Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 1 — 24. April 2020

Abgabe bis Fr. 01.05.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Da uns Eure Abgabegruppen noch nicht bekannt sind, müssen in dieser Woche **beide** Gruppenmitglieder die Lösung in Moodle einreichen.
- Gebt bitte klar erkennbar auf Eurer Lösung an mit wem Ihr gemeinsam abgebt, damit wir anhand dessen die Abgabegruppen in Moodle erstellen können und anschließend nur noch eine Person pro Abgabegruppe in Moodle abgeben muss!

Themen:

- Integration
- Uneigentliche Integrale
- Funktionenfolgen
- Gleichmäßige Konvergenz

Aufgabe 1.1 (6 Punkte): Integralberechnung

Man bestimme die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\left|x\sqrt{|x\sqrt{x}|}\right|}\mathrm{d}x$ 1

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^x\left(1-x+x^2\right)\mathrm{d}x$ 1

(c) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}x^3\mathrm{d}x$ 2

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$ 2

Bemerkung: Bei (c) und (d) hilft geschicktes Substituieren ggf. weiter.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten zunächst den Integrand für beliebiges $x \in [0,1]$. Wegen $x \geq 0$ gelten insbesondere $|x| = x$ und $\sqrt{|x|} = \sqrt{x}$. Daher gilt

$$\sqrt{\left|x\sqrt{|x\sqrt{x}|}\right|} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \left(x\left(xx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(xx^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}}.$$

Also gilt für das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{\left|x\sqrt{|x\sqrt{x}|}\right|}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{7}{8}}\mathrm{d}x = \left[\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}\right]_{x=0}^1 = \frac{8}{15} - 0 = \frac{8}{15}.$$

(b) Zunächst gilt wegen der Linearität des Integrals

$$\int_0^1 e^x\left(1 - x + x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(e^x - e^x x + e^x x^2\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 e^x \mathrm{d}x - \int_0^1 e^x x \mathrm{d}x + \int_0^1 e^x x^2 \mathrm{d}x = e - 1 - \int_0^1 e^x x \mathrm{d}x + \int_0^1 e^x x^2 \mathrm{d}x.$$

Die zwei verbliebenen Integrale lösen wir durch partielle Integration. Dadurch erhalten wir für das erste Integral

$$\int_0^1 e^x x \mathrm{d}x = [e^x x]_{x=0}^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e - (e-1) = 1$$

und für das zweite Integral

$$\int_0^1 e^x x^2 \mathrm{d}x = \left[e^x x^2\right]_{x=0}^1 - \int_0^1 e^x 2x \mathrm{d}x = e - 2\int_0^1 e^x x \mathrm{d}x = e - 2,$$

wobei die letzte Gleichheit aus der vorherigen Rechnung folgt. Insgesamt gilt also

$$\int_0^1 e^x\left(1 - x + x^2\right)\mathrm{d}x = e - 1 - \int_0^1 e^x x \mathrm{d}x + \int_0^1 e^x x^2 \mathrm{d}x$$
$$= e - 1 - 1 + e - 2 = 2e - 4.$$

(c) Zum Substituieren definieren wir zunächst die Funktion

$$s\colon\ [0,1] \to [0,1]\,,\ x \mapsto x^2.$$

Offensichtlich ist s stetig differenzierbar (Voraussetzung für Substitutionsregel) mit Ableitung $s'(x) = 2x$ für alle $x \in [0,1]$. Daher gilt:

$$e^{x^2}x^3 = e^{x^2}x^2 x = \frac{1}{2}e^{x^2}x^2 2x = \frac{1}{2}e^{s(x)}s(x)\,s'(x)\,.$$

Wie in Aufgabenteil (b) mittels partieller Integration eingesehen, gilt

$$1 = \int_0^1 e^u u \mathrm{d}u.$$

Daher folgt nun mittels Substitutionsregel

$$\int_0^1 e^{x^2}x^3 \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{s(x)}s(x)\,s'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{s(x)}s(x)\,s'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_{s(0)}^{s(1)} e^u u \mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u u \mathrm{d}u = \frac{1}{2}.$$

(d) Sei zunächst $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ beliebig. Dann gilt $\cos(x) > 0$, weshalb der Integrand wohldefiniert ist, und die Ableitung des Tangens ist gegeben durch

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Weiterhin gilt $\tan(\pi/4) = 1$, da $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Daher folgt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan'(x)\, x \mathrm{d}x = [\tan(x)\, x]_{x=0}^{\pi/4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Sei nun wieder $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ beliebig. Dann liefert $\cos'(x) = -\sin(x)$ die Darstellung

