Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2022

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. K. Hübner
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 9
Abgabe: *Freitag, 24.06.2022, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Galoiskohomologie). **(4 Punkte)**
Sei $K := \mathbb{Q}_3(\zeta_{12})$ für eine primitive zwölfte Einheitswurzel ζ_{12} und K^{nr} die maximale unverzweigte Erweiterung von K. Weiter sei $G := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K)$ und $\mu_8 \subseteq K^{\mathrm{nr}}$ die Gruppe der achten Einheitswurzeln. Wir betrachten μ_8 als G-Modul mit der von $(K^{\mathrm{nr}})^\times$ eingeschränkten G-Wirkung. Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus $\mathrm{H}^1(G,\mu_8) \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ existiert.

Aufgabe 2 (Zwischenkörper und Normuntergruppen). **(5 Punkte)**
Seien $K = \mathbb{Q}_3$ und $M = \mathbb{Q}_3(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

(a) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Erweiterung M/K. Welche Erweiterungen sind un-, rein, zahm, und wild verzweigt?

(b) Bestimmen Sie für jeden Zwischenkörper L/K von M/K die Untergruppe $\mathrm{N}_{L/K}(L^\times)$ von $K^\times$.

Aufgabe 3 (Brauergruppe endlicher Körper). **(3 Punkte)**
Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie:

(a) Die Brauergruppe $\mathrm{Br}(K)$ ist trivial.

(b) Für jede endliche Körpererweiterung L/K mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ ist $\hat{\mathrm{H}}^0(G,L^\times) = 0$ und die Normabbildung $\mathrm{N}_{L/K}\colon L^\times \to K^\times$ ist surjektiv.

Aufgabe 4 (Das Galois-Symbol). **(6 Punkte)**
Sei K ein Körper, K^{sep} ein separabler Abschluss und $G_K = \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ die absolute Galoisgruppe. Ferner bezeichne $\mu_n \subset K^{\mathrm{sep}}$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Nach Vorlesung existiert ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $\delta\colon K^\times \to \mathrm{H}^1(G_K,\mu_n)$ mit Kern $(K^\times)^n$. Zeigen Sie:

(a) Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass die beiden Diagramme

$$\begin{tikzcd} K^\times \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\text{Inkl.}"'] & \mathrm{H}^1(G_K,\mu_n) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ L^\times \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1(G_L,\mu_n) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L^\times \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{N}_{L/K}"'] & \mathrm{H}^1(G_L,\mu_n) \arrow[d, "\mathrm{cor}"] \\ K^\times \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^1(G_K,\mu_n) \end{tikzcd}$$

kommutieren. *Hinweis:* Betrachten Sie die exakte Folge $1 \to \mu_n \to (K^{\mathrm{sep}})^\times \xrightarrow{(-)^n} (K^{\mathrm{sep}})^\times \to 1$.

(b) Vermöge des Cup-Produkts erhalten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Gruppenhomomorphismus

$$\delta^k\colon (K^\times)^{\otimes k} \to \mathrm{H}^k(G_K,\mu_n^{\otimes k}).$$

(c) Für $x \in K^\times \setminus \{1\}$ ist $\delta^2(x \otimes 1-x) = 0$. *Hinweis:* Zerlegen Sie das Polynom $f = t^n - x$ in $K[t]$ in irreduzible Faktoren und betrachten Sie die induzierte Zerlegung von $f(1) = 1-x$.

(d) Seien $x_1,\dots,x_k \in K^\times$ derart, dass $x_i + x_j = 1$ für irgendwelche $i \neq j$. Dann ist $\delta^k(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = 0$. *Hinweis:* Reduzieren Sie auf den Fall $k = 2$.