Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 2

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen am 4. Mai 2020
Bitte schicken Sie maximal 2 Aufgaben per E-Mail zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!

1. *Extremum mit Nebenbedingung in der Quantenmechanik*

Die Grundzustandsenergie eines quantenmechanischen Teilchens in einem quaderförmigen Kasten ist durch

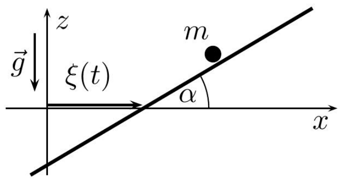
$$E(a, b, c) = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

gegeben, wobei $a, b, c > 0$ die Kantenlängen des Quaders sind, m ist die Masse des Teilchens und h das sog. Planck'sche Wirkungsquantum.

Für welche a, b, c ist bei gegebenem Volumen V die Grundzustandsenergie minimal?

2. *Massenpunkt auf schiefer Ebene*

Eine schiefe Ebene bilde mit der x-Achse den konstanten Winkel α. Die Ebene sei in x-Richtung einer langsamen äußeren Bewegung $\xi(t)$ mit $\xi(0) = 0$ und $\dot{\xi}(0) = 0$ unterworfen. Auf der Ebene kann sich ein Massenpunkt m unter dem Einfluss der Schwerkraft bewegen.



a) Formulieren Sie die zugehörige Zwangsbedingung.

b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $\vec{r}(0) = 0$ und $\dot{\vec{r}}(0) = 0$ mit $\vec{r} = (x, y, z)^\top$.*

c) Bestimmen Sie die auf den Massenpunkt wirkende Zwangskraft $\vec{Z}$.

3. *Bewegungsdauer einer Punktmasse*

Eine Punktmasse bewege sich unter Einfluss der Gravitationskraft $\vec{F} = -mg\,\vec{e}_z$ reibungsfrei auf einer Kurve der Form $z = -f(x)$.

a) Leiten Sie unter Verwendung der Energieerhaltung eine allgemeine Formel für die Dauer der Bewegung von $x = x_0$ nach $x = x_\mathrm{E}$ her, wie Sie es aus der PTP1 schon kennen.†

b) Nach welcher Zeit erreicht die Punktmasse, die bei $x_0 = 0$ startet, die Koordinaten $(x_\mathrm{E}, z_\mathrm{E}) = (1, -1)$, wenn $f(x) = x$?

4. *Verständnisfragen*

a) Formulieren Sie das d'Alembert'sche Prinzip der virtuellen Arbeit.

b) Beschreiben Sie den Weg zu den Lagrange-Gleichungen erster Art.

c) Wozu dienen Lagrange-Multiplikatoren?

---

* *Hinweis:* Benutzen Sie die Zusammenhänge $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ und $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, um die Ergebnisse möglichst einfach mit Hilfe von $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ darstellen zu können.

† *Hinweis:* Sie müssen das Integral hier noch nicht lösen!

Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2020

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 2: Lösungen

1. *Extremum mit Nebenbedingung in der Quantenmechanik*

Gesucht ist ein Minimum mit einer Nebenbedingung, d.h. der Einsatz von einem Lagrange-Multiplikator ist angebracht,

$$\vec{\nabla}\left[\frac{h^2}{8m}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\lambda\,(abc-V)\right]=0,$$

wobei V das vorgegebene Volumen ist. Dies führt zu

$$-\frac{h^2}{4m}\begin{pmatrix}a^{-3}\\b^{-3}\\c^{-3}\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}bc\\ac\\ab\end{pmatrix}=0.$$

Aus der ersten Zeile folgt, dass

$$\lambda=\frac{h^2}{4ma^3bc}.$$

Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt dies

$$\frac{h^2}{4ma^2b}=\frac{h^2}{4mb^3}\qquad\Rightarrow\qquad a=b,$$

wobei ausgenutzt wurde, dass die Kantenlängen a und b positiv sein müssen. Einsetzen von λ in die dritte Zeile ergibt

$$\frac{h^2}{4ma^2c}=\frac{h^2}{4mc^3}\qquad\Rightarrow\qquad a=c.$$

Die Energie wird also extremal, wenn $a=b=c$, wenn es sich beim Quader also um einen Würfel handelt. *(Hier reicht die Betrachtung der Aufgabe, da nur ein Extremum gefunden wurde und man durch die Aufgabenstellung davon ausgehen kann, dass es sich um ein Minimum handeln muss.)*

2. *Massenpunkt auf schiefer Ebene*

a) Die Zwangsbedingung lautet

$$\tan\alpha=\frac{z}{x-\xi(t)}.$$

Daraus folgt

$$f(x,z,t)=z-[x-\xi(t)]\tan\alpha=0. \tag{I}$$

b) Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten allgemein

$$F_i-m_i\ddot{x}_i+\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i}=0\qquad\text{mit}\qquad r+1\le i\le 3N.$$

Im vorliegenden Fall hat man nur einen Massenpunkt, also $N=1$ und eine Zwangsbedingung, also $r=1$. Nimmt man die y-Komponente ebenfalls mit in die Schreibweise auf, dann können die Lagrange-Gleichungen 1. Art als

$$\vec{F}-m\ddot{\vec{r}}+\lambda\vec{\nabla}f=\begin{pmatrix}0\\0\\-mg\end{pmatrix}-m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\\ddot{y}\\\ddot{z}\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-\tan\alpha\\0\\1\end{pmatrix}=0 \tag{II}$$

geschrieben werden. Damit ergeben sich die drei Gleichungen

$$m\ddot{x} = -\lambda \tan\alpha, \tag{III}$$

$$m\ddot{y} = 0, \tag{IV}$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda. \tag{V}$$

