Aufgabe 1

(a) *Beweis.*
Induktionsanfang: $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{6}1(1+1)(2\cdot 1+1)$
Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n-1$ gelte $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)(n)(2\cdot n-1)$
Induktionsschluss: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2\cdot n+1) = \frac{1}{6}n(6n+(n-1)(2n-1)) = \frac{1}{6}n(2n^2+3n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. □

(b) $\sum_{k=1}^{n}(3k+2)^2 = \sum_{k=1}^{n} 9k^2+12k+4 = 9\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2 + 12\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4 \overset{a}{=} \frac{9}{6}n(n+1)(2n+1) + 6n(n+1) + 4n$.

Aufgabe 2

(a) $a_n = \sqrt[n]{nF^n} = \sqrt[n]{n}F$ und daher $\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\text{Lemma 2.5}}{=} F$.

(b) Die Reihe ist nach Wurzelkriterium offensichtlich konvergent. Für den Grenzwert gilt nach geometrischer Summenformel $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)} = \rho$.

(c) Mit Quotientenkriterium erhalten wir $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{S^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{S^k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{S}{k+1} = 0 < 1$ und folglich ist die Reihe konvergent.

(d) Der Grenzwert dieser Reihe ist nach Skript e^S.

(e) $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3-Fn^5}{\frac{n^5}{E}+n}\cdot\frac{R-GSTn}{\frac{U}{n}+Gn} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^5}-F}{\frac{1}{E}+\frac{1}{n^4}}\cdot\frac{\frac{R}{n}-GST}{\frac{U}{n^2}+G} \overset{\text{Lemma 2.5}}{=} \frac{-F}{\frac{1}{E}}\cdot\frac{-GST}{G} = FEST$:)

Aufgabe 3

(a) (i) (1) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
(2) $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m(m+1)} = \frac{n}{n+1}$

Beweis.
Induktionsanfang: $n=1: \sum_{m=1}^{1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
Induktionsannahme: Für ein beliebiges, aber festes $n\in\mathbb{N}$ gelte die Behauptung
Induktionsschluss: $n=n+1 : \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{1+n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$ □

(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2} = \infty$ und $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$.

(b) (i) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4\cdot 2^{k+1}}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4\cdot 2^{k+3}}{3^{k+2}} = \frac{32}{9}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k \overset{\text{geometrische Summe}}{=} \frac{32}{9}\cdot 3 = \frac{32}{3}$.

(ii) Es gilt $(-1)^k\cdot\frac{1}{\sqrt{3^{k+1}}-\sqrt{3^k}} = (-1)^k\cdot\frac{\sqrt{3^{k+1}}+\sqrt{3^k}}{3^{k+1}-3^k} = (-1)^k\cdot\frac{3^{\frac{k+1}{2}}+3^{\frac{k}{2}}}{3^k(3-1)} = \frac{1}{2}(-1)^k\cdot\left(\frac{3^{\frac{k+1}{2}}}{3^k}+\frac{3^{\frac{k}{2}}}{3^k}\right) = \frac{1}{2}\cdot(-1)^k\cdot\left(3^{-\frac{k-1}{2}}+3^{-\frac{k}{2}}\right)$. Folglich handelt es sich bei der Reihe um eine Teleskopsumme und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot(-1)^k\cdot\left(3^{-\frac{k-1}{2}}+3^{-\frac{k}{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

(c) (i) Diese Reihe ist nach Leibniz-Kriterium konvergent.
(ii) Nach Vorlesung konvergiert diese Reihe gegen e^2.

Aufgabe 4

(a) Da $h(x)$ beschränkt ist, existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot -C \leq x \cdot h(x) \leq x \cdot C \forall x \in \mathbb{R}$. Es gilt also $\lim_{x \searrow 0} x \cdot -C = \lim_{x \searrow 0} x \cdot C = 0$ und damit nach Sandwichlemma auch $\lim_{x \searrow 0} x \cdot h(x) = 0$. Analog für $x \nearrow 0$.

(b) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ist $\forall x \in \mathbb{R}$ unstetig (gleiches Argument wie Dirichlet-Funktion). Allerdings ist $|f(x)| = 1 \forall x \in \mathbb{R}$ und daher ist $|f(x)|$ stetig.

(c) $g(x) = x \cdot f(x)$ mit $f(x)$ wie in Aufgabe (b) ist nach Aufgabe (a) an der Stelle 0 stetig, da $f(x)$ beschränkt ist. Allerdings ist die Funktion überall sonst unstetig (siehe Dirichlet-Funktion).

Aufgabe 5

(a) (i) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \implies \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \xRightarrow{\text{Aufgabe 7.2c}} \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$

(ii) Außerdem ist $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty \implies \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \xRightarrow{\text{Aufgabe 7.2c}} \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty \implies \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$.

(b) (i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$ und daher $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \infty$ und daher $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \infty$.

(iii) Sei $a_n = \left(\frac{n^n}{n!}\right)^n$. Dann ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n^n}{n!}\right)^n} = \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n \cdot (n+1)}\right)^n \cdot \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right) = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)^n}{n!}\right)^n$$

Offensichtlich ist also $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ und damit auch

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} c_n = \infty$$

Aufgabe 6

Aufg.	Beschränkt (unten)?	Beschränkt (oben)?	Monoton?	Konvergent?
(a)	$\frac{1}{2}$	10	ja	ja
(b)	1	2	nein	ja

Aufgabe 7

(a) (i) Diese Reihe ist nach Leibniz-Kriterium konvergent, da $\frac{1}{\ln(k)}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

(ii) $\frac{(k+1)^k-k^k}{(k+1)^k} = 1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ ist eine monoton fallende Nullfolge, da $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ monoton gegen 1 konvergiert. Folglich ist die Reihe nach Leibnizkriterium konvergent.

(iii) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^k \cdot (\ln(2^k)^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 \cdot (\ln(2))^2} = \frac{1}{(\ln(2))^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent. Da $\frac{1}{n \cdot (\ln(n)^2)}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, folgt daraus mit Cauchychem Verdichtungskriterium die Konvergenz der Reihe.

(b) Der erste Fall in der Klammer ist betragsmäßig stets kleiner als der zweite und daher irrelevant für den lim sup. Wegen $\sqrt[k]{k} = 1$, Lemma 2.5 und Cauchy-Hadamard ist also $\rho = \frac{1}{1^2 \cdot 4} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 8

(a) $\frac{2}{5}$

(b) Die Folge ist nach unten unbeschränkt und daher nicht konvergent.

(c) 0

(d) 1

(e) $\frac{1}{2}$

(f) Die Folge divergiert, da der Kehrwert $\frac{x^2-1}{x^2+x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)} = \frac{x-1}{x}$ für $x \searrow 1$ gegen 0 geht.