Höhere Analysis

Hans Knüpfer, Heidelberg University
Wintersemester 2020/21

Diese Notizen sind nicht auf Fehler geprüft, nicht korrigiert und unvollständig (insbesondere einige Beweise). Sie sind ein zusätzliches Angebot an die Studierenden, sollen aber nicht die Vorlesungsmitschrift ersetzen. Die Mitschrift ist nur für die Studierenden der Vorlesung *Höhere Analysis* im Wintersemester 20/21, Universität Heidelberg, gedacht. Während des Semesters wird es kontinuierlich Updates der Mitschrift geben. Die Quelle der Bilder ist wikipedia.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Durchführung:

- Synchrone Vorlesung
  - Zeiten: Mo 9:30-11:00, Fr 13:15-14:45.
  - Platform: WebEx
- Asynchrone Materialien
  - Skript wird wöchentlich im Voraus ausgegeben.

Organisation:

- Informationen auf Moodle und Müsli
- Plenarübung: Mi 14:00-15:30
- Übungsbetrieb: 50% Punkte der Übungszettel für Klausurzulassung
- Klausur: Termin wird noch bekanntgeben. Wahrscheinlich letzte Vorlesungswoche.

Themen: Wir beschaftigen uns in diesem Semester mit

- Maßtheorie: Maße sind Abbildungen der Form $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ für $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Mit Maßen können wir z.B. das Volumen oder das Oberflächenmaß von Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ messen.
- Integrationstheorie: Wir führen das Lebesgue-Integral ein (eine Verallgemeinerung des Riemann-Integrals). Das Lebesgueintegral erlaubt insbesondere Konvergenzsätze wie den Satz von der dominierten Konvergenz, ...
- Integrationssätze: Wir führen wichtige Sätz aus der Integrationstheorie ein wie den Transformationssatz, Satz von Gauss, Fubini.

Literatur

- Ambrosio, Da Prato, Mennucci –Introduction to measure theory and integration: Hauptgrundlage des Kapitels über Maß– und Integrationstheorie.
- Evans, Gariepy – Fine properties of functions: Bietet interessante weitergehende Informationen. Schöne Ideen, schreckliche Notation.
- Rudin – Real Analysis

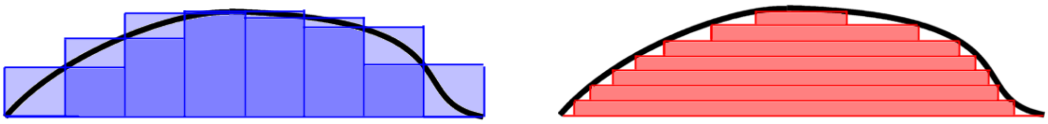

Abbildung 1: Riemannintegral vs. Lebesgueintegral. (Quelle: wikipedia)

Wir beginnen mit einer kurzen Motivation der grundlegenden Themen der Vorlesung:

Problem mit Riemann-Integral. Sei $r_1, \dots,$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ und

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \{r_1, \dots, r_k\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} , \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.1}$$

leb-bspfkt

Dann sind die Funktionen $f_k \geq 0$ sind Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f_k \, dx \;=\; 0 \qquad \text{und} \qquad f_k \nearrow f \;\; \text{punktweise monoton.}$$

Die Grenzfunktion f ist allerdings nicht Riemann-integrierbar. Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen ist also nicht abgeschlossen unter punktweiser monotoner Konvergenz. Wir führen daher einen allgemeineren Integrationsbegriff, bei dem auch der Grenzwert von integrablen Funktionsfolgen (und gewissen Bedingungen) integrierbar ist. Das Lebesgue-Integral bietet eine solche Erweiterung des Riemann-Integrals. Dies erlaubt dann die Herleitung von Konvergenzsätzen wie den Satz von der monotonen Konvergenz, welche die Integrabilität der Grenzfunktion sicherstellen.

Grundidee des Lebesgue-Integrals. Die Funktion f aus (1.1) ist an keinem Punkt $x \in [0,1]$ stetig. Eine Zerlegung des Definitionsbereiches in der Konstruktion von Ober– und Untersummen führt also nicht zum Erfolg. Beim Lebesgueintegral wird nicht der Definitionsbereicht, sondern stattdessen der Bildbereich zerlegt. Für eine nichtnegative Funktion $f : \Omega \to [0, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Mengen

$$E_k^{(h)} \;:=\; f^{-1}((kh, (k+1)h]) \subset \Omega \qquad \qquad \text{für } h > 0 \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Wir approximieren dann das Integral von f durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} [kh] \mu(E_k^h) \;\leq\; \int_\Omega f(x)\, dx \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} [(k+1)h] \mu(E_k^{(h)}). \tag{1.2}$$

idee-lebesgue

Hierbei ist $\mu(E)$ das Volumen (allgemeiner Maß) der Menge $E \subset \Omega$. Das Integral ergibt sich dann aus (1.2) im Limes $h \to 0$. Man sieht leicht, dass mit diesem Integralbegriff die Funktion f aus (1.1) integrierbar ist!

Um das Lebesgueintegral zu konstruieren, müssen wir also das Maß einer Menge E kennen.

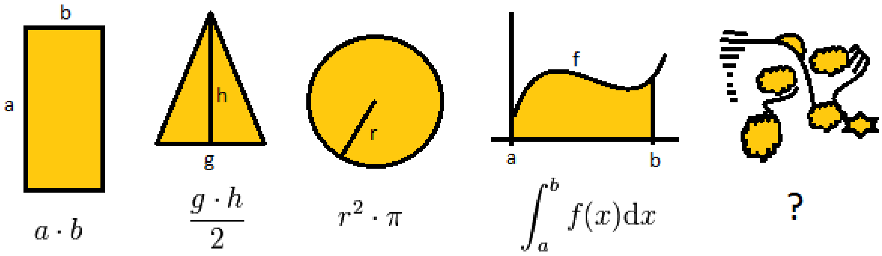

Abbildung 2: Komplexer werdende Teilmengen der Ebene und ihre Flächeninhalte (Quelle: wikipedia)

Das Maßproblem. Mit $\mathscr{P}(X)$ bezeichnen wir die Potenzmenge von X, d.h. die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Wir suchen nach einer Funktion

$$\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \;\to\; [0, \infty],$$

welche das Volumen von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ misst. Wenn wir natürliche Annahmen an diese Maßfunktion stellen, dann führt dies auf das folgende Maßproblem:

m_mass_problem **Problem 1.1 (Maßproblem).** *Wir suchen $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit*

itmas-add *(i)* $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ *falls* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *(σ-Additivität)*

itmas-nor *(ii)* $\mu(\emptyset) \;=\; 0,\; \mu([0,1]^n) \;=\; 1$ *(Normierung)*

itmas-inv *(iii)* $\mu(A + y) \;=\; \mu(A)\;\forall y \in \mathbb{R}^n$ *(Translationsinvarianz)*

Aus der σ-Additivität erhalten wir auch die Monotonie unserer Abbildung:

$$\mu(A) \le \mu(B) \quad \forall A \subset B. \qquad (Monotonie) \tag{1.3}$$ itmas-mon

Allerdings hat das Maßproblem thm_mass_problem 1.1 keine Lösung:

thm-vitali **Satz 1.2 (Vitali 1905).** *Es gibt keine Abbildung $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$, welche die Forderungen des Maßproblems erfüllt.*

Beweis. Wir geben den Beweis für $n = 1$, der Beweis für allgemeine n folgt analog.

Wir definieren die Äquivalenzrelation $x \sim y$ auf $E := [0, 1]$ durch $x \sim y$, genau dann wenn $x - y \in \mathbb{Q}$. Nach dem Auswahlaxiom (ein Axiom der Mengenlehre) gibt es eine

Menge $M_0 \subset [0,1]$, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, d.h. zu $y \in [0,1]$ gibt es genau ein $x \in M_0$ mit $x - y \in \mathbb{Q}$.

Sei q_i, $i \in \mathbb{N}$, eine Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ und sei

$$M_j \ := \ M_0 + q_j \qquad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i \neq j, \qquad [0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_j \subset [0,2], \qquad \mu(M_i) \ = \ \mu(M_0) \ \forall i \tag{1.4}$$

Falls μ die Forderungen (i)–(iii) des Maßproblems erfüllt, dann folgt aus (1.4), dass

$$1 \overset{(ii)}{=} \mu([0,1]) \overset{(1.3)}{\leq} \mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i) \overset{(i)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_0) \overset{(1.3)}{\leq} \mu([0,2]) \overset{(i),(iii)}{<} \infty. \tag{1.5}$$

Aus (1.5) erhalten wir den Widerspruch $\mu(M_0) > 0$ und $\sum_i \mu(M_0) = \infty$. $\square$

Es ist also nicht möglich einen Maßbegriff zu definieren, so dass alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ messbar sind und so dass die Eigenschaften aus Problem 1.1 gelten. Wir suchen daher eine maximale Familie $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ von messbaren Mengen und eine Funktion

$$\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty],$$

welche die Eigenschaften des Maßproblems erfüllt.

Integration über allgemeinere Maße. Das Lebesgueintegral kann auch genutzt werden, um über allgemeinere Maße μ in allgemeinen Räumen X zu integrieren. Relevante Beispiele sind

- gewichtete Maße wie das Gaußmaß $e^{-x^2} dx$
- diskrete Maße wie das Zählmaß.
- Oberflächenmaße wie das $(n-1)$–dimensionale Hausdorffmaß $\mathscr{H}^{n-1}$.

Wir werden daher zuerst eine allgemeine Maßtheorie einführen.

Notation: Für zwei Mengen A, B schreiben wir $A \Subset B$, falls $\overline{A}$ kompakt ist und $A \subset B$. Insbesondere ist der Ausdruck $A \Subset \mathbb{R}^n$ eine kurze Schreibweise, um auszudrücken, dass A eine bechränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

2 Grundlagen der Maßtheorie

2.1 Ringe, σ-Algebren und Maße

Mit X bezeichnen wir eine nichtleere Menge. Die Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$ bezeichnet die Menge aller Teilmengen von X. Der Raum $\mathscr{P}(X)$ wird durch die Operatoren $\cup$, $\cap$, ^{c} (Komplement) mit einer algebraischen Struktur versehen. Wir schreiben , $A \backslash B := A \cap B^c$ für die relative Differenz und $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ für die symmetrische Differenz. Wir erinnern an:

$$\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\Big)^c = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n^c \qquad \text{(Identität von De Morgan).}$$

In Analogie zu algebraischen Strukturen defininieren wir:

Definition 2.1 (Ring, Algebra). *Eine Teilmenge $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt <u>Ring</u>, falls*

(i) $\emptyset \in \mathscr{A}$.

(ii) $A, B \in \mathscr{A} \implies A \cup B,\ A \cap B,\ A \backslash B \in \mathscr{A}$.

Falls außerdem $X \in \mathscr{A}$, dann heißt $\mathscr{A}$ Algebra.

Ein Ring ist also stabil unter den Operatoren $\cup$, $\cap$ und $\backslash$ (und damit auch Δ). Mit der obigen Definition ist $(\mathscr{A}, \Delta, \cap)$ dann auch ein Ring im algebraischen Sinne: Das neutrale Element bezüglich der "Addition" Δ ist $\emptyset$, das inverse Element zu A ist A. Man rechnet leicht nach, dass Kommutativ, Assoziativ und Distributivgesetz gelten. Falls $\mathscr{A}$ eine Algebra ist, dann ist X das neutrales Element der Multiplikation.

Der Raum $\mathscr{P}(X)$ ist teilgeordnet durch die Ordnungsrelationen $\subset$, $\supset$. Entsprechend sagen wir, dass die Folge A_k monoton steigt, wenn $A_k \subset A_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, wir sagen, dass sie monoton fällt, wenn entsprechend $A_{k+1} \subset A_k$ gilt. Wir schreiben:

$$\limsup_{k\to\infty} A_k := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \qquad \liminf_{k\to\infty} A_k := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Die Menge $\limsup_k A_k$ besteht also aus den Elementen von X, die in unendlich vielen Mengen A_k enthalten sind. Die Menge $\liminf_k A_k$ besteht aus den Elementen von X, welche in allen, bis auf endlichen vielen Mengen A_k enthalten sind. Falls $\limsup_k A_k = \liminf_k A_k$, dann schreiben wir $\lim_{k\to\infty} A_k := \limsup_{k\to\infty} A_k = \liminf_{k\to\infty} A_k$. Falls die Folge $A_k \subset X$ monoton ist, dann existiert der Limes $\lim_{k\to\infty} A_k$. Wir bemerken, dass $A_k \to A$ genau dann, wenn $A_k \Delta A \to \emptyset$. Korrespondiert dieser Konvergenzbegriff zu einer Topologie (Übungsaufgabe)?.

Falls die Folge monoton steigt, dann gilt $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Falls die Folge monoton fällt, d.h. $A_{k+1} \subset A_k$, dann gilt $\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$. Wir schreiben $A_k \nearrow L$ beziehungsweise $A_k \searrow L$.

Eine Algebra, welche abgeschlossen unter Grenzwertbildung ist heißt σ–Algebra:

Definition 2.2 (σ-Algebra). *$\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt σ–Algebra auf X, falls*

(i) $\mathscr{A}$ ist Algebra.

(ii) $A_i \in \mathscr{A}\ \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Falls $A_i \in \mathscr{A}$, dann folgt aus der De Morganschen Identität, dass die Mengen $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, $\liminf A_i, \limsup A_i \in \mathscr{A}$. Falls $A_i \in \mathscr{A}$ mit $A_i \to A$, dann gilt also insbesondere $A \in \mathscr{A}$.

Nach Definition ist $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ also eine σ–Algebra ist, genau dann wenn

(i) $X, \emptyset \in \mathscr{A}$

(ii) $A \in \mathscr{A} \implies A^c \in \mathscr{A}$

(iii) $A_i \in A\ \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

Wir bemerken, dass $\mathscr{P}(X)$ die größte σ-Algebra auf X ist. Die Menge $\{\emptyset, X\} \subset \mathscr{P}(X)$ ist die kleinste σ-Algebra auf X. Zu jeder Menge $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ gibt es eine kleinste σ-Algebra, welche $\mathscr{F}$ enthält:

m-minsigalgebra

Satz 2.3 (Erzeugte σ-Algebra). *Sei $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann ist*

$$\sigma(\mathscr{F}) := \bigcap \{\mathscr{A} : \mathscr{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra mir } \mathscr{F} \subset \mathscr{A}\}.$$

die kleinste σ-Algebra, welche $\mathscr{F}$ enthält. $\sigma(\mathscr{F})$ heißt die von $\mathscr{F}$ erzeugt σ-Algebra.

Beweis. Nach Konstruktion ist $\sigma(\mathscr{F}) \subset \mathscr{A}$ für jede σ-Algebra $\mathscr{A}$, welche $\mathscr{F}$ enthält. Es bleibt zu zeigen, dass $\sigma(\mathscr{F})$ eine σ-Algebra ist. Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller σ-Algebren, welche $\mathscr{F}$ enthalten. Es gilt $\mathscr{P}(X) \in \mathbb{A}$ und daher ist $\mathbb{A}$ nicht leer. Wir prüfen die Bedingungen (i)–(iii) aus der obigen Bemerkung:

(i) Nach Konstruktion gilt $\emptyset, X \in \sigma(\mathscr{A})\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$ und daher $\emptyset, X \in \sigma(\mathscr{F})$.

(ii) Falls $A \in \sigma(\mathscr{F})$, dann gilt $A \in \mathscr{A}\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$. Da die Mengen $\mathscr{A}$ σ-Algebren sind, erhalten wir $A^c \in \mathscr{A}\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$ und daher $A^c \in \sigma(\mathscr{F})$.

(iii) Falls $A_i \in \sigma(\mathscr{F})$, $i \in \mathbb{N}$, dann folgt $A_i \in \mathscr{A}\ \forall i \in \mathbb{N}\ \forall \mathscr{A} \in \mathbb{A}$. Damit folgt auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}\ \forall A \in \mathscr{A}$ und damit auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathscr{F})$.

Daher ist $\sigma(\mathscr{F})$ eine σ–Algebra. □

Aus der Analysis wissen wir, dass sich jeder metrische Raum vervollständigen lässt. In diesem Sinne kann man $\sigma(\mathscr{F})$ die Vervollständigung des Mengensystems $\mathscr{F}$ bezüglich unseres Konvergenzbegriffes für Mengen interpretieren.

[02.11.2020]

[06.11.2020]

Definition 2.4 (Borel σ-Algebra). *Sei X ein metrischer Raum und sei $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ die Topologie auf X, d.h. die Menge der offenen Mengen. Dann ist die Borel σ-Algebra definiert durch*

$$\mathscr{B}(X) \ := \sigma(\mathscr{T}).$$

Nach Definition enthält $\mathscr{B}(X)$ alle offenen Mengen, alle abgschlossenen Mengen und die abzählbaren Druchschnitte und Vereinigungen dieser Mengen. Äquivalent wird die Borel σ–Algebra auch durch die abgeschlossen Mengen erzeugt. Elemente der Borel σ–Algebra heißen Borelmengen.

Wir betrachten nun additive und subadditive Funktionen auf $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$:

Definition 2.5 (Additivität). *Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann heißt $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$*

(i) subadditiv, falls $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)\ \forall A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cup B \in \mathscr{A}$.

(ii) additiv, falls $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)\ \forall A, B \in \mathscr{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B \in \mathscr{A}$.

(iii) σ–subadditiv, falls für jede Folge $A_k \in \mathscr{A}$ mit $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$ gilt

$$\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \le \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \qquad (\sigma\text{-Subadditivität}).$$

(iv) σ–additiv, falls für jede Folge $A_k \in \mathscr{A}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathscr{A}$

$$\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \qquad (\sigma\text{-Additivität}).$$

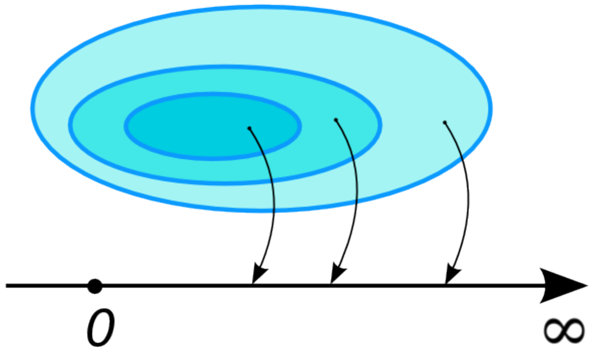

Abbildung 3: Ein Maß ordnet Teilmengen einer Grundmenge Zahlen zu. Das Bild illustriert die Monotonieeigenschaft von Maßen, das heißt größere Mengen haben auch ein größeres Maß. (Quelle: wikipedia)

Eine σ–additive Abbildung auf einer σ–Algebra nennen wir Maß:

Definition 2.6 (Maßraum, Maß).

(i) *Ein messbarer Raum $(X, \mathscr{E})$ ist eine Menge X mit einer σ–Algebra $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$.*

(ii) *Eine Maß $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ ist eine σ–additive Funktion auf einem messbaren Raum $(X, \mathscr{E})$ mit $\mu(\emptyset) = 0$. Dann heißt $(X, \mathscr{E}, \mu)$ Maßraum.*

Das Maß $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ heißt

(iii) *Wahrscheinlichkeitsmaß, falls $\mu(X) = 1$.*

(iv) *endlich, falls $\mu(X) < \infty$,*

(v) *σ–endlich, falls es $A_k \in \mathscr{E}$ gibt mit $\mu(A_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.*

(vi) *Ein Punkt $x \in X$ heißt Atom, falls $\mu(\{x\}) > 0$.*

(vii) *Falls X ein metrischer Raum ist, dann heißt μ Borelmaß, falls $\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{E}$.*

Wir hatten für das Maßproblem gesehen, dass wir nicht das Volumen aller Teilmengen $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ des $\mathbb{R}^n$ messen können. Wir werden zeigen, dass wir zumindest jede Borelmenge messen können (und sogar ein etwas größeres System von Mengen).

Beispiel 2.7 (Beispiele diskreter Maße).

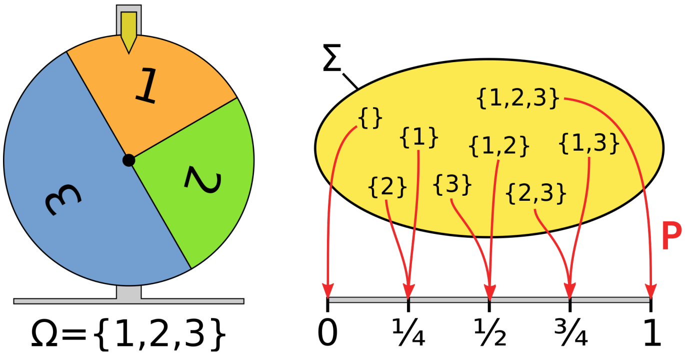

Abbildung 4: Ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dass jedem Element aus dem Ereignisraum eine Wahrscheinlichkeit zuordnet. (Quelle: wikipedia)

(i) Sei X eine beliebige Menge. Das Diracmaß zum Punkt $x \in X$ ist

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Diracmaß ist ein endliches Maß. Der Punkt $x \in X$ ist ein Atom von δ_x. Falls X ein metrischer Raum ist, dann ist δ_x ein Borelmaß.

(ii) Sei X eine beliebige Menge. Für $A \in \mathscr{P}(X)$ definieren wir das Zählmaß durch

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{falls } A \text{ endlich viele Elemente enthält} \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\#A$ die Anzahl der Elemente von A ist. Das Zählmaß ist genau dann endlich, wenn X endlich ist; es ist genau dann σ–endlich, wenn X abzählbar ist. Falls $X = \mathbb{R}^n$, dann ist das Zählmaß also nicht σ–endlich.

Aus der Additivität von Maßen erhalten wir direkt die folgenden Rechenregeln:

- $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathscr{E}$.
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathscr{E}$.

Diese beiden Aussagen folgen aus der Additivität des Maßes zusammen mit den disjunkten Zerlegungen $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$, $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$. Aus der Definition von Maßen erhalten wir Monotonie, σ–Subadditivität und Stetigkeit des Maßes bezüglich monotoner Konvergenz:

prp-massinaus **Proposition 2.8 (Eigenschaften von Maßen).** *Sei $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Dann*

mu-mon *(i) $\mu(A) \leq \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathscr{E}$ mit $A \subset B$.* *(Monotonie)* massinaus-iii

(ii) $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \quad \forall A_i \in \mathscr{E}, i \in \mathbb{N}.$ *(σ-Subadditivität)*

(iii) *Falls $A_k \nearrow A$ oder $A_k \searrow A$ und $\mu(A_0) < \infty$ für $A_k \in \mathscr{A}$. Dann gilt $A \in \mathscr{E}$ und*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A) \qquad \textit{(Stetigkeit bzgl. monotoner Konvergenz)}$$

Beweis. *(i):* Folgt aus der disjunkten Zerlegung $B = A \cup (B \backslash A)$.

(ii): Wir definieren induktiv $B_0 := A_0$ und $B_{k+1} := A_{k+1} \backslash \bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset A_{k+1}$. Dann gilt $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ und $\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ nach (i). Da die Mengen B_k paarweise disjunkt sind, erhalten wir

mu-mon

$$\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_k) = \mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} B_k) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_k).$$

(iii): Nach Annahme gilt $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_k$ und damit $A \in \mathscr{E}$. Wir können $\mu(A_k) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$ annehmen, da die Aussage sonst trivialerweise erfüllt ist. Die Mengen $B_0 := A_0$ und $B_k := A_k \backslash A_{k-1}$ für $k \geq 1$ sind disjunkt und $\mu(B_k) = \mu(A_k) - \mu(A_{k-1})$. Daher

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_k) = \mu(A_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Für $A_k \searrow A$ betrachte man die Folge $C_k := A_0 \backslash A_k$ an. Falls $\mu(A_0) < \infty$, dann gilt $\mu(C_k) = \mu(A_0) - \mu(A_k)$ und wir können das obige Argument anwenden. □

Gilt auch allgemein $\mu(A_k) \to \mu(A)$, falls $A_k \to A$ (Übungsaufgabe)?

Ein weiterer nützlicher Begriff ist der Begriff des äußeren Maßes.

Definition 2.9 (Äußeres Maß). *Sei X eine Menge und $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$. Dann heißt μ^* äußeres Maß, falls*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) *μ^* ist σ–subadditiv.*

(iii) *Für $A \subset B$ ist $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.* *(Monotonie)*

Wir geben einige Beispiele: Sei X ein Menge. Falls $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ gegeben ist durch

- $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(A) = 1$ für alle $A \neq \emptyset$, oder
- $\mu(A) = 0$, falls $\#A < \infty$ und $\mu(A) = 1$

Dann ist μ ein äußeres Maß.

Maße und äußere Maße sind subadditiv und erfüllen damit eine wichtige Eigenschaft einer Norm. Allerdings folgt aus $\mu(A) = 0$ im Allgemeinen nicht $A = \emptyset$. Eine Menge $A \in \mathscr{E}$ mit $\mu(A) = 0$ heißt μ–Nullmenge. Es ist allerdings sinnvoll auch die Teilmengen von Nullmengen als Nullmengen zu bezeichnen:

Definition 2.10 (Nullmengen & fast überall Aussagen). *Sei $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ und sei $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ ein Maß oder äußeres Maß.*

(i) $A \in \mathscr{P}(X)$ heißt μ-Nullmenge, falls es ein $B \in \mathscr{E}$ gibt mit $A \subset B$ und $\mu(B) = 0$.

(ii) Eine Aussage $P(x)$ gilt μ–fast überall, falls $P(x)$ bis auf eine Nullmenge gilt.

(iii) Sei Y ein topologischer Raum. Wir sagen, dass $f_k : X \to Y$ μ–fast überall gegen f konvergiert, falls es eine μ-Nullmenge $N \subset X$ gibt mit $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$.

Die Funktionenfolge $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = k\chi_{[0,\frac{1}{k}]}$ konvergiert f.ü. gegen $f = 0$.

Nach Definition ist jede σ–Algebra $\mathscr{E}$ vollständig in dem Sinne, dass $A_k \in \mathscr{E}$ und $A_k \to A$ schon die Aussage $A \in \mathscr{E}$ impliziert. Ein Maß $\mu : X \to [0, \infty]$ induziert eine Konvergenz: Wir können sagen, dass $A_k \to A$ bezüglich des Maßes μ konvergiert, falls $\mu(A \Delta A_k) \to 0$. Im Allgemeinen folgt aus $A_k \in \mathscr{E}$ und $\mu(A \Delta A_k) \to 0$ aber nicht $A \in \mathscr{E}$. Das Maß ist dann in diesem Sinne nicht vollständig. Jedes Maß lässt sich aber zu einem vollständigen Maß fortsetzen. Dies führt auf die folgende Definition:

vollstaendigung

Satz 2.11 (Maßvervollständigung). *Sei $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist*

$$\mathscr{E}_\mu := \{A \in \mathscr{P}(X) \ : \ \text{es gibt } B, N \in \mathscr{E} \text{ mit } A \Delta B \subset N \text{ und } \mu(N) = 0\}.$$

eine σ–Algebra. Die Erweiterung $\overline{\mu} : \mathscr{E}_\mu \to [0, \infty]$ mit $\overline{\mu}(A) = \mu(B)$ ist ein Maß. Die Elemente von $E \in \mathscr{E}_\mu$ heißen μ–messbar Mengen. Das Maß $\overline{\mu}$ heißt Vervollständigung von μ. Falls $\mu = \overline{\mu}$, dann heisst das Maß μ vollständig. Entsprechend heißt der Maßraum $(X, \mathscr{E}, \mu)$ vollständig, falls μ vollständig ist.

Beweis. Der Beweis ist Übungsaufgabe. □

Für ein vollständiges Maß $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ gilt insbesondere $A \in \mathscr{E}$ für jede Nullmenge A.

2.2 Maßerweiterung

Wir wenden uns wieder dem Maßproblem zu, d.h. das Ziel ist ein Maß zur Volumenmessung zu definieren. Wir betrachten zuerst die Menge der linksgeschlossenen Intervalle

$$\mathscr{J} := \{[a, b) \; : \; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Wir benutzen dabei die Konvention, dass $[a, b) = \emptyset$ falls $b \leq a$. Man zeigt leicht, dass

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{J}).$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass sich jedes offene Intervall als abzählbare Überdeckung von Mengen in $\mathscr{J}$ darstellen lässt und umgekehrt (Übungsaufgabe). Jedem Intervall $I = [a, b) \in \mathscr{J}$ mit $I \neq \emptyset$ ordnen wir die Länge $|I| := |b - a|$ und wir setzen $|\emptyset| = 0$. In einem ersten Schritt definieren wir ein Volumenmaß auf der endlichen Vereingung von Mengen in $\mathscr{J}$:

lem-lebpram

Lemma 2.12 (Lebesgue–Prämaß). *Sei $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ die Menge der Mengen, welche sich als endliche Vereinigung von linksgeschlossenen Intervallen darstellen lässt, d.h.*

$$\mathscr{K} \;=\; \Big\{ A \subset \mathbb{R} \;:\; A = \bigcup_{j=1}^{N} I_j \quad \text{mit } I_j \in \mathscr{J},\, 1 \leq j \leq N, \text{ für ein } N \in \mathbb{N}. \Big\} \tag{2.1}$$

pra-AA

Wir definieren das Lebesgue–Prämaß $\lambda : \mathscr{K} \to [0, \infty)$ durch

$$\lambda(A) \;:=\; \inf \Big\{ \sum_{I \in \mathscr{J}} |I_j| \;:\; A = \bigcup_{j=1}^{N} I_j \text{für } N \in \mathbb{N} \text{ und } I_j \in \mathscr{J} \Big\},$$

Dann ist $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein Ring und λ ist σ–additiv auf $\mathscr{K}$.

Beweis. Man zeigt leicht, dass $\mathscr{K}$ ein Ring ist. Wir bemerken, dass jede Menge $A \in \mathscr{K}$ als endliche, disjunkte Vereinigung von Mengen $I_j \in \mathscr{J}$ geschrieben werden kann. Mit einer solchen disjunkten Vereinigung gilt $\lambda(A) \;:=\; \sum_{j=1}^{n} |I_j|$ und das Maß ist unabhängig von der Wahl der disjunkten Vereinigung. Die Details sind Übungsaufgabe. □

[06.11.2020]

[09.11.2020]

Das Lebesguеprämaß $\lambda : \mathscr{K} \to [0, \infty]$ erfüllt die Eigenschaften (i)—(iii) des Maßproblemes ist aber nur auf dem kleinen System $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ von Mengen definiert. Unser Ziel ist λ zu einem Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{K}) = \sigma(\mathscr{J})$ fortzusetzen. Die folgende Konstruktion geht auf Constantin Carathéodory (1873-1950) zurück.

Proposition 2.13 (Induziertes äußeres Maß). *Sei* $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ *und sei* $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ σ*–additiv. Sei* $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ *gegeben durch*

$$\mu^*(E) \;:=\; \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : \mathscr{A} \in \mathscr{A}, E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\}.$$

Dann ist μ^* *äußeres Maß mit* $\mu^* = \mu$ *auf* $\mathscr{A}$ *und heißt das von* μ *induzierte äußere Maß.*

Beweis. Aus der Definition und der Monotonie von μ erhalten wir direkt, dass $\mu(A) = \mu^*(A)\ \forall A \in \mathscr{A}$. Insbesondere gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$. Offensichtlich ist μ^* monoton. Es bleibt zu zeigen, dass μ^* subadditiv ist: Sei $E_i \in \mathscr{P}(X)$ und sei $E := \bigcup_i E_i$. OBdA nehmen wir an, dass $\sum_i \mu^*(E_i) < \infty$. Nach Konstruktion gibt es dann zu $\varepsilon > 0$ und E_i eine Folge A_{ij} mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_{ij}) < \mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \qquad \text{und} \qquad E_i \subset \bigcup_j A_{ij}$$

Wir summieren über i und erhalten

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \mu^*(A_{ij}) < \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) + \varepsilon, \qquad \text{und} \qquad E \subset \bigcup_{i,j} A_{ij}$$

Die Subadditivität folgt im Limes $\varepsilon \to 0$. $\square$

Wir möchten zeigen, dass die Einschränkung von μ^* auf einer hinreichend großen Menge σ–additiv ist. Dafür benötigen wir einige technische Definitionen und Resultate:

prp-dynkin

Definition 2.14 (Dynkinsystem, π–System).

(i) $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(X)$ *heißt Dynkinsystem, falls*

- $\emptyset, X \in \mathscr{D}$.
- $A \in \mathscr{D} \implies A^c \in \mathscr{D}$.
- $A_i \in \mathscr{D}\ \forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ *für* $i \neq j \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{D}$.

(ii) $\mathscr{K} \subset \mathscr{P}(X)$ *heißt* π*–System, falls* $\mathscr{K} \neq \emptyset$ *und* $A \cap B \in \mathscr{K}\ \forall A, B \in \mathscr{K}$.

Wir bemerken, dass das Mengensystem $\mathscr{K}$ aus Lemma pra-AA 2.1 eine Algebra und damit insbesondere ein π–System ist. Wir haben das folgende Resultat:

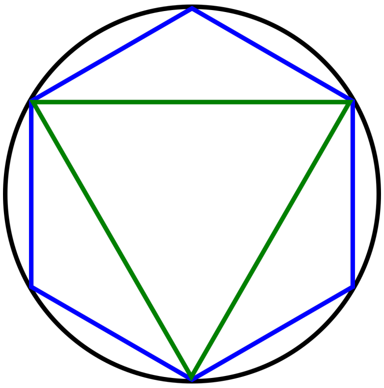

Abbildung 5: Archimedes hat die Fläche des Kreises durch Ausschöpfen von innen approximiert. Bei der Konstruktion des äußeren Maßes approximieren wir das Volumen von Mengen von außen. (Quelle: wikipedia)

prp-dynkin

Proposition 2.15 (Dynkinsystem). *Falls $\mathscr{D}$ ein Dynkinsystem ist und $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$ ein π–System, dann ist $\sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{D}$.*

Beweis. Übungsaufgabe. $\square$

Falls insbesondere $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ sowohl Dynkinsystem als auch π–System ist, dann ist $\mathscr{A}$ eine σ–Algebra. Wir wollen nun für das induzierte äußere Maß eine σ–Algebra $\mathscr{M}$ identifizieren, so dass die Einschränkung des äußeren Maßes σ–additiv ist. Intuitiv stellen wir uns eine Menge messbar vor, wenn eine Approximation von außen und innen den gleichen Wert ergibt. Zuer Einfachheit stellen wir uns einen endlichen Maßraum E vor mit $\mu(E) < \infty$ und eine Menge $A \in \mathscr{P}(E)$. Wir können dann ein "inneres Maß" definieren als das Supremum des Volumens von diskunkten Mengen, welche in A enthalten sind. Alternativ können wir (für einen endlichen Maßraum) das inntere Maß von A definieren als $\mu_*(A) := \mu(E) - \mu^*(E \backslash A)$. Wir nennen dann die Menge A Menge messbar, falls $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ gilt. In unserem Beispiel gilt $A \subset E$ und damit $A = A \cap E$ Dies führt auf das sogenannte Carathéodory–Kriterion für messbare Mengen:

$$\mu^*(E) \;=\; \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Der folgende Satz zeigt, dass dieses Kriterium das geeignete Kriterium, um ein Maß zu erhalten:

thm-cara

Satz 2.16 (Maßerweiterung). *Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ ein Ring. Sei $\mu : \mathscr{A} \to [0,\infty]$ ein Maß und sei $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0,\infty]$ das von μ induzierte äußere Maß. Sei*

$$\mathscr{M} \ := \ \{A \in \mathscr{P}(X) \ : \ \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall E \in \mathscr{P}(X).\} \tag{2.2}$$

se-cara

Dann gilt

(i) $\mathscr{M}$ *ist eine σ–Algebra mit* $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$

(ii) μ^* *ist σ–additiv auf* $\mathscr{M}$.

