1	2	3	4	Σ

Aufgabe 11.1 4 Punkte

[1+1.5+1.5 Punkte]

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine schwach konvergente Folge mit $x_n \rightharpoonup x$. Zeigen Sie, dass $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Korollar 3.16. *Sind $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Vektorraum und $(F_k)_k$ eine Folge beschränkter linearer Operatoren von V nach Y derart, dass $F(v) := \lim_{k\to\infty} F_k(v)$ für alle $v \in V$ existiert. Dann ist $F \in \mathcal{L}(V, Y)$ und*

$$\|F\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|F_k\|.$$

Nach VL ist X' ein Banachraum und K ein normierter VR über sich sebst. Wir betrachten die Einbettung der x_n in den Bidualraum X'', j_n = i(x_n). Dann gilt aufgrund der schwachen Konvergenz für beliebiges phi in X':

lim j_n(phi) = lim phi(x_n) = phi(x) =: j_infty(phi), wobei j_infty = i(x) \in X''

Nach Korollar 3.16 gilt also

$$\|j_\infty\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|j_n\|$$

Weil i: X -> X'' nach VL eine Isometrie ist, gilt insbesondere ||x|| <= lim inf ||x_n||, was zu zeigen war.

Es sei nun $A \subset X$ eine abgeschlossen und konvexe Menge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

b) A ist **schwach folgenabgeschlossen**, d.h. für jede in X schwach konvergente Folge $x_k \rightharpoonup x$ mit $x_k \in A$ ist auch $x \in A$.

Angenommen, x liegt in X\A. Dann folgt nach Satz 3.47 die Existenz eines phi \in X' mit Re phi(x_k) <= 1 für alle k, aber Re phi(x) > 1. Schwache Konvergenz bedeutet aber, dass auch für dieses phi bereits lim phi(x_k) = phi(x) gelten muss. Insbesondere folgt aus Re phi(x_k) <= 1 auch Re phi(x) <= 1, Widerspruch.

c) Sei nun $(X, \|\cdot\|)$ ein reflexiver Banachraum und zusätzlich A nicht-leer. Dann gibt es zu jedem $x \in X$ ein $y \in A$ mit

$$\|x - y\| = \inf_{a\in A} \|x - a\|.$$

Sei (a_n)_n, a_n \in A \forall n eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} \|x - a_n\| = \inf_{a\in A} \|x-a\|$.

Sei phi \in X' und epsilon > 0. Wähle N \in \N so, dass für alle n > N gilt: ||x - a_n|| < 1/(2 ||phi|| + 1) * epsilon. Dann folgt für n,m >N:

$$|\phi(a_n) - \phi(a_m)| = |\phi(a_n) - \phi(x) + \phi(x) - \phi(a_m)|$$

$$= |\phi(a_n - x) + \phi(x - a_m)| < |\phi(x-a_n)| + |\phi(x-a_m)| \leq \|\phi\| (\|x-a_n\| + \|x-a_m\|)$$

$$< \|\phi\| \left(\frac{\varepsilon}{2\|\phi\|+1} + \frac{\varepsilon}{2\|\phi\|+1}\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Insbesondere ist a_n eine schwache Cauchyfolge. Da X reflexiv ist, folgern wir mit Satz 4.23, dass a_n schwach gegen ein y \in X konvergiert. Mit Teilaufgabe (b) muss aber bereits y \in A gelten.

Aufgabe 11.2 4 Punkte

[1+1+2 Punkte]

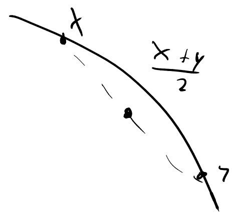
Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt **gleichmäßig konvex**, falls es für jedes $\varepsilon \in (0, 2)$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\|x\| = \|y\| = 1 \text{ und } \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta \quad \Rightarrow \quad \|x - y\| < \varepsilon.$$

(a) Zeigen Sie, dass Prähilberträume $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gleichmäßig konvex sind.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon^2}{8}$

Seien $x, y \in X$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$ und $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta$.



$$(1-\delta)^2 < \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \left\langle \frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2} \right\rangle = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\langle x, x\rangle}_{=\|x\|^2=1} + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \underbrace{\langle y, y\rangle}_{=\|y\|^2=1}\Big)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2\delta + \delta^2 < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\big(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle\big) \qquad | \cdot 4$$

$$\Rightarrow \quad 2 - 8\delta < \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \leq 2 \qquad (*)$$

$$\langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \big(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle\big) = 2 - \big(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle\big)$$

$(*)$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \langle x-y, x-y\rangle = \|x-y\|^2 < 8\delta = \varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \quad \|x-y\| < \varepsilon$$

☒

(b) Zeigen Sie, dass der Raum $(\ell_\infty^{\mathbb{K}}, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ nicht gleichmäßig konvex ist.

