Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 4

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 10. - 14. Mai 2021
Bitte geben Sie maximal 2 Aufgaben per Übungsgruppensystem zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!
Nutzen Sie dazu den Link `https://uebungen.physik.uni-heidelberg.de/h/1291`

1. Verständnisfragen

a) Erläutern Sie die Unterschiede zwischen den Ihnen bekannten Bildern der Quantenmechanik.

b) Erklären Sie die Form des Zeitentwicklungsoperators und dessen Herleitung.

c) Wie könnten Störungen physikalisch zustandekommen, wie wir sie bei der Diskussion der Rabi-Oszillationen angenommen haben? Wie könnten Sie einen Hamilton-Operator dafür formulieren?

2. Hamilton-Jacobi-Gleichung und WKB-Näherung

a) Betrachten Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

und setzen Sie darin

$$\psi(t,x) = \mathrm{e}^{iS(t,x)/\hbar}\,.$$

(Dieser Ansatz ist allgemeingültig, wenn $S(t,x)$ komplexe Werte annehmen darf.) Leiten Sie die Differentialgleichung für $S(t,x)$ her und zeigen Sie, dass sich diese im klassischen Limes $\hbar \to 0$ zur Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

der klassischen Mechanik vereinfacht.

b) Setzen Sie in der Differentialgleichung für $S(t,x)$ (bevor der klassische Limes genommen wurde)

$$S(t,x) = W(x) - Et$$

und leiten Sie die Differentialgleichung für $W(x)$ her. Um diese näherungsweise zu lösen, stellen wir eine Entwicklung in Potenzen von $\hbar$ auf,

$$W(x) = W_0(x) + \hbar W_1(x) + \hbar^2 W_2(x) + \ldots$$

Finden Sie die Gleichungen für $W_0(x)$ und $W_1(x)$ durch Einsetzen und Koeffizientenvergleich. Lösen Sie die Gleichung für $W_0(x)$ und geben Sie die allgemeine Lösung der Schrödingergleichung $\psi(t,x)$ in dieser Näherung 'nullter Ordnung' an. (Die entsprechende Näherung erster Ordnung in $\hbar$ bezeichnet man als WKB-Näherung nach ihren Begründern Wenzel, Kramers und Brillouin.)

3. *Ehrenfest-Theorem*

Sei $\psi_t(x) = \psi(\vec{x}, t)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung im Ortsraum. Der Hamilton-Operator sei gegeben durch

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x}),$$

und ψ sei normiert, $\langle\psi_t|\psi_t\rangle = 1$. Wir bezeichnen die Erwartungswerte von Orts- und Impulsoperator im Zustand $\psi(\vec{x}, t)$ mit

$$\vec{X}(t) = \langle\psi_t|\,\hat{\mathrm{Q}}\,\psi_t\rangle = \langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle\,(t)$$
$$\vec{P}(t) = \langle\psi_t|\,\hat{\mathrm{P}}\,\psi_t\rangle = \langle\hat{\mathrm{P}}\rangle\,(t).$$

a) Zeigen Sie, dass diese Erwartungswerte die folgenden Bewegungsgleichungen (die Ehrenfest'schen Gleichungen) erfüllen:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle\,(t) = \frac{1}{m}\langle\hat{\mathrm{P}}\rangle\,(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\mathrm{P}}\rangle\,(t) = -\langle\psi_t|\,(\nabla V(\vec{x}))\,\psi_t\rangle = \langle\vec{F}(\vec{x})\rangle\,.$$

Damit haben wir gezeigt, dass die klassischen Bewegungsgleichungen für die Erwartungswerte gelten. Im Folgenden beschränken wir uns auf eine Dimension und wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen die Quantendynamik ihrem klassischen Grenzfall nahe kommt, nämlich

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle \simeq F(\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle).$$

b) Betrachten Sie zunächst das Potential $V(x) = x^2$ eines harmonischen Oszillators. Vergleichen Sie $\langle F(x)\rangle$ und $F(\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle)$. Was können Sie aus Ihrem Ergebnis folgern?

