Analysis II

Ekaterina Kostina
Ihno Schrot

Kap 1. Folgen und Reihen von Funktionen.
Fourier-Reihen

Kap 2. Der n-dimensionale Zahlenraum $\mathbb{K}^n$
↳ der euklidische Raum $\mathbb{K}^n$, Geometrie,
Linear Abbildungen

Kap 3. Funktionen mehrerer Variablen
↳ Stetigkeit, lineare und nichtlineare
Gleichungssysteme

Kap 4. Differenzierbare Funktionen
↳ partielle und totale Ableitung,
Taylor-Entwicklung, Extremwerte,
implizite Funktionen

Kap 5. Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen
↳ Anfangswert- und Randwertaufgaben
Existenz, Eindeutigkeit und
Stabilität von Lösungen

Kap 6. Das n-dimensionale Riemann-Integral
↳ Das Riemann-Integral in $\mathbb{R}^n$
Anwendungen

<u>Literatur</u>

Rolf Rannacher — Analysis 1 und 2
Otto Forster — Analysis 1 und 2
Steffen Timman — Repetitorium der Analysis, Teil 1 und 2

Kap 1. Folgen und Reihen von Funktionen

1.1. Funktionenfolgen und gleichmäßige Konvergenz

Definition. Sei für $n \in \mathbb{N}$ $f_n : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ eine Funktion.

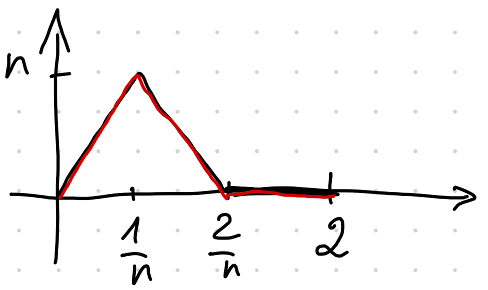
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ falls $\forall x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(x)$ $\left(f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \right)$, d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon, x) > 0$ s.d.

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

Bsp 1.
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$$

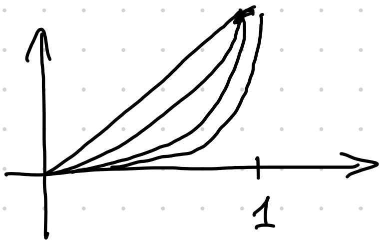


$(f_n(x))_n$ konvergiert punktweise gegen $f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0,2]$

$x = 0 \qquad f_n(0) = 0 = f(0)$

$0 < x \leq 2 \qquad \forall n \geq \frac{2}{x}, \; f_n(x) = 0 = f(x)$

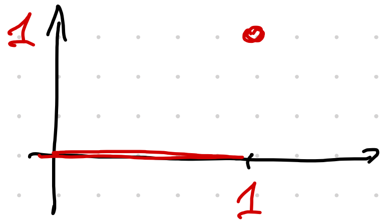
Bsp 2 $\quad f_n(x) = x^n, \quad f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$



$$(f_n(x))_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

punktweise

$$\left[\, 0 \leq x < 1 \Rightarrow x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,\right]$$



Bemerkung:

$\boxed{\text{punktweisen Limes stetiger Funktionen muß nicht stetig sein}}$

<u>Definition.</u>

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$ falls gilt:

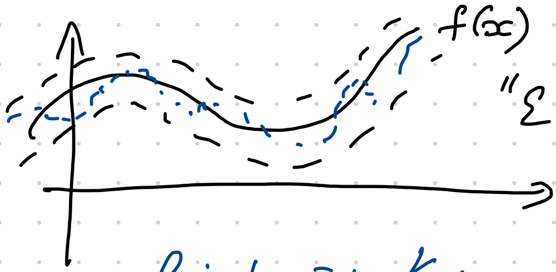
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \text{ s.d.}$$

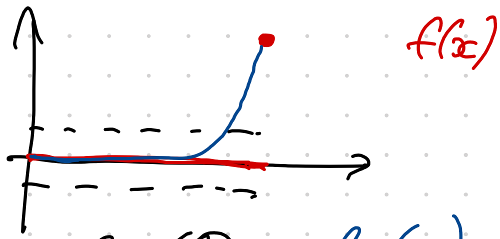
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D \text{ und } n \geq N$$

Bemerkung: $\forall \varepsilon > 0, \; \exists\, N = N(\varepsilon) \; \forall n \geq N$ gilt

graph$(f_n) \subset \varepsilon$-Umgebung von Graphen von f

$$:= \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid |y - f(x)| < \varepsilon\}$$





gleichmäß. Konvergenz

Bsp (1) und (2) nicht gleichmäßig konvergent

Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gilt $\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = n > \frac{1}{2}$

Bsp (3) $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(2\pi n \cdot x)$$

$|\sin(2\pi \cdot n \cdot x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$

$f_n(x) \to 0, \ n \to \infty, \ \forall x \in [0,2] \Rightarrow$

punktweise Konvergenz

Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists \ N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$

$\Rightarrow \ \forall n \geq N \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon \quad \forall x$

$\Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz $f_n \xrightarrow[\text{glm.}]{} f \equiv 0, \ n \to \infty$

<u>Bemerkung</u> Konvergiert $f_n : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, dann $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f$ punktweise.

Die Umkehrung gilt nicht, Bsp (1) und (2)

Satz 1.1.1. (glm Limes stetigen Funktionen ist stetig)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ stetig in D. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen $f : D \to \mathbb{R}$.
Dann gilt: f ist stetig in D

<u>Beweis</u> Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$

z.z. $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

"$\frac{\varepsilon}{3}$-Argument"

$(f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{glm} f \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $\forall n \geq N \quad \forall x \in D$
gilt $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

f_n stetig in $x_0 \Rightarrow \exists \delta$ s.d. $\forall x \in D$ gilt
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Zusammen:

$\forall x$ s.d. $|x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

q.e.d.