AZT II Zettel 2

1) a) Sei $m := \operatorname{ord}(\zeta)$. $\zeta^n = 1 \Rightarrow m \mid n$.

Nach Def von $\hat{\mathbb{Z}}$ gilt dann
$e_{nm}(a_n) = a_m \Rightarrow a_n \equiv a_m \mod m$

$\Rightarrow \zeta^a = \zeta^{a_n} = \zeta^{a_m}$, da $\zeta^m = 1$.

b) $(ab)_n = a_n \cdot b_n$ $\qquad n := \operatorname{ord}(\zeta)$

$\operatorname{ord}(\zeta^{a_n}) \mid \operatorname{ord}(\zeta) = n$

$\Rightarrow b_{\operatorname{ord}(\zeta^{a_n})} \equiv b_n \mod \operatorname{ord}(\zeta^{a_n})$

$\Rightarrow (\zeta^{a_n})^{b_{\operatorname{ord}(\zeta^{a_n})}} = (\zeta^{a_n})^{b_n}$

$(\zeta^a)^b = (\zeta^{a_n})^{b_{\operatorname{ord}(\zeta^{a_n})}} = (\zeta^{a_n})^{b_n} = \zeta^{a_n \cdot b_n} = \zeta^{ab}$ ✓

$\zeta^a \zeta^b = \zeta^{a_n} \cdot \zeta^{b_n} = \zeta^{a_n + b_n} = \zeta^{(a+b)_n}$ ✓

c) $\zeta^a \xi^a = \zeta^{a_{\operatorname{ord}\zeta}} \xi^{a_{\operatorname{ord}\xi}}$

$\operatorname{ord}(\zeta\xi) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(\zeta), \operatorname{ord}(\xi))$

$\Rightarrow a_{\operatorname{ord}(\xi)} \equiv a_{\operatorname{ord}(\zeta\xi)} \mod \operatorname{ord}(\xi)$
$a_{\operatorname{ord}(\zeta)} \equiv a_{\operatorname{ord}(\zeta\xi)} \mod \operatorname{ord}(\zeta)$

$(\zeta\xi)^a = (\zeta\xi)^{a_{\operatorname{ord}(\zeta\xi)}} = \zeta^{a_{\operatorname{ord}(\zeta\xi)}} \cdot \xi^{a_{\operatorname{ord}(\zeta\xi)}} = \zeta^{a_{\operatorname{ord}(\zeta)}} \xi^{a_{\operatorname{ord}(\xi)}} = \zeta^a \xi^a$ ✓

3 a) Sei H eine offene UG von G. unvollständig

Angenommen, H enthält keines der g^i, dann $G \setminus H$ abg und $g^i \in G \setminus H \ \forall i \Rightarrow G \setminus H \supseteq \overline{\{g^i \mid i \in \mathbb{N}\}} = G \Rightarrow H = \emptyset$.

$\Rightarrow \exists n: g^n \in H$. Alle offenen UGs sind auch abgeschlossen, d.h.

$$H \supseteq \overline{\langle g^n \rangle} = \overline{\{g^n, g^{2n}, \dots, \}}$$

$$g^{n+m} \in g^m \overline{\langle g^n \rangle} \Rightarrow g^i \in \bigcup_{m=0}^{n-1} g^m \overline{\langle g^n \rangle} \ \forall i$$

abg. als endl. Vereinigung abg. Mengen

$$\Rightarrow \bigcup_{m=0}^{n-1} g^m \overline{\langle g^n \rangle} = G$$

$$\Rightarrow (G : \overline{\langle g^n \rangle}) \leq n$$

$$\Rightarrow (G : H) \leq n$$

Idee: $(G : H) = n \iff g^n \in H$ mit n minimal

$\Downarrow$

H offen in G

$\Downarrow$

$\exists m: g^m \in H \Rightarrow (G:H) \leq m$,

also $n \leq m$

$\Downarrow$

$\overline{\langle g^n \rangle} = G^n$? $\quad G^n$ ist UG ✓, G^n oder offen abg ?

