Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 7

Besprechung in den Übungsgruppen am 2. Dezember 2019

1. *Hausaufgabe:* Bewegung in r^{-n}-Kraftfeldern

Zentralkraftfelder der Form

$$\vec{F}_n(x,y,z) = -\frac{A_n}{r^n}\,\vec{e}_r \qquad \text{mit} \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \vec{e}_r = \frac{\vec{x}}{r} \quad \text{und} \quad A_n = \text{konst.}$$

spielen in vielen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle. Einige Beispiele sind die Gravitationskraft und die Coulombkraft eines ruhenden geladenen Teilchens mit $n = 2$. Durch $n = 13$ kann die Abstoßung zweier Atome beschrieben werden, die sich sehr nahe kommen (hier wird A_n negativ) und $n = 7$ modelliert die anziehende van-der-Waals-Kraft zwischen Atomen.

a) Zeigen Sie für $n \geq 2$, dass

$$V_n(x,y,z) = -\frac{A_n}{(n-1)\,r^{n-1}}$$

die potentielle Energie des Kraftfelds $\vec{F}_n$ ist.

b) Die A_n sollen nun derart gewählt werden, dass die potentiellen Energien V_n bei einem Skalenradius $r = R$ alle denselben Wert besitzen. Geben Sie dafür die A_n und die potentiellen Energien V_n in Abhängigkeit von $A_2 \equiv A > 0$ an und skizzieren Sie die potentiellen Energien für $n \in \{2,3,4\}$.

c) Formulieren Sie den Energiesatz für die Bewegung eines Teilchens mit diesen potentiellen Energien.

d) Betrachten Sie das Kraftfeld mit $n = 2$. Welche Geschwindigkeit $|\vec{v}_0|$ erreicht ein Teilchen bei $r = r_0$, wenn es zunächst im Unendlichen ruht und von dort aus startet? In welche Richtung zeigt die Geschwindigkeit? Wie lautet somit die vektorielle Geschwindigkeit $\vec{v}_0$?

e) Betrachten Sie nun das Kraftfeld mit $n = 3$, in dem ein Teilchen bei $r = r_0$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = |\vec{v}_0|\,\vec{e}_r$ startet, wobei r_0 und $|\vec{v}_0|$ die Größen aus d) sind. Kann das Teilchen unendliche Entfernungen erreichen? Falls nein, bei welchem Radius r_e kehrt es um? Falls ja, welche Geschwindigkeit $\vec{v}_\mathrm{e}$ hat es im Unendlichen? Unterscheiden Sie $r_0 < R$, $r_0 = R$ und $r_0 > R$.

2. *Hausaufgabe:* Zweikörperproblem

Ein System zweier Massen m_1 und m_2, die durch eine masselose Stange der Länge l verbunden sind (Hantel), bewege sich im Schwerefeld der Erde.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes $\vec{X}(t)$ auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $\vec{X}(0) = 0$ und $\dot{\vec{X}}(0) = \vec{V}_0$.

b) Zeigen Sie, dass sich der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}(t)$ in einen Schwerpunkt- und einen Relativanteil zerlegen lässt,

$$\vec{L}(t) = \vec{L}_\mathrm{s}(t) + \vec{L}_\mathrm{r}(t) = M\vec{X}(t) \times \dot{\vec{X}}(t) + \mu\vec{x}(t) \times \dot{\vec{x}}(t),$$

wobei $M \equiv m_1 + m_2$ die Gesamtmasse ist, $\mu \equiv m_1 m_2/(m_1+m_2)$ die reduzierte Masse und $\vec{x}(t)$ die Relativkoordinate. Berechnen Sie explizit den Schwerpunktanteil $\vec{L}_\mathrm{s}(t)$.

c) Wie lautet die Bewegungsgleichung der Relativkoordinate $\vec{x}(t)$? Ist der Relativdrehimpuls $\vec{L}_\mathrm{r}(t)$ zeitlich erhalten?

3. ***Präsenzaufgabe:*** **Potential eines Kraftfelds und Kurvenintegrale**

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F} = (x\,\mathrm{e}^z, y\,\mathrm{e}^z, z)^\top$.

a) Skizzieren Sie das Feld in der x-z-Ebene.

b) Besitzt das Feld ein Potential?

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve ∂S, die in einer Ebene parallel zur x-y-Ebene eingebettet ist. Verwenden Sie hierfür den Stokes'schen Satz.