(iii) Der Maßraum $(X, \mathscr{M}, \mu^*)$ *ist vollständig.*

Beweis. Da μ^* subadditiv ist, ist die Bedingung in (2.2) äquivalent zu

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \ \le \ \mu^*(E) \qquad \forall E \in \mathscr{P}(X) \text{ mit } \mu^*(E) < \infty. \tag{2.3}$$

se-cara-2

Schritt 1: $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$: Sei $A \in \mathscr{A}$. Für $E \in \mathscr{P}(X)$ mit $\mu^*(E) < \infty$ wählen wir $B_i \in \mathscr{A}$ mit $\sum_{i=0}^\infty \mu^*(B_i) \ < \ \mu^*(E) + \varepsilon$ und $E \subset \bigcup_{i=0}^\infty B_i$. Da μ^* subbadditiv und auf $\mathscr{A}$ additiv ist erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \ &\le \sum_{i=0}^\infty \Big(\mu^*(B_i \cap A) + \mu^*(B_i \cap A^c) \Big) \overset{(??)}{=} \sum_{i=0}^\infty \mu^*(B_i) \\
&< \mu^*(E) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ erhalten wir (2.3) und daher $A \in \mathscr{M}$.

Schritt 2: $\mathscr{M}$ ist eine σ–Algebra. Nach Proposition 2.15 reicht es zu zeigen, dass $\mathscr{M}$ ein Dynkinsystem und ein π–System ist. Nach Definition gilt $\emptyset, X \in \mathscr{M}$. Aus der Definition sieht man auch direkt, dass $A^c \in \mathscr{M}$, falls $A \in \mathscr{M}$.

Wir zeigen zuerst, dass $A \cup B \in \mathscr{M}$, falls $A, B \in \mathscr{M}$. Dafür schreiben wir $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$ als Vereinigung zweier disjunkter Mengen. Für $E \in \mathscr{P}(X)$ erhalten wir mit der Subadditivität von μ^* dann

$$\begin{aligned}
\mu^*\big(E \cap (A \cup B)\big) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \ &\le \ \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \\
&= \ \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\
&= \ \mu^*(E).
\end{aligned}$$

Für die beiden Identitäten haben wir $A, B \in \mathscr{M}$ genutzt. Für $A, B \in \mathscr{M}$ gilt damit auch $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathscr{M}$. Damit ist $\mathscr{M}$ ein π–System.

[09.11.2020]

[13.11.2020]

Indem wir E in (2.2) durch $E \cap (A \cup B)$ ersetzen erhalten wir für alle $E \in \mathscr{P}(X)$

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) \;=\; \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap B) \quad \forall A, B \in \mathscr{M} \text{ mit } A \cap B = \emptyset. \tag{2.4}$$

Mit der Wahl $E := A \cup B$ gilt insbesondere

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B) \qquad \forall A, B \in \mathscr{M} \text{ mit } A \cap B = \emptyset, \tag{2.5}$$

d.h. μ^* ist additiv auf $\mathscr{M}$.

Um zu sehen, dass $\mathscr{M}$ ein Dynkinsystem ist reicht es zu zeigen, dass $S := \bigcup_n A_n \in \mathscr{M}$, falls die Mengen $A_n \in \mathscr{M}$ disjunkt sind. Nach der obigen Rechnung gilt $S_n := \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{M}$. Da $S^c \subset S_n^c$ und für $E \in \mathscr{P}(X)$ gilt also

$$\begin{aligned} \mu^*(E) \;&=\; \mu^*(E \cap S_n^c) + \mu^*(E \cap S_n) \;\geq \mu^*(E \cap S^c) + \mu^*(E \cap S_n) \\ &\overset{(2.4)}{\geq}\; \mu^*(E \cap S^c) + \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap A_i) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da μ^* subadditiv ist, erhalten wir im Limes $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^n \mu^*(E \cap A_i) \;=\; \sum_{i=1}^\infty \mu^*(E \cap A_i) \;\geq\; \mu^*(E \cap S) \tag{2.7}$$

Wenn wir (2.7) in (2.6) einsetzen, folgt $S \in \mathscr{M}$. Daher ist $\mathscr{M}$ also sowohl Dynkinsystem als auch π–System und damit eine σ–Algebra.

Schritt 3: μ^* ist σ–additiv auf $\mathscr{M}$. Für eine Folge $A_n \in \mathscr{A}$ von disjunkten Mengen und da μ^* monoton ist, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n \mu^*(A_i) \;\overset{(2.5)}{=}\; \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) \;\leq\; \mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\Big) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Im Limes $n \to \infty$ erhalten wir die σ-Additivität von μ^*.

Schritt 4: Der Maßraum $(X, \mathscr{M}, \mu^*)$ ist vollständig. Sei $A, N \in \mathscr{M}$, sei $\mu^*(N) = 0$ und es gelte $B \subset A \Delta N$. Dann gilt (2.2) auch für B, d.h. $B \in \mathscr{M}$. □

Die Eindeutigkeit der Maßerweiterung wird in folgender Proposition behandelt:

Proposition 2.17 (Eindeutigkeitskriterium). *Seien μ_1, μ_2 Maße auf $(X, \mathscr{E})$ und sei $\mathscr{F} := \{A \in \mathscr{E} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Die folgenden beiden Bedingungen seien erfüllt:*

(i) Es gibt ein π–System $\mathscr{K} \subset \mathscr{F}$ mit $\sigma(\mathscr{K}) = \mathscr{E}$.

(ii) Es gibt eine Folge $X_i \in \mathscr{K}$ mit $X_i \nearrow X$ und $\mu_1(X_i) = \mu_2(X_i) < \infty$.

Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{E}$.

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass μ_1, μ_2 endliche Maße sind. Wir behaupten, dass $\mathscr{F}$ ein Dynkinsystem ist: Offensichtlich gilt $\emptyset \in \mathscr{F}$. Für disjunkte Mengen $A_i \in \mathscr{F}$ gilt nach der σ–Additivität der Maße auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$. Um zu sehen, dass $X \in \mathscr{K}$ bemerken wir, dass nach Voraussetzung $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{K})$. Insbesondere gilt $X \in \sigma(\mathscr{K})$. Daher gibt es eine abzählbare Vereinigung disjunkter Mengen $K_i \in \mathscr{K}$ mit $X = \bigcup_i K_i$. Insbesondere erhalten wir $X \in \mathscr{F}$. Für $A \in \mathscr{F}$ gilt auch $\mu_1(A^c) = \mu_1(X) - \mu_1(A) = \mu_2(X) - \mu_2(A) = \mu_2(A^c)$, d.h. $A^c \in \mathscr{F}$. Daher ist $\mathscr{F}$ ein Dynkinsystem. Mit Proposition 2.15 und nach (i) gilt dann $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{F}$. Insbesondere gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{E}$.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall, wenn μ_1, μ_2 σ–endlich sind. Nach Voraussetzung gilt $\mu_1(X_i) = \mu_2(X_i) < \infty$ und $X_i \nearrow X$. Die Maße μ_1, μ_2 sind endliche Maße auf $(X_i, \mathscr{E}_i)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, wobei die σ-Algebra $\mathscr{E}_i \subset \mathscr{P}(X_i)$ gegeben ist durch $\mathscr{E}_i := \{E \in \mathscr{E} : E \subset X_i\}$. Nach Annahme gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf dem π–System $\mathscr{K}_i := \{E \in \mathscr{K} : E \subset X_i\}$. Nach der vorherigen Rechnung erhalten wir $\mu_1 = \mu_2$ auf $\sigma(\mathscr{K}_i) \subset \mathscr{P}(X_i)$.

Wir betrachten nun die Mengen $\mathscr{F}_i := \{B \in \mathscr{P}(X) : B \cap X_i \in \sigma(\mathscr{K}_i)\}$. Dann ist $\mathscr{F}_i$ eine σ–Algebra und $\mathscr{K} \subset \mathscr{F}_i$. Nach Proposition 2.15 gilt $\mathscr{E} = \sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{F}_i$. Aus der σ–Algebraeigenschaft der Maße folgt also

$$\mu_1(B \cap X_i) = \mu_2(B \cap X_i) \qquad \forall B \in \mathscr{E}\ \forall i \in \mathbb{N}$$

Im Limes $i \to \infty$ ergibt dies $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathscr{E}$. $\square$

2.3 Das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$

Mit der Konstruktion aus dem vorigen Kapitel können wir unser Prä-Lebesguemaß eindeutig zu einem Borelmaß erweitern:

Satz 2.18 (Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$). *Es gibt ein eindeutiges, translationsinvariantes Maß*

$$\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty] \qquad \textit{mit} \quad \lambda([0, 1]) = 1.$$

Dieses Maß heißt Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\lambda : \mathscr{K} \to [0, \infty]$ das Lebesgue-Prämaß aus Lemma 2.12. Nach Satz 2.16 induziert dieses Pramäß eine Erweiterung $\lambda : \mathscr{M} \to [0, \infty]$. Da $\mathscr{M}$ eine σ–Algebra ist, gilt $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{M}$. Durch Einschränkung unseres Maßes auf die Borelmengen erhalten wir also ein Borelmaß $\lambda : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$. Jedes weitere translationsinvariante, normierte Maß $\tilde{\lambda}$, welches die Anforderungen des Satzes erfüllt ist σ–endlich und erfüllt $\tilde{\lambda} = \lambda$ auf $\mathscr{K}$. Nach Proposition 2.17 ist die Erweiterung damit eindeutig definiert.

Für jedes $h \in \mathbb{R}$ ist auch $A \mapsto \lambda(A + h)$ eine σ–additive Erweiterung von $\lambda|_{\mathscr{A}}$. Aus der Eindeutigkeit der Erweiterung erhalten wir, dass λ translationsinvariant ist. $\square$

Das Lebesguemaß lässt sich aber zu einem vollständigen Maß erweitern:

- Das Lebesguemaß hat eine Erweiterung zu einem vollständigen Maß
$$\lambda : \mathscr{L}_1 \to [0,\infty]$$
Die Erweiterung ist durch Satz 2.11 mit $\mathscr{L}_1 := \mathscr{M}$ gegeben.
- Die Mengen in $\mathscr{L}_1$ heißen auch Lebesguemengen.
- Es gilt $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathscr{L}_1$ (Übungsaufgabe).

In der Literatur wird das Lebesguemaß auch als vollständiges Maß $\lambda : \mathscr{L}_1 \to [0,\infty]$ definiert (Ich folge der Notation aus dem Buch von Ambrosio). Die Notation ist dann in manchen Bereichen etwas umständlicher.

Wir haben in Proposition 2.8 gesehen, dass Maße stetig sind bezüglich der Approximation durch messbare Mengen. Borelmengen lassen sich im Lebesguemaß sogar durch offene bzw. abgeschlossene Mengen approximieren. Wir formulieren dies Aussage in einem etwas allgemeineren Setting:

prp-masreg

Proposition 2.19 (Regularität von σ–endliche Maßen). *Sei X ein metrischer Raum und sei $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0,\infty]$ σ–endlich. Dann gilt für jedes $B \in \mathscr{B}(X)$:*
$$\mu(B) = \sup\{\mu(A) : A \subset B,\ \textit{abgeschlossen}\} = \inf\{\mu(U) : U \supset B,\ \textit{offen}\} \tag{2.8}$$
inout-app

Beweis. Der Beweis wurde in der Vorlesung nicht behandelt. *Der Fall, wenn μ endlich ist:* Wir nehmen zuerst an, dass μ ein endliches Maß ist. Sei $\mathscr{K}$ die Menge, so dass (2.8) gilt. Wir bemerken zuerst, dass $\mathscr{K}$ alle offenen Mengen enthält. In der Tat, für eine U offen definieren wir die Folge abgeschlossener Mengen
$$A_n := \{x \in U \ : \ d(x, U^c) \geq \frac{1}{n}\} \subset U.$$
Dann gilt $A_n \nearrow U$ und damit $\mu(A_n) \nearrow \mu(U)$. Daher enthält $\mathscr{K}$ alle offenen Mengen und es reicht zu zeigen, dass $\mathscr{K}$ eine σ–Algebra ist.

Offensichtlich gilt $\emptyset, X \in \mathscr{K}$. Falls $B \in \mathscr{K}$, dann gilt nach Definition auch $B^c \in \mathscr{K}$ (da μ endlich ist). Sei nun $B_n \in \mathscr{K}$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ abgeschlossene Mengen A_n und offene Mengen U_n mit $A_n \subset B_n \subset U_n$ mit $\mu(A_n \backslash C_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Wir definieren $S := \bigcup_n A_n$ und $U := \bigcup_n U_n$. Dann gilt $S \subset \bigcup_n B_n \subset U$ und
$$\mu(U \backslash S) \leq \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \leq \varepsilon.$$
Die Menge U ist offen, die Menge S im Allgemeinen aber nicht abgeschlossen. Allerdings sind die Mengen $S^n := \bigcup_{k=0}^n A_n$ abgeschlossen und es gilt $\mu(S^n) \nearrow \mu(S)$. Daher gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(S^{n_0}) \geq \mu(S) - \varepsilon$. Mit der Wahl $A := S^{n_0}$ erhalten wir also $A \subset \bigcup_n B_n \subset U$ und $\mu(U \backslash A) \leq 2\varepsilon$.

Der allgemeine Fall: Übungsaufgabe. $\square$

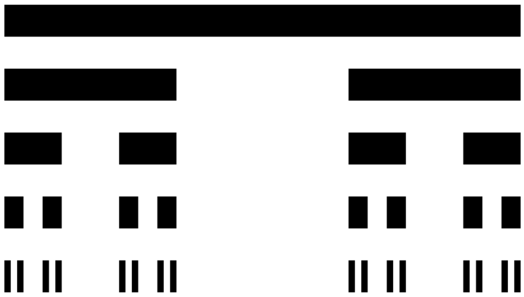

Abbildung 6: Die ersten Iterationsschritte zur Konstruktion der Cantormenge (Quelle: wikipedia)

Nach Konstruktion des Lebesguemaßes ist jede abzählbare Menge eine Nullmenge (Übungsaufgabe).

[13.11.2020]

[16.11.2020]

Ein Beispiel für eine Nullmengen, welche nicht abzählbar ist, ist die Cantormenge C. Diese ist wie folgt konstruiert: Sei $I_{0,1} = [0,1]$. Wir entfernen aus I_0 das mittlere offene Drittel des Intervalls und erhalten die beiden kompakten Intervalle $I_{1,1} = \frac{1}{3}[0,1]$, $I_{1,2} = \frac{1}{3}[2,3]$. Aus den beiden Intervallen $I_{1,1}$, $I_{1,2}$ entfernen wir jeweils das mittlere Drittel und erhalten die vier kompakten Intervalle $I_{2,1} = \frac{1}{9}[0,1]$, $I_{2,2} = \frac{1}{9}[2,3]$, $I_{2,3} = \frac{1}{9}[6,7]$, $I_{2,4} = \frac{1}{9}[8,9]$. Induktiv erhalten wir die kompakten Intervalle $I_{n,k}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, 2^n$. Die Cantormenge $C \subset [0,1]$ ist definiert

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n \qquad \text{wobei} \quad C_n := \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}.$$

Die Cantormenge gibt uns ein Beispiel für eine überabzählbare Nullmenge:

exm-cantormenge

Lemma 2.20 (Cantormenge). *Sei $C \subset [0,1]$ die Cantormenge. Dann gilt*

(i) $C \subset [0,1]$ *ist kompakt.*

(ii) $\lambda(C) = 0$.

(iii) C *ist überabzählbar*

Beweis. C is beschränkt und als Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen; insbesondere ist C kompakt. C_n ist die Vereinigung von 2^n disjunkten Intervallen der

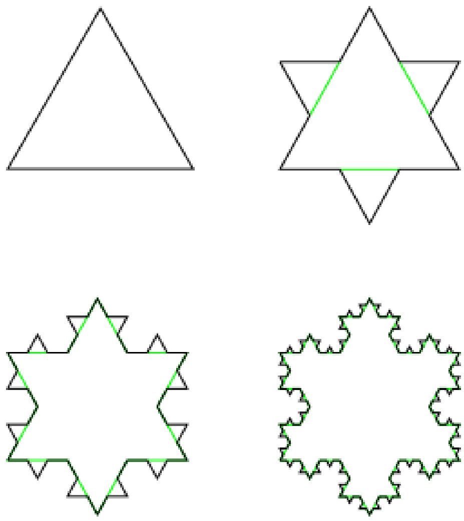

Abbildung 7: Die Koch Schneeflocke ist ein Beispiel einer fraktalen Menge. Im Bild sind die ersten vier Iterationsschritte skizziert. (Quelle: wikipedia)

Länge 3^{-n} und daher $\lambda(C_n) = 2^n 3^{-n} = (\frac{2}{3})^n$. Aus der Monotonie des Lebesguemaßes erhalten wir also $\lambda(C) \leq \lim_{n\to\infty}(C_n) = 0$. Der Beweis, dass C überabzählbar ist, ist Übungsaufgabe. □

Analog zur Definition des Lebesguesmaßes kann man auch allgemeiner s–dimensionale Maße konstrieren. Wir bemerken zuerst, dass für $n \in \mathbb{N}$ das Volumen der n–dimensionalen Einheitskugel gegeben ist durch $\alpha(n) := \pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$. Das Hausdorffmaß ist dann durch Überdeckung mit skalierten Kugeln definiert:

Definition 2.21 (Hausdorffmaß). *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$. Sei $\alpha(s) := \pi^{\frac{s}{2}}/\Gamma(\frac{s}{2}+1)$, wobei Γ die Gamma–Funktion bezeichnet. Sei*

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(s)\Big(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2}\Big)^s \;:\; A \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j, \operatorname{diam} C_j \leq \delta\Big\}.$$

Das Hausdorffmaß $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ ist dann definiert durch

$$\mathscr{H}^s(A) := \limsup_{\delta\to 0}\mathscr{H}^s_\delta(A). \tag{2.9}$$ def-hs

Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathscr{H}^s_\delta(A)$ monoton steigend für $s \to 0$, insbesondere ist der Limsup in (2.9) auch ein Limes. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\mathscr{H}^s$–Nullmenge, falls $\mathscr{H}^s(A) = 0$. Frage: Geben Sie Beispiele für $\mathscr{H}^s$–Nullmengen im $\mathbb{R}^n$.

Die Einschränkung des Hausdorffmaßes auf Borelmengen ist ein Maß. Allgemein ist das Hausdorffmaß aber nur ein äußeres Maß. Ein Maß heißt lokal endlich, wenn es zu jedem Punkt eine Umgebung mit endlichem Maß gibt.

Satz 2.22 (Eigenschaften des Hausdorffmaßes). *Sei $0 \leq s < \infty$. Dann gilt*

(i) $\mathscr{H}^s : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ *ist ein äußeres Maß*

(ii) $\mathscr{H}^s : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ *ist ein Borelmaß (aber für $s \in (0, n)$ nicht lokal endlich).*

(iii) $\mathscr{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathscr{H}^s(A) \qquad \forall A \in \mathscr{P}(X), \lambda > 0.$

(iv) $\mathscr{H}^s(A + y) = \mathscr{H}^s(A) \qquad \forall A \in \mathscr{P}(X), y \in \mathbb{R}^n.$

Beweis. Dies ist Übungsaufgabe. Zum Beweis von (ii) verwendet man das Carathéodory–Kriterion (2.2). □

Für $n = 0$ ist $\mathscr{H}^0$ das Zählmaß. Für $n = 1$ gilt außerdem $\mathscr{H}^1 = \mathscr{L}^1$ auf $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Für $s > n$ gilt $\mathscr{H}^s = 0$. Für $0 < s < n$ kann das Hausdorffmaß genutzt werden, um die Hausdorfdimension von Mengen $E \subset \mathbb{R}^n$ zu definieren:

$$\dim(E) \ := \ \inf\{s \geq 0 \ : \ \mathscr{H}^s(X) \ = 0\}.$$

Die Menge $Q = [0,1]^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ hat zweidimensionales Hausdorffmaß $\mathscr{H}^2(Q) = 1$ und es gilt $\dim(Q) = 2$. Die Hausdorffdimension der Cantormenge C ist $\dim(C) = \ln 2 / \ln 3$. Man kann analog Cantormengen mit beliebiger Dimension $s \in (0,1)$ konstruieren (Übungsaufgabe).

3 Integration

3.1 Messbare Funktionen

Wir beschäftigen uns mit Funktionen auf messbaren Räumen. Dies führt auf den Begriff der messbaren Funktion. Wir erinnern an einige Identitäten für das Urbild: Seien $(X, \mathscr{E})$, $(Y, \mathscr{F})$ messbare Räume und $f : X \to Y$. Das Urbild $f^{-1}(F)$ für $F \subset Y$ ist definiert als $f^{-1}(F) = \{x \in X : f(x) \in F\}$. Man sieht leicht, dass

- $f^{-1}(F^c) = f^{-1}(F)^c$
- $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(F_i) = f^{-1}(\bigcup_{i \in I} F_i)$
- $\bigcap_{i \in I} f^{-1}(F_i) = f^{-1}(\bigcap_{i \in I} F_i)$

Für eine Teilmenge $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ definieren wir entsprechend $f^{-1}(\mathscr{F}) = \{f^{-1}(E) : E \in \mathscr{F}\}$. Falls $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(Y)$ eine σ–Algebra ist, dann ist nach den obigen Identitäten auch $f^{-1}(\mathscr{F})$ eine σ–Algebra.

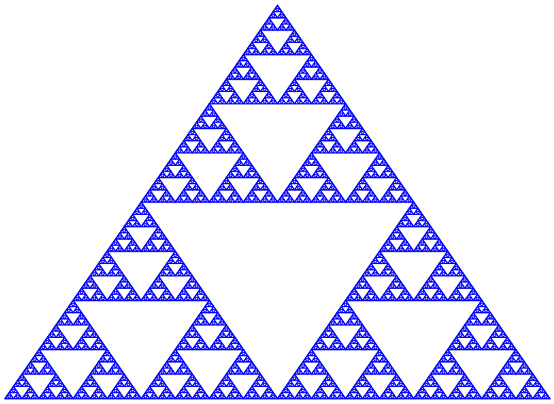

Abbildung 8: Das Sierpinsky-Dreieck hat Hausdorffdimension $\ln 3/\ln 2$. (Quelle: wikipedia)

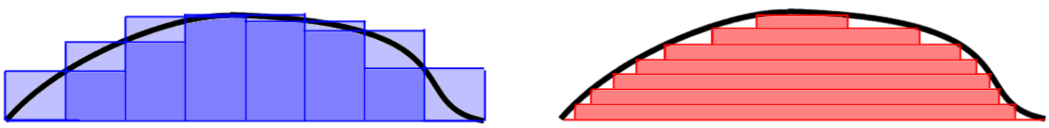

Abbildung 9: Riemannintegral vs. Lebesgueintegral. (Quelle: wikipedia)

messbarfunktion

Definition 3.1 (Messbare Funktionen). *Seien $(X,\mathscr{E})$, $(Y,\mathscr{F})$ messbare Räume.*

(i) $f : X \to Y$ heißt $(\mathscr{E},\mathscr{F})$-messbar, falls $f^{-1}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{E}$.

(ii) Falls X ein metrischer Raum ist und $\mathscr{E} = \mathscr{B}(X)$, dann heisst f borelmessbar.

(iii) Falls $X = \mathbb{R}$ und $\mathscr{E} = \mathscr{L}_1$, dann heisst f lebesguemessbar.

Falls der Zielraum ein metrischer Raum ist und die Zielalgebra nicht angegeben ist, dann wird im Zielraum die Borel-σ–Algebra angenommen.

Nach Definition ist $f : X \to Y$ also genau dann messbar, wenn $f^{-1}(F) \in \mathscr{E}\ \forall F \in \mathscr{F}$. Falls $\mathscr{E},\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ σ-Algebren sind mit $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}$, dann ist jede $\mathscr{E}$-messbare Funktion auch $\mathscr{B}$ messbar. Nach Definition ist eine borelmessbare Funktion $f : \mathbb{R} \to Y$ also auch lebesguemessbar, da $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{L}_1$. Nach dem Satz von Lusin gibt es zu jeder lebesguemessbaren Funktion f eine borelmessbare Funktion mit $f = g$ f.ü. (Übungsaufgabe). Eine charakteristische Funktion $\chi_A : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ ist genau dann $\mathscr{E}$–messbar, wenn $A \in \mathscr{E}$.

Direkt aus der Definition erhalten wir: Seien $(X,\mathscr{E})$, $(Y,\mathscr{F})$, $(Z,\mathscr{G})$ messbare Räume. Falls $f : X \to Y$ $(\mathscr{E},\mathscr{F})$–messbar und $g : Y \to Z$ $(\mathscr{F},\mathscr{G})$–messbar ist, dann ist $g \circ f$ $(\mathscr{E},\mathscr{G})$–messbar.

Es reicht, Messbarkeit für eine hinreichend große Menge von Mengen zu testen:

prp-messkrit

Proposition 3.2. *Seien $(X,\mathscr{E})$, $(Y,\mathscr{F})$ messbare Räume und sei $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ mit $\sigma(\mathscr{G}) = \mathscr{F}$. Dann ist $f : X \to Y$ genau dann messbar, wenn $f^{-1}(\mathscr{G}) \subset \mathscr{E}$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Falls Y metrischer Raum ist und $\mathscr{F} = \mathscr{B}(Y)$, dann ist also $f : X \to Y$ schon messbar, wenn $f^{-1}(\Omega) \in \mathscr{E}$ für alle offenen Mengen Ω. Falls $f : X \to \mathbb{R}$, dann ist f schon messbar, wenn $f^{-1}([a,b))$ für alle halboffenen Intervalle der Form $[a,b)$.

Insbesondere betrachten wir den Fall von Funktionen $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$, wobei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Der Raum $\overline{\mathbb{R}}$ kann metrisiert werden mit der Metrik $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to 0$

$$d(x,y) \quad = \quad \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist dann $\mathscr{E}$–messbar genau dann, wenn

$$f^{-1}(\{\infty\}) \in \mathscr{E} \qquad f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathscr{E} \qquad \text{und} \qquad f^{-1}(\mathscr{B}(\mathbb{R})) \subset \mathscr{E}.$$

Für $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir $a \wedge b := \min\{a, b\}$ und $a \vee b := \max\{a, b\}$. Wir schreiben auch $a_+ := a \vee 0$ und $a_- := -(a \wedge 0)$. Dann gilt $a = a_+ - a_-$ und $|a| = a_+ + a_-$. Entsprechend sind für $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ die Funktionen $f \wedge g$, $f \vee g$, $f_\pm$ punktweise definiert.

[16.11.2020]

[20.11.2020]

exm-messbar

Lemma 3.3 (Messbarkeitskriterien). *Sei $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum.*

(i) Falls X ein metrischer Raum ist und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ stetig, dann ist f borelmessbar.

(ii) Falls $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ monoton ist, dann ist f borelmessbar.

(iii) Falls der Maßraum $(X, \mathscr{E}, \mu)$ vollständig ist und falls $f = g$ f.ü. für $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, dann ist f genau dann messbar, wenn g messbar ist.

(iv) Falls $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \to \overline{\mathbb{R}}^m$, dann ist f genau dann messbar, wenn jede Komponente f_i, $1 \le i \le m$ messbar ist.

Beweis. Für den Beweis verwenden wir wiederholt Proposition prp-messkrit 3.2.

(i): Für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(\Omega)$ offen und daher $f^{-1}(\Omega) \in \mathscr{B}(X)$.

(ii): Dann ist $f^{-1}((t, \infty))$ ein Intervall und daher eine Borelmenge.

(iii): Sei also f messbar und es gelte $f = g$ auf $X \backslash N$ mit $\mu(N) = 0$. Sei Ω offen. Dann gibt es zwei Mengen N_1, $N_2 \subset N$ mit $\mu(g^{-1}(\Omega) = (f^{-1}(\Omega) \backslash N_2) \cup N_1$. Da f messbar ist und da der Maßraum vollständig ist, sind die Mengen $f^{-1}(\Omega)$, N_1 und N_2 messbar und daher ist $g^{-1}(\Omega)$ messbar.

(iv): Wir betrachten den Fall $m = 2$. Falls $f = (f_1, f_2) : X \to \mathbb{R}^2$ messbar ist, dann gilt $f^{-1}(\Omega \times \mathbb{R}) = f_1^{-1}(\Omega) \in \mathscr{E}$ $\forall \Omega \subset \mathbb{R}$ offen. damit ist f_1 messbar. Genauso zeigt man, dass f_2 messbar ist. Falls f_1, f_2 messbar sind, dann gilt $f^{-1}(\Omega_1 \times \Omega_2) \in \mathscr{E}$ für alle offenen Quader Q der Form $Q = \Omega_1 \times \Omega_2$. Jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich aber schreiben als $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k$ für offene Quader $Q_k \subset \mathbb{R}^2$. Die Messbarkeit von f folgt dann aus

$$f^{-1}(\Omega) = (f_1, f_2)^{-1}(\bigcup_{k=1}^\infty Q_k) = \bigcup_{k=1}^\infty (f_1, f_2)^{-1}(Q_k) \in \mathscr{E}.$$

□

Sei f die Dirichlet Funktion mit $f(x) = 1$ für $\forall x \in \mathbb{Q}$ und 0 sonst. Dann gilt $f = 0$ (Lebesgue) fast überall, da $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ eine Nullmenge ist. Insbesondere ist f messbar.

prp-messbar3

Proposition 3.4 (Eigenschaften messbarer Funktionen).

(i) Falls f, $g : X \to \mathbb{R}$ messbar sind, dann sind auch

$$-f, \quad f_-, \quad f_+, \quad |f|, \quad f \wedge g, \quad f \vee g, \quad f \pm g, \quad fg, \quad f/g$$

messbar. Wir verstehen dabei f/g als eine Funktion auf $X \backslash g^{-1}(0)$.

(ii) Falls die Elemente der Folge $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, messbar sind, dann sind auch

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \limsup_{n \to \infty} f_n, \quad \liminf_{n \to \infty} f_n, \quad \lim_{n \to \infty} f_n$$

messbar (falls existent).

Beweis. Wir geben den Beweis in einigen Fällen, die übrigen Fälle sind Übungsaufgabe. Für den Beweis nehmen wir an, dass der Zielraum der Funktionen $\mathbb{R}$ ist, die Erweiterung des Beweisen auf den allgemeineren Fall ist einfach. Wir nutzen mehrfach, dass die Menge der messbaren Mengen $\mathscr{E}$ eine σ–Algebra ist.

"$f \wedge g, f_+, f_-$": Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $(f \wedge g)^{-1}((t, \infty)) = f^{-1}((t, \infty)) \cap g^{-1}((t, \infty))$ messbar. prp-messkrit Nach Proposition 3.2 ist dann $f \wedge g$ messbar. Damit sind auch f_+, f_- messbar.

"$-f$, $f \pm g$": Offensichtlich ist $-f$ messbar. Wir bemerken, dass $(f + g)(x) > t$ genau dann, wenn $f(x) > q$ und $g(x) > t - q$ für ein $q \in \mathbb{Q}$. Daher ist für $t \in \mathbb{R}$ die Menge

$$(f + g)^{-1}((t, \infty)) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(f^{-1}((q, \infty)) \cap g^{-1}((t - q, \infty)) \right)$$

messbar. Daher ist $f + g$ messbar und damit auch $f - g = f + (-g)$ messbar.

"fg": Es reicht zu zeigen, dass f^2 messbar ist. Die Messbarkeit von fg folgt dann aus der Identität $fg = \frac{1}{2}((f + g)^2 - f^2 - g^2)$. Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$(f^2)^{-1}((t, \infty)) = f^{-1}(\sqrt{t}, \infty) \cup f^{-1}(-\infty, -\sqrt{t})$$

messbar. Daher ist f^2 messbar.

"$\sup_n f_n$": Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$(\sup_n f_n)^{-1}((t, \infty)) = \bigcap_n f_k^{-1}((t, \infty))$$

als abzählbarer Durchschnitt messbarer Mengen messbar. □

Im Falle eines volllständiger Massraumes $(X, \mathscr{E}, \mu)$ lassen sich die meisten Resultate verallgemeinern, indem wir punktweise Konvergenz durch f.ü. –Konvergenz ersetzen.

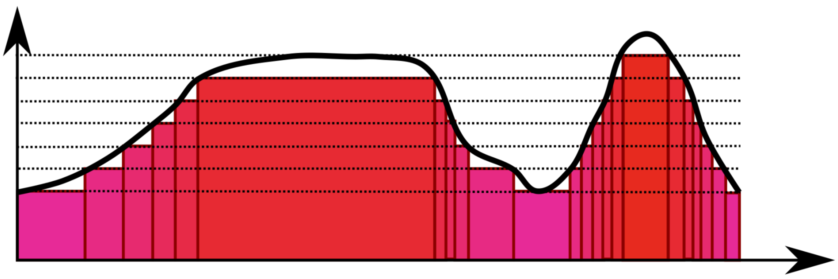

Abbildung 10: Approximation durch einfache Funktionen. (Quelle: wikipedia)

Definition 3.5 (Einfache Funktionen). *Seien X, Y Mengen. Eine Funktion $f : X \to Y$ heisst einfach, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.*

Satz 3.6 (Approximation durch einfache Funktionen). *Eine Funktion $f : X \to [0, \infty]$ ist genau dann messbar, wenn es eine monoton wachsende Folge $f_k : E \to [0, \infty]$ von einfachen, messbaren Funktionen gibt mit $f_k(x) \nearrow f(x)$ $\forall x \in E$.*

Beweis. Aus Proposition 3.4 folgt, dass der Grenzwert einer monoton wachsenden Folge messbarer Funktionen messbar ist. Es bleibt zu zeigen, dass es für jede messbare Funktion eine monoton wachsende Folgende einfacher Funktionen konstruiert werden kann mit $f_k(x) \nearrow f(x)$ $\forall x \in E$.

