt $f(1/n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, dann ist f konstant.

28. ☐ Jede holomorphe Funktion auf einem Kreisring lässt sich als Laurentreihe entwickeln.

29. ☐ Für komplexe Zahlen a, b, c ungleich Null gilt immer $a^c b^c = (ab)^c$.

30. ☐ Die leere Menge ist diskret in D.

31. ☐ Für komplexe Zahlen a, b, c ungleich Null gilt immer $a^b a^c = a^{bc}$.

32. ☐ Für jede holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist die Urbildmenge $f^{-1}(7i)$ diskret in D.

33. ☐ Jede Potenzreihe konvergiert kompakt im Konvergenzbereich.

34. ☐ Jedes Gebiet ist einfach zusammenhängend.

35. ☐ Es gilt $\oint_\gamma \exp(\exp(\exp(z)))\,\mathrm{d}z = 0$ für den Kreisweg $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ mit $0 \leqslant t \leqslant 1$.

36. ☐ Es gilt $\oint_\gamma \frac{\tan(\pi z)}{\pi z}\,\mathrm{d}z = 0$ für den Kreisweg $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ mit $0 \leqslant t \leqslant 1$. Hinweis: Substituieren Sie $z \mapsto -z$.

1. Aufgabe: (? Punkte) Formulieren Sie die folgenden Sätze:

1. Satz von Casorati-Weierstraß,
2. Riemannscher Abbildungssatz,
3. Satz von der Gebietstreue,
4. Cauchy-Integralsatz (eine der verschiedenen Versionen reicht).

2. Aufgabe: (? Punkte) Bestimmen Sie alle Singularitäten und Residuen der meromorphen Funktion $f : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$

$$f(z) = \frac{\tan(\pi z)}{\pi z} \ .$$

3. Aufgabe: (? Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\oint_\gamma \frac{\exp(z+1)}{z-2} \, \mathrm{d}z$$

für $\gamma(t) = 2 + 4\exp(4\pi i z)$ für $0 \leqslant t \leqslant 1$.

4. Aufgabe: (? Punkte) Berechnen Sie die Laurentreihe von $f(z) = \frac{1}{z^3 - z}$ im Gebiet $D_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

5. Aufgabe: (? Punkte) Seien $V \subseteq U$ zwei Gebiete. Beweisen Sie, dass die Einschränkungsabbildung $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$, $f \mapsto f|_V$ injektiv ist.

6. Aufgabe: Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ eine holomorphe Funktion. Beweisen Sie: Der Realteil von f ist eine harmonische Funktion.

7. Aufgabe: Sei $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Beweisen Sie: f besitzt in Null eine wesentliche Singularität genau dann, wenn f' in Null eine wesentliche Singularität besitzt.