Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2021/22

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. K. Hübner

Blatt 13
Abgabetermin: Freitag, 11.2.2022, 09:30 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte). Für $\alpha \in \mathbb{C}$ betrachten wir die Exponentialbewertung v_α auf $\mathbb{C}(T)$, die folgendermaßen definiert ist: Jedes Element $f \in \mathbb{C}(T) \smallsetminus \{0\}$ hat die Form $f = (X-\alpha)^n g(X)/h(X)$ mit $g, h \in \mathbb{C}[T]$, so dass $g(\alpha)$ und $h(\alpha)$ nicht Null sind. Dann ist $v_\alpha(f) = n$. Bestimmen Sie die Vervollständigung von $\mathbb{C}(X)$ bezüglich v_α.

Aufgabe 2 (6 Punkte). Es sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung und v eine Bewertung auf L. Die *Zerlegungsgruppe* von v ist durch $Z_v(L|K) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K) \mid v \circ \sigma = v\}$ definiert. Zeigen Sie: ist $L|K$ eine endliche Erweiterung von Zahlkörpern und $v = v_{\mathfrak{P}}$ für ein Primideal $\mathfrak{P}$ in $\mathcal{O}_L$, so gilt $Z_v(L|K) = Z_{\mathfrak{P}}(L|K)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte). (Krasners Lemma). Es sei (K, v) ein vollständig bewerteter Körper, $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung und w die eindeutige Fortsetzung von v auf L. Für $x \in L$ seien $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Galoiskonjugierten über K.

Zeigen Sie: gilt für ein $y \in L$, dass $|y - x|_w < |y - x_i|_w$, $i = 2, \ldots, n$, so gilt $x \in K(y)$.

Hinweis. Nutzen Sie Korollar 8.68 der Vorlesung.

Aufgabe 4 (6 Punkte). (Stetigkeit der Wurzeln). Es sei (K, v) ein vollständig bewerteter Körper, $\overline{K}|K$ ein algebraischer Abschluss und $\bar{v}$ die eindeutige Fortsetzung von v auf $\bar{K}$. Für normierte Polynome $f, g \in K[X]$ gleichen Grades, $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$, $g = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0$ setzen wir $|f - g|_v := \max\limits_i(|a_i - b_i|_v)$.

Es sei f separabel mit Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{K}$. Zeigen Sie:
Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass jedes g mit $|f - g|_v < \delta$ Nullstellen $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \overline{K}$ hat, für die nach Umnummerierung gilt: $|\alpha_i - \beta_i|_w < \varepsilon$.

Zusatzaufgabe 5 (6 Punkte). Es sei (K, v) ein vollständig bewerteter Körper und $f \in K[X]$ ein normiertes separables und irreduzibles Polynom. Zeigen Sie für jedes normierte Polynom $g \in K[X]$, $\deg g = \deg f$, das (im Sinne von Aufgabe 4) hinreichend nahe an f liegt:

(a) g ist separabel.

(b) g ist irreduzibel.

Hinweis. Nutzen Sie die Ergebnisse der Aufgaben 3 und 4.