Moritz Meyer, Josua Kugler

Aufgabe 1 (Brauergruppe der reellen Zahlen). **(2 Punkte)**
Zeigen Sie, dass $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = H^2(\mathrm{Gal}(\mathbb{R}^{sep}/\mathbb{R}), \mathbb{C}^\times) = H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\times)$

Da $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ zyklisch ist, erhalten wir $H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\times) \cong \hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\times)$

$\cong H^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\times) / \mathrm{im}(N_G : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times) = {\mathbb{C}^\times}^{\{id, \bar{\cdot}\}} / \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^\times / \mathbb{R}^+ = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$z \mapsto |z|^2$

Aufgabe 2 (Normabbildung). **(6 Punkte)**

Für einen lokalen Körper K sei π_K eine Uniformisierende und es bezeiche $U_K = \mathcal{O}_K^\times$ die Einheitengruppe und $U_K^{(n)} = 1 + \pi_K^n \mathcal{O}_K$ für $n \geq 1$ ihre Untergruppe der n-Einheiten. Für eine endliche Galoiserweiterung L/K nichtarchimedischer lokaler Körper betrachten wir die Untergruppe

$$U_{L/K} := \langle \frac{\sigma(u)}{u} \mid u \in U_L^{(1)}, \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \rangle$$

von $U_L^{(1)}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\ell\colon \mathrm{Gal}(L/K) \to U_L/U_{L/K}, \sigma \mapsto \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L}$, ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

Z.z. $\frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} \in U_L$

$$\left|\ell(\sigma)\right| = \left|\frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L}\right| = \frac{|\sigma(\pi_L)|}{|\pi_L|} = \frac{|\pi_L|}{|\pi_L|} = 1 \Rightarrow \ell(\sigma) \in U_L$$

$$\frac{\sigma(u\pi_L)}{u\pi_L} = \frac{\sigma(u)}{u}\cdot\frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} = \frac{\sigma(\zeta u')}{\zeta \underset{\substack{\Uparrow \\ U_L^{(1)}}}{u'}}\cdot\frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L} = \frac{\sigma(\zeta)}{\zeta}\cdot\frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L}$$

$$\ell(\sigma\tau) = \frac{(\sigma\tau)(\pi_L)}{\pi_L} = \frac{(\sigma\tau)(\pi_L)}{\tau(\pi_L)}\cdot\frac{\tau(\pi_L)}{\pi_L} = \frac{\sigma(\tau(\pi_L))}{\tau(\pi_L)}\cdot\frac{\tau(\pi_L)}{\pi_L}$$

$\sigma P_L = P_L \Rightarrow \tau(\pi_L)$ ist ~~immer~~ noch Uniformisierende

$\Rightarrow \frac{\sigma(\tau(\pi_L))}{\tau(\pi_L)} = \frac{\sigma(\pi_L)}{\pi_L}$ mod U_L $\Rightarrow \ell(\sigma\tau) = \ell(\sigma)\cdot\ell(\tau)$

(b) Ist L/K rein verzweigt mit zyklischer Galoisgruppe von Primzahlordnung, so ist die Folge

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\ell} U_L/U_{L/K} \xrightarrow{N_{L/K}} U_K \longrightarrow 1 \qquad (\clubsuit)$$

exakt.

Da $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ zyklisch der Ordnung p ist, ist auch

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = Br(G,L) = H^2(G,L^\times) \cong \hat{H}^0(G,L^\times) = K^\times / N_{L/K}L^\times$$

$$\cong \frac{\mathbb{Z}\times U_K}{N_{L/K}(\mathbb{Z}\times U_L)} \overset{(*)}{\cong} \frac{\mathbb{Z}\times U_K}{p\mathbb{Z}\times N_{L/K}(U_L)} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times U_K/N_{L/K}(U_L)$$

Erläuterung $(*)$:

Sei v die eindeutige Fortsetzung der Bewertung auf K.

$$\mathbb{Z} \times U_L \longrightarrow L^\times \xrightarrow{N_{L|K}} K^\times.$$

$$(n, u) \longmapsto \pi_L^n \cdot u \xmapsto{N_{L|K}} \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)} \sigma(x) = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)} \sigma(\pi_L^n) \cdot \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)} \sigma(u)$$

$$= \prod_{\sigma \in G} \pi_L^n \cdot u_\sigma \cdot N_{L|K}(u) = \pi_L^{p \cdot n} \cdot \prod_{\sigma \in G} u_\sigma \cdot N_{L|K}(u)$$

Es gilt $v(N_{L|K}(\pi_L^n \cdot u)) = v(\pi_L^{p \cdot n} \cdot \prod_{\sigma \in G} u_\sigma \cdot N_{L|K}(u)) = p \cdot n$.

Wir erhalten daher

$$\begin{tikzcd}
L^\times \arrow[rr, "N_{L|K}"] \arrow[d, "\wr"] & U_K & K^\times \arrow[d, "\wr"] \\
\mathbb{Z} \times U_L \arrow[rr, "(p) \times ((\prod_{\sigma \in G} u_\sigma) N_{L|K})"'] & & \mathbb{Z} \times U_K
\end{tikzcd}$$

Aus Kardinalitätsgründen folgt

$$U_K / N_{L|K}(U_L) = \{0\}$$

Wir haben insgesamt also die Surjektivität

$$U_L \xrightarrow{N_{L|K}} U_K$$

gezeigt.

