Institut für Theoretische Physik | Universität Heidelberg
Prof. Björn Malte Schäfer | Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

1. Übungsblatt

Ausgabe 03.11.2020 – Besprechung 09.-12.11.2020

1. Lösung: Vektoranalysis: Produkte von Skalar- und Vektorfeldern

$$
\begin{aligned}
&(1)\,\mathrm{rot}\,[\phi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})]\\
&\quad= \boldsymbol{\nabla} \times (\phi \boldsymbol{a})\\
&\quad= \epsilon_{ijk}\left(\partial_j \phi a_k\right) \boldsymbol{e}_i\\
&\quad= \epsilon_{ijk}\left[\left(\partial_j \phi\right) a_k + \phi\left(\partial_j a_k\right)\right] \boldsymbol{e}_i\\
&\quad= \epsilon_{ijk}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right)_j a_k \boldsymbol{e}_i + \phi \epsilon_{ijk}\left(\partial_j a_k\right) \boldsymbol{e}_i\\
&\quad= \left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right) \times \boldsymbol{a} + \phi\left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}\right)\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2)\,\mathrm{div}\,(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}))\\
&\quad= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\\
&\quad= \partial_i \left(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\right)_i\\
&\quad= \epsilon_{ijk} \partial_i a_j b_k\\
&\quad= \epsilon_{ijk}\left(\partial_i a_j\right) b_k + \epsilon_{ijk} a_j \left(\partial_i b_k\right)\\
&\quad= \epsilon_{kij}\left(\partial_i a_j\right) b_k - \epsilon_{jik}\left(\partial_i b_k\right) a_j \qquad\qquad (\text{mit } \epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{jik})\\
&\quad= \left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}\right)_k b_k - \left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{b}\right)_j a_j\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(3)\,\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\\
&\quad= \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\\
&\quad= \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\right)_k \boldsymbol{e}_i\\
&\quad= \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\epsilon_{klm} a_l b_m\right) \boldsymbol{e}_i\\
&\quad= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \left[b_m \left(\partial_j a_l\right) + a_l \left(\partial_j b_m\right)\right] \boldsymbol{e}_i\\
&\quad= \left(\delta_{il}\delta_{jm}\left[b_m \left(\partial_j a_l\right) + a_l \left(\partial_j b_m\right)\right] - \delta_{im}\delta_{jl}\left[b_m \left(\partial_j a_l\right) + a_l \left(\partial_j b_m\right)\right]\right) \boldsymbol{e}_i\\
&\quad= \left[b_j \left(\partial_j a_i\right) + a_i \left(\partial_j b_j\right) - b_i \left(\partial_j a_j\right) + a_j \left(\partial_j b_i\right)\right] \boldsymbol{e}_i\\
&\quad= b_j \partial_j a_i \boldsymbol{e}_i + \left(\partial_j b_j\right) a_i \boldsymbol{e}_i - \left(\partial_j a_j\right) b_i \boldsymbol{e}_i - a_j \partial_j b_i \boldsymbol{e}_i\\
&\quad= \left(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right) \boldsymbol{a} + \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{b}\right) \boldsymbol{a} - \left(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right) \boldsymbol{b} - \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}\right) \boldsymbol{b}\,.
\end{aligned}
$$

(4) $\operatorname{grad} f(|\boldsymbol{r}|)$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_i f(|\boldsymbol{r}|)\boldsymbol{e}_i \\
&= f'(|\boldsymbol{r}|)\,\partial_i|\boldsymbol{r}|\boldsymbol{e}_i \\
&= f'(|\boldsymbol{r}|)\frac{1}{2}(r_j r_j)^{-1/2}\cdot 2r_i\cdot\boldsymbol{e}_i \quad \text{mit } \partial_i|\boldsymbol{r}| = \partial_i(r_j r_j)^{1/2} \\
&= \frac{f'(|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}\,.
\end{aligned}
$$

