Modulformen 1 – Übungsgruppe 15. Dezember 2021

Wintersemester 2021/22

A: Besprechung 7.Übungszettel

Aufgabe 1

(a) Mit $B_{12} = \frac{-(12!)}{2^{11}\pi^{12}} \cdot \zeta(12) = \frac{691}{2730}$ (Lemma 3.6) gilt für die Fourier-Entwicklung von E_{12} gemäß Gleichung (3.2)

$$E_{12}(z) = 1 - \tfrac{2\cdot 12}{B_{12}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n) q^n = 1 + \tfrac{65520}{691} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{11}(n) q^n \ .$$

(b) Wegen $\dim_{\mathbb{C}} S_{12} = 1$ und $X := E_{12} - E_6^2, \Delta \in S_{12}$ folgt $X = c\Delta$ für ein $c \in \mathbb{C}^*$. Mit $\tau(1) = 1$ muss c mit dem ersten Fourier-Koeffizienten von X übereinstimmen. Die Fourier-Entwicklung aus (a) und die aus Cauchy-Faltung resultierende Reihe

$$E_6^2(z) = 1 - 1008 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n + \left(504 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n\right)^2$$

liefern $c = a_1(X) = \frac{65520}{691} + 1008$. Hieraus folgt die Behauptung.
Aus einem Koeffizientenvergleich

$$691 \cdot \left(\frac{65520}{691}\sigma_{11}(n) - a_n(E_6^2)\right) = (65520 + 691 \cdot 1008)\,\tau(n)$$

resultiert wegen $a_n(E_6^2) \in \mathbb{Z}$ (Bemerkung 3.7) unmittelbar die Ramanujan-Kongruenz.

Aufgabe 2

(a) Es gilt $\langle P_{m,k} | P_{m,k} \rangle = \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} g_m(m,k)$. Da $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ nicht ausgeartet ist, gilt für $g_m(m,k) = 0$ unmittelbar $P_{m,k} \equiv 0$.

(b) Wir berechnen

$$n^{k-1} g_{\tilde{n}}(n,k) = n^{k-1} \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} \langle P_{\tilde{n},k} | P_{n,k} \rangle = \tilde{n}^{k-1} \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} \overline{\langle P_{n,k} | P_{\tilde{n},k} \rangle} = \tilde{n}^{k-1} \overline{g_n(\tilde{n},k)} \ ,$$

sodass wegen der Reellwertigkeit der Fourier-Koeffizienten die Gleichung durch Umformen folgt.

Aufgabe 3

(a) Differenzieren der Modulfunktion j liefert $j'(M\langle z \rangle) = (cz+d)^2 \cdot j'(z)$. Mit der Meromorphie von j auf $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ folgt $j \in V_2$. Für ein beliebiges $f \in V_2$ ist der Quotient $\frac{f}{j'}$ also eine Modulfunktion und nach dem Struktursatz für meromorphe Modulformen ein Polynom in j. Somit ist $f = j' \cdot P(j) =: Q(j, j') \in \mathbb{C}[j, j']$ mit $P(j) \in \mathbb{C}[j]$.

(b) Für die Fourier-Entwicklung der j-Funktion ergibt sich aus Proposition 3.8 und deren Beweis

$$j(z) = \tfrac{1}{q} + 744 + a_1(j)q + a_2(j)q^2 + \cdots \ .$$

Beachte, dass $c_0(j_N) = 0$. Wir zeigen zunächst die Existenz per Induktion über $N \in \mathbb{N}$, wobei im Induktionsschritt die Aussage über die Wahl $j_1 = j - 744$ folgt. Im Induktionsschritt gilt

$$j_N \cdot j_1 = \frac{1}{q^{N+1}} + c_0(j_1)\frac{1}{q^N} + c_1(j_1)\frac{1}{q^{N-1}} + \cdots + c_{N-1}(j_1)\frac{1}{q} + C + \mathcal{O}(q) \ ,$$

wobei $C := c_N(j_1) + c_1(j_N)$ ist. Man erhält also

$$j_{N+1} = j_N \cdot j_1 - C - c_{N-1}(j_N)j_1 - c_{N-2}(j_N)j_2 - \cdots - c_0(j_N)j_N \ .$$

Für die Eindeutigkeit nehme man an, dass eine Modulfunktion $\tilde{j}_N$ mit denselben Eigenschaften existiert. Dann ist $j_N - \tilde{j}_N \in M_0 = \mathbb{C}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Also folgt für ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$, dass $c_0(\tilde{j}_N) = \lambda \cdot c_0(j_N) = 0$ und damit $j_N = \tilde{j}_N$ sein muss.

