Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 6

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 24. - 29. Mai 2021
Bitte geben Sie maximal 2 Aufgaben per Übungsgruppensystem zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!
Nutzen Sie dazu den Link `https://uebungen.physik.uni-heidelberg.de/h/1291`

1. *Verständnisfragen*

a) Was bedeutet ein "Pfad" im Pfadintegral für eine Feldtheorie wie die Elektrodynamik?

b) Können Sie Leiteroperatoren für einen harmonischen Oszillator in Impulsdarstellung aufstellen?

c) Wie können Sie, ausgehend vom harmonischen Oszillator in einer Dimension, einen N-dimensionalen harmonischen Oszillator quantenmechanisch beschreiben?

2. *Der harmonische Oszillator im Heisenberg-Bild*

Im Heisenberg-Bild steckt die gesamte Zeitabhängigkeit in den Operatoren, und deren Dynamik wird durch die Heisenberg-Gleichung beschrieben. Betrachten Sie im Folgenden den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}_{\mathrm{H}}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_{\mathrm{H}}^2.$$

a) Lösen Sie die Heisenberg-Gleichungen für die Operatoren $\hat{x}_{\mathrm{H}}(t)$ und $\hat{p}_{\mathrm{H}}(t)$ der Orts- und Impulsvariablen des harmonischen Oszillators, und drücken Sie $\hat{p}_{\mathrm{H}}(t)$ und $\hat{x}_{\mathrm{H}}(t)$ als Funktion der Operatoren $\hat{p}_{\mathrm{S}} \equiv \hat{p}_{\mathrm{H}}(t=0)$ und $\hat{x}_{\mathrm{S}} \equiv \hat{x}_{\mathrm{H}}(t=0)$ im Schrödinger-Bild aus.*

b) Berechnen Sie mit den Ergebnissen aus a) die folgenden Vertauschungsrelationen zu verschiedenen Zeiten t_1 und t_2,

$$\left[\hat{p}_{\mathrm{H}}(t_2), \hat{p}_{\mathrm{H}}(t_1)\right], \qquad \left[\hat{p}_{\mathrm{H}}(t_2), \hat{x}_{\mathrm{H}}(t_1)\right], \qquad \left[\hat{x}_{\mathrm{H}}(t_2), \hat{x}_{\mathrm{H}}(t_1)\right].$$

3. *Delta-Potential*

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen attraktiven Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m\lambda_0}\delta_{\mathrm{D}}(x) \qquad (\lambda_0 > 0).$$

Wir interessieren uns für Lösungen der stationären Schrödingergleichung $\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$ mit negativer Energie $E < 0$, d.h. gebundene Zustände. Wir schreiben die Energie als $E = -\hbar^2 K^2/2m$ für $K > 0$.

a) Nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion $\psi(x)$ stetig ist bei $x = 0$, und leiten Sie eine Beziehung zwischen dem Sprung der Ableitung $\psi'(x)$ und $\psi(x = 0)$ her, indem Sie die Schrödingergleichung in einem kleinen Bereich zwischen $x = -\epsilon$ und $x = +\epsilon$ integrieren.

---

* *Hinweis:* Machen Sie Gebrauch von Ihrer Kenntnis des Kommutators zwischen Orts- und Impulsoperator.

b) Wie viele gebundene Zustände gibt es, und bei welchen Energien? Gibt es gebundene Zustände im Fall eines repulsiven δ-Potentials ($\lambda_0 < 0$)?

4. *Neutronen im Gravitationsfeld*

In einer Arbeitsgruppe am Physikalischen Institut wurden kalte Neutronen im Gravitationsfeld der Erde auf einen horizontalen Spiegel fallen gelassen und die sich dann ergebenden stationären Energieniveaus gemessen (siehe z.B. `https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.67.102002` und weiterführend `https://www.nature.com/articles/nphys1970`). Angenommen, der Spiegel reflektiere die Neutronen perfekt und befinde sich auf der Höhe $z = 0$. Das Potential ist dann gegeben durch

$$V(z) = \begin{cases} mgz & \text{für} \quad z \geq 0, \\ \infty & \text{für} \quad z < 0, \end{cases}$$

wobei m die Masse eines Neutrons ist und g die Gravitationsbeschleunigung.

a) Wie lautet die Schrödinger-Gleichung im Ortsraum für positive z?

Die allgemeine Lösung im Ortsraum ist nicht durch elementare Funktionen darstellbar, da die sich ergebende Schrödinger-Gleichung eine Variante der sog. *Airy'schen Differentialgleichung* ist. Es ist jedoch möglich, einen Integralausdruck wie folgt zu gewinnen.

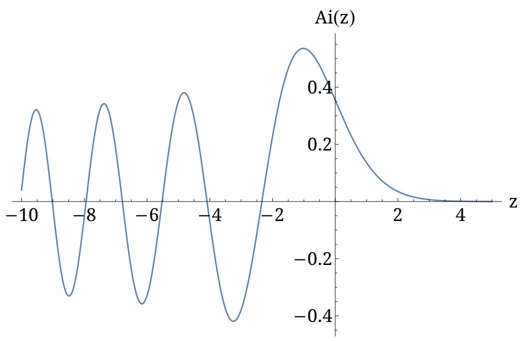
b) Geben Sie die Schrödinger-Gleichung im Impulsraum an.

c) Finden Sie die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung im Impulsraum.

d) Schreiben Sie die Wellenfunktion im Ortsraum für $z \geq 0$ als Integral über die so bestimmten Fouriermoden. Die Normierung und die Energie können Sie zunächst unbestimmt lassen.

e) Welche Randbedingung muss die Wellenfunktion bei $z = 0$ erfüllen? Führen Sie damit die Energien E_n der gebundenen Zustände auf die Nullstellen der *Airy-Funktion* Ai zurück, welche definiert ist als

$$\mathrm{Ai}(z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \cos\left(\frac{t^3}{3} + tz\right).$$



Die Nullstellen von Ai(z) sind negative reellen Zahlen, für die kein geschlossener Ausdruck bekannt ist, sondern die numerisch bestimmt werden müssen. So ist die erste Nullstelle bei $z_0 \approx -2.33811$.

f) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie in eV.