4. **Verständnisfragen**

a) Erläutern Sie mit eigenen Worten den Zusammenhang der folgenden Aussagen:
   - Das Kurvenintegral über das Kraftfeld $\vec{F}$ ist wegunabhängig.
   - $\vec{F}$ ist konservativ.
   - $\vec{F}$ ist wirbelfrei.

b) Was besagt der Satz von Stokes?

c) Unter welchen Voraussetzungen haben die inneren Kräfte zwischen Massenpunkten keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts?

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 7: Lösungen

1. Hausaufgabe: Bewegung in r^{-n}-Kraftfeldern

a) Die potentielle Energie ist gerade so definiert, dass der negative Gradient der potentiellen Energie gerade die Kraft ergibt. Demnach ist für $n \geq 2$

$$\vec{F}'_n = -\vec{\nabla} V_n = \vec{\nabla} \frac{A_n}{(n-1)\, r^{n-1}} = \frac{A_n}{n-1} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-(n-1)/2}$$
$$= \frac{A_n}{n-1} \left(-\frac{n-1}{2}\right) \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-(n+1)/2} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = -\frac{A_n}{r^{n+1}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{A_n}{r^n} \vec{e}_r .$$

Die Kraft $\vec{F}'_n$ stimmt mit der Kraft $\vec{F}_n$ auf dem Aufgabenblatt überein. Somit ist V_n die potentielle Energie zur Kraft $\vec{F}_n$.

b) Da die potentiellen Energien bei $r = R$ übereinstimmen sollen, gilt mit $A \equiv A_2$

$$V_n(R) \overset{!}{=} V_2(R) \quad \Rightarrow \quad -\frac{A_n}{(n-1)\, R^{n-1}} \overset{!}{=} -\frac{A}{R}$$

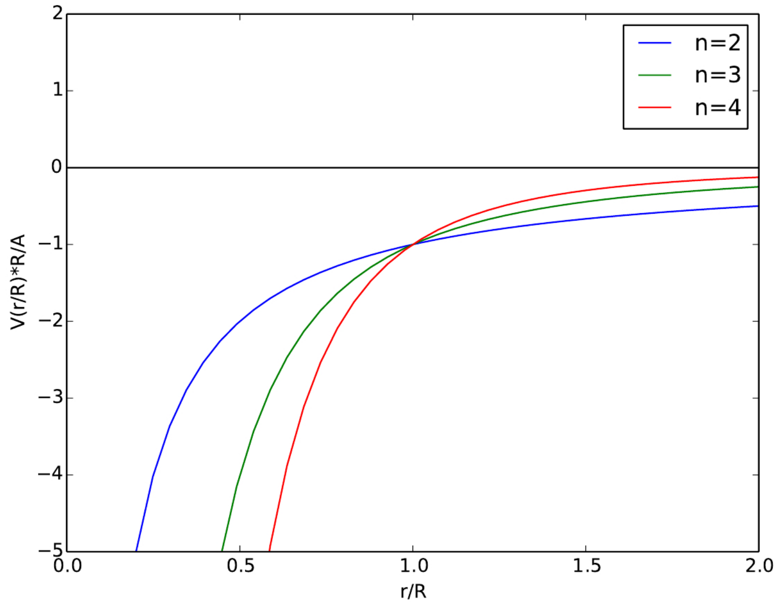
und somit

$$A_n = A\,(n-1)\, R^{n-2} .$$

Für die potentielle Energie V_n gilt somit

$$V_n(r) = -\frac{A R^{n-2}}{r^{n-1}} .$$

Die potentiellen Energien für $n = 2$, $n = 3$ und $n = 4$ sehen folgendermaßen aus:



c) Für die Bewegung eines Teilchens der Masse m mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ mit diesen potentiellen Energien gilt

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{AR^{n-2}}{r^{n-1}} = \text{konst.}$$

d) Ein Teilchen, das im Unendlichen ruht, hat die Energie $E = 0$, da sowohl die kinetische als auch die potentielle Energie verschwinden. Bewegt es sich nun für $r < \infty$, so muss seine Energie erhalten bleiben, also muss gemäß c) für $n = 2$ gelten, dass

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 - \frac{A}{r_0} \stackrel{!}{=} 0$$

beim Radius r_0. Somit ergibt sich der Betrag der Geschwindigkeit von $\vec{v}_0$ zu

$$|\vec{v}_0| = \sqrt{\frac{2A}{mr_0}}.$$

Da das Teilchen zu Beginn keine Anfangsgeschwindigkeit hat, zeigt die Geschwindigkeit radial nach innen, und zwar entlang des Kraftfeldes bzw. des negativen Gradienten der potentiellen Energie. Somit ist die vektorielle Geschwindigkeit

$$\vec{v}_0 = -\sqrt{\frac{2A}{mr_0}}\,\vec{e}_r.$$

e) Startet das Teilchen beim Radius r_0 mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}_0|\,\vec{e}_r$, so hat es im Kraftfeld mit $n = 3$ die Energie

