Aufgabe 2.1 4 Punkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) A ist präkompakt $\Rightarrow$ A ist **beschränkt**, d.h.

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\} < \infty.$$

"Die Vereinigung von endlich vielen Bällen hat endlichen Durchmesser"

A ist präkompakt $\Rightarrow$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_1(v_j)$.

Da die Menge der v_j endlich ist, gilt

$\sup\{ d(v_j, v_\ell) \mid 1 \leq j, \ell \leq n\} = \max \{ d(v_j, v_\ell) \mid 1 \leq j, \ell \leq n\} =: C < \infty$.

Mit der Δ-Ugl. folgern wir für $x, y \in A$: (wobei $x \in B_1(v_j)$ und $y \in B_1(v_\ell)$)

$d(x,y) \leq d(x, v_j) + d(v_j, v_\ell) + d(v_\ell, y) \leq 2 + C < \infty$

$\Rightarrow$ $\operatorname{diam} A = \sup \{ d(x,y) \mid x, y \in A\} \leq \sup \{ 2 + C \mid x, y \in A\} = 2 + C < \infty$ $\square$

(b) A ist präkompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ ist präkompakt.

"$\Rightarrow$" $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $A \subset \bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} B_\varepsilon(v_j)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $A \subset \bigcup_{j=1}^{n_{\varepsilon/2}} B_{\varepsilon/2}(v_j)$.

Für jedes $x \in \overline{A}$ existiert ein $y \in A$, sodass $d(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ist $y \in \bigcup_{j=1}^{n_{\varepsilon/2}} B_{\varepsilon/2}(v_j)$, so muss nach Δ-Ugl. $x \in \bigcup_{j=1}^{n_{\varepsilon/2}} B_\varepsilon(v_j)$ sein.

Insbesondere gilt $\overline{A} \subset \bigcup_{j=1}^{n_{\varepsilon/2}} B_\varepsilon(v_j)$, was zu zeigen war.

"$\Leftarrow$" $A \subset \overline{A} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_\varepsilon(v_j)$ $\square$

(c) A ist kompakt $\Rightarrow$ A ist beschränkt und abgeschlossen.

Nach VL gilt A kompakt $\Leftrightarrow$ A vollständig & A präkompakt.

Nach (a) haben wir A präkompakt $\Rightarrow$ A beschränkt.

Sei $(a_n) \in A$ eine konvergente Folge $\Rightarrow$ (a_n) ist Cauchy-Folge

$\overset{A \text{ vollst.}}{\Rightarrow}$ $(a_n) \xrightarrow{n \to \infty} a \in A$ $\Rightarrow$ A ist abgeschlossen. $\square$

Sei nun (X, d) ein vollständiger metrischer Raum.

(d) Zeigen Sie die Äquivalenz

$$A \text{ ist präkompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ist relativ kompakt, d.h. } \overline{A} \text{ ist kompakt.}$$

"$\Rightarrow$" A präkompakt $\overset{(a)}{\Rightarrow}$ $\overline{A}$ präkompakt.

$\overline{A}$ abgeschlossen $\overset{X \text{ vollst}}{\Leftarrow}$ $\overline{A}$ vollst.

$\Bigg\}$ $\overline{A}$ präkompakt & vollst $\Rightarrow$ $\overline{A}$ kompakt nach VL

"$\Leftarrow$" $\overline{A}$ kompakt $\Rightarrow$ $\overline{A}$ präkompakt $\overset{(c)}{\Rightarrow}$ A präkompakt

$\square$

Aufgabe 2.2 4 Punkte

(a) Es sei (V, d) ein metrischer Raum, sowie $x \in V$ ein Punkt und $A \subseteq V$ eine Menge. Die **Distanz** von x zu A ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz

$$\operatorname{dist}(x, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A}.$$

Nach VL ist $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists y \in A : d(x,y) < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \inf\{d(x,y) \mid y \in A\} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \operatorname{dist}(x,A) = \inf\{d(x,y) \mid y \in A\} = 0$

2b: siehe letzte Seite der pdf

Aufgabe 2.3 4 Punkte

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, (Y, d_Y) vollständig und $S \subset X$ eine dichte Teilmenge.

