Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter

Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

11. Übungsblatt

Ausgabe 02.02.2020 – Besprechung 08.02-11.02.2021

1. Lösung: Lebensdauer von Myonen

Zunächst reduzieren wir das Problem auf zwei Dimensionen $x^0 = ct, x^3 = x$.

(a) Die zugehörige Lorentz-Transformation um aus dem Myonen-System in das Erd-System zu wechseln ist

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $\beta = 0.98$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-b^2} = 5$.

(b) Im Myonensystem ist die Lebensdauer $\Delta t = \tau_0$ und das Myon bewegt sich nicht. Damit ist $\Delta x = 0$. Ort und Zeit im System der Erde ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c\Delta t \\ \gamma v\Delta t \end{pmatrix} \tag{2}$$

Somit folgt $\Delta t' \approx 5\Delta t$. Die Lebensdauer der Myonen im Erdsystem beträgt somit $\Delta t' = 11 \cdot 10^{-6}$ s. In dieser Zeit werden $\Delta x' = v\gamma\Delta t = 3.3$ km zurückgelegt.

2. Lösung: Energie-Impuls-Tensor

(a) Elektrisches Feld:

$$\begin{aligned} E^i &= F^{0i} && (3)\\ &= A^{i,0} - A^{0,i} && (4)\\ &= \frac{\partial \boldsymbol{A}^i}{\partial x_0} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} && (5)\\ &= -\frac{\partial \boldsymbol{A}^i}{\partial x^0} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} && (6)\\ \Rightarrow \boldsymbol{E} &= -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} && (7) \end{aligned}$$

Magnetfeld:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}B_k &= F^{ij} && (8)\\
&= A^{j,i} - A^{i,j} && (9)\\
&= (\delta^j_m\delta^i_n - \delta^i_m\delta^j_n)A^{m,n} && (10)\\
&= \epsilon_{kmn}\epsilon^{kji}A^{m,n} && (11)\\
&= \epsilon^{ijk}\epsilon_{knm}\frac{\partial}{\partial x_n}A^m && (12)
\end{aligned}
$$

Damit folgt $B_k = \epsilon_{knm}\frac{\partial}{\partial x_n}A^m = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})_k$

(b)

$$F^{\mu\nu} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu} \tag{13}$$

Unter der Transformation $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$ gilt

$$
\begin{aligned}
F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} &= A'^{\nu,\mu} - A'^{\mu,\nu} && (14)\\
&= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu && (15)\\
&= \partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu f) && (16)\\
&= (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + (\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)f && (17)\\
&= F^{\mu\nu} + (\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\mu\partial^\nu)f && (18)\\
&= F^{\mu\nu} && (19)
\end{aligned}
$$

3. Lösung: Energie-Impuls-Tensor Diese Aufgabe verwendet die Metrik $(-,+,+,+)$. Dies führt zu gegenüber der Konvention $(+,-,-,-)$ zu einem relativen negativen Vorzeichen, wenn wir Indizes kontrahieren. Entsprechend lautet beispielsweise die inhomogene Maxwell Gleichung in diesem Fall

$$\partial_\mu F^{\mu\lambda} = -\frac{4\pi}{c} j^\lambda \tag{20}$$

$$
\begin{aligned}
T^\mu_\nu &= \frac{1}{4\pi}\left[-F^{\mu\lambda}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right] && (21)\\
\partial_\mu T^\mu_\nu &= \frac{1}{4\pi}\left[-\partial_\mu F^{\mu\lambda}F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4}\delta^\mu_\nu \partial_\mu F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right] && (22)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[-F_{\nu\lambda}\partial_\mu F^{\mu\lambda} - F^{\mu\lambda}\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta}\right] && (23)\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[F_{\nu\lambda}\frac{4\pi}{c}j^\lambda - F^{\mu\lambda}\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\partial_\nu F_{\alpha\beta}\right] \leftarrow \text{inhom. Maxwell Gleichung} && (24)\\
&= F_{\nu\lambda}\frac{1}{c}j^\lambda + \frac{1}{4\pi}\left[-F^{\mu\lambda}\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}F^{\mu\lambda}\partial_\nu F_{\mu\lambda}\right] && (25)\\
&= F_{\nu\lambda}\frac{1}{c}j^\lambda + \frac{1}{4\pi}F^{\mu\lambda}\left[-\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \frac{1}{2}\partial_\nu F_{\mu\lambda}\right] && (26)\\
&= F_{\nu\lambda}\frac{1}{c}j^\lambda + \frac{1}{8\pi}F^{\mu\lambda}\left[\partial_\mu F_{\lambda\nu} + \partial_\mu F_{\lambda\nu} + \partial_\nu F_{\mu\lambda}\right] && (27)\\
&= F_{\nu\lambda}\frac{1}{c}j^\lambda + \frac{1}{8\pi}F^{\mu\lambda}\left[\partial_\mu F_{\lambda\nu} - \partial_\lambda F_{\nu\mu}\right] \leftarrow \text{hom. Maxwell Gleichung} && (28)\\
&= F_{\nu\lambda}\frac{1}{c}j^\lambda + \frac{1}{8\pi}F^{\mu\lambda}\left[\partial_\mu F_{\lambda\nu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu}\right] && (29)\\
&= F_{\nu\lambda}\frac{1}{c}j^\lambda && (30)
\end{aligned}
$$

4. Lösung:

Der Feldstärketensor ist geben mit

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Durch die Lorentz-Metrik erhalten wir

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Die homogene Maxwell-Gleichung lautet:

$$0 = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} \tag{33}$$

Falls zwei der Variablen λ, μ, ν identisch sind, ist die Gleichung trivial. Seien also $\lambda, \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ unterschiedlich. Dann können wir schreiben

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} && (34)\\
&= \frac{1}{2}\partial_\lambda (F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu}) + \partial_\nu (F_{\lambda\mu} - F_{\mu\lambda}) + \partial_\mu (F_{\nu\lambda} - F_{\lambda\nu}) && (35)\\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\lambda\mu\nu}\partial_\lambda F_{\mu\nu} && (36)
\end{aligned}$$

für ein beliebiges Set (λ, μ, ν).
Damit ist

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} && (37)\\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu F_{\alpha\beta} && (38)\\
&= 0 && (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} && (40)\\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & F_{23} - F_{32} & F_{31} - F_{13} & F_{12} - F_{21} \\ -F_{23} + F_{32} & 0 & F_{03} - F_{30} & F_{20} - F_{02} \\ -F_{31} + F_{13} & -F_{03} + F_{30} & 0 & F_{01} - F_{10} \\ -F_{12} + F_{21} & -F_{20} + F_{02} & -F_{01} + F_{10} & 0 \end{pmatrix} && (41)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix} && (42)\\
& && (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} &= -2\boldsymbol{E}^2/c^2 + 2\boldsymbol{B}^2 && (44)\\
\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} &= -4\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}/c && (45)
\end{aligned}$$

Haben $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ denselben Betrag, so verschwindet die invariante $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ in jedem Inertialsystem. Dementsprechend haben in diesem Fall $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ in jedem Inertialsystem denselben Betrag.