Aufgabe 1

(a) **Z.Z.:** $\underline{w}$ ist linear unabhängig.

Beweis. Sei $aX^0 + b(X^0 + X^1) + c(X^1 - X^2 + X^3) + d(X^3 + X^0) = 0$. Mit Koeffizientenvergleich erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a+b+c=0 &\quad \xrightarrow{(2),(4)} \quad & a=0 \qquad (1)\\ b+c=0 &\quad \xrightarrow{(3)} \quad & b=0 \qquad (2)\\ -c=0 &\quad \Rightarrow \quad & c=0 \qquad (3)\\ c+d=0 &\quad \xrightarrow{(3)} \quad & d=0 \qquad (4) \end{aligned}$$

□

Z.Z.: $\underline{w}$ ist ein Erzeugendensystem von W.

Beweis. Sei $w = aX^0 + bX^1 + bX^2 + dX^3 \in W$ beliebig. Dann ist w durch $(a-b-2c-d)X^0 + (b+c)(X^0+X^1) - c(X^1 - X^2 + X^3) + (d+c)(X^3 + X^0) = (a-b-2c-d+b+c+d+c)X^0 + (b+c-c)X^1 + cX^2 + (-c+d+c)X^3 = aX^0 + bX^1 + cX^2 + dX^3 = w$ als Linearkombination von Vektoren aus $\underline{w}$ darstellen. □

(b) Sei $\phi_{\underline{v}} : K^4 \xrightarrow{\sim} V$ und $\phi_{\underline{w}} : K^4 \xrightarrow{\sim} W$.

1.) Behauptung: $M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\partial) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Beweis. Wir betrachten zunächst X^0.

$$\begin{aligned} &\phi_{\underline{v}}(M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\partial) \cdot \phi_{\underline{v}}^{-1}(X^0)) \\ =&\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ =&\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0 = \partial(X^0) \end{aligned}$$

Für X^1 erhalten wir

$$\phi_{\underline{v}}(M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\partial) \cdot \phi_{\underline{v}}^{-1}(X^1))$$

$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$
$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]=X^0=\partial(X^1)$$

Bei X^2 ergibt sich

$$\phi_{\underline{v}}(M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(\partial)\cdot\phi_{\underline{v}}^{-1}(X^2))$$
$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$
$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}\right]=2X^1=\partial(X^2)$$

Auch für X^3 erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$\phi_{\underline{v}}(M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(\partial)\cdot\phi_{\underline{v}}^{-1}(X^3))$$
$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$
$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}\right]=3X^2=\partial(X^3)$$

□

2.) Behauptung: $M^{\underline{w}}_{\underline{w}}(\partial)=\begin{pmatrix}0&1&-3&-6\\0&0&1&3\\0&0&-3&-3\\0&0&3&3\end{pmatrix}$

Beweis. Wir betrachten zunächst X^0.

$$\phi_{\underline{w}}(M^{\underline{w}}_{\underline{w}}(\partial)\cdot\phi_{\underline{w}}^{-1}(X^0))$$
$$=\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}0&1&-3&-6\\0&0&1&3\\0&0&-3&-3\\0&0&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]=0=\partial(X^0)$$

Für X^0+X^1 erhalten wir

$$\begin{aligned}&\phi_{\underline{w}}(M^{\underline{w}}_{\underline{w}}(\partial)\cdot\phi^{-1}_{\underline{w}}(X^0+X^1))\\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}0&1&-3&-6\\0&0&1&3\\0&0&-3&-3\\0&0&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]=X^0=\partial(X^0+X^1)\end{aligned}$$

Bei $X^1-X^2+X^3$ ergibt sich

$$\begin{aligned}&\phi_{\underline{w}}(M^{\underline{w}}_{\underline{w}}(\partial)\cdot\phi^{-1}_{\underline{w}}(X^1-X^2+X^3))\\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}0&1&-3&-6\\0&0&1&3\\0&0&-3&-3\\0&0&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]\\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\\3\end{pmatrix}\right]\\
=&-3X^0+1(X^0+X^1)-3(X^1-X^2+X^3)+3(X^3+X^0)\\
=&X^0-2X^1+3X^2=\partial(X^1-X^2+X^3)\end{aligned}$$

