**Einführung in die**
**Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik**
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

## 0. Übungsblatt

**Aufgabe -4 (Elementare Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes).**
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) **De Morgansche Regeln:** $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$, und $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$

(b) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(c) **Ungleichung von Boole:** $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.
*Hinweis: Hier darf verwendet werden, dass aus $A \subseteq B$ folgt $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.*

(d) **Stetigkeit des Maßes von oben:**
Gilt $A_{n+1} \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
*Hinweis: Gehen Sie unter Nutzung von (a),(b) zunächst zum Gegenereignis über. Definieren Sie dann $B_n := A_n^c \backslash A_{n-1}^c$, und drücken Sie $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$ mittels der $B_n$ aus. Nutzen Sie dann Eigenschaft (iii) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.*

**Aufgabe -3 (Entwicklung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen).**
Definieren Sie bei den folgenden Aufgaben zunächst ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell (d.h. einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$), welches die Wahrscheinlichkeiten aus den Aufgabenstellungen korrekt abbildet, wobei $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung sein soll (d.h. jedes Ergebnis ist gleichwahrscheinlich). Definieren Sie dann die gesuchten Ereignisse als Teilmengen von $\Omega$ und berechnen Sie deren Wahrscheinlichkeit.

(a) An einer Geschwindigkeitskontrolle fahren Autos mit einer Geschwindigkeit von 50km/h, wobei mit gleichen Wahrscheinlichkeiten Abweichungen von diesem Wert von genau -10 km/h, -5 km/h, 0 km/h, 5 km/h, 10 km/h auftreten. Nun wird an der Geschwindigkeitskontrolle die Geschwindigkeit von 4 zufällig ausgewählten Autos gemessen.

  (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit halten sich alle vier beobachteten Autos an das Limit von 50km/h (d.h. fahren mit einer Geschwindigkeit von 50km/h oder weniger) ?

  (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe der Geschwindigkeiten aller vier beobachteten Autos genau 170 km/h ?

(b) Ein Skatspiel besteht aus 32 Karten. Es gibt 4 verschiedene Farben (Karo, Herz, Pik, Kreuz), die jeweils mit 8 Karten im Spiel vertreten sind. Uns werden im Folgenden nur die Herzkarten interessieren. Der Stapel wird gut durchgemischt und eine Spieler*in zieht 10 Karten.

  (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Spieler*in genau 6 Herzkarten gezogen?

  (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Spieler*in mindestens 7 Herzkarten gezogen?

(c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass beim Lotto (6 aus 49) während eines Kalenderjahres (52 Ausspielungen) jede der 49 Zahlen mindestens einmal Gewinnzahl wird.

(d) 20 Studierende sollen schriftlich von einer Änderung des Prüfungstermins benachrichtigt werden. Im irrtümlichen Glauben, dass jeder der 20 Briefe den gleichen Inhalt aufweist, verteilt eine Bürokraft die Briefe willkürlich in die verschiedenen Umschläge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag gelangt?

*Hinweis: Nutzen Sie für (c), (d) die folgende Regel (siehe Blatt 1, Aufgabe 3):*
*Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,...,k_j\}\subseteq\{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j})\right).$$

**Aufgabe -2 (Entwicklung von wahrscheinlichkeitstheoretischen Modellen).**

Geben Sie bei den folgenden Aufgaben jeweils einen Stichprobenraum $\Omega$ an. Dieser soll so gewählt sein, dass alle in der Aufgabenstellung relevanten Ereignisse in der $\sigma$-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ enthalten sind und der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung (d.h. jedes Ergebnis ist gleichwahrscheinlich), die Situation aus der Aufgabenstellung korrekt abbildet.
Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten der gegebenen Ereignisse.

(a) Wir haben einen Würfel, bei dem jede Zahl von 1 bis 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt. Wir würfeln mit diesem Würfel dreimal. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

  (i) bei allen drei Würfen nur gerade Zahlen gewürfelt werden?

  (ii) die Summe der drei Würfe 6 beträgt?

(b) Wir haben eine Kiste voll mit 60 Labormäusen, von denen 20 erkrankt sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

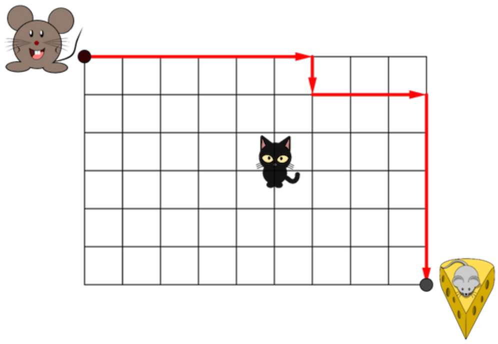
  (i) von 10 zufällig ausgewählten Mäusen genau 3 Mäuse krank sind?

  (ii) von 10 zufällig ausgewählten Mäusen mindestens eine Maus krank ist?

**Aufgabe -1 (Kombinatorik).**

Nutzen Sie, wenn möglich, die kombinatorischen Formeln aus der Vorlesung.

(a) Eine Maus befindet sich am oberen linken Ende eines einfachen Labyrinths. Das Labyrinth ist unten abgebildet: die Linien entsprechen möglichen Wegen, Schnittpunkte entsprechen Kreuzungen. Das Ziel der Maus ist der Käse ganz unten rechts. Wie viele mögliche Wege gibt es für die Maus, zum Käse zu gelangen, wenn die Maus nur nach rechts und unten gehen darf (d.h. in Richtung Käse)? Ein möglicher Weg ist mit Pfeilen abgebildet.



(b) In dem Labyrinth blockiert nun eine Katze eine Kreuzung (siehe Bild), sodass die Maus diese nicht passieren darf. Wie viele mögliche Wege zum Käse gibt es nun für die Maus?

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, dass sich ein Schwarm von 10 nichtunterscheidbaren Vögeln auf 4 Bäume $B_1, B_2, B_3, B_4$ verteilt?

(d) Fünf von sieben Menschen A,B,C,D,E,F,G stellen sich an einen Bankschalter an. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die entstehende Warteschlange?

**Aufgabe 0 (Kombinatorik).**

Nutzen Sie zur Lösung der folgenden Aufgaben, wenn möglich, die kombinatorischen Formeln (Lemma 04.04) aus der Vorlesung.

(a) Wir betrachten ein regelmäßiges $N$-Eck. Wie viele Linien entstehen, wenn man alle Punkte miteinander verbindet?

(b) Aus einer Schulklasse von 23 Schülern soll eine Abordnung von 5 Schülern zum Direktor geschickt werden. Auf wie viele Arten kann diese Abordnung gebildet werden?

(c) Auf wie viele Arten kann man 7 Hotelgäste $H_1, ..., H_7$ in 10 freien, durchnummerierten Einzelzimmern unterbringen?

(d) In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten der Beleuchtung gibt es insgesamt?

(e) Wie viele 4-stellige Zahlen mit Quersumme 9 gibt es?

(f) Die Lottoziehung (6 aus 49) ist vorbei, die 6 Gewinnzahlen bekannt. Auf wie viele Arten hätte man 6 Zahlen auswählen können, sodass unter ihnen 3 Richtige gewesen wären?

(g) Wir haben $N$ Bücher. Unter diesen Büchern gibt es $M$ gleiche Bücher, die wir nicht voneinander unterscheiden können. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die $N$ Bücher in einem Regel nebeneinander anzuordnen.

---

**Keine Abgabe:**
Dieses Übungsblatt wird (teilweise) in den Übungsgruppen in der zweiten Vorlesungswoche besprochen.

**Homepage der Vorlesung:**
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`