1 MC-Teil

1. Was bedeuet lineare Konvergenz?
   a) $|x_k - x| \le c|x_{k-1} - x|$
   b) $|x_k - x| \le c_k|x_{k-1} - x|$ für $c_k \to 0$.
   c) $|x_k - x| \le c|x_{k-1} - x|^2$
   d) $|x_{k+1} - x| \le c|x_k - x|$
   e) $|x_{k+1} - x| \le c|x_k - x|^2$
   f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

2. $s_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt kubischer Spline bzgl. der Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, wenn ...
   a) $s_n \in C^3[a,b]$
   b) $s_n \in C^2[a,b]$
   c) $s_n|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_3$
   d) $s_n|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathcal{P}_2$
   e) $s_n''(a) = s_n''(b) = 0$
   f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

3. Wie sieht die summierte Trapezregel aus?
   a) $\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$
   b) $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
   c) $\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{n=1}^{N-1} f(x_n)+f(b)\right)$
   d) $\frac{h}{6}\left(f(a)+2\sum_{n=1}^{N-1} f(x_n) +4\sum_{n=1}^{N-1} f\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)+f(b)\right)$
   e) $h\sum_{n=1}^{N-1} f\left(\frac{x_n+x_{n+1}}{2}\right)$
   f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

4. Wie viele Auswertungen werden für die Simpson-Regel benötigt?
   a) 2
   b) 3
   c) $2N$
   d) $2N+1$
   e) $2N+2$
   f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

5. Die Matrixnorm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ heißt verträglich und natürlich, wenn $\forall A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:
   a) $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$
   b) $\|A\| = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|$
   c) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$
   d) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$
   e) $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$
   f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

6. Mithilfe der Gauß-Quadratur zu n paarweise verschiedenen Stützstellen über dem Intervall $[-1,1]$ erreicht man welche optimale Ordnung?
   a) $2n+2$
   b) $2n+3$
   c) $2n+1$
   d) $2n$
   e) Eine optimale Ordnung ist mit der Gauß-Quadratur gar nicht möglich.
   f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

7. Welches Verfahren kann man nicht benutzen, um ein LGS zu lösen?
   a) LR-Zerlegung mit Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen
   b) SOR-Verfahren
   c) Gerschgorinkreise
   d) CG-Verfahren
   e) Potenzmethode

f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

8. Unter welchen Voraussetzungen konvergiert das Jacobi-Verfahren bei einem LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b, x \in \mathbb{R}^n$?
   a) $\sum_{k\neq j} |a_{jk}| < |a_{jj}|$, $j = 1, \dots, n$
   b) A ist irreduzibel
   c) $\operatorname{spr}(-D^{-1}(L+R)) < 1$
   d) A ist irreduzibel und $\sum_{k\neq j} |a_{jk}| \leq |a_{jj}|$, $j = 1, \dots, n$
   e) $\operatorname{spr}(-D^{-1}(L+R)) \leq 1$
   f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

9. Es seien $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ und $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Welche Bedingungen gelten für den die Stützpunkte $(x_i, y_i)_{i=0,\dots,n}$ interpolierenden natürliche Spline $s_n : [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ nicht?
   a) $s_n \in C^3[x_0, x_n]$
   b) $s_n|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathcal{P}_3$, $j = 1, \dots, n$
   c) $s_n''(x_0) = s_n''(x_n) = 0$
   d) $s_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$
   e) $s_n(y_i) = x_i$, $i = 0, \dots, n$
   f) Nur eine Bedingung ist falsch.

10. Es sei I eine interpolatorische Quadraturformel zu den $(n+1)$ Stützstellen $x_0 < \cdots < x_n$ auf dem Intervall $[a, b]$. Die Ordnung von I sei $q \in \mathbb{N}$. Welche Aussagen treffen zu?
    a) Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.
    b) Die x_i sind Nullstellen orthogonaler Polynome
    c) Gilt $q = 2n+2$, so ist I die Gaußquadratur
    d) $q \leq n$
    e) $I(p)$ ist exakt für $p \in \mathcal{P}_{n+1}$
    f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

11. Es sei $A = QR$ eine QR-zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Welche Aussagen sind korrekt?
    a) A ist invertiertbar.
    b) $Q^\top A$ ist orthonormal
    c) $Q^\top A$ is obere Dreiecksmatrix
    d) R ist invertierbar
    e) R ist orthonormal
    f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

