Aufgabe 1

- $F(x,y) = x \cdot y$. Die partiellen Ableitungen lauten: $\frac{\partial F}{\partial x} = y$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = x$. Somit gilt
$$\frac{F(x+\triangle x, y+\triangle y) - F(x,y)}{F(x,y)} = \underbrace{\left(\frac{yx}{xy}\right)}_{k_x=1} \cdot \frac{\triangle x}{x} + \underbrace{\left(\frac{xy}{xy}\right)}_{k_y=1} \frac{\triangle y}{y}.$$
$F(x,y)$ ist deswegen gut konditioniert.
- $F(x,y) = \frac{x}{y}$. Die partiellen Ableitungen lauten: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y}$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$. Somit gilt:
$$\frac{F(x+\triangle x, y+\triangle y) - F(x,y)}{F(x,y)} = \underbrace{\left(\frac{xy}{xy}\right)}_{k_x=1} \cdot \frac{\triangle x}{x} + \underbrace{\left(\frac{-xy^2}{xy^2}\right)}_{|k_y|=1} \frac{\triangle y}{y}.$$
$F(x,y)$ ist deswegen gut konditioniert.
- $F(x,y) = \sqrt{x}$. Es ist $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Somit gilt:
$$\frac{F(x+\triangle x) - F(x)}{F(x)} = \underbrace{\left(\frac{1 \cdot x}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}\right)}_{k_x=\frac{1}{2}} \cdot \frac{\triangle x}{x}.$$
$F(x,y)$ ist deswegen gut konditioniert.

Aufgabe 2

Wir behandeln die Funktionen $f(h) = (ph^2+h)^2 - p^2h^4$ in (a), $f(h) = -\frac{h^2}{\ln(h)}$ in (b) und $f(h) = \frac{\sin(x+h) - 2\sin(x) + \sin(x-h)}{h^2} + \sin(x)$ in (c).

(a) Es gilt $f(h) = p^2h^4 + 2ph^3 + h^2 - p^2h^4 = h^2(2ph+1)$. Für $h \leq \frac{1}{2p}$ gilt $f(h) \leq 2h^2$, also $f(h) = O(h^2)$. Die Aussage $f(h) \leq c \cdot h^3$ lässt sich umformen zu
$$h^2(2ph+1) \leq ch^3 \iff 2ph + 1 \leq ch \iff 1 \leq (c-2p)h \iff \frac{1}{c-2p} \leq h$$
und ist daher für $h \to 0$ nicht mehr wahr, folglich ist $f(h) = O(h^2)$ die höchste Potenz, die wir finden können.

(b) Es gilt $\lim\limits_{h\to 0} -\frac{1}{\ln(h)} = 0$ und daher $\forall \varepsilon > 0 : \exists h > 0 : -\frac{1}{\ln(h)} \leq \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists h > 0 : -\frac{h^2}{\ln(h)} \leq \varepsilon \cdot h^2 \implies f(h) = O(h^2)$. Allerdings ist $\lim\limits_{h\to 0} -\frac{1}{h\ln(h)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h\ln(\frac{1}{h})} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \infty$. Also gilt: $\forall C > 0 : \exists h > 0 : -\frac{1}{h\ln(h)} \geq C$ und daher auch $\forall C > 0 : \exists h > 0 : -\frac{h^2}{\ln(h)} \geq Ch^3$. Also ist $f(h)$ nicht $O(h^3)$ und somit ist auch hier die größte Potenz, die wir finden können h^2. $f(h)$ ist sogar $o(h^2)$, da $f(h) \leq c(h)h^2$ mit $c(h) = -\frac{1}{\ln(h)} \xrightarrow{h\to 0} 0$.