Zu $k \in \mathbb{N}$ definieren wir $I_{kj} := [2^{-k}(j-1), 2^{-k}j)$ für $j = 1, \ldots, k2^k$. Die Mengen $f^{-1}(I_{kj})$, $f^{-1}([k, \infty))$ sind messbar da f messbar ist. Wir definieren die einfachen und messbaren Funktionen f_k durch

$$f_k(x) := \begin{cases} 2^{-k}(j-1) & \text{falls } f(x) \in I_{kj} \text{ für ein } j = -k2^k, \ldots, k2^k, \\ k & \text{falls } f(x) \in [k, \infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

Beachte, dass für festes k die Familie von Mengen

$$\mathscr{U}_k = \{[k, \infty), I_{kj} \text{ für } j = 0, \ldots, k2^k\}$$

eine Überdeckung von $[0, \infty]$ darstellt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Familie $\mathscr{U}_{k+1}$ eine Verfeinerung von $\mathscr{U}_k$. Daraus folgt, dass $f_k(x) \le f_{k+1}(x) \le f(x)$ für alle $x \in E$. Falls $f(x) = \infty$, dann gilt $f_k(x) = k$. Falls $f(x) < \infty$, dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x) < k_0$, Aus der Definition (3.1) folgt dann $|f(x) - f_k(x)| \le 2^{-k}$ für $k \ge k_0$ und daher $f_k(x) \to f(x)$. Dies ergibt $f_k(x) \to f(x)$. $\square$

3.2 Lebesgueintegral und Konvergenzsätze

ss-leb-integral

In diesem Abschnitt ist $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren das Integral für eine Klasse von "integrierbaren" Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Wir schreiben außerdem:

- $\mathscr{S} \ := \ \{f : X \to \mathbb{R} \ : \ f$ ist einfach und messbaren$\}$,
- $\mathscr{S}_+ \ := \ \{f \in \mathscr{S} \ : \ f \geq 0\}$.

Wir benutzen im folgenden die Konvention $0 \cdot \infty = 0$.

def-leb1

Definition 3.7 (Integral auf $\mathscr{S}_+$). *Für $f \in \mathscr{S}_+$ mit $f = \sum_{k=1}^N \alpha_k \chi_{A_k}$, wobei $\alpha_k \geq 0$ und für messbare Mengen $A_k \in \mathscr{E}$, definieren wir*

$$\int f \ d\mu \ := \ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu(A_k) \quad \in [0, \infty).$$

Man überprüft induktiv leicht, dass die Definition nicht von der Wahl der Darstellung von f abhängt (Übungsaufgabe). Wir sammeln einige Eigenschaften des Integrals:

prp-leb1

Proposition 3.8. *Für $f, g \in \mathscr{S}_+$ gilt*

(i) $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) \ d\mu = \alpha \int f \ d\mu + \beta \int g \ d\mu \qquad \forall \alpha, \beta \geq 0.$

(ii) $\displaystyle\int f \ d\mu \leq \int g \ d\mu,$ *falls* $f \leq g$.

(iii) $\displaystyle\int f \ d\mu \leq \mu(\operatorname{spt} f) \ \sup_{x \in X} f(x).$

Beweis. (i),(ii) folgen aus der Definition. (iii) folgt aus $f \leq \sup_x f \chi_E$ und (ii). □

def-leb2

Definition 3.9 (Integral für nichtnegative Funktionen). *Falls $f : X \to [0, \infty]$ messbar ist, dann definieren wir*

$$\int f \ d\mu := \sup \left\{ \int g \ d\mu \ : \ g \leq f, g \in \mathscr{S}_+ \right\} \quad \in [0, \infty].$$

Falls das Integral endlich ist, dann nennen wir f integrierbar.

Für $f \in \mathscr{S}_+$ ist das Integral von f nun sowohl durch Definition 3.7 als auch Definition 3.9 definiert. Beide Definition stimmen aber wegen Proposition 3.8(ii) überein.

Satz 3.10 (Satz von der monotonen Konvergenz in $\mathscr{S}_+$). *Sei $f_k \in \mathscr{S}_+$ eine Folge mit $f_k \nearrow f$. Dann ist f messbar und es gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu \;=\; \int f \, d\mu.$$

Beweis. Nach Proposition 3.4 ist f messbar. Nach Proposition 3.8 steigt die Folge $\int f_k$ monoton. Daher existiert der Limes und

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu \;\le\; \int f \, d\mu.$$

Nach Definition 3.9 existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathscr{S}_+$ mit $g \le f$, $\int g \, d\mu < \infty$ und

$$\int g \, d\mu \;\ge\; \begin{cases} \int f d\mu - \varepsilon, & \text{falls } \int f d\mu < \infty, \\ \int g \, d\mu \;\ge \dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{falls } \int f d\mu = \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

[20.11.2020]

[23.11.2020]

Insbesondere gilt $\mu(E) < \infty$ für $E := \operatorname{spt} g$. Für $g_k := g \wedge f_k \in \mathscr{S}_+$ gilt dann $g_k \nearrow g$ für $k \to \infty$. Wir definieren

$$B_k \;:=\; \{x \in X : g(x) - g_k(x) > \frac{\varepsilon}{\mu(E)}\}.$$

Da $g_k \nearrow g$ erhalten wir $B_{k+1} \subset B_k$ und $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k = \emptyset$. Mit Proposition 2.8(ii) folgt $\mu(B_k) \to 0$ für $k \to \infty$. Daher gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(B_k) < \frac{\varepsilon}{M} \qquad\qquad \forall k \ge k_0$$

für $M := \sup_{x\in X} g$. Da $g_k \nearrow g$ gilt insbesondere $\operatorname{spt} g_k \subset E$ und $\sup g_k \le M$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Aus Proposition 3.8(i),(iii) erhalten wir,

$$\begin{aligned} \int_X g \, d\mu - \int_X g_k \, d\mu \;&=\; \int_{B_k} (g - g_k) \, d\mu + \int_{X\setminus B_k} (g - g_k) \, d\mu \\ &=\; \mu(B_k) \sup_{x\in B_k} (g - g_k) + \mu(E) \sup_{x\in E\setminus B_k} (g - g_k) \;\le\; 2\varepsilon \qquad \forall k \ge k_0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Zusammen mit (3.2) erhalten wir

$$\int f_k \, d\mu \ge \int g_k \, d\mu \overset{(3.3)}{\ge} \int g \, d\mu - 2\varepsilon \overset{(3.2)}{\ge} \min\Big\{ \int f \, d\mu, \frac{1}{\varepsilon} \Big\} - 3\varepsilon \qquad \forall k \ge k_0.$$

Im Limes $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. $\square$

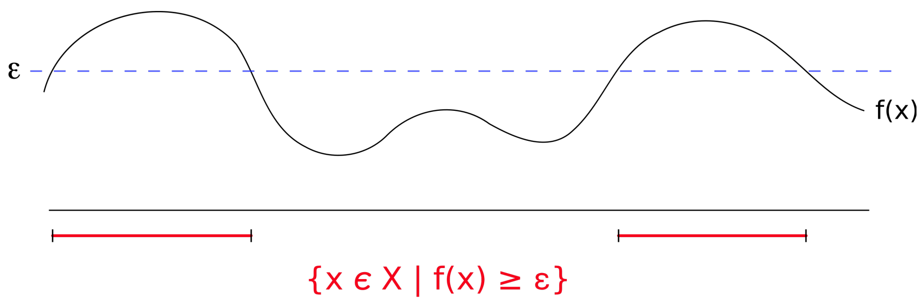

Abbildung 11: Die Chebyshev gibt eine Abschätzung über das Maß der Menge, an der eine Funktion einen bestimmten Wert überschreitet. (Quelle: wikipedia)

Die Eigenschaften des Integrals übertragen sich auf nichtnegative, messbare Funktionen:

prp-leb2 **Proposition 3.11.** *Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt*

(i) $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g)\ d\mu = \alpha \int f\ d\mu + \beta \int g\ d\mu \qquad \forall \alpha, \beta \geq 0.$

it-posmon *(ii)* $\displaystyle\int f\ d\mu \leq \int g\ d\mu$, *falls* $f \leq g$.

itleb2-supest *(iii)* $\displaystyle\int f\ d\mu \leq \mu(\operatorname{spt} f) \sup_x f.$

Beweis. *(i):* Nach Satz 3.6 gibt es Folgen von Funktionen $f_n, g_n \in \mathscr{S}_+$ mit $f_n \nearrow f$, $g_n \nearrow g$. Nach Proposition 3.8 und Satz 3.10 gilt im Limes $n \to \infty$,

$$\int f\ d\mu + \int g\ d\mu \ \leftarrow\ \int f_n\ d\mu + \int g_n\ d\mu \ = \int (f_n + g_n)\ d\mu \ \to\ \int (f+g)\ d\mu.$$

Der Beweis von (ii),(iii) ist analog zum Beweis von (i). □

thm-chebyshev **Satz 3.12 (Chebyshev Ungleichung).** *Für jedes messbare $f : X \to [0, \infty]$ gilt*

$$\mu\Big(\big\{x \in X : f(x) \geq t\big\}\Big) \ \leq\ \frac{1}{t} \int f\ d\mu \qquad \forall t > 0.$$

Beweis. Für $A_t = \{x \in X : f(x) \geq t\}$ gilt $t\chi_{A_t} \leq f\chi_{A_t} \leq f$ und daher

$$t\mu(A_t) = \int t\chi_{A_t}\ d\mu \leq \int f\chi_{A_t}\ d\mu \leq \int f\ d\mu.$$

$\square$

lem-lebmodnull **Lemma 3.13.** *Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar .*

(i) Es gilt $\int f \, d\mu \; = \; 0$ *genau dann, wenn* $f = 0$ *f.ü..*

-leb-intcrit-fu *(ii) Falls* $f = g$ *f.ü., dann gilt* $\int f \, d\mu \; = \; \int g \, d\mu$.

(iii) Falls $\int f \, d\mu \; < \; \infty$, *dann gilt* $f < \infty$ *f.ü..*

prp-leb2-supest *Beweis. (i):* Falls $f = 0$ f.ü., dann erhalten wir $\int f \, d\mu \; = \; 0$ aus Proposition 3.11(iii). Umgekehrt, falls $\int f \, d\mu \; = \; 0$, dann gilt mit der Chebyshevschen Ungleichung $t\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq t\}) = 0 \; \forall t > 0$. Daher ist

$$\mu(\{f(x) > 0\}) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f(x) \geq \frac{1}{n}\}) \; \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{f(x) \geq \frac{1}{n}\}) = 0.$$

(ii): Aus (i) erhalten wir $\int |f - g| = 0$. Daraus folgt die Aussage.

(iii): Folgt aus Chebyshevschen Ungleichung. $\square$

Um Funktionen der Form $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zu integrieren, zerlegen wir diese in der Form $f = f_+ - f_-$ mit $f_\pm : X \to [0, \infty]$.

Definition 3.14. *Eine messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt integrierbar, falls beide Funktionen f_- und f_+ integrierbar sind. Wir definieren dann das Integral von f durch*

$$\int f \, d\mu \; := \; \int f_+ \, d\mu - \int f_- \, d\mu \; \in \; \mathbb{R}.$$

Falls $f\chi_A$ integrierbar ist für $A \in \mathscr{E}$, dann heißt f auf A integrierbar ist und wir schreiben

$$\int_A f \, d\mu \; := \; \int f\chi_A \, d\mu.$$

Im Allgemeinen bilden die integrablen Funktionen mit Zielraum $\overline{\mathbb{R}}$ keinen Vektorraum, da $f + g$ nicht unbedingt punktweise definiert ist. Dies erklärt die Einschränkung in der nächsten Proposition.

prp-leb3

Proposition 3.15 (Eigenschaften des Integrals). *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar.*

(i) Falls $\alpha f + \beta g$ für α, β definiert ist, dann ist diese Funktion integrierbar und

$$\int_X \alpha f + \beta g \; d\mu \;=\; \alpha \int_X f \; d\mu + \beta \int_X g \; d\mu \qquad \textit{(Linearität)}$$

(ii) $\displaystyle\int_X f \; d\mu \;\leq\; \int_X g \; d\mu \qquad$ *falls $f \leq g$*

(iii) $\displaystyle\int_X f \; d\mu \;\leq\; \mu(\operatorname{spt} f) \sup_x |f|.$

(iv) $\displaystyle\int_X f \; d\mu \;\leq\; \int_X |f| \; d\mu \; < \infty$

Beweis. *(i):* Wir geben den Beweis für den Fall $\alpha > 0$, $\beta = 0$, die anderen Fälle verlaufen analog. Aus Proposition 3.11 und mit der Notation $f = f_+ - f_-$ folgt

$$\begin{aligned}\int \alpha f \; d\mu + \int g \; d\mu \;&= \int \alpha f_+ \; d\mu - \int \alpha f_- \; d\mu + \int g_+ \; d\mu - \int g_- \; d\mu \\ &= \int (\alpha(f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) \; d\mu = \int (\alpha f + g) \; d\mu.\end{aligned}$$

(ii): Aus $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+$ und $-f_- \leq -g_-$. Wende Proposition 3.11(ii) an.

(iii): Folgt aus $f \leq \sup f \chi_E$ und (ii).

(iv): Folgt aus $|f| = f_+ + f_-$ und (ii). □

Wir erinnern daran, dass eine Funktion $f = (f_i)_{i=1}^m : X \to \mathbb{R}^n$ genau dann messbar ist, wenn jede Komponente f_i messbar ist. Auch das Integral ist komponentenweise definiert:

Bemerkung 3.16 (Integral vektorwertiger Funktionen). *Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}^m$ heisst integrabel, falls f_i integrierbar ist für $i = 1, \ldots, m$. Wir schreiben*

$$\int f \; d\mu := \Big(\int f_1 \; d\mu, \ldots, \int f_m \; d\mu \Big).$$

Die Funktion f heißt dann integrabel, wenn jede Komponente f_i integrabel ist. Die vorherigen Resultate lassen sich leicht verallgemeinern: Insbesondere ist der Raum der integrablen Funktionen $f : X \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorraum. Es gilt:

(i) $\displaystyle\int_E \alpha f + \beta g \; d\mu \;=\; \alpha \int_E f \; d\mu + \beta \int_E g \; d\mu$

(ii) $\displaystyle \left|\int_E f\ d\mu\right| \ \leq\ \mu(\operatorname{spt} f)\sup_x |f|.$

(iii) $\displaystyle \left|\int_E f\ d\mu\right| \ \leq\ \int_E |f|\ d\mu.$

Ein grosser Vorteil des Lebesgueintegrals ist das Vorhandensein von allgemeinen Konvergenzsäzten. In Kapitel 3.2 hatten wir schon das erste Konvergenzresultat hergeleitet, den Satz von der monotonen Konvergenz, welcher auch Satz von Beppo-Levi genannt wird. Dieser gilt allgemein für nichtnegative, messbare Funktionen:

Satz 3.17 (Satz von der monotonen Konvergenz). *Sei $f_n : X \to [0,\infty]$ eine monoton wachsende Folge messbarer Funktionen. Dann ist $f := \lim f_n$ messbar und*

$$\int f\ d\mu \ =\ \lim_{n\to\infty}\int f_n\ d\mu.$$

Beweis. Nach Satz 3.6 gibt es zu f_n eine Folge $h_{nj} \in \mathscr{S}_+$ mit $h_{nj} \nearrow f_n$. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $f_n \nearrow f$ gilt $f_{n_0}(x) > f(x) - \varepsilon$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Da $h_{n_0 j} \nearrow f_{n_0}$ gilt $h_{n_0 j_0}(x) \geq f_{n_0}(x) - \varepsilon$ für ein $j_0 \in \mathbb{N}$. Wir definieren die monoton steigende Folge

$$g_n := \max\{h_{jk} : 1 \leq j,k \leq n\} \in \mathscr{S}_+.$$

Insbesondere gilt $g_n \leq \max(f_j)_{j=1}^n \leq f_n$. Mit $k_0 := \max\{n_0, j_0\}$ erhalten wir

$$g_{k_0}(x) \geq h_{n_0 j_0}(x) \geq f_{n_0}(x) - \varepsilon \geq f(x) - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $g_n(x) \nearrow f(x)$ und $g_n \in \mathscr{S}_+$. Dann folgt die Aussage des Satzes aus einer Anwendung von Satz 3.10. $\square$

Aus Satz 3.17 erhalten wir ein Konvergenzkriterium für Reihen: Für eine Folge $f_n : X \to [0,\infty]$ von messbaren Funktionen mit $f_n \nearrow f$ gilt

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} f_n\ d\mu \ =\ \sum_{n=0}^{\infty}\int f_n\ d\mu.$$

Die monotone Konvergenz der Folge ist eine notwendige Voraussetzung für Satz 3.17: Sei $f : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ mit $\int f\ dx = 1$ und sei $f_n(x) := nf(nx)$. Dann gilt $f_n \to 0$, aber $1 = \int f_n dx \not\to \int f dx = 0$. Allerdings ist das Integral unterhalbstetig für eine Folge von nichtnegativen Funktionen, welche punktweise konvergiert: [23.11.2020]

[27.11.2020]

lem-fatou **Lemma 3.18 (Lemma von Fatou).** *Sei $f_n : X \to [0,\infty]$ eine Folge messbarer Funktionen. Dann ist $\liminf_{n\to\infty} f_n$ messbar und es gilt*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Für $f := \liminf f_n \ge 0$ und $g_n = \inf\{f_k\}_{k=n}^{\infty} \le f_n$ erhalten wir $g_n \nearrow f$ nach Definition des Limes inferior. Anwendung von Satz 3.17 ergibt

thm-beppolevi

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \;=\; \int f \, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

□

Der nächste Satz heißt auch Satz von Lebesgue:

thm-lebesgue **Satz 3.19 (Satz von der dominierten Konvergenz).** *Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge messbarer Funktionen mit $f_n \to f$ für ein $f : X \to \mathbb{R}$. Es gelte $\sup\{|f_n|\}_{n\in\mathbb{N}} \le g$ für eine integrable Funktion $g : X \to [0,\infty]$. Dann ist f integrabel und es gilt*

$$\int f \, d\mu \;=\; \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

prp-messbar3

Beweis. Nach Proposition 3.4 ist f messbar. Da g integrabel ist und und $|f| \le \sup_n |f_n(x)| \le g(x)$ ist auch f integrabel. Nach Voraussetzung gilt $g - f_n \ge 0$ und $g - f_n \to g - f$. Nach dem Lemma von Fatou erhalten wir also

$$\int g - f \, d\mu \;\le \liminf_{n\to\infty} \int g - f_n \, d\mu \;= \int g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Es gilt weiterhin $g + f_n \ge 0$ und $g + f_n \to f + g$. Mit dem Lemma von Fatou folgt

$$\int g + f \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int g + f_n \, d\mu = \int g \, d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beide Aussagen ergeben die Behauptung. □

Die drei Konvergenzsätze sind äquivalent und können in beliebiger Reihenfolge auseinander abgeleitet werden (Übungsaufgabe). Wir können nun zeigen, dass das Lebesgueintegral eine Erweiterung des Riemannintegrals ist:

Satz 3.20 (Lebesgueintegral vs. Riemannintegral). *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

(i) f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn f λ-fast überall stetig ist.

(ii) Falls f Riemann-integrierbar ist, dann ist f Lebesgue-integrierbar.

(iii) Falls $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist, dann ist f Lebesgue-integrierbar.

Falls Rieman–Integral und Lebesgue–Integral beide definiert sind, dann stimmen die Integrale überein.

Beweis. Die Beweise sind Übungsaufgabe. □

Wir können das Integral auch nutzen, um neue Maße zu definieren. Einer μ–integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ ordnen wir das Maß μ_f zu mit der Definition

$$f \mapsto \mu_f, \qquad \mu_f(A) \ := \int_A f \, d\mu. \tag{3.4}$$

fun-mass

Jedes Maß von der Form μ_f ist ein lokal endliches Borelmaß, falls μ ein lokal endliches Borelmaß ist. Wir definieren

Definition 3.21 (Radonmaß). *Ein Radonmaß auf $\mathbb{R}^n$ ist ein lokal endliches Borelmaß $\mu : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ mit $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{A}$.*

In diesem Sinne sind die nichtnegativen, μ–integrablen Funktionen eingebettet in den Raum $\mathscr{M}_+$ der Radonmaße. Wir erinnern, dass Radonmaße im $\mathbb{R}^n$ insbesondere die Regularitätseigenschaft aus Proposition 2.19 haben. Mit der Identifikation (3.4) gilt

$$\{\ \mu \text{ integrable Funktionen } f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)\} \ \subset \ \mathscr{M}_+.$$

In diesem Sinne können wir Maße auch als verallgemeinerte Funktionen verstehen.

Wir betrachten nun den Raum $X := C_c^0(A)$ für ein festes $A \subset \mathbb{R}^n$. Der Raum X ist ein normierter Raum mit der Supremums-Norm. Für $\mu \in \mathscr{M}_+$ definieren wir

$$L_\mu(f) \ := \ \langle \mu, f \rangle \ \ := \int_A f \, d\mu.$$

Dann ist $L_\mu : X \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf X. Aus $f_k \rightrightarrows f$ folgt $L_\mu(f_k) \to f$. Das Funktional ist also stetig. L_f ist auch nichtnegativ, da $L_\mu(f) \geq 0$, falls $f \geq 0$. Damit ist $L_m \in X'$ dem Dualraum von X, definiert als der Raum der stetigen, linearen Funktionale auf X. Umgekehrt kann man zeigen, dass es zu jedem nichtnegativen stetigen Funktional L auf X ein Radonmaß μ gibt, so dass $L = L_\mu$. Dies wird in der Vorlesung Funktionalanalysis behandelt. In diesem Sinne ist der Raum der signierten Radonmaße also der Dualraum zum Raum der stetigen Funktionen.

3.3 Räume integrabler Funktionen

Im Abschnitt ist $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Zu $x \in \mathbb{R}^n$ kennen wir die p–Norm $|x|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. Wenn wir die Summe durch ein Integral ersetzen, können wir analog Funktionenräume integrabler Funktionen definieren. Wir definieren wir das <u>essentielle Supremum</u> und das <u>essentielle Infimum</u> von f durch

$$\operatorname*{ess\,sup}_E f := \inf\{ \sup_{x \in E \setminus N} f(x) : N \subset E, \mu(N) = 0\},$$
$$\operatorname*{ess\,inf}_E f := \sup\{ \inf_{x \in E \setminus N} f(x) : N \subset E, \mu(N) = 0\}$$

Die Ungleichung $\operatorname{ess\,sup}_X f(x) \leq M$ bedeutet also $f(x) \leq M$ f.ü. .

Definition 3.22 ($\mathscr{L}^p(X, \mathscr{E}, \mu)$)**.** *Zu jeder messbaren Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ definieren wir*

$$\|f\|_p \ := \ \Big(\int |f|^p \, d\mu \Big)^{1/p} \ \textit{für } 1 \leq p < \infty, \qquad \|f\|_\infty \ := \ \operatorname*{ess\,sup}_X |f|.$$

Der entsprechende Raum ist definiert durch

$$\mathscr{L}^p(X, \mathscr{E}, \mu) \ := \ \{ f : X \to \mathbb{R} : f \textit{ messbar und } \|f\|_p < \infty \}$$

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}$ als Zielraum, da der Raum $\overline{\mathbb{R}}$ kein Vektorraum ist. Wir zeigen als nächstes, dass $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{E}, \mu)$ in der Tat ein Vektorraum ist. Dafür leiten wir zuerst einige wichtige Ungleichungen her:

Lemma 3.23 (Youngsche Ungleichung). *Für $\forall x, y \geq 0$ gilt*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^{p'}}{p'} \qquad \forall 1 < p < \infty \textit{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{3.5}$$

eq-young

wobei der <u>duale Exponent</u> p' zu p gegeben ist durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \ = 1.$$

Beweis. Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Ungleichung trivial. Wir nehmen daher $x, y > 0$ an. Da der Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton ist, ist (3.5) äquivalent zu

$$\frac{1}{p} \ln x^p + \frac{1}{p'} \ln y^{p'} = \ln x + \ln y = \ln(xy) \leq \ln\Big(\frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \Big).$$

Diese Ungleichung folgt, da der Logarithmus konkav ist. □

[27.11.2020]
[30.11.2020]

Insbesondere gibt es jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $C_{\varepsilon p} < \infty$ mit $xy \leq \varepsilon x^p + C_{\varepsilon p} x^{p'}$.

lderungleichung **Satz 3.24 (Hölderungleichung).** *Sei* $1 \leq p \leq \infty$*. Für* $f \in \mathscr{L}^p(X)$*,* $g \in \mathscr{L}^{p'}(X)$ *gilt*

$$\int |fg| \; d\mu \;\; \leq \;\; \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Beweis. Wir schreiben $q := p'$. Für $p = 1, q = \infty$ gilt $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ f.ü. und

$$\int |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int |f| \; d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1,$$

insbesondere $fg \in \mathscr{L}^1(X, Y)$. Die Behauptung für $p = \infty$, $q = 1$ gilt analog. Sei nun $1 < p, q < \infty$. Mit der Young'schen Ungleichung gilt für alle $s > 0$,

$$\int |fg| d\mu \leq \int \Big(\frac{s^p |f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{s^q q} \Big) \; d\mu \leq \frac{s^p}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q s^q} \|g\|_q^q. \tag{3.6}$$ eq-hol2

und insbesondere $fg \in \mathscr{L}^1(X)$. Wir können die rechte Seite von (3.8) durch eine geschickte Wahl von s minimieren. Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erhalten wir $\frac{1}{p} = \frac{q-1}{q}$, $p = \frac{q}{q-1}$ und $\frac{q}{p} = q - 1$. Mit der Wahl $s = \|f\|_p^{\frac{1-p}{p}} \|g\|_p^{\frac{1}{p}}$ folgt

$$s^p = \|f\|_p^{1-p} \|g\|_p \qquad \text{und} \qquad s^{-q} = \|f\|_p^{\frac{(p-1)q}{p}} \|g\|_p^{-\frac{q}{p}} = \|f\|_p \|g\|_p^{1-q} \tag{3.7}$$ hoel-wahlpq

Aus (3.8)–(3.7) folgt damit

$$\int |fg| d\mu \leq \Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \Big) \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q. \tag{3.8}$$ eq-hol2

□

Die Höldergleichung lässt sich auf Produkte mit mehr als zwei Faktoren verallgemeinern (Übungsaufgabe). Die Abbildung $\|\cdot\|_p$ erfüllt die Dreiecksungleichung:

thm-mink **Satz 3.25 (Minkowski Ungleichung).** *Für* $p \in [1, \infty]$ *gilt* $f + g \in \mathscr{L}^p(X, Y)$ *und*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \forall f, g \in \mathscr{L}^p(X, Y). \tag{3.9}$$ ineq-mink

Insbesondere ist $\mathscr{L}^p(X)$ *ein Vektorraum mit Seminorm* $\|\cdot\|_p$.

Beweis. Es gilt $\|0\|_p = 0$ und $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$. Es bleibt (3.9) zu zeigen:

Der Fall $p = \infty$: Es gilt $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ für $x \in X\backslash N_1$ und $|g(x)| \le \|g\|_\infty$ für $x \in X\backslash N_2$ für zwei Nullmengen N_1, N_2. Damit ist $N := N_1 \cup N_2$ eine Nullmenge und $|f(x)+g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ $\forall x \in X\backslash N$. Daraus folgt $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty < \infty$.

Der Fall $p \in (1,\infty)$*:* Wir schreiben

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu \\ &\le \int |f(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu + \int |g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu.\end{aligned}$$

Aus $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ erhalten $(p-1)p' = p$. Mit der Hölderungleichung erhalten wir also

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p \le& \Big(\int |f(x)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int |f(x)+g(x)|^{(p-1)p'} d\mu\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ &+ \Big(\int |g(x)|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int |f(x)+g(x)|^{(p-1)p'} d\mu\Big)^{\frac{1}{p'}} \\ \le& \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\|f+g\|_p^{p/p'}.\end{aligned}$$

Wir teilen die Ungleichung durch $\|f+g\|_p^{p/p'}$. Die Aussage folgt dann aus $p - \frac{p}{p'} = 1$. $\square$

Aus $\|f\|_p = 0$ folgt nur $f = 0$ f.ü.. Um normierte Räume zu erhalten, betrachten die Äquivalenzklassen $f \sim g \iff f(x) = g(x)$ f.ü.. Offensichtlich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation (d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv). Die zugehörige Äquivalenzklasse ist

$$[f] := \{g \in \mathscr{L}(X,\mathbb{R}^n) : f(x) = g(x) \text{ f.ü. }\}$$

Für $f, g \in \mathscr{L}^p(X,\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir

- $[f+g] := [f] + [g], \qquad [\lambda f] = \lambda[f]$
- $\|[f]\|_p := \|f\|_p$.
- $[f_k]$ ist messbar, falls ein Repräsentant f_k messbar ist.
- $[f_k] \to [f]$ f.ü. , falls es ein Repräsentanten gibt mit $f_k \to f$ f.ü. .

Man überprüft leicht, dass diese Definitionen konsistent sind. Zum Beispiel gilt $f(x) + g(x) = \tilde f(x) + \tilde g(x)$ f.ü. , falls $f(x) = \tilde f(x)$ und $g(x) = \tilde g(x)$ f.ü. . Falls die Funktionen $[f_k]$ messbar sind und $[f_k] \to [f]$ f.ü. , dann gibt es messbare Repräsentanten f_k mit $f_k \to f$ f.ü. . Wir können den Repräsentanten f so wählen, dass $f_k \to f$ punktweise überall gilt. Dann ist auch f messbar. Wir erhalten also die Aussage:

- Falls $[f_k]$ messbar ist und $[f_k] \to [f]$ f.ü. , dann ist $[f]$ messbar.

Definition 3.26 (L^p-Räume). *Sei $p \in [1,\infty]$. Für $f,g \in \mathscr{L}^p(X,\mathbb{R}^n)$ definieren wir*

$$L^p(X,\mathscr{E},\mu) := \mathscr{L}^p(X,\mathscr{E},\mu)/\sim \; = \; \{[f] : f \in \mathscr{L}^p(X,\mathscr{E},\mu)\}.$$

Wir sagen $f_k \to f$ in L^p, falls $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$ für $k \to \infty$.

Elemente in L^p sind keine Funktionen sondern Äquivalenzklassen von Funktionen. Wir stellen uns trotzdem Elemente von L^p als Funktionen vor mit der Konvention, dass zwei Funktionen gleich sind, wenn sie fast überall übereinstimmen. Wir werden die Notation $\mathscr{L}^p(X,\mathscr{E},\mu)$ nicht mehr benutzen und schreiben $f \in L^p(X,\mathscr{E},\mu)$ mit der Bedeutung, dass $f \in \mathscr{L}^p(X,\mathscr{E},\mu)$ ein Repräsentant der Äquivalenzklasse $[f] \in L^p(X,\mathscr{E},\mu)$ ist.

Die Konvergenzsätze lassen sich für $1 \le p < \infty$ auch in einer Form formulieren, die an L^p–Räume angepasst ist. Der Beweis ist Übungsaufgabe.

rem-lebesgue-p

Bemerkung 3.27 (Konvergenzsätze in L^p).

(i) Sei $1 \le p < \infty$ und $f_n \in L^p(X,\mathscr{E},\mu)$ mit $f_n \to f$ μ-f.ü. und $|f_n| \le g$ μ-f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$ für ein $f : X \to \mathbb{R}$ und ein $g \in L^p(X,\mathscr{E},\mu)$. Dann gilt $f \in L^p(X,\mathscr{E},\mu)$ und

$$f_k \to f \qquad \text{in } L^p(X,\mathscr{E},\mu).$$

(ii) Die entsprechende Aussage gilt nicht für $p = \infty$. Für $g, f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k = \chi_{[k,k+1]}$ gilt z.B. $f_k \to 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k \le 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$, aber $\int_{\mathbb{R}} f_k \, dx = 1 \not\to \int_{\mathbb{R}} 1 \, dx = \infty$.

Wir erinnern, dass ein metrischer/normierter Raum vollständig heißt, falls jede Cauchyfolge konvergiert. Dies führt auf die folgende Definition:

Definition 3.28 (Banachraum, Hilbertraum).

(i) Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum.

(ii) Ein vollständiger Raum mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum.

Frage: Sind die Räume $C^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, Banachräume? Frage: Kennen Sie weitere unendlich dimensionale Banachräume/Hilberträume?

thm-lpbanach

Satz 3.29 (L^p–Räume als Banachräume, L^2 als Hilbertraum).

(i) Für $p \in [1,\infty]$ ist $L^p(X,\mathscr{E},\mu)$ ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|_p$.

(ii) Der Raum $L^2(X,\mathscr{E},\mu)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{L^2}$.

Beweis. Aus $\|[f]\|_{L^p} = 0$ folgt $f = 0$ f.ü. und daher $[f] = 0$ nach Lemma 3.13. Zusammen mit Satz 3.25 erhalten wir, dass L^p ein normierter Vektorraum ist. Es bleibt zu zeigen, dass X vollständig ist. Sei also $f_n \in L^p$ eine Cauchyfolge.

Der Fall $p = \infty$: Nach Annahme gibt es Nullmengen N_{kj}, $k, j \in \mathbb{N}$ so dass es für $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$|f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \qquad\qquad \forall x \in X \backslash N_{jk}, \forall k, j \geq n_0$$

Dann ist auch $N := \bigcup_{j,k} N_{jk}$ eine Nullmenge und es gilt

$$|f_k(x) - f_j(x)| < \varepsilon \qquad\qquad \forall x \in X \backslash N, \forall k, j \geq n_0 \tag{3.10}$$

Daher ist $f_n(x)$ eine Cauchyfolge $\forall x \in X \backslash N$ und $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert. Hier haben wir genutzt, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist. Wir setzen ausserdem $f(x) := 0$ für $x \notin N$. Dann ist f messbar als f.ü. Limes von messbaren Funktionen. Im Limes $n \to \infty$ und $\varepsilon \to$ erhalten wir aus (3.10), dass $f_n \to f$ in L^∞ und $f \in L^\infty$.

Der Fall $p \in (1, \infty)$: Es reicht zu zeigen, dass es eine Teilfolge von f_n gibt, welche in L^p gegen f konvergiert. Da f_n eine Cauchyfolge ist, konvergiert dann die ganze Folge. Da f_n eine Cauchyfolge ist, können wir nach Auswahl einer Teilfolge also annehmen, das

$$\|f_n - f_{n+1}\|_p \leq 2^{-n}.$$

Wir definieren nun die monoton wachsende Folge von Funktionen

$$F_k(x) := |f_0(x)| + \sum_{n=1}^{k} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|, \qquad F(x) := \lim_{k\to\infty} F_k(x). \tag{3.11}$$

Da die Folge F_k monoton steigend ist, ist $F(x) \in [0, \infty]$ wohldefiniert für alle $x \in X$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt daher

$$\|F\|_p = \lim_{k\to\infty} \|F_k\|_p \leq \|f_0\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_p \leq \|f_0\|_p + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$$

Insbesondere gilt $F \in L^p$. Wir schreiben f_k als Teleskopsumme, d.h.

$$f_k(x) \;=\; f_0(x) + \sum_{n=1}^{k} \big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big). \tag{3.12}$$

Da F_k f.ü. konvergiert, konvergiert im Vergleich (3.11)–(3.12) auch f_k f.ü. . Bis auf eine $N \subset X$ existiert also der Limes $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ $\forall x \notin N$. Dann gilt $|f_k| \leq F$ f.ü. und $f_k \to f(x)$ f.ü.. Aus Bemerkung 3.27 erhalten wir $f \in L^p$ und $f_k \to f$ in L^p. □

Aus dem Beweis von Satz 3.29 sehen wir, dass wir jeder L^p–Cauchyfolge von stetigen Funktionen eine f.ü. definierte Grenzfunktion zuordnen können. Diese Grenzfunktion ist als f.ü. –Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen auch messbar. Dies kann genutzt werden, um den Raum Lebesgue–messbarer Funktionen als den Norm-Abschluss des Raumes Riemann–integrierbarer Funktionen zu definieren. Der metrische Abschluss ist dann wiederum kein Raum von Funktionen, sondern ein Raum von Äquivalenzklassen.

