Aufgabe 8.1 4 Punkte

[2.5+1.5 Punkte]

(a) Für $c > 0$ definieren wir

$$M_c := \left\{ f \in C^1([0,1]) \mid \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx + \int_0^1 |f'(x)|^2 \, dx \le c \right\}$$

Zeigen Sie, dass $\overline{M}_c$ kompakt ist in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Arzela-Ascoli: V = [0,1] ist kompakt und Y = \R ist ein Banachraum. M_c relativ kompakt <=>

1. M_c,v = {f(v): f in M_C} ist relativ kompakt
2. M_c ist punktweise gleichgradig stetig

1. $f_n \in M_c$, $f_n(x) \xrightarrow{n \to \infty} \infty$

$$\frac{f(x) - f(0)}{|x|} = f'(\xi) \quad \text{für ein } \xi \in [0,x]$$

2.2. $\int |f|^2$ groß oder $\int |f'|^2$ groß

Mittelwertsatz, Hölder, HDI

$$\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx = \|f\|_2^2$$

$$\|f f\|_1 \le \|f\|_2 \|f\|_2 \quad \text{trivial}$$

2. Gleichgradig stetig:

2.2. $\forall v \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \quad |w - v| < \delta \Rightarrow \|f(w) - f(v)\| < \varepsilon \quad \forall f \in M$

Beweis:

$$\lim_{w \to v} \frac{\|f(w) - f(v)\|}{|w - v|} = f'(v) \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \frac{\sup_{v \in [0,1]} f'(v)}{\varepsilon}$$

$$|w - v| < \delta \Rightarrow \|f(w) - f(v)\| \le f'(v)\,\delta < \varepsilon$$

$\blacksquare$

(b) Sei V ein abgeschlossener Untervektorraum von $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ und es gebe ein $c > 0$ mit

$$\forall f \in V\, \exists a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) : |f(x) - f(y)| \leq c\|f\|_\infty \|x - y\|^a. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass V endlich dimensional ist.

V ist genau dann endlichdimensional, wenn der Einheitsball B_1 relativ kompakt ist.
Arzela-Ascoli: V = [0,1] ist kompakt und Y = \R ist ein Banachraum. B_1 relativ kompakt <=>
1. B_1,v = {f(v): f in B_1} ist relativ kompakt
2. B_1 ist punktweise gleichgradig stetig

2. Sei $x \in [0,1]$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{\max(c,1)}\right)^2$

OE $\varepsilon < 1$

$\forall y \in B_\delta(x)$: $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot \|x-y\|^a \leq c \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\max(c,1)}\right)^{2a} < \varepsilon^{2a} < \varepsilon$

1. $B_{1,x} = \{f(x) : f \in B_1^V\} \leq \sup_{x \in [0,1]} f(x) \leq 1 \quad \forall x$

$\Rightarrow B_{1,x}$ beschränkt $\Rightarrow B_{1,x}$ relativ kompakt $\square$

Aufgabe 8.2 4 Punkte

[2+2 Punkte]

Seien X, Y Banachräume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt *beschränkt von unten*, falls ein $c > 0$ existiert, sodass

$$\|Tx\| \geq c\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(a) Ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ von unten beschränkt, so ist $\mathrm{im}(T) \subset Y$ abgeschlossen.

Sei y_n eine Folge in $\mathrm{im}(T)$ mit Lim $y \in Y$.

$\left(0 = \|Tx\| \geq c \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \right) \Rightarrow \ker T = \{0\}$

Zu jedem y_n $\exists!\, x_n \in X$: $Tx_n = y_n$ (da $\ker T = 0$, LA1).

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CF $\Rightarrow \forall \varepsilon \exists N$: $\|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon$ $\forall n,m > N$

$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c} \cdot \|T(x_n - x_m)\| = \frac{1}{c} \cdot \|Tx_n - Tx_m\| < \frac{\varepsilon}{c}$ $\forall n,m > N$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C.F. $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt Grenzwert $x \in X$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - Tx\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|Tx_n - Tx\| = \lim\limits_{n\to\infty} T\|x_n - x\|$

$= T \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = T(0) = 0$

$\Rightarrow Tx$ ist Grenzwert von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $Tx \in \mathrm{im}(T) \Rightarrow \mathrm{im}(T)$ abg.

(b) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X,X)$ ist invertierbar genau dann, wenn T von unten beschränkt ist und $\mathrm{im}(T) \subset Y$ dicht liegt.