c) Das Potential sei nun leicht asymmetrisch, $V(x) = x^2 + \alpha x^3$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Drücken Sie die Abweichung $\langle F(x)\rangle - F(\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle)$ durch die Varianz $(\Delta\,\hat{\mathrm{Q}})^2$ des Wellenpakets aus, das sich in dem Potential bewegt.
Um einen allgemeineren Ausdruck zu erhalten, entwickeln Sie die Kraft $F(x)$ in eine Taylor-Reihe um $x_0 = \langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle$. Unter welcher Bedingung an $F''(\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle)/F(\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle)$ bleibt die Abweichung $\langle F(x)\rangle\,/F(\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle) - 1$ klein, so dass sich $\langle\hat{\mathrm{Q}}\rangle$ nahezu klassisch bewegt? Geben Sie einen Fall an, in dem diese Näherung für das kubische Potential $V(x)$ auch bei kleinen Auslenkungen versagt.

4. *Zeno-Effekt*

Ein quantenmechanisches System werde zur Zeit $t = 0$ in einem angeregten Zustand $|\psi_0\rangle$ präpariert, der kein Eigenzustand des Hamiltonoperators $\hat{H}$ ist und auf einer Zeitskala τ in den Grundzustand übergeht. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach Zeit t noch im Anfangszustand $|\psi_0\rangle$ befindet, $P(t) \sim \exp(-t/\tau)$. Für sehr kurze Zeiten verhält sich $P(t)$ jedoch anders; das eröffnet die Möglichkeit, durch kontinuierliche Messung im angeregten Zustand zu bleiben („Zeno-Paradoxon"). Die Benennung ist angelehnt an das Pfeil-Paradoxon des antiken griechischen Philosophen Zenon von Elea.
Der Anfangszustand $|\psi_0\rangle$ sei ein Eigenzustand einer Observable $\hat{\mathrm{A}}$ mit diskretem Spektrum, die nicht mit $\hat{H}$ vertauscht und damit im Allgemeinen nicht erhalten ist. Für kurze Zeiten kann man die Reihenentwicklung des Zeitentwicklungsoperators $U(t)$ verwenden,

$$|\psi(t)\rangle = \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}t - \frac{1}{2\hbar^2}\hat{H}^2t^2 + \ldots\right)|\psi_0\rangle\,.$$

**Hinweis:* Betrachten Sie zunächst allgemein $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\hat{\mathrm{A}}\rangle$ für einen selbstadjungierten und im Allgemeinen zeitabhängigen Operator $\hat{\mathrm{A}}$. Nutzen Sie dann zum Beweis der Bewegungsgleichungen die Produktregel für Kommutatoren.

a) Berechnen Sie mit der Entwicklung bis zur quadratischen Ordnung die Wahrscheinlichkeit $P(t)$, dass die Messung von $\hat{A}$ zur Zeit t wieder den Anfangszustand ergibt für kurze Zeiten (Kollaps der Wellenfunktion).
   Welche physikalische Bedeutung hat der Koeffizient α in $P(t) = 1 - \alpha t^2 + \ldots$?

b) Betrachten Sie den Fall, dass $\hat{A}$ zu den Zeiten $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 1, 2, \ldots$ wiederholt gemessen wird. Dazwischen entwickle sich das System gemäß der Schrödingergleichung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System in jeder der N Messungen wieder im Anfangszustand vorgefunden wird?

c) Betrachten Sie nun den Grenzfall einer großen Zahl von Messungen in einem festen Zeitintervall, d.h. $t_N = \tau$. Zeigen Sie, dass das System bei kontinuierlicher Beobachtung, also im Limes $N \to \infty$, im angeregten Anfangszustand bleibt.
   Anmerkung: Dieses quantenmechanische Analogon des Zeno-Paradoxons wurde 1990 an Hyperfein-Übergängen von Beryllium-Ionen nachgewiesen [W. M. Itano et al., Phys. Rev. A 41, 2295 (1990)].

Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 4: Lösung

1. *Verständnisfragen*

a) Im *Schrödinger*-Bild sind die Zustände zeitabhängig, d.h. jegliche zeitliche Änderung eines Zustands ist in dem Zustand enthalten und kann durch den Zeitentwicklungsoperator ausgedrückt werden: $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$. Da physikalisch bedeutend nur die Projektion eines Zustands auf die Eigenzustände relevanter Operatoren sind, kann diese Zeitabhängigkeit auch auf die Operatoren übertragen werden. Dies nennt man das *Heisenberg*-Bild, in dem die Zustände zeitunabhängig aber die Operatoren zeitabhängig sind: $\hat{A}_H(t) = \hat{U}^{-1}(t, t_0)\hat{A}\hat{U}(t, t_0)$. Das Wechselwirkungsbild ist eine Mischform, in der sowohl die Operatoren als auch die Zustände zeitabhängig sind. Hier wird der Hamilton-Operator in einen zeitunabhängigen Anteil und eine Störung aufgeteilt: $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. Die Zeitabhängigkeit eines Operators wird ausgedrückt durch den Anteil $\hat{H}_0$ wie im Heisenberg-Bild und ein Zustand hat die Form $|\psi(t)\rangle_I = \hat{U}_0^{-1}(t, t_0)\,|\psi(t)\rangle$. Die Zustände erfüllen dann die Schrödingergleichung: $\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I\,|\psi(t)\rangle_I$.

b) Der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}$ muss einige Voraussetzungen erfüllen.

- Linearität wegen der linearen Schrödingergleichung $\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$
- Unitarität weil die Wahrscheinlichkeit erhalten bleiben muss:

$$\begin{aligned} &\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|\hat{U}^\dagger(t, t_0)\rangle\,\hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0) = \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle \\ \Rightarrow\qquad &\hat{U}^{-1}(t, t_0) = \hat{U}^\dagger(t, t_0) \end{aligned}$$

- $\hat{U}(t, t) = \mathbb{1}$ und $\hat{U}(t, t')\hat{U}(t', t_0) = \hat{U}(t, t_0)$

Schreibt man den Zustand $|\psi(t)\rangle$ in einer beliebigen Basis $|n\rangle$, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$\mathrm{i}\hbar\dot{c}_m = \sum_n c_n\,\langle m|\hat{H}|n\rangle$$

aus der Schrödingergleichung. Hier sind die Koeffizienten $c_n(t) = \langle n|\psi(t)\rangle$. Falls die Basis $|n\rangle$ Eigenzustände des Hamilton-Operators sind, wird diese Gleichung gelöst durch

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n(t - t_0)\right).$$

Damit ergibt sich für den Zeitentwicklungsoperator

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)\right)$$

c) Störungen wie bei der Diskussion der Rabi-Oszillationen können zum Beispiel durch ein äußeres Lichtfeld in Form von Lasern oder auch ein externes Magnetfeld hervorgerufen werden. Der dazu gehörige Hamilton-Operator muss die Eigenzustände des ungestörten Systems koppeln, sodass ein Übergang zwischen diesen möglich ist.

2. *Hamilton-Jacobi-Gleichung und WKB-Näherung*

a) Der Ansatz zur Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung soll sein

$$\psi(t,x) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S(t,x)\right).$$

Wir bestimmen die Ableitungen von $\psi(t,x)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\psi(t,x)\frac{\partial S}{\partial t} \\
\frac{\partial}{\partial x}\psi(t,x) &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\psi(t,x)\frac{\partial S}{\partial x} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(t,x) &= \left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \psi(t,x)\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\psi(t,x)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \\
&= -\frac{1}{\hbar^2}\psi(t,x)\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\psi(t,x)\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Da $\psi(t,x) \neq 0$ für alle Argumente der Exponentialfunktion, können wir durch die Wellenfunktion teilen und erhalten aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung eine Differentialgleichung für $S(t,x)$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + V(x) = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Im klassischen Limes ($\hbar \to 0$) verschwindet der zweite Term und wir finden

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + V(x) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad \checkmark$$

b) Wir modifizieren unseren Ansatz nun weiter

$$S(t,x) = W(x) - E\cdot t.$$

Dann können wir die Ableitungen in unserer Differentialgleichung für $S(t,x)$ einfach ersetzen.