Betrachte die Folgen
- (x_n)_n mit x_0 = 1, x_1 = 1, x_i = 0 für alle i > 1 und
- (y_n)_n mit y_0 = 1, y_i = 0 für alle i > 0.

Es gilt ||x|| = sup x_n = 1 und ||y|| = sup y_n = 1. Außerdem gilt ||(x + y)/2|| = ||(1, 0.5, 0, 0, ...)|| = 1 > 1 - delta für beliebiges delta>0. Dennoch ist ||x - y|| = ||(0, 1, 0, ...)|| = 1. Für alle 0 < epsilon < 1 existiert also kein delta > 0 mit der geforderten Eigenschaft. Daher kann der Raum nicht gleichmäßig konvex sein.

(c) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum und $x, x_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Aussagen

(i) $x_n \to x$ in X für $n \to \infty$.

(ii) $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$ für $n \to \infty$.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

- $\lim \phi(x_n) \overset{\phi \text{ stetig}}{=} \phi(\lim x_n) = \phi(x) \quad \forall \phi \in X' \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$
- $\lim \|x_n\| \overset{\|\cdot\| \text{ stetig}}{=} \|\lim x_n\| = \|x\|$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

$\phi(x_n) \to \phi(x) \quad \forall \phi \in X'$

$\|x\|=1, \|y\|=1, \quad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1-\delta \Rightarrow \|x-y\| < \varepsilon$

$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1, \quad \left\|\frac{\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{x}{\|x\|}}{2}\right\| > 1-\delta \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$

?

$\left\|\frac{x_n + x}{\|x_n + x\|}\right\| > 1-\delta'$

z.z. $\quad \forall \delta \; \exists n: \quad \frac{x_n + x}{\|x_n + x\|} > 1-\delta$

Aufgabe 11.3 4 Punkte

[2.5 +1.5 Punkte]

Es sei $1 < p < \infty$.

(a) Sei $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\psi \subset B_1(0)$ und $\|\psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 1$ (Hierbei bezeichnet $\operatorname{supp}\psi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) \neq 0\}}$ den Träger der Funktion ψ). Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$

$$f_k : B_1(0) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto k^{n/p}\psi(kx).$$

Zeigen Sie, dass $\|f_k\|_{L_p(B_1(0))} = \|\psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = 1$, $f_k(x) \to 0$ für $x \neq 0$ und $f_k \rightharpoonup 0$ in $L_p(B_1(0))$ für $k \to \infty$.

Bitte wenden!

$$\int_{B_1(0)} \| f_k(x)\|^p d^n x = \int_{B_1(0)} k^n \|\psi(kx)\|^p d^n x \overset{\text{Substitution}}{=} \int_{B_k(0)} \|\psi(x)\|^p d^n x \overset{\operatorname{supp}\psi \subset B_1(0)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \|\psi(x)\|^p d^n x = \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 1$$

$\forall x \neq 0 \; \exists k_x \in \mathbb{N}$ $k_x x > 1$. Es gilt $\forall k > k_x$: $f_k(x) = k^{n/p} \psi(kx) \overset{\substack{\forall x: \|x\|>1 \\ \psi(x)=0}}{=} 0$,

d.h. $f_k(x) \longrightarrow 0 \; \forall x \neq 0$.

z.z.: $\forall \varphi \in L_p'(B_1(0))$ gilt $\varphi(f_k) \longrightarrow \varphi(0) = 0$.

Nach VL gilt $L_p'(B_1(0)) = L_{p'}(B_1(0))$ und es genügt zu zeigen:

$\forall \varphi \in L_{p'}(B_1(0))$:

$$\int_{B_1(0)} (\varphi(x))^* f_k(x) \, d^n x \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

$$= \int_{B^1(0)} \varphi^*(x) \, k^{n/p} \psi(kx) \, d^n x$$

Substitution

$$= \int_{B^k(0)} k^{\frac{n}{p}-n} \varphi^*\left(\tfrac{x}{k}\right) \psi(x) \quad d^n x$$

$$= k^{-n(1-\frac{1}{p})} \int_{B^1(0)} \varphi^*\left(\tfrac{x}{k}\right) \psi(x) \quad d^n x$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} k^{\overbrace{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)}^{=1/p'}} \left(\int_{B^n(0)} \left| \varphi * \left(\frac{x}{k}\right) \right|^{p'} d^n x \right)^{1/p'} \cdot \|\psi\|^{1/p}_{L^p(B^n(0))}$$

$$= \left(\int_{B^n(0)} k^{-n} \left| \varphi * \left(\frac{x}{k}\right) \right|^{p'} d^n x \right)^{1/p'}$$

$$\overset{\text{Substitution}}{=} \left(\int_{B^{1/k}(0)} \left| \varphi^*(x) \right|^{p'} d^n x \right)^{1/p'}$$

Da bei gleichbleibendem Integranden der Integrationsbereich für k -> infty gegen die Nullmenge {0} konvergiert, ist der Grenzwert 0, was zu zeigen war.

