Aufgabe 1

(a) Bekanntlich ist in Kugelkoordinaten

$$\vec{x} = R \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

und daher bei konstantem Radius

$$\dot{\vec{x}} = \left(R \begin{pmatrix} \dot{\vartheta}\cos(\vartheta)\cos(\varphi) - \dot{\varphi}\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \dot{\vartheta}\cos(\vartheta)\sin(\varphi) + \dot{\varphi}\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ -\dot{\vartheta}\sin(\vartheta) \end{pmatrix} \right),$$

woraus wir

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{x}}^2 &= R^2 \left[\dot{\vartheta}^2 \cos^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) + \dot{\vartheta}^2 \cos^2(\vartheta)\sin^2(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\vartheta)\cos^2(\varphi) + \dot{\vartheta}^2 \sin^2(\vartheta) \right] \\
&= R^2 \left[\dot{\vartheta}^2 \cos^2(\vartheta) + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\vartheta) + \dot{\vartheta}^2 \sin^2(\vartheta) \right] \\
&= R^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\vartheta) \right)
\end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung ist $\dot{\varphi} = \omega$

$$= R^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2 \sin^2(\vartheta) \right)$$

Nun gilt

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - m \cdot g \cdot x_3 = \frac{1}{2} m R^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2 \sin^2(\vartheta) \right) - mgR\cos(\vartheta)$$

(b) Der kanonisch konjugierte Impuls ist

$$p_\vartheta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mR^2 \dot{\vartheta}.$$

Da es sich hier um ein konservatives System mit holonom-skleronomen Zwangsbedingungen handelt, ist

$$H = E = T + V = \frac{1}{2} mR^2 \left(\dot{\vartheta}^2 + \omega^2 \sin^2(\vartheta) \right) + mgR\cos(\vartheta) = \frac{p_\vartheta^2}{2mR^2} + \frac{mR^2}{2} \omega^2 \sin^2(\vartheta) + mgR\cos(\vartheta)$$

(c) Aus b sieht man sofort, dass H der Gesamtenergie entspricht und da $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, folgt daraus sofort die Energieerhaltung.

(d) Die kanonischen Gleichungen lauten

$$\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta}$$

und

$$-\dot{p}_\vartheta = \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = mR^2 \omega^2 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) - mgR\sin(\vartheta)$$

(e) Setzt man den kanonisch konjugierten Impuls in die zweite der kanonischen Gleichungen ein, so erhält man

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} mR^2\dot{\vartheta} = \frac{\partial H}{\partial \vartheta} = mR^2\omega^2 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) - mgR\sin(\vartheta).$$

Mit $\dot{\vartheta} = 0$ folgt daraus

$$m\omega^2 R^2 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta) - mgR\sin(\vartheta) = 0.$$

Für $\vartheta = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ ist diese Bedingung erfüllt. Sonst teilen wir durch $mR\sin(\vartheta)$ und erhalten

$$R\omega^2 \cos(\vartheta) = g.$$

Aufgabe 2

(a) $L = T - V = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 q^2$, $H = T + V = \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$.

(b) Die kanonischen Gleichungen sind

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

und

$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q},$$

wobei p durch

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$$

gegeben ist. Wir können H damit auch schreiben als $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$. Nun gilt:

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{m} \\ -m\omega^2 q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot y$$

Diese Gleichung wird gelöst durch $\vec{y}(t) = e^{At}\vec{y}_0$ mit $A = m\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m^2} \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$. Wir stellen fest

$$A^2 = m\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m^2} \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot m\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m^2} \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = m^2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\omega^2}{m^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega^2}{m^2} \end{pmatrix} = -\omega^2 \cdot E_2.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^{2n}}{(2n)!} \\
&= A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-\omega^2 \cdot E_2)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-\omega^2 \cdot E_2)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{\omega} A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} + E_2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega t)^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{\omega} A \cdot \sin(\omega t) + E_2 \cos(\omega t) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) \\ m\omega \cos(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Es gilt für ebene Polarkoordinaten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} R(r)T(t) &= v^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) R(r)T(t) \\
\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) &= v^2 \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r)
\end{aligned}$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von r abhängt, muss jede Seite für sich konstant sein,

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) = -c = v^2 \frac{1}{rR(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r)$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) + cT(t) = 0$$

und

$$\begin{aligned}
v^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) + crR(r) &= 0 \\
v^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) + v^2 r \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + crR(r) &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + v^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} R(r) + cR(r) &= 0
\end{aligned}$$

und für Kugelkoordinaten (die anderen Terme des Laplace-Operators werden eh 0 also schreib ich sie gar nicht auf)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2} R(r)T(t) &= v^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) R(r)T(t) \\
\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) &= v^2 \frac{1}{r^2 R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r)
\end{aligned}
$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte Seite nur von r abhängt, muss jede Seite für sich konstant sein,

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) = -c = v^2 \frac{1}{r^2 R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r)$$

Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) + cT(t) = 0$$

und

$$
\begin{aligned}
v^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) + cR(r) &= 0 \\
v^2 r \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + 2v^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) + crR(r) &= 0
\end{aligned}
$$

(b) Nun setzen wir $\tilde{R}(r) = rR(r)$ und erhalten

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{R}(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} R(r) + R(r) \right) = r \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + 2 \frac{\partial}{\partial r} R(r)$$

Das können wir nun in unserem Ergebnis aus der (a) einsetzen und erhalten

$$
\begin{aligned}
v^2 r \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) + 2v^2 \frac{\partial}{\partial r} R(r) + crR(r) &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{R}(r) + \frac{c}{v^2} \tilde{R}(r) &= 0
\end{aligned}
$$

Das führt auf die Lösung

$$R(r) = \frac{A}{r} \sin(\frac{\sqrt{c}}{v} r) + \frac{B}{r} \cos(\frac{\sqrt{c}}{v} r)$$

und

$$T(t) = C \sin(\sqrt{c} t) + D \cos(\sqrt{c} t)$$