12. $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ habe Rang n, $n, m \geq 1$. Weiterhin gelte $a_{kannichnichtlesen} < 0$. Die Aufgabe
    $$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$
    mit $b \in \mathbb{R}^m$ soll mit einer Zerlegung der Matrix A gelöst werden. Welche unter den überhaupt in Frage kommenden Zerlegungen von A hat benötigt in Abhängigkeit von n und m die geringste Anzahl arithmetische Operationen?
    a) LR, wenn $m = n$
    b) Cholesky, wenn $m = n$
    c) QR, wenn $m = n$
    d) Cholesky, wenn $m \neq n$
    e) QR, wenn $m \neq n$
    f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

13. Was sind die gemeinsamen Vorteile von iterativen Verfahren zur Lösung von linearen $n \times n$-Gleichungssystemen der Form $Ax = b$?
    a) Genauer als direkte Verfahren

b) Ergebnis nach $n+1$ Schritten

c) Geringer Speicherverbrauch

d) Nur Matrix-Vektor-Operationen

e) Keine Zusatzvoraussetzungen an A.

f) Nur ein Vorteil trifft zu.

14. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv-definit. Die Jacobi-, Gauß-Seidel- und SOR-Verfahren basieren auf Zerlegung der Form

a) $A = QR$

b) $A = LDL^\top$

c) $DA = LR$

d) $A = L + D + R$

e) $A = L + D + L^\top$

f) Nur eine der Formen.

15. Betrachte das LGS $Ax = b$. Die Systemmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei symmetrisch positiv-definit mit Konditionszahl $\kappa = \mathrm{cond}_2(A)$. Für welche der folgenden Normen $\|v\|$ gibt für die Iterierten $x^{(k)}$, $k = 0, \ldots$ das CG-Verfahren die Fehlerabschätzung

$$\|x^{(k)} - x\|_A \le 2\left(\frac{1-n^{-1/2}}{1+n^{-1/2}}\right)^k \|x^{(0)} - x\|_A?$$

a) $\sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$

b) $\sqrt{v^\top A v}$

c) $\max_k |v_k$

d) $|v_1| + \cdots + |v_n|$

e) keine der angegebenen Normen

f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

16. Welche Eigenschaft besitzt die Hessenbergsche Normalform $H = TAT^\top$ der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht?

a) $h_{ij} = 0$ für alle $i > j+1$

b) $h_{ij} = 0$ für alle $j > i+1$

c) H hat die gleichen Eigenwerte wie A

d) h_{jj} sind die Eigenwerte von H

e) $HT = TA$

f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

17. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit Jacobi-Matrix $J\colon \mathbb{R}^n \to R^{n\times n}$. Weiter bezeichne $D(x)$ die Niveaumenge von f zum Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ bzgl. einer Norm $\|\cdot\|$ und es sei ein Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Welche Annahmen aus dem Satz von Newton-Kantorovich stellen eine Anforderung, dass $x^{(0)}$ nahe an einer Lösung x^* von $f(x) = 0$ liegen muss?

a) Keine

b) $\|J(x)^{-1}\| \le \beta$, $x \in D(\bar{x})$

c) $\|J(x) - J(y)\| \le \gamma\|x - y\|$, $x, y \in D(\bar{x})$

d) $x^{(0)} \in D(\bar{x})$

e) $q := \frac{1}{2}\beta\gamma\left\|J\left(x^{(0)}\right)^{-1} f\left(x^{(0)}\right)\right\| < 1$

f) Nur eine weitere Antwort ist richtig.

18. Welche der folgenden Schritte sind Teil der inversen Iteration nach Wielandt mit gegebener Näherung $\sigma \in \mathbb{C}$ eines Eigenwertes von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$?

a) Setze $z^{(k)} = \tilde{z}^{(k)}/\|\tilde{z}^{(k)}\|$

b) Zerlege $A^{(k)} + \sigma\mathbb{I}_n = QR$

c) Zerlege $A^{(k+1)} = QR - \sigma\mathbb{I}_n$

d) Löse $(A + \sigma\mathbb{I}_n)\tilde{z}^{(k)} = z^{(k-1)}$

e) Löse $(A - \sigma\mathbb{I}_n)\tilde{z}^{(k)} = z^{(k-1)}$

f) Nur eine angegebener Schritt ist Teil der Methode.

