Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2022

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
DR. K. HÜBNER
DR. C. DAHLHAUSEN

Blatt 8

Abgabe: *Freitag, 17.06.2022, 09:15 Uhr*

Notation. Sei K ein Körper und $G_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ seine absolute Galoisgruppe.

Aufgabe 1 (Artin-Schreier-Theorie). **(4 Punkte)**

Sei K von positiver Charakteristik p. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\wp\colon K^{\mathrm{sep}} \to K^{\mathrm{sep}}, x \mapsto x^p - x$, ist ein surjektiver Homomorphismus von G_K-Moduln mit Kern $\mathbb{F}_p$.

(b) Es ist

$$\mathrm{H}^i(G_K, \mathbb{Z}/p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p & (i = 0) \\ K/\wp(K) & (i = 1) \\ 0 & (i \geq 2). \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Kummer-Theorie). **(8 Punkte)**

Es existiere eine primitive n-te Einheitswurzel $\zeta_n \in K$ für ein zu $\mathrm{char}(K)$ teilerfremdes $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mu_n \subset K^\times$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Dann existieren Isomorphismen

$$\phi\colon\ \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^1(G_K, \mu_n) \xrightarrow{\cong} K^\times/(K^\times)^n.$$

Für $x \in K^\times$ und $\alpha = \phi^{-1}([x]) \in \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Der}(G_K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\mathrm{IDer}(\mathrm{G_K}, \mathrm{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})$ sei $f \in \mathrm{Der}(G_K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ein Repräsentant von α. Zeigen Sie:

(a) Es ist $\ker(f)$ ein offener Normalteiler von G_K und es existiert ein Isomorphismus

$$G_K/\ker(f) \xrightarrow{\cong} d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad (\subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

für einen geeigneten Teiler d von n.

(b) Es ist $(K^{\mathrm{sep}})^{\ker(f)} = K(\sqrt[n]{x})$ und der zu $d + n\mathbb{Z}$ gehörige Erzeuger der zyklischen Gruppe $G_K/\ker(f)$ ist der Körperautomorphismus

$$K(\sqrt[n]{x}) \to K(\sqrt[n]{x}), \quad \sqrt[n]{x} \mapsto \zeta_n^d \cdot \sqrt[n]{x}.$$

(c) Für eine Zwischengruppe $(K^\times)^n \subseteq \Delta \subseteq K^\times$ ist $K(\sqrt[n]{\Delta})$ eine abelsche Erweiterung von K vom Exponenten n und es ist $\mathrm{Gal}(K(\sqrt[n]{\Delta})/K) \cong \mathrm{Hom}(\Delta/(K^\times)^n, \mu_n)$.

(d) Der Körper $K(\sqrt[n]{K^\times}) := K(\sqrt[n]{x} \mid x \in K^\times)$ ist das Kompositum aller zyklischen Erweiterungen von K, deren Grad n teilt.

Aufgabe 3. **(4 Punkte)**

Sei $K^{\mathrm{ab}} := (K^{\mathrm{sep}})^{\overline{[G_K, G_K]}}$ der Fixkörper des Abschlusses der Kommutatorgruppe von G_K. Ferner sei $L := K(\sqrt[n]{K^\times})$. Zeigen Sie:

(a) Die Erweiterung K^{ab}/K is galoissch und K^{ab} ist das Kompositum aller endlichen abelschen Erweiterungen von K in K^{sep}.

(b) Unter dem Isomorphismus $(G_K)^{\mathrm{ab}} \cong \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ entspricht die Untergruppe $(G_K^{\mathrm{ab}})^n \subset G_K^{\mathrm{ab}}$ der Untergruppe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/L) \subset \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$.