

# Funktionalanalysis

Jan Fuhrmann

Wintersemester 2023/24



<b>1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume</b>	<b>7</b>
1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften . . . . .	8
1.2. Vollständigkeit und Kompaktheit . . . . .	16
<b>2. Hilberträume und die Sätze von Riesz</b>	<b>29</b>
2.1. Skalarprodukte und Hilberträume . . . . .	29
2.2. Orthogonale Projektionen, erster Satz von Riesz . . . . .	34
2.3. Stetige lineare Funktionale, zweiter Satz von Riesz . . . . .	42
2.4. Fourierentwicklung in Hilberträumen . . . . .	47
<b>3. Funktionalanalytische Grundprinzipien</b>	<b>59</b>
3.1. Lineare Operatoren . . . . .	59
3.2. Der Satz von Baire . . . . .	66
3.3. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit . . . . .	70
3.4. Offene Abbildungen, abgeschlossene Graphen . . . . .	79
3.5. Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach . . . . .	85
<b>4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen</b>	<b>99</b>
4.1. Selbstadjungierte und unitäre Operatoren . . . . .	100
4.2. Projektionen . . . . .	107
4.3. Schwache Konvergenz . . . . .	109
4.4. Anwendung: Elliptische Randwertprobleme . . . . .	115
<b>5. Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Operatoren</b>	<b>127</b>
5.1. Kompakte und vollstetige Operatoren . . . . .	127
5.2. Spektrum und Resolvente beschränkter linearer Operatoren . . . . .	132
<b>A. Das Lebesgue-Integral</b>	<b>145</b>

## **Literatur:**

### **Zu den Themen unseres Kurses**

Prinzipiell können Sie jedes Lehrbuch zur (linearen) Funktionalanalysis begleitend zur Vorlesung konsultieren. Die folgende Liste enthält eine Auswahl von Büchern, die ich selbst mehr oder weniger regelmäßig nutze.

- W. Alt, Lineare Funktionalanalysis, 6. Auflage, Springer (2012)  
(online verfügbar via Uni-Bibliothek, auch englisch: “Linear Functional Analysis”)
- H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer (2011)
- J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, 2nd edition, Springer (2007)
- M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis, Academic Press (1972)
- F. Riesz, B. Sz.-Nagy, Vorlesungen über Funktionalanalysis, 4. Auflage, Harri Deutsch (1982)  
(auch englisch “Functional Analysis”, französisch “Leçons d’analyse fonctionnelle”)
- D. Werner, Funktionalanalysis, 8. Auflage, Springer (2018)  
(online verfügbar via Uni-Bibliothek)
- E. Zeidler, Applied Functional Analysis – Applications to Mathematical Physics, Springer (1995)
- E. Zeidler, Applied Functional Analysis – Main Principles and Their Applications, Springer (1995)

### **Zum Nachschlagen von Vorkenntnissen**

Zum Nachschlagen, Wiederholen oder Vertiefen der benötigten Vorkenntnisse können Sie auf eine riesige Auswahl von Lehrbüchern der Analysis und (linearen) Algebra zurück greifen. Die hier aufgeführten begleiten mich (ggf. in anderen Auflagen) zuverlässig seit meinem eigenen Studium.

- M. Artin, Algebra, Springer (1993)  
(Vektorräume und lineare Abbildungen)
- K. Königsberger, Analysis 2, 5. Auflage (2004)  
(Metrische und topologische Räume, Lebesgue-Integral)
- W. Rudin, Analysis, 5. Auflage, De Gruyter Oldenbourg (2022)  
(Metrische und topologische Räume, Lebesgue-Integral)

**Notation:**

Viele unserer Aussagen gelten für reelle ebenso wie für komplexe Vektorräume, und wir bezeichnen mit  $\mathbb{K}$  stets einen der Körper  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

Für reelle Zahlen  $a, b$  bezeichnen  $a \wedge b$  das Minimum und  $a \vee b$  das Maximum von  $a$  und  $b$ . Diese Schreibweise erweist sich insbesondere für reellwertige Funktionen als nützlich, indem etwa  $f \wedge g$  als punktweises Minimum von  $f$  und  $g$  gelesen wird.

Für eine Abbildung  $f : V \rightarrow W$  zwischen Vektorräumen  $V$  und  $W$  bezeichnen wir mit  $\ker f = \{v \in V : f(v) = 0_W\}$  den Kern und mit  $\operatorname{im} f = \{f(v) : v \in V\}$  das Bild von  $f$ . Letzteres ergibt natürlich auch für Abbildungen zwischen allgemeinen Mengen Sinn.