(c) Man sieht in der Induktion aus (b), dass nur ganzzahlige Funktionen vorkommen, da $a_i(j) \in \mathbb{Z}$ für alle $i \in \{1, \cdots, N\}$ gilt. Also kombinieren wir nur ganzzahlig linear.

Aufgabe 4

Wir suchen eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, sodass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})M\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ nicht in Linksnebenklassen der Form $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})M_i$ zerfällt. Setze $M := \left(\begin{smallmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und betrachte $I_{2,n} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
Angenommen, M zerfällt doch wie gewünscht, dann müsste für zwei Werte $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ die Beziehung

$$I_{2,n_1} M I_{2,n_1} = N_1 M_i \text{ und } I_{2,n_2} M I_{2,n_2} = N_2 M_i$$

mit $N_1 M_i, N_2 M_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})M_i$ gelten. Es folgt $M_i = I_{2,n_2}^{-1} \left(\begin{smallmatrix} \pi & \pi n_1 + n_1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und damit der Widerspruch

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) \ni N_2 N_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (\pi+1)(n_1 - n_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \ .$$

B: Wiederholung Hecke-Operatoren

Hecke-Operator auf $V(\mathbb{H})$

Über $V(\mathbb{H})$, den $\mathbb{C}$-Vektorraum der 1-periodischen, auf $\mathbb{H}$ meromorphen Funktionen mit höchstens einem Pol in ∞, lässt sich ein analytischer Ansatz zur Konstruktion von **Hecke-Operatoren** verfolgen. Zu $f \in V(\mathbb{H})$ betrachten wir für $a, d \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$T_{a,d}(f)(z) := \sum_{b \bmod (d)} f\left(\tfrac{az+b}{d}\right) \ .$$

Offensichtlich ist $T_{a,d}(f)$ meromorph und eine kurze Rechnung zeigt die Linearität

$$T_{a,d}(\alpha f + \beta g)(z) = \alpha T_{a,d}(f)(z) + \beta T_{a,d}(g)(z) \ .$$

Die Struktur von $V(\mathbb{H})$ ermöglicht es, die Fourier-Entwicklung

$$T_{a,d}(f)(z) = d \sum_{m \geq m_0/d} a_{md}(f) q^m$$

zu betrachten, wobei m_0 aus der Entwicklung von $f \in V(\mathbb{H})$ stammt. Dies liefert $T_{a,d}(f) \in V(\mathbb{H})$.

Definition: [Hecke-Operator auf $V(\mathbb{H})$]
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ definiere $\cdot|_k T_n$ durch

$$f|_k T_n := n^{k-1} \sum_{ad=n, d>0} d^{-k} \cdot T_{a,d}(f) \ .$$

Ein einfacher Spezialfall ergibt sich hierbei für eine Primzahl p. Dann gilt:

$$(f|_k T_p)(z) = p^{k-1} \sum_{ad=p, d>0} d^{-k} \sum_{b \text{ mod}(d)} f\left(\tfrac{az+b}{d}\right) = p^{k-1} f(pz) + p^{-1} \sum_{b \text{ mod}(p)} f\left(\tfrac{z+b}{p}\right) \ .$$

Außerdem lassen sich Hecke-Operatoren wie folgt ableiten:

$$(f|_k T_n)'(z) = n^{k-1} \sum_{ad=n, d>0} d^{-k} \sum_{b \text{ mod}(d)} f'\left(\tfrac{az+b}{d}\right) \tfrac{a}{d} = n^k \sum_{ad=n, d>0} d^{-(k+2)} \sum_{b \text{ mod}(d)} f'\left(\tfrac{az+b}{d}\right) \ .$$

Dies liefert $n\,(f|_k T_n)'\,(z) = (f'|_{k+2} T_n)\,(z)$.