(c) Wir wenden zunächst die Additionstheoreme an und erhalten
$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(x+h) - 2\sin(x) + \sin(x-h) + h^2\sin(x)}{h^2}\\
=&\frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - 2\sin(x) + \sin(x)\cos(h) - \cos(x)\sin(h) + h^2\sin(x)}{h^2}\\
=&\sin(x)\frac{2\cos(h) - 2 + h^2}{h^2}
\end{aligned}$$

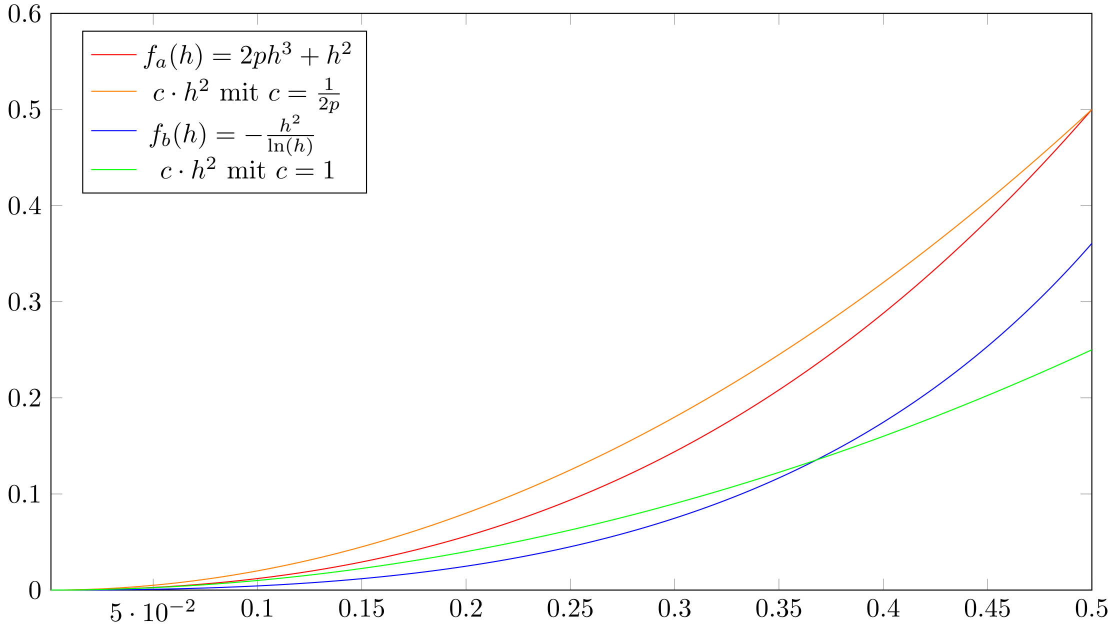

Abbildung 1: Wir wählen hier $p = 1$. Für $h < \frac{1}{2p} = 0.5$ lässt sich $f_a(h)$ also wie erwartet durch $\frac{1}{2p}h^2 = 0.5h^2$ abschätzen (bei $h = 0.5$ schneiden sich die Funktionen). Da $f_b(h)$ sogar $o(h^2)$ ist, genügt ein beliebig kleines c, um die Funktion für $h \to 0$ nach oben abzuschätzen, hier ist $c = 1$

Um $f(0)$, $f'(0)$ und $f''(0)$ zu berechnen, wenden wir die Regel von $L'Hospital$ an. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) \\
=&\lim_{\varepsilon \to 0} \sin(x) \frac{2\cos(\varepsilon) - 2 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} \\
=&\sin(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-2\sin(\varepsilon) + 2\varepsilon}{2\varepsilon} \\
=&\sin(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-2\cos(\varepsilon) + 2}{2} \\
=&\sin(x) \lim_{\varepsilon \to 0} 1 - \cos(\varepsilon) \\
=&0
\end{aligned}$$

Für $f'(0)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} f'(\varepsilon) \\
=&\lim_{\varepsilon \to 0} \sin(x) \frac{-2\sin(\varepsilon)\varepsilon - 2(\cos(\varepsilon) - 1) \cdot 2}{\varepsilon^3}
\end{aligned}$$

3-maliges Anwenden von L'Hospital liefert

$$\begin{aligned}
=&\sin(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \sin(\varepsilon) + \frac{2}{3}\varepsilon \cos(\varepsilon) \\
=&0
\end{aligned}$$