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + V(x) = -E.$$

Dann schreiben wir die Funktion $W(x)$ als Reihe in Ordnungen von $\hbar$, wie in der Aufgabenstellung beschrieben

$$\begin{aligned}
W(x) &= W_0(x) + \hbar W_1(x) + \hbar^2 W_2(x) + \ldots \\
E &= \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}(W_0(x) + \hbar W_1(x) + \ldots)\right)^2 - \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(W_0(x) + \hbar W_1(x) + \ldots) + V(x)
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen für W_0 und W_1 ergeben sich durch Koeffizientenvergleich, indem wir alle Terme proportional zu $\hbar^0$ bzw. $\hbar$ sammeln.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_0}{\partial x}\right)^2 + V(x) &= E \\
\frac{1}{m}\frac{\partial W_0}{\partial x}\frac{\partial W_1}{\partial x} - \frac{\mathrm{i}}{2m}\frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} &= 0.
\end{aligned}$$

Die Lösung für W_0 ergibt sich zu

$$W_0(x) = \pm\int_a^x \sqrt{2m(E - V(x'))}\mathrm{d}x'$$

und damit die Lösung 'nullter Ordnung' für $\psi(t,x)$

$$\psi(t,x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\left(A\exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_a^x \sqrt{2m(E-V(x'))}\mathrm{d}x'\right) + B\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_a^x \sqrt{2m(E-V(x'))}\mathrm{d}x'\right)\right).$$

3. *Ehrenfest-Theorem*

a) Die totale Zeitableitung des Erwartungswerts eines (zeitabhängigen) Operators $\hat{\mathrm{A}}$ ist

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle\psi_t| \hat{\mathrm{A}} |\psi_t\rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle\psi_t|\right) \hat{\mathrm{A}} |\psi_t\rangle + \langle\psi_t| \left(\frac{\partial \hat{\mathrm{A}}}{\partial t}\right) |\psi_t\rangle + \langle\psi_t| \hat{\mathrm{A}} \left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \langle\psi_t| \hat{H} \hat{\mathrm{A}} |\psi_t\rangle + \langle\psi_t| \frac{\partial \hat{\mathrm{A}}}{\partial t} |\psi_t\rangle - \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \langle\psi_t| \hat{\mathrm{A}} \hat{H} |\psi_t\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left\langle [\hat{H}, \hat{\mathrm{A}}] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathrm{A}}}{\partial t} \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Um die Ehrenfest'schen Gleichungen zu zeigen, ersetzen wir $\hat{\mathrm{A}}$ mit $\hat{\mathrm{Q}}$ und $\hat{\mathrm{P}}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle \hat{\mathrm{Q}} \right\rangle &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left\langle [\hat{H}, \hat{\mathrm{Q}}] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathrm{Q}}}{\partial t} \right\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left\langle [\frac{1}{2m} \hat{\mathrm{P}}^2 + V(x), \hat{\mathrm{Q}}] \right\rangle + 0 \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2m\hbar} \left\langle \hat{\mathrm{P}}[\hat{\mathrm{P}}, \hat{\mathrm{Q}}] + [\hat{\mathrm{P}}, \hat{\mathrm{Q}}] \hat{\mathrm{P}} \right\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2m\hbar} (-2\mathrm{i}\hbar) \left\langle \hat{\mathrm{P}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{m} \left\langle \hat{\mathrm{P}} \right\rangle \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