(5) $\operatorname{div}\,[f(|\boldsymbol{r}|)\boldsymbol{r}]$

$$
\begin{aligned}
&= f(|\boldsymbol{r}|)\partial_i r_i + r_i\partial_i f(|\boldsymbol{r}|) \\
&= 3f(|\boldsymbol{r}|) + f'(|\boldsymbol{r}|)\frac{r_i r_i}{|\boldsymbol{r}|} \\
&= 3f(|\boldsymbol{r}|) + f'(|\boldsymbol{r}|)|\boldsymbol{r}|\,.
\end{aligned}
$$

(6) $\operatorname{rot}\,[f(r)\boldsymbol{r}]$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{\nabla}\times[f(r)\boldsymbol{r}] \\
&= \epsilon_{ijk}\partial_j f(r) r_k\boldsymbol{e}_i \\
&= \epsilon_{ijk}(r_k\partial_j f(r) + f(r)\partial_j r_k)\boldsymbol{e}_i \\
&= \epsilon_{ijk}(r_k f'(r)(r_j/r) + f(r)\delta_{jk})\boldsymbol{e}_i \\
&= \epsilon_{ijk}(r_k f'(r)(r_j/r) + 0)\boldsymbol{e}_i \qquad \text{mit } \epsilon_{ijj} = 0 \\
&= \epsilon_{ijk}\frac{f'(r)}{r} r_j r_k\boldsymbol{e}_i \\
&= \frac{f'(r)}{r}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}) \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

2. Lösung: Integration von Vektorfeldern

(a) Zur Berechnung des Linienintegrals ist es nützlich, Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) zu benutzen, wobei $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ den Abstand von der z-Achse und φ den Azimuthwinkel bezeichnet. Entlang der Kreislinie $\mathcal{C}$ ist das vektorielle Linienelement durch $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_\varphi \rho d\varphi$ gegeben. Dabei ist $\boldsymbol{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) = \rho^{-1}(-y, x, 0)$ der Tangentialvektor an $\mathcal{C}$, so dass $d\boldsymbol{r} = (-y, x, 0)d\varphi$. Für das Integral von $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ entlang der Kreislinie $\mathcal{C}$ erhält man dann

$$
\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} \rho^4 d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\,, \tag{1}
$$

da entlang der Kreislinie $\rho^2 = x^2 + y^2 = 1$ gilt.

Die Rotation von $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ ist

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{2}$$
$$= \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \tag{3}$$
$$= \epsilon_{ijk}\partial_j v_k(\boldsymbol{r})\boldsymbol{e}_i \tag{4}$$
$$= -\partial_x(xz)\boldsymbol{e}_2 + \partial_x\left(x^2+y^2\right)x\boldsymbol{e}_3 - \partial_y(-)\left(x^2+y^2\right)y\boldsymbol{e}_3 \tag{5}$$
$$= -z\boldsymbol{e}_2 + 4\left(x^2+y^2\right)\boldsymbol{e}_3 \tag{6}$$
$$= -z\boldsymbol{e}_2 + 4\rho^2\boldsymbol{e}_3\,. \tag{7}$$

Der Normalenvektor der von $\mathcal{C}$ berandeten Kreisfläche $\mathcal{F}$, welcher der positiven Orientierung von $\mathcal{C}$ entspricht, ist $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$, so dass das Flächenelement von $\mathcal{F}$ in Zylinderkoordinaten durch $d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_3 dA = \boldsymbol{e}_3\rho d\rho d\varphi$ gegeben ist. Damit erhält man für das Flächenintegral von $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ über $\mathcal{F}$

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4\rho^3 d\rho d\varphi = 2\pi\,, \tag{8}$$

womit der Stokes'sche Satz für diesen Spezialfall erfüllt ist.