2 Aufgaben

Aufgabe 1
Wie ist $f(x) = x^3 \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x}\right)$ konditioniert?

Aufgabe 2
Was ist der Aufwand zum Erstellen der LR-Zerlegung und des Vorwärts- und Rückwärtseinsetzens?

Aufgabe 3
Wie wird bei der Gaußquadratur optimale Ordnung erreicht? Scheuen Sie keine Formeln, geben Sie auch eine Formel für die Berechnung der Gewichte an.

Aufgabe 4
Was versteht man unter der Stabilität eines numerischen Algorithmus? Definieren Sie in diesem Zusammenhang auch, was eine Konditionszahl ist.

Aufgabe 5
Welches Verfahren sollte man zur Polynomauswertung benutzen und wieso?

Aufgabe 6
Welche Vorteile bietet das Neville-Schema gegenüber der Lagrangschen Darstellung zur Punktauswertung bei Interpolierenden?

Aufgabe 7
Man erläutere das Prinzip des Newton-Verfahrens in einer Raumdimension, ein Bild geht auch.

Aufgabe 8
Man leite eine Gauß-Quadraturformel her, welche mit möglichst wenigen Stützstellen das Integral

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

für alle linearen $p \in \mathcal{P}_1$ exakt integriert.

Aufgabe 9
Man löse das folgende „Least-Squares“-Problem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10
Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 7 & 20 & -5 \\ -6 & 1 & 30 \end{pmatrix}$$

a) Mithilfe der Gerschgorin-Kreise gebe man eine möglichst gute Abschätzung der Eigenwerte von A an.

b) Ist die Matrix A regulär? Begründen Sie.

Aufgabe 11
Man zeige, dass das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung des folgenden LGS geeignet sind:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 3 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Ferner führen Sie ausgehen vom Startwert $x^{(0)} = (4,5)^\mathsf{T}$ jeweils einen Schritt mit dem Jacobi- und dem Gauß-Seidel-Verfahren durch.

Aufgabe 12
Man bestimme das Lagrange-Interpolationspolynom $p \in \mathcal{P}_3$ zu den Stützstellen $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,16)$ and $(3,81)$.

Aufgabe 13
Bestimmen Sie das Newton-Verfahren zur Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} xy + 2x - y &= 2 \\ xy - x + y &= 3 \end{aligned}$$

Berechnen Sie ausgehend vom Startwert

$$x^{(0)} = (0,1)^\intercal$$

eine Iterierte des Newton-Verfahrens.

Aufgabe 14
Erklären Sie den Begriff der Auslöschung.

Aufgabe 15
Was versteht man unter einer Kondition einer numerischen Aufgabe? Wie sind die Konditionszahlen k_{ij} definiert?

Aufgabe 16
Wir betrachten die Lagrangsche Interpolationsaufgabe zu $(n+1)$ paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und Stützewrten $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

a) Wie lauten die zu dieser Aufgabe gehörigen Newton-Basispolynome?

b) Wie berechnet man (in Formeln) die Koeffizienten der Lösung de Lagrangschen Interpolationsaufgabe zur Newton-Basis?

Aufgabe 17
Es sei $f \in C^2[a,b]$ periodisch auf $[a,b]$, d.h $f(a) = f(b)$. Wie lautet in diesem Fall die summierte Trapezregel $I_h^{(n)}(f)$ zur Schrittweite h für $N \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 18
Geben Sie zwei Gründe an, warum man Newton-Cotes-Formeln der Ordnung $n \geq 7$ nict zur Quadratur verwenden sollte.

Aufgabe 19
Wie ist die Konditionszahl einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ definiert? Wie kann man diese für symmetrisch positiv definite Matrizen berechnen? Was besagt der Störungssatz für das LGS $Ax = b$?

Aufgabe 20
Wir betrachten die Householder-Matrizen $H_u := \mathbb{I} - 2\frac{uu^\intercal}{u^\intercal u} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie $H = H^\intercal = H^{-1}$ ist und bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 21
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5.2 & 0.6 & 2.2 & 0.0 \\ 0.6 & 6.4 & 0.5 & 0.5 \\ 2.2 & 0.5 & 4.8 & 0.1 \\ 0.0 & 0.5 & 0.1 & 5.0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie mithilfe des Satzes von Gerschgorin eine obere Schranke für die Spektralkondition $\mathrm{cond}_2(A)$.

