# 10. Übungsblatt

## Aufgabe 36 (t-Test auf Gleichheit der Erwartungswerte, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

Laut dem Händler eines Feuerwerkgeschäfts fliegen die Raketen des Typs "Barock" mindestens genauso hoch wie Raketen des Typs "Renaissance". Wir wollen diese Aussage überprüfen und kaufen dazu 8 "Barock"- und 12 "Renaissance"-Raketen. Für unsere Nachforschung nehmen wir an, dass für beide Typen die Flughöhe normalverteilt ist mit einer mittleren Flughöhe $\mu_B$ ("Barock") bzw. $\mu_R$ ("Renaissance") und gleicher, unbekannter Standardabweichung $\sigma > 0$. Wir messen folgende Flughöhen (in Metern) bei unseren Raketen:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| "Barock" | 39.7 | 47.5 | 37.4 | 46.6 | 40.2 | 48.4 | 39.0 | 37.2 | | | | |
| "Renaissance" | 47.0 | 39.2 | 45.5 | 38.7 | 43.0 | 43.1 | 40.4 | 45.0 | 43.4 | 48.6 | 45.7 | 43.8 |

Führen Sie einen Zweistichproben $t$-Test (Satz 26.43) zum Niveau $\alpha = 0.05$ durch und entscheiden Sie, ob wir dem Händler bzgl. der Flughöhe der beiden Raketentypen vertrauen sollten oder nicht. Hierbei sollte der Fehler 1. Art dem peinlichen Fehler entsprechen, dem Händler zu misstrauen, obwohl er Recht hat.
***Hinweis:*** *Quantile der t-Verteilung:* $t_{18,0.95} = 1.734$, $t_{19,0.95} = 1.729$, $t_{20,0.95} = 1.725$.

## Aufgabe 37 (Rechenregeln für stochastische Konvergenz, 2 = 1.5 + 0.5 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) **Continuous Mapping Theorem für zwei Komponenten:**
Für $n \in \mathbb{N}$ seien $Y_n, Z_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $y, z \in \mathbb{R}$ deterministische Konstanten mit $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y$ und $Z_n \xrightarrow{\mathbb{P}} z$. Sei $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in $(y, z)$ stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann $h(Y_n, Z_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} h(y, z)$ folgt.

***Hinweis:*** *Nutzen Sie die $\varepsilon$-$\delta$-Definition der Stetigkeit von $h$ mit den Normen $\|\cdot\|_1$ (1-Norm) und $|\cdot|$ (Betrag).*

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, Y_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a, x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x, \quad Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y, \quad a_n \to a \quad \Longrightarrow \quad a_n \cdot X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a \cdot x + y.$$

## Aufgabe 38 (Fast-sichere und stochastische Konvergenz, 2 Punkte).

Es sei $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Weisen Sie nach, dass für Zufallsvariablen auf diesem Raum $\mathbb{P}$-fast sichere Konvergenz und $\mathbb{P}$-stochastische Konvergenz übereinstimmen.

**Aufgabe 39 (Stochastische Konvergenz und Konvergenz in $\mathscr{L}_2$, 4 = 2 + 2 Punkte).**
Sei $U \sim \mathrm{Exp}_1$ eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1 und $V \sim \mathrm{Par}_{(1,1)}$ eine Pareto-verteilte Zufallsvariable mit stetiger Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\mathbb{f}^U(v) = \exp(-v)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(v) \text{ und } \mathbb{f}^V(v) = \frac{1}{v^2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(v),$$

und $X_n := n \cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(U)$ sowie $Y_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[n,\infty)}(V)$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Überprüfen Sie, ob $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen einen Grenzwert konvergieren.

(b) Überprüfen Sie, ob $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im quadratischen Mittel (d.h. in $\mathscr{L}_2$) gegen einen Grenzwert konvergieren.

**Aufgabe 40 (Stochastische Konvergenz und $\mathscr{L}_2$-Konvergenz, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).**

In dieser Aufgabe untersuchen wir die Beziehung zwischen den beiden Konvergenzarten $\overset{L^2}{\to}$ (im quadratischen Mittel) und $\overset{\mathbb{P}}{\to}$ (stochastisch).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n, X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen.

(a) Sei $U \sim U_{[0,1]}$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ und $X_n := \sqrt{n} \cdot \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)$. Zeigen Sie, dass $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$, aber nicht $X_n \overset{L^2}{\to} 0$ gilt.

(b) Es gelte $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$ und es gebe $\alpha > 0$ mit $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^{2+\alpha}], \mathbb{E}[|X|^{2+\alpha}] < \infty$. Zeigen Sie, dass dann folgt: $X_n \overset{L^2}{\to} X$.
***Hinweis:*** *Nutzen Sie* $1 = \mathbb{1}_{\{|X_n-X|>\varepsilon\}} + \mathbb{1}_{\{|X_n-X|\leq\varepsilon\}}$ *und die Hölder-Ungleichung für Erwartungswerte: Sind* $Y, Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *Zufallsvariablen, so gilt für* $p, q > 0$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*:* $\mathbb{E}[|Y \cdot Z|] \leq \mathbb{E}[|Y|^p]^{1/p} \cdot \mathbb{E}[|Z|^q]^{1/q}$.

(c) Zeigen Sie, dass die $X_n, X$ aus (a) die Bedingungen aus (b) nicht erfüllen.

---

**Abgabe:**
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **08. Februar 2021, 09:00 Uhr**.

**Homepage der Vorlesung:**
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`