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_0^2 - \frac{AR}{r_0^2} = \frac{A}{r_0} - \frac{AR}{r_0^2},$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass gemäß d) ja $|\vec{v}_0| = \sqrt{2A/(mr_0)}$ ist. Aufgrund von Energieerhaltung muss zu jeder Zeit gelten, dass

$$\frac{1}{2}m\vec{v}^2 - \frac{AR}{r^2} = \frac{A}{r_0} - \frac{AR}{r_0^2}.$$

Aufgelöst nach $\vec{v}^2$ ergibt dies

$$\vec{v}^2 = \frac{2A}{mr_0} - \frac{2AR}{mr_0^2} + \frac{2AR}{mr^2} = \frac{2A\,(r_0 - R)\,r^2 + 2ARr_0^2}{mr_0^2r^2}.$$

Die Geschwindigkeit beim Radius r_e ist null, wenn der Zähler verschwindet, sodass dann also

$$2A\,(r_0 - R)\,r_\mathrm{e}^2 + 2ARr_0^2 \stackrel{!}{=} 0$$

sein muss. Auflösen nach r_e ergibt

$$r_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{R}{R - r_0}}\,r_0.$$

Für $r_0 < R$ ist dieser Wert reell, das Teilchen kehrt also bei dem endlichen Radius r_e wieder um. Für $r_0 = R$ ist $r_\mathrm{e} \to \infty$, das Teilchen kommt also erst im Unendlichen zur Ruhe. Für $r_0 > R$ wird r_e imaginär, es existiert also keine reelle Lösung für r_e, sodass das Teilchen ins Unendliche entkommen kann. Im Unendlichen verschwindet die potentielle Energie, sodass sich dann aus dem Energiesatz

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_\mathrm{e}^2 = \frac{A}{r_0} - \frac{AR}{r_0^2}$$

ergibt, dass der Betrag der Geschwindigkeit im Unendlichen durch

$$|\vec{v}_\mathrm{e}| = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{2A\,(r_0 - R)}{m}}$$

gegeben ist und somit die vektorielle Geschwindigkeit

$$\vec{v}_\mathrm{e} = \frac{1}{r_0}\sqrt{\frac{2A\,(r_0 - R)}{m}}\,\vec{e}_r$$

ist. Die Geschwindigkeit hat, wie zu erwarten, reelle Werte für $r_0 \geq R$ und den Grenzfall $|\vec{v}_\mathrm{e}| = 0$ für $r_0 = R$.

2. *Hausaufgabe:* Zweikörperproblem

a) Man betrachtet zunächst die Bewegungsgleichungen der einzelnen Massenpunkte m_1 und m_2,

$$m_1\ddot{\vec{x}}_1(t) = -m_1 g\,\vec{e}_z + \vec{F}_{21}(t) \qquad \text{und} \qquad m_2\ddot{\vec{x}}_2(t) = -m_2 g\,\vec{e}_z + \vec{F}_{12}(t), \tag{I}$$

wobei die inneren Kräfte

$$\vec{F}_{12}(t) = -\vec{F}_{21}(t) \tag{II}$$

die feste Verbindung zwischen den beiden Massenpunkten garantieren. Die Schwerpunktkoordinate ist durch

$$\vec{X}(t) \equiv \frac{m_1\vec{x}_1(t) + m_2\vec{x}_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\vec{x}_1(t) + m_2\vec{x}_2(t)}{M} \tag{III}$$

mit der Gesamtmasse $M \equiv m_1 + m_2$ definiert. Die Bewegungsgleichung des Schwerpunktes lautet damit

$$M\ddot{\vec{X}}(t) = m_1\ddot{\vec{x}}_1(t) + m_2\ddot{\vec{x}}_2(t) = -\,(m_1 + m_2)\,g\,\vec{e}_z + \vec{F}_{12}(t) + \vec{F}_{21}(t) = -Mg\,\vec{e}_z.$$

