Aufgabe 15

(a)
- Die Stetigkeit von α folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der komplexen Exponentialfunktion. Außerdem ist $\alpha(1) = e^{2\pi i 1} = 1 = e^{2\pi i 0} = \alpha(0)$. Daher ist α auch geschlossen.
- Da lineare Funktionen stetig sind, genügt es, die Stetigkeit von γ an den Stellen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ nachzuweisen.

  $\frac{1}{3}$: $\gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 1$. Außerdem ist $\lim\limits_{x\nearrow\frac{1}{3}} \gamma(t) = 1 = \lim\limits_{x\searrow\frac{1}{3}}$.

  $\frac{2}{3}$: $\gamma\left(\frac{2}{3}\right) = i$. Außerdem ist $\lim\limits_{x\nearrow\frac{2}{3}} \gamma(t) = i = \lim\limits_{x\searrow\frac{2}{3}}$.

  Wegen $\gamma(1) = 0 = \gamma(0)$ ist γ außerdem geschlossen.

(b) Es gilt

$$\oint_\alpha \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 e^{-2\pi i t} \cdot 2\pi e^{2\pi i t}\,\mathrm{d}t = 2\pi i$$

und

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma z^2\,\mathrm{d}z &= \sum_{\nu=0}^{2} \int_{\frac{1}{3}\nu}^{\frac{1}{3}(\nu+1)} f(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}} (3t)^2 \cdot 3\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (3(i-1)t - i + 2)^2 \cdot 3(i-1)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{2}{3}}^{1} (3i(t-1))^2 \cdot -3i\,\mathrm{d}t \\
&= 9t^3\Big|_0^{\frac{1}{3}} + 3(i-1)\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 9(i-1)^2t^2 - 6(i-1)(i+2)t + (i+2)^2\,\mathrm{d}t + 27i\int_{\frac{2}{3}}^{1} (t^2 - 2t + 1)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3} + 3(i-1)\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 9(1^2 + i^2 - 2i)t^2 - 6(i-3)t + (4 + i^2 - 2i)\,\mathrm{d}t + 27i\left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 + t\right]_{\frac{2}{3}}^{1} \\
&= \frac{1}{3} + 3(i-1)\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} -18it^2 - 6(i-3)t + (3-2i)\,\mathrm{d}t + 27i\left[\frac{1}{3} - 1 + 1 - \left(\frac{8}{3^4} - \frac{4}{9} + \frac{2}{3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3} + i\left(9 - \frac{8}{3} + 12 - 18\right) + 3(i-1)\Big[-6it^3 - 3(i-3)t^2 + (3-2i)t\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{1}{3}(i+1) + (i-1)\left[-i\frac{16}{3} - (i-3)4 + (3-2i)2 - \left(-i\frac{2}{3} - (i-3) + (3-2i)\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}(i+1) + (i-1)\left[-i\frac{14}{3} - (i-3)3 + (3-2i)\right] \\
&= \frac{1}{3}(i+1) + (i-1)\left[-i\frac{29}{3} + 12\right] \\
&= \frac{1}{3}(i+1) + \frac{29}{3} + 12i + \frac{29}{3}i - 12 \\
&= 22i - 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 18

Es gilt
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2ay.$$
Daraus folgt
$$v(x+iy) = 2xy + ay^2 + C(x),$$
wobei $C(x)$ nur von x abhängen darf. Außerdem erhalten wir
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2ax - 2by.$$
Also muss gelten
$$v(x+iy) = -ax^2 - 2bxy + D(y),$$
wobei $D(y)$ nur von y abhängen darf. Gleichsetzen ergibt also
$$-ax^2 - 2bxy + D(y) = 2xy + ay^2 + C(x) \iff -2bxy = 2xy \iff b = -1.$$
Für alle a, b mit $b = -1$ ist $x^2 + 2axy + by^2$ der Realteil einer holomorphen Funktion.