Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2021/22

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. K. Hübner

Blatt 7
Abgabetermin: Freitag, 10.12.2021, 09:30 Uhr

Aufgabe 1. (6 Punkte) Bestimmen Sie die Grundeinheiten der reell-quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $d = 3, 5, 13$.

Aufgabe 2 (6 Punkte). Ein Zahlkörper E heißt CM-Körper, wenn ein Teilkörper $F \subset E$ existiert, sodass $[E : F] = 2$ und F total reell und E total imaginär ist, d.h. jede Einbettung $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ ist reell und jede Einbettung $E \hookrightarrow \mathbb{C}$ ist imaginär.

(a) Zeigen Sie: Ein Zahlkörper L ist genau dann ein CM-Körper, wenn es einen echten Teilkörper $K \subsetneq L$ gibt, sodass E_L/E_K endlich ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ für $n \geq 3$ ein CM-Körper ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Es sei K ein Zahlkörper und $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K$ ein ganzes Ideal, so dass $\mathfrak{a}^m = (a)$ ein Hauptideal ist für eine natürliche Zahl m.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ im Körper $K(\sqrt[m]{a})$ zum Hauptideal wird.

(b) Zeigen Sie unter Benutzung der Endlichkeit der Klassenzahl: Es gibt eine endliche Erweiterung $L|K$, so dass jedes gebrochene Ideal von K in L zu einem Hauptideal wird.

Aufgabe 4 (6 Punkte). *Die Schlacht von Hastings (14.10.1066).*
Harolds Mannen standen nach alter Gewohnheit dichtgedrängt in 13 gleichgroßen Quadraten aufgestellt, und wehe dem Normannen, der es wagte, in eine solche Phalanx einbrechen zu wollen. ... Als aber Harold selbst auf dem Schlachtfeld erschien, formten die Sachsen ein einziges gewaltiges Quadrat mit ihrem König an der Spitze und stürmten mit Schlachtrufen „Ut!“, „Olicrosse!“, „Godemite!“ vorwärts. ...
Wie groß soll die Armee Harolds II. gewesen sein und ist das glaubwürdig?