[30.11.2020]

[4.12.2020]

Der Dualraum V^* eines endlich–dimensionalen Vektorraum V ist definiert als der Raum der linearen Funktionale auf V. Jeder endlich dimensionale Raum isomorph zu seinem Dualraum. Der Dualraum V^* eines endlich–dimensionalen Raumes ist isomorph zu seinem Dualraum. Alle linearen Funktionale auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind stetig. Für einen unendlich–dimensionalen Vektorraum gelten diese Aussagen im Allgemeinen nicht mehr. Allgemein definieren wir den Dualraum als Raum der stetigen, linearen Funktionale:

Definition 3.30 (Dualraum). *Der Dualraum des topologischen Vektorraum V ist*

$$V^* \;:=\; \{\varphi : V \to \mathbb{R} :\; \varphi \textit{ ist stetig und linear}\}.$$

Falls der Raum V normiert ist, dann lässt sich auf V^* eine Norm $\|\cdot\|_{V^*}$ definieren durch $\|\varphi\|_{V^*} := \sup_{|x|=1} |\varphi(x)|$ (Übungsaufgabe). Eine Lineare Abbildung ist genau dann stetig, wenn der Einheitsball auf eine beschränkte Menge abgebildet wird (Übungsaufgabe).

Man kann zeigen, dass für $1 < p < \infty$ der Raum $L^{p'}$ isometrisch isomorph zu $(L^p)^*$ ist. Die Isometrie ist gegeben durch

$$\varphi : L^{p'} \to (L^p)^*, \qquad \varphi(f)(g) \;:=\; \int_X fg\; d\mu \quad \forall f \in L^{p'}, g \in L^p$$

Die Surjektivität dieser Abbildung folgt aus dem Satz von Hahn-Banach (Funktionalanalysis). Die Injektivität der Einbettung folgt aus:

thm-normdual **Satz 3.31 (Duale Darstellung der L^p–Norm).** *Sei $1 \le p < \infty$. Dann gilt*

$$\|f\|_p = \sup_{g \in L^{p'}(X), \|g\|_{p'}=1} \int_X fg\; d\mu \qquad \forall f \in L^p(X, \mathscr{E}, \mu).$$

Beweis. Sei $f \in L^p$ mit $f \neq 0$ und sei $q := p'$. Aus der Hölderungleichung erhalten wir

$$\sup_{g \in L^q(X), \|g\|_q=1} \int fg\; d\mu \le \sup_{g \in L^q(X), \|g\|_q=1} \|f\|_p \|g\|_q = \|f\|_p.$$

Für die umgekehrte Ungleichung wählen wir die Testfunktion

$$g^* := \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_p^{p/q}} \operatorname{sgn}(f) \in L^q \qquad \text{wobei} \quad \|g^*\|_q = \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}} \Big(\int |f|^{q(p-1)} d\mu \Big)^{1/q} = 1,$$

da $q(p-1) = p$. Damit erhalten wir

$$\sup_{g \in L^q(X), \|g\|_q = 1} \int fg \; d\mu \geq \int fg^* \; d\mu = \int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p/q}} d\mu = \|f\|_p^{p(1-1/q)} = \|f\|_p.$$

□

Wir können die Dualität ausdrücken in der Schreibweise

$$\langle g, f \rangle \; := \; \int fg \; dx.$$

Wir können auch allgemeiner den Ausdruck

$$\langle \mu, f \rangle \; := \; \int f \; d\mu$$

als einen dualen Ausdruck verstehen

3.4 Vergleich von Konvergenzbegriffen

Im folgenden vergleichen wir einige Konvergenzbegriffe: In endlich dimensionalen Vektorräumen sind alle Normen äquivalent. Für Funktionenräume unterscheiden sich verschiedene Konvergenzbegriffe deutlich. In diesem Abschnitt ist $(X, \mathscr{E}, \mu)$ ein Maßraum. Wir haben bisher u.a. verschiedene Begriffe für die Konvergenz von Funktionen eingeführt. Sei $f, f_k : E \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

- f.ü. punktweise Konvergenz: $f_k(x) \to f(x)$ für $k \to \infty$ für μ–fast alle $x \in E$.
- Konvergenz in L^p: $\|f_k(x) - f(x)\|_{L^p} \to 0$.

Konvergenz in L^∞ entspricht im wesentlichen der gleichmäßigen Konvergenz (bis auf Nullmengen). Offensichtlich impliziert gleichmäßige Konvergenz die punktweise f.ü. –Konvergenz.

Der Begriff der f.ü. –Konvergenz ist natürlich auf dem Raum der messbaren Funktionen definiert. Ein weiterer Konvergenzbegriff auf dem Raum der messbaren Funktionen ist die Konvergenz im Maß. Dieser Konvergenzbegriff erzeugt eine Topologie auf dem Raum der messbaren Funktionen und setzt keinerlei Integrierbarkeit voraus:

Definition 3.32 (Konvergenz im Maß). *Seien $f_k, f : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ messbar. Wir sagen, dass f_k gegen f im Maß μ konvergiert, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\mu(\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \; \to 0 \qquad\qquad \textit{für } k \to \infty.$$

Wir bemerken, dass der Grenzwert für Konvergenz im Maß nicht eindeutig ist: Aus $f_k \to f$ und $f_k \to g$ im Maß folgt nur $f = g$ f.ü.. Genauso sind die Grenzwerte für L^p–Konvergenz und f.ü. –Konvergenz nur eindeutig bis auf eine Nullmenge.

Im Folgenden vergleichen wir die verschiedenen Konvergenzbegriffe miteinander. Maßkonvergenz ist schwächer als jede L^p–Konvergenz. Für Räume mit endlichem Maß gibt es eine Hierarchie der L^p–Konvergenzen:

prp-glmkon

Proposition 3.33 (**L^p–Konvergenz, Maßkonvergenzen**). *Sei $f, f_k : X \to \mathbb{R}$ messbar und es gelte $f_k \to f$ in $L^q(X, \mathscr{E}, \mu)$ für ein $q \in [1, \infty]$. Dann folgt*

(i) $f_k \to f$ im Maß.

(ii) Falls $\mu(X) < \infty$, dann folgt $f_k \to f$ in $L^p(X, \mathscr{E}, \mu)$ $\forall 1 \leq p \leq q$.

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $f = 0$ an.

(i): Zu $\varepsilon > 0$ erhalten wir aus der Chebyshev-Ungleichung in Satz 3.12, thm-chebyshev

$$\mu\big(\{x \in X : |f_k(x)|^q \geq \varepsilon\}\big) \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon} \int |f_k|^q \, d\mu \;\to 0 \qquad \text{für } k \to \infty$$

und damit Konvergenz im Maß.

(ii): Übungsaufgabe. □

Im Folgenden untersuchen wir den Begriff der f.ü.–Konvergenz und das Verhältnis zu anderen Konvergenzbegriffen. Eine f.ü. –konvergente Folge konvergiert gleichmässig bis auf eine beliebig kleine Menge:

thm-egorov

Satz 3.34 (**Satz von Egorov**). *Sei $\mu(X) < \infty$. Es gelte $f_k \to f$ f.ü. für messbare Funktionen $f_k, f : X \to \mathbb{R}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $E_\varepsilon \in \mathscr{E}$ mit $\mu(E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ und $f_k \rightrightarrows f$ in $X \backslash E_\varepsilon$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $f = 0$ an. Nach Annahme gilt $f_k \to 0$ auf $X \backslash N$ mit $\mu(N) = 0$. Wir definieren

$$F_{kn} := \{x \in X : |f_j(x)| < \frac{1}{n} \quad \forall j \geq k\}, \qquad E_{kn} := X \backslash F_{kn} \tag{3.13}$$ def-Fkn

Dann gilt $E_{kn} \searrow N$ für $k \to \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Da $\mu(E_{1n}) \leq \mu(X) < \infty$ gilt $\mu(E_{kn}) \to \mu(N) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und es gibt zu $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(E_{k_n,n}) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Für $E_\varepsilon := \bigcup_{n=1}^\infty E_{k_n,n}$ gilt dann

$$\mu(E_\varepsilon) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^\infty E_{k_n,n}\Big) \le \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Wir behaupten, dass $f_k \rightrightarrows 0$ in $F_\varepsilon := X \setminus E_\varepsilon = \bigcap F_{k_n,n}$. Nach Konstruktion gilt $F_\varepsilon \subset F_{k_n,n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Mit (3.13) erhalten wir $\sup_{\mathscr{F}_{k_n,n}} |f_k| < \frac{1}{n}$ $\forall j \ge k_n$ und daher $f_k \rightrightarrows 0$. $\square$

Eine Folgerung aus dem Satz von Egorov ist der Satz von Lusin (Übungsaufgabe).

lem-egorov **Lemma 3.35 (f.ü. vs. Maßkonvergenz).** *Seien $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ messbar.*

(i) Falls $f_k \to f$ im Maß, dann gibt es eine Teilfolge f_{k_j} mit $f_{k_j} \to f$ punktweise f.ü..

(ii) Falls $\mu(X) < \infty$ und $f_k \to f$ f.ü., dann konvergiert $f_k \to f$ im Maß.

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit $f = 0$ an.

(i): Da $f_k \to 0$ im Maß gibt es zu $j \in \mathbb{N}$ ein $k_j \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(\{x \in X : |f_{k_j}(x)| > 2^{-j}\}) \le 2^{-j}.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass k_j streng monoton wächst, d.h. f_{k_j} definiert eine Teilfolge von f_k. Mit der Notation

$$N := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j>n} B_j \qquad \text{für} \qquad B_j := \{x \in X : |f_{k_j}(x)| > 2^{-j}\}$$

erhalten wir also $\mu(B_{k_j}) \le 2^{-j}$ und daher $\mu(N) = 0$. Für $x \in N^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{j>n} B_j^c$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \notin B_j$ für alle $j \ge n_0$, d.h. $|f_{k_j}(x)| \le 2^{-j}$ für alle $j \ge n_0$, d.h. $f_{k_j}(x) \to 0$ für $j \to \infty$.

(ii): Sei $\delta > 0$. Nach dem Satz von Egorov gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $E_\varepsilon \subset X$ mit $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, so dass $f_k \rightrightarrows 0$ gleichmässig in $X \setminus E_\varepsilon$. Nach Proposition 3.33 konvergiert $f_k \to 0$ in $X \setminus E_\varepsilon$ im Maß. Zusammen mit der Subadditivität von μ erhalten wir

$$\limsup_{k\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_k| > \delta\}) \ \le\ \varepsilon + \limsup_{k\to\infty} \mu(\{x \in X \setminus E_\varepsilon : |f_k| > \delta\}) \ \le 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir die Konvergenz im Maß. $\square$

Aus Konvergenz in L^1 folgt Maßkonvergenz und f.ü. Konvergenz (für eine Teilfolge):

prp-masskon

Proposition 3.36 (L^p vs. f.ü.–Konvergenz). *Falls $f_k \to f$ in L^p für ein $1 \le p \le \infty$, dann gibt es eine Teilfolge mit $f_{k_j} \to f$ f.ü..*

Beweis. Folgt aus Proposition 3.33 und Lemma 3.35(i). □

exm-konv1234

Beispiel 3.37 (Vergleich der Konvergenzbegriffe).

(i) *Für $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, mit $f_k(x) = \chi_{(0,\frac{1}{k}]}(x)$ gilt $f_k(x) \to f(x)$ $\forall x \in X$, aber $f_k \not\to f$ in L^1, da $\int f_k = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Sei $a_k := \left(\sum_{j=1}^{j} \frac{1}{j}\right) \mod 1$ und sei $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k = \chi_{[a_k, a_{k+1}]}$. Dann gilt $\|f_k\|_{L^1} = \frac{1}{k+1} \to 0$, d.h. $f_k \to 0$ in L^1. Andererseits konvergiert f_k konvergiert in keinem Punkt. Es gibt aber Teilfolgen von f_{k_j} mit $f_{k_j} \to 0$ f.ü..*

(iii) *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{1}{k}\chi_{(k,\infty)}$. Dann gilt $f_k \rightrightarrows 0$ gleichmässig und im Maß, aber $f_k \not\to 0$ in L^1.*

Lemma 3.38 (f.ü.-Konvergenz ist nicht durch Metrik induziert). *Es gibt keine Metrik d auf $L^1([0,1], \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, welche die f.ü. punktweise Konvergenz induziert.*

Beweis. Der Beweis wurde in der Vorlesung nicht durchgenommen. Wir argumentieren indirekt und nehmen an es gibt eine Metrik d auf dem metrischen Raum $Z = L^1$, so dass $f_k \to f$ f.ü. , genau dann wenn $d(f_k, f) \to 0$ für beliebige Folgen.

Sei f_k die Folge aus Beispiel 3.37(ii). Dann gilt $f_k \to 0$ in L^1, aber f_k konvergiert nicht punktweise. Nach Proposition 3.36 gibt es zu jeder Teilfolge eine weitere Teilfolge f_{k_j} mit $f_{k_j} \to 0$ f.ü.. Nach Annahme gibt es zu jeder Teilfolge also eine weitere Teilfolge f_{k_j} mit $d(f_{k_j}, 0) \to 0$. Andererseits gilt $d(f_k, 0) \not\to 0$.

Der Widerspruch ergibt sich nun aus der folgenden Aussage: Sei eine Folge f_k in einem metrischen Raum Z und sei $f \in Z$. Falls $d(f_k, f) \not\to 0$, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge f_{k_j} mit $d(f_{k_j}, f) \ge \varepsilon_0$. Insbesondere gibt es für diese Teilfolge keine Teilfolge, welche gegen f konvergiert. □

[4.12.2020]

[7.12.2020]

4 Integrationssätze

4.1 Produktmaße und Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$

In diesem Kapitel sind $(X, \mathscr{E}, \mu)$, $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ Maßräume. Wir konstruieren ein Maß $\mu \times \nu$ auf $X \times Y$. Damit können wir insbesondere das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$ konstruieren. Wir wollen insbesondere Mengen der Form $A \times B$ messen können für $A \in \mathscr{E}$ und $B \in \mathscr{F}$. Dies führt auf den Begriff der Produktalgebra:

Definition 4.1 (Produktalgebra). *Die Produktalgebra $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ ist definiert als*

$$\mathscr{E} \times \mathscr{F} := \sigma(\{A \times B : A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}\}) \ \subset \mathscr{P}(X \times Y).$$

Die Produktalgebra erfüllt das Assoziativgesetz, d.h. $(\mathscr{E}_1 \times \mathscr{E}_2) \times \mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_1 \times (\mathscr{E}_2 \times \mathscr{E}_3)$. Wir schreiben $\mathscr{E}^n$ für das n–fache Produkt von $\mathscr{E}$. Man kann zeigen, dass (Übungsaufgabe)

$$\mathscr{E}_1 \times \dots \mathscr{E}_n = \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathscr{E}_i\})$$

Die folgende Aussage ist nützlich:

lem-delsig **Lemma 4.2 (Produktalgebra als erzeugtes Dynkinsystem).** *Es gilt*

$$\mathscr{E} \times \mathscr{F} \quad = \quad \delta(\{A \times B : A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}\}),$$

wobei $\delta(\mathscr{A})$ das kleinste Dynkinsystem ist, welches $\mathscr{A}$ enthält.

Beweis. Man sieht leicht, dass der Durchschnitt von Dynkinsystemen wieder ein Dynkinsystem ist. Das kleinste Dynkinsystem ist, welches $\mathscr{A}$ enthält ist also eindeutig und wohldefiniert. Für $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ mit $F_1 = A_1 \times B_1$, $F_2 = A_2 \times B_2$ gilt $F_1 \cap F_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathscr{F}$, d.h. $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ ist ein π–System. Die Aussage folgt dann aus Proposition prp-dynkin 2.15. □

lem-rnborel **Lemma 4.3 (Borelalgebra auf $\mathbb{R}^n$).** $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$.

Beweis. Übungsaufgabe □

Für $E \subset X \times Y$ und $x \in X$, $y \in Y$ definieren wir die Querschnitte (siehe Fig. fig-crosssection 12)

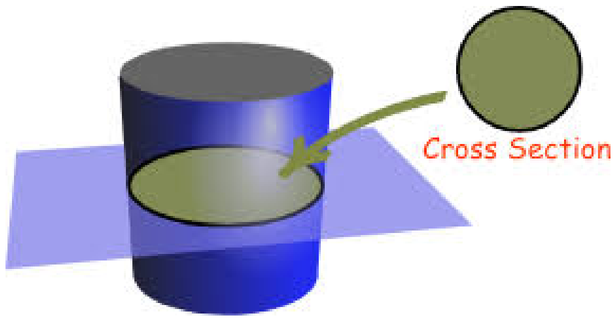

Abbildung 12: Querschnitt einer Menge (Quelle: mathisfun.com) fig-crosssectio

- $E_x := \{y \in Y : (x,y) \in E\} \subset Y$,
- $E^y := \{x \in X : (x,y) \in E\} \subset X$.

prp-projmess

Proposition 4.4 (Messbarkeit der Querschnitte). *Seien* $(X, \mathscr{E}, \mu)$, $(Y, \mathscr{E}, \nu)$ σ-*endliche Maßräume. Für* $E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}$ *gilt*

(i) $E_x \in \mathscr{F}$ *und* $E^y \in \mathscr{E}$.

(ii) Die Funktion $x \mapsto \nu(E_x)$ *ist* $\mathscr{E}$*–messbar; die Funktion* $y \mapsto \mu(E^y)$ *ist* $\mathscr{F}$*–messbar.*

Beweis. Sei $\mathscr{K} := \{A \times B : A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}\}$.

(i): Sei $x \in X$ fest. Es reicht

$$\mathscr{E} \times \mathscr{F} \ \subset \ \mathscr{F}_x \ := \ \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathscr{F}\}$$

zu zeigen. Da $\mathscr{K} \subset \mathscr{F}_x$ und da $\mathscr{E} \times \mathscr{F} = \sigma(\mathscr{K})$, reicht es zu zeigen, dass $\mathscr{F}_x$ eine σ-Algebra ist. Wir bemerken zunächst, dass $\emptyset, X \times Y \in \mathscr{F}_x$. Für $E \in \mathscr{F}_x$ gilt $(E^c)_x = (E_x)^c \in \mathscr{F}$ und daher $E^c \in \mathscr{F}_x$. Falls $E_n \in \mathscr{F}_x$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)_x = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x) \in \mathscr{F}$ und daher $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{F}_x$. Damit ist $\mathscr{F}_x$ eine σ-Algebra und $\mathscr{E} \times \mathscr{F} \subset \mathscr{F}_x$.

(ii): Sei zunächst ν endlich. Wir müssen zeigen, dass

$$\mathscr{E} \times \mathscr{F} \ \subset \ \mathscr{D} \ := \ \{E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F} \ : \ x \mapsto \nu(E_x) \text{ ist } \mathscr{E} \text{ messbar. }\}.$$

Für $A \times B \in \mathscr{K}$ gilt $(A \times B)_x = \chi_A(x) B$. Daher gilt $\nu((A \times B)_x) = \chi_A(x)\nu(B)$ und insbesondere $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$. Da $\mathscr{E} \times \mathscr{F} = \delta(\mathscr{K})$ (Lemma 4.2) reicht es also zu zeigen, dass $\mathscr{D}$ ein Dynkinsystem ist. lem-delsig

Wir bemerken zunächst, dass $\emptyset, X \times Y \in \mathscr{D}$. Für $E \in \mathscr{D}$ ist $x \mapsto \nu((E^c)_x) = \nu((E_x)^c) = \nu(Y) - \nu(E_x)$ messbar, d.h $E^c \in \mathscr{D}$. Seien nun $E_n \in \mathscr{D}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von disjunkten

Mengen und sei $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Dann gilt $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)_x = (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n)_x)$. Die Mengen $(E_n)_x$ sind disjunkt und daher gilt $\nu(E_x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu((E_n)_x)$. Insbesondere ist $x \mapsto \nu(E_x)$ als Limes einer Folge von messbaren Funktionen messbar. Damit gilt $E \in \mathscr{D}$.

Falls ν nicht endlich sondern nur σ-endlich ist, dann gibt es eine Folge von Mengen $B_n \in X$ mit $\nu(B_n) < \infty$ und $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Insbesondere sind die Masse ν_n, definiert durch $\nu_n(E) := \nu(E \cap B_n)$, endlich. Nach der obigen Argumentation ist $x \mapsto \nu_n(E_x)$ messbar für alle $E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}$. Damit ist auch $x \mapsto \nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(E_x)$ als ein punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen messbar. □

thm-produktmass **Satz 4.5 (Produktmaß).** *Seien $(X, \mathscr{E}, \mu)$, $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann gibt es ein eindeutiges <u>Produktmaß</u> $\mu \times \nu : \mathscr{E} \times \mathscr{F} \to [0, \infty]$, so dass*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \qquad \forall A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}. \tag{4.1}$$ pmass-1

Das Produktmaß erfüllt die Identitäten

$$(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) \;=\; \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) \qquad \forall E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}. \tag{4.2}$$ pmass-2

Beweis. Nach Proposition 4.4 sind die Funktionen $x \mapsto \nu(E_x)$ und $y \mapsto \mu(E^y)$ messbar und daher ist (4.2) wohldefiniert. Wir definieren $\rho_1, \rho_2 : \mathscr{E} \times \mathscr{F} \to [0, \infty]$ durch

$$\rho_1(E) := \int_X \nu(E_x) d\mu, \qquad \rho_2(E) := \int_Y \mu(E^y) d\nu \qquad \forall E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}.$$

Um zu sehen, dass $\rho_1 : \mathscr{E} \times \mathscr{F}$ ein Maß definiert sei $E_n \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}$ eine Folge von disjunkten Mengen. Dann sind auch die Mengen $E_{n,x} := (E_n)_x$ disjunkt und es gilt $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n)_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{n,x}$ und $\nu((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{n,x}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_{n,x})$. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt also

$$\rho_1(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(E_{n,x})\ d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X \nu(E_{n,x})\ d\mu, = \sum_{n\in\mathbb{N}} \rho_1(E_n),$$

d.h. ρ_1 ist σ-additiv und daher ein Maß. Analog ist $\rho_2 : \mathscr{E} \times \mathscr{F} \to [0, \infty]$ ein Maß.

Für $A \in \mathscr{E}$ und $B \in \mathscr{F}$ gilt $\nu((A \times B)_x) = \chi_A(x)\nu(B)$ und $\nu((A \times B)_y) = \chi_B(y)\mu(A)$. Insbesondere erhalten wir

$$\rho_1(A \times B) = \int_X \nu((A \times B)_x) d\mu = \int_A \nu(B) d\mu = \mu(A)\nu(B) \;=\; \rho_2(A \times B).$$

Damit gilt (4.1).

Wir haben gesehen, dass $\rho_1 = \rho_2$ auf $\mathscr{K} := \{A \times B : A \in \mathscr{E}, B \in \mathscr{F}\}$. Um zu zeigen, dass $\rho_1 = \rho_2$ aud $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$ wenden wir Proposition 2.17 an. Offensichtlich ist $\mathscr{K}$ ein π–System.

Nach Lemma 4.2 gilt $\mathscr{E} \times \mathscr{F} = \sigma(\mathscr{K}) = \delta(\mathscr{K})$. Da die Maßraume σ–endlich sind erhalten wir eine Folge von Mengen $E_n = A_n \times B_n$ mit $\rho_1(E_n) = \rho_2(E_n) < \infty$ und $E_n \to X \times Y$. Eine Anwendung von Proposition 2.17 ergibt also die gewünschte Aussage. $\square$

Insbesondere gilt das Assoziativgesetz $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$. Mit Induktion kann man die Aussage von Satz 4.5 dann für endliche Produkte verallgemeinern.

[7.12.2020]

[11.12.2020]

Wir definieren nun das Lebesguemaß in $\mathbb{R}^n$:

Satz 4.6 (Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$). *Es gibt ein eindeutiges, translationsinvariantes Maß*

$$\mathscr{L}^n : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty] \qquad \text{mit} \quad \lambda([0,1]^n) = 1.$$

Dieses Maß heißt Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Das Lebesguemaß ist definiert durch $\mathscr{L}^n := (\mathscr{L}^1)^n$, wobei $\mathscr{L}^1 := \lambda$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ ist. Nach Lemma 4.3 gilt $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{B}(\mathbb{R})^n$. Daher ist $\mathscr{L}^n$ ein Maß auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$. Eine Anwendung von Proposition 2.17 zeigt, dass das Lebesguemaß mit den geforderten Eigenschaften eindeutig ist. $\square$

- Nach Satz 2.11 kann man das Lebesguessmaß zu einem vollständigen Maß erweitern $\mathscr{L}^n : \mathscr{L}_n \to [0, \infty]$ erweitern. Mengen in $\mathscr{L}_n$ heißen Lebesguemengen oder lebesguemessbar.

- Sei $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ ein Maßraum. Wir sagen, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to Y$ lebesguemessbar ist, falls $f^{-1}(\mathscr{F}) \subset \mathscr{L}_n$.

Wir benutzen im Folgenden auch die Notation

$$\int f \; dx := \int f d\mathscr{L}^n,$$

Wir erinnern an Notationen aus der Linaren Algebra.

- $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt <u>Isometrie</u>, falls $|Qv| = |v| \; \forall v \in \mathbb{R}^n$.

- $\mathrm{Sym}(n)$ bezeichnet die Menge der symmetrischen Matrizen $\mathbb{R}^{n \times n}$.

- $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt nichtnegativ definit, $T \geq 0$, falls $(x, Tx) \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Falls $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Isometrie ist, dann gilt $n \leq m$. Außerdem gilt $Q^t Q = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $QQ^t = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ auf $Q(\mathbb{R}^n)$. Für $S \in \mathrm{Sym}(n)$ gibt es eine Orthogonalbasis $(v_i)_{i=1}^n$ und Eigenvektoren $(\lambda_i)_{i=1}^n$ mit $Tv_i = \lambda_i v_i$.

lem-rkpolar **Lemma 4.7 (Polarzerlegung für $m \times n$-Matrizen).** *Sei $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$.*

(i) Falls $n \le m$, dann gibt es $S \in \mathrm{Sym}(n)$ und eine Isometrie $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit
$$T \;=\; QS.$$

(ii) Falls $n \ge m$, dann gibt es eine Isometrie $Q \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $S \in \mathrm{Sym}(m)$ mit
$$T \;=\; SQ^t.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst $n \le m$ an. Für $C := T^tT$ gilt $C^t = (T^tT)^t = T^tT$ und $(Cx,y) = (Tx,Ty)$, d.h. $C \in \mathrm{Sym}(n)$ und $C \ge 0$. Daher gibt es eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{R}^n$ und $(\mu_i)_{i=1}^n \subset [0,\infty)$ mit $Ce_i = \mu_i e_i$. Wir definieren $\lambda_i := \sqrt{\mu_i}$. Wir behaupten, dass es ein orthornomales System $(f_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$ gibt mit
$$Te_i \;=\; \lambda_i f_i$$
Für $\lambda_i \neq 0$ definieren wir dafür $f_i := \lambda_i^{-1} Te_i$. Für $\lambda_i, \lambda_j \neq 0$ gilt dann
$$(f_i,f_j) \;=\; \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}(Te_i,Te_j) \;=\; \frac{1}{\lambda_i\lambda_j}(Ce_i,e_j) \;=\; \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i\lambda_j}(e_i,e_j) \;=\; \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\delta_{ij},$$
d.h. die so definierten Vektoren f_i sind orthonormal. Falls $\lambda_i \neq 0$, dann ergänzen wir unser System beliebig, so dass $(f_i)_{i=1}^n$ orthonormal ist. Insbesondere ist $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiert durch $Qe_i := f_i$ eine Isometrie. Insbesondere gilt $Q^tQ = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$. Wir definieren $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ durch $Sf_i = \lambda_i f_i$. Dann ist S symmetrisch und es gilt $T = QS$.

Behauptung (ii) folgt, indem wir (i) auf T^t anwenden. □

Das Lebesguemaß erfüllt die Forderungen des Maßproblems (auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$):

prp-dilrot **Proposition 4.8 (Eigenschaften des Lebesguemaßes).** *Für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ gilt:*

(i) $\mathscr{L}^n(QA + y) \;=\; \mathscr{L}^n(A)$ *für $Q \in O(n)$, $y \in \mathbb{R}^n$* *(Euklidische Invarianz)*

(ii) $\mathscr{L}^n(TA) \;=\; |\det T|\mathscr{L}^n(A)$ *für $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.* *(Skalierung)*

Beweis. *(i):* Übungsaufgabe.

(ii): Nach Lemma 4.7 (lem-rkpolar) gibt es $Q \in O(n)$ und $S \in \mathrm{Sym}(n)$ mit $T = QS$. Außerdem gibt es $W \in O(n)$ und $D \in \mathrm{diag}(n)$ mit $S = W^tDW$. Nach (i) können können wir also annehmen, dass T diagonal ist, d.h. $T = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Es bleibt zu zeigen, dass
$$\mathscr{L}^n(TE) = |\det T|\mathscr{L}^n(E) = \lambda_1\dots\lambda_n\mathscr{L}^n(E). \tag{4.3}$$
deag-ok

Nach Proposition 2.17 reicht es die Aussage für Quader zu zeigen, d.h. wir können annehmen, dass E ein Quader ist. Dann gilt (4.3) offensichtlich. $\square$

4.2 Satz von Fubini

Proposition 4.9 (Tonelli). *Seien $(X, \mathscr{E}, \mu)$, $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ σ-endliche Maßräume, $f : X \times Y \to [0, \infty]$ $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$–messbar. Dann sind die Funktionen $x \mapsto f(x, \cdot)$, $x \mapsto \int_Y f(x, \cdot) d\nu$ $\mathscr{E}$-messbar und die Funktion $y \mapsto f(\cdot, y)$ und $y \to \int_X f(\cdot, y) d\mu$ $\mathscr{F}$-messbar. Ausserdem*

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) \ = \ \int_X \Big(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x, y) d\mu(x) \Big) d\nu(y). \quad (4.4)$$

Beweis. Falls $f = \chi_E$ mit $E \in \mathscr{E} \times \mathscr{F}$ zu zeigen, dann folgt die Messbarkeit der Funktionen aus Proposition 4.4. Aus Satz 4.5 erhalten wir

$$\mu(E) \ = \ \int_X \nu(E_x) \ d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) \ d\nu(y),$$

d.h. (4.4) gilt in diesem Fall. Mit der Linearität des Integrals gilt die Aussage damit für nichtnegative, einfache Funktionen f. Zu jeder messbaren Funktion $f : X \times Y \to [0, \infty]$ gibt es nach nach Satz 3.6 eine monoton wachsende Folge von nichtnegtiven einfachen Funktionen f_n mit $f_n \nearrow f$. Mit dem Satzes von der monotonen Konvergenz erhalten wir dann, dass die Aussage für jede $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$–messbare Funktion $f : X \times Y \to [0, \infty]$ gilt. $\square$

Allgemeiner erhalten wir für integrable Funktionen:

Satz 4.10 (Satz von Fubini). *Seien $(X, \mathscr{E}, \mu)$, $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ σ-endliche Maßräume, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $\mathscr{E} \times \mathscr{F}$–messbar. Dann sind die Funktionen $x \mapsto f(x, y)$, $x \mapsto \int_Y f(x, \cdot) d\nu$ $\mathscr{E}$-messbar und die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ und $y \to \int_X f(\cdot, y) d\mu$ $\mathscr{F}$-messbar. Es gilt*

$$\int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) = \int_X \Big(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X |f(x, y)| d\mu(x) \Big) d\nu(y).$$

Falls diese Integrale endlich sind, dann sind die folgenden Integrale wohldefiniert und

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) \ d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Beweis. Dies folgt aus Proposition 4.9 und mit der Zerlegung $f = f_+ - f_-$. Die Details sind Übungsaufgabe. $\square$

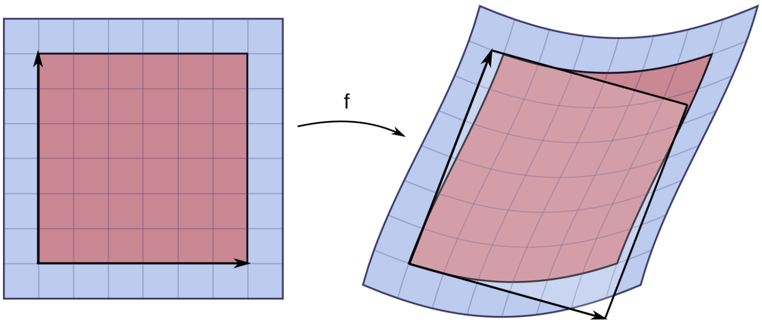

Abbildung 13: Die nichtlineare Funktion f bildet das Rechteck Q auf eine verzerrte Menge $f(Q)$ ab. Die linearisierte Abbildung Df bildet das Quadrat auf ein Parallelepiped ab, welches die Bildmenge lokal approximiert. (Quelle: wikipedia)

Wir bemerken, dass mit den Voraussetzungen von Satz 4.10 $f(x,\cdot)$ im Allgemeinen nur $\nu-$ f.ü. integrierbar ist und $f(\cdot,y)$ nur $\nu-$ f.ü. integrierbar ist. Allerdings hängt das Integral nicht von Nullmengen ab und ist daher trotzdem wohldefiniert. Mit Fubini kann man das Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel ausrechnen (Übungsaufgabe).

4.3 Transformationssatz

Die Substitutionsregel sagt aus, dass für jeden Diffeomorphismus $\varphi \in C^1(I,J)$

$$\int_J f(y)\ dy = \int_I f(\varphi(x))|\varphi'(x)|\ dx \qquad \forall f \in C^0(I), \tag{4.5}$$ sub-regel

für Intervalle $I, J \subset \mathbb{R}$. Frage: Wir haben hier den Betrag von $\varphi'(x)$ genommen. Was ändert sich, wenn wir den Betragstrich weglassen? Der Transformationsatz verallgemeinert (4.5) für höhere Dimensionen. Wir erinnern (Prop. 4.8): Für $E \in \mathscr{B}_n$, $A \in GL(n)$ gilt $A(E) \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\mathscr{L}^n(A(E)) = |\det A|\mathscr{L}^n(E). \tag{4.6}$$ dies-ide

Wir wollen (4.6) auf nichtlineare Abbildungen erweitern. Wir zeigen zuerst:

lem-trafo **Lemma 4.11.** *Sei $\varphi \in C^1(U,V)$, $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen, ein Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$\mathscr{L}^n(\varphi(U)) \le \int_U |\det D\varphi|\ dx.$$

Beweis. Da φ ein C^1-Diffeomorphismus ist, gilt $\det D\varphi \neq 0$. Wir können daher o.B.d.A $\det D\varphi > 0$ annehmen.