Aufgabe 22
Führen Sie für

$$f(x) = \begin{pmatrix} \exp(x_2)(1+x_1) \\ x_2 - 1 \end{pmatrix}$$

zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x^{(0)} = (0,0)^\intercal$ durch. Bricht das Newton-Verfahren danach ab?

Aufgabe 23
... Python-Code ...

a) bla

b) Geben Sie unter der Benutzung des Codes eine exakte LR-Zerlegung $PA = LR$ von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

durch explizites Aufstellen von P, L und R an.

Aufgabe 24
Gegeben sei eine Matrix A und ein Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 9 & -2 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 30 & -12 & 0 \\ 1 & -15 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 18 & 8 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1. Man löse durch Gauß-Elimination (ohne Pivotisierung) das LGS $Ax = b$.
   Hinweis: Der Lösungsvektor ist ganzzahlig.

2. Man bestimme die LR-Zerlegung von A und berechne so die Determinante $\det(A)$.

3. Man bestimme die Konditionszahl $\mathrm{cond}_\infty(A)$

Aufgabe 25
Betrachtet werde das Gleichungssystem $Ax = b$ der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Man untersuche, ob das System lösbar ist (mit Begründung).

b) Man bestimme eine Lösung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.

c) Ist diese Lösung eindeutig?

d) Ist die Matrix $A^\intercal A$ positiv definit?

Aufgabe 26
Man berechne die QR-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

mithilfe des Housholder-Verfahrens.

Aufgabe 27 a) Nennen Sie drei Nachteile der Gauß-Elimination

b) In der Vorlesung wurden die LR-Zerlegung, QR-, Cholesky- und die Singulärwertzerlegung behandelt. Verschaffen Sie sich einen Überblick, indem Sie eine Tabelle anfertigen und für jede der Zerlegungen das Anwendbarkeitskriterium, die Eindeutigkeit, den Aufwand und die Besonderheiten notieren.

Aufgabe 28 (Fixpunktiterationen)
Man berechne mit einem Fehler kleiner 10^{-6} die Nullstelle $z = \pi \approx 3.1415926\ldots$ der Funktion $f(x) = \sin(x)$ mit

a) der Intervallschachtelung zum Start $[2, 4]$.

b) der Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + f\left(x^{(k)}\right)$$

zum Startwert $x^{(0)} = 4$.

c) dem Newton-Verfahren zum Startwert $x^{(0)} = 4$.

d) Erklären Sie: Warum konvergiert in diesem Fall die einfache Fixpunktiteration in b) genauso schnell wie das Newton-Verfahren?

Aufgabe 29
Zur Berechnung der Lösung $z \in [0.5, 0.6]$ der gleichung $x + \ln x = 0$ werden folgende Fixpunktiterationen vorgeschlagen:

a) $x^{(k+1)} = -\ln x^{(k)}$

b) $x^{(k+1)} = \exp\left(-x^{(k)}\right)$

c) $x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} - \exp\left(-x^{(k)}\right)\right)$

Welche dieser Iterationen kann man verwenden, welche sollte man verwenden, und lässt sich vielleicht eine noch „bessere“ Iteration angeben?

Aufgabe 30
Zur Berechnung der Inversen A^{-1} einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ werden die beiden Fixpunktiterationen

a) $X^{(k+1)} = X^{(k)}(\mathbb{I} - AC) + C$, mit einer regulären Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$

b) $X^{(k+1)} = X^{(k)}(2\mathbb{I} - AX^{(k)})$

Man gebe hinreichende Kriterien für die Konvergenz diese iteration an. Wie würde in diesem Fall das Newton-Vefahren lauten?

Aufgabe 31

Erklären Sie: „Wenn man eine Singulärwertzerlegung seiner Matrix A hat, hat man das Gleichungssystem $Ax = b$ so gut wie gelöst.“

Aufgabe 32 (Kondition und Stabilität) a) Geben Sie einen möglichst stabilen Algorithmus zum Berechnen des Polynoms $f(x) = a_n x^n + \cdots + x_1 x + a_0$ an.

b) Berechnen Sie die Konditionszahl der Funktion $f(x) = x^2$. Für welche x ist die Aufgabe gut konditioniert, für welche schlecht?

c) Sei A eine reguläre Matrix mit Konditionszahl $\text{cond}(A)$ (bzgl. einer Norm $\|\cdot\|$). Berechnen Sie die Kondition der Matrix $2A$.