(b) Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $\mu > 0$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ-periodisch, d.h. $h(x+\mu) = h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\|h\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} < \infty$. Wir definieren $g_k(x) = h(kx)$. Zeigen Sie, dass $\|g_k\|_{L_p(\Omega)} \leq \|h\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$ und

$$g_k \rightharpoonup \overline{h} := \frac{1}{\mu} \int_0^\mu h \, d\lambda \qquad \text{in} \quad L_p(\Omega).$$

Hinweis. Betrachten Sie zunächst $\overline{h} = 0$ und verwenden Sie, dass Treppenfunktionen dicht liegen in $L_p(\Omega)$.

$$\|g_k\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_0^1 |g_k(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|1\|_1^{1/p} \, \|g_k^p(x)\|^{1/p}_{L^\infty(\Omega)} = \left(\sup_{x \in (0,1)} g_k^p(x) \right)^{1/p}$$

$$\overset{\text{Stetigkeit } (\,)^p}{=} \sup_{x \in (0,1)} h(kx) = \sup_{x \in (0,k)} h(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} h(x) = \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)}$$

Z.z.: $g_k \longrightarrow \overline{h}$, d.h. $\forall\, \varphi \in L_p'(\Omega) = L_{p'}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \varphi(x)\, g_k(x)\, dx \xrightarrow{k \to \infty} \int_\Omega \varphi(x)\, \overline{h}(x)\, dx = \overline{h} \cdot \int_\Omega \varphi(x) dx$$

Sei zunächst $\overline{h} = 0$, d.h. $\int_0^\mu h(x)\, dx = 0$ und φ eine Treppenfunktion.

$$\int_0^1 \underbrace{\varphi(x)}_{\overset{\text{Treppenfunktion}}{=\sum_{n=0}^{N} c_n \mathbb{1}_{A_n}}} h(kx)\,dx = \sum_{n=0}^{N} \int_{A_n} c_n h(kx)\,dx$$

OE A_n Intervalle (a_n, b_n) $\qquad n < \mu$

$$\int_{a_n}^{b_n} h(kx)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ka_n}^{kb_n} h(x)\,dx = \frac{1}{k}\cdot\int_{ka_n}^{ka_n + n\cdot\mu + R} h(x)\,dx$$

$$\overset{\overline{h}=0}{=} \frac{1}{k}\int_{ka_n}^{ka_n+R} h(x)\,dx = \int_{a_n}^{a_n+\frac{R}{k}} h(kx)\,dx \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\int_0^1 \varphi(x)h(kx)\,dx = \sum_{n=0}^{N} c_n \lim_{k\to\infty}\int_{A_n} h(kx)\,dx = 0$$

Da die Treppenfunktionen dicht liegen in L_p'(Omega), folgt die Gleichung für alle Testfunktionen (siehe z.B. typische Beweise in Ana3, die Aussage gilt für alle Treppenfunktionen => die Aussage gilt für alle messbaren Funktionen).

Wir haben die gewünschte Aussage für \overline h = 0 gezeigt. Da die Summe zweier schwach konvergenter Folgen gegen die Summe ihrer schwachen Grenzwerte konvergiert, können wir also stets eine Funktion h' mit Mittelwert 0 zu h addieren, ohne dass sich am Grenzwert etwas ändert. Durch geschickte Wahl können wir h + h' = const erreichen.
Für konstantes h gilt aber sogar, dass g_k = h = 1/mu * int_0^mu h(x) dx. Gleichheit impliziert natürlich schwache Konvergenz, also sind wir fertig mit dem Beweis.

Aufgabe 11.4 4 Punkte

[1.5+1+0.5+1 Punkte]
Seien X, Y ein Banachräume. Dann gilt

a) Ist $\Phi : X \to Y$ ein Isomorphismus, dann ist X reflexiv genau dann wenn Y reflexiv ist.