(a) Eine Funktion $\tau : X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$d_Y(\tau(x), \tau(y)) < \varepsilon \qquad \forall\, x, y \in A \text{ mit } d_X(x, y) < \delta.$$

Zeigen Sie, dass sich eine gleichmäßig stetige Funktion $\tau : S \to Y$ eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Funktion $\tilde{\tau} : X \to Y$ fortsetzen lässt, d.h. dass $\tilde{\tau}_{|S} = \tau$ und $\tilde{\tau}$ ist gleichmäßig setig auf ganz X. **Bitte wenden!**

setze $\tilde{\tau}(x) := \lim_{n \to \infty} \tau(x_n)$ für eine Folge $x_n \to x$, $x_n \in S$ ($\exists$, weil S dicht ist)

1. Wohldefiniertheit:

- $(\tau(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge: Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, \delta$: $\forall\, n,m$: $d_X(x_n, x_m) < \delta$ $\Rightarrow d_Y(\tau(x_n), \tau(x_m)) < \varepsilon$

  wegen $x_n \to x$ ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, also $\exists\, n_0$:

  $\forall\, n, m \geq n_0$: $d_X(x_n, x_m) < \delta$.

- Da Y vollständig ist, konvergiert $\tau(x_n)$.

- Betrachte nun eine andere Folge $x_n' \to x$, $x_n' \in S$.

  Sei $\varepsilon > 0$. Wegen τ glm. stetig und $x_n, x_n' \longrightarrow x$ erhalten wir $\delta > 0$ mit

  $\exists\, N \in \mathbb{N}$: $\forall\, n \geq N$ $d_X(x_n, x) < \frac{\delta}{2}$ und $d(x_n', x) < \frac{\delta}{2}$

  $\Rightarrow d_X(x_n, x_n') < \delta$

  $\overset{\text{glm. stetig}}{\Rightarrow} d_Y(\tau(x_n), \tau(x_n')) < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \tau(x_n) = \lim_{n\to\infty} \tau(x_n')$

2. Gleichmäßige Stetigkeit:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle δ derart, dass $\forall\, x, y \in S$ gilt:

$$d_X(x,y) < 3\delta \Rightarrow d_Y(\tau(x), \tau(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Seien nun $x, y \in S$ mit $d_X(x,y) < \delta$
Fixiere Folgen $x_n \to x$, $x_n \in S$ und $y_n \to y$, $y_n \in S$.

Per Definition gilt $\lim_{n\to\infty} d(\tilde{\tau}(x), \tau(x_n)) = 0$ und $\lim_{m\to\infty} d(\tilde{\tau}(y), \tau(y_m)) = 0$.

Daher $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}: \quad d(\tilde{\tau}(x), \tau(x_n)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, n \geq N_1$

und $\exists\, m_1 \in \mathbb{N}: \quad d(\tilde{\tau}(y), \tau(y_m)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall\, m \geq m_1$.

Wähle $N_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $d_X(x_n, x) < \delta \quad \forall n \geq N$ und $m_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $d_X(y_m, y) < \delta \;\forall\, m \geq m_2$.

Setze $N := \max(N_1, N_2)$ und $m := \max(m_1, m_2)$. Dann gilt $\forall\, n \geq N,\ m \geq m$:

$$d_X(x_n, y_m) < d_X(x_n, x) + d_X(x, y) + d_X(y, y_m) < \delta + \delta + \delta = 3\delta \implies d_Y(\tau(x_n), \tau(y_m)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann ist $d_Y(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) \leq d_Y(\tilde{\tau}(x), \tau(x_n)) + d_Y(\tau(x_n), \tau(y_m)) + d_Y(\tau(y_m), \tilde{\tau}(y))$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Wir haben also gezeigt, dass $\forall\, x, y \in S$

$$d_X(x,y) < \delta \implies d_Y(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) < \varepsilon \qquad \square$$

(b) Eine Funktion $\tau : X \to Y$ heißt (metrische) **Isometrie**, wenn für alle $x, y \in X$ gilt

$$d_Y(\tau(x), \tau(y)) = d_X(x, y).$$

Zeigen Sie, dass sich auch eine Isometrie $\tau : S \to Y$ eindeutig zu einer Isometrie $\tilde{\tau} : X \to Y$ fortsetzen lässt, d.h. dass $\tilde{\tau}_{|S} = \tau$ und

$$d_Y(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) = d_X(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil a).

Offensichtlich sind metrische Isometrien gleichmäßig stetig (wähle $\delta = \varepsilon$).

Daher ist unsere Fortsetzung $\tilde{\tau}(x) := \lim_{n\to\infty} \tau(x_n)$ für $x_n \to x$, $x_n \in S$

auch wohldefiniert, wenn τ eine Isometrie ist.

z.z.: $d_Y(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) = d_X(x,y)$ für $x, y \in X$.