Aufgabe 33 (Numerische Interpolation) a) Finden Sie das Lagrange-Interpolationspolynom $p_L(x)$, das die Funktion $f_1(x) = \cos(x)$ in den Stützstellen $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ exakt interpoliert. Finden Sie eine obere Schranke für den Interpolationsfehler.

b) Sei $p_N(x)$ das Newton-Interpolationspolynom, das die Funktion $f_2(x) = \sin(\pi x)$ in den Stützstellen $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ exakt interpoliert. Werten Sie $p_N(3/4)$ aus, ohne die Koeffizienten von p_N zu berechnen.

c) Welche Funktions- und Ableitungsauswertungen braucht man für die Berechnung des natürlichen kubischen Splines S_3^2 einer Funktion f auf vier Stützstellen?

Aufgabe 34 (Numerische Integration) a) Wie viele (nicht notwendigerweise äquidistante Stützstellen braucht man, mindestens? um Polynome vom Grad sieben exakt zu integrieren.

b) Integrieren Sie numerisch die Funktion $f(x) = \exp(2x)$ auf dem Intervall $[0,2]$ mithilfe der

  a) Simpson-Regel

  b) Aufsummierten Trapezregel für die vier Teilintervalle $[0,1/2]$, $[1/2,1]$, $[1,3/2]$ und $[3/2,2]$.

Finden Sie jeweils eine obere Schranke für den Integrationsfehler.

c) Finden Sie die Gauß'schen Stützstellen, mit hilfe derer alle Polynome vom Grad drei auf dem Intervall $[0,2]$ exakt integriert werden.

Aufgabe 35 (Störungssatz) a) Geben Sie explizite Definitionen für die natürlichen Matrixnormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$. Sind alle Matrixnormen natürlich?

b) Sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Konditionszahl $\text{cond}_2(M)$ von M bezüglich der Spektralnorm.

c) Sei $(A + \delta A)(x + \delta x) = b$ das gestörte Problem zum exakten Problem $Ax = b$ für eine reguläre $n \times n$-Matrix A und $b \in \mathbb{R}$. Schätzen Sie den relativen Fehler $\|\delta x/x\|_\infty$ durch den relativen Fehler $\|\delta A/A\|_1$ nach oben ab.

Aufgabe 36 (Beweis-Reproduktion)

Mit welcher Ordnung konvergiert das Newton-Verfahren? Beweisen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 37 (Reguläre lineare Gleichungssysteme)
Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

a) die LR-zerlegung

b) $\det(A)$

c) A^{-1}

d) $\operatorname{cond}_\infty(A)$

Erläutern Sie weiterhin, für welche Matrizen die Cholesky-zerlegung existiert, und wie die Anzahl der Schritte von der Dimension abhängt.

Aufgabe 38 (Gauß'scher Ausgleich)
In dieser Aufgabe soll sich mit sog. „Least-Squares"-Problemen beschäftigt werden-.

a) Geben Sie die Normalengleichung zur Lösung des Minimierungsproblems

$$\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

an.

b) Berechnen Sie durch Householder-Transformation die QR-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

c) Sei A eine $n \times m$-Matrix mit $m \geq n$. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung zur positiven Definitheit von $A^\intercal A$ an.

Aufgabe 39 (Iterative Algorithmen) a) Wie definiert man die Konvergenzordnung eines iterativen Verfahrens? Was ist die Konvergenzordnung des Newton-Verfahrens?

b) Gegeben sei folgendes Iterative Verfahren:

$$x_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x_{n-1} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Fixpunkt dieses Verfahrens und prüfen Sie, ob das Verfahren für alle Startwerte konvergent ist.

Aufgabe 40 (Vektornormen)
Man zeige für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

Skizzieren Sie die Einheitssphäre der drei Normen.

Aufgabe 41
Man überprüfe die Gültigkeit folgender Aussagen:

1. Für jede Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt $\|\mathbb{I}\| \geq 1$.
2. Eine strikt diagonaldominante Matrix ist regulär.
3. Eine diagonaldominante Matrix ist regulär.

