# Übungsblatt 8

Abgabetermin: 14.06.2017, 17:00 Uhr.

**Aufgabe 1** *(2+2+1 = 5 Punkte)*

Sei $(V, \gamma)$ ein unitärer Raum.

a) Sei $f$ ein normaler Operator auf $(V, \gamma)$ mit $f^4 = f^3$. Zeigen Sie: $f$ ist selbstadjungiert und $f^2 = f$.

b) Sei $f$ ein normaler Operator auf $(V, \gamma)$. Zeigen Sie: Es existiert ein Polynom $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ so dass $f^{\mathsf{ad}} = p(f)$ gilt.

c) Sei $f$ ein linearer, diagonalisierbarer Endomorphismus von $V$. Zeigen Sie: Es existiert ein Skalarprodukt $\gamma'$ auf $V$ so dass $f$ ein normaler Operator auf dem unitären Raum $(V, \gamma')$ ist.

**Aufgabe 2** *(2+2 = 4 Punkte)*

Sei $n \in \mathbb{N}$.

a) Sei $A \in U(n)$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie: $A$ ist eine Diagonalmatrix.

b) Sei $(A^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unitären $n \times n$ Matrizen, so dass der komponentenweise Grenzwert $A^{(\infty)} = (\lim_{k\to\infty} A^{(k)}_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ existiert. Zeigen Sie: $A^{(\infty)} \in U(n)$.

(Hinweis: Sie dürfen die üblichen Eigenschaften stetiger Abbildungen ohne Beweis benutzen, z.B. dass die Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig ist.)

**Aufgabe 3** *(2+1+1 = 4 Punkte)*

Sei $R$ ein kommutativer Ring, $R[X] = \{\sum_{i=0}^{n} a_i X^i | n \in \mathbb{N}_0, a_i \in R\}$ der Polynomring über $R$ und $\mathrm{grad} : R[X] \to \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ die Gradabbildung, definiert durch $\mathrm{grad}(0) = -\infty$ und $\mathrm{grad}(f) = \max\{i | a_i \neq 0\}$ für $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \neq 0$.

a) Zeigen Sie: Es gilt $\mathrm{grad}(f + g) \leq \max(\mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g))$ und, falls $R$ nullteilerfrei ist, so gilt $\mathrm{grad}(f \cdot g) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$. Folgern Sie, dass $R[X]$ nullteilerfrei ist, falls $R$ nullteilerfrei ist.

b) Sei $R$ nullteilerfrei, dann gilt $R[X]^* = R^*$.

c) Sei $t \in R$. Zeigen Sie: Die Menge $P_r = \{f \in R[X] | f(t) = r\}$ ist ein Ideal genau dann, wenn $r = 0$. Die Menge $G_n = \mathrm{grad}^{-1}(n)$ ist ein Ideal genau dann wenn $n = -\infty$.

Bitte wenden

**Aufgabe 4** *(2+2+2* = 4 Punkte)*

Wir betrachten $R = \{x + y\sqrt{-3} | x, y \in \mathbb{Z}\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$, wobei wir $\sqrt{-3}$ als $i \cdot \sqrt{3} \in \mathbb{C}$ auffassen.

a) Zeigen Sie, dass $R$ mit der von $\mathbb{C}$ vererbten Multiplikation und Addition einen kommutativen Ring bildet.

b) Zeigen Sie: 4 und $2 \cdot (1 + \sqrt{-3})$ besitzen keinen größten gemeinsamen Teiler in $R$.

c) (2 Bonuspunkte) Zeigen Sie: In dem Quotientenring $S = \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3, X_4]/(X_1X_2 - X_3X_4)$ besitzen die Elemente $X_1X_2$ und $X_1X_3$ keinen größten gemeinsamen Teiler. (Sie müssen nicht nachprüfen, dass $S$ ein Integritätsring ist.)