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}$$

des Tangens. Weiterhin gilt

$$\cos(x) \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right],$$

weil cos auf $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ monoton fallend ist und $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Daher wählen wir für die Substitution die Funktion

$$s\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right], \; x \mapsto \cos(x).$$

s ist stetig differenzierbar (Voraussetzung für Substitutionsregel) und erfüllt nach obiger Rechnung

$$\tan(x) = -\frac{s'(x)}{s(x)} = -\frac{1}{s(x)} s'(x).$$

Daher berechnen wir das Integral

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{u} \mathrm{d}u &= \log(1) - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\log(1) - \log\left(\sqrt{2}\right)\right) \\ &= \log\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\log(2)}{2}.\end{aligned}$$

Also gilt nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} \mathrm{d}x &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{s(x)} s'(x)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} + \int_{s(0)}^{s\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{u} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} + \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{u} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} - \frac{\log(2)}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.2 (6 Punkte): Weitere Eigenschaften von Integralen

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi, \psi : [c, d] \to [a, b]$ differenzierbar. Man zeige, dass dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) \mathrm{d}t = f(\psi(x))\, \psi'(x) - f(\varphi(x))\, \varphi'(x), \quad x \in [c, d].$$ 3

Tipp: Hauptsatz d. Differential- und Integralrechnung (Analysis 1, Satz 6.10) und Kettenregel.

(b) Eine wichtige Ungleichungen in der Mathematik ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU)[1]. Diese besagt im eindimensionalen Fall:
Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt

$$\text{(CSU)} \quad \left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x \right|^2 \leq \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)^2 \mathrm{d}x.$$

<u>Aufgabe</u>: Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(a) = 0$. Man zeige mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int_a^b \left| f(x) f'(x) \right| \mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x)^2 \mathrm{d}x.$$ 3

Tipp: Man nutze $(f^2)' = 2f'f$ und überlege sich, welche Eigenschaften $G(x) := \int_a^x |f'(t)|\, dt,\ x \in [a, b]$ hat und wie man $G(x)$ hier nutzen kann.

<u>Lösungsvorschlag:</u>

(a) Da f stetig auf einem Kompaktum ist, ist f insbesondere integrierbar. Nach dem HDI (Analysis 1, Satz 6.10) ist die Funktion

$$F\colon\ [a, b] \to \mathbb{R},\ y \mapsto \int_a^y f(t)\, \mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von f, das heißt für alle $y \in [a, b]$ gilt $F'(y) = f(y)$. Somit folgt für alle $x \in [c, d]$ die gewünschte Gleichung

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\int_a^{\psi(x)} f(t)\, \mathrm{d}t - \int_a^{\varphi(x)} f(t)\, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(F(\psi(x)) - F(\varphi(x)) \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(\psi(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(\varphi(x)) \\
&= f(\psi(x))\, \psi'(x) - f(\varphi(x))\, \varphi'(x),
\end{aligned}$$

wobei wir nacheinander die Linearität des Integrals, die Definition von F, die Linearität des Differentialoperators $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ und die Kettenregel angewandt haben.

(b) Da die Betragsfunktion stetig und f stetig differenzierbar ist, ist auch $|f'|$ stetig auf dem Kompaktum $[a, b]$. Daher ist $|f'|$ integrierbar und wir können definieren

$$G\colon\ [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x \left| f'(t) \right| \mathrm{d}t$$

Mit der Voraussetzung $f(a) = 0$, dem HDI und der Dreiecksungleichung für Integrale folgt also

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| = \left| \int_a^x f'(t)\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^x \left| f'(t) \right| \mathrm{d}t = G(x).$$

Sei $x \in [a, b]$ beliebig. Nach der Produktregel gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(G(x)^2 \right) = G'(x)\, G(x) + G(x)\, G'(x) = 2G(x)\, G'(x)$$

[1] Keine Sorge, natürlich darf diese schöne Ungleichung mit dieser einprägsamen Abkürzung auch bei uns noch eine größere Rolle als nur diese Gastrolle auf dem Übungsblatt spielen. Sie wird uns in Kapitel 2 in diesem Semester in ihrer verallgemeinerten Form wieder begegnen.