Schritt 1: Wir nehmen zuerst an, dass $Q = x^* + [-a,a]^n \subset U$ ein Quader ist mit

$$\begin{aligned} \|D\varphi(x)\| \le M, \qquad \|D\varphi^{-1}(x)\| &\le M, && \forall x \in Q, \\ \|D\varphi(x) - D\varphi(y)\| &\le \varepsilon < 1 && \forall x, y \in Q \end{aligned}$$

für ein $\varepsilon \in (0,1)$ und ein $M \ge 1$. Wir behaupten, dass dann die folgende Aussage gilt:

$$\mathscr{L}^n(\varphi(Q)) \le \int_Q \det D\varphi \; dx + C_n \varepsilon M^{2n} \mathscr{L}^n(Q). \tag{4.7}$$

beh-dass

Für eine einfachere Notation nehmen wir $x^* = 0$ und $\varphi(x^*) = 0$ an. Da Q kompakt ist, gibt es $\tilde{x} \in Q$ mit $\det D\varphi(\tilde{x}) = \min_{x \in Q} \det D\varphi(x) > 0$. Mit der Notation $A := D\varphi(\tilde{x})$ gilt also insbesondere $M^{-n} \le \det A \le \det D\varphi \le M^n$. Wir definieren $\psi := A^{-1} \circ \varphi$. Dann gilt $\psi(0) = 0$, $D\psi = A^{-1} D\varphi$, $D\psi(0) = \mathrm{Id}$ und $\det D\psi = (\det A)^{-1} \det D\varphi$. Insbesondere

$$\|D\psi - \mathrm{Id}\,\| \;\le\; \|A^{-1}\| \|D\varphi - \mathrm{Id}\,\| \;\le M\varepsilon.$$

Zusammen mit (4.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^n(\varphi(Q)) \;&=\; \mathscr{L}^n((A \circ \psi)(Q)) \;=\; (\det A) \mathscr{L}^n(\psi(Q)), \\ \int_Q \det D\varphi \; dx \;&\ge\; \det A \int_Q 1 \; dx \;\ge\; (\det A) \mathscr{L}^n(Q). \end{aligned}$$

Da $M^n \ge \det A$ reicht es für den Beweis von (4.7) also zu zeigen, dass

$$\mathscr{L}^n(\psi(Q)) \le \; (1 + C_n M^n \varepsilon) \mathscr{L}^n(Q).$$

Für $x \in Q = [-a,a]^n$ gilt $|x| \le \sqrt{n} a$. Daher folgt für $1 \le i \le n$

$$|(\psi(x) - x)_i| = \Big| \int_0^1 \frac{d}{dt} \psi_i(tx) - x_i \; dt \Big| \;\le \int_0^1 \|D\psi(tx) - \mathrm{Id}\,\| |x| \; dt \le M\varepsilon\sqrt{n} a.$$

Damit erhalten wir $\psi(Q) \subset a[-1 - M\varepsilon\sqrt{n}, 1 + M\varepsilon\sqrt{n}]^n$ und daher

$$\mathscr{L}^n(\psi(Q)) \le \; (1 + M\varepsilon\sqrt{n})^n (2a)^n = (1 + M^n \varepsilon \sqrt{n})^n \mathscr{L}^n(Q) \;\le\; (1 + C_n M^n \varepsilon) \mathscr{L}^n(Q).$$

Schritt 2: Abschluss des Beweises. Sei zuerst $V \Subset U$. Da $u \in C^1(\overline{V})$ gibt es also ein $M \ge 1$ und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ (M, δ hängen von V ab) mit

$$\begin{aligned} \|D\varphi(x) - D\varphi(y)\| &\le \varepsilon && \forall x, y \in X \text{ mit } |x - y| < \delta, \\ \|D\varphi(x)\| + \|D\varphi^{-1}(x)\| &\le M && \forall x \in V \end{aligned}$$

Zu V gibt es eine Zerlegung $V = \bigcup_{i=1}^\infty Q_i$ in halboffene Quader Q_i mit Mittelpunkten $x_*^{(i)}$, so dass $\operatorname{diam} Q_i < \delta$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (Übungsaufgabe). Dann gelten in jedem Quader die Voraussetzungen aus Schritt 1 und wir erhalten

$$\mathscr{L}^n(\varphi(Q_i)) \le \int_{Q_i} |\det D\varphi| \; dx + C_n \varepsilon M^{2n} \mathscr{L}^n(Q_i).$$

Summation über i ergibt im Grenzwert $\varepsilon \to 0$

$$\mathscr{L}^n(\varphi(V)) \leq \int_V |\det D\varphi|\ dx + \limsup_{\varepsilon\to 0} C_n \varepsilon M^{2n} \mathscr{L}^n(V) \ = \int_V |\det D\varphi|\ dx,$$

d.h. die Behauptung des Lemmas gilt für V. Sei nun $V_k \nearrow U$ eine monoton steigende Folge offener Mengen mit $V_k \Subset U$ und $\mathscr{L}^n(U \backslash V_k) \to 0$. Dann erhalten wir $0 \leq \chi_{V_k} \det D\varphi \nearrow \det D\varphi$ und aus dem Satz der monotonen Konvergenz folgt damit

$$\mathscr{L}^n(U) \ \leftarrow \ \mathscr{L}^n(V_k) \ \leq \ \int_{V_k} |\det D\varphi|\ dx \ \to \ \int_U |\det D\varphi|\ dx \quad \text{für } k \to \infty.$$

$\square$

thm-trafo **Satz 4.12 (Transformationssatz).** *Seien $U, V \in \mathbb{R}^n$ offen, $F \in L^1(V)$ und sei $\varphi \in C^1(U, V)$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann gilt $F \circ \varphi \in L^1(U)$ und*

$$\int_{\varphi(U)} F\ dx \ = \ \int_U (F \circ \varphi) |\det D\varphi|\ dx.$$

Beweis. Wir können o.B.d.A. $F \geq 0$ annehmen, ansonsten zerlegen wir $F = F_+ - F_-$ und zeigen die Aussage des Satzes separat für $F_\pm$. Da $F \in L^1(V)$ ist, gibt es eine Folge von einfachen Funktionen $F_k = \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{kj} \chi_{B_{kj}}$ mit $B_{kj} = \varphi(A_{kj}) \subset U$, A_{kj} messbar, mit $F_k \nearrow F$ f.ü.. Aus Lemma 4.11 und der Linearität des Integrals erhalten wir $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\int_V F_k dy = \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_{kj} \mathscr{L}^n(\varphi(A_{kj})) \ \leq \sum_{k=1}^{N_k} \alpha_{kj} \int_{A_{kj}} |\det D\varphi|\ dx = \int_U (F_k \circ \varphi) |\det D\varphi|\ dx,$$

Wir definieren

$$G_k := (F_k \circ \varphi) |\det D\varphi|, \qquad\qquad G := (F \circ \varphi) |\det D\varphi|,$$

d.h. $G_k \nearrow G$ f.ü.. Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz erhalten wir also

$$\int_V F\ dy = \lim_{k\to\infty} \int_V F_k\ dy \leq \lim_{k\to\infty} \int_U G_k\ dx = \int G\ dx. \tag{4.8}$$ trafo-121

Sei nun $\psi = \varphi^{-1} \in C^1(V, U)$. Da $|\det D\varphi| = |\det D\psi \circ \varphi|^{-1}$ erhalten wir

$$F_k = (G_k \circ \psi) |\det D\psi|, \qquad\qquad F = (G \circ \psi) |\det D\psi|.$$

Mit den gleichen Argumenten wir im Beweis von (4.8) erhalten wir

$$\int G\ dx \leq \lim_{k\to\infty} \int G_k\ dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\varphi(U)} F_k\ dx = \int F\ dx. \tag{4.9}$$ trafo-212

trafo-121 trafo-212

Aus (4.8)–(4.9) erhalten wir die gewünschte Identität

$$\int (F \circ \varphi)|\det D\varphi| = \int G\ dx = \int_{\varphi(U)} F\ dx.$$

$\square$

Für $n = 1$ mit $U = (a, b)$, $a < b$, und $V = \varphi(U)$ erhalten wir die Substitutionsregel.

rem-trafosatz

Bemerkung 4.13 (Das zurückgezogene Maß). *Sei $\varphi : U \to V$ eine Abbildung. Für ein Maß μ auf V (signiert oder nicht signiert) definiert $(\varphi^*\mu)(A) := \mu(\varphi(A))$ ein Maß auf U. Dieses Maß heißt das zurückgezogene (pull-back) Maß von μ bezüglich φ. Mit dieser Definition erhalten wir sofort die Identität*

$$\int_{\varphi(U)} d\mu \ := \ \int_U d(\varphi^*\mu)$$

geschrieben werden. Aus dieser Perspektive sagt der Transformationssatz dann aus, dass

$$\varphi^*(\mathscr{L}^n) \ = \ |\det D\varphi|\mathscr{L}^n.$$

[11.12.2020]

[18.12.2020]

Der Transformationssatz lässt sich benutzen, um in Polarkoordinaten und sphärischen Koordinaten zu integrieren:

Lemma 4.14 (Polarkordinaten & sphärische Koordinaten).

(i) Sei $\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \backslash N$ mit $N := \{(x_1, 0) : x_1 \geq 0\}$ gegeben durch $\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Dann gilt für $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\ dx \ = \ \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ r d\varphi dr.$$

(ii) Sei $\Phi :\ (0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \backslash N$ mit $N := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\}$ und $\Phi(r, \theta, \varphi) := (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$. Dann gilt für $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f dx = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta\ d\varphi d\theta dr.$$

Beweis. (i): Man sieht leicht, dass Φ mit ein C^1-Diffeomorphismus ist und

$$D\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi. \end{pmatrix}, \qquad\qquad \det D\varphi(r, \theta) = r.$$

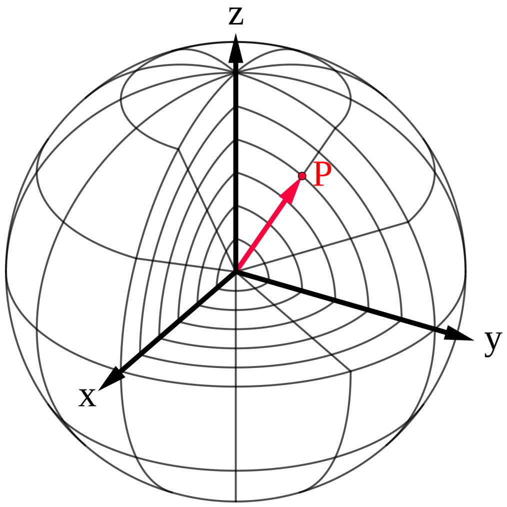

Abbildung 14: Sphärische Koordinaten. (Quelle: wikipedia)

(ii): Offensichtlich ist Φ ein C^1-Diffeomorphismus und

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix},\ \det D\varphi(r,\theta) = r^2\sin\theta.$$

□

Wir berechnen das Integral über die Gausskurve:

Beispiel 4.15.

(i) Die Fläche der Kreisscheibe $B_R \subset \mathbb{R}^2$ lässt sich nun leicht berechnen:

$$\mathscr{L}^2(B_1) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_R}(x_1)dx_1 = \int_0^R \int_0^{2\pi} r\ d\varphi dr = \pi R^2.$$

(ii) Das Volumen von $B_R \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\mathscr{L}^3(B_R) = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\ d\varphi d\theta\ dr\ = \frac{2}{3}\pi R^3 \Big(\int_0^\pi \sin\theta\ d\theta\Big) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

(iii) Das Integral der Gaussfunktion ist

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}.$$

Die erhält man durch die folgende Rechnung in Polarkoordinaten:

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ dx\Big)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ dxdy\ = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\ dr = 2\pi\Big[\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^\infty = \pi.$$

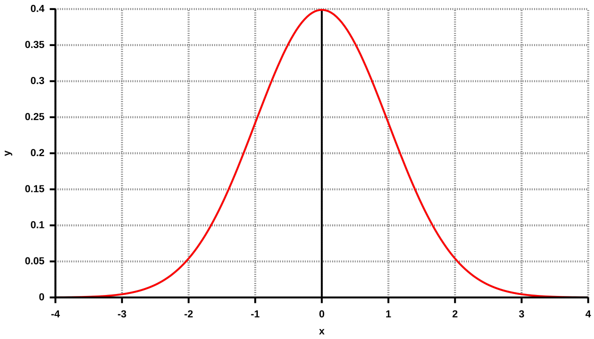

Abbildung 15: Die Gaußfunktion (Quelle: wikipedia)

Der Transformationssatz kann verallgemeinert werden für Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zwischen Räumen verschiedener Dimension. Dies führt auf die Flächenformel (oder Areaformel) und Koflächenformel (oder Coareaformel). Auch der Satz von Fubini ist dann eine Konsequenz der Koareformel. Die Jacobiedeterminante gibt die lokale Volumenänderungen bei der Transformation durch einen Diffeomorphismus $\varphi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ an. Eine Jacobideterminante erhalten wir auch bei der Berechnung von Flächeninhalten: Falls $n = 2$, $m = 3$ und $\varphi \in \mathrm{Lip}(A, \mathbb{R}^m)$, dann ist die Fläche $\mathscr{H}^2(\varphi(A))$ gegeben durch:

$$\mathscr{H}^2(\varphi(A)) \;=\; \int_A D\varphi^t(x) D\varphi(x)\; d\mathscr{L}^2(x).$$

Allgemein motiviert dies die folgende Definition:

Definition 4.16 (Jacobi Determinante). *Für $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an $x \in \mathbb{R}^n$ ist die* <u>*Jacobi Determinante*</u> *gegeben durch*

$$J\varphi(x) \;:=\; \begin{cases} \sqrt{\det(D\varphi(x)^t D\varphi(x))}, & \text{falls } n \leq m, \\ \sqrt{\det(D\varphi(x) D\varphi(x)^t)}, & \text{falls } n > m. \end{cases}$$

Sowohl bei der Flächenformel als auch der Flächenformel wird das Bild $\varphi(A)$ einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ in 'Niveaumengen' $\varphi^{-1}(y) \cap A$ aufgeteilt und über diese integriert. Die Flächenformel ($n \leq m$) verallgemeinert den Transformationssatz auf Funktionen, welche nicht injektiv sein müssen und welche auch eine niedrigerdimensionale Fläche beschreiben können. Die Koflächenformel ($n \geq m$) ist eine als nichtlineare Verallgemeinerung des Satzes von Fubini verstehen. eyagar [?, p.112]:

Satz 4.17 (Flächen–, Koflächenformel). *Sei $\varphi \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathscr{L}^n$-messbar.*

(i) Falls $n \leq m$, dann gilt

$$\int_A J\varphi(x)\ d\mathscr{L}^n(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}^0(A \cap \varphi^{-1}(y))\ d\mathscr{H}^n(y) \qquad \text{(Flächenformel)}$$

(ii) Falls $n \geq m$, dann gilt

$$\int_A J\varphi(x)\ d\mathscr{L}^n(x) \ = \ \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}^{n-m}(A \cap \varphi^{-1}(y))\ d\mathscr{L}^m(y). \qquad \text{(Koflächenformel)}$$

Der Beweis ist nicht Teil der Vorlesung. Die Idee des Beweis besteht darin, die Aussage zuerst für die Linearisierung zu zeigen und dann eine Zerlegung der Eins zu nutzen, ähnlich dem Beweis des Transformationssatzes. In beiden Formeln hängt das Integral nur vom Wert von φ auf A ab. Beachte, dass Lipschitzstetige Funktionen nach dem Satz von Rademacher fast überall differenzierbar sind [?, p. 96, Theorem 1].

Bemerkung 4.18 (Interpretation von Koflächen– und Flächenformel).

(i) Flächenformel ($n \leq m$): Falls φ injektiv ist, dann gilt $\mathscr{H}^0(A \cap \varphi^{-1}(y)) = \chi_{\varphi(A)}$ und

$$\mathscr{H}^n(\varphi(A)) \ = \ \int_A J\varphi(x)\ d\mathscr{L}^n(x).$$

Für $n = 1$ gilt $J\varphi(x) = |\varphi'(x)|$ und wir erhalten die Formel für die Kurvenlänge, für $n = 2$ gilt $J\varphi(x) = \sqrt{D\varphi(x)D^t\varphi(x)}$ und wir erhalten die Formel für eine zweidimensionale parametrierte Fläche. Falls φ nicht injektiv ist, dann wird zusätzlich die Multiplizität einberechnet.

(ii) Koflächenformel ($n \geq m$): Die Koflächenformel sagt aus, dass wir das Maß einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ berechnen können, indem wir nacheinander über die Niveumengen einer (geschickt gewählten) Funktion φ integrieren. Falls φ die Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf den $\mathbb{R}^m$ ist, d.h. $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$, dann erhalten wir

$$\mathscr{L}^n(A) \ = \ \int_{\mathbb{R}^m} \mathscr{H}^{n-m}(A \cap (\{y\} \times \mathbb{R}^{n-m}))\ d\mathscr{L}^m(y),$$

Dies ist der Satz von Fubini für konstante Integranden. Ein wichtiger Spezialfall ist der Fall $m = 1$, Dann erhalten wir

$$\int_A |\nabla\varphi(x)|\ dx \ = \ \int_{\mathbb{R}} \mathscr{H}^{n-1}(A \cap \varphi^{-1}(t))\ dt$$

Falls $\varphi(x) = |x|$, dann gilt insbesondere $\nabla\varphi = \frac{x}{|x|}$ und $J\varphi(x) = 1$ und daher

$$\mathscr{L}^n(A) \ = \ \int_0^\infty \mathscr{H}^{n-1}(A \cap \partial B_r)\ d\mathscr{L}^1(r).$$

Dies entspricht Integration in Polarkoordinaten.

Abbildung 16: Glättung eines Bildes durch lokale Mittelung der Funktionswerte (Quelle: wikipedia)

[18.12.2020]
[11.01.2021]

4.4 Faltungsoperator und Approximation durch glatte Funktionen

Mit der bisher entwickelten Integrationstheorie können wir den sogenannten Faltungsoperator einführen. Die grundlegende Idee ist, dass wir eine Funktion lokal mitteln und glätten wollen. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir dann

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon(x)} f(z)\ dz \ = \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon(0)} f(x-y)\ dy \ = \int f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\ dy,$$

wobei

$$\varphi_\varepsilon(x) \ := \ \frac{1}{|B_\varepsilon|}\chi_{B_\varepsilon} \ = \ \frac{1}{|B_1|\varepsilon^n}\chi_{B_1}(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Mathematisch erwarten wir, dass die f_ε regulärer ist als f und das $f_\varepsilon \to f$ für $\varepsilon \to 0$ in einer geeigneten Norm. Allgemeiner definieren wir:

def-faltung **Definition 4.19 (Faltung).** *Die Faltung $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ von $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist*

$$(f * g)(x) := \int f(y)g(x-y)dy.$$

Eine Anwendung des Satzes von Fubini zeigt, dass die Faltung wohldefiniert ist und eine integrable Funktion definiert. Der Raum $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit Addition und Faltung ist ein kommutativer Ring ohne Eins. Frage: Welche verallgemeinerte Funktion ersetzt die Eins?:

prp-faltung **Proposition 4.20 (Faltung ist ein Ring).** *Für $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $f * (g + \lambda h) = f * g + \lambda(f * h)$ *(Linearität)*

(ii) $f * g = g * f$. *(Kommutativität)*

(iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$ *(Assoziativität)*

Beweis. *(i):* Folgt direkt aus der Definition.

(ii): Mit der Variablentransformation $z = x - y$ gilt

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(z)f(x-z)\ dz = (g * f)(x).$$

(iii): Mit dem Satz von Fubini und mit (ii) gilt

$$((f * g) * h)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-z-y)f(y)h(z)\ dydz\ = (f * (h * g))(x).$$

□

Man sieht direkt, dass $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$, $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1$ und $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p\|g\|_{p'}$. Diese Abschätzung lässt sich wie folgt verallgemeinern. Das folgende Lemma zeigt auch, dass die Faltung für eine größere Klasse von Funktionen wohldefiniert ist:

lem-young **Lemma 4.21 (Youngsche Ungleichung).** *Für $p, q, r \in [1, \infty]$ gelte*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ gilt dann $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Beweis von Lemma lem-young *4.21.* Frage: Warum ist die Bedingung an pq, r richtig? Sei $F := |f|$, $G := |g|$. Dann gilt $|f * g| \leq F * G$ und es reicht die entsprechende Aussage für F und G zu zeigen. Mit Proposition prp-tonelli 4.9 folgt, dass $F * G$ auch messbar ist. Für $\alpha, \beta \in [0, 1]$ (wobei α, β später festgelegt werden) berechnen wir

$$\begin{aligned}(F * G)(x) &\leq \int F(y)G(x-y)dy \\ &= \int F(y)^{p(1-\alpha)}G(x-y)^{q(1-\beta)}F(y)^{p(\frac{1}{p}-1+\alpha)}G(x-y)^{q(\frac{1}{q}-1+\beta)}dy\end{aligned}$$

Wir definieren $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=1$, wobei $\frac{1}{p_1}=1-\alpha$, $\frac{1}{p_2}=1-\beta$ und $r=p_3$, d.h.

$$\alpha+\beta \;=\; 1+\frac{1}{r}. \tag{4.10}$$

r-so

Anwendung der verallgemeinerten Hölderungleichung ergibt dann

$$\begin{aligned}(F*G)(x) \le & \Big(\int F(y)^p dy\Big)^{1-\alpha}\Big(\int G(x-y)^q dy\Big)^{1-\beta}\\ & \times\Big(\int F(y)^{rp(\frac{1}{p}-1+\alpha)}G(x-y)^{rq(\frac{1}{q}-1+\beta)}dy\Big)^{1/r}\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}&\int (F*G)(x)^r dx\\ &\quad\le\; \|F\|_p^{(1-\alpha)pr}\|G\|_q^{(1-\beta)qr}\iint F(y)^{rp(\frac{1}{p}-1+\alpha)}G(x-y)^{rq(\frac{1}{q}-1+\beta)}dy\,dx\\ &\quad=\; \|F\|_p^{(1-\alpha)pr}\|G\|_q^{(1-\beta)qr}\int F(y)^{rp(\frac{1}{p}-1+\alpha)}dy\int G(z)^{rq(\frac{1}{q}-1+\beta)}dz.\end{aligned}$$

Wir fordern $rp(\frac{1}{p}-1+\alpha)=p$ und $rq(\frac{1}{q}-1+\beta)=q$. Daraus folgt $\alpha=\frac{1}{q}$, $\beta=\frac{1}{p}$ und insbesondere gilt auch (4.10). Wir erhalten

$$\int (F*G)(x)^r dx \le \|F\|_p^{(1-\frac{1}{q})pr+p}\|G\|_q^{(1-\frac{1}{p})qr+q} = \|F\|_p^r\|G\|_q^r \;<\; \infty.$$

□

[11.01.2021]

[15.1.2020]

Als nächstes zeigen wir, dass Faltung und Ableitung vertauschen. In der Tat, formal gilt

$$\partial_i(f*\varphi)(x)=\partial_i\int f(y)\varphi(x-y)\;dy=\int f(y)\partial_i\varphi(x-y)\;dy=(f*\partial_i\varphi)(x).$$

lem-faltabl

Lemma 4.22 (Faltung und Ableitung vertauschen). *$f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1\le p<\infty$ und sei $\varphi\in C_c^k(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $f*\varphi\in C^k$ und*

$$\partial^\alpha(f*\varphi)=f*(\partial^\alpha\varphi)\;\in\; C^0(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\alpha\in\mathbb{N}^n \text{ mit } |\alpha|\le k$$

Insbesondere gilt $f*\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, falls $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ glatt ist.

Beweis. Wir zeigen den Fall für $|\alpha|=1$, d.h. $\partial^\alpha=\partial_i$, $1\le i\le n$. Die allgemeine Aussage folgt aus vollständiger Induktion. Wir berechnen den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{t}\big((f*\varphi)(x+te_1)-(f*\varphi)(x)\big)=\int f(y)\frac{1}{t}\big(\varphi(x+te_1-y)-\varphi(x)\big)\;dy.$$

Da $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert der Integrand für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ punktweise gegen $f(y)\partial_i\varphi(x-y)$ für $t \to 0$. Außerdem ist der Differenzenqutient punktweise gleichmäßig beschränkt. Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt daher im Limes $t \to 0$,

$$\partial_i(f * \varphi)(x) = \int f(y)\partial_i\varphi(x-y)\ dy \ = (f * \partial_i\varphi)(x),$$

d.h. $f * \varphi$ ist differenzierbar. Aus der Young'schen Ungleichung erhalten wir $\partial_1(f * \varphi) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\|\partial_1(f * \varphi)\|_p \le \|f\|_p \|\partial_i\varphi\|_1 < \infty$. □

Die Faltung kann benutzt werden, um Funktionen zu approximieren:

thm-faltapp

Satz 4.23 (Faltungsapproximation). *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p < \infty$. Für $\varepsilon > 0$ sei*

$$\varphi_\varepsilon(x) \ := \ \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \qquad \text{für ein } \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\ dx \ = \ 1. \tag{4.11}$$

dirac-folge

Dann gilt $f * \varphi_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$f * \varphi_\varepsilon \to f \qquad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Eine Folge der Form (4.11) heißt auch Diracfolge.

Beweis. Aus Lemma 4.21 folgt $f * \varphi_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Es bleibt $f_\varepsilon := f * \varphi_\varepsilon \to f$ in L^p zu zeigen. Wir nehmen zuerst an, dass die Konvergenz für $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ gilt. Für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\delta > 0$ wählen wir $F \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|F - f\|_p < \delta$ und setzen $F_\varepsilon := F * \varphi_\varepsilon$ (Der Raum C^0_c ist ein dichter Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$: Übungsaufgabe). Damit gilt $F_\varepsilon \to F$ in L^p und $\|F_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \le \|\zeta_\varepsilon\|_1 \|F - f\|_p \le \delta$. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon - f\|_p &\le \limsup_{\varepsilon\to 0} \big(\|f_\varepsilon - F_\varepsilon\|_p + \|F_\varepsilon - F\|_p + \|F - f\|_p\big) \\ &\le 2\delta + \lim_{\varepsilon\to 0} \|F_\varepsilon - F\|_p \le 2\delta. \end{aligned}$$

Da $\delta > 0$ beliebig ist, folgt die Aussage. Für den Beweis können wir also $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ annehmen.

Der Fall $p = 1$: Da $f \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $K := \operatorname{spt} f$ ist, gibt es zu $\delta > 0$ ein $r > 0$ mit $\|f(\cdot + h) - f\|_{C^0} < \frac{\delta}{2K}$, falls $|h| < r$. Damit gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{|h|<r} |f(x+h) - f(x)|\ dx < \delta. \tag{4.12}$$

fal-1

Wir wählen δ, r, so dass (4.12) gilt. Außerdem gilt nach Konstruktion

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon\ dx \ = \ 1 \quad \forall \varepsilon > 0, \qquad \text{und} \qquad \int_{B^c_r(0)} \varphi_\varepsilon(y)\ dy \ \to \ 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Wir schreiben

$$
\begin{aligned}
f_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\varphi_\varepsilon(y)\ dy \\
&\le \int_{B_r(x)} |f(x-y) - f(x)||\varphi_\varepsilon(y)|\ dy + \int_{B_r^c(x)} |f(x-y) - f(x)||\varphi_\varepsilon(y)|\ dy.
\end{aligned}
$$

Für den ersten Term erhalten wir

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{B_r(x)} |f(x-y) - f(x)||\varphi_\varepsilon(y)|\ dy\ \le \|\varphi\|_{L^1} \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{|y|<r} |f(x-y) - f(x)|\ dx\ \le\ C\delta.
$$

Für den zweiten Term erhalten wir für $\varepsilon = \varepsilon(r)$ hinreichend klein außerdem

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\int_{B_r^c(x)} |f(x-y) - f(x)||\varphi_\varepsilon(y)|\ dydx\ \le 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|\varphi_\varepsilon\|_{L^1(B_r^c)}\ \le\ \delta.
$$

Beide Abschätzungen zusammen ergeben $\limsup_{\varepsilon\to\infty} \|f_\varepsilon - f\|_1 \le 2\delta$. Da δ beliebig gewählt werden kann erhalten wir $f_\varepsilon \to f$ in L^1 für $\varepsilon \to 0$.

Der Fall $1 < p < \infty$*:* Mit der Youngschen Faltungsabschätzung gilt $\|f_\varepsilon\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_1 < C$ für $C < \infty$, welches nicht von ε abhanegt. Damit erhalten wir für $1 < p < \infty$,

$$
\|f_\varepsilon - f\|_p^p \le \|f_\varepsilon - f\|_\infty^{p-1}\|f_\varepsilon - f\|_1 \le C\|f_\varepsilon - f\|_1 \to 0.
$$

□

Korollar 4.24 (Dichtheit des Raumes $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$). *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Dann gibt es eine Folge von $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Folgt aus Satz thm-faltapp 4.23. □

4.5 Fouriertransformation

Wir definieren die Fouriertransformation zuerst auf einer kleineren Klasse von Funktionen, dem Schwartzraum. In einem zweiten Schritt erweiteren wir den Definitionsbereich des Operators auf den grösseren Raum $L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n)$. In diesem Kapitel nehmen wir allgemein an, dass Funktionen komplexwertig sind.

Definition 4.25 (Schwartzraum). *Der Schwartzraum $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum*

$$
\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) : \sup |x^\alpha \partial_\beta f| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}.
$$

Eine Funktion $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ heisst Schwartzfunktion.

Der Schwartzraum ist der Raum der glatten Funktionen, so dass die Funktionen und sämtliche Ableitungen schneller als jede Potenz abfallen für $|x| \to \infty$. Insbesondere gilt

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,
- $\varphi \in \mathscr{S}$ für die Gaußfunktion $\varphi(x) := e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$.

Definition 4.26 (Fouriertransformation). *Die Fouriertransformation von* $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *ist definiert durch*

$$(\mathscr{F} f)(\xi) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik\cdot x} dx \qquad\qquad \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Man sieht in der Tat leicht, dass $\mathscr{F} f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ für $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben auch $\widehat{f} := \mathscr{F} f$. Frage: Ist die Fouriertransformation stetig? Können wir eine geeignete Topologie auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren? Eigenschaften der Fouriertransformation sind in der folgenden Proposition gegeben:

prp-FT **Proposition 4.27 (Eigenschaften der Fouriertransformation).** *Die Fouriertransformation* $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *ist ein linearer Operator. Für* $f, g \in \mathscr{S}^1(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha > 0$ *und* $1 \le j \le n$ *gilt*

it-ft-diff *(i)* $\widehat{(\partial_{x_j} f)}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$, $\qquad \widehat{(ix_j f)}(\xi) = -\partial_{\xi_j} \widehat{f}(\xi)$

it-ft-transl *(ii)* $\widehat{f(\cdot - y)}(\xi) = e^{-i\langle y,\xi\rangle} \widehat{f}(\xi)$, $\qquad \widehat{e^{i\langle y,\cdot\rangle} f}(\xi) = \hat{f}(\xi - y)$,

it-ft-scale *(iii)* $\widehat{f(\alpha\cdot)} = \frac{1}{\alpha^n} \hat{f}(\alpha\xi)$

it-ft-falt *(iv)* $\widehat{(f * g)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}\widehat{g}$.

Beweis. *(i):* Aus der Definition der Fouriertransformation und mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\widehat{(\partial_{x_j} f)}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi\cdot x} \partial_{x_j} f(x)\, dx \;=\; \frac{i\xi_j}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi\cdot x} f(x)\, dx = \; i\xi_j \widehat{f}(\xi), \\
\widehat{(ix_j f)}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi\cdot x} (ix_j) f(x)\, dx \;=\; \frac{-1}{(2\pi)^{n/2}} \int \partial_{\xi_j}\big(e^{-i\xi\cdot x}\big) f(x)\, dx = \; -i\xi_j \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

it-ft-transl it-ft-scale it-ft-falt *(ii)–(iv):* Übungsaufgabe. □

Die Gaußfunktion ist Eigenvektor mit Eigenwert Eins zur Fouriertransformation:

Lemma 4.28 (Gaussfunktion). *Für* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *geben durch* $\varphi(x) := \exp^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ *gilt*

$$\mathscr{F}\varphi \;=\; \varphi.$$

Beweis. Wir berechnen

$$\widehat{\varphi}(\xi) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}|x|^2 - ix\cdot\xi}\; dx \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2 - ix_i\xi_i}\; dx_i$$

Mit quadratischer Ergänzung desd Exponenten berechnen wir

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2 - ix_i\xi_i}\; dx_i = e^{-\frac{\xi_i^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x_i - i\xi_i)^2}\; dx_i = e^{-\frac{\xi_i^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_i^2}\; dx_i = e^{-\frac{\xi_i^2}{2}} \sqrt{2\pi}.$$

Insgesamt ergibt dies die gewünschte Identität. □

Der Raum $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ ist ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt

$$(f, g)_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x)\; dx \qquad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$$

Im Folgenden benutzen wir dieses innere Produkt. Die Fouriertransformation ist invertierbar als Operator $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

Satz 4.29 (Inverse zur Fouriertransformation). *Für* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *sei*

$$(\mathscr{F}^* f)(\xi) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x) e^{ik\cdot x} dx.$$

Dann gilt

(i) $\mathscr{F}^*$ *ist die Adjungierte von* $\mathscr{F}$*, d.h.*

$$(\mathscr{F} f, g)_{L^2} \;=\; (f, \mathscr{F}^* g)_{L^2} \qquad \forall f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m).$$

(ii) $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *ist invertierbar mit inverser Transformation* $\mathscr{F}^*$.

Beweis. (i): Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x)\; dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int f(y) g(x) e^{-ix\cdot y}\; dy dx \;= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x)\; dx$$

Aus der Definition folgt direkt $\overline{\mathscr{F} f} = \mathscr{F}^* \overline{f}$. Damit erhalten wir $\overline{\overline{\mathscr{F} \overline{f}}} = \mathscr{F}^* f$ und damit die gewünschte Aussage. Insbesondere gilt $\mathscr{F}^{**} = \mathscr{F}$.

(ii): Sei $\varphi(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp^{-\frac{1}{2}|x|^2}$ die gewichtete Gaussfunktion. Dann ist $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ eine Diracfolge. Mit der Notation $\delta_\varepsilon \varphi(x) := \varphi(\varepsilon x)$, $\tau_y \varphi(x) = \varphi(x-y)$ gilt $\varphi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\delta_{\varepsilon^{-1}}\varphi$. Da $\varphi(x) = \varphi(-x)$ und $\varphi(x) \in \mathbb{R}$, erhalten wir

$$\mathscr{F}^*\mathscr{F} f \;\leftarrow \varphi_\varepsilon * (\mathscr{F}^*\mathscr{F} f) \;=\; \varepsilon^{-n}(\tau_x \delta_{\varepsilon^{-1}}\varphi, \mathscr{F}^*\mathscr{F} f)_{L^2} \;=\; \varepsilon^{-n}(\mathscr{F}^*\mathscr{F}\tau_x\delta_{\varepsilon^{-1}}\varphi, f)_{L^2}.$$

Mit Proposition 4.27 rechnet man leicht nach, das $\mathscr{F}^*\mathscr{F}\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon \mathscr{F}^*\mathscr{F}$ und $\mathscr{F}^*\mathscr{F}\tau_x = \tau_x \mathscr{F}^*\mathscr{F}$. Damit gelangen wir zur folgenden Identität:

$$\varepsilon^{-n}(\mathscr{F}^*\mathscr{F}\tau_x\delta_\varepsilon\varphi, f)_{L^2} \;=\; \varepsilon^{-n}(\tau_x\delta_\varepsilon\mathscr{F}^*\mathscr{F}\varphi, f)_{L^2} \;=\; (\tau_x\varphi_\varepsilon, f)_{L^2} \;=\; \varphi_\varepsilon * f \;\to\; f,$$

wobei wir genutzt haben, dass $\mathscr{F}^*\mathscr{F}\varphi = \varphi$. Insgesamt erhalten wir $\mathscr{F}^*\mathscr{F} f = f \;\forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Analog zeigt man, dass $\mathscr{F}\mathscr{F}^* f = f$. □

Satz 4.30 (Plancherel Identität). *Für $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\widehat{f}(\xi)}\widehat{g}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} g(x)\, dx.$$

Insbesondere gilt $\|\mathscr{F} f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.