Mit  $(v_n)_n$  werden wir stets Folgen von Elementen  $v_n$  einer gegebenen Menge  $V$  bezeichnen. Es handelt sich also einfach um eine Kurzschreibweise für  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n=1}^\infty = (v_1, v_2, \dots)$ .

Für eine beliebige Teilmenge  $A$  einer gegebenen Grundmenge  $\Omega$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  die durch

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

gegebene Indikatorfunktion<sup>1</sup>.

Sind  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $v \in V$ ,  $A \subset V$  und  $\alpha \in K$ , so schreiben wir

$$v + A := \{v + w : w \in A\}, \quad \alpha A := \{\alpha w : w \in A\}$$

für die Translation von  $A$  um  $v$  bzw. die Multiplikation von  $A$  mit  $\alpha$ .

Ferner bezeichnen wir mit  $0_V$  den Nullvektor im Vektorraum  $V$ , lassen das Subskript  $V$  aber auch gelegentlich weg, wenn aus dem Kontext klar ist, welches Nullelement gemeint ist.

Ist  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $A \subset V$  eine nicht leere Teilmenge, so bezeichnen wir mit

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, v_1, \dots, v_n \in A \right\}$$

die lineare Hülle von  $A$ . Man beachte, dass nur endliche Linearkombinationen von Elementen von  $A$  zugelassen sind.

---

<sup>1</sup>In der Analysis finden Sie dafür oft auch die Bezeichnung charakteristische Funktion unter dem Namen  $\chi_A$ .



---

## Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

---

In dieser Vorlesung befassen wir uns mit linearer Funktionalanalysis, also vor allem mit linearen Räumen und Abbildungen zwischen diesen. Aus der Analysis 2 wissen wir, dass lineare Abbildungen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  bzw.  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  notwendigerweise bezüglich der euklidischen Topologie stetig und sogar unter jeder Norm (beliebig oft) differenzierbar sind. Im Kern werden wir uns mit der Verallgemeinerung dieser Beobachtung auf den unendlichdimensionalen Fall beschäftigen, werden aber schnell sehen, dass bereits die Stetigkeit nicht mehr notwendigerweise garantiert ist. Auch andere uns bekannte Aussagen lassen sich nicht direkt verallgemeinern. Folgende aus dem endlichdimensionalen Fall bekannte Aussagen werden wir genauer untersuchen müssen:

- Auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  erzeugen alle Normen die gleiche Topologie.
- In einem endlichdimensionalen normierten Vektorraum sind abgeschlossene und beschränkte Mengen kompakt<sup>1</sup>. Insbesondere sind abgeschlossene Einheitskugeln kompakt.
- Lineare Unterräume eines endlichdimensionalen normierten Vektorraums sind abgeschlossen (bzgl. der von der Norm erzeugten Topologie).
- Eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  ist genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist. Genauer gilt für lineare Abbildungen  $f : V \rightarrow V$  die Dimensionsformel

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}}(\ker f) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{im} f).$$

---

<sup>1</sup>Für die euklidischen  $n$ -dimensionalen Räume  $\mathbb{K}^n$  ist das der Satz von Heine-Borel. Nach dem vorherigen Punkt gilt das dann auch unter allen Normen auf  $\mathbb{K}^n$ .

## 1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

In gewissem Sinn mag das zwar noch richtig sein, wenn wir auf beiden Seiten  $\infty$  als Wert zulassen, aber die Aussagekraft für einen der Summanden auf der rechten Seite ist recht gering, wenn der andere Summand und die linke Seite unendlich sind.

### 1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

Wir beginnen mit einer Erinnerung an das Konzept normierter linearer Räume. Dabei handelt es sich um eine spezielle Klasse metrischer Räume, die Sie in der Analysis 2 kennen gelernt haben. Diese wiederum hatten wir als spezielle topologische Räume identifiziert. Viele der hier angegebenen Definitionen und Aussagen sollten Ihnen also bekannt vorkommen. Falls das nicht der Fall ist, können Sie gern in den einschlägigen Lehrbüchern zur Analysis 2 oder elementarer Topologie nachschlagen.

**Definition 1.1.** Ein *normierter linearer Raum* (oder *normierter Vektorraum*) ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  zusammen mit einer Norm  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  derart, dass für alle  $v, w \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$

$$(i) \quad v = 0_V \iff \|v\| = 0 \quad (\text{Definitheit})$$

$$(ii) \quad \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| \quad (\text{Homogenität})$$

$$(iii) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

gelten.