Weiterhin gilt $G'(x) = |f'(x)|$ nach dem HDI und offenbar gilt auch $G(a) = 0$. Daher folgt nun

$$\begin{aligned}
&2\int_a^b \left|f(x)\,f'(x)\right| \mathrm{d}x = 2\int_a^b |f(x)|\,G'(x)\,\mathrm{d}x \leq 2\int_a^b G(x)\,G'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b 2G(x)\,G'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(G(x)^2\right)\right)\mathrm{d}x \overset{\text{HDI}}{=} G(b)^2 - G(a)^2 = G(b)^2 \\
&= \left(\int_a^b \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_a^b 1\left|f'(t)\right| \mathrm{d}t\right)^2 \overset{\text{CSU}}{\leq} \int_a^b 1^2 \mathrm{d}t \int_a^b \left|f'(t)\right|^2 \mathrm{d}t \\
&= (b-a)\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

was die zu zeigende Ungleichung

$$\int_a^b \left|f(x)\,f'(x)\right| \mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

impliziert.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte): Funktionenfolgen und Integration

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{n^2 x}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Man zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Satz 1.3.1 (Analysis 2)? Beweisen Sie Ihre Antwort. 4

Tipp: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass f_n an der Stelle $x^* = 1/\left(\sqrt{3}n\right)$ maximal wird mit $f(x^*) = \frac{\sqrt{27}n}{16}$. (Ihr solltet allerdings in der Lage sein, dies selbst herzuleiten, und es ggf. wiederholen, falls Ihr es nicht mehr wisst.)

Lösungsvorschlag:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann definieren wir die Funktion $s_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + n^2x^2$. Dann ist s_n stetig differenzierbar mit Ableitung $s_n'(x) = 2n^2x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiterhin gelten $s_n(0) = 1$ und $s_n(1) = 1 + n^2$. Daher folgt mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{n^2x}{\left(1+n^2x^2\right)^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(1/2)\,s_n'(x)}{s_n(x)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 s_n(x)^{-2}\,s_n'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{1+n^2} u^{-2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[-u^{-1}\right]_{u=1}^{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{-\frac{1}{1+n^2}}_{\to 0} + 1\right) \to \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

wobei der Limes für $n \to \infty$ betrachtet wird. Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Weiterhin für $n \to \infty$ gilt dann allerdings auch

$$f_n(x) = \frac{n^2x}{\left(1+n^2x^2\right)^2} = \frac{n^2x}{1+2n^2x^2+n^4x^4} = \frac{x}{1/n^2+2x^2+n^2x^4} \to 0.$$

Damit folgt die Behauptung wegen

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(x\right)=\frac{1}{2}\neq 0=\int_0^1 0\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Dass der Limes und das Integral in diesem Fall nicht vertauschen, steht nicht im Widerspruch zu Satz 1.3.1, denn die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion auf $[0,1]$. Um das zu beweisen, sei $\varepsilon>0$ fest. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $n\geq 4\varepsilon$ die Abschätzung

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{3}n}\right)-0\right|=\left|\frac{n^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}n}\right)}{1+2n^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}n}\right)^2+n^4\left(\frac{1}{\sqrt{3}n}\right)^4}\right|=\frac{\frac{n}{\sqrt{3}}}{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{n}{\frac{16}{9}\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{3}}\frac{n}{16}=\sqrt{27}\frac{n}{16}\geq\frac{\sqrt{27}}{16}4\varepsilon=\frac{\sqrt{27}}{4}\varepsilon=\sqrt{\frac{27}{16}}\varepsilon>\varepsilon.$$

Da $\frac{1}{\sqrt{3}n}\in[0,1]$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt, kann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig konvergieren.

Aufgabe 1.4 (4 Punkte): Uneigentliche Integrale und Funktionenfolgen

Für $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x):=\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}},\quad x\geq 0.$$

Man zeige, dass die Funktionfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, aber

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_0^\infty\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Satz 1.3.1 (Analysis 2)? 4

Lösungsvorschlag:

Fixiere eine beliebige reelle Zahl $x\geq 0$. Dann ist $e^{-x}>0$ und daher gilt

$$\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{x}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-x}}=1.$$

Da auch $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist (mit Grenzwert 0), folgt aus den Grenzwertsätzen (Analysis 1) unmittelbar

$$\lim_{n\to\infty}f_n\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{x}{n}}\right)=0\cdot 1=0.$$

Somit haben wir gezeigt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert. Um zu zeigen, dass diese Konvergenz auch gleichmäßig ist, beachte $x\geq 0$. Daher gilt insbesondere $e^x\geq 1$ und somit auch $\sqrt[n]{e^x}\geq 1$, da sowohl exp als auch $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ auf $[0,\infty)$ monoton steigend sind und da $e^0=1$ und $\sqrt[n]{1}=1$ gelten. Also folgt

$$\left|f_n\left(x\right)\right|=\left|\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\right|=\frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt[n]{e^x}}\leq\frac{1}{n}.$$

