Gewöhnliche Differentialgleichungen- Übungsblatt 4

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Christian Düll

Abgabe: 19. November, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

Aufgabe 4.1 4 Punkte

Seien $A, B \in M(n; \mathbb{K})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen der Matrixexponentialfunktion.

a) e^A ist invertierbar und es gilt $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

b) Sind die beiden Matrizen A und B ähnlich, d.h. es existiert $P \in GL(n, \mathbb{K})$ mit $A = P^{-1}BP$, so gilt $e^A = P^{-1}e^BP$.

c) Es gilt $e^{\text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = \text{diag}(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$, wobei $D = \text{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$ bedeutet, dass $d_{ii} = \mu_i$ und $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Aufgabe 4.2 3 Punkte

Überprüfen, ob es reelle 2×2 Matrizen A, B gibt, sodass

$$a) \qquad e^A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b) \qquad e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.3 4 Punkte

Berechnen Sie Exponentiale der folgenden Matrizen

$$a) \qquad A = \begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix} \qquad b) \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.4 5 Punkte

a) Finden Sie die Jordan-Normalform der folgenden Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie auch die zugehörige Basiswechselmatrix.

b) Finden Sie die allgemeine Lösung von

$$Y' = AY$$