Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 12

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Keine Abgabe!

44. Aufgabe: *(Beweise/Widerlege)* Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) Jeder Körper ist ein Hauptidealring.

(b) Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\overline{x} \mapsto \overline{4x}$ ist ein $\mathbb{Z}$-Modulisomorphismus, aber kein Isomorphismus von Ringen.

(c) Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Ist $r \otimes m = 0$ in $R \otimes_R M$ mit $r \in R$, $m \in M$, so gilt $r = 0$ oder $m = 0$.

(d) Seien R ein nullteilerfreier Ring und M, N zwei R-Moduln. Sei weiterhin $\varphi\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Dann gilt $\varphi(T(M)) \subseteq T(N)$.

45. Aufgabe: *(Normalformen)* Sei $A \in M_{13,13}(\mathbb{Q})$ eine Matrix mit folgenden Invariantenteilern:

$$c_1(A) = \ldots = c_{10}(A) = 1,\ c_{11}(A) = t,\ c_{12}(A) = t^5 + 2t^3 + t,\ c_{13}(A) = t^7 + 3t^5 + 3t^3 + t.$$

(a) Man bestimme die Determinantenteiler und die Frobenius-Normalform von A.

(b) Man bestimme die Weierstrassteiler und die Weierstrass-Normalform von A.

(c) Man bestimme die Jordan-Normalform von A (aufgefasst als Element von $M_{13,13}(\mathbb{C})$).

46. Aufgabe: *(Kleinstes gemeinsames Vielfaches)* Seien R ein Hauptidealring und $a, b \in R$. Ein Element $k \in R$ heißt *kleinstes gemeinsames Vielfaches* von a und b, wenn $(k) = (a) \cap (b)$ gilt.

(a) Man zeige, dass k genau dann ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b ist, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $a \mid k$ und $b \mid k$.

(ii) Ist $c \in R$ mit $a \mid c$ und $b \mid c$ so gilt $k \mid c$.

(b) Sei k ein kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b, und sei d ein größter gemeinsamer Teiler von a und b. Man zeige, dass $k \cdot d$ und $a \cdot b$ zueinander assoziierte Elemente sind.

47. Aufgabe: *(Tensorprodukte und äußere Potenzen)* Sei K ein Körper und sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Man zeige:

(a) Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi\colon V^* \otimes_K V \to K$ mit

$$\varphi(f \otimes v) = f(v) \quad \text{für } f \in V^*, v \in V.$$

(b) Seien $v_1, v_2 \in V$, sodass die Familie (v_1, v_2) linear unabhängig ist und sei $v \in V$. Dann sind äquivalent:

(i) $v \in \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$.

(ii) $v \wedge v_1 \wedge v_2 = 0$ in $\bigwedge^3 V$.

48. Aufgabe: *(Endliche abelsche Gruppen)* Man bestimme alle abelschen Gruppen mit 720 Elementen (bis auf Isomorphie).

Hinweis: Man gebe eine Liste abelscher paarweise nicht isomorpher Gruppen an, so dass jede abelsche Gruppe mit 720 Elementen zu einer dieser isomorph ist. Man begründe warum dies der Fall ist.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.