Satz 3.13. *Jeder faktorielle Ring ist ganzabgeschlossen.*

Beweis. Sei $\alpha \in K$ mit $\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$, wobei $c_0, \ldots, c_{n-1} \in A$. Z.z.: $\alpha \in A$. Sei $\alpha = \frac{a}{b}$, $a, b \in A$, $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Dann gilt

$$a^n + c_{n-1}ba^{n-1} + \cdots + c_0 b^n = 0.$$

Ist nun $p \in A$ ein Primelement mit $p \mid b$, so folgt $p \mid a^n$, also $p \mid a$ WID. Also existiert so ein p nicht und es gilt $b \in A^\times$. Folglich gilt $\alpha \in A$. □

Bemerkung 3.14. Wir sehen somit, dass $\mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$ ein nullteilerfreier, nicht faktorieller Ring ist.

Satz 3.15. *Sei A ganzabgeschlossen und $L|K$ endlich. Sei $x \in L$ und*

$$f = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \cdots + a_0$$

das Minimalpolynom von x über K. Dann gilt

$$x \in A_L \Longleftrightarrow a_{r-1}, \ldots, a_0 \in A.$$

Beweis. $\Longleftarrow$ per definitionem

$\Longrightarrow$ $L|K$ normal. Sei $x \in A_L$ und $g \in A[X]$ normiert mit $g(x) = 0$. Dann gilt $f|g$ in $K[X]$, also $g(y) = 0$ für jede Nullstelle y von f, d.h. diese liegen alle in A_L. Die Koeffizienten von f sind die elementarsymmetrischen Polynome in den Nullstellen $\Rightarrow a_{r-1}, \ldots, a_0 \in A_L \cap K = A$. □

Erinnerung: Sei $L|K$ endlich, $x \in L$. Dann ist

$$\varphi_x : L \to L,\ y \mapsto xy$$

ein Endomorphismus des endlichdimensionalen K-Vektorraums L.

Definition 3.16.

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_{L|K}(x) &= \mathrm{Sp}(\varphi_x) \in K \\ N_{L|K}(x) &= \det(\varphi_x) \in K. \end{aligned}$$

Satz 3.17. *Sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die endlich vielen K-Einbettungen $L \to \overline{K}$ in einen festen algebraischen Abschluss von K, so gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_{L|K}(x) &= [L:K]_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma_i x \\ N_{L|K}(x) &= \left(\prod_{i=1}^{n} \sigma_i x\right)^{[L:K]_i}. \end{aligned}$$

Beweis. Siehe Algebra 1, 4.62. □

Korollar 3.18. *A ganzabgeschlossen,* $K = Q(A)$*,* $L|K$ *endlich,* $x \in A_L \Longrightarrow$ $\mathrm{Sp}_{L|K}(x),\ N_{L|K}(x) \in A$*.*

Beweis. $N_{L|K}(x) = N_{K(x)/K}(x)^{[L:K(x)]} = \pm a_0^{[L:K(x)]}$ wobei $X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \cdots + a_0$ das Minimalpolynom von x über K ist. Desweiteren gilt

$$\mathrm{Sp}_{L|K}(x) = [L : K(x)] \cdot \underbrace{\mathrm{Sp}_{K(x)/K}(x)}_{= -a_{r-1}}.$$

Schließlich gilt $a_0, a_{r-1} \in A$. □

Erinnerung: (Algebra 1, 4.64) $L|K$ endlich, separabel. Dann ist die **Spurform**

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp} : L \times L &\longrightarrow K, \\ (x, y) &\longmapsto \mathrm{Sp}_{L|K}(xy), \end{aligned}$$

eine nicht-ausgeartete Bilinearform.

Definition 3.19. Für eine K-Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $n = [L : K]$, von L ist die **Diskriminante** definiert durch

$$d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(\mathrm{Sp}(\alpha_i \alpha_j)).$$

Mit $\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K}) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ gilt

$$\mathrm{Sp}(\alpha_i \alpha_j) = \sum_k \sigma_k(\alpha_i)\sigma_k(\alpha_j)$$

Daher gilt die Gleichheit von Matrizen

$$(\mathrm{Sp}(\alpha_i \alpha_j))_{ij} = (\sigma_k \alpha_i)^t_{k,i} \cdot (\sigma_k \alpha_j)_{k,j},$$

und wir erhalten

Lemma 3.20.