Sei nun $\varepsilon>0$ beliebig. Wir setzen $N=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}+1\right\rceil\in\mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n\geq N$ und alle $x\geq 0$ die Abschätzung

$$\left|f_n\left(x\right)-0\right|=\left|f_n\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{n}\leq\frac{1}{N}\leq\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}+1}<\varepsilon.$$

Daher konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig gegen die Nullfunktion.
Als nächstes zeigen wir die behauptete Ungleichung der Aufgabenstellung. Zunächst einmal wissen wir, dass

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty 0\mathrm{d}x = 0$$

gilt, da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Nullfunktion konvergiert. Allerdings gilt für die andere Seite der behaupteten Ungleichung

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-\frac{x}{n}}\right]_{x=0}^b$$
$$= \lim_{n\to\infty}\lim_{b\to\infty}\left(1-e^{-\frac{b}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\underbrace{\lim_{b\to\infty} e^{-\frac{b}{n}}}_{=0}\right) = 1.$$

Daher folgt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \neq 0 = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Abschließend stellen wir fest, dass dies nicht im Widerspruch zu Satz 1.3.1 steht, da dieser keine uneigentlichen Integrale behandelt. Satz 1.3.1 deckt lediglich Integrale über kompakte Intervalle $[a,b]$ mit $-\infty < a \leq b < \infty$ ab.

Bonusaufgabe 1.5 (2 Bonuspunkte): Stammfunktionen

Man berechne die Stammfunktionen

$$\int \cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x.$$

Lösungsvorschlag:
Zur Lösung dieser Aufgabe gibt es zwei äquivalente Lösungswege, die auch analog verlaufen, da man sowohl den Faktor $\sin(x)$ als auch den Faktor $\cos(x)$ substituieren kann. Wir stellen im folgenden beide Lösungswege dar.

1. Zunächst halten wir das offensichtliche Integral

$$\int \mathrm{id}(u)\,\mathrm{d}u = \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C$$

fest, weil wir es später verwenden werden. Hierbei ist $C\in\mathbb{R}$ beliebig. Weiter wählen wir als Substitutionsfunktion

$$s\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \sin(x).$$

s ist stetig differenzierbar mit $s'(x) = \cos(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Daher folgt mithilfe der Substitutionsregel für unbestimmte Integrale (angewandt auf die Identität und Substitutionsfunktion s)

$$\int \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int s(x)\,s'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \mathrm{id}(s(x))\,s'(x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{id}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C.$$

Daher ist die Menge aller Stammfunktionen der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ gegeben durch

$$\left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\sin^2(x) + C \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. In dieser Variante, halten wir zunächst das offensichtliche Integral

$$-\int \mathrm{id}(u)\,\mathrm{d}u = -\int u\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u^2 + C$$

fest. Hierbei ist $C \in \mathbb{R}$ wieder beliebig. Weiter wählen diesmal als Substitutionsfunktion

$$s \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x).$$

Auch hier ist s stetig differenzierbar mit $s'(x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher folgt mithilfe der Substitutionsregel für unbestimmte Integrale (angewandt auf die Identität und Substitutionsfunktion s)

$$\begin{aligned}&\int \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -\int \cos(x)(-\sin(x))\,\mathrm{d}x = -\int s(x)\,s'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \mathrm{id}(s(x))\,s'(x)\,\mathrm{d}x = -\int \mathrm{id}(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u^2 + C = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C.\end{aligned}$$

Daher ist die Menge aller Stammfunktionen der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ gegeben durch

$$\left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wollen an dieser Stelle noch klären, warum die beiden Mengen von Stammfunktionen übereinstimmen. Dafür erinnern wir uns aus Analysis 1 an die trigonometrische Pythagoras-Gleichung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, welche für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Diese lässt sich umstellen zu $\sin^2(x) = -\cos^2(x) + 1$. Insbesondere folgt also

$$\frac{1}{2}\sin^2(x) = -\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher folgt die gewünschte Gleichheit von Mengen

$$\begin{aligned}&\left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}\sin^2(x) + C \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{2}\cos^2(x) + \frac{1}{2} + C \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\},\end{aligned}$$

da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $C \mapsto C + 1/2$ offenbar eine Bijektion ist (die inverse Abbildung ist $C \mapsto C - 1/2$).