Aufgabe 42
Zeigen Sie, dass die Spaltensummennorm mit der Betragssummennorm verträglich ist, d.h. es gilt

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \|A\|_1 \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Aufgabe 43
Berechne $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|$ zu $(1,4)$, $(2,2)$ und $(3,5)$ mithilfe der Normalengleichung.

Aufgabe 44 (Eigenwertabschätzungen)
Sei $\|\cdot\|$ eine verträgliche Matrixnorm. Dann gilt $|\lambda| \leq \|A\|$ für alle Eigenwerte λ von A.

Aufgabe 45
Schätzen Sie den Interpolationsfehler ab, wenn man $f(x) = \sin(x)$ durch vier Stützstellen im Intervall $[-6, 6]$ interpoliert. Ist das eine gute Idee, oder eher nicht so?

Aufgabe 46
Zeige, dass die Newton-Polynome $\{N_k(x)\}_{k=0,\dots,n}$ mit $N_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i) \in \mathcal{P}_k$ eine Basis des $\mathcal{P}_n$ bilden.

Aufgabe 47 (Extrapolation)
Sie wollen heute abend mit Ihren Freunden in der Unteren Straße feiern gehen. Da Sie dank fehlendem flächendecken Internet keine Möglichkeit haben, einen Wetterdienst zu konsultieren, müssen Sie selbst tätig werden: Sie gehen alle drei Stunden vor die Tür, um die Temperatur zu messen. Ermitteln Sie anhang folgender Daten die Temperatur um zehn Uhr abends mit dem Neville-Aitken-Schema:

Uhrzeit	10	13	16	19
Temperatur in °C	-6	0	-2	-5

Aufgabe 48 (Extrapolation)
Sei $f(x) = \exp(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$. Man zeige, dass das Restglied der Lagrange-Interpolation von f über beliebig verteilten Stützstellen $x_0,\dots,x_n$ aus $[a,b]$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen null konvergiert.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $1/n \rightrightarrows 0$, d.h. $1/n$ konvergiert gleichmäßig gegen 0.

Aufgabe 49 (Interpolation)
Interpoliere $p \in \mathcal{P}_3$ zu

x_i	0	1	2	3
y_i	0	1	16	81

Aufgabe 50 a) Finde $p_2 \in \mathcal{P}_2$ zu

x_i	-2	-1	1
y_i	-7	-6	-4

b) Füge $(2,9)$ hinzu und finde $p_3 \in \mathcal{P}_3$.

Aufgabe 51 a) Finden Sie $p_2 \in \mathcal{P}_2$, das folgende Werte möglichst gut approximiert.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	-8	16	2	0	25

Beurteilen Sie die Qualität der Lösung.

b) Führen Sie die Rechnung mit einer Computeralgebra für $p_3 \in \mathcal{P}_3$ durch. Was passiert, wenn Sie um noch einen Polynomgrad erhöhen?

Aufgabe 52 (Konvergenzraten raten)
Sie erhalten ein völlig unkommentiertes Programm, welches Integrale berechnet. Nach ein paar Experimenten, bei denen Sie die Anzahl N der Stützstellen variieren, erhalten Sie folgende Tabelle:

N	2	4	8	16
Fehler	1.0255	0.3718	0.115	0.0322

Mutmaßen Sie, welche newton-Cotes implementiert wurde. Sie dürfen $f \in C^2[a,b]$ annehmen.

Aufgabe 53 (Beweis-reproduktion)
Sei $f \in C^2[a,b]$ und s der natürliche, kubische Spline zu f an den Stützstellen x_i, $i = 0,\dots,n$. Sei

$$w \in N := \{w \in C^2[a,b] : w(x_i) = 0, i = 0,\dots,n\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\int_a^b s''(x)w''(x)\,\mathrm{d}x = 0$

b) s ist die die Energie minimierende Funktion zu

$$E(g) = \int_a^b |g''(x)|^2\,\mathrm{d}x,$$

zeigen Sie also $E(s) \leq E(g)$ für alle $g \in C^2[a,b]$ mit $g(x_i) = y_i$, $i = 0,\dots,n$.

Hinweis: Nutzen Sie für b) die Menge N und Ihr Ergebnis aus a).