$$d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \big(\det(\sigma_i \alpha_j)_{ij}\big)^2.$$

Im Spezialfall $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ *erhält man*

$$d(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}) = \prod_{i<j} (\sigma_j(\alpha) - \sigma_i(\alpha))^2.$$

Beweis. Die erste Aussage haben wir schon. Die zweite folgt aus

$$\det \begin{pmatrix} 1, \sigma_1(\alpha), \sigma_1(\alpha)^2, \dots, \sigma_1(\alpha)^{n-1} \\ \ddots \\ 1, \sigma_n(\alpha), \sigma_n(\alpha)^2, \dots, \sigma_n(\alpha)^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (\sigma_i(\alpha) - \sigma_j(\alpha))$$

(Vandermondsche Matrix). □

Sei $L|K$ endlich separabel, A ganzabgeschlossen mit $K = Q(A)$ und sei $B = A_L$. Jedes $x \in L$ erfüllt eine Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Durch Multiplikation erhalten wir $ax \in A_L$ für $a \in A$ geeignet. Insbesondere existieren in B enthaltene K-Basen von L.

Satz 3.21. *A ganzabgeschlossen, $K = Q(A)$, $L|K$ endlich separabel, $B = A_L$. Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine in B gelegene K-Basis von L. Dann gilt*

$$d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \cdot B \subset A\alpha_1 + \cdots + A\alpha_n.$$

Insbesondere ist B ein Untermodul eines e.e. A-Moduls.

Beweis. Sei $\alpha \in B$ beliebig. $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$, $a_1, \dots, a_n \in K$.
Dann gilt $\mathrm{Sp}_{L|K}(\alpha_i\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Sp}_{L|K}(\alpha_i\alpha_j)a_j$.
Also sind die a_i Lösungen eines linearen Gleichungssystems der Form

$$M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

mit $b_i \in A$, $M = (m_{ij}) \in M_{n,n}(A)$.

Cramersche Regel: $\det(M)a_i \in A$ (multipliziere mit Adjunkter von M). Es gilt $\det M = d(\alpha_1, \dots, \alpha_n) =: d$. Also gilt $d\alpha = da_1\alpha_1 + \cdots + da_n\alpha_n \in B$. Schließlich erhalten wir die Inklusion

$$B \subset A\frac{\alpha_1}{d} + \cdots + A\frac{\alpha_n}{d}\ ,$$

was das „Insbesondere“ zeigt. □

Korollar 3.22. *Ist A ein Hauptidealring, so ist B ein freier A-Modul vom Rang $n = [L : K]$.*

Beweis. Sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine in B enthaltene K-Basis von L und $d = d(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Dann gilt nach 3.21

$$B \subset A\frac{\alpha_1}{d} + \cdots + A\frac{\alpha_n}{d}\ .$$

Die Elemente $\frac{\alpha_i}{d}$ sind K-linear unabhängig, also auch A-linear unabhängig. Daher ist B Untermodul eines freien A-Moduls vom Rang n und somit frei vom Rang $\leq n$. Jede A-Basis von B ist auch K-Basis von $L \Rightarrow \mathrm{Rang}_A B = n$. □

Definition 3.23. Eine A-Basis von B (wenn sie existiert) heißt **Ganzheitsbasis** von B über A.

3.3 Dedekindringe

Satz 3.24 (Algebra 2, 19.1). *Für einen A-Modul M sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(i) *Jede aufsteigende Kette $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$ von Untermoduln in M wird stationär.*

(ii) *jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.*

Definition 3.25. Ein Modul M der den Bedingungen von 3.24 genügt heißt **noetherscher** A-Modul. A heißt **noetherscher Ring**, wenn A noethersch als A-Modul ist (d.h. jedes Ideal ist endlich erzeugt).

Beispiel 3.26. Jeder Hauptidealring ist noethersch.

Satz 3.27 (Algebra 2, 19.10). *Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist ein A-Modul M genau dann noethersch, wenn er endlich erzeugt ist.*

Satz 3.28 (Hilbertscher Basissatz, Algebra 2, 19.15). *Ist A noethersch und B eine endlich erzeugte A-Algebra, so ist auch B ein noetherscher Ring.*

Satz 3.29. *Sei A ein nullteilerfreier ganzabgeschlossener noetherscher Ring, $K = Q(A)$ und $L|K$ endlich separabel. Dann ist $B = A_L$ eine endliche A-Algebra und insbesondere selbst wieder noethersch.*

Beweis. Nach 3.21 ist B Untermodul eines e.e. A-Moduls, also selbst e.e. A-Modul. $\square$

Definition 3.30 (Algebra 2, 26.10). Die **Dimension** $\dim A$ eines Ringes ist das Supremum über alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft: es existiert eine Kette (der Länge n)

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_n \subset A$$

von Primidealen in A.