Für $f''(0)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} f''(\varepsilon)\\
&= -\sin(x)\lim_{\varepsilon\to 0} 4\frac{\varepsilon^3\cos(\varepsilon)-3\varepsilon^2\sin(\varepsilon)}{\varepsilon^6}+2\frac{\varepsilon^2\sin(\varepsilon)+2\varepsilon(\cos(\varepsilon)-1)}{\varepsilon^4}\\
&= -\sin(x)\lim_{\varepsilon\to 0} 4\frac{\varepsilon\cos(\varepsilon)-3\sin(\varepsilon)}{\varepsilon^4}+2\frac{\varepsilon\sin(\varepsilon)+2(\cos(\varepsilon)-1)}{\varepsilon^3}
\end{aligned}$$

Der hintere Term ist gleich $f'(\varepsilon)$ und verschwindet daher

$$= -\sin(x)\lim_{\varepsilon\to 0} 4\frac{\varepsilon\cos(\varepsilon)-3\sin(\varepsilon)}{\varepsilon^4}$$

Nach zahlreichem Anwenden von L'Hospital kommt raus, dass hier nicht 0 rauskommt...

Nun bilden wir die Taylorreihe dieses Ausdrucks an der Stelle $h = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(\varepsilon+h)}{\sin(x)} &= f(\varepsilon)+f'(\varepsilon)\cdot h+\frac{f''(\varepsilon)}{2}h^2+O(h^3)\\
&= 0+0\cdot h+O(h^2)
\end{aligned}$$

Also muss die gesamte Funktion $O(h^2)$ sein, sie kann aber nicht $O(h^3)$ sein, da es Terme $\neq 0$ gibt, die von der Ordnung h^2 sind. Die Skizze der ersten beiden Funktionen findet sich in Abbildung 1.

Aufgabe 3

Es gilt (für $p \neq 1$)

$$k_{1/2} = \frac{\partial(p\pm\sqrt{p^2-1})}{\partial p}\cdot\frac{p}{x_{1/2}} = \left(1\pm\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\right)\cdot\frac{p}{x_{1/2}} = \frac{\sqrt{p^2-1}\pm p}{\sqrt{p^2-1}}\cdot\frac{p}{p\pm\sqrt{p^2-1}} = \pm\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}$$

Die Lösung liegt in den reellen Zahlen, solange $p \neq 1$ ist. Die Lösungen des Polynoms $x^2 - \frac{t^2+1}{t}x + 1 = 0$ sind, wie man leicht durch Einsetzen verifiziert, t und $\frac{1}{t}$. Also ist hier

$$k_1 = \frac{\partial t_1}{\partial t}\cdot\frac{t}{t_1} = \frac{\partial t}{\partial t}\cdot\frac{t}{t} = 1$$

$$k_2 = \frac{\partial t_1}{\partial t}\cdot\frac{t}{t_1} = \frac{\partial\frac{1}{t}}{\partial t}\cdot\frac{t}{\frac{1}{t}} = -\frac{1}{t^2}\cdot t^2 = -1$$

Die erste Parametrisierung ist gut konditioniert, wenn

$$|\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}| \leq 1 \iff \frac{p^2}{p^2-1} \leq 1 \iff p^2 \leq p^2-1 \iff 1 \leq 0.$$

Folglich ist die erste Parametrisierung immer schlecht konditioniert. Die zweite Parametrisierung ist hingegen stets gut konditioniert. Mit der zweiten Parametrisierung hat man also eine wesentlich bessere Parametrisierung gefunden (zumindest hinsichtlich der Konditionierung).