Hierbei wurden die Bewegungsgleichungen (I) und die Bedingung (II) verwendet. Diese Differentialgleichung kann nun zweimal integriert werden und zusammen mit den Anfangsbedingungen $\vec{X}(0) = 0$ und $\dot{\vec{X}}(0) = \vec{V}_0$ erhält man damit

$$\ddot{\vec{X}}(t) = -g\,\vec{e}_z \qquad \Rightarrow \qquad \vec{X}(t) = \vec{X}(0) + \dot{\vec{X}}(0)\,t - \frac{g}{2}t^2\,\vec{e}_z = \vec{V}_0 t - \frac{g}{2}t^2\,\vec{e}_z. \tag{IV}$$

b) Der Gesamtdrehimpuls ist durch

$$\vec{L}(t) \equiv m_1\vec{x}_1(t) \times \dot{\vec{x}}_1(t) + m_2\vec{x}_2(t) \times \dot{\vec{x}}_2(t) \tag{V}$$

definiert. Man führt nun eine Relativkoordinate ein,

$$\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t),$$

welche entlang der Hantelstange von m_1 nach m_2 weist. Mit Hilfe der Schwerpunktkoordinate (III) gilt dann

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2 - \vec{x} = \frac{M\vec{X} - m_1\vec{x}_1}{m_2} - \vec{x}.$$

Umformen ergibt

$$\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\vec{x}_1 = \frac{M}{m_2}\vec{X} - \vec{x} \qquad \Rightarrow \qquad (m_1 + m_2)\,\vec{x}_1 = M\vec{X} - m_2\vec{x} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{x}_1 = \vec{X} - \frac{m_2}{M}\vec{x}.$$

Analog findet man ebenfalls

$$\vec{x}_2 = \vec{X} + \frac{m_1}{M}\vec{x}.$$

Setzt man dies nun in (V) ein, dann gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= m_1\left(\vec{X} - \frac{m_2}{M}\vec{x}\right)\times\left(\dot{\vec{X}} - \frac{m_2}{M}\dot{\vec{x}}\right) + m_2\left(\vec{X} + \frac{m_1}{M}\vec{x}\right)\times\left(\dot{\vec{X}} + \frac{m_1}{M}\dot{\vec{x}}\right) \\
&= m_1\vec{X}\times\dot{\vec{X}} - \frac{m_1m_2}{M}\vec{X}\times\dot{\vec{x}} - \frac{m_1m_2}{M}\vec{x}\times\dot{\vec{X}} + \frac{m_1m_2^2}{M^2}\vec{x}\times\dot{\vec{x}} \\
&\quad + m_2\vec{X}\times\dot{\vec{X}} + \frac{m_1m_2}{M}\vec{X}\times\dot{\vec{x}} + \frac{m_1m_2}{M}\vec{x}\times\dot{\vec{X}} + \frac{m_2m_1^2}{M^2}\vec{x}\times\dot{\vec{x}}
\end{aligned}$$

Die gemischten Terme von Schwerpunkt- und Relativkoordinaten heben sich auf, sodass schließlich

$$\vec{L} = (m_1+m_2)\vec{X}\times\dot{\vec{X}} + \frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{M^2}\vec{x}\times\dot{\vec{x}} = M\vec{X}\times\dot{\vec{X}} + \frac{m_1m_2\,(m_2+m_1)}{M^2}\vec{x}\times\dot{\vec{x}} = M\vec{X}\times\dot{\vec{X}} + \mu\vec{x}\times\dot{\vec{x}}$$

gilt, wobei die reduzierte Masse

$$\mu \equiv \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1m_2}{M}$$

eingeführt wurde. Damit kann nun ein Schwerpunktanteil $\vec{L}_s(t)$ und ein Relativanteil $\vec{L}_r(t)$ des Drehimpulses definiert werden,

$$\vec{L}_s(t) \equiv M\vec{X}(t)\times\dot{\vec{X}}(t) \qquad \text{und} \qquad \vec{L}_r(t) \equiv \mu\vec{x}(t)\times\dot{\vec{x}}(t).$$

Mit Hilfe von (IV) erhält man explizit für den Schwerpunktanteil

$$\begin{aligned}
\vec{L}_s(t) &= M\left(\vec{V}_0t - \frac{g}{2}t^2\vec{e}_z\right)\times\left(\vec{V}_0 - gt\,\vec{e}_z\right) \\
&= Mt\vec{V}_0\times\vec{V}_0 - Mgt^2\vec{V}_0\times\vec{e}_z - \frac{Mgt^2}{2}\vec{e}_z\times\vec{V}_0 + \frac{Mg^2t^3}{2}\vec{e}_z\times\vec{e}_z = -\frac{Mgt^2}{2}\vec{V}_0\times\vec{e}_z.
\end{aligned}$$

c) Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen (I) erhält man die Bewegungsgleichung der Relativkoordinate,