Es gilt $g^n \in G^n$, also $\langle g^n \rangle \subset G^n$, G^n abg $\Rightarrow \overline{\langle g^n \rangle} \subset G^n$

G^n abg $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=0}^{n-1} g^i G^n = G$ disjunkt ?

sonst $h^n = g^i$ für $i < n$ ok

jedenfalls: $(G : G^n) \leq n$ falls G^n abg.

b) Wir setzen aus a) voraus, dass G^n eine offene Untergruppe ist, also insb. abgeschlossen

$$\Rightarrow g^n \in \dot{\bigcup_{a=1}^{i}} g^a G^i \quad \forall n \Rightarrow G = \overline{\langle g \rangle} \subset \dot{\bigcup_{a=1}^{i}} g^a G^i \subset G$$

$$\Rightarrow \dot{\bigcup_{a=1}^{i}} g^a G^i = G$$

und dass $G = \varprojlim_i G/G^i$. Dann wissen wir

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_i \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \qquad G = \varprojlim_i G/G^i$$

Wir erhalten $\varphi: \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \longrightarrow G/G^i$

$$a \longmapsto g^a G^i,$$

da $g^{a+i} G^i = g^a G^i$. Außerdem ist φ surjektiv, da

$$G = \dot{\bigcup_{a=1}^{i}} g^a G^i.$$

$\Rightarrow$

$\mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \longrightarrow G/G^i \longrightarrow 0$ ist exakt

$\varprojlim$ rechtsexakt

$\Rightarrow$ $\hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow G \longrightarrow 0$ exakt

$\square$

4 a) Wir bezeichnen die Abbildung mit φ

$$\varphi : \mathrm{map}(\{*\}, Y)^{ko} \longrightarrow Y, \quad f \longmapsto f(*)$$

Bem: $\{*\} \subset (\{*\})$ kompakt.

Betrachte eine beliebige offene Überdeckung von $\{*\}$. Diese besteht höchstens aus $\{*\}$ und besitzt damit eine endliche Teilüberdeckung.

Insbesondere ist also $C(\{*\}, U)$ offen $\forall\, U$

$$\varphi^{-1}(U) = \{ f \in \mathrm{map}(\{*\}, Y)^{ko} : f(\{*\}) \subseteq U \}$$

$$= C(\{*\}, U) \text{ offen in KO-Topologie.}$$

Da die KO-Topologie die gröbste Topologie ist, sodass alle $C(\{*\}, U)$ offen sind, genügt es zu zeigen, dass $\varphi(C(\{*\}, U))$ offen ist $\forall\ U \subseteq Y$ offen.

$$\varphi(C(\{*\}, U)) = \{ f(*) \mid f \in C(\{*\}, U) \} = U$$ weil jede Abbildung aus $\{*\}$ heraus stetig ist.

Also ist φ stetig und offen und damit ein Homöomorphismus.

(b) Wir bezeichnen die Auswertungsabbildung mit φ.

Es gilt $\varphi^{-1}(\underset{\substack{U \text{ offen}}}{\overset{Y}{\cup}} U) = \{ (f, x) \in \mathrm{map}(X, Y)^{ko} \times X : f(x) \in U \}$

$$= \bigcup_{\substack{(f,x) \in \mathrm{map}(X,Y)^{ko} \times X \\ f(x) \in U}} C(K_{f,x}, U) \times K_{f,x}$$

$x \in K_{f,x} \subseteq f^{-1}(U)$, $K_{f,x}$ offen

$C(K_{f,x}, U) \times K_{f,x}$ ist als Produkt offener Mengen offen, somit auch die Vereinigung $\Rightarrow \varphi^{-1}(U)$ offen.

c) $\forall x \neq y \in Y \Rightarrow \exists U_x, U_y$:

$$U_x \cap U_y = \emptyset$$

$$f \neq g \in \mathcal{M}_{up}(X, Y)$$

z.z.: $\exists f \in U, g \in V$: $U \cap V = \emptyset$

$$\exists x \in X: \quad \underset{\underset{\underset{Y}{\cap}}{U}}{\overset{\cap}{f(x)}} \neq \overset{\in}{g(x)}$$

$$U \cap V = \emptyset, \quad U, V \subset Y$$

$$C(\{x\}, U) \cap C(\{x\}, V) = \emptyset.$$

aber $\{x\}$ ist kompakt (da jede offene Überdeckung eine Menge enthält, die x enthält. Diese ist dann die endliche Teilüberdeckung)

und U bzw. V sind offen, sodass nach Definition der KO-Topologie auch $C(\{x\}, U)$ und $C(\{x\}, V)$ offen sein müssen.