* (a) $\Rightarrow$ $\mathrm{im}(T)$ ist abg und dicht $\Rightarrow$ $\mathrm{im}(T) = X \Rightarrow T$ surjektiv

* Beweis von (a) $\Rightarrow$ $\ker(T) = 0 \Rightarrow T$ injektiv

$\Rightarrow T$ bijektiv.

Nach Korollar 3.24 ist die Umkehrabbildung stetig und somit T invertierbar.

Aufgabe 8.3 4 Punkte

[1.5 + 1 + 1.5 Punkte]

Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein linearer Operator.

(a) Zeigen Sie, dass T stetig ist, falls

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \forall\, x, y \in H. \tag{2}$$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ eine Nullfolge in H, sodass $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} y \in H$.

Sei außerdem x in H beliebig. Dann gilt $\langle y, x\rangle = 0$:

$$= \langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, x\rangle \overset{\text{Stetigkeit}\langle,\rangle}{=} \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Tx\rangle$$

$$\overset{\text{Stetigkeit}\langle,\rangle}{=} \langle \lim_{n\to\infty} x_n, Tx\rangle = \langle 0, Tx\rangle = 0$$

Diese Gleichung gilt für alle x in H. Daher ist y = 0. Nach Lemma 3.30 ist T damit abgeschlossen. H ist ein Hilbertraum und damit\
insbesondere ein Banachraum. Daher folgt mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen die Stetigkeit von T.

Nehmen Sie nun an, dass T stattdessen die folgende Bedingung erfülle

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \qquad \forall\, x \in H \tag{3}$$

b) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass T Bedingung (2) erfüllt und somit stetig ist.

$$4\langle Tx, x\rangle = \|Tx+x\|^2 - \|Tx-x\|^2 - i\,\|Tx+ix\|^2 + i\,\|Tx-ix\|^2$$

Es gilt $\|Tx - ix\|^2 = \|Tx + ix\|^2$

$$\Leftrightarrow \langle Tx-ix, Tx-ix\rangle = \langle Tx+ix, Tx+ix\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle Tx, -ix\rangle + \langle -ix, Tx\rangle + \langle -ix, -ix\rangle = \langle Tx, ix\rangle + \langle ix, Tx\rangle + \langle ix, ix\rangle$$

$$\Leftrightarrow -\overline{(-\langle ix, ix\rangle)} = 2\left(\langle Tx, ix\rangle + \overline{\langle Tx, ix\rangle}\right) + i\langle ix, x\rangle$$

$$\Leftrightarrow \overline{i\langle ix, x\rangle} = 2\left(i\langle Tx, x\rangle + \overline{i\langle Tx, x\rangle}\right) + i\,\overline{i\langle x, x\rangle}$$

$$\Leftrightarrow -i\cdot\langle x, ix\rangle = 2\left(i\langle Tx, x\rangle - i\langle Tx, x\rangle\right) + \langle x, x\rangle$$

$$\Leftrightarrow \langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle \qquad \checkmark$$

$$\Rightarrow \langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}.$$

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \|Tx + x\|^2 \geq \|Tx - x\|^2$$

$$\langle Tx+x, Tx+x\rangle \geq \langle Tx-x, Tx-x\rangle$$

$\Leftrightarrow$ $\langle Tx, x\rangle + \langle x, Tx\rangle + \langle x,x\rangle \geq \langle Tx, -x\rangle + \langle -x, Tx\rangle + \langle -x,-x\rangle$

$\Leftrightarrow$ $3\langle x, Tx\rangle + \langle x,x\rangle \geq \overline{\langle Tx,-x\rangle} - \overline{\langle x,-x\rangle}$

$\qquad \geq -\langle x, Tx\rangle + \langle x,x\rangle$

$\Leftrightarrow$ $\langle Tx, x\rangle \geq 0$

2.2. $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

2.22. $\langle Tx, y\rangle \geq \langle x, Ty\rangle$

$\mathrm{Re}\,\langle x, Ty\rangle \leq \mathrm{Re}\,\langle x, Tx+Ty\rangle + \langle y, Ty\rangle + \mathrm{Re}\,\langle y, Tx\rangle - \mathrm{Re}\,\langle y, Tx\rangle$

$\qquad = \mathrm{Re}\,\langle x+y, T(x+y)\rangle - \mathrm{Re}\,\langle y, Tx\rangle$