Bew: sei $\varepsilon > 0$. Fixiere wir also Folgen $x_n \to x$, $y_m \to y$; $x_n, y_m \in S$

Wegen $\lim_{n\to\infty} d(\tilde{\tau}(x), \tau(x_n)) = \lim_{m\to\infty} d(\tilde{\tau}(y), \tau(y_m)) = 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}:$

$\forall\, n, m \geq N: \quad d_Y(\tilde{\tau}(x), \tau(x_n)) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad d_Y(\tilde{\tau}(y), \tau(y_m)) < \frac{\varepsilon}{4}$

$d_X(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad d_X(y, y_m) < \frac{\varepsilon}{4}$

$$\Rightarrow \quad d_Y(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) \le d_Y(\tilde{T}(x), T(x_n)) + \underset{\shortparallel}{d_Y(T(x_n), T(y_n))} + d_Y(T(y_n), \tilde{T}(y))$$
$$< \frac{\varepsilon}{4} + d_X(x_n, y_n) + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$= d_X(x_n, y_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\le d_X(x_n, x) + d_X(x, y) + d_X(y, y_n) + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$< \frac{\varepsilon}{4} + d_X(x, y) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$= d_X(x, y) + \varepsilon$$

umgekehrt gilt aber auch:

$$d_X(x, y) \le d_X(x, x_n) + d_X(x_n, y_n) + d_X(y_n, y)$$
$$< d_Y(T(x_n), T(y_n)) + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\le d_Y(T(x_n), \tilde{T}(x)) + d_Y(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) + d_Y(\tilde{T}(y), T(y_n)) + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$< d_Y(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) + \varepsilon$$

wir erhalten also $\forall \varepsilon > 0$

$$d(x, y) < d_Y(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) + \varepsilon < d(x, y) + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad d_X(x, y) = d_Y(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) .$$

Aufgabe 2.4 4 Punkte

Sei X der Raum der reellen Folgen, d.h. $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}\}$ und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x,y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (X,d) ein metrischer Raum ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : [0,\infty) \to [0,1)$, $t \mapsto \frac{t}{1+t}$.

- Für beliebige $x,y \in X$ gilt $d(x,y) \in [0,1)$

wie im Hinweis angedeutet ist $0 \leq \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k-y_k|} < 1$ (klar nach multiplizieren mit dem Nenner)

Daher ist $0 \leq d(x,y) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$

- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall k: \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k-y_k|} = 0 \Leftrightarrow |x_k - y_k| = 0 \ \forall k \Leftrightarrow x_k = y_k \ \forall k \Leftrightarrow x = y$

- $d(x,y) = d(y,x)$ folgt aus $|x_k - y_k| = |y_k - x_k| \ \forall k$.

- $\underline{d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)}$: Sei $r_k := |x_k - z_k|$, $s_k := |x_k - y_k|$, $t_k := |y_k - z_k|$

z.z. $\forall k$: $\frac{r_k}{1+r_k} < \frac{s_k}{1+s_k} + \frac{t_k}{1+t_k}$.

$f : [0,\infty) \to [0,1)$, $t \mapsto \frac{t}{1+t}$

$f'(t) = \frac{(1+t) - t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}$ ist stetig, überall positiv $\Rightarrow$ f stetig diffbar, f streng monoton wachsend

$f'(t)$ ist außerdem monoton fallend und $f(0) = 0$.

Mit A 1.4 folgt: $d(x,y) = |x-y|$ ist metrisch $\Rightarrow$ $f \circ d$ ist metrisch, erfüllt $f \circ d$ Δ-Ungl,

$$\frac{r_k}{1+r_k} < \frac{s_k}{1+s_k} + \frac{t_k}{1+t_k} \qquad \square$$

(man kann es aber auch einfach explizit rechnen:

Es gilt $r, s, t \geq 0$
und $r \leq s + t$ (Δ-Ungl für $|\cdot|$),

$\Rightarrow r \leq s + t + 2st + rst$

$\Rightarrow r + \cancel{rs} + \cancel{rt} + \cancel{rst} \leq s + \cancel{sr} + st + \cancel{rst} + t + \cancel{tr} + ts + rst$

$\Rightarrow r(1+s)(1+t) \leq s(1+r)(1+t) + t(1+r)(1+s)$

$\Rightarrow \frac{r}{1+r} \leq \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t}$)

(b) Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie, dass $d(x^{(n)}, 0) \to 0$ äquivalent ist zu $x_j^{(n)} \to 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

"$\Rightarrow$" $d(x^{(n)}, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k^{(n)}|}{1+|x_k^{(n)}|} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \forall k: \frac{|x_k^{(n)}|}{1+|x_k^{(n)}|} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Da f streng monoton wächst und $f(0)=0$, folgt $x_k^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \forall k$.

