UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 15. Dezember 2021

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE I
ÜBUNGSAUFGABEN 9

DEADLINE: Do. 13. Jan. 2022, 15:00.

1. Verifizieren Sie, dass der Verbindungshomomorphismus $\partial_* : H_p(C_*) \to H_{p-1}(A_*)$ einer exakten Sequenz
$$0 \to A_* \longrightarrow B_* \longrightarrow C_* \to 0$$
von Kettenkomplexen tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus ist.
2. Verifizieren Sie die Exaktheit der langen exakten Homologiesequenz.
3. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Stern-konvex* bezüglich $x_0 \in X$, wenn für jeden von x_0 verschiedenen Punkt $x \in X$ das die beiden Punkte verbindende Geradensegment auch in X liegt. Beweisen Sie, direkt von der Definition der singulären Homologie ausgehend (also insbesondere ohne das Homotopieaxiom in Anspruch zu nehmen), dass $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ und $H_i(X) = 0$. Zum Beispiel hat also jeder Standard-Simplex diese Homologiegruppen.
4. Sei X ein kompakter Teilraum von $\mathbb{R}^n$ und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie: Ist f homotop zu einer konstanten Abbildung, dann ist $f_* : H_i(X) \to H_i(Y)$, $i > 0$, die Nullabbildung.
Idee: Sei $x_0 = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$; sei $c(X)$ die Vereinigung aller Liniensegmente, die Punkte von X mit x_0 verbinden. Zeigen Sie, dass f sich auf $c(X)$ fortsetzen lässt.