Es gilt $f \in C(\{x\}, U)$ (da $f(x) \in U$) und $g \in C(\{x\}, V)$ (da $g(x) \in V$), sodass wir damit zwei disjunkte Umgebungen gefunden haben.

$\square$

Aufgabe 2. **(4 Punkte)**

Sei μ die Gruppe aller Einheitswurzeln in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$ und sei $K/\mathbb{Q}$ eine endliche Erweiterung. Zeigen Sie:

(a) Es existiert ein stetiger Gruppenhomomorphismus $\chi\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \widehat{\mathbb{Z}}^\times$, so dass für jedes $\zeta \in \mu$ und jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ gilt, dass $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}$. *Hinweis:* Benutzen Sie Aufgabe 1.

(b) Es ist $\ker(\chi) = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K(\mu))$.

(c) Ist $K = \mathbb{Q}$, so ist χ surjektiv und induziert einen Isomorphismus $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu)/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ pro-endlicher Gruppen.

a) Es gilt $\overline{K} \supseteq K(\mu)$

Sei $\sigma \in Gal(\overline{K}/K)$ dann ex. für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutig bestimmtes $a_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ so dass für alle $\zeta_n \in \mu$ mit $ord(\zeta_n) = n$ $\sigma(\zeta_n) = \zeta_n^{a_n}$ gilt.

Definiere χ durch $\chi(\sigma) = (a_n + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ mit k/n dann ist $\zeta_n^{n/k}$ auch n-te Einheitswurzel und damit muss $a_n \equiv a_k \mod k$ gelten. Da $a_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ist $\chi(\sigma) \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$ $\forall \sigma \in Gal(\overline{K}/K)$.

Es gilt: $\chi(\sigma\circ\tilde{\sigma}) = (a_n \cdot \tilde{a}_n + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (a_n + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\cdot(\tilde{a}_n + \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

stetig: $\hat{\mathbb{Z}}^\times = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times,\ a_k \equiv a_j \mod j\ \forall k,j\in\mathbb{N}, j|k\}$

$U_i = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \hat{\mathbb{Z}}^\times \mid a_n = 1\ \forall n \leq i\}$ dann ist U_i nach der induzierten Produkttop. offen und $\{U_i \mid i\in\mathbb{N}\}$ bildet eine Umgebungsbasis der 1.

Es gilt $\chi^{-1}(U_i) = \{\sigma \in Gal(\overline{K}/K) \mid \sigma(\zeta) = \zeta\ \forall \zeta \text{ mit } ord(\zeta) \leq i\}$

$= Gal(\overline{K}/K(\mu_i))$ mit $\mu_i := \{\zeta \in \mu \mid ord(\zeta) \leq i\}$

Und $Gal(\overline{K}/K(\mu))$ ist als Normalteiler von $Gal(\overline{K}/K)$ offen.

b) $ker(\chi) = \{\sigma \in Gal(\overline{K}/K) \mid a_n \equiv 1 \mod n\} = \{\sigma \in Gal(\overline{K}/K) \mid \sigma(\zeta) = \zeta\ \forall \zeta \in \mu\}$

$= Gal(\overline{K}/K(\mu))$

c) Die Folgen $0 \to Gal(K(\zeta_n)/K) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \to 0$ ist exakt für alle ζ_n mit $ord(\zeta_n) = n$

$\Rightarrow \varprojlim_n Gal(K(\zeta_n)/K) \to \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \hat{\mathbb{Z}}^\times \to 0$ ist exakt also ist χ surjektiv

surjektiv + b) $\Rightarrow Gal(\mathbb{Q}(\mu)/\mathbb{Q}) \cong Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) / Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\mu)) \overset{\text{Isomorphiesatz}}{\cong} \hat{\mathbb{Z}}^\times$