$\langle x-y, Tx-Ty\rangle \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\langle x, Tx\rangle + \langle -y, Tx\rangle + \langle x, -Ty\rangle + \langle -y, -Ty\rangle \geq 0$

$$4\langle Tx, y\rangle = \|Tx+y\|^2 - \|Tx-y\|^2 - i\|Tx+iy\|^2 + i\|Tx-iy\|^2$$
$$4\langle x, Ty\rangle = \|x+Ty\|^2 - \|x-Ty\|^2 - i\|x+iTy\|^2 + i\|x-iTy\|^2$$

2.2: $\langle Tx+y, Tx+y\rangle + \langle x-Ty, x-Ty\rangle = \langle x+Ty, x+Ty\rangle + \langle Tx-y, Tx-y\rangle$

$\|Tx+x\|^2 \geq \|Tx-x\|^2$

$\|Tx+Ty+x+y\|^2 \geq \|Tx+Ty-x-y\|^2$

$\Leftrightarrow$ $\langle T(x+y), x+y\rangle \geq \langle T(x+y), -(x+y)\rangle$
$+ \langle x+y, T(x+y)\rangle \qquad + \langle -(x+y), T(x+y)\rangle$

c) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass T stetig ist aber im Allgemeinen (2) nicht erfüllt.

Aufgabe 8.4 4 Punkte

Seien $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ zwei Banachräume und $T \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $\operatorname{im}(T)$ abgeschlossen und $\dim \ker(T) < \infty$. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf V, die von $\|\cdot\|_V$ dominiert wird, d.h. es existiert eine Konstante $M > 0$, sodass $\|x\| \leq M\|x\|_V$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass dann ein $C > 0$ existiert, sodass

$$\|x\|_V \leq C(\|Tx\|_W + \|x\|) \qquad \forall x \in V.$$

Hinweis: Argumentieren Sie per Widerspruch und schauen Sie sich den Beweis von der offenen Abbildung noch einmal an.

$V \xrightarrow{T} \operatorname{in}(T) \overset{\text{abg.}}{\subset} W \Rightarrow \operatorname{im}(T)$ Banach

$\dim \ker(T) < \infty$

$\|x\|_V \leq C(\|Tx\|_W + \|x\|)$

$\tilde{T}: V \twoheadrightarrow \operatorname{in}(T) \Rightarrow \tilde{T}$ offen

Angenommen, $\forall C > 0\ \exists x: \ \|x\|_V > C\cdot(\|Tx\|_W + \|x\|)$, $x \neq 0$

OE $\|x\|_V = 1$

$\left(\text{Sonst } x = \frac{x}{\|x\|_V}: \ \left\|\frac{x}{\|x\|_V}\right\|_V > C\cdot\left(\left\|T\frac{x}{\|x\|_V}\right\|_W + \frac{\|x\|}{\|x\|_V}\right)\right)$

$C\|x\| < \|x\|_V$
$\|x\| \leq M\|x\|_V$

$\forall C > 0\ \exists x: \|x\|_V = 1, \ \|x\| < \frac{1}{C}, \ \|Tx\|_W < \frac{1}{C}$

$\forall\ C > \frac{1}{\delta}$

$\Rightarrow Tx \in B_\delta(0_W) \subset T(B_1(0_V))$

$\Rightarrow \exists x^{(1)} \in B_1(0_V)$ mit $Tx^{(1)} = Tx \Rightarrow x' - x \in \ker T.$

$\|x^{(1)}\| = s_1 \qquad \left\|T\frac{x_1}{s_1}\right\|_W < \frac{\delta}{s_1}$

$\forall C > 0\ \exists x \in V, \|x\|_V = 1: \|x\|_V > C\cdot\|x\|$, i.e. $\|x\| < \frac{1}{C}$, d.h. $x \in \underset{\substack{\shortparallel \\ \{x \in V: \|x\| < \frac{1}{C}\}}}{\Omega_{1/C}}$ offen

Angenommen $\forall c > 0 \; \exists x: \|x\|_V = 1, \; \|x\| < \frac{1}{c}, \quad \|Tx\|_W = 0$

Für $c_n = n$ wähle $x_n \in \ker T$ s.t. $\|x_n\| < \frac{1}{n}$.

$\xRightarrow{\ker T \text{ kompakt}}$ $\exists$ konvergente TF x_{n_k} mit $\bar{x} = \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \in \ker T$,

$\|\bar{x}\| = 0 \Rightarrow x = 0$ ↯

$$\bigcap_n \left\{ x \in V, \|x\|_V = 1, \|Tx\|_W < \frac{1}{n} \right\}$$