Beweis. Im vorigen Satz haben wir gezeigt, dass $\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F}^*$, d.h. der Fourieroperator ist orthogonal auf $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Insbesondere ist die Fouriertransformaion isometrisch, d.h. $(\mathscr{F} f, \mathscr{F} g)_{L^2} = (f, \mathscr{F}^*\mathscr{F} g)_{L^2} = (f, g)_{L^2}$. □

In unserem Raum $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ gilt für $1 \le j \le n$,

$$(i\partial_j f, g) \;=\; (f, i\partial_j g),$$

d.h. der Operator $i\partial_j$ ist symmetrisch. Außerdem gilt

$$\mathscr{F}(i\partial_j)\mathscr{F}^* \;=\; \xi_j$$

d.h. der Ableitungsoperator wird durch den orthogonalen Operator $\mathscr{F}$ zu einem Multiplikationsoperator transformiert. Dies entspricht der Diagonalisierung einer symmetrischen Matrix durch einen orthogonalen Operator.

5 Integration auf Mannigfaltigkeiten

5.1 Mannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^m$

Ein n–dimensionaler linearer Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$ kann durch ein System von k unabhängigen, linearen Gleichungen beschrieben werden, wobei $m = n + k$. Allgemeiner können wir Mengen durch k nichtlineare, Gleichungen beschreiben, d.h.

$$M \;=\; \{x \in \mathbb{R}^m \;:\; f(x) \;=0\} \qquad \text{für ein } f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k.$$

Falls die Gleichungen unabhängig sind, dann erwarten wir, dass die Menge M k–dimensional ist (z.B. im Sinne der Hausdorffdimensionen). Ein Beispiel ist die Sphäre

$$S^{m-1} \;=\; \{x \in \mathbb{R}^m \;:\; |x|^2 - 1 \;=0\}.$$

Durch weitere Gleichung können wir die Dimension unserer Teilmengen weiter verringern. So ist die Menge

$$S^{m-2} \times \{0\} \;=\; \{x \in \mathbb{R}^m \;:\; |x|^2 - 1 = 0, \quad x_m = 0\}$$

eine $(m-2)$–dimensionale Teilmenge des $\mathbb{R}^m$. Der Kegel ist für $x = (x', x_m)$, $x' := (x_1, \ldots, x_{m-1})$ durch die Gleichung

$$\mathscr{C}^{m-1} \;=\; \{x \in \mathbb{R}^m \;:\; |x_m|^2 - |x'|^2 = 0\}$$

beschrieben. Wir bezeichnen eine Menge als C^ℓ–regulär (glatt), wenn sie lokal als Graph einer C^ℓ–Funktion (C^∞–Funktion) beschrieben werden kann. In diesem Sinne, ist die Sphäre glatt, der Kegel aber nicht. Im Folgenden betrachten wir vor allem C^1–reguläre Mengen. Wir bemerken, dass auch die definierende Funktion $f(x) = x_m^2 - |x'|^2$ für den Kegel eine glatte Funktion ist, die Nullmenge dieser Funktion aber nicht.

Das geeignete Kriterium an die Funktion f erhalten wir aus dem Satz von der impliziten Funktion (Analysis 2): Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Sei $m = n + k$ und für $x \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir $x = (y, z)$ für $y \in \mathbb{R}^n$ und $z \in \mathbb{R}^k$. Für ein $x = (y_0, z_0) \in \Omega$ gelte $\det D_z f(x_0) \neq 0$ und $f(x_0) = 0$. Nach dem Satz von der impliziten Funktion gibt es dann eine offene Umgebung der Form $U \times V \subset \mathbb{R}^m$ von x_0 und ein $\varphi \in C^1(U, V)$ mit

$$\big\{x \in U \times V : f(x) \;=\; 0\big\} \;=\; \operatorname{graph} \varphi,$$

Wir sehen also, dass es wichtig ist, dass die Jacobimatrix Df der definierenden Funktion f einen vollen Rang hat. Dies motiviert die folgende Definition für n–dimensionale Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^m$:

def-mfk **Definition 5.1 (Mannigfaltigkeit).** *Eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^m$ heißt C^1–Mannigfaltigkeit der Dimension n mit $m = n + k$, falls es zu jedem $x^* \in M$ eine Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ von x^* und eine Abbildung $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ gibt mit*

(i) $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$,

(ii) $\operatorname{rang} Df(x) = k \quad \forall x \in \Omega$

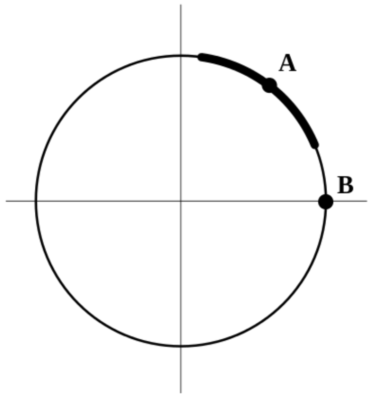

Abbildung 17: Die Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ kann als Lösung der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = 1$ beschrieben werden. Lokal kann die Funktion auch als Graph einer Funktion beschrieben werden. (Quelle: wikipedia)

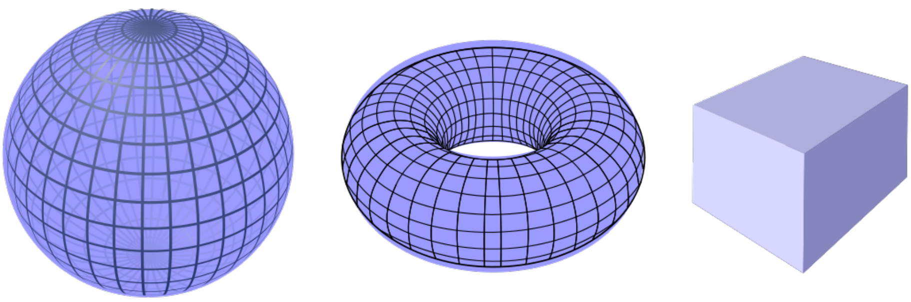

Abbildung 18: Die Sphäre und der Torus sind glatte Mannigfaltigkeiten. Die Quaderoberfläche ist keine C^1–Mannigfaltigkeit. (Quelle: wikipedia)

Wir sprechen im Folgenden einfach von Mannigfaltigkeiten, meinen damit aber genauer C^1–Mannigfaltigkeiten. Die Definition lässt sich aber einfach auf C^ℓ–Mannigfaltigkeiten oder glatte Mannigfaltigkeiten verallgemeinern. Wir bemerken, dass $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

Wir zeigen als nächstes, dass die Bedingung (ii) in der obigen Definition die richtige Bedingung ist um sicherzustellen, dass M lokal als C^1 Graph dargestellt werden kann. Der folgende Satz sagt aus, dass eine Mannigfaltigkeit lokalals Graph dargestellt werden kann und lokal diffeomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Wir erinnern daran, dass ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$ eine stetige Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion ist.

thm-mfk **Satz 5.2 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten).** *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$, $M \neq \emptyset$ und sei $m = n + k$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) M ist n–dimensionale C^1–Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$.

(ii) Zu jedem $x^* \in M$ gibt es eine Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und ein $g \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$ und eine eine Permutation π von $\{1, \ldots, n\}$ mit

$$M \cap \Omega = \pi(\operatorname{graph} g).$$

(iii) Zu jedem $x^* \in M$ gibt es eine Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und ein $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, so dass

$$\operatorname{rank} D\varphi(u) = k \quad \forall u \in U, \qquad \varphi : U \to M \cap \Omega \textit{ ist Homöomorphismus.}$$

Eine Abbildung φ mit den Eigenschaften aus (iii) heißt Parametrisierung oder Karte.

Beweis. Für $x \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir $x = (y, z)$ mit $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^k$.

(i) ⇒ (ii): Zu $x^* \in M$ gibt es also eine Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ mit $\operatorname{rang} Df(x) = k \ \forall x \in \Omega$ mit $M \cap \Omega = f^{-1}(0)$. Nach Umsortierung der Koordinaten gilt $D_z f(x^*) \in \operatorname{GL}(k)$. Nach dem Satz von der impliziten Funktion gibt es eine Umgebung $U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ von $x^* = (y^*, z^*)$ und $g \in C^1(U, V)$, so dass

$$M \cap \Omega \ = \ \{(y, z) \in U \times V : f(y, z) = 0\} \ = \ \operatorname{graph} g.$$

(ii) ⇒ (iii): Nach Umsortierung der Koordinaten gilt $M \cap \Omega = \varphi(U)$ für $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $\varphi(y) := (y, g(y))$. Aus der Definition folgt, dass φ injektiv ist mit $\operatorname{rang} D\varphi = n$. Es bleibt zu zeigen, dass die Inverse von φ stetig ist: In der Tat, falls $\varphi(y_k) = (y_k, g(y_k)) \to (y, z)$, dann folgt $(y_k, g(y_k)) \to (y, z)$ und daher $y_k \to y$.

(iii) ⇒ (i): Der Beweis war nicht Teil der Vorlesung. Sei $u^* \in U$ gegeben durch $x^* = \varphi(u^*) \in M$. Wir definieren $V := D\varphi(u^*) \subset \mathbb{R}^m$ und wählen einen Unterraum $W \subset \mathbb{R}^m$

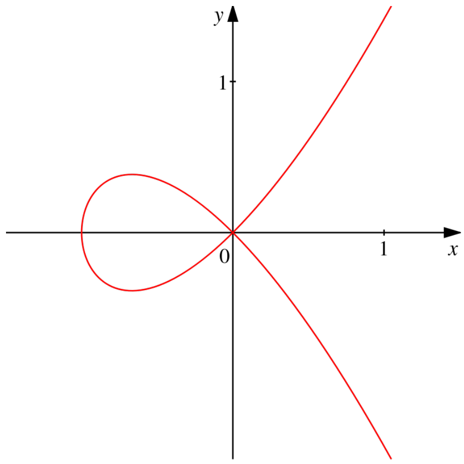

Abbildung 19: Beispiele einer nicht-injektiven Kurve. Der Graph ist keine Mannigfaltigkeit. (Quelle: wikipedia)

mit $\mathbb{R}^m = V \oplus W$. Nach Voraussetzung gilt dann $\dim V = n$ und $\dim W = k$. Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ hat entsprechend die Darstellung $x = x_V + x_W$. Nach dem Umkehrsatz gibt es eine offene Menge $u^* \in \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\varphi_V : \tilde{U} \to \varphi_V(\tilde{U})$ invertierbar ist mit Umkehrabbildung $g \in C^1(\varphi_V(\tilde{U}), \tilde{U})$. Wir wählen $\Omega_1 \subset \Omega$ offen mit $x^* \in \Omega_1$ und $\varphi^{-1}(\Omega_1 \cap M) \subset \tilde{U}$. Sei $\Omega_2 = (\varphi_V(\tilde{U}) \oplus W) \cap \Omega_1 \subset \Omega_1$ und sei $f \in C^1(\Omega_2, W)$ gegeben durch

$$f(x_V + x_W) = x_W - \varphi_W(g(x_V)). \tag{5.1}$$

mk-1

Dann gilt $\operatorname{rang} Df(x) = k \ \forall x \in \Omega_2$. Es bleibt zu zeigen, dass für $x = x_V + x_W \in \Omega_2$ die beiden Aussagen $f(x) = 0$ und $x \in \Omega_2 \cap M$ äquivalent sind. Mit der Notation $u := g(x_V) \in \tilde{U}$ und mit (5.1) ist $f(x) = 0$ äquivalent zu $x_W = \varphi_W(u)$. Da $x_V = \varphi_V(u)$, ist die Identität $x_W = \varphi_W(u)$ wiederum äquivalent zu $x = \varphi(u)$. Dies ist nach Definition äquivalent zu $x \in M \cap \Omega_2$. □

Falls wir zu einem Punkt $x \in M$ zwei Parametrisierungen $\varphi_1 : U_1 \to M \cap \Omega$ mit $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $\varphi_2 : U_2 \to M \cap \Omega$ mit $U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$, dann ist $\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : U_1 \to U_2$ ein Homöomorphismus. Da Homöomorphismen zwischen die Dimension erhalten, ergibt dies insbesondere $n_1 = n_2$. Insbesondere ist die Dimension einer Mannigfaltigkeit eindeutig definiert. Es gibt allerdings stetige, surjektive Funktionen $\gamma \in C^0([0,1],[0,1]^2)$ wie die Peanokurve (Übungsaufgabe).

Wir geben Beispiele von Mannigfaltigkeiten:

Beispiel 5.3 (Beispiele von Mannigfaltigkeiten).

(i) *$M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$ offen, ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n. Jede abzählbare Menge von Punkten in $\mathbb{R}^n$ ohne Häufungspunkt ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit (beachte, dass $\mathbb{R}^0 = \{0\}$).*

(ii) Eine injektive Kurve $\gamma \in C^1((0,1),\mathbb{R}^n)$ definiert eine eindimensionale Mannigfaltigkeit $M = \operatorname{graph}\gamma$. Falls γ nicht injektiv ist, dann ist M im Allgemeinen keine Mannigfaltigkeit.

(iii) Die Einheitssphäre $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m-1$. Der Kegel $\mathscr{C}^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m : x_m^2 = \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2\}$ ist keine Mannigfaltigkeit. Der punktierte Kegel $\mathscr{C}' := \mathscr{C}^{m-1}\setminus\{0\}$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $m-1$.

Der Beweis ist Übungsaufgabe.

[15.1.2020]
[29.1.2021]

prp-kartwechsel **Proposition 5.4 (Kartenwechsel sind C^1–Diffeomorphismen).** *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n–dimensionale C^1–Mannigfaltigkeit und seien $\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i) \subset M$, $i = 1, 2$, $\Omega_i \in \mathbb{R}^n$ zwei C^1–Parametrisierungen mit $M_1 := \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2) \neq \emptyset$. Dann ist $\psi : \varphi_1^{-1}(M_1) \to \varphi_2^{-1}(M_1)$, gegeben durch $\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ein C^1–Diffeomorphismus.*

Beweis. Wir setzen $\psi := \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 \to U_1$. Wir bemerken zuerst, dass ψ als Komposition zweier Homöomorphismen ein Homöomorphismus ist. Aus Symmetriegründen reicht es also $\psi \in C^1$ zu zeigen.

Sei $u_2 \in U_2$ fest vorgegeben und seien $x := \varphi_2(u_2)$, $u_1 \in \varphi_1^{-1}(x)$. Sei $V := T_x(M) = D\varphi_1(u_1)$. Sei $\pi_V : \mathbb{R}^m \to V$ die orthogonale Projektion auf V und sei $\tilde\varphi_1 := \pi_V \circ \pi : U_1 \to T_xM$. Dann gilt $D\tilde\varphi_1 = \pi_V D\varphi_1$ und daher $D\tilde\varphi_1(u_1) = D\varphi_1(u_1)$, d.h. $\operatorname{rang} D\tilde\varphi_1(u_1) = n$. Nach dem Umkehrsatz gibt es offene Umgebungen $\tilde U_1 \subset U_1$ von u_1 und $\tilde V \subset V$ von x und einen Diffeomorphismus $g \in C^1(\tilde V, \tilde U_1)$ mit

$$(g \circ \tilde\varphi_1)(\tilde u_1) = \tilde u_1 \qquad\qquad \forall \tilde u_1 \in \tilde U_1.$$

Daraus folgt, dass $g \circ \pi_V$ die Inverse von $\varphi_1 : \tilde U_1 \to \varphi_1(\tilde U)$ ist. Auf $\tilde U_2 := \varphi_2^{-2}(\varphi_1(\tilde U_1))$ gilt dann $\psi = g \circ \pi_V \circ \varphi_2$. Damit ist $\psi \in C^1(\tilde U_2, \mathbb{R}^n)$ ein Diffeomorphismus auf $\tilde U_2$. $\square$

Die Aussage in Proposition prp-kartwechsel 5.4 lässt sich nutzen, um die Mannigfaltigkeiten, ohne Einbettung in einen umgegebenden Raum zu definieren: Ein Menge M Mannigfaltigkeit der Dimension m, falls es eine Überdeckung von M mit Mengen U_j, $j \in \Lambda$ und Homöomorphismen $\varphi_j : \mathbb{R}^k \to U_j$ gibt, so dass alle Kartenwechsel Diffeomorphismen sind, d.h für je zwei Karten φ_1, φ_2 gilt $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \in C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$.

Eine C^1–Mannigfaltigkeit M kann lokal durch eine C^1–Funktion dargestellt werden. Insbesondere lässt sich M an jedem Punkt $x \in M$ durch eine Tangentialebene der Form $x + T_x(M)$ approximieren, wobei T_xM der Tangentialraum an x ist:

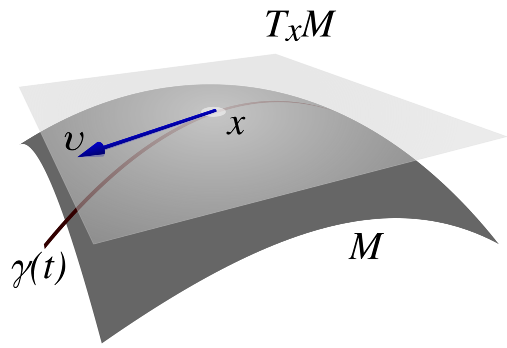

Abbildung 20: Visualisierung des Tangentialraums (Quelle: wikipedia)

Definition 5.5 (Tangentialraum, Normalraum, Kotangentialraum). *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $x \in M$. Dann heißt*

(i) $T_x(M) := \{v \in \mathbb{R}^m \ : \ \exists \gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), M) \text{ mit } \gamma(0) = x \text{ und } \gamma'(0) = v\}$ *der Tangentialraum an M in x*

(ii) $N_x(M) := T_x(M)^\perp$ *der Normalraum an x.*

(iii) $T_x^*(M) := (T_x M)^*$ *der Kotangentialraum von M an x.*

Wir bemerken, dass der Normalraum extrinsisch ist und vom umgebenenden Raum abhängt. Der Normalraum beschreibt also die die Einbettung der Untermannigfaltigkeit in den zugrundeliegenden Raum. Der Tangentialraum lässt sich allerdings intrinisisch definieren, unabhängig vom umgegebenden Raum (Differentialgeometrie).

Der nächste Satz zeigt, dass der Tangentialraum und der Normalraum Vektorräume sind und gibt eine explizite Charakterisierung dieser Räume:

Satz 5.6. *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $m = n + k$ und sei $x \in M$. Seien $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(0) = x$ und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, wie in Satz 5.2. Dann gilt*

(i) $T_x(M) = \operatorname{im} D\varphi(0) = \operatorname{kern} Df(x)$

(ii) $N_x(M) = \operatorname{im} D\varphi(0)^\perp = \mathit{span}\, \langle \nabla f_1(x), \ldots, \nabla f_k(x) \rangle$.

$T_x(M)$ und $N_x(M)$ sind also Vektorräume mit $\dim T_x(M) = n$ und $\dim N_x(M) = k$.

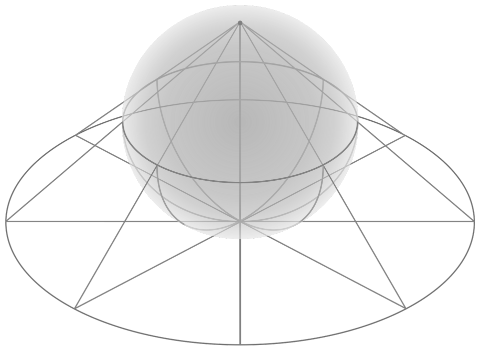

Abbildung 21: Stereographische Projektion. (Quelle: wikipedia)

Beweis. (i): Für $u \in \mathbb{R}^n$ gilt $tu \in U$ für $t < \varepsilon$ hinreichend klein. Dann definiert $\gamma(t) := \varphi(tu)$ eine Kurve $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ mit $\gamma'(0) = D\varphi(0)u$. Daraus folgt $D\varphi(0)u \in T_xM$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$ und daher $\operatorname{im} D\varphi(0) \subset T_xM$. Für $v \in T_xM$ gibt es andererseits ein Kurve $\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = v$. Wir können $\varepsilon > 0$ hinreichend klein wählen, so dass $\gamma((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M \cap \Omega$. Dann gilt $f(\gamma(t)) = 0$ und $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = Df(x)\gamma'(0) = 0$. Damit gilt $Df(x)v = 0$ und daher $T_xM \subset \operatorname{kern} Df(x)$. Insgesamt ergibt dies

$$\operatorname{im} D\varphi(0) \subset T_xM \subset \operatorname{kern} Df(x).$$

Da $\operatorname{rang} D\varphi(0) = \dim \operatorname{kern} Df(x) = n$, folgt $\operatorname{im} D\varphi(0) = \operatorname{kern} Df(x)$. Damit ist T_xM ein Vektorraum und die Identität (i) gilt.

(ii): Aus (i) und mit der Definition des Normalraumes erhalten wir $N_x(M) = \operatorname{im} D\varphi(0)^\perp$ und $\dim N_x(M) = k$. Sei $w = \nabla f_j(x)$ für ein $j = 1, \ldots, k$ und sei $v \in T_x(M)$. Nach (i) gilt $(w, v) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_j(x) v_i = (Df(x)v)_j = 0$, d.h.

$$\operatorname{span} \langle \nabla f_1(x), \ldots, \nabla f_k(x) \rangle \subset N_x(M).$$

Da $\dim N_x(M) = k$, folgt die Aussage. $\square$

Beispiel 5.7 (Tangential– und Normalraum für Graphen). *Sei $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$ offen, $g \in C^1(U)$ und sei $M := \operatorname{graph} g \subset \mathbb{R}^m$. Dann ist M eine $n = m-1$–dimensionale Mannigfaltigkeit. Für $p \in M$ gilt also $\dim T_pM = m-1$ und $\dim N_pM = 1$. Eine Parametrisierung von M ist gegeben durch $\varphi(x) = (x, g(x))$. Für $p := (x, g(x)) \in M$ gilt dann*

$$T_pM = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \nabla g(x) \cdot a \end{pmatrix} \;:\; a \in \mathbb{R}^{m-1} \right\}, \qquad N_pM = \left\{ \begin{pmatrix} -\nabla g(x) \\ 1 \end{pmatrix} t \;:\; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

[29.1.2021]

[01.02.2021]

Oft ist es sinnvoll zusammen mit dem Tangentialraum auch die Information über den Stelle an der der Tangentialraum anliegt, mitzunehmen:

Definition 5.8 (Tangential–, Normal–, Kotangentialbündel). *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann heißt*

(i) $T(M) := \{(x, v) \ : \ x \in M, v \in T_xM\}$ *das Tangentialbündel von M.*

(ii) $N(M) := \{(x, v) \ : \ x \in M, v \in N_xM\}$ *das Normalbündel von M.*

(iii) $T^*(M) := \{(x, v) \ : \ x \in M, v \in T_x^*M\}$ *das Kotangentialbündel von M.*

Die Abbildungen $\pi : T(M) \to M$, bzw. $\pi : T(N) \to M$, bzw. $\pi : T^*(M) \to M$ mit $\pi(p, v) = p$ heißen kanonische Projektionen.

Sei M eine C^1–Mannigfaltigkeit mit lokaler Parametrisierung φ um $x \in M$. Dann ist $(\varphi, D\varphi)$ eine lokale Parametrisierung des Tangentialbündels. Damit ist $T(M)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$. Entsprechend sind auch $T(N)$ und $T^*(M)$ Mannigfaltigkeiten.

5.2 Integration auf Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten zuerst eine lineare Abbildung $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $n \leq m$. Für eine gegebene messbare Menge Ω wollen wir den k-dimensionalen "Flächeninhalt" von $T(\Omega)$ definieren. Mit der Polarzerlegung erhalten wir $T = QS$ für eine Isometrie $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Da das Hausdorffmaß invariant unter isometrischen Abbildungen ist, und da $T^tT = S^tS$, ist der n–dimensionalen Flächeninhalt von $T(\Omega) = QS(\Omega)$ gegeben durch

$$\mathscr{H}^n(T\Omega) \ = \ |\det S|\mathscr{H}^n(\Omega) \ = \ \sqrt{\det(T^tT)}\ \mathscr{H}^n(\Omega). \tag{5.2}$$ flaeche-lin

Wir bemerken, dass es insbesondere eine Orthonormalbasis (e_i) in $\mathbb{R}^n$ gibt und ein Orthonormalsystem $(f_i)_{i=1}^n$ in $\mathbb{R}^n$ gibt mit $|\det S| = |\det((f_i, Te_i)_{ij})|$.

thm-flint **Satz 5.9 (n–dimensionaler Flächeninhalt).** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $n \leq m$, eine Parametrisierung. Das n-dimensionale Hausdorffmaß (oder Flächeninhalt) von $M = \varphi(U)$ ist gegeben durch*

$$\mathscr{H}^n(M) \ = \ \int_U \sqrt{\det(D^t\varphi D\varphi)}\ dx.$$

Beweis. Der Beweis basiert auf einem Lokalisierungsargument zusammen mit (5.2) und verläuft analog zum Beweis des Transformationssatzes. Wir geben den Beweis nicht in der Vorlesung. Stattdessen behandeln wir den Flächeninhalt wie eine Definition. Wir zeigen allerdings, dass die Definition nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt: Seien

$\varphi_i \in C^1(U_1, \mathbb{R}^m)$ reguläre Abbildungen, so dass $\varphi_i : U_i \to \varphi(U_i)$ Homöomorphismen sind und $M = \varphi_1(U_1) = \varphi_2(U_2)$. Nach Proposition 5.4 ist $\psi := \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 \to U_1$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt $\varphi_1 \circ \psi = \varphi_2$, $D\varphi_1 D\psi = D\varphi_2$ und daher

prp-kartwechsel

$$|\det D\psi| \sqrt{\det(D^t\varphi_1 D\varphi_1)} = \sqrt{\det(D^t\psi D^t\varphi_1 D\varphi_1 D\psi)} = \sqrt{\det(D^t\varphi_2 D\varphi_2)}.$$

Mit dem Transformationssatz und da $U_1 = \psi(U_2)$ und $f \circ \varphi_1 \circ \psi = f \circ \varphi_2$ folgt

$$\int_{U_1} \sqrt{\det(D^t\varphi_1 D\varphi_1)}\, dx = \int_{U_2} \sqrt{\det(D^t\varphi_2 D\varphi_2)}\, dx.$$

□

Als Beispiel geben wir eine Formel für den Flächeninhalt einer Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$, welche als Graph gegeben ist:

Beispiel 5.10 (Fläche von Graphen). *Sei $n = m - 1$ und sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $g \in C^1(U)$ und sei $M = \operatorname{graph} g \subset \mathbb{R}^m$. Dann gilt $M = \varphi(U)$ für die Parametrisierung $\varphi(x) := (x, g(x))$. Wir berechnen $D^t\varphi D\varphi = 1_{n\times n} + \nabla g \otimes \nabla g$ und $\det(D^t\varphi D\varphi) = 1 + |\nabla g|^2$ mit der Notation $a \otimes b := ab^t$. Damit gilt*

$$\mathscr{H}^n(M) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla g|^2}\, d\mathscr{L}^n$$

Im Allgemeinen kann die Mannigfaltigkeit nur lokal durch eine Parametrisierung dargestellt werden. Um über mehrere Karten zu integrieren, benötigen wir eine Lokalisierungsfunktion:

m-lokalisierung

Lemma 5.11 (Lokalisierungsfunktion). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $K \Subset U$. Dann gibt es ein $\varphi \in C_c^\infty(U, [0,1])$ mit $\varphi = 1$ in K und $\operatorname{spt} \varphi \Subset U$.*

Beweis. Es gilt $\delta := \operatorname{dist}(K, \partial U) > 0$. In der Tat, da K kompakt ist, gibt es eine Folge $x_k \in K$ mit $x_k \to x$ für ein $x \in K$ und $\operatorname{dist}(x, \partial U) = \delta$. Da $\partial U \cap K = \emptyset$ folgt $\delta > 0$. Sei $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$ ein Faltungskern mit $\operatorname{spt} \zeta \in B_1$ und $\int \zeta = 1$ und sei $\zeta_\delta = \delta^{-n}\zeta(\frac{x}{\delta})$ (ein solcher existiert Übungsaufgabe). Dann erfüllt $\varphi := \chi_{B_{\frac{\delta}{2}}(K)} * \zeta_{\frac{1}{4}\delta}$ die gewünschten Eigenschaften. □

Wir erinnern, dass $\Omega := \{\Omega_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von $A \subset \mathbb{R}^m$ ist, falls $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$ und falls die Mengen Ω_i offen sind. Falls $\Omega_i = \emptyset$ für alle bis auf endlich viele Mengen, dann heißt die Überdeckung endlich. Die Überdeckung heißt lokal endlich, falls es zu jedem $x \in A$ eine Umgebung U_x gibt mit, so dass die Anzahl der Mengen Ω_i mit $\Omega_i \cap U_x \neq \emptyset$ endlich ist. [01.02.2021]

[05.02.2021]

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und sei $K \Subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit $A \cap K = \emptyset$. Dann gilt $\operatorname{dist}(A, K) > 0$ (Übungsaufgabe). Wir benutzen diese Tatsache im Folgenden wiederholt.

thm-zerlegung

Satz 5.12 (Zerlegung der Eins). *Sei $\mathscr{U} = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine offene Überdeckung von $A \subset \mathbb{R}^n$ und sei A abgeschlossen. Dann gibt es eine Funktionenfolge φ_i, $i \in \mathbb{N}$, mit*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i = 1 \qquad \text{und} \qquad \varphi_i \in C_c^\infty(U_i, [0,1]) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Die Folge φ_i heisst Zerlegung der Eins zur Überdeckung $\mathscr{U}$ von A.

Beweis. Für den Beweis nehmen wir an, dass A kompakt ist der allgemeine Fall ist Übungsaufgabe. Dann können wir eine endliche Teilüberdeckung $U_1, \dots, U_\ell$ auswählen. Unser Ziel ist für jedes i eine abgeschlossene Menge $K_i \Subset U_i$ zu finden, so dass $A \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} K_i$. Zuerst bemerken wir, dass $A \backslash \bigcup_{i=2}^{\ell} U_i$ abgeschlossen ist und $A \backslash \bigcup_{i=2}^{\ell} U_i \subset U_1$ (d.h. $U_1^c \cap (A \backslash \bigcup_{i=2}^{\ell} U_i) = \emptyset$). Daraus folgt, dass $\delta_1 := \operatorname{dist}(A \backslash \bigcup_{i=2}^{\ell} U_i) > 0$. Für

$$\tilde{U}_1 \;:=\; \{x \in U_1 \;:\; \operatorname{dist}(x, U_1) > \frac{\delta_1}{2}\}$$

gilt also $A \subset \tilde{U}_1 \cup \bigcup_{i=2}^{\ell} U_i$. Damit ist $\tilde{U}_1$, $U_2, \dots, U_\ell$ auch eine offene Überdeckung von A. Nacheinander finden wir auf diese Weise Zahlen $\delta_i > 0$ und $\tilde{U}_i$ offen mit

$$\tilde{U}_i \;:=\; \{x \in U_i \;:\; \operatorname{dist}(x, U_i) > \frac{\delta_i}{2}\}$$

so, dass $(\tilde{U}_i)_{i=1}^{\ell}$ eine offene Überdeckung von A ist. Wir wählen nun

$$K_i \;:=\; \{x \in U_i \;:\; \operatorname{dist}(x, U_i) \geq \frac{\delta_i}{4}.\}$$

Dann sind die Mengen K_i kompakt und $\tilde{U}_i \Subset K_i \Subset U_i$. Damit gilt

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} K_i, \qquad \operatorname{dist}(K_i, \partial U_i) \geq \frac{1}{2}\delta \qquad K_i \Subset U_i \quad \forall 1 \leq i \leq \ell$$

lem-lokalisierung

Nach Lemma 5.11 gibt es $\psi_i \in C_c^\infty(U_i, [0,1])$ mit $\psi_i = 1$ in K_i $\forall 1 \leq i \leq \ell$. Insbesondere gilt $\psi(x) := \sum_{i=1}^{\ell} \psi_i(x) > 0$ in A. Für $\varphi_i := \frac{\psi_i}{\psi} \in C_c^\infty((U_i, [0,1]))$ gilt dann

$$\sum_{i=1}^{\ell} \varphi_i(x) = \frac{1}{\psi(x)} \sum_{i=1}^{\ell} \psi_i(x) = 1 \qquad\qquad \forall x \in A$$

$\square$

thm-flint2 **Satz 5.13 (Integral für paramterisierte Fläche).** *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, $n \leq m$, *eine Parametrisierung. Für eine Funktion* $f \in L^1(M, \mathscr{H}^n)$ *gilt*

$$\int_M f \; d\mathscr{H}^n \;=\; \int_U f \circ \varphi \sqrt{\det(D\varphi D\varphi)} \; du.$$

Beweis. Der Beweis basiert auf einem Lokalisierungsargument zusammen mit (5.2) und verläuft analog zum Beweis des Transformationssatzes. Wir im Beweis von Satz 5.9 folgt, dass das Integral nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt: Nach Proposition 5.4 ist $\psi := \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : U_2 \to U_1$ ein Diffeomorphismus. Die Aussage folgt dann aus dem Transformationssatz wie im Beweis von Satz 5.9. ☐

Wir schreiben in diesem Fall auch kurz $f \in L^p(M)$, falls $f \in L^p(M, \mathscr{H}^n)$ ist für eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit.

def-flint2 **Satz 5.14 (Integral auf Mannigfaltigkeiten).** *Sei* $M \subset \mathbb{R}^m$ *eine* C^1-*Mannigfaltigkeit der Dimension* n. *Sei* ψ_i *eine Zerlegung der Eins zu der offenen Überdeckung* $\{\Omega_i : i \in \mathbb{N}\}$ *von* $\overline{M}$ *Für* $f \in L^1(M)$ *gilt dann*

$$\int_M f \; d\mathscr{H}^n \;=\; \sum_{i=1}^{\ell} \int_{M \cap \Omega_i} \psi_i f \; d\mathscr{H}^n.$$

Beweis. Da $f\psi_i = 0$ außerhalb von $M \cap \Omega_i$, gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{M \cap \Omega_i} \psi_i f \; d\mathscr{H}^n \;=\; \int_M \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \Big) f \; d\mathscr{H}^n = \int_M f \; d\mathscr{H}^n.$$

Um das Integral und die Reihe zu vertauschen, haben wir den Satz von der dominierten Konvergenz genutzt. ☐

Um Integrale konkret auszurechnen, wählen wir die offene Überdeckung der Mannigfaltigkeit so, dass es zu jedem $M \cap \Omega_i$ eine Parametrisierung gibt und nutzen dann Satz 5.13.