Die Bewegung in y-Richtung kann sofort gelöst werden, denn mit $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$ folgt aus (IV), dass

$$y(t) = 0.$$

Der Lagrange-Multiplikator λ wird aus (III) mit Hilfe von (V) eliminiert,

$$\lambda = m\,(\ddot{z} + g) \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\,(\ddot{z} + g)\tan\alpha. \tag{VI}$$

Zweimalige Differentiation nach der Zeit der Zwangsbedingung (I) ergibt

$$\ddot{z} = \left(\ddot{x} - \ddot{\xi}\right)\tan\alpha.$$

Einsetzen in die vorherige Gleichung für $\ddot{x}$ ergibt

$$\ddot{x} = -\left[\left(\ddot{x} - \ddot{\xi}\right)\tan\alpha + g\right]\tan\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x}\left(1 + \tan^2\alpha\right) = \ddot{\xi}\tan^2\alpha - g\tan\alpha.$$

Multiplikation mit $\cos^2\alpha$ und Ausnutzen von $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ sowie von $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ergibt

$$\ddot{x} = \ddot{\xi}\sin^2\alpha - g\sin\alpha\cos\alpha = \sin\alpha\left(\ddot{\xi}\sin\alpha - g\cos\alpha\right).$$

Einmalige Integration ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^t \mathrm{d}t'\,\ddot{x}(t') = \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = \dot{x}(t) &= \sin^2\alpha \int_0^t \mathrm{d}t'\,\ddot{\xi}(t') - g\sin\alpha\cos\alpha \int_0^t \mathrm{d}t' \\ &= \sin^2\alpha\left[\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(0)\right] - g\sin\alpha\cos\alpha\,(t-0) = \sin\alpha\left[\dot{\xi}(t)\sin\alpha - gt\cos\alpha\right],\end{aligned}$$

wobei die Randbedingungen $\dot{x}(0) = \dot{\xi}(0) = 0$ benutzt wurden. Analog ergibt sich schließlich mit den Randbedingungen $x(0) = \xi(0) = 0$, dass

$$x(t) = \sin\alpha\left[\xi(t)\sin\alpha - \frac{g\cos\alpha}{2}t^2\right]$$

sein muss. Die Lösung für $z(t)$ ergibt sich am einfachsten aus der Zwangsbedingung (I),

$$\begin{aligned} z(t) = [x(t) - \xi(t)]\tan\alpha &= \left[\xi(t)\left(\sin^2\alpha - 1\right) - \frac{g}{2}t^2\sin\alpha\cos\alpha\right]\tan\alpha \\ &= -\sin\alpha\left[\xi(t)\cos\alpha + \frac{g\sin\alpha}{2}t^2\right]. \end{aligned} \tag{VII}$$

c) Um die Zwangskraft angeben zu können, muss λ mit Hilfe von (VI) und (VII) bestimmt werden. Dies ergibt

$$\lambda = m\left[-\sin\alpha\left(\ddot{\xi}\cos\alpha + g\sin\alpha\right) + g\right] = m\cos\alpha\left(g\cos\alpha - \ddot{\xi}\sin\alpha\right).$$

Aus (II) ergibt sich dann

$$\vec{Z} = \lambda\vec{\nabla}f = m\cos\alpha\left(g\cos\alpha - \ddot{\xi}\sin\alpha\right)\begin{pmatrix} -\tan\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = m\left(g\cos\alpha - \ddot{\xi}\sin\alpha\right)\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

3. *Bewegungsdauer einer Punktmasse*

a) Die Energieerhaltung besagt, dass

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{f}^2(x)\right] - mgf(x),$$

da sich die Bewegung nur in der x-z-Ebene abspielt. Mit

$$\dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f'(x)\,\dot{x}$$

kann dies als

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2\left[1 + f'^2(x)\right] - mgf(x)$$

geschrieben werden. Auflösen nach $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ ergibt

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2\,[E + mgf(x)]}{m\,[1 + f'^2(x)]}},$$

wobei angenommen wurde, dass das Koordinatensystem so orientiert ist, dass $\dot{x}$ positiv ist. Auflösen nach dt und anschließende Integration ergibt

$$t = \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} \mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{m\,[1 + f'^2(x)]}{2\,[E + mgf(x)]}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} \mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{1 + f'^2(x)}{\frac{E}{mg} + f(x)}}.$$

b) Mit $x_0 = 0$ und $x_\mathrm{E} = 1$ sowie $f(x) = x$ und $f'(x) = 1$ ergibt sich

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{2}{\frac{E}{mg} + x}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{1}{\sqrt{\frac{E}{mg} + x}} = \frac{2}{\sqrt{g}}\,\sqrt{\frac{E}{mg} + x}\,\Bigg|_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{\frac{E}{mg} + 1} - \sqrt{\frac{E}{mg}}\right) = \frac{2}{g}\sqrt{\frac{E}{m}}\left(\sqrt{1 + \frac{mg}{E}} - 1\right).$$

4. *Verständnisfragen*

a) Die Summe aus äußeren Kräften, Trägheits- und Zwangskräften verrichtet bei kleinen virtuellen Verrückungen aus dem Gleichgewicht keine Arbeit.

b) Die Gleichungen formulieren das d'Alembert'sche Prinzip mathematisch. Aus r dieser Gleichungen werden die Lagrange-Multiplikatoren bestimmt, die verbliebenen dienen als Bewegungsgleichungen.

c) Mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren werden Bedingungen der Form $\vec{\nabla} f = 0$ mit Nebenbedingungen der Form $g_k = 0$ verbunden.