Funktionalanalysis - Übungsblatt 7

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 8. Dezember 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Aufgabe 7.1 4 Punkte

Sei X ein Banach-Raum und $T \in \mathcal{L}(X, X)$ mit

$$\limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} < 1.$$

Dann ist $I - T$ bijektiv mit $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ und es gilt

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

wobei $T^0 := I$ die Identität auf X bezeichne und T^n die n-fache Komposition $T \circ ... \circ T$ von T.

Aufgabe 7.2 4 Punkte

[1+1+1.5+0.5 Punkte]

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein linearer Unterraum. Zeigen Sie:

a) Ist Y endlich dimensional, so ist $(Y, \|\cdot\|)$ vollständig und insbesondere $Y \subset X$ abgeschlossen.

b) Ist X ein Banachraum und Y besitzt nicht leeres Inneres, dann ist $Y = X$.

c) Ist X ein Banachraum, so besitzt X entweder eine endliche oder eine überabzählbare Hamelbasis, also insbesondere keine abzählbar unendliche.
Verwenden Sie den Satz von Baire.

d) Sei P der Raum aller reellwertigen Polynome. $(P, \|\cdot\|)$ ist für jede beliebige Norm $\|\cdot\|$ kein Banachraum.

Zur Erinnerung: Eine Hamelbasis ist eine linear unabhängige Teilmenge, so dass sich jedes Element des Vektorraumes als endliche Linearkombination aus dieser Teilmenge darstellen lässt. Das ist also die Art Basis, die Sie aus der linearen Algebra kennen. Von dort ist auch bekannt, dass jeder Vektorraum eine (Hamel-)Basis besitzt

Aufgabe 7.3 4 Punkte

[1+1.5+1.5 Punkte]

Sei $X \subset L_1(\mathbb{R})$ ein abgeschlossener Untervektorraum mit

$$X \subseteq \bigcup_{p>1} L_p(\mathbb{R}).$$

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass ein $p_0 > 1$ existiert, sodass $X \subset L_{p_0}(\mathbb{R})$. Gehen Sie dafür, wie folgt vor:

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge

$$F_k = \{f \in X \mid \|f\|_{L_{1+1/k}} \leq k\}.$$

Zeigen Sie, dass die F_k abgeschlossene Mengen bzgl. der L_1 Norm sind.
Bitte wenden!

(b) Zeigen Sie, dass $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$.
Hinweis: Zeigen Sie $\|f\|_{L_{1+1/k}} \le \left(\|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^p\right)^{\frac{1}{1+1/k}}$*, indem Sie das Integral geeignet aufspalten.*

(c) Folgern Sie, dass ein $p_0 > 1$ existiert, sodass $X \subset L_{p_0}(\mathbb{R})$.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Baire.

Aufgabe 7.4 3 Punkte

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) A ist beschränkt (siehe Aufgabe 2.1).

ii) Für alle $f \in X'$ gilt: $\sup\{|f(x)| \mid x \in A\} < \infty$.

Aufgabe 7.5 1 Punkt

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\|T_n\| \to \infty$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass ein $x \in X$ existiert, sodass die Folge $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.