Beispiel 5.15 (Flächeninhalt der Sphäre S^2). *Wir berechnen den Flächeninhalt der Sphäre* $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. *Wir betrachten dazu die Karte* $\Phi(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$. *Dann gilt*

$$\Phi((0,\pi) \times (0, 2\pi)) = S^2 \backslash N \qquad \textit{mit } N := \{(\sin\theta, 0, \cos\theta) : \theta \in [0,\pi]\}.$$

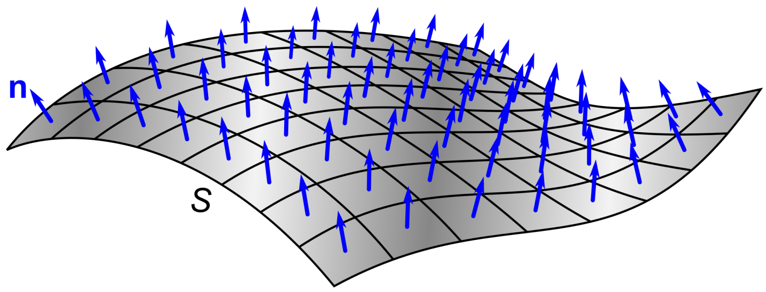

Abbildung 22: Normalenvektorfeld auf einer gekrümmten Oberfläche. (Quelle: wikipedia)

Dann gilt $\mathscr{H}^2(N) = 0$ *und* $\mathscr{H}^2(S^2 \setminus N) = \mathscr{H}^2(S^2)$. *Mit* $D := D\Phi(\theta, \varphi)$ *berechnen wir*

$$D = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad D^tD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

und damit $\sqrt{\det D^tD} = \sqrt{\sin^2\varphi} = |\sin\varphi|$. *Damit erhalten wir*

$$\mathscr{H}^2(S^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{\det(D^t\Phi D\Phi)}\ d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi\ d\theta = 4\pi.$$

[05.02.2021]

[8.2.2021]

5.3 Satz von Gauss und klassischer Satz von Stokes

Ziel ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x)\ dx \ = \ f(a) - f(b)$$

auf höhere Dimensionen. Wir sagen, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ einen C^1-Rand hat, falls Ω lokal als der Subgraph einer C^1–Funktion geschrieben werden kann. In diesem Fall schreiben wir kurz $\partial\Omega \in C^1$. Für allgemeinere Mengen existiert die Normale nicht an jedem Punkt des Randes.

def-liprand

Definition 5.16 (Regulärer Rand). *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen.*

(i) Ein Punkt $x \in \partial\Omega$ *heisst regulärer Randpunkt, falls es eine Umgebung* $U \subset \mathbb{R}^n$ *von* x *und eine Abbildung* $f \in C^1(U)$ *mit* $\nabla f \neq 0$*, so dass* $\partial\Omega \cap U = f^{-1}(\{0\})$ *und* $\Omega \cap U = f^{-1}((-\infty, 0))$*. Die Menge der regulären Randpunkte* $\partial^r\Omega \subset \partial\Omega$ *heisst regulärer Rand.*

(ii) Falls $\partial_r\Omega = \partial\Omega$*, dann schreiben wir auch kurz* $\partial\Omega \in C^1$.

Insbesondere hat Ω genau dann einen C^1-Rand, wenn $\partial^r\Omega = \partial\Omega$. Nach Definition ist $\partial^r\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Wir bemerken, dass im Sinne dieser Definition die Menge $(-1,0)\cup(0,1)$ keinen C^1–Rand hat. Auch die punktierte Kugel $B_1\backslash\{0\}$ hat keinen Lipschitz-Rand. Alternativ könnte man zur offenen Menge auch die Menge $\tilde\Omega := \operatorname{int}(\overline{\Omega})$ betrachten (d.h. $\tilde\Omega$ ist das Innere des Abschlusses von Ω). Dann gilt $\partial\Omega\in C^1$, falls $\partial\tilde\Omega$ lokal der Graph einer C^1–Funktion ist. Die Notation $\partial\Omega\in C^1$ ist daher eigentlich eine Aussage über den Rand der Menge $\partial\tilde\Omega$.

Proposition 5.17 (Äußere Normale). *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega\in C^1$. Dann gibt es ein eindeutiges Normalenvektorfeld $\nu\in C^0(\Omega, S^{n-1})$, so dass*

$$\nu(x)\in N_x(\partial\Omega),\qquad x+t\nu(x)\notin\Omega\quad \forall t\in(0,\varepsilon)\ \textit{für ein}\ \varepsilon>0. \tag{5.3}$$

ide-normal

Der Vektor $\nu(x)$ heisst äußere Normale an $x\in\partial\Omega$.

Beweis. Zu jedem $x\in\partial\Omega$ gibt es eine Umgebung $U\subset\mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f\in C^1(\overline{U})$ mit $\partial\Omega\cap U = f^{-1}(0)$ und rang $Df = 1$ auf $\partial\Omega$. Die Aussage rang $Df = 1$ bedeutet gerade, dass $|\nabla f(x)|>0\,\forall x\in\partial\Omega$. Insbesondere gilt auch $\frac{1}{|\nabla f|}\in C^0(\partial\Omega\cap U)$ Der eindimensionale Normalraum ist dann in $\partial\Omega\cap U$ aufgespannt durch ∇f. Wir können f so wählen, dass $f<0$ in $\Omega\cap U$ und $f>0$ in $\Omega^c\cap U$. Dann ist $\nu(x) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}\in C^1(\partial\Omega\cap U, S^{n-1})$ die äußere Normale in $\partial\Omega\cap U$.

Sei nun U_i, $i\in\mathbb{N}$ eine offene Überdeckung von $\partial\Omega$ und seien $f_i\in C^1(U_i)$ mit rang $Df_i = 1$ und $\partial\Omega\cap U_i = f_i^{-1}(0)$. Außerdem gelte $f_i<0$ in $\Omega\cap U_i$ und $f_i>0$ in $\Omega^c\cap U_i$. Dann ist $\nu := \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ unabhängig von der speziellen Wahl der Funktionen f_i. Insbesondere definiert dies ein eindeutiges Vektorfeld, welches (5.3) erfüllt. ide-normal □

Für die Menge $Q=(0,1)^2\subset\mathbb{R}^2$ ist die Normale $\nu:\partial Q\to S^1$ fast überall definiert. Sei $\Gamma_1 := \{0\}\times(0,1)$, $\Gamma_1 := \{1\}\times(0,1)$, $\Gamma_2 := (0,1)\times\{1\}$ und $\Gamma_3 := \{0\}\times(0,1)$ und $\Gamma_4 := (0,1)\times\{0\}$. Sei $\Gamma = \bigcup_{i=1}^4\Gamma_i$. Sei $\nu_1 := e_1$, $\nu_2 = e_2$, $\nu_3 = -e_1$ und $\nu_4 = -e_4$. Dann gilt $\nu(x) = \nu_i$ für $x\in\Gamma_i$. Außerdem gilt $\mathscr{H}^1(\partial\Omega\backslash\Gamma) = 0$. Für $F\in C^1(Q)\cap C^0(\overline{Q})$ gilt dann mit einer Anwendung des Satzes Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_Q \operatorname{div} F\,dx &= \sum_{i=1}^2\int_0^1\int_0^1\sum_{i=1}^2\partial_i F_i\,dx = \int_0^1\int_0^1\partial_1 F_1\,dx_1dx_2 + \int_0^1\int_0^1\partial_2 F_2\,dx_2dx_1\\
&= \int_0^1 F_1(1,x_2)-F_1(0,x_2)\,dx_2 + \int_0^1 F_2(x_1,1)-F_2(x_1,0)\,dx_1\\
&= \int_{\Gamma_1} F_1\,d\mathscr{H}^1 + \int_{\Gamma_3}(-F_1)\,d\mathscr{H}^1 + \int_{\Gamma_3} F_2\,d\mathscr{H}^1 + \int_{\Gamma_4}(-F_2)\,d\mathscr{H}^1\\
&= \int_{\bigcup_{i=1}^4\Gamma_i} F\cdot\nu\,d\mathscr{H}^1.
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\mathscr{H}^1(\partial\Omega \backslash \Gamma) = 0$. Damit erhalten wir

$$\int_Q \operatorname{div} F \; dx \;=\; \int_{\partial Q} F \cdot \nu \; d\mathscr{H}^1$$

Dies ist eine Version des Satzes von Gauß für das Rechteck $Q \subset \mathbb{R}^2$.

Wir zeigen als nächstes den Satz von Gauss für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$. Für den Satz nehmen wir an, dass Ω beschränkt ist. Der Satz lässt sich aber auch analog für unbeschränkte Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ formulieren, falls $\operatorname{div} \in L^1(\Omega)$ und $F \cdot \nu \in L^1(\partial\Omega)$.

thm-gauss1

Satz 5.18 (Satz von Gauss). *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial\Omega \in C^1$ (im Sinne von Definition* def-liprand *5.16). Für $F \in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \cap C^0(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n)$ gilt dann*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \; dx \;=\; \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \; d\mathscr{H}^{n-1}.$$

Beweis. Da $\overline{F}$ und $\partial\Omega$ kompakt sind, gilt $\operatorname{div} F \in L^1(\Omega)$ und $F \cdot \nu \in L^1(\partial\Omega)$.

Da $\partial\Omega$ kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung von $\partial\Omega$ mit offenen Mengen $(U_j)_{j=1}^{\ell}$, so dass sich $\partial\Omega \cap U_j$ lokal als C^1–Graph darstellen lässt. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, gilt $\delta := \operatorname{dist}\left(\partial\Omega, \bigcap_{j=1}^{\ell} U_j^c\right) > 0$. Sei

$$U_0 \;:=\; \{x \in \Omega \;:\; \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{\delta}{2}\}.$$

Dann ist $(U_j)_{j=0}^{\ell}$ eine offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$ und $\partial\Omega \cap U_0 = \emptyset$. Sei ψ_j eine zugehörige Zerlegung der Eins und sei $F^{(j)} := F\psi_j \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $\operatorname{spt} F^{(j)} \Subset U_j$ und

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div} F \; dx \;&=\; \sum_{j=0}^{\ell} \int_{\Omega \cap U_j} \operatorname{div} F^{(j)} \; dx, \\
\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \; d\mathscr{H}^{n-1} \;&=\; \sum_{j=1}^{\ell} \int_{\partial\Omega \cap U_j} F^{(j)} \cdot \nu \; d\mathscr{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Schritt 1: Homogene Randdaten. Wir setzen $F^{(0)}$ zu einer Funktion $F^{(0)} \in \mathbb{C}_c^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ fort durch $F^{(0)} := 0$. Zu $1 \le i \le n$ sei x_i' eine Zusammenfassung der übrigen Variablen. Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\int_\Omega \operatorname{div} F^{(0)} \; dx \;=\; \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \partial_i F_i^{(0)} \; dx \;=\; \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \partial_i F_i^{(0)} dx_i \Big) dx_i' \;=\; 0.$$

Schritt 1: Randdaten als Graph: Es bleibt zu zeigen, dass

$$\int_{\Omega\cap U_j} \operatorname{div} F^{(j)}\ dx = \int_{\partial\Omega\cap U_j} F^{(j)}\cdot\nu\ d\mathscr{H}^{n-1}.$$

für alle $1\le j\le \ell$. Im Folgenden schreiben wir $F := F^{(j)}$, $U := U_j$ und $\Omega := \Omega\cap U_j$ für ein festes j. Nach Voraussetzung und nach Rotation und Translation des Koordinatensystems gibt es dann ein $g\in C^1(U)$ mit $g>0$, so dass $\operatorname{spt} F \Subset U\times(0,\infty)$ und

$$\Omega \;=\; \{x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n : x'\in U, 0<x_n<g(x')\}.$$

Wir transformieren das Gebiet zuerst auf ein Gebiet in der Form eines Quaders. Wir definieren dafür $\Phi(x',x_n)\ := (x', x_n - g(x'))$ und schreiben $(y',y_n)=\Phi(x',x_n)$. Dann

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}=\delta_{ij},\quad \frac{\partial y_j}{\partial x_n}=0 \qquad \frac{\partial y_n}{\partial x_j}=-\frac{\partial g}{\partial x_j},\quad \frac{\partial y_n}{x_n}=1 \qquad \text{für } 1\le i,j\le n-1$$

Insbesondere erhalten wir $|\det D\Phi|=1$. Mit $\tilde F(y) := F(\Phi^{-1}(y))$ gilt dann

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_j} \;=\; \frac{\partial \tilde F_j}{\partial y_j}-\frac{\partial \tilde F_j}{\partial y_n}\frac{\partial g}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \;=\; \frac{\partial \tilde F_n}{\partial y_n} \qquad \text{für } 1\le j\le n-1.$$

Eine Anwendung des Satzes von Fubini und des Transformationssatzes ergibt also

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div} F\ dx \;&=\; \int_U\int_{-\infty}^{g(x)}\Big(\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_j}\Big)\ dx_n dx' \\
&=\; \int_U\int_{-\infty}^0 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde F_j}{\partial y_j}\ dy - \int_U \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial g}{\partial y_j}(y')\Big(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \tilde F_j}{\partial y_n}\ dy_n\Big) dy'. \\
&=\; \int_U \tilde F_n(y',0)\ dy' - \int_U \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial g}{\partial y_j}(y')\tilde F_j(y',0)\ dy'.
\end{aligned}$$

Wir transformieren zurück in die ursprünglichen Koordinaten. Da $\nu(x) = (-\nabla' g;1)/(1+|\nabla g|^2)\in S^{n-1}$ die äußere Normale and den Graphen von g ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div} F\ dx \;&= \int_U \begin{pmatrix} F'(x',g(x')) \\ F_n(x',g(x'))\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\nabla' g(x') \\ 1\end{pmatrix}\ dx' \\
&= \int_U F(x',g(x'))\cdot\nu(x')\sqrt{1+|\nabla g|^2}\ dx' \;= \int_{\partial\Omega\cap U} F\cdot\nu\ d\mathscr{H}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Für die letzte Identität haben wir genutzt, dass $\sqrt{1+|\nabla g|^2}$ die Jacobische Determinante für die Berechnung der Fläche eines Graphen ist. $\square$

Beispiel 5.19 (Kugel vs. Sphäre). *Sei $B^n \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\partial B^n = S^{n-1}$ und die äußere Normale $\nu : S^{n-1} \to S^{n-1}$ von B^n ist gegeben durch $\nu = \mathrm{id}$, d.h. $\nu(x) = x$. Sei nun $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ gegeben durch $F(x) = x$. Dann gilt $\operatorname{div} F(x) = n$. Mit dem Satz von Gauß erhalten wir also*

$$\mathscr{H}^{n-1}(S^{n-1}) \;=\; \int_{S^{n-1}} F \cdot \nu \; d\mathscr{H}^{n-1} \;=\; \int_{B^n} \operatorname{div} F \; dx \;=\; n\mathscr{L}^n(B^n).$$

Damit erhalten wir die Formel

$$\mathscr{H}^{n-1}(S^{n-1}) \;=\; n\mathscr{L}^n(B^n).$$

Wir bemerken, dass wir auch oft einfach $|\partial B_1| = \mathscr{H}^{n-1}(S^{n-1})$ und $|B_1| = \mathscr{L}^n(B^n)$ schreiben.

Der Satz von Gaus gibt uns auch eine anschauliche Interpretation der Divergenz:

Bemerkung 5.20 (Divergenz als Quellendichte).

(i) Wir stellen uns einen Fluss mit Geschwindigkeit $v \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ vor (der physikalische Fall ist $n = 3$ und wir können z.B. an den Fluss von Wasser denken). Die Geschwindigkeit ist stationär, d.h. sie hängt nicht von der Zeit ab. Eine Flüssigkeit mit konstanter Massendichte heißt inkompressibel. Wir nehmen an, dass die Massendichte unserer Flüssigkeit 1 ist. Zu einer Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \subset C^1$ ist dann

$$\int_{\partial\Omega} v \cdot n \; d\mathscr{H}^{n-1}$$

die Masse an Flüssigkeit, welche im Saldo aus dem Volumen herausfliesst. Da in einer inkompressiblen Flüssigkeit die Gesamtmenge der Flüssigkeit im gegebenen Volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ konstant bleibt, erwarten wir

$$\int_{\partial\Omega} v \cdot \nu \; d\mathscr{H}^2 \;=\; 0 \qquad \text{für jede Menge } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{ mit } \partial\Omega \in C^1.$$

für beliebige Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zu einem gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ können wir insbesondere $\Omega := B_r(x)$ wählen. Mit dem Satz von Gauß erhalten wir dann

$$\fint_{B_r(x)} \operatorname{div} v \; dx \;=\; \frac{1}{|B_r|} \int_{\partial B_r(x)} v \cdot \nu \; d\mathscr{H}^2 \;=\; 0 \qquad \text{für alle } r > 0.$$

Im Limes $r \to 0$ konvergiert die linke Seite gegen $\operatorname{div} v(x)$ und wir erhalten

$$\operatorname{div} v \;=0. \tag{5.4}$$ div=0

Wir erwarten also, dass jede inkompressible Flüssigkeit die Gleichung (5.4) erfüllt.

(ii) Für $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ erhalten wir mit dem Satz von Gauß die Identität

$$\operatorname{div} F(x) \;=\; \lim_{r \to 0} \frac{n}{r} \int_{\partial B_r(x)} F(x) \cdot \nu(x) \; d\mathscr{H}^{n-1}(x). \tag{5.5}$$

def2-div

Wenn wir uns F als die Geschwindigkeit eines Flusses vorstellen, dann beschreibt die rechte Seite der Gleichung eine Bilanz, wieviel aus der Kugel $B_r(x)$ im Saldo herausfließt. Wir interpretieren $\operatorname{div} F$ daher auch als <u>Quellendichte</u> des Vektorfeldes F. In der Physik wird (5.5) manchmal auch als Definition der Divergenz verwendet.

Wir erinnern, dass eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $\mathscr{H}^s$-Nullmenge heißt, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folgen von Kugeln B_j mit Radius $r_j > 0$ gibt mit $\Omega \subset \bigcup_j B_j$ und $\sum_{j \in \mathbb{N}} r_j^s < \varepsilon$. In diesem Fall schreiben wir $\mathscr{H}^s(\Omega) = 0$.

Satz 5.21 (Satz von Gauss für allgemeineren Rand). *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\mathscr{H}^{n-1}(\partial\Omega \backslash \partial^r \Omega) = 0$. Für $F \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt dann*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \; dx \;=\; \int_{\partial^r \Omega} F \cdot \nu \; d\mathscr{H}^{n-1}.$$

Beweis. Mit der Notation $\partial^s \Omega := \partial\Omega \backslash \partial^r \Omega$ gilt $\mathscr{H}^{n-1}(\partial^s \Omega) = 0$ und $\partial^s \Omega$ ist kompakt. Daher gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ Kugeln $(B_j)_{j=1}^N$ der Form $B_j := B_{r_j}(x_j)$, so dass

$$\partial_s \Omega \;\subset\; \bigcup_{j=1}^N B_j \qquad\qquad \text{und} \qquad\qquad \sum_{j=1}^N r_j^{n-1} \;<\; \varepsilon.$$

Wir definieren $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\zeta = 0$ für $|x| \leq 1$ und $\zeta = 1$ für $|x| \geq 2$. Wir definieren $\varphi_j(x) := \zeta_{r_j}(\frac{|x - x_j|}{r_j})$, d.h. $\varphi_j = 0$ in B_j und $\varphi_j = 1$ in $\mathbb{R}^n \backslash B_{2r_j}(x_j)$. Insbesondere gilt $\|\nabla \varphi_j\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{r_j}$ für eine Konstante, welche nur von ζ und n abhängt. Wir definieren $\varphi_\varepsilon := \prod_j \varphi_j$. Dann gilt $\nabla \varphi_\varepsilon = \sum_j \nabla \varphi_j \prod_{i \neq j} \varphi_i$. Dann erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_\varepsilon| \; dx \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} \sum_j \frac{C}{r_j} \chi_{B_{2r_j}}(x_j) \; dx \;\leq\; C \sum_{i=1}^N r^{n-1} \;\leq\; C\varepsilon \;\to\; 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0. \tag{5.6}$$

ga-all-1

Nach Konstuktion gilt $F\varphi_\varepsilon = 0$ in einer Umgebung von $\partial^s \Omega$. Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Satz 5.18 erhalten wir also

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F\varphi_\varepsilon) \; dx \;=\; \int_{\partial^r \Omega} (F\varphi_\varepsilon) \cdot \nu \; d\mathscr{H}^{n-1}. \tag{5.7}$$

gausseps-1

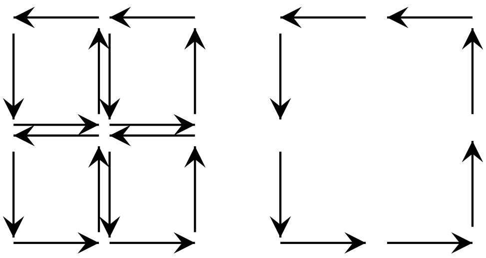

Abbildung 23: Illustration des Satzes von Stokes. (Quelle: wikipedia)

Im Limes $\varepsilon \to 0$ erhalten wir mit dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\int_{\partial^r\Omega} (F\varphi_\varepsilon) \cdot \nu \; d\mathscr{H}^{n-1} \;\to\; \int_{\partial^r\Omega} F \cdot \nu \; d\mathscr{H}^{n-1}. \tag{5.8}$$

gausseps-2

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz und mit (5.6) [ga-all-1] erhalten wir

$$\Big| \int_\Omega \Big(\operatorname{div}(F\varphi_\varepsilon) - \operatorname{div} F \Big) \, dx \Big| \;\leq\; \int_\Omega \Big| (\operatorname{div} F)(\varphi_\varepsilon - 1) \Big| dx + \Big| \int_\Omega F \cdot \nabla \varphi_\varepsilon dx \Big| \;\to\; 0. \tag{5.9}$$

gausseps-3

Die Aussage folgt dann aus (5.7),(5.8) und (5.9). [gausseps-1, gausseps-2, gausseps-3] $\square$

Wir erinnern uns, dass die Rotation in $\mathbb{R}^2$ für $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert ist durch $\operatorname{rot} F = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = \sum_{ij} \varepsilon_{3ij} \partial_i F_j$, wobei ε_{ijk} das Levi-Civita Symbol ist. Das Levi-Civita Symbol ist definiert durch $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$ und $\varepsilon_{ijk} = 0$ sonst. Zu $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir nun den Vektor $x^\perp := (-x_2, x_1)$. Insbesondere gilt $x \cdot x^\perp = 0$ und $(x^\perp)^\perp = -x$. Mit dieser Notation erhalten wir für $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, die Identität

$$\operatorname{rot} F = -\operatorname{div} F^\perp.$$

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in C^1$. Sei ν die äußere Normale an $\partial\Omega$ und sei $\tau = \nu^\perp$ ein Tangentialvektorfeld an $\partial\Omega$. Wir erinnern uns, dass das Linienintegral gegeben ist durch

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot d\tau = \int_{\partial\Omega} F \cdot \tau \; d\mathscr{H}^1.$$

Mit dieser Identität können wir den klassischen Satz von Stokes in $\mathbb{R}^2$ herleiten:

Satz 5.22 (Satz von Stokes in $\mathbb{R}^2$). *Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial\Omega \in C^1$ und äußerer Normale $\nu \in C^1(\partial\Omega, S^1)$. Für $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \cap C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ und mit $\tau := \nu^\perp$ gilt dann*

$$\int_\Omega \operatorname{rot} F \; dx \;=\; \int_{\partial\Omega} F \cdot d\tau.$$

Beweis. Es gilt $\operatorname{rot} F = -\operatorname{div} F^\perp$, $(x^\perp)^\perp = -x$. Aus $\tau = \nu^\perp$ folgt damit $\nu = -\tau^\perp$. Mit dem Satz von Gauss erhalten wir also

$$\int_\Omega \operatorname{rot} F \; dx = -\int_\Omega \operatorname{div} F^\perp \; dx = \int_{\partial\Omega} F^\perp \cdot \tau^\perp \; d\mathscr{H}^{n-1} \;=\; \int_{\partial\Omega} F \cdot \tau \; d\mathscr{H}^{n-1}.$$

□

Der Satz von Stokes in $2d$ ist eine Verallgemeinerung der Aussage, dass rotationsfreie Vektorfelder in einfach zusammenhängenden Gebieten wegunabhängig sind. Der Satz von Stokes lässt sich wie folgt auf gekrümmte Flächen im $\mathbb{R}^3$ erweitern. Der folgende Satz findet seine Anwendung in der Magnetostatik.

thm-stokes3d **Satz 5.23 (Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$).** *Sei $U \Subset \mathbb{R}^2$ mit $\partial U \in C^1$. Sei ν die äußere Normale an ∂U und sei $\tau = \nu^\perp$. Sei $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine Karte. Sei $M := \varphi(U)$ und sei*

$$\partial M := \varphi(\partial U).$$

Seien $n : \overline{M} \to S^2$ und $t : \partial M \to S^2$ für $x = \varphi(u)$ gegeben durch

$$n(x) \;:=\; \frac{\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi}{|\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi|}(u), \qquad t(x) \;:=\; \frac{(D\varphi)\tau}{|(D\varphi)\tau|}(u) \tag{5.10}$$ stokes-n

Dann ist n ein Normalenvektorfeld an M und t ist tangential zur Kurve ∂M. Sei $\Omega \Subset \mathbb{R}^3$ offen mit $M \Subset \Omega$. Für $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ gilt dann

$$\int_M \operatorname{rot} F \cdot n \; d\mathscr{H}^2 \;=\; \int_{\partial M} F \cdot t \; d\mathscr{H}^1$$

Beweis. Da $T_xM = \operatorname{span}\langle \partial_1\varphi(u), \partial_2\varphi(u)\rangle$ für $x = \varphi(u)$ gilt $n(x) \in N_xM$ nach Definition. Sei γ eine Parametrisierung von ∂U. Dann ist $\varphi \circ \gamma$ eine Parametrisierung von ∂M und daher ist $(\varphi \circ \gamma)' = (D\varphi)\tau$ tangential an ∂M.

Das Randintegral: Sei $u : [0, |\partial U|] \to \partial U$ eine Parametrisierung von ∂U mit $\dot{u}(t) = \tau(t)$. Dann ist $\varphi \circ u : [0, |\partial U|] \to \partial M$ eine Parametrisierung von ∂M mit $|\frac{d}{dt}(\varphi \circ u)| = |D\varphi\tau(u)|$. Wir erhalten also

$$\int_{\partial M} F \cdot t \; d\mathscr{H}^1 \;=\; \int_{\partial U} F(\varphi(u)) \cdot \frac{(D\varphi)\tau}{|(D\varphi)\tau|}(u)|D\varphi\tau(u)| \; dt \;=\; \int_{\partial U} G(u) \cdot \tau(u) \; dt. \tag{5.11}$$ f1-0

für wobei $G \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ definiert ist durch

$$G(u) \;:=\; D^t\varphi(u)(F \circ \varphi)(u).$$

Wir bemerken, dass physikalisch F, G Kovektorfelder ist, während τ und t Vektorfelder sind. Dies erklärt das unterschiedliche Transformationsverhalten dieser beiden Größen unter der Koordinatentransformation φ (siehe nächstes Kapitel).

Das Flächenintegral: Wir benutzen die Notation $\tilde{F} := F \circ \varphi$. Wir benutzen auch die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. wir summieren über doppelte Indizes. Römische Indizes werden über $1, 2$ summiert, griechische Indizes über 1,2,3. Entsprechend ist ∂_α eine Ableitung in x, ∂_i eine Ableitung in u.

Da $(D^t\varphi D\varphi)_{ij} = \partial_i\varphi_\alpha\partial_j\varphi_\alpha = \partial_i\varphi \cdot \partial_j\varphi$ erhalten wir andererseits

$$\det(D^t\varphi D\varphi) \;=\; |\partial_1\varphi|^2|\partial_2\varphi|^2 - (\partial_1\varphi \cdot \partial_2\varphi)^2 \;=\; |\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi|^2.$$

Frage: Welche geometrische Bedeutung hat diese Formel? Nach Definition des Flächenintegrals und mit (5.10) gilt also

$$\int_M \operatorname{rot} F \cdot n \, d\mathscr{H}^2 \overset{(5.10)}{=} \int_U (\operatorname{rot} F)(\varphi(u)) \cdot (\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi)(u) \, du. \tag{5.12}$$

Mit dem Satz von Stokes in $\mathbb{R}^2$ und (5.11) gilt andererseits

$$\int_{\partial M} F \cdot t \, d\mathscr{H}^1 \;=\; \int_{\partial U} G \cdot \tau \, d\mathscr{H}^1 \;=\; \int_U \operatorname{rot} G \, du \tag{5.13}$$

Es bleibt also, $\operatorname{rot} G$ auszurechnen. In Koordinaten gilt $G_j = \partial_j\varphi_\alpha\tilde{F}_\alpha$ und daher

$$\operatorname{rot} G \;=\; \varepsilon_{3ij}\partial_i G_j \;=\; \varepsilon_{3ij}\partial_i(\partial_j\varphi_\alpha\tilde{F}_\alpha) \;=\; \varepsilon_{3ij}\partial_i\partial_j\varphi_\alpha\tilde{F}_\alpha + \varepsilon_{3ij}\partial_j\varphi_\alpha\partial_i\varphi_\beta\partial_\beta\tilde{F}_\alpha,$$

wobei ε_{ijk} das Levi-Civita Symbol ist. Wir bemerken, dass $\varepsilon_{3ij} = -\varepsilon_{3ji}$ und $\partial_i\partial_j\varphi = \partial_j\partial_i\varphi$, da $\varphi \in C^2$. Damit ist der erste Summand auf der rechten Seite antisymmetrisch in i, j und verschwindet bei der Summation über i, j. Der Term $\varepsilon_{3ij}\partial_j\varphi_\alpha\partial_i\varphi_\beta = \partial_1\varphi_\alpha\partial_2\varphi_\beta - \partial_1\varphi_\alpha\partial_2\varphi_\beta$ ist antisymmetrisch in α, β. Damit verschwindet der symmetrische Anteil von $\partial_\beta\tilde{F}_\alpha$ bei der Summation in α, β und wir erhalten

$$\operatorname{rot} G \;=\; \frac{1}{2}(\partial_1\varphi_\alpha\partial_2\varphi_\beta - \partial_1\varphi_\alpha\partial_2\varphi_\beta)(\partial_\beta\tilde{F}_\alpha - \partial_\alpha\tilde{F}_\beta) \;=\; (\operatorname{rot} F) \cdot (\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi). \tag{5.14}$$

Die Behauptung folgt nun aus (5.15), (5.13) und (5.14). $\square$

Das Resultat von Satz 5.23 wirft einige Fragen auf: Gibt es eine Verallgemeinerung dieser Abschätzung für Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension? Können wir die etwas mysteriösen Rechnungen systematisieren und besser verstehen? Gilt die Aussage von Satz 5.23 auch für allgemeine zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$, welche nicht durch eine einzige Parametrisierung gegeben sind. Wenn nein, warum? Gibt es auch eine Version des Satzes von Gauß für gekrümmte Mannigfaltigkeiten und kann diese aus dem Satz von Stokes hergeleitet werden (oder umgekehrt)?

Nach (5.15) gilt die Dartstellung

$$\int_M \operatorname{rot} F \cdot n \, d\mathscr{H}^2 \overset{(5.10)}{=} \int_U (\operatorname{rot} F)(\varphi(u)) \cdot (\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi)(u) \, du, \tag{5.15}$$

d.h. der Ausdruck $\operatorname{rot} F \cdot n$ ist eine alternierende Form, welche auf die beiden Tangentialvektoren unserer Mannigfaltigkeit wirkt. Diese Idee wird im Kapitel zu Differentialformen noch einmal vertieft.

Bemerkung 5.24 (Rotation als Wirbelstärke).

(i) *Für $x \in \mathbb{R}^3$ und $k = 1, 2, 3$ sei $B'_r(x) \subset \mathbb{R}^2$ die zweidimensionale Kreisscheibe mit Radius r, welche in der Ebene Koordinatenebene orthogonal zu e_k liegt. Für $F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ erhalten wir mit dem Satz von Stokes dann die Identität*

$$(\operatorname{rot} F(x))_k \;=\; \lim_{r\to 0} \fint_{\partial B'_r(x)} F(x)\cdot \tau(x)\; d\mathscr{H}^1(x). \tag{5.16}$$

def2-rot

Wenn wir uns F als die Geschwindigkeit eines Flusses vorstellen, dann beschreibt die Stärke der Wirbel der Flüssigkeit um den Punkt in der orthogonalen Ebene zu e_k. Wir interpretieren $\operatorname{rot} F$ *daher auch als* <u>*Wirbelstärke*</u> *des Vektorfeldes F. In der Physik wird* (5.16) *manchmal auch als Definition der Rotation verwendet.*

(ii) *Die Wirbelstärke* $\operatorname{rot} v$ *ist eine wichtige Funktion, um eine Flüssigkeit mit Geschwindigkeitsfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zu charakterisieren.*

5.4 Mannigfaltigkeit mit Rand, orientierbare Mannigfaltigkeit

Wir haben gesehen, dass wir für die Formulierung der Integralsätze eine Orientierung für unsere Integration wählen mussten.

Ein <u>Rahmen</u> oder <u>geordnete Basis</u> in einem endlich dimensionalen Vektorraum ist ein Tupel von linear unabhängigen Vektoren $(b_1, \dots, b_n)$, welche eine Basis bilden. Wir sagen, dass zwei geordnete Basen dieselbe Orientierung haben, wenn die Basiswechselmatrix eine positive Determinante hat. Die Wahl einer orientierten Basis induziert dann eine <u>Orientierung</u> auf dem Vektorraum. Die Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ ist die Orientierung gegeben durch die geordnete Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$. Jede Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist damit auch orientiert.

Definition 5.25 (Orientierbare Mannigfaltigkeit).

(i) *Ein Diffeomorphismus ψ heißt* <u>*orientierungserhaltend*</u>*, falls* $\det \psi > 0$.