Lemma: [Fourier-Koeffizienten von Hecke-Operatoren]
Die Fourier-Koeffizienten von $f|_k T_n$ sind gegeben durch

$$a_m\,(f|_k T_n) = \sum_{d|\,\mathrm{ggT}(m,n)} d^{k-1} a_{mn/d^2}(f) \text{ mit } m \geq \begin{cases} 0 & \text{, falls } m_0 = 0 \\ 1 & \text{, falls } m_0 > 0 \\ n m_0 & \text{, falls } m_0 < 0 \end{cases} \ .$$

Es gilt explizit $a_0(f|_k T_n) = \sigma_{k-1}(n) a_0(f)$ und $a_1(f|_k T_n) = a_n(f)$. Im Fall einer Primzahl p folgt

$$a_m(f|_k T_p) = \begin{cases} a_{mp}(f) & \text{, falls } p \nmid m \\ a_{mp}(f) + p^{k-1} a_{m/p}(f) & \text{, falls } p \,|\, m \end{cases} \ .$$

Transformationen n-ter Ordnung

Definition: [Transformationen n-ter Ordnung]
Die **Transformationen n-ter Ordnung** sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch die Elemente von

$$\mathbb{M}^n := \{M \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \mid \det(M) = n\} \ .$$

Offensichtlich gilt einerseits $\mathbb{M}^1 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und andererseits $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \cdot \mathbb{M}^n = \mathbb{M}^n = \mathbb{M}^n \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Es stellt sich in Anlehnung an Lemma 4.3 aus der Vorlesung heraus, dass die Menge

$$\left\{M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \mid ad = n, d > 0, b \mod (d)\right\}$$

ein **Rechtsvertretersystem von $\mathbb{M}^n$ modulo** $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ [†] ist. Es lässt sich die Anzahl der Elemente eines jeden Rechtsvertretersystems von $\mathbb{M}^n$ modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ berechnen: Da sich zwei verschiedene Rechtsvertretersysteme nur um jeweils linksseitige Faktoren aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ unterschieden, haben alle Rechtsvertretersysteme gleich viele Elemente. Die Betrachtung eines Standard-Vertretersystems liefert:

$$\sum_{d|n} \left(\sum_{b \text{ mod}(d)} 1 \right) = \sum_{d|n} d = \sigma_1(n) \ .$$

[†] $\mathcal{M} \subset \mathbb{M}^n$ heißt Rechtsvertretersystem von $\mathbb{M}^n$ modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, wenn $\mathbb{M}^n = \bigsqcup_{M \in \mathcal{M}} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) M$ gilt.

Hecke-Operator für Modulformen

Wir führen schließlich die bereits gewonnenen Erkenntnisse zusammen und erinnern zunächst an den Strichoperator aus Proposition 2.6. Da Modulformen vom Gewicht k meromorph auf $\mathbb{H}$ und 1-periodisch sind und bei ∞ höchstens einen Pol haben, sind ebendiese stets in $V(\mathbb{H})$ enthalten. Die Funktion $T_{a,d}$ lässt sich also auch auf Funktionen aus V_k anwenden ($V_k \subset V(\mathbb{H})$).

Satz: [Hecke-Operator für Modulformen]
Ist $\mathcal{M} :=_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \backslash^{\mathbb{M}^n}$ ein Rechtsvertretersystem von $\mathbb{M}^n$ modulo $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $f \in V_k$, dann gilt

$$f|_k T_n := n^{k-1} \sum_{M \in \mathcal{M}} f|_k M$$

und $f|_k T_n$ ist wieder ein Element von V_k.

Es lässt sich als eines der zentralen Resultate über die Theorie der Hecke-Operatoren zeigen, dass alle $f|_k T_n : M_k \to M_k$ für $n \in \mathbb{N}$ Endomorphismen sind, die Spitzenformen auf Spitzenformen abbilden. Dies folgt unmittelbar aus dem Spezialfall des obigen Lemmas und Korollar 4.21 aus der Vorlesung.