ZZ.: $N_{L/K} \circ \ell = 1$. Sei dazu $\sigma_0^j \in G$ $1 \le i \le p$

$$N_{L/K}(\ell(\sigma_0^j)) = N_{L/K}\left(\frac{\sigma_0^j(\pi_L)}{\pi_L}\right) = \prod_{i=1}^{p} \sigma_0^i\left(\frac{\sigma_0^j(\pi_L)}{\pi_L}\right)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{p} \sigma_0^{i+j}(\pi_L)}{\prod_{i=1}^{p} \sigma_0^i(\pi_L)} = \frac{\prod_{k=1}^{p} \sigma_0^k(\pi_L)}{\prod_{i=1}^{p} \sigma_0^i(\pi_L)} = 1.$$

2.2.) $\ell: \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow U_L / U_{L/K}$ injektiv

$$\ell(\sigma^j) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sigma^i(\pi_L)}{\pi_L} = \frac{\sigma^j(u)}{u} \overset{u = 1 + \pi_L \cdot x}{=} \frac{1 + \sigma^j(\pi_L) \cdot \sigma^j(x)}{1 + \pi_L \cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \sigma^i(\pi_L) \cdot (1 + \pi_L \cdot x) = (1 + \sigma^j(\pi_L) \cdot \sigma^j(x)) \cdot \pi_L$$

$$\sigma^i(\pi_L) + \sigma^i(\pi_L) \cdot \pi_L \cdot x = \pi_L + \sigma^j(\pi_L) \cdot \sigma^j(x)$$

mod $\mathfrak{P}^2$,

$$\sigma^i(\pi_L) = \pi_L + \sigma^j(\pi_L) \cdot \sigma^j(x)$$

$$\pi_L \cdot u_0^i = \pi_L + \pi_L \cdot u_0^j \cdot \sigma^j(x) \qquad : \pi_L$$

$$u_0^i = 1 + u_0^j \cdot \sigma^i(x)$$

(c) Ist L/K rein verzweigt, so ist die Folge (♣) exakt.
Hinweis: Nutzen Sie die Auflösbarkeit von $\mathrm{Gal}(L/K)$, um auf den zyklischen Fall zu reduzieren.

$L/M/K$, L/M zyklisch

Wir können per Induktion annehmen, dass die Aussage für alle L mit $[L:K] < n$ gilt.

Aufgrund der Auflösbarkeit $\exists M$, sodass L/M zyklisch und $[M:K] < n$.

ges $\quad 1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/M) \xrightarrow{\theta} U_L/U_{L/M} \xrightarrow{N_{L/M}} U_M \longrightarrow 1$

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(M/K) \xrightarrow{\theta} U_M/U_{M/K} \xrightarrow{N_{M/K}} U_K \longrightarrow 1$$

z.z. $\quad 1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K) \xrightarrow{\theta} U_L/U_{L/K} \xrightarrow{N_{L/K}} U_K \longrightarrow 1$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\mathrm{Gal}(L/M) \arrow[d] & U_L/U_{L/M} \arrow[d] \\
\mathrm{Gal}(L/K) \arrow[d] & U_L/U_{L/K} \arrow[d] \\
\mathrm{Gal}(M/K) \arrow[d] & {} \\
0 &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 3 (Steinberg-Symbole). **(4 Punkte)**

Sei K ein Körper und A eine (multiplikative) abelsche Gruppe. Ein *Steinberg-Symbol* auf K mit Werten in A ist ein Gruppenhomomorphismus $(-,-)\colon K^\times \otimes_{\mathbb{Z}} K^\times \to A$, $x \otimes y \mapsto (x,y)$, derart, dass $(x, 1-x) = 1$ für alle $x \in K^\times \setminus \{1\}$. Das Galois-Symbol aus Aufgabe 4 von Blatt 9 ist ein Steinberg-Symbol. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$(-,-)_\infty \colon \mathbb{R}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}^\times \longrightarrow \mathbb{Z}^\times, \quad x \otimes y \mapsto \begin{cases} -1 & (x,y<0) \\ 1 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

ist ein Steinberg-Symbol.

$x > 0 \Rightarrow (x, 1-x) = 1$

$x < 0 \Rightarrow 1-x > 0 \Rightarrow (x, 1-x) = 1$

<u>Gruppenhom:</u> $a \otimes b \cup c \otimes d = (a,b) \cdot (c,d)$

Aufgabe 4 (Milnor-K-Theorie). **(4 Punkte)**

Für einen Körper F definieren wir seine (2-te) *Milnor-K-Theorie*

$$\mathrm{K}_2^{\mathrm{M}}(F) := F^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times / \langle x \otimes 1-x \mid x \in F^\times \setminus \{1\} \rangle.$$

Für $x \otimes y \in \mathbb{F}^\times \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times$ schreiben wir $\{x,y\}$ für die zugehörige Restklasse in $\mathrm{K}_2^{\mathrm{M}}(F)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{K}_2^{\mathrm{M}}(F)$ für einen endlichen Körper die triviale Gruppe ist. *Hinweis:* Zerlegen Sie F disjunkt in Quadrate und Nichtquadrate.

$F^q := (F^\times)^2$ Es gilt $F^\times = F^q \,\dot\cup\, F^{nq}$

$F^{nq} := F^\times \setminus (F^\times)^2$.

Wie wird $F^\times$ zum $\mathbb{Z}$-Modul? $2 \cdot x = x^2$

$x \in F^q \overset{?}{\Rightarrow} 1-x \in F^{nq}$? $\{x^2, y\} = \{x, y^2\}$

$= 1-y^2 = (1-y)(1+y)$

$\{a,b\} + \{a,c\} = \{a, b \cdot c\}$

$\{x, 1-x\} = \{x, 1-y\} + \{x, 1+y\}$

Sei x ein Erzeuger von $F^\times$. Dann

$\{x^n, x^m\} = \{x, x^{m \cdot n}\}$

$1 - x^k = (1-x)(1 + \cdots + x^{k-1})$

$\{x, 1-x^k\} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\{x, 1-x\}} + \{x, 1 + \cdots + x^{k-1}\}$