Gewöhnliche Differentialgleichungen - Übungsblatt 10

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Christian Düll

Abgabe: 14.Januar, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 10.1 8 Punkte

Betrachten Sie das folgende System gewöhnlicher Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = -x^3 \\ y' = -y + x^2 \end{cases} \tag{1}$$

in einer Umgebung des Fixpunktes bei $(0, 0)$. Diese besitzt eine Zentrumsmannigfaltigkeit, die als Graph einer Funktion ψ gegeben ist.

(i) Linearisieren Sie das System (1) um den Fixpunkt und bestimmen Sie die invarianten Teilräume.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi(x)$ aus Satz 3.29 die folgende Differentialgleichung erfüllt

$$-x^3\psi'(x) = -\psi(x) + x^2. \tag{2}$$

Hinweis: ψ ist immer eine Funktion der Zentrumsvariablen. Sie müssen also zunächst eine geeignete Aufspaltung des Systems für Satz 3.29 finden.

Man kann zeigen, dass die Gleichung (2) unendlich viele Lösungen ψ besitzt mit $\psi(0) = 0$ und $\psi'(0) = 0$. (Bonuspunkte für einen Beweis dafür)

(iii) Zeigen Sie, dass keine der Lösungen von (2) analytisch ist.
Hinweis: Machen Sie einen Potenzreihenansatz und bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(iv) Benutzen Sie die Reduktion auf eine lokale Zentrumsmannigfaltigkeit (bzw. eine ausreichende Näherung), um die Stabilität des Fixpunktes im ursprünglichen System (1) zu untersuchen.

Aufgabe 10.2 8 Punkte

Betrachten Sie für reelle Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit $\gamma\delta+\beta\gamma^2 \neq 0$ folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' = xy + \alpha x^3 + \beta y^2 x \\ y' = -y + \gamma x^2 + \delta x^2 y \end{cases} \tag{3}$$

in der Nähe des Fixpunkts in $(0, 0)$.

(i) Linearisieren Sie das System (3) um den Fixpunkt und bestimmen Sie die invarianten Teilräume.

(ii) Stellen Sie die definierende DGL für die Funktion ψ auf.

(iii) Benutzen Sie die Reduktion auf eine lokale Zentrumsmannigfaltigkeit (bzw. eine ausreichende Näherung), um die Stabilität des Fixpunktes im ursprünglichen System (3) zu untersuchen.