Auch für X^3+X^0 erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$\begin{aligned}&\phi_{\underline{w}}(M^{\underline{w}}_{\underline{w}}(\partial)\cdot\phi^{-1}_{\underline{w}}(X^3+X^0))\\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}0&1&-3&-6\\0&0&1&3\\0&0&-3&-3\\0&0&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]\\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}-6\\3\\-3\\3\end{pmatrix}\right]\\
=&-6X^0+3(X^0+X^1)-3(X^1-X^2+X^3)+3(X^3+X^0)\\
=&3X^2=\partial(X^3+X^0)\end{aligned}$$

□

3.) Behauptung: $M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\mathrm{id}_W) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Beweis. Wir betrachten zunächst X^0.

$$\begin{aligned}
&\phi_{\underline{w}}(M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\mathrm{id}_W) \cdot \phi_{\underline{v}}^{-1}(X^0)) \\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = X_0
\end{aligned}$$

Für X^1 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\phi_{\underline{w}}(M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\mathrm{id}_W) \cdot \phi_{\underline{v}}^{-1}(X^1)) \\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = -X^0 + X^0 + X^1 = X^1
\end{aligned}$$

Bei X^2 ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\phi_{\underline{w}}(M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\mathrm{id}_W) \cdot \phi_{\underline{v}}^{-1}(X^2)) \\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\
=&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= -2X^0 + X^0 + X^1 - X^1 + X^2 - X^3 + X^3 + X^0 \\
&= X^2
\end{aligned}$$

Auch für X^3 erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$\phi_{\underline{v}}(M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\partial) \cdot \phi_{\underline{v}}^{-1}(X^3))$$

$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}1 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = -X^0 + X^3 + X^0 = X^3$$

□

4.) Behauptung: $M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_W) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Beweis. Wir betrachten zunächst X^0.

$$\phi_{\underline{v}}(M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_W)\cdot\phi_{\underline{w}}^{-1}(X^0))$$
$$=\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$
$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right] = X_0$$

Für $X^0 + X^1$ erhalten wir

$$\phi_{\underline{v}}(M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_W)\cdot\phi_{\underline{w}}^{-1}(X^0+X^1))$$
$$=\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]$$
$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right] = X_0 + X_1$$

Bei $X^1 - X^2 + X^3$ ergibt sich

$$\phi_{\underline{v}}(M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_W)\cdot\phi_{\underline{w}}^{-1}(X^1-X^2+X^3))$$
$$=\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$=\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right]=X_1-X^2+X^3$$

Auch für X^3+X^0 erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$\begin{aligned}&\phi_{\underline{v}}(M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_W)\cdot\phi_{\underline{w}}^{-1}(X^3+X^0))\\ =&\phi_{\underline{w}}\left[\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]\\ =&\phi_{\underline{v}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=X_3+X^0\end{aligned}$$

□

5.) Behauptung: $M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\partial)=\begin{pmatrix}0&1&-2&-6\\0&0&2&3\\0&0&0&-3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$

Beweis. Es gilt $M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\partial)=M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\mathrm{id}_W)\cdot M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\partial)$. Daher ist

$$M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\partial)=\begin{pmatrix}1&-1&-2&-1\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-2&-6\\0&0&2&3\\0&0&0&-3\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

□

6.) Behauptung: $M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\partial)=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&-2&0\\0&0&3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

Beweis. Es gilt $M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\partial)=M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(\partial)\cdot M_{\underline{v}}^{\underline{w}}(\mathrm{id}_W)$. Daher ist

$$M_{\underline{w}}^{\underline{v}}(\partial)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&-2&0\\0&0&3&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

□

Aufgabe 2

(a) Definiere $g' : \operatorname{im}(f) \to W, v \mapsto g(v)$. Dann gilt $g' \circ f = g \circ f$.

$$\begin{aligned} &\dim\ker(g \circ f) \\ =&\dim\ker(g' \circ f) \end{aligned}$$

Satz 2.64

$$\begin{aligned} =&\dim U - \dim\operatorname{im}(g' \circ f) \\ =&\dim U - \dim\operatorname{im}(g') \\ =&\dim U - \operatorname{rg}(g') \\ =&\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g') + \dim U - \operatorname{rg}(f) \\ =&\dim\operatorname{im}(f) - \dim\operatorname{im}(g') + \dim U - \dim\operatorname{im}(f) \end{aligned}$$