Da Normen nur auf Vektorräumen Sinn ergeben (wir brauchen die Addition in  $V$  inklusive der Null und die Multiplikation mit Skalaren), sprechen wir manchmal kurz von normierten Räumen und wissen dann sofort, dass es sich um normierte *lineare* Räume handeln muss.

**Bemerkung.** In der Analysis 2 haben wir gelernt, dass jeder normierte lineare Raum  $(V, \|\cdot\|)$  vermöge

$$d(v, w) = \|v - w\|, \quad v, w \in V,$$

auch ein metrischer Raum ist. Umgekehrt hatten wir aber gesehen, dass auf jeder nicht leeren Menge etwa die diskrete Metrik definiert werden konnte, auch wenn gar keine lineare Struktur vorlag.

**Bemerkung.** Ist in Punkt (i) nur die Implikation  $v = 0 \implies \|v\| = 0$  erfüllt, kann  $\|v\|$  also auch für nicht triviale Vektoren verschwinden, so heißt  $\|\cdot\|$  eine Halbnorm (oder Seminorm). Die Menge  $N = \{v \in V : \|v\| = 0\}$  ist dann wegen der Homogenität und der Dreiecksungleichung ein Vektorraum, und wir erhalten durch Faktorisierung einen Vektorraum  $V/N$ , auf dem  $\|\cdot\|$  zu einer Norm wird<sup>2</sup>. Sie kennen diese Konstruktion aus der Maßtheorie von der Konstruktion der Räume  $L_p(\mu)$ .

<sup>2</sup>Genauer ist für jede Restklasse  $v + N$  durch  $\|v + N\| = \inf_{w \in N} \|v + w\|_V$  eine Norm definiert.



## 1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

Die üblichen Verdächtigen  $\mathbb{K}^n$  zusammen mit den  $p$ -Normen

$$\|v\|_p = \begin{cases} (\sum_{k=1}^n |v_k|^p)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p \in [1, \infty), \\ \max_{k=1, \dots, n} |v_k| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

kennen wir schon. Das verallgemeinern wir schnell auf die natürlichen unendlichdimensionalen Versionen.

**Beispiel 1.** Mit  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  bezeichnen wir den Vektorraum der  $\mathbb{K}$ -wertigen Zahlenfolgen  $v = (v_k)_{k \geq 1}$ . Wir sehen sofort, dass  $\mathbb{K}^n$  mit dem linearen Unterraum der spätestens nach  $n$  Gliedern abbrechenden Folgen identifizierbar ist. Jedes  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$  liefert nämlich eine eindeutige Folge  $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ :

$$v_k = \begin{cases} x_k & \text{für } k = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{für } k > n. \end{cases}$$

Dass Summen und skalare Vielfache solcher abbrechenden Folgen wieder spätestens bei  $n$  abbrechen, ist offensichtlich, also handelt es sich tatsächlich um einen linearen Unterraum.

Auf  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  definieren wir analog zu den bekannten  $p$ -Normen

$$\|v\|_p := \begin{cases} (\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^p)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p \in [1, \infty), \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} |v_k| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

und stellen sofort fest, dass wir im allgemeinen nicht davon ausgehen können, dass  $\|v\|_p \in [0, \infty)$  gilt, wie es sich für eine Norm gehört. Das führt uns zur Definition der Räume der zur  $p$ -ten Potenz (absolut) summierbaren (bzw. im Fall  $p = \infty$ : der beschränkten) Folgen:

$$\ell_p^{\mathbb{K}} := \left\{ v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|v\|_p < \infty \right\}.$$

Versehen mit  $\|\cdot\|_p$  wird  $\ell_p^{\mathbb{K}}$  zu einem normierten Vektorraum. Wir rechnen das für den Fall  $p = \infty$  nach, für  $p < \infty$  können Sie das als Übung unter Verwendung der Rechenregeln für absolut konvergente Reihen und einiger Eigenschaften der Potenzfunktionen selbst überprüfen.

Die Endlichkeit der Norm haben wir durch die Definition von  $\ell_{\infty}^{\mathbb{K}}$  erzwungen, die müssen wir also nicht mehr untersuchen.

Zunächst ist die triviale Folge  $0 \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  natürlich beschränkt, also ist  $0 \in \ell_{\infty}^{\mathbb{K}}$  (wir lassen das  $\mathbb{K}$  oft weg, wenn entweder klar oder unerheblich ist, welcher Körper gemeint ist), und es gilt  $\|0\|_{\infty} = \sup_k |0| = 0$ . Ist umgekehrt  $v \neq 0$ , so existiert ein  $k_0$  mit  $v_{k_0} \neq 0$ , und dann ist  $\|v\|_{\infty} \geq |v_{k_0}| > 0$ . Das zeigt die Definitheit.