Ein Banachraum X ist genau dann reflexiv, wenn die kanonische Inklusion i: X -> X'' surjektiv ist.
Sei X reflexiv. Wir erhalten folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "i_X"', "\wr"] & Y \arrow[d, hook, "i_Y"] \\ X'' \arrow[r, "\exists! F"'] & Y'' \end{tikzcd}$$

F ist gegeben als die entsprechende Verkettung der anderen drei Abbildungen im Diagramm und ist als Verkettung injektiver Abbildungen selbst wieder injektiv. Es genügt zu zeigen, dass F surjektiv ist. Dann können wir aus dem Diagramm zu jedem Element aus Y'' durch Verkettung von F^(-1) \circ i_X^(-1) und Phi ein Urbild unter i_Y konstruieren => i_Y ist surjektiv => Y ist reflexiv.

$$\phi : X \longrightarrow Y$$
$$\phi' : Y' \longrightarrow X'$$
$$f \longmapsto f \circ \phi$$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr] \arrow[dr, "\phi"'] & & \mathbb{K} \\ & X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Phi' ist bijektiv, da durch (Phi^-1)' eine Umkehrabbildung gegeben ist, wie man durch Einsetzen der Definition leicht sieht.
Außerdem folgt wegen

$$\|f \circ \phi\| \leq \|f\| \cdot \|\phi\|$$

sofort auch die Beschränktheit und damit Stetigkeit von phi' aus der Stetigkeit von phi (analog für die Umkehrabbildung).
Insbesondere ist also auch phi' ein Isomorphismus von Banachräumen.
Zweifaches Anwenden dieser Argumentation liefert uns die Existenz eines Isomorphismus Phi'': X'' -> Y''.
Wir wollen nun noch zeigen, dass F = Phi''. Dazu rechnen wir nach, dass obiges Diagram auch für Phi'' statt F kommutiert.
Sei x in X und f in Y'. Dann gilt

Phi''(i_X(x))(f) = [i_X(x)](Phi'(f)) = [Phi'(f)](x) = f(Phi(x)) = [i_Y(Phi(x))](f).

Wir folgern also Phi'' \circ i_X = i_Y \circ Phi, somit ist F = Phi'' und insbesondere surjektiv.

Wir haben nun "X reflexiv => Y reflexiv" gezeigt, die Rückrichtung zeigt man natürlich vollkommen analog.

b) X ist reflexiv $\Rightarrow$ X' ist reflexiv.

Sei $\varphi \in X'''$. z.z. $\exists\, \phi \in X'$ mit $\iota_{X'}(\phi) = \varphi$.

Setze $\phi(x) := \varphi(\iota_X(x))$. Sei nun $y \in X''$

Dann existiert $x \in X$ mit $\iota_X(x) = y$. Es gilt

$$\varphi(y) = \varphi(\iota_X(x)) = \phi(x) = y(\phi).$$

Da $y \in X''$ beliebig war, lässt sich φ wirklich durch ϕ darstellen $\iota_{X'}(\phi) = \varphi$.

Daher ist $\iota_{X'}$ surjektiv und somit X' reflexiv.

c) X' ist reflexiv $\Rightarrow$ X ist reflexiv.

Hinweis: Sie können ohne Beweis annehmen, dass abgeschlossene Teilräume eines reflexiven Banachraums selbst reflexiv sind (siehe Schritt (III) im Beweis von Satz 4.23).

X' reflexiv $\overset{(b)}{\Longrightarrow}$ X'' reflexiv.

$X \overset{\iota_X}{\hookrightarrow} X''$ ist ein Teilraum. Wegen $\|\iota_X(x)\| = \|x\|$ ist ι_X beschränkt von unten mit $c = 1$. Nach Aufgabe 8.2 ist daher $\operatorname{im}(\iota_X) \subset X''$ ein abgeschlossener Teilraum eines reflexiven Banachraums und damit selbst reflexiv.

d) X ist reflexiv und separabel $\Leftrightarrow$ X' ist reflexiv und separabel.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 9.3.

"$\Leftarrow$" X' ist reflexiv => X ist reflexiv nach (c). X' separabel => X separabel nach 9.3

"$\Rightarrow$" X ist reflexiv => X' ist reflexiv. X ist reflexiv => i_X ist ein isometrischer Isomorphismus.
Sei also B eine abzählbare Teilmenge von X mit closure(B) = X.
Dann ist i_X(B) eine abzählbare Teilmenge von X''.
Sei y in X'' mit i_X(x) = y. Dann existiert eine Folge x_n mit Grenzwert x in X und x_n in B.
i_X(x_n) liegt in i_X(B). Der Grenzwert ist aufgrund der Stetigkeit gegeben durch
lim i_X(x_n) = i_X(x) = y. Somit ist closure(B) = X''. Insbesondere ist also auch X'' separabel.
Mit Aufgabe 9.3 folgt daraus, dass X' separabel ist.