Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2022

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
DR. K. HÜBNER
DR. C. DAHLHAUSEN

Blatt 10
Abgabe: *Freitag, 01.07.2022, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Brauergruppe der reellen Zahlen). **(2 Punkte)**
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 (Normabbildung). **(6 Punkte)**
Für einen lokalen Körper K sei π_K eine Uniformisierende und es bezeiche $U_K = \mathscr{O}_K^\times$ die Einheitengruppe und $U_K^{(n)} = 1 + \pi_K^n \mathscr{O}_K$ für $n \geq 1$ ihre Untergruppe der n-Einheiten. Für eine endliche Galoiserweiterung L/K nichtarchimedischer lokaler Körper betrachten wir die Untergruppe

$$U_{L/K} := \langle \frac{\sigma(u)}{u} \,|\, u \in U_L^{(1)}, \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \rangle$$

von $U_L^{(1)}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\ell\colon \mathrm{Gal}(L/K) \to U_L/U_{L/K}, \sigma \mapsto \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L}$, ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

(b) Ist L/K rein verzweigt mit zyklischer Galoisgruppe von Primzahlordnung, so ist die Folge

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\ell} U_L/U_{L/K} \xrightarrow{\mathrm{N}_{L/K}} U_K \longrightarrow 1 \qquad (\clubsuit)$$

exakt.

(c) Ist L/K rein verzweigt, so ist die Folge ($\clubsuit$) exakt.
Hinweis: Nutzen Sie die Auflösbarkeit von $\mathrm{Gal}(L/K)$, um auf den zyklischen Fall zu reduzieren.

Aufgabe 3 (Steinberg-Symbole). **(4 Punkte)**
Sei K ein Körper und A eine (multiplikative) abelsche Gruppe. Ein *Steinberg-Symbol* auf K mit Werten in A ist ein Gruppenhomomorphismus $(-,-)\colon K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times \to A, x \otimes y \mapsto (x,y)$, derart, dass $(x, 1-x) = 1$ für alle $x \in K^\times \setminus \{1\}$. Das Galois-Symbol aus Aufgabe 4 von Blatt 9 ist ein Steinberg-Symbol. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$(-,-)_\infty \colon \mathbb{R}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{Z}^\times, \quad x \otimes y \mapsto \begin{cases} -1 & (x, y < 0) \\ 1 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

ist ein Steinberg-Symbol.

(b) Sei $v\colon K^\times \to \mathbb{Z}$ eine diskrete Bewertung mit Restklassenkörper κ. Durch

$$(x,y)_v := (-1)^{v(x)v(y)} \overline{\left(\frac{y^{v(x)}}{x^{v(y)}}\right)}$$

ist ein Steinberg-Symbol auf K mit Werten in $\kappa^\times$ gegeben, welches surjektiv ist.

Aufgabe 4 (Milnor-K-Theorie). **(4 Punkte)**
Für einen Körper F definieren wir seine (2-te) *Milnor-K-Theorie*

$$\mathrm{K}_2^{\mathrm{M}}(F) := F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times / \langle x \otimes 1 - x \,|\, x \in F^\times \setminus \{1\} \rangle.$$

Für $x \otimes y \in \mathbb{F}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times$ schreiben wir $\{x,y\}$ für die zugehörige Restklasse in $\mathrm{K}_2^{\mathrm{M}}(F)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{K}_2^{\mathrm{M}}(F)$ für einen endlichen Körper die triviale Gruppe ist. *Hinweis:* Zerlegen Sie F disjunkt in Quadrate und Nichtquadrate.