Bemerkungen 3.31. • A Körper $\Rightarrow \dim A = 0$
• A nullteilerfrei und $\dim A = 0 \Rightarrow A$ Körper
• $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \Rightarrow \dim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$
• A Hauptidealring $\Rightarrow \dim A \leq 1$.
Grund: z.z.: jedes Primideal $\neq 0$ ist maximal: Gilt $\mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2$, so gilt $\mathfrak{p}_i = (\pi_i)$ für Primelemente $\pi_1, \pi_2 \in A$. Es folgt $\pi_2 \mid \pi_1$. Da die π_i prim, insbesondere irreduzibel sind, folgt $\pi_1 \mathrel{\hat{=}} \pi_2 \Rightarrow \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$. Widerspruch.
• es gibt noethersche Ringe der Dimension ∞.

Definition 3.32. Ein nullteilerfreier, ganzabgeschlossener noetherscher Ring der Dimension ≤ 1 heißt **Dedekindring**.

Beispiel 3.33. Jeder Hauptidealring ist ein Dedekindring.

Satz 3.34. *Sei A ein Dedekindring, $K = Q(A)$, $L|K$ endlich separabel, und $B = A_L$. Dann ist B ein Dedekindring und es gilt* $\dim B = \dim A$.

Bemerkung 3.35. Die Separabilitätsforderung ist entbehrlich, dann wird aber der Beweis schwerer.

Beweis von 3.34. B ist ganzabgeschlossen und noethersch nach 3.29. Bleibt z.z.: $\dim B = \dim A$.

1. Fall: $\dim A = 0$. Dann ist A ein Körper. B ist endliche nullteilerfreie A-Algebra. Für $b \in B$, $b \neq 0$, ist $\cdot b : B \to B$ ein injektiver Endomorphismus des e.d. A-Vektorraums B, also ein Isomorphismus. Folglich ist jedes $b \neq 0$ invertierbar und somit B ein Körper.

2. Fall: $\dim A = 1$. Z.z.:
   a) es gibt in B ein Primideal $\neq 0$.
   b) jedes Primideal $\neq 0$ in B ist maximal.

Zu a) Sei $a \in A \smallsetminus (\{0\} \cup A^\times)$. Dann gilt $a \in B \smallsetminus (\{0\} \cup B^\times)$.
Grund: Offenbar gilt $a \neq 0$ trivial. Angenommen es existiert $b \in B$ mit $ba = 1$. Dann gilt $b \in B \cap K = A$ im Widerspruch zu $a \notin A^\times$. Folglich gilt $(0) \subsetneqq aB \subsetneqq B$ und aB ist in einem Maximalideal $\neq (0)$ enthalten.

Zu b) Sei $\mathfrak{P} \subset B$ ein Primideal $\neq 0$. Dann ist das Primideal $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap A$ ungleich 0: Grund: Sei $b \in \mathfrak{P}$, $b \neq 0$. Dann existiert eine Gleichung

$$b^r + a_{r-1}b^{r-1} + \cdots + a_0 = 0,\ a_i \in A,\ a_0 \neq 0$$

$\Rightarrow a_0 \in \mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$.
Nun ist B, also auch $B/\mathfrak{P}$ eine endliche A-Algebra. Daher ist $B/\mathfrak{P}$ ist endliche Algebra über dem Körper $A/\mathfrak{p}$. Außerdem ist $B/\mathfrak{p}$ nullteilerfrei $\Rightarrow B/\mathfrak{P}$ ist Körper (siehe oben). □

Definition 3.36. Ein **Zahlkörper** ist ein endlicher Erweiterungskörper $K|\mathbb{Q}$. Der Ganzabschluss $\mathcal{O}_K$ von $\mathbb{Z}$ in K heißt **Ring der ganzen Zahlen** von K.