Aufgabe 54 (Quadratur)
Sei $f(x) = x^2 + 1$.

a) Berechnen Sie $\int_0^2 f\,\mathrm{d}x$ mithilfe der summierten Trapezregel und $h = 1$.

b) Berechnen Sie $\int_0^2 f \, dx$ mit der einfachen (d.h. nicht mit der summierten) Simpson-Regel.

c) Wie groß ist der Fehler in a) und b)?

d) Wie viele Funktionsauswertungen benötigen die beiden Verfahren in diesem Fall?

Aufgabe 55 (CG-Verfahren)
Sei $Ax = b$ mit $A = (2) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ und $b = 1 \in \mathbb{R}^1$. Berechnen Sie den ersten Schritt des CG-Verfahrens mit Startwert $x^{(0)}$. Geben Sie anschließend eine Abschätzung des Fehler von $x^{(1)}$ an.

Aufgabe 56 (Quadratour de France) a) Berechnen Sie mit einer nicht summierten Methode das exakte Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{2} x \, dx.$$

b) Wie viele Stützstellen benötigen Sie, um die Gauß-Quadratur von

$$\int \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 \, dx$$

exakt zu berechnen? (Das Integral selbst sollen Sie nicht berechnen.)

Aufgabe 57 (Summierte Quadratur)
Wie viele Stützstellen benötigen Sie mindestens, um $I(f)$ für $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $[0,\pi]$ mit der summierten Trapezregel zu berechnen, sodass der Fehler kleiner als 10^{-12} ist?

Aufgabe 58 (Beweisreproduktion)
Zeigen Sie, dass der Fehler der summierten Trapezregel wie folgt gegeben ist:

$$|I(f) - I_h^{(1)}(f)| \le \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f^{(2)}(x)|$$

Tipp: Nutzen Sie $x_k = a + kh$ mit $h = \frac{b-a}{n}$.

Aufgabe 59
Sei $f \in C^3[a,b]$. Für $h > 0$ und $x \in [a,b]$ so, dass $(x \pm h) \in [a,b]$, definieren wir den zentralen Differenzenquotienten

$$d_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Zeigen Sie $|d_h(x) - f'(x)| \le ch^2$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie c.

Aufgabe 60
Berechnen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens um $f(x) = x^2 - 1$ mit $x_0 = 2$.

Aufgabe 61 (Konvergenz von Fixpunktiterationen)
Wir betrachten für eine symmetrische, positiv-definite Matrix A das Richardson-Verfahren

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(b - Ax^{(k)}), \quad \omega > 0.$$

a) Unter welchen Bedingungen konvergiert das Verfahren? Verwenden Sie den Banachschen Fixpunktsatz.

b) Zeigen Sie, dass der Fehler in jedem Schritt gegeben ist durch

$$x^{(k+1)} - x = E\left(x^{(k)} - x\right)$$

mit einer Matrix $E = \mathbb{I} - \omega A$.

c) Gegeben sei die Matrix A und die rechte Seite b. Was ist das optimale ω_{opt} für das obige Verfahren?

Tipp: Minimieren Sie den Spektralradius über ω, also betrachten Sie

$$\min_\omega \left(\max_\lambda |\lambda(A)| \right) \overset{!}{<} 1.$$

Aufgabe 62 (Zahldarstellung)
Schreiben Sie 2.5 um von der Zehnerdarstellung in die Darstellung zur Basis zwei, ohne dabei auf Mantissenlängen etc. zu achten.

Aufgabe 63 (Fließkommadarstellung)
Sei $\mathbb{F}(b,r,s)$ mit Basis b, Mantissenlänge r, und s die Anzahl der Stellen des Exponenten.

a) Gegeben sei $x_0 = (0.5731 \times 10^5)_8 \in \mathbb{F}(8,5,1)$. Wie lautet diese Zahl in der normierten Darstellung $\mathbb{F}(10,5,1)$?

b) Gegeben sei $x_1 = 0.3 \in \mathbb{R}$. Bilden Sie x_1 in die normierte Darstellung $\mathbb{F}(2,10,2)$ und danach auf $\mathbb{F}(10,r,1)$. Für welche r erhält man 0.3 zurück?

Aufgabe 64
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = \exp(x) - 1$ gut/schlecht konditioniert?