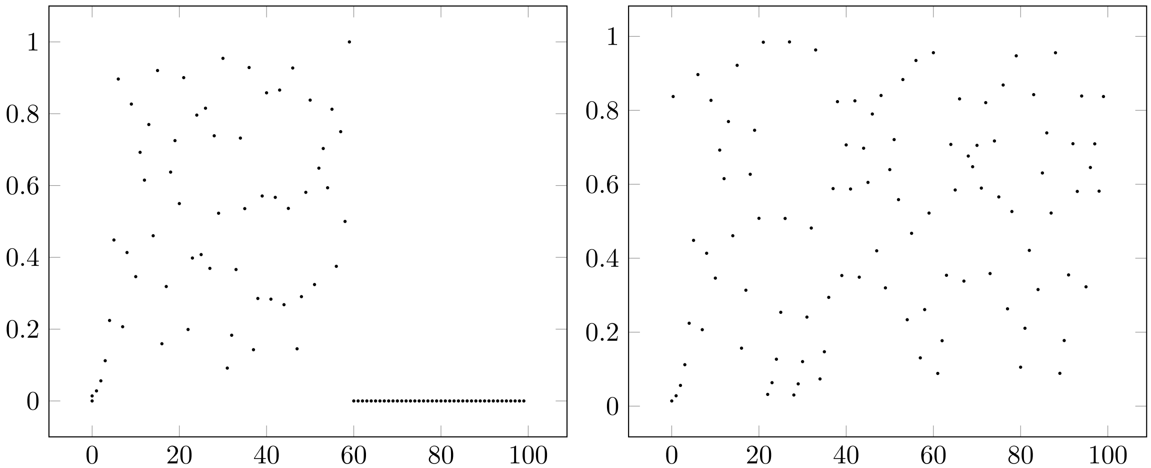

Abbildung 2: Links: Daten generiert mit tent_map.cc, offensichtlich wird ab ca. $i = 60$ nur noch der Wert 0 angenommen. Rechts: Daten generiert mit modifiziertem Programm wie in (c) beschrieben, hier erhält man durchgehend chaotisches Verhalten

Aufgabe 4

(a) Listing 1: Programm für die Zeltabbildung

```
#include<iostream>

using namespace std;

double f(double x) {
    return (x < 0.5) ? 2*x : 2 - 2*x;
}

int main(){
    double x = 0.01401;
    for (size_t i = 0; i < 100; i++)
    {
        cout << i << "," << x << endl;
        x = f(x);
    }
    cout << x << endl;
    return 0;
}
```

(b) Behauptung: Für alle $i \leq r$ sind bei x_i alle Nachkommastellen $m_{r-j} = 0 \forall j \in \mathbb{Z} : j < i$.

Beweis.
Induktionsanfang: $i = 0$. Dann sind nach Aufgabenstellung alle Stellen ab m_{r+1} gleich 0
Induktionsvoraussetzung: Sei die Behauptung für $i = k < r$ erfüllt, also alle Nachkommastellen von x_k ab m_{r+1-k} sind 0.
Induktionsschluss: Wir betrachten zunächst die $r - k$-te Nachkommastelle von $2 \cdot x_k$. Da alle späteren Nachkommastellen offensichtlich von x_k und daher auch von $2 \cdot x_k$ 0 sein müssen, haben

sie keinen Einfluss auf die $r-k$-te Nachkommastelle von $2 \cdot x_k$. Ist nun in x_k $m_{r-k} = 0$, so ist m_{r-k} auch bei $2 \cdot x_k$ 0. Ist sie hingegen 1, so bleibt trotzdem $2 \cdot 1 = 0$ in $Z/2Z$. Also ist die $r-k$-te Nachkommastelle von $2 \cdot x_k$ 0. Ist $x_k < 0.5$ folgt daraus sofort die Behauptung für $x_{k+1} = 2 \cdot x_k$, ist $x_k \geq 0.5$, so ist $x_{k+1} = 2 - 2x_k$. Allerdings sind in der Binärdarstellung von 2 insbesondere alle Nachkommastellen ab $m_{r-k} = 0$, sodass auch in $2 - 2x_k$ gilt $m_{r-k} = 0$. Also gilt auch für x_{k+1} die Aussage. □

Mit dieser Aussage erhalten wir nun sofort, dass bei x_r alle Nachkommastellen $m_{r-j} = 0 \forall j \in \mathbb{Z} : j < r$, also müssen alle Nachkommastellen $= 0$ und damit x_r und $x_{r+1} = 2 \cdot x_r = 0$ sein.

(c) Siehe Abbildung 2