Korollar 3.37. *Für jeden Zahlkörper K ist $\mathcal{O}_K$ ein Dedekindring.*

Beweis. $\mathbb{Z}$ ist Hauptidealring also Dedekindring. Das Ergebnis folgt aus 3.34. □

Beispiel 3.38. Gilt $[K : \mathbb{Q}] = 2$, so heißt K **quadratischer Zahlkörper**. Es gilt $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d \in \mathbb{Q}^\times \smallsetminus \mathbb{Q}^{\times 2}$. Stillschweigend nehmen wir d stets als ganzzahlig und quadratfrei an.

Jedes Element von K hat eine eindeutige Darstellung $x = a + b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Es gilt

$$N_{K|\mathbb{Q}}(x) = (a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - db^2,$$

$$\mathrm{Sp}_{K|\mathbb{Q}}(x) = (a + b\sqrt{d}) + (a - b\sqrt{d}) = 2a.$$

Da x Nullstelle des Polynoms $X^2 - \mathrm{Sp}(x)X + N(x)$ ist gilt

$$x \in \mathcal{O}_K \iff N(x), \mathrm{Sp}(x) \in \mathbb{Z}.$$

Satz 3.39. *Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper.*

Ist $d \not\equiv 1 \bmod 4$ so gilt $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$.

Für $d \equiv 1 \bmod 4$ gilt

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right) = \left\{\frac{a+b\sqrt{d}}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ a \equiv b \bmod 2\right\}$$

Beweis. Sei $x = a + b\sqrt{d}$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Nach den obigen Bemerkungen gilt

$$x \in \mathcal{O}_K \iff 2a, a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$$

Für $a, b \in \mathbb{Z}$, d beliebig folgt $x \in \mathcal{O}_K$.
Sei $d \equiv 1 \bmod 4$ und $a = \frac{1}{2}A$, $b = \frac{1}{2}B$, $A, B \in \mathbb{Z}$, $A \equiv B \bmod 2$. Dann ist $a^2 - db^2 = \frac{1}{4}(A^2 - dB^2) \in \mathbb{Z}$ und $2a = A \in \mathbb{Z}$. Die angegebenen Elemente sind daher ganz.

Umgekehrt: Wegen $2a \in \mathbb{Z}$ ist $4db^2 = (2a)^2 - 4(a^2 - db^2) \in \mathbb{Z}$. Da d quadratfrei ist, folgt $2b \in \mathbb{Z}$. Also existieren $A, B \in \mathbb{Z}$, $2a = A$, $2b = B$. Aus $a^2 - db^2 \in \mathbb{Z}$ folgt $4 \mid (A^2 - dB^2)$. Für $d \not\equiv 1 \bmod 4$ ist dies nur für gerades A, B möglich, also $a, b \in \mathbb{Z}$. Ist $d \equiv 1 \bmod 4$ folgt $A \equiv B \bmod 2$. □

Bemerkung 3.40. Für $d = -5$ erhalten wir $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Dieser Ring ist nicht faktoriell, insbesondere kein Hauptidealring, aber ein Dedekindring.

Sei nun K wieder ein beliebiger Zahlkörper. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, existiert eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$ (über $\mathbb{Z}$) der Länge $n = [K : \mathbb{Q}]$. Sei

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}\alpha_n.$$

Definition/Lemma 3.41. *Die Diskriminante $d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ hängt nicht von der Wahl der Basis ab. Sie heißt die* **Diskriminante des Zahlkörpers** *K. Bezeichnung $d_K = d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.*

Beweis. Es gilt

$$d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det(\sigma_i \alpha_j)^2,$$

wobei $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}})$. Sei $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ eine andere Ganzheitsbasis und M die Übergangsmatrix. Es gilt $M \in Gl_n(\mathbb{Z})$, also gilt $\det(M) \in \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$ und

$$\begin{aligned} d(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) &= \det(M)^2 \cdot d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ &= d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.42. Ist $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper so gilt

$$d_K = \begin{cases} 4d, & d \not\equiv 1 \bmod 4, \\ d, & d \equiv 1 \bmod 4. \end{cases}$$

(Man benutze die angegebene Ganzheitsbasis).

3.4 Primzerlegung in Dedekindringen

Sei A ein Dedekindring. A ist nicht notwendig ein Hauptidealring. Aber wir werden im Laufe dieses Abschnitts das folgende Theorem zeigen:

Theorem 3.43. *Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$, $\mathfrak{a} \neq 0$ hat eine bis auf Reihenfolge eindeutige Zerlegung*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$$

in das Produkt von Primidealen $\neq 0$.