Hier haben wir benutzt, dass $\hat{\mathrm{Q}}$ nicht zeitabhängig ist und der Kommutator von $\hat{\mathrm{Q}}$ und $\hat{\mathrm{P}}$ gegeben ist zu $[\hat{\mathrm{Q}}, \hat{\mathrm{P}}] = \mathrm{i}\hbar$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\langle \hat{\mathrm{P}} \right\rangle &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left\langle [\hat{H}, \hat{\mathrm{P}}] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{\mathrm{P}}}{\partial t} \right\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left\langle [\frac{1}{2m} \hat{\mathrm{P}}^2 + V(x), \hat{\mathrm{P}}] \right\rangle + 0 \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left\langle \frac{1}{2m} [\hat{\mathrm{P}}^2, \hat{\mathrm{P}}] + [V(x), \hat{\mathrm{P}}] \right\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left\langle \frac{1}{2m} (\hat{\mathrm{P}}[\hat{\mathrm{P}}, \hat{\mathrm{P}}] + [\hat{\mathrm{P}}, \hat{\mathrm{P}}] \hat{\mathrm{P}}) + [V(x), \hat{\mathrm{P}}] \right\rangle \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left(\langle\psi_t| V(x) \hat{\mathrm{P}} |\psi_t\rangle - \langle\psi_t| \hat{\mathrm{P}} V(x) |\psi_t\rangle \right) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left(\langle\psi_t| V(x) \hat{\mathrm{P}} |\psi_t\rangle - \langle\psi_t| - \mathrm{i}\hbar (\nabla V(x)) |\psi_t\rangle - \langle\psi_t| V(x) \hat{\mathrm{P}} |\psi_t\rangle \right) \\
&= - \langle \nabla V(x) \rangle \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

b) Das Potential des harmonischen Oszillators ist $V(x) = x^2$. Also ist die wirkende Kraft $F(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2x$. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\langle F(x) \rangle &= \langle -2x \rangle = -2 \langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle \\
F(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle) &= -2 \langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle .
\end{aligned}
$$

Die Ergebnisse sind identisch. Also verhält sich die Quantendynamik ihrem klassischen Grenzfall entsprechend.

c) Im Falle eines kubischen Potentials ist dies nicht mehr der Fall, da sich der Erwartungswert $\langle \hat{\mathrm{Q}}^2 \rangle$ im Allgemeinen von $\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle^2$ unterscheidet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
F(x) &= -2x - 3\alpha x^2 \\
\langle F(x) \rangle &= -2 \langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle - 3\alpha \langle \hat{\mathrm{Q}}^2 \rangle \\
F(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle) &= -2 \langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle - 3\alpha \langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle^2 \\
\langle F(x) \rangle - F(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle) &= -3\alpha \left(\langle \hat{\mathrm{Q}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle^2 \right) = -3\alpha \langle (\Delta \hat{\mathrm{Q}})^2 \rangle .
\end{aligned}$$

Als nächstes entwickeln wir die Kraft um $x_0 = \langle Q \rangle$ und setzen ein

$$\begin{aligned}
F(x) &\simeq F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{F''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \\
\langle F(x) \rangle &\simeq F(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle) + F'(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle) \langle (\hat{\mathrm{Q}} - \langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle) \rangle + \frac{F''(\langle Q \rangle)}{2} \langle (\hat{\mathrm{Q}} - \langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle)^2 \rangle \\
&= F(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle) + \frac{F''(\langle Q \rangle)}{2} \left(\langle \hat{\mathrm{Q}}^2 \rangle - \langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle^2 \right) \\
&= F(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle) + \frac{F''(\langle Q \rangle)}{2} \langle (\Delta \hat{\mathrm{Q}})^2 \rangle .
\end{aligned}$$

Das gefragte Kriterium für $F''(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle)/F(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle)$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\frac{\langle F(x) \rangle}{F(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle)} - 1 &= \frac{F''(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle)}{F(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle)} \frac{\langle (\Delta \hat{\mathrm{Q}})^2 \rangle}{2} \ll 1 \\
\frac{F''(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle)}{F(\langle \hat{\mathrm{Q}} \rangle)} &\ll \frac{2}{\langle (\Delta \hat{\mathrm{Q}})^2 \rangle}
\end{aligned}$$

Diese Näherung für das kubische Potential versagt auch bei kleinen Auslenkungen, wenn $|\alpha| \gg 1$.

