Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

# Übungen zur Linearen Algebra I

## 1. Übungsblatt

Abgabe bis zum 24.10.19, 9:15 Uhr

---

Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $M \subset B$ eine Teilmenge, so definieren wir $f^{-1}(M)$ als

$$f^{-1}(M) = \bigcup_{m \in M} f^{-1}(m) = \{a \in A \mid f(a) \in M\}.$$

**Aufgabe 1** ($2+2+1+1$ Punkte)**.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A, B \subset X$ und $C \subset Y$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) $f(A \cap f^{-1}(C)) = f(A) \cap C$.

(b) $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$.

(c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(d) $f(f^{-1}(C)) \subset C$.

**Aufgabe 2** ($3+3$ Punkte)**.** Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $f$ ist genau dann injektiv, wenn für alle Teilmengen $A, B \subset X$ die Gleichheit $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ gilt.

(b) $f$ ist genau dann surjektiv, wenn für alle Teilmengen $C \subset Y$ die Gleichheit $f(f^{-1}(C)) = C$ gilt.

**Aufgabe 3** (6 Punkte)**.** Sei $A$ eine Menge und $X, Y \subset A$. Wir betrachten die Abbildung $f_{X,Y} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, welche für $M \subset A$ definiert ist durch

$$f_{X,Y}(M) = (X \cap M) \cup (Y \cap (A \setminus M)).$$

Wann gibt es eine Teilmenge $M \subset A$ mit $f_{X,Y}(M) = \varnothing$?

**Aufgabe 4** ($3+3$ Punkte)**.** Seien $A$ und $B$ endliche Mengen, welche jeweils genau $n$ verschiedene Elemente enthalten.

(a) In der Vorlesung wurde skizziert, wieso die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ genau $2^n$ Elemente enthält. Führen Sie einen Beweis dieser Behauptung mit vollständiger Induktion.

(b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass es genau $n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ bijektive Abbildungen $f\colon A \to B$ gibt. Hierbei definieren wir $0! = 1$.