Konvention: Wenn nicht explizit anders gesagt, meinen wir von jetzt an mit Primideal stets Primideal $\neq 0$.

Lemma 3.44. *Jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ umfaßt ein Produkt von Primidealen.*

Beweis. Angenommen $\mathfrak{a} \neq 0$ sei ein Ideal für das die Aussage falsch ist. Offenbar gilt $\mathfrak{a} \neq A$ und $\mathfrak{a}$ ist kein Primideal. Daher existieren $b_1, b_2 \in A$, $b_1, b_2 \notin \mathfrak{a}$, aber $b_1 b_2 \in \mathfrak{a}$. Setze

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{a} + (b_1) \supsetneqq \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{a} + (b_2) \supsetneqq \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 &= (\mathfrak{a} + (b_1))(\mathfrak{a} + (b_2)) \\ &= \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}(b_1) + \mathfrak{a}(b_2) + (b_1 b_2) \\ &\subset \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Enthalten $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ ein Produkt von Primidealen, so auch $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, also auch $\mathfrak{a}$. Daher ist die Aussage des Lemmas für mindestens eines der Ideale $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ auch falsch. Wir erhalten induktiv eine nicht stationär werdende aufsteigende Folge von Idealen. Widerspruch zu A noethersch. □

Lemma 3.45. *Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Ideale mit*

$$\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{p}.$$

Dann gilt $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ für ein i.

Beweis. Anderenfalls können wir für jedes $i = 1, \dots, n$ ein $a_i \in \mathfrak{a}_i \setminus \mathfrak{p}$ wählen und es würde $a_1 \cdots a_n \in \mathfrak{p}$ gelten. Aber $\mathfrak{p}$ ist prim. Widerspruch. □

Lemma 3.46. *Für einen A-Untermodul M von $K = Q(A)$ sind äquivalent*

(i) *M ist endlich erzeugter A-Modul.*
(ii) *es existiert ein $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$, mit $\alpha M \subset A$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Ist $M = Am_1 + \cdots + Am_n$ und $\alpha \in A$ so gewählt, dass $\alpha m_i \in A$, $i = 1, \dots, n$, so gilt $\alpha M \subset A$.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Gilt $\alpha M \subset A$ so ist αM als Ideal in A e.e. Sei $\alpha M = Aa_1 + \cdots + Aa_n$. Dann gilt $M = A\frac{a_1}{\alpha} + \cdots + A\frac{a_n}{\alpha}$. □

Definition 3.47. Ein A-Untermodul $M \subset K$, der die äquivalenten Bedingungen von 3.46 erfüllt heißt **gebrochenes Ideal** in K.

Bemerkung 3.48. Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ist ein gebrochenes Ideal. Zur besseren Unterscheidung werden wir diese oft als „ganze Ideale" bezeichnen.

Definition 3.49. Für $x \in K$ heißt

$$xA = \{xa \mid a \in A\}$$

das zu x assoziierte **gebrochene Hauptideal**.

Operationen auf gebrochenen Idealen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 &= \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in \mathfrak{a}_1, a_2 \in \mathfrak{a}_2\} \\ \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 &= \text{was sonst} \\ \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 &= \{\sum_{\text{endl.}} a_i b_i \mid a_i \in \mathfrak{a}_1, b_i \in \mathfrak{a}_2\} \end{aligned}$$

d.h. genauso wie für gewöhnliche Ideale. Für Hauptideale gilt

$$(xA)(yA) = (xy)A.$$

Insbesondere gilt für $x \neq 0$:

$$(xA)(x^{-1}A) = A = (1).$$

d.h. von 0 verschiedene gebrochene Hauptideale haben ein Inverses bzgl. Multiplikation.

Definition 3.50. Für ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{a} \subset K$, $\mathfrak{a} \neq 0$, sei $\mathfrak{a}^* = \{a \in K \mid a\mathfrak{a} \subset A\}$.

Lemma 3.51. *$\mathfrak{a}^*$ ist ein gebrochenes Ideal.*

Beweis. Zunächst ist $\mathfrak{a}^* \subset K$ ein A-Untermodul. Sei $x \in \mathfrak{a}$, $x \neq 0$, beliebig gewählt. Dann gilt $x\mathfrak{a}^* \subset A$. □