Für  $v \in \ell_{\infty}^{\mathbb{K}}$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $|v_k| \leq \|v\|_{\infty}$ . Ist nun  $\alpha \in \mathbb{K}$ , so folgt  $|(\alpha v)_k| = |\alpha| |v_k| \leq |\alpha| \|v\|_{\infty}$ , also  $\|\alpha v\| \leq |\alpha| \|v\|_{\infty}$  und insbesondere  $\alpha v \in \ell^{\infty}$ . Umgekehrt führen wir die Annahme  $\|\alpha v\|_{\infty} < |\alpha| \|v\|_{\infty}$ , d.h.,  $\|\alpha v\|_{\infty} = |\alpha| \|v\|_{\infty} - \delta$  für ein  $\delta > 0$  zum Widerspruch.

## 1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

Wäre  $\alpha = 0$ , so stünde hier  $0 = 0 - \delta$ , was völlig unmöglich ist. Ist aber  $|\alpha| > 0$ , so fänden wir nach der Definition des Supremums ein  $k_0$  derart, dass

$$|v_{k_0}| \geq \|v\|_\infty - \frac{\delta}{2|\alpha|}, \quad \text{also } \|v\|_\infty \leq |v_{k_0}| + \frac{\delta}{2|\alpha|}$$

wäre. Damit berechnen wir nach unserer Annahme:

$$|\alpha||v_{k_0}| \leq |\alpha|\|v\|_\infty - \delta \leq |\alpha| \left( |v_{k_0}| + \frac{\delta}{2|\alpha|} \right) - \delta = |\alpha||v_{k_0}| - \frac{\delta}{2},$$

was auch ein Widerspruch ist. Damit haben wir auch die Homogenität gezeigt.

Zur Dreiecksungleichung stellen wir fest, dass für jedes  $k \in \mathbb{N}$

$$|(v+w)_k| = |v_k + w_k| \leq |v_k| + |w_k| \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty.$$

Nehmen wir das Supremum über alle  $k$ , so erhalten wir sofort die Dreiecksungleichung, die uns auch nochmal sichert, dass die Summe zweier beschränkter Folgen wieder beschränkt ist.

Wir haben also gezeigt, dass  $\ell_\infty$  tatsächlich ein Vektorraum ist und  $\|\cdot\|_\infty$  eine Norm darauf darstellt.

**Bemerkung.** Die Konstruktion der Räume  $\ell_p$  folgt einem allgemeinen Konzept. Ist auf einem Vektorraum  $V$  eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty]$  definiert, die bis auf die Endlichkeit alle Eigenschaften einer Norm hat, so nennen wir  $\|\cdot\|$  eine Quasinorm und stellen fest, dass wegen der Homogenität und der Dreiecksungleichung  $W = \{v \in V : \|v\| < \infty\}$  ein Untervektorraum von  $V$  ist, auf dem  $\|\cdot\|$  eine Norm ist.

Man beachte den Unterschied zum endlichdimensionalen Fall. Bei weitem nicht alle Folgen  $v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  gehören zu einem der Räume  $\ell_p$ , und die Räume enthalten nicht die gleichen Folgen als Elemente<sup>3</sup>. Schließlich sind unendliche Summen bzw. Suprema unendlicher Mengen nicht zwingend endlich. Das ist auch schon die Grundlage der in den einführenden Bemerkungen erwähnten scheiternden Verallgemeinerungen von Aussagen aus der endlichdimensionalen linearen Algebra bzw. Analysis 2.

**Bemerkung.** In Erinnerung an die Maßtheorie (aus der höheren Analysis oder Wahrscheinlichkeitstheorie) stellen wir fest, dass es sich bei den  $\ell_p$ -Räumen um Spezialfälle der  $L_p(\mu)$ -Räume handelt, den Räumen (von Äquivalenzklassen) jener messbaren Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ , für die

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left( \int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p \in [1, \infty), \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

endlich ist. Die Räume  $\ell_p$  hatten wir als Spezialfälle für  $\Omega = \mathbb{N}$ , versehen mit der Potenzmenge als  $\sigma$ -Algebra und dem Zählmaß als Maß erkannt. Die Folgenräume haben die

<sup>3</sup>Sie rechnen leicht nach, dass  $\ell_p \subsetneq \ell_q$  für  $p < q$  gilt. Denken Sie etwa an eine durch  $v_k = k^{-r}$  gegebene Folge, wobei  $r > 0$  so gewählt ist, dass  $rp < 1 < rq$  gilt.