(ii) *Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ heißt* <u>*orientierbar*</u>*, falls es einen Atlas gibt, so dass alle Kartenwechsel orientierungserhaltend sind. Die Wahl eines solchen Atlas gibt dann eine Orierntierung der Mannigfaltigkeit vor.*

Nicht jede Mannigfaltigkeit ist orientierbar:

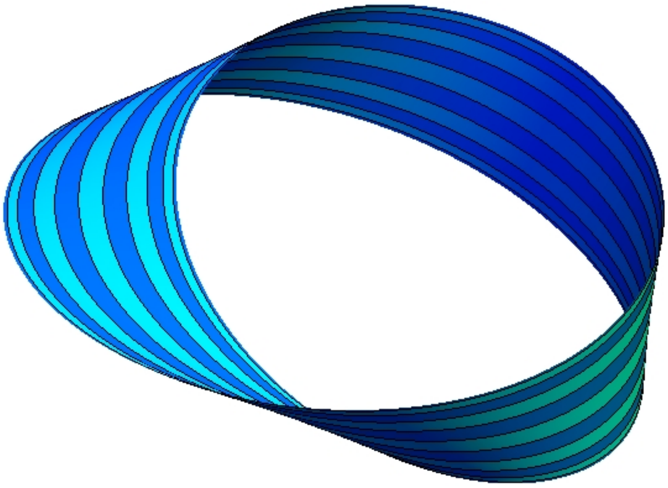

Abbildung 24: Das Möbiusband ist ein Beispiel für eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit. (Quelle: wikipedia) fig-moebius

Beispiel 5.26 (Möbiusband). *Das Möbiusband ist ein Beispiel für eine nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit (Fig. 24).* fig-moebius

Für den Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$ haben wir über den Rand $\partial M := \varphi(\partial U)$ der Mannigfaltigkeit integriert. Dieser Rand stimmt im Allgemeinen nicht mit dem topologischen Rand überein! In der Tat, jeder Punkt der Mannigfaltigkeit $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^3$ aus Satz **??** ist ein Randpunkt im topologischen Sinne. thm-stokes-3d

Wir erinnern, dass eine Mannigfaltigkeit eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist, welche lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Unter einer Mannigfaltigkeit mit Rand verstehen wir eine Menge, welche lokal homöomorph zu einer (relativ) offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{H}^n$ des abgeschlossenen Halbraumes

$$\mathbb{H}^n := \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty) \subset \mathbb{R}^n$$

ist. Dabei ist die lokale Homöomorphie wie vorher durch einen Diffemorphismus gegeben.

def-mfk-rand **Definition 5.27 (Mannigfaltigkeit mit Rand).** *Eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^m$ heißt Mannigfaltigkeit mit Rand der Dimension n mit $m = n + k$, falls es zu jedem $x^* \in M$ eine Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ von x^*, eine (relativ) offene Menge $U \subset \mathbb{H}^n$ und eine Abbildung $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gibt mit*

(i) $M \cap \Omega = \varphi(U)$,

(ii) $\operatorname{rang} D\varphi(x) = n \quad \forall x \in U$.

Ein Punkt $x \in M$ heißt Randpunkt, wenn $x = \varphi(u)$ für eine Parametrisierung φ und ein $u \in \mathbb{H}^n$. Die Menge der Randpunkte heißt Rand ∂M von M.

Die Definition der Mannigfaltigkeit mit Rand erlaubt, dass der Rand leer ist, d.h. jede Mannigfaltigkeit mit Rand ist auch eine Mannigfaltigkeit, aber nicht umgekehrt. Beachte, dass der Rand der Mannigfaltigkeit i.a. nicht mit dem topologischen Rand der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ übereinstimmt. Für beide wird allerdings im Allgemeinen die gleiche Notation genutzt. Der Kontext entscheidet also über die Bedeutung (!)

Beispiel 5.28 (Mannigfaltigkeiten mit Rand).

(i) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $M := \partial\Omega$ eine Mannigfaltigkeit. Der Rand der Mannigfaltigkeit stimmt in diesem Fall mit dem topologischen Rand von Ω überein.

(ii) Sei $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$. Dann ist $B_1 \cup \Gamma_1$ für $\Gamma_1 := \partial B_1 \cap \{x_2 > 0\}$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand Γ_1. Andererseits ist $B_1 \cup \Gamma_2$ für $\Gamma_2 := \partial B_1 \cap \{x_2 \geq 0\}$ keine Mannigfaltigkeit.

(iii) Die abgeschlossene Halbsphäre $S^{n-1} \cap \{x_n \geq 0\}$ ist eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand ist der Schnitt der Halbsphähre mit dem Halbraum, d.h. $S^{n-1} \cap \{x_n = 0\}$.

Wir haben die folgenden Charakterisierung von ∂M:

Satz 5.29 (Charakterisierung von ∂M). *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann gilt*

(i) ∂M ist eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, d.h. $\partial^2 M = \emptyset$.

(ii) Falls orientiert ist, dann ist ∂M orientierbar (mit kanonischer Orientierung).

Beweis. Offensichtlich ist int M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Einschränkung der Karte $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ auf $U \cap \partial\mathbb{H}^n$ hat vollen Rang und ist ein Homöomorphismus von $U \cap \partial\mathbb{H}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Daher ist ∂M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$.

Für $x \in \partial M$ ist $T_x(\partial M) \subset T_x M$. Dann gibt es einen eindeutigen Vektor $\nu(x) \in T_x M \cap N_x(\partial M)$ mit $|\nu(x)| = 1$, so dass $\nu(x)$ äußerer Normalevektor an ∂M ist, d.h. $\varphi^{-1}(x + \varepsilon\nu(x)) \notin \mathbb{H}^n$ für eine entsprechende Karte. Sei nun $(b_1, \dots, b_{n-1})$ eine geordnete Basis von $T_x\partial M$, so dass $(n, b_1, \dots, b_{n-1})$ eine positiv orientierte Basis von $T_x M$ ist. Dies definiert eine Orientierung auf $T_x\partial M$ (Übungsaufgabe). □

Wir haben die folgenden Ziele

- Vereinheitlichung der Integralsätze
- Parameterunabhängige Definition des Integrals
- Integration über orientierte Mannigfaltigkeiten

Zur Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden immer glatte Funktion und hinreichend reguläre Maße. Wir geben nur einen kurzen Überblick, Details werden in der Differentialgeometrie behandelt. Eine Referenz ist: Do Carmo "Riemannian Manifolds". Um Allgemeiner über k-dimensionale Mengen zu integrieren, entwickeln wir eine Theorie von Differentialformen. Eine ausführliche Grundlage findet man z.B. in Lafontaine "Introduction to Differentiable Manifolds".

5.5 Differential und Wegintegral

Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit. In diesem Kapitel nehmen wir von allen Mannigfaltigkeiten an, dass sie C^∞ sind. Wir definieren

Definition 5.30 (Glatte Funktionen). *Wir sagen, dass eine Funktion $f : M \to N$ glatt ist, falls es lokal Parametrisierungen ψ von M und φ von N gibt, so dass $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ glatt ist. Der entsprechende Raum von Funktion heißt $C^\infty(M, N)$. Wir definieren insbesondere $\Omega^0(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$.*

Falls M_1, M_2, M_3 drei Mannigfaltigkeitn sind und falls $\varphi \in C^\infty(M_1, M_2)$ und $g \in C^\infty(M_2, M_3)$, dann ist die züruckgezogene Funktion definiert durch $\varphi^* g := g \circ \varphi \in C^\infty(M_1, M_3)$. Wir können uns φ zum Beispiel als einen Koordinatenwechsel vorstellen.

Der Tangentialraum an $p = \varphi(0) \in M$ ist definiert durch

$$T_pM \;=\; \Big\{ v = \frac{d}{dt}\gamma(0) \in \mathbb{R}^m : \text{für ein } \gamma \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), M) \text{ mit } \gamma(0) = p \Big\}.$$

Insbesondere gibt es zu jedem $v \in T_pM$ eine Kurve $\gamma \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), M)$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Zu $f \in \Omega^0(M)$ ist dann das Differential gegeben durch

$$df : TM \to \mathbb{R}, \qquad df_p(v) \;=\; \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0).$$

Diese Definition des Tangentialraumes erfordert allerdings die Einbettung unserer Mannigfaltigkeit durch einen umgebenen Raum. Wir bemerken, dass jedes $v \in T_pM$ die Richtungsableitung definiert durch $\partial_v : \Omega^0(M) \to \mathbb{R}$, $\partial_v f := [\,\frac{d}{dt} f(\gamma(t))]_{t=0}$. Wir können den also Tangentialraum äquivalent definieren als

Definition 5.31 (Tangentialraum). *Der Tangentialraum der n–dimensionalen Mannigfaltigkeit M am Punkt $p \in M$ ist gegeben durch:*

$$T_pM \;:=\; \Big\{ v : \Omega^0 \to \mathbb{R} \;:\; v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) \textit{ für ein } \gamma \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon), M) \textit{ mit } \gamma(0) = p \Big\}.$$

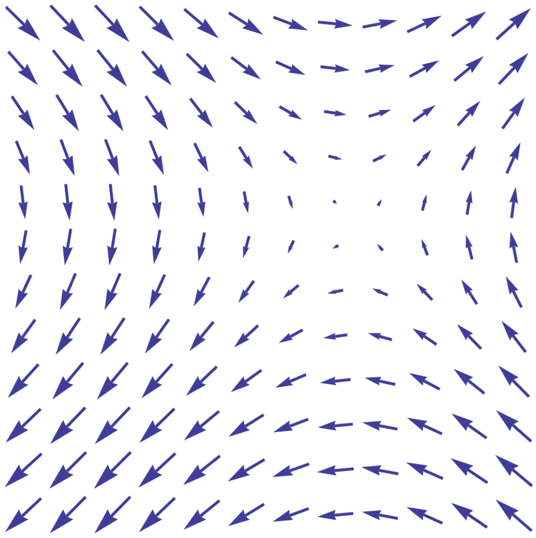

Abbildung 25: Das Vektorfeld $(\sin x_1, \sin x)$. (Quelle: wikipedia)

Diese Definition ist unabhängig vom umgebenden Raum. Ein Tangentialvektor $v \in T_pM$ entspricht also einer Äquivalenzklasse von Kurven. Der Differentialoperator lässt sich dann wie folgt definieren

Definition 5.32 (Differential). *Sei $\varphi : M \to N$ glatt. Dann ist das Differential $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ wie folgt definiert: Sei $v \in T_pM$ mit $v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)'(0)$ und sei $\sigma := \varphi \circ \gamma$. Dann gilt*

$$d_p\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)}N, \qquad d\varphi_p(v) \;=\; w \quad \textit{für } w(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \sigma)'(0).$$

Für eine Funktion $f \in \Omega^0(M)$ ist das Differential also definiert durch:

$$df_p : T_pM \to T_p\mathbb{R} = \mathbb{R}, \qquad df_p(v) \;=\; (v(f))_{|p} \quad \text{für } v \in T_pM.$$

Damit ist $df \in C^\infty(\mathbb{R}^n, T^*(\mathbb{R}^n))$ eine glatte Abbildung mit Werten im jeweiligen Kotangentialraum des $\mathbb{R}^n$ am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.

Definition 5.33 (Differentialformen erster Ordnung und Vektorfelder). *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine Mannigfaltigkeit.*

(i) Ein Funktion ω heißt <u>1-Form</u>, falls $\omega \in C^\infty(M, T^*M)$ und $\omega_p \in T_p^*M$ $\forall p \in M$.

(ii) Ein Funktion v heißt <u>*Vektorfeld*</u>*, falls $v \in C^\infty(M, TM)$ und $v_p \in T_pM\ \forall p \in M$.*

Der Raum der 1–Formen auf M wird mit $\Omega^1(M)$ bezeichnet.

Mit dieser Definition ist das Differential ein Operator $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$. Der Gradient $\nabla f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, T(\mathbb{R}^n)))$, definiert durch $(\nabla f, v) = df(v)$ ist ein Vektorfeld. Allerdings benötigen wir dafür ein Skalarprodukt auf $T_p(M)$. Aus dieser Sicht ist es natürlicher, Ableitungen als Abbildungen in den Kotangentialraumes zu verstehen. Wir wollen die obigen Begriffe in Koordinaten beschreiben. Für eine Mannigfaltigkeit M sei $x := \varphi^{-1}$ die Umkehrfunktion. Dann gilt $x_i \in \Omega^0(M)$ und die Kovektoren $(dx_i)_{i=1}^n$ bilden eine Basis von T_p^*M für jedes $p \in M$. Wir definieren $(\frac{\partial}{\partial_i})_{i=1}^n$ als die duale Basis:

Lemma 5.34 (Koordinaten und duale Basis). *Sei $\varphi : U \to M$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung von $M = \varphi(U)$ mit Karte $x := \varphi^{-1} : M \to U$. Wir definieren für $1 \le i \le n$*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \in \Omega^1(M) \qquad \text{durch } (\frac{\partial}{\partial x_i})_{|\varphi(x)} f \ := \ \frac{\partial}{\partial x_1}(f \circ \varphi)(x).$$

Dann induzieren $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1}^n$ und $(dx_i)_{i=1}^n$ duale Basen von T_pM und T_p^*M.

Beweis. Nach Definition gilt $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \partial_j(x_i \circ \varphi) = \partial_j x_i = \delta_{ij}$. □

Der Tangentialvektor $\frac{\partial}{\partial x_j}$ entspricht also der Kurve $\gamma(t) = te_i$. Sei $M = x(U) = y(V)$ eine Mannigfaltigkeit mit zwei Karten $x \in C^1(M, U)$ und $y \in C^1(M, V)$. Da $(dy_i)_{i=1}^n$ die duale Basis zu $(\frac{\partial}{\partial y_i})_{i=1}^n$ ist, erhalten wir direkt

$$dx_i \ = \ \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j, \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \ = \ \frac{\partial x_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

Wir definieren:

def-pullback

Definition 5.35 (Pullback). *Sei $\varphi \in C^\infty(M, N)$.*

(i) Für $\omega \in \Omega^k(N)$ ist die mit φ <u>*zurückgezogene*</u> *Form $\varphi^*\omega \in \Omega^k(M)$ definiert durch*

$$\varphi^*(\omega)_p(v) := \omega_{\varphi(p)}(d\varphi_p v)$$

(ii) Falls φ Diffeomorphismus ist, so definieren wir zu $v \in C^\infty(M, TM)$ den Pullback

$$(\varphi^* v)_p \ := \ d\varphi^{-1}_{\varphi(p)} v.$$

Wir können die Funktion φ auch als einen Koordinatenwechsel verstehen (falls φ ein Diffeomorphismus ist). In diesem Sinne verhalten sich 1–Formen und Vektorfelder verhalten sich also unterschiedlich bei einem Koordinatenwechsel: Die Vektoren verhalten sich inverse zur Transformation des Koordinatensystems (gegeben durch φ). Entsprechend sagen wir, dass Vektorfelder <u>kontravariant</u> transformieren während 1–Formen <u>kovariant</u> transformieren. Wir bemerken außerdem, dass

$$(\varphi^* df) \;=\; d(\varphi^* f),$$

d.h. unser Differentialoperator ist konsistent mit einem Koordinatenwechsel.

Damit können wir die Transformation von 1–Formen und Vektorfeldern bezüglich Koordinatenwechseln ausrechnen:

Bemerkung 5.36 (Kovariante und kontravariante Transformation). *Sei $M = x(U) = y(V)$ eine Mannigfaltigkeit mit zwei Karten $x \in C^1(M, U)$ und $y \in C^1(M, V)$. Für eine 1–Form $\omega \in \Omega^1(M)$ und ein Vektorfeld $f \in C^\infty(M, TM)$ gilt entsprechend*

$$\omega \;=\; \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dx_i \;=\; \frac{\partial \omega}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i} dy_j, \qquad f \;=\; dx_i(f)\frac{\partial}{\partial x_i} \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

Die 1–Form transformiert also beim Kartenwechsel mit dem Differential des Kartenwechsel und das Vektorfeld mit der Inversen des Kartenwechsel.

In der Analysisvorlesung haben wir Linienintegrale über Vektorfelder kennengelernet, d.h. für ein Vektorfeld $F \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und eine Kurve $\gamma \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_\gamma F \cdot dx \;:=\; \int_I F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}\; dt.$$

Wir beim Differential ist es aber natürlicher über Kotangentialfelder zu integrieren. Sei M eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $\gamma \in C^\infty(I, M)$ eine Kurve. Dann definiert die Kurve an der Stelle $\gamma(t)$ ein $v := \gamma'(t)$ gegeben durch $v(f) = ddt(f \circ \gamma)'(t)$. Wir schreiben kurz $v = \gamma'$. Wir definieren also das Integral über eine 1–Form $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ durch

Definition 5.37 (Integral über 1–Form). *Sei M eine n–dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $\gamma \in C^\infty(I, M)$ eine Kurve. Wir definieren:*

$$\int_\gamma \omega \;:=\; \int_I \omega(\gamma'(t))\; dt.$$

Man kann leicht zeigen, dass diese Definition nicht von der Parametrisierung der Kurve abhängt. Manche Differentialformen $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ lassen sich als Differential schreiben, d.h. $\omega = df$ für ein $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$. In diesem Fall gilt

$$\int_\gamma df \;=\; f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Dies entspricht der Aussage, dass das Wegintegral über Potentialfelder nur von Anfangs- und Endpunkt abhängt. Wir bemerken, dass Kurven orientierte Manigfaltigkeiten sind und dass das Wegintegral von der Orientierung abhängt. Die Orientierung ist in unserer Formulierung in die Differentialform enkodiert: Wenn wir ω durch $-\omega$ ersetzen, dann entspricht dies einer Umorientierung der Kurve. Eine interessante Frage in diesem Zusammenhang ist: Können wir die Klasse von 1–Formen ω charakterisieren, so dass $\omega = df$ für ein $f \in \Omega^0(U)$ (Satz von Poincare)?

5.6 Differentialformen höherer Ordnung

Wir haben bisher Integration über Wegintegrale über 1–Formen $\omega \in C^\infty(M, T_p^*M)$ kennengelernt. Dabei interpretieren wir $\omega(f)$ als eine Quantität die wir einem infitesimalen, orientierten Wegstück in Richtung f zuordnen. Wir wollen dieses Prinzip nun auf höhere Dimensionen erweitern. Sei M eine zweidimensionale, orientierte Mannigfaltigkeit mit Parametrisierung $x \in C^1(U, M)$. Die Parametrisierung gibt dann die Orientierung $(\frac{\partial_1}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$ vor. Formal wollen wir nun über infinitesimale orientierte Flächenelemente betrachten. Wir betrachten dafür eine Abbildung $\omega \in C^\infty(M, T_pM \times T_pM)$. Dabei ist $\omega(f, g)$ der orientierte infinitesimale Flächeninhalt, den wir der Fläche aufgespannt durch die beiden Vektoren f und g zuordnen. Insbesondere soll also $\omega(f, g) = -\omega(g, f)$ gelten, d.h. ω ist eine alternierend. Wir definieren das Flächenintegral durch

$$\int_M \omega \; dx \;=\; \int_U \omega\Big(\frac{\partial_1}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big) \; dx_1 dx_2.$$

Falls ω eine alternierende Bilinearform ist, erhalten wir unter einem Basiswechsel

$$\int_U \omega\Big(\frac{\partial_1}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big) \; dx_1 dx_2 \;=\; \sum_{j,k=1}^{2} \int_U \det\Big(\frac{\partial y_j}{\partial x_j}\Big) \omega\Big(\frac{\partial_1}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\Big) \; dy_1 dy_2$$

Insbesondere ist das Integral also invariant unter orientierungserhaltenden Transformationen, falls ω durch eine alternierende Bilinearform beschrieben ist. Die obige formale Rechnung zeigt, dass die Integralformen sich gut mit dem Riemannschen Integralbegriff vertragen.

Eine Abbildung $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$, welche linear in jedem Argument ist, nennen wir auch multilineare Abbildung oder Tensor. Wir betrachten insbesondere alternierende, k–lineare Abbildungen. Wir bezeichnen die Gruppe der Permutationen $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ mit Σ_n. Jeder Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ können wir ein Vorzeichnen $\operatorname{sgn}\sigma := \det(\delta_{i,\sigma_j})_{1 \le i,j \le n} \in \{\pm 1\}$ zuweisen. Dann gilt $\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Definition 5.38 (k–Formen). *Sei V ein Vektorraum. Ein k–Form ist eine k-lineare, alternierende Abbildung $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$, d.h.*

(i) $\alpha(v_1, \ldots, av_i + b\tilde{w}_i, \ldots, v_k) = a\alpha(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + b\alpha(v_1, \ldots, \tilde{w}_i, \ldots, v_k)$.

(ii) $\alpha(v_{\sigma_1}, \ldots, v_{\sigma_k}) = (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma}\alpha(v_1, \ldots, v_k) \qquad \forall \sigma \in \Sigma_k$.

Den Raum der k-Formen bezeichnen wir mit $\Lambda^k(V^*)$. Wir schreiben auch $\Lambda^0(V^*) := \mathbb{R}$

Insbesondere gilt $\Lambda^1(V^*) = V^*$. Der Raum $\Lambda^n(V^*)$ ist eindimensional und aufgespannt durch die Determinantenfunktion. Minoren (d.h. $k \times k$-Unterdeterminanten) sind Beispiele für alternierende k-Formen. Der Raum der alternierenden Differentialformen mit mehr als n Argumenten ist trivial (Übungsaufgabe).

Wir führen einen Projektionsoperator und ein äußeres Produkt ein:

Definition 5.39 (Tensorprodukt, äußeres Produkt).

(i) Für eine k-linearen Abbildung $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ und eine ℓ-linearen Abbildung $\omega : V^\ell \to \mathbb{R}$ definieren wir als Tensorprodukt die $k + \ell$ lineare Abbildung

$$(\alpha \otimes \beta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) \ := \ \alpha(v_1, \ldots, v_k)\beta(v_{k+1}, \ldots, v_{k+\ell}).$$

(ii) Für eine k–lineare Abbildung $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ definieren wir $\operatorname{Alt}(\alpha) \in \Lambda^k(V^*)$ durch

$$\operatorname{Alt}(\alpha)(v_1, \ldots, v_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \operatorname{sign}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}).$$

(iii) Zu $\omega \in \Lambda^k V^*$, $\theta \in \Lambda^\ell V^*$ definieren wir das äußere Produkt $\omega \wedge \theta \in \Lambda^{k+\ell}(V^*)$ durch

$$(\alpha \wedge \beta) := \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \operatorname{Alt}(\alpha \otimes \beta).$$

Nach Konstruktion sind Tensorprodukt und äußeres Produkt assoziativ, aber nicht kommutativ. Für das äußere Produkt gilt (graduierte Kommutativität)

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell}\beta \wedge \alpha \qquad \text{für } \alpha \in \Lambda^k(V^*), \beta \in \Lambda^\ell(V^*).$$

Falls α ein k-Linearform für $k \in 2\mathbb{N} + 1$ ist, dann gilt insbesondere $\alpha \wedge \alpha = 0$, falls k ungerade ist. Der Vorfaktor in (ii) ist so gewählt, dass

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\alpha_i(v_j))_{1 \le i,j \le k} \text{ für } \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$$

(Übungsaufgabe). Für zwei Linearformen $\alpha, \beta \in V^*$ gilt insbesondere

$$(\alpha \wedge \beta)(x,y) \;=\; \alpha(x)\beta(y) - \alpha(y)\beta(x)$$

Sei $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1}^n$ eine Basis von V und sei $(dx_i)_{i=1}^n$ die duale Basis. Dann ist der Raum der k–linearen Formen $\alpha : V^k \to \mathbb{R}$ aufgespannt durch die Tensoren $dx_{i_1} \otimes \ldots \otimes dx_{i_k}$, für alle Kombinationden von Multiindizes $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ der Länge k. Insbesondere hat der Raum der k–linearen Abbildungen $\alpha : V \to \mathbb{R}$ die Dimension n^k.

Eine entsprechende Aussage lässt sich für den Raum der k–Formen herleiten:

Satz 5.40 (Dimension von $\Lambda^k(V^*)$). *Der Raum $\Lambda^k(V^*)$ hat die Dimension $\binom{n}{k}$. Sei $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1}^n$ eine Basis von V. Dann ist eine Basis von $\Lambda^k(V^*)$ gegeben durch*

$$(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})_{(i_1,\ldots,i_k)\in \mathscr{I}_k}, \qquad \textit{mit } \mathscr{I}_k = \{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n\ \}$$

Die lokale Darstellung in der Basis ist für $\omega \in \Lambda^k V^*$ gegeben durch

$$\omega = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\mathscr{I}_k} \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\Big) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Beweis. Der Beweis ist Übungsaufgabe. Wir erinnern, dass $\binom{n}{k}$ gerade die Anzahl von Möglichkeiten ist, k Elemente aus n Elementen auszuwählen. □

Wir definieren nun Differentialformen höher Ordnung:

Definition 5.41 (Differentialform). *Eine Differentialform $\omega \in \Omega^k(M)$ der Ordnung k ist eine Abbildung $\omega \in C^\infty(M, \Lambda^k(TM))$ mit $\omega_x \in \Lambda^k(T_x M)$ $\forall x \in M$.*

In analoger Weise zum Pull-back von Differentialformen erster Ordnung definieren wir:

Definition 5.42 (Pullback). *Sei $\varphi \in C^\infty(M,N)$. Wir definieren den Pullback $\varphi^*\omega \in \Omega^k(M)$ zu $\omega \in \Omega^k(N)$ durch*

$$\varphi^*(\alpha)_p(v_1, \ldots, v_k) = \alpha_{\varphi(p)}(d\varphi_p v_1, \ldots, d\varphi_p v_k)$$

Der Pullback verträgtr sich mit den bisher definierten Operatoren:

prp-pullback **Proposition 5.43.** *Für $\alpha, \beta \in \Omega^k(V)$, $\varphi : U \to V$, $\lambda, \mu \in C^\infty(V)$ gilt*

(i) $\varphi^*(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda\varphi^*(\alpha) + \mu\varphi^*(\beta)$ *(Linearität)*

(ii) $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta)$. *(Multiplikativität)*

(iii) $\psi^*(\varphi^*(\alpha)) = (\varphi \circ \psi)^*(\alpha)$ *für* $\psi : W \to U$ *(Natürlichkeit)*

Beweis. Übungsaufgabe. □

In Koordinaten gilt also

$$\varphi^*(f_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = \varphi^*(f_{i_1 \dots i_k}) d\varphi^{j_i} \wedge \dots \wedge d\varphi^{j_i} \in \Omega^k(U)$$

Wir wollen als nächstes die sogeannte äußere Ableitung als einen Differentialoperator

$$d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

definieren. Im Allgemeinen ist die Ableitung einer k-linearen Form $\omega \in \Omega^k(U)$ an $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ eine $(k+1)$-lineare Abbildung, welche nicht notwendigerweise alternierend ist. Diese ist gegeben durch $(D\omega)_p : V^{k+1} \to \mathbb{R}$ mit

$$(D\omega)_p(v_1, \dots, v_{k+1}) := \partial_{v_1}\omega(v_2, \dots, v_{k+1})|_p.$$

Wir projektieren nun auf den Raum der alternierenden Formen und erhalten

$$(d\omega)_p(v_1, \dots, v_{k+1}) := (k+1)\,\mathrm{Alt}(D\omega)_p.$$

Der Pull-back induziert einen eindeutigen Operator auf der Mannigfaltigkeit:

thm-dext **Satz 5.44 (Äußere Ableitung).** *Sei M eine C^1–Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau einen linearen Operator $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, genannt äußere Ableitung mit den folgenden Eigenschaften: Für $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^\ell(U)$, $f \in \Omega^0(M)$, $\varphi \in C^\infty(M, N)$ gilt*

(i) $df \in \Omega^1(M)$ *ist das Differential von* f,

(ii) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^\ell \alpha \wedge \beta$.

(iii) $d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*(d\omega)$.

(iv) $d(d\alpha) = 0$,

Beweis. Übungsaufgabe. Man definiert den Operator in kartesischen Koordinaten und zeigt, dass er alle Eigenschaften erfüllt. Offensichtlich ist der Operator eindeutig. □

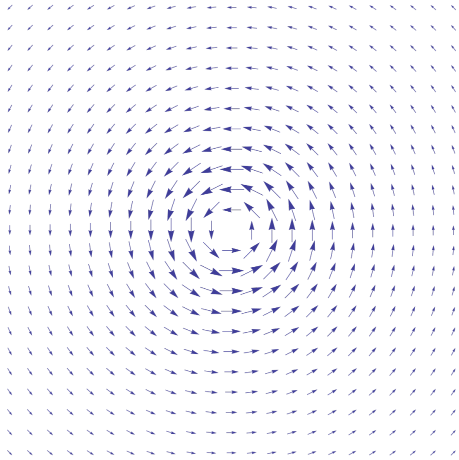

Abbildung 26: Das Vektorfeld zu $d\theta$. Da θ keine stetige Funktion ist, ist dies allerdings keine geschlossene Form. (Quelle: wikipedia)

Die zweite äußere Ableitung verschwindet also, d.h. $d^2 = 0$. Dies überrascht nicht, da nach dem Lemma von Schwarz höhere Ableitungen symmetrisch sind, der alternierende Anteil der zweite Ableitung verschwindet also. Wir haben gesehen, dass Vektorfelder F ein Potential besitzen, falls $\operatorname{rot} F = 0$. Analog sagen wir, dass eine Differentialform ein Potential (oder Stammfunktion) hat, wenn es eine Differentialform θ gibt mit $\omega = d\theta$. Eine notwendige Bedingung dafür ist offenbar $d\omega = 0$. Dies motiviert die folgende Definition:

Definition 5.45 (Geschlossene und exakte Formen). *Sei $\omega \in \Omega^k(M)$.*

(i) ω heißt geschlossen, falls $d\alpha = 0$.

(ii) ω heißt exakt, falls $\alpha = d\beta$ für ein $\beta \in \Lambda^{k-1}(M)$.

Nach Satz 5.44 ist jede exakte Form geschlossen. Frage: Ist auch jede geschlossene Form exakt? Was ist die geometrische Bedeutung? Wir haben die folgende Darstellung in lokalen Koordinaten:

Bemerkung 5.46 (Darstellung in Koordinaten). *Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $\omega \in \Omega^k(M)$ lokal gegeben durch $\omega = f_{i_1\dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Dann gilt*

$$d\omega = df_{i_1\dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Beispiel 5.47. *Sei M eine 3–dimensionale Mannigfaltigkeit und sei $\omega \in \Omega^1(M)$, gegeben durch $\omega = f_i dx_i$. Frage: Berechne $d\omega$. Wie interpretieren wir das Ergebnios anschaulich?*

5.7 Integral von Differentialformen und Satz von Stokes

In Analogie zum Wegintegral und dem schon betrachteteten Integral eine Differentialform zweiter Ordnung definieren wir allgemein das Integral einer Differentialform der Ordnung n:

Definition 5.48 (Integral von Differentialformen). *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit und sei $\omega \in \Omega^n(M)$ mit $\operatorname{spt}\omega \Subset M$. Sei λ_i mit $M_i := \operatorname{spt}\lambda_i$ eine Zerlegung der λ_i der Eins auf M und sei $\varphi_i : U \to M_i$ eine lokale Parametrisierung mit kanonischen Koordinaten $\big(\frac{\partial}{\partial x_1}\big)_{i=1}^n$. Wir definieren*

$$\int_M \omega \;:=\; \sum_i \int_{U_i} \varphi_i^*(\lambda_i\omega)\Big(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)\; dx_1\dots dx_n,$$

Da das Integral linear ist, ist die Definition unabhängig von der Wahl des Atlas und der Zerlegung der Eins. Es bleibt zu zeigen, dass das Integral nicht von der Wahl der Parametrisierung abhängt. Seien also $\varphi_i : U_i \to M$, $i = 1, 2$, zwei Parametrisierungen mit $\varphi_1(U_1) = \varphi_2(U_2) = M$. Dann ist $\psi : U_1 \to U_2$, $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ein Diffeomorphismus. Die Unabhängigkeit folgt dann analog zum Wegintegral. Dafür berechnen wir, dass für $\omega = f(y)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$ gilt

$$\begin{aligned}\psi^*(\omega) &= (\psi^* f)(x)\frac{\partial\psi_1}{\partial x^{i_1}}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial\psi^n}{\partial x_{i_n}}dx^{i_n} = (\psi^* f)(x)\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n\frac{\partial\psi^i}{\partial x^{i_1}}\\ &= (\psi^* f)(x)\det(D\psi)(x)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n.\end{aligned}$$

Wir erhalten also gerade die Determinante des Kartenwechsels. Da die Mannigfaltigkeit orientiert ist, ist diese Determinante positiv. Die Aussage folgt dann aus dem Transformationssatz.

Nach Konstruktion ist das Integral von Differentialformen also invariant unter Pull-back:

lem-difftrafo **Lemma 5.49 (Invarianz unter Korrdinatenwechsel).** *Sei $\varphi \in C^\infty(M, N)$ ein Diffeomorphismus. Dann gilt*

$$\int_{\varphi(M)} \omega \;=\; \int_M \varphi^*(\omega).$$

Beweis. Dies folgt aus der Rechnung vor dem Lemma $\square$

Wir formulieren den Satz von Stokes:.

Satz 5.50 (Satz von Stokes). *Sei $M \subset \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und sei $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$. Dann gilt*

$$\int_M d\omega \;=\; \int_{\partial M} \omega.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt ähnlich wie der Beweis des klassischen Satzes von Gauß. □

Das nächste Ziel ist die klassische Integralsätze als Spezialfall des Satzes von Stokes herzuleiten: Wir bemerken, dass die Dimension der Räume $\Omega^k(U)$ und $\dim \Omega^{n-k}(U)$ übererinstimmen. Der Hodge Operator ist eine natürlicher Operator, welcher diese beiden Räume verbindet. Sei $I = (i_1 < \ldots < i_k)$ ein ansteigender Multiindex und sei $I^c = (i_{k+1} < \ldots < i_n)$ der komplementare ansteigende Multiindex, welcher aus allen Zahlen in $\{1, \ldots, n\}$ besteht, welche nicht in I vorkommen. Sei $\varepsilon_I \in \{\pm 1\}$, so gewählt, dass $dx^I \wedge (*dx^I) = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Wir definieren nun

$$*dx^I := \varepsilon^I dx^{I^c}$$

Durch lineare Fortsetzung erhalten wir einen eindeutigen linearen Operator $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$. Dieser Operator heißt Hodge Operator (und ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems). Im $\mathbb{R}^3$ gilt z.B.

$$*dx_1 = dx_2 \wedge dx_3, \qquad *dx_2 = -dx_3 \wedge dx_1 \qquad *\, dx_3 = dx_2 \wedge dx_3.$$

Bemerkung 5.51 (Klassische Integralsätze). *Wir nehmen zur Einfachheit an, dass die Mannigfaltigkeit durch eine einzige Karte beschrieben ist. Seien also $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{i=1}^n$ lokale positiv orientierte Koordinaten von M, so dass $(\frac{\partial}{\partial x_i})_{2=1}^n$ positiv orientierte Koordinaten von ∂M sind (wobei $\frac{\partial}{\partial x_1}$ die äußere Normale ist).*

(i) Satz von Gauß: Zu $f = (f_i)_{i=1}^n$ sei $\omega := f_i(*dx_i)$. Dann gilt

$$\int_M d\omega \;=\; \int_M (\operatorname{div} f) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \;=\; \int_M \operatorname{div} f \; dx.$$

Nach Wahl der Koordinaten gilt $\omega = f_i(*dx_i) = f_i dx_1$ und aher

$$\int_{\partial M} \omega \;=\; \int_{\partial M} f \cdot n \; dx.$$

(ii) Klassischer Satz von Stokes: Übungsaufgabe.