(b) Das Flussintegral des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}\boldsymbol{r}$ durch die Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ des Einheitswürfel $\mathcal{V}$ ist die Summe über die Integrale über die sechs Flächen des Würfels mit konstantem Normalenvektor. Die Normalenvektoren dieser Flächen sind die positiven bzw. negativen Koordinateneinheitsvektoren $\pm\boldsymbol{e}_i$ und die vektoriellen Flächenelemente sind (in kartesischen Koordinaten) $d\boldsymbol{A}_i^{\pm} = \pm\boldsymbol{e}_i dA$. Die Skalarprodukte $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}$ des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ mit den Normalenvektoren sind (ohne das dA)

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_1 = -\left(x^2+y^2\right)y = -\left(1+y^2\right)y \qquad \text{for} \quad x=1\,, \tag{9}$$
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A}_1^- = -\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_1 = \left(x^2+y^2\right)y = y^3 \qquad \text{for} \quad x=0\,, \tag{10}$$
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A}_2^+ = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_2 = \left(x^2+y^2\right)x = \left(x^2+1\right)x \qquad \text{for} \quad y=1\,, \tag{11}$$
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A}_2^- = -\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_2 = -\left(x^2+y^2\right)x = -x^3 \qquad \text{for} \quad y=0\,, \tag{12}$$
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A}_3^+ = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_3 = xz = x \qquad \text{for} \quad z=1\,, \tag{13}$$
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A}_3^- = -\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_3 = -xz = 0 \qquad \text{for} \quad z=0\,. \tag{14}$$

Die unbeschränkten Variablen liegen jeweils im Intervall $[0,1]$. Damit sind die Flussintegrale über die sechs Oberflächen des Einheitswürfels (das dA enthält immer die anderen beiden

Differentiale)

$$I_1^+ = \int_0^1 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_1 dydz = -\frac{3}{4} \qquad \text{for} \quad x = 1\,, \tag{15}$$
$$I_1^- = -\int_0^1 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_1 dydz = \frac{1}{4} \qquad \text{for} \quad x = 0\,, \tag{16}$$
$$I_2^+ = \int_0^1 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_2 dxdz = \frac{3}{4} \qquad \text{for} \quad y = 1\,, \tag{17}$$
$$I_2^- = -\int_0^1 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_2 dxdz = -\frac{1}{4} \qquad \text{for} \quad y = 0\,, \tag{18}$$
$$I_3^+ = \int_0^1 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_2 dxdy = \frac{1}{2} \qquad \text{for} \quad z = 1\,, \tag{19}$$
$$I_3^- = -\int_0^1 \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_2 dxdy = 0 \qquad \text{for} \quad z = 0\,. \tag{20}$$

Der gesamte Fluss von $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ durch $\partial\mathcal{V}$ ist also

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{A} = \sum_{\pm,i} I_i^\pm = \frac{1}{2}\,. \tag{21}$$

Die Divergenz von $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ ist

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{3} \partial_i v_i(\boldsymbol{r}) = -2xy + 2xy + x = x\,. \tag{22}$$

Das Integral über den Einheitswürfel ist dann

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) d^3r = \iiint_0^1 x dxdydz = \frac{1}{2}\,, \tag{23}$$

womit der Gauß'sche Satz für diesen Spezialfall erfüllt ist.

(c) In der x-y-Ebene ist das Vektorfeld ein reines Wirbelfeld, wobei die Feldlinien in mathematisch positiver Richtung verlaufen. Dies erklärt den endlichen Wert und das Vorzeichen der Rotation. Für Kreislinien parallel zu $\mathcal{C}$ mit endlichem, konstanten Wert von z ändert sich der Wert des Integrals nicht, da die z-Komponente des Feldes nicht zu $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r}$ beiträgt. Die z-abhängige Komponente ist senkrecht zur Normalenrichtung auf der Kreisfläche, so dass auch das Integral über die Rotation unabhängig von z ist. Bei der Integration über beliebige, von $\mathcal{C}$ berandete Flächen (z.B. Halbkugeln) mitteln sich diese Beiträge heraus.

Plots in der x-z-Ebene (oder y-z) zeigen, dass die z-Komponente des Feldes mit z wächst, so dass die Flächen des Würfels, die senkrecht auf der z-Achse stehen, zum Flussintegral betragen und nur v_z zur Divergenz beiträgt. Da v_z und die Divergenz proportional zu x sind, verschwänden der Fluss und das Integral über die Divergenz für ein Volumen, das symmetrisch bzgl. der x-Achse ist.

In der x-y-Ebene ergeben sich Kreisbahnen als Trajektorien. Oberhalb der Ebene werden diese für $x > 0$ nach oben und für $x < 0$ nach unten abgelenkt werden.