Satz 2.64

$$=\dim\ker(g') + \dim\ker(f)$$

g' ist einfach nur g eingeschränkt auf eine kleinere Urmenge. Da g linear ist, muss $\ker g'$ ein Untervektorraum von $\ker g$ sein

$$\leq \dim\ker(g) + \dim\ker(f)$$

(b) Es gilt

$$\dim\ker(g \circ f) \leq \dim\ker(g) + \dim\ker(f)$$

Homomorphiesatz

$$\begin{aligned} \dim U - \dim\operatorname{im}(g \circ f) &\leq \dim V - \dim\operatorname{im}(g) + \dim U - \dim(f) \quad | - \dim U + \dim\operatorname{im}(f) \\ \dim\operatorname{im}(f) - \dim\operatorname{im}(g \circ f) &\leq \dim V - \dim\operatorname{im}(g) \\ \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g \circ f) &\leq \dim V - \operatorname{rg}(g) \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \dim V - \operatorname{rg}(g)$$

Setze $V = K^n$, $f = F_{n,m}(A)$ und $g = F_{l,n}(B)$

$$\operatorname{rg}(F_{n,m}(A)) - \operatorname{rg}(F_{l,n}(B) \circ F_{n,m}(A)) \leq \dim K^n - \operatorname{rg}(F_{l,n}(B))$$

Mit Satz 3.6 wird daraus

$$\operatorname{rg}(F_{n,m}(A)) - \operatorname{rg}(F_{l,m}(B \cdot A)) \leq \dim K^n - \operatorname{rg}(F_{l,n}(B))$$

Mit Lemma 3.21 (i) erhalten wir

$$S\operatorname{rg}(A) - S\operatorname{rg}(B \cdot A) \leq n - S\operatorname{rg}(B)$$

Aufgabe 3

(a) Sei $(u_i)_{i\in I}$ eine Basis von U. Wir ergänzen diese zu einer Basis $(u_i)_{i\in I\dot\cup J}$ von V. Dann setze

$$\pi(u_i) = \begin{cases} u_i & \mid i \in I \\ 0 & \mid i \in J \end{cases}$$

Da 0 nicht in der Basis liegt und $I \cap J = \emptyset$ ist diese Abbildung für alle Basisvektoren definiert und aufgrund der Linearität auch wohldefiniert und eindeutig.
Sei $u \in U$. Dann lässt sich u darstellen durch $\sum_{i\in I} \alpha_i u_i$ mit $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ und es gilt

$$\pi(u) = \pi(\sum_{i\in I} \alpha_i u_i) \overset{\pi \text{ linear}}{=} \sum_{i\in I} \alpha_i \pi(u_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i u_i = u.$$

Sei nun $w \in W$. Dann lässt sich w darstellen durch $\sum_{i\in J} \alpha_i u_i$ mit $(\alpha_i)_{i\in J} \in K^{(J)}$ und es gilt

$$\pi(w) = \pi(\sum_{i\in J})\alpha_i u_i \overset{\pi \text{ linear}}{=} \sum_{i\in J} \alpha_i \pi(u_i) = \sum_{i\in J} \alpha_i 0 = 0.$$

(b) Sei $v \in V$. Fallunterscheidung:

Ist $v \in U$, so gilt $\pi(u) = u$ und folglich $\pi(\pi(u)) = \pi(u)$.

Ist $v \in W$, so gilt $\pi(v) = 0$ und folglich $\pi(\pi(v)) = \pi(0) \overset{\pi \text{ linear}}{=} 0 = \pi(v)$.

