Namen: ____________________

____

Aufgabe	4.1	4.2	4.3	Z4.1	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 4

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 4.1 (Konvergenzsätze) **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum und $f_k \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen.

a) Sei $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $f_k \nearrow f$ für $k \to \infty$. Sei $g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so dass $f_k \geq g$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f eine messbare Funktion ist, und dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.1}$$

b) Sei $g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so dass $f_k \geq g$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_X \liminf_{k\to\infty} f_k \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu. \tag{1.2}$$

c) Gelten die Aussagen in a) und b) auch ohne die Voraussetzung, dass solch eine Funktion g existiert? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.2 (Grenzwerte von Integralen) **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie deren Wert. Begründen Sie Ihre Antwort:

a) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-x} \cos(\tfrac{x}{k}) \,\mathrm{d}\lambda(x)$,

b) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^\infty e^{-x} \cos(kx) \,\mathrm{d}\lambda(x)$,

c) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{1+kx^2}{(1+x^2)^k} \log(2+\cos(\tfrac{x}{k})) \,\mathrm{d}\lambda(x)$,

d) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_z^\infty \frac{k}{1+k^2x^2} \,\mathrm{d}\lambda(x)$ für ein $z > 0$.

Hinweis: Verwenden Sie die Subsitutionsregel, partielle Integration, und die Konvergenzsätze. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 4.3 (Ableitung und Integration) **5 Punkte**

Sei $X \subset \mathbb{R}$ offen (ausgestattet mit der Borel–σ–Algebra) und $(Y, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $f \colon X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ so dass $y \longmapsto f(x, y)$ integrierbar ist für alle $x \in X$, und so dass $x \longmapsto f(x, y)$ differenzierbar ist für alle $y \in Y$. Zusätzlich gelte, dass eine integrierbare Funktion $g \colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass $|\partial_x f(x, y)| \leq g(y)$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \longmapsto \partial_x f(x, y)$ für jedes $y \in Y$ eine messbare Abbildung ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x) := \int_Y f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(y) \qquad \text{für alle } x \in X, \tag{3.1}$$

differenzierbar ist, und dass

$$F'(x) = \int_Y \partial_x f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(y) \qquad \text{für alle } x \in X. \tag{3.2}$$

Abgabe bis spätestens 03.12.2020, 14:00 Uhr in Moodle.

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Zusatzaufgabe 4.1 **3 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Sei $f \in \mathscr{S}_+(X, \mathcal{E}, \mu)$ mit der Darstellung $f = \sum_k \alpha_k \chi_{A_k}$. Wir definieren (siehe Definition 3.7)

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sum_k \alpha_k \mu(A_k). \tag{4.1}$$

Zeigen Sie, dass diese Definition unabhängig von der Darstellung von f ist.

b) Sei $f\colon X \longrightarrow [0, \infty]$ messbar. Wir definieren (siehe Definition 3.9)

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sup \Big\{ \int_X g \,\mathrm{d}\mu : g \le f,\ g \in \mathscr{S}_+(X, \mathcal{E}, \mu) \Big\}. \tag{4.2}$$

Zeigen Sie, dass für $f \in \mathscr{S}_+$ beide Definitionen des Integrals übereinstimmen.

Abgabe bis spätestens 03.12.2020, 14:00 Uhr in Moodle.