$$\ddot{\vec{x}}(t) = \ddot{\vec{x}}_2(t) - \ddot{\vec{x}}_1(t) = \frac{\vec{F}_{12}(t)}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}(t)}{m_1} = \vec{F}_{12}(t)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) = \vec{F}_{12}(t)\,\frac{m_2+m_1}{m_1m_2},$$

sodass also

$$\mu\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}_{12}(t)$$

gilt. Da die innere Kraft entlang der Hantelstange wirkt, muss diese proportional zur Relativkoordinate sein,

$$\vec{F}_{12}(t) \propto \vec{x}(t).$$

Damit gilt jedoch, dass der Relativanteil des Drehimpulses zeitlich erhalten ist,

$$\dot{\vec{L}}_r(t) = \mu\dot{\vec{x}}(t)\times\dot{\vec{x}}(t) + \mu\vec{x}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t) = \mu\vec{x}(t)\times\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{x}(t)\times\vec{F}_{12}(t) \propto \vec{x}(t)\times\vec{x}(t) = 0,$$

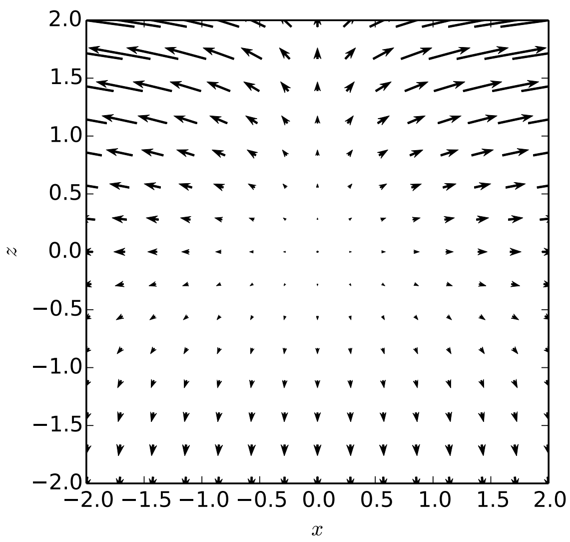
sodass also

$$\vec{L}_r(t) = \text{konst.}$$

ist.

3. Präsenzaufgabe: **Potential eines Kraftfelds und Kurvenintegrale**

a) In der x-z-Ebene hat das Vektorfeld die folgende Form.



b) Ein Potential existiert nur, wenn das Feld konservativ ist, bzw. wenn seine Rotation verschwindet. Für diese gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x\,\mathrm{e}^z \\ y\,\mathrm{e}^z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y\,\mathrm{e}^z \\ x\,\mathrm{e}^z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Rotation nicht verschwindet, existiert kein Potential für das Kraftfeld.

c) Das Kurvenintegral entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve $\vec{\lambda}$ in einer Ebene parallel zur x-y-Ebene ist

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\lambda} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{s},$$

wobei der Stokes'sche Satz verwendet wurde. Das Flächenelement $\mathrm{d}\vec{s}$ hat nur eine Komponente in z-Richtung, da es senkrecht auf der Ebene stehen muss, in die die Kurve eingebettet ist, also $\mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}s\,\vec{e}_z$. Da die Rotation jedoch keine z-Komponente besitzt, muss das Skalarprodukt verschwinden,

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0.$$

Daraus folgt sofort

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\lambda} = 0$$

für jede beliebige Kurve ∂S in einer Ebene parallel zur x-y-Ebene.

4. **Verständnisfragen**

a) Unter der Voraussetzung, dass das Kraftfeld $\vec{F}$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet definiert ist, sind die drei Aussagen mathematisch äquivalent. Ist das Kraftfeld konservativ, d.h. lässt sich das Kraftfeld als negativer Gradient einer skalaren Potentialfunktion darstellen, dann ist das Kurvenintegral wegunabhängig und die Rotation von $\vec{F}$ verschwindet, es ist also wirbelfrei. Umgekehrt gilt damit auch, dass ganz einfach getestet werden kann, ob das Kraftfeld konservativ ist. Wenn nämlich die Rotation von $\vec{F}$ verschwindet, dann ist dies genau der Fall, und das Kurvenintegral über $\vec{F}$ hängt nicht vom Weg ab, sondern nur von den Anfangs- und Endpunkten.

b) Der Satz von Stokes besagt, dass auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes gleich seiner Zirkulation längs der Randkurve der Fläche ist, also

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\lambda}.$$

c) Die inneren Kräfte zwischen Massenpunkten können keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunkts haben, da sie sich aufgrund des 3. Newton'schen Axioms paarweise aufheben.