(c) Offensichtlich ist $0 \in \operatorname{im} \pi'$ und $0 \in \ker \pi'$. Sei nun $v \in \operatorname{im} \pi'$ und $v \neq 0$. Dann folgt aus $\pi' \circ \pi' = \pi'$ sofort $\pi'(v) = v \neq 0$ und daher $v \notin \ker \pi'$. Also ist $\ker \pi' \cap \operatorname{im} \pi' = \{0\}$.
Außerdem gilt $\pi'(v - \pi'(v)) \overset{\pi' \text{ linear}}{=} \pi'(v) - \pi'(\pi'(v)) = \pi'(v) - \pi'(v) = 0$ und daher $v - \pi'(v) \in \ker \pi' \forall v \in V$. Daher ist $\forall v \in V:\ v = \pi'(v) + v - \pi'(v)$ mit $\pi'(v) \in \operatorname{im} \pi'$ und $v - \pi'(v) \in \ker \pi'$. Daher ist $V = \operatorname{im} \pi' + \ker \pi'$ und folglich ist $\operatorname{im} \pi'$ das Komplement zu $\ker \pi'$. Nach Lemma 2.62 ist $\operatorname{im} \pi' \oplus \ker \pi' \to V$ ein Isomorphismus und daher $V \overset{\sim}{=} \operatorname{im} \pi' \oplus \ker \pi' = \pi'(V) \oplus \ker \pi'$.

Aufgabe 4

1. Wähle in der 3a $V = \mathbb{Q}^2$, $W = \{0, 0\}$ und daher $U = V = \mathbb{Q}^2$. $(1, 1)$ liegt also in U. Dann ist $\pi(u_i) = u_i$ und folglich $\pi = \mathrm{id}$. Die zugehörige Matrix berechnet sich durch

$$M^{\{(1,0),(0,1)\}}_{\{(1,0),(0,1)\}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

2. Wähle in der 3a $V = \mathbb{Q}^2$, $W = \operatorname{Lin}((1, 1))$ und $U = \operatorname{Lin}((1, 0))$. $\{(1, 1), (1, 0)\}$ ist eine Basis von V. Daher ist

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{Q}^2 &\to \mathbb{Q}^2 \\ (1, 1)^t &\mapsto (1, 1)^t \\ (1, 0)^t &\mapsto (0, 0)^t \end{aligned}$$

wohldefiniert und erfüllt die Forderungen der 3a. Die zugehörige Matrix ist $A_2 = M^{(1,1),(1,0)}_{(1,0),(0,1)}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Wähle in der 3a $V = \mathbb{Q}^2$, $W = \mathrm{Lin}((1,1))$ und daher $U = \mathrm{Lin}((0,1))$. Daher ist

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{Q}^2 &\to \mathbb{Q}^2 \\ (1,1)^t &\mapsto (1,1)^t \\ (0,1)^t &\mapsto (0,0)^t \end{aligned}$$

Es gilt $A_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_k^{-1} \circ \phi_v \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ Die zugehörige Matrix ist $A_3 = M^{(1,1),(0,1)}_{(1,0),(0,1)}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Z.Z.: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erfüllen die Bedingungen.

Beweis.

1. $A_1 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1$.
   $A_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $A_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_2$.
   $A_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. $A_3 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_3$.
   $A_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

□

Aufgabe 4

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei $\underline{e}$ die kanonische Basis des $V := \mathbb{Q}^2$.

1. Wähle $U = V$ und $W = \{0\}$ und wähle $\pi = id$ in der kanonischen Basis, damit gilt
$$A_1 := M(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Die Eigenschaften sind für die Einheitsmatrix offensichtlich erfüllt.

2. Wähle die Basis $\underline{v} = \{(1,1),(1,0)\}$ und damit $U = \mathrm{Lin}((1,1))$ und $W = \mathrm{Lin}((1,0))$.
Nun definiere $\pi : V \to V$ mit $\pi((1,1)) = (1,1)$ und $\pi((1,0)) = (0,0)$. Die Darstellungsmatrix von $\underline{v}$ nach $\underline{e}$ ergibt sich damit durch:
$$A_2 := M_{\underline{e}}^{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$A_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_2.$$
$$A_2 \cdot (1,1)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1)^t.$$

3. Wähle die Basis $\underline{v} = \{(0,1),(1,1)\}$ und damit $U = \mathrm{Lin}((1,1))$ und $W = \mathrm{Lin}((0,1))$.
Nun definiere $\pi : V \to V$ mit $\pi((1,1)) = (1,1)$ und $\pi((0,1)) = (0,0)$. Die Darstellungsmatrix von $\underline{v}$ nach $\underline{e}$ ergibt sich damit durch:
$$A_3 := M_{\underline{e}}^{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_3 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_3.$$
$$A_3 \cdot (1,1)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1,1)^t.$$

□