"$\Leftarrow$" $x_k^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \forall k \underset{f(0)=0}{\overset{f \text{ monoton wachsend,}}{\Rightarrow}} \frac{|x_k^{(n)}|}{1+|x_k^{(n)}|} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \forall k$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle k derart, dass $2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Da f streng monoton wachsend ist, $\exists \delta$: $|x_j^{(n)}| < \delta \Rightarrow \frac{|x_j^{(n)}|}{1+|x_j^{(n)}|} < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle dann N derart, dass

$\forall j \leq k, \forall n \geq N$: $|x_j^{(n)}| < \delta$.

Dann gilt $\forall n \geq N$:

$$d(x^{(n)}, 0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j^{(n)}|}{1+|x_j^{(n)}|} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j^{(n)}|}{1+|x_j^{(n)}|} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \underbrace{\frac{|x_j^{(n)}|}{1+|x_j^{(n)}|}}_{\leq 1}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j}}_{<1} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}}_{< 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \varepsilon$$

$$\Rightarrow d(x^{(n)}, 0) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \square$$

(c) Beweisen Sie, dass es keine Norm $\|\cdot\|$ auf X gibt, so dass es $c, C > 0$ gibt mit

$$c\,\|x\| \leq d(x,0) \leq C\,\|x\| \qquad \forall\, x \in X$$

Hinweis. Betrachte $e^{(n)} : \mathbb{N} \to X$ mit $e_j^{(n)} = \delta_{jn}$ (Kroneckersymbol).

$$d((e_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}, 0) = \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2^{j+1}} \qquad d(\alpha (e_j^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}, 0) = \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

Es gilt $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$: $\quad c\,\|\alpha x\| \leq d(\alpha x, 0) \leq C\,\|\alpha x\|$

Für $x = e_j, j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$c\,\alpha\,\|x\| \leq \frac{\alpha}{\alpha+1}\, d(x,0) \leq C\,\alpha\,\|x\|$$

$\alpha = 1$

$\Rightarrow d(x,0) \leq C'\,\|x\|$

$\alpha + 1 = 2\frac{C'}{c}$

$\Rightarrow \quad d(x,0) \geq (\alpha+1) \cdot c \cdot \|x\| \geq 2C \cdot \|x\| \quad ↯$

Aufgabe 2.2 4 Punkte

(a) Es sei (V, d) ein metrischer Raum, sowie $x \in V$ ein Punkt und $A \subseteq V$ eine Menge. Die **Distanz** von x zu A ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz

$$\operatorname{dist}(x, A) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \overline{A}.$$

(b) Sei nun $A \subsetneq X$ ein abgeschlossener, echter Untervektorraum eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums $(X, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in (0,1)$ ein $x_\theta \in X$ existiert mit $\|x_\theta\| = 1$ und

$$\|x_\theta - a\| \geq 1 - \theta \qquad \forall\, a \in A.$$

b) Beweis: Sei $\theta \in (0,1)$ beliebig. Sei $x \in X \setminus A$. Da A abgeschlossen ist, gilt $d \overset{*}{:=} \inf\{\|x - a\| : a \in A\} > 0$, denn andernfalls gäbe es eine Folge $(a_n) \subset A$ mit $\|a_n - x\| \longrightarrow 0$ und x läge in $\bar{A} = A$.

Deshalb ist $d < \frac{d}{1-\delta}$ und es existiert $a_\delta \in A$ mit $\|x - a_\delta\| \overset{*}{<} \frac{d}{1-\delta}$.

Setze $x_\delta := \frac{x - a_\delta}{\|x - a_\delta\|}$, so dass $\|x_\delta\| = 1$.

Sei nun $a \in A$ beliebig. Dann ist:

$$\|x_\delta - a\| = \left\| \frac{x}{\|x - a_\delta\|} - \frac{a_\delta}{\|x - a_\delta\|} - a \right\|$$

$$\overset{\text{Homogenität}}{=} \frac{1}{\|x - a_\delta\|} \cdot \| x - (a_\delta + \|x - a_\delta\| a) \|$$

$$\overset{*}{\geq} \frac{d}{\|x - a_\delta\|}$$

$a_\delta + \|x - a_\delta\| a \in A$

$$\overset{*}{>} 1 - \delta$$