4. Zeno-Effekt

a) Die Wahrscheinlichkeit, das System nach einer Zeit t wieder in dem Zustand $|\psi_0\rangle$ zu finden, ist gegeben als

$$\begin{aligned}
P(t) &= \left| \langle \psi_0 | \hat{U}(t) | \psi_0 \rangle \right|^2 \\
&\simeq \left| \langle \psi_0 | \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \hat{H} t - \frac{1}{2\hbar^2} \hat{H}^2 t^2 \right) | \psi_0 \rangle \right|^2 \\
&= \left| \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle - \frac{\mathrm{i}t}{\hbar} \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2} \langle \psi_0 | \hat{H}^2 | \psi_0 \rangle \right|^2 \\
&= \left(\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2} \langle \psi_0 | \hat{H}^2 | \psi_0 \rangle \right)^2 + \left(\frac{t}{\hbar} \langle \psi_0 | \hat{H} | \psi_0 \rangle \right)^2 \\
&= 1 - \frac{t^2}{\hbar^2} \langle \hat{H}^2 \rangle + \frac{t^2}{\hbar^2} \langle \hat{H} \rangle^2 + \frac{t^4}{4\hbar^4} \langle \hat{H}^2 \rangle^2 \\
&= 1 - \alpha t^2 + \ldots
\end{aligned}$$

Also ist der Koeffizient α das Schwankungsquadrat des Hamilton-Operators geteilt durch $\hbar^2$:

$$\alpha = \frac{1}{\hbar^2} \langle (\Delta \hat{H})^2 \rangle .$$

b) Bei der ersten Messung nach Δt ist die Wahrscheinlichkeit gegeben durch unser voriges Ergebnis

$$P(t_1) = 1 - \frac{\langle(\Delta\hat{H})^2\rangle}{\hbar^2}\Delta t^2.$$

(Natürlich nur bis zur quadratischen Ordnung in Δt.) Wenn wir die nächste Messung nach $t = 2\Delta t$ durchführen, dann hat sich das System erneut um Δt weiter entwickelt:

$$P(t_2) = \left(1 - \frac{\langle(\Delta\hat{H})^2\rangle}{\hbar^2}\Delta t^2\right)^2.$$

Nach $t = k \cdot \Delta t$ haben wir also die Wahrscheinlichkeit

$$P(t_k) = \left(1 - \frac{\langle(\Delta\hat{H})^2\rangle}{\hbar^2}\Delta t^2\right)^k,$$

das System im Zustand $|\psi_0\rangle$ zu messen.

c) Nun soll das System über die Zeit $t = \tau$ insgesamt N mal gemessen werden. Also ist die Wahrscheinlichkeit das System im Zustand $|\psi_0\rangle$ zu messen

$$\begin{aligned} P(\tau) &= \left(1 - \frac{\langle(\Delta\hat{H})^2\rangle}{\hbar^2}\left(\frac{\tau}{N}\right)^2\right)^N \\ &= 1 - N\frac{\langle(\Delta\hat{H})^2\rangle}{\hbar^2}\left(\frac{\tau}{N}\right)^2 + \mathcal{O}\left((\tau/N)^4\right). \end{aligned}$$

Lassen wir $N \to \infty$ und messen das System kontinuierlich, geht die Wahrscheinlichkeit $P(\tau) \to 1$. Somit kann das System im instabilen Zustand $|\psi_0\rangle$ durch kontinuierliche Messung eingefroren werden.