Aufgabe 65 (Konditionierung) a) Geben Sie kurz und ohne Begründung an, wie die folgenden Aufgaben konditioniert sind:

1. Addition
2. Subtraktion
3. Multiplikation
4. Division

b) Berechnen Sie die Kondition der Wurzel. Wann tritt Fehledämpfung auf?

c) Ist die Mulitplikation oder die Wurzel besser konditioniert?

Aufgabe 66 (Matrixeigenschaften) a) Es sei $\|\cdot\|$ eine natürliche Matrixnorm. Zeigen Sie $\|A\| \geq |\lambda|$ für alle Eigenwerte λ von A.

b) Sei A symmetrisch positiv-definit. Zeigen Sie, dass alle Hauptdiagonalelemente positiv sind.

Aufgabe 67
Sei S eine reguläre Matrix und $\|\cdot\|$ eine Vektornorm und $|||\cdot|||$ die induzierte Matrixnorm. Zeigen Sie:

a) $\|x\|_S := \|Sx\|$ ist eine Vektornorm.

b) $|||A|||_S := |||SAS^{-1}|||$ ist die zugehörige Matrixnorm. (Es muss nicht gezeigt werden, dass $|||A|||_S$ selbst eine Matrixnorm ist.)

Aufgabe 68 (Gleitkommadarstellung)
Sei $\mathbb{F}(b,r,s)$ das Gleitkommagitter mit Basis b, r der Anzahl der Stellen der Mantisse und s der Anzahl der Stellen des Exponenten.

a) Sei $x_1 = 0.75 \in \mathbb{F}(10,2,1)$ und $x_2 = \mathbb{F}(10,2,1)$. Wie lauten die Zahlen in $\mathbb{F}(2,4,2)$?

b) Berechnen Sie $\min|x_3 + x_4|$ mit $x_3 \in \mathbb{F}(4,6,2)$, $x_4 \in \mathbb{F}(3,7,1)$, $x_4, x_3 > 0$.

Aufgabe 69 (Konvergenzordnungen)
Betrachten Sie die folgende Tabelle, in der zur Schrittweite h die Fehler der Verfahren A und B aufgeführt sind.

h	Fehler A	Fehler B
0.5	1.33746×10^{-2}	7.73815×10^{-9}
0.25	3.32282×10^{-3}	1.20631×10^{-10}
0.125	8.29407×10^{-4}	2.03703×10^{-12}
0.625	2.07271×10^{-4}	1.02817×10^{-12}

Welche Konvergenzordnung haben die Verfahren? Warum tritt bei Verfahren B und $h = 0.625$ kaum Verbesserung ein?

Aufgabe 70
Stelle 3140_{10} und 0.22_{10} jeweils in $\mathbb{F}(5,4,2)$ und in $\mathbb{F}(8,4,1)$ dar.

Aufgabe 71 (Operationen zählen)
Wie viele Operationen benötigt man zum Aufstellen der Householdermatrix? Gehen Sie so sparsam wie möglich vor.

Aufgabe 72 (Cholesky)
Man berechne die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 45 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 73 (Cholesky)
Man berechne die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 74 (Cholesky)
Man berechne die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 75
Finde eine LR-Zerlegung zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 12 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

und löse damit $Ax = b$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 68 & 4 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

Aufgabe 76
Berechnen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 77 (LR-zerlegung)
Für welche $\beta \in \mathbb{R}$ existiert eine LR-Zerlegung von A_β ohne Pivotisierung?

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 8 & 6 & -14 \\ 3 & 0 & \beta & -15 \\ -4 & -14 & -15 & 30 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 78
Wir betrachten das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}$$

a) Man erstelle eine LR-Zerlegung von A.

b) Man löse das LGS mithilfe der Zerlegung.

Aufgabe 79
Zeigen Sie, dass jede positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist.

Aufgabe 80
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

Diskutieren Sie, welche Fehler entstehen können, wenn man die Ableitung $f'(x)$ numerisch mithilfe des einseitigen (Vorwärts-) Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

näherungsweise berechnet, und für welche Werte von h diese Fehler den Gesamtfehler dominieren.

Beschreiben Sie anschließend, wie man mithilfe von Extrapolation des zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

fehlerkontrolliert die Ableitung $f'(x)$ an einer Stelle x approximieren kann.