## 1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

angenehme Eigenschaft, dass man auf die Identifizierung fast überall übereinstimmender Funktionen verzichten kann, da es bezüglich des Zählmaßes keine nicht trivialen Nullmengen gibt. Jede der Äquivalenzklassen besteht also aus genau einem Repräsentanten. In dieser Vorlesung werden wir uns nicht explizit mit Maß- und Integrationstheorie beschäftigen, aber in vielen Situationen auf das Lebesgue-Integral zurück greifen. Neben den Folgenräumen werden diese  $L_p$ -Räume für das Lebesgue-Maß auf einer offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sowie deren Abkömmlinge eine wichtige Rolle spielen. Die nötigen Aussagen werden wir im Anhang A sammeln; dort können Sie jederzeit nachschlagen.

Auch hier haben wir uns wieder auf lineare Unterräume des ursprünglichen Raums messbarer Funktionen (genauer: Äquivalenzklassen solcher) zu beschränken, auf denen die Normen endlich sind.

Notation. Wenn wir vom normierten Vektorraum  $\ell_p$  oder  $L_p(\mu)$  bzw.  $L_p(\Omega)$  sprechen, meinen wir – sofern nicht ausdrücklich anders gesagt – den mit der natürlichen Norm  $\|\cdot\|_p$  versehenen Raum. Die Norm gehört also, anders als im endlichdimensionalen Fall, praktisch zum Raum selbst.

Vom üblichen Betrag in  $\mathbb{R}$  kennen wir folgende Aussage, deren Beweis wir aus der Analysis 1 praktisch wortgleich übernehmen können.

**Lemma 1.2** (Dreiecksungleichung nach unten). *Ist  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum, so gilt  $\|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$  für alle  $v, w \in V$ .*

*Beweis.* Übung (siehe Analysis 1). □

Folgende Definition dürfte eine Wiederholung sein, aber der Vollständigkeit halber müssen wir sie hier noch einmal angeben.

**Definition 1.3.** *In einem normierten Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  definieren wir zu  $v \in V$  und  $r > 0$  die offene Kugel vom Radius  $r$  um  $v$  durch*

$$B_r(v) = \{w \in V : \|v - w\| < r\},$$

*und die abgeschlossene Kugel vom Radius  $r$  um  $v$  durch*

$$\bar{B}_r(v) = \{w \in V : \|v - w\| \leq r\}.$$

*Die offene bzw. abgeschlossene Einheitskugel in  $V$  sind durch*

$$B_V = B_1(0_V) \quad \text{bzw.} \quad \bar{B}_V = \bar{B}_1(0_V)$$

*gegeben.*

Wie in jedem metrischen Raum<sup>4</sup> erlauben uns die offenen Kugeln die Definition offener Mengen.

<sup>4</sup>In einem metrischen Raum wird eine offene Kugel durch  $B_r(v) = \{w \in V : d(v, w) < r\}$  definiert.

## 1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

**Definition 1.4.** Eine Teilmenge  $U \subset V$  eines normierten Vektorraums  $(V, \|\cdot\|)$  heißt offen, falls zu jedem  $v \in U$  ein  $r > 0$  derart existiert, dass  $B_r(v) \subset U$  gilt. Die Familie  $\mathcal{T}$  der offenen Mengen ist die von  $\|\cdot\|$  erzeugte Topologie über  $V$ .

Manchmal schreiben wir  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  für die von  $\|\cdot\|$  erzeugte Topologie. Das wird spätestens dann relevant, wenn wir verschiedene Normen oder auch gar nicht von einer Norm erzeugte Topologien auf einem gegebenen Vektorraum betrachten.

Dass es sich bei den so definierten Systemen offener Mengen tatsächlich um Topologien handelt, besagt das folgende Lemma, dessen Aussagen gerade die definierenden Eigenschaften eines Systems offener Mengen (also einer Topologie) sind.

**Lemma 1.5.** Für die von  $\|\cdot\|$  erzeugte Topologie  $\mathcal{T}$  über einem normierten Vektorraum  $V$  gelten:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{T}$ ,  $V \in \mathcal{T}$  (die leere Menge und der gesamte Raum sind stets offen)
- (ii) Ist  $\mathcal{I}$  eine beliebige (nicht leere) Indexmenge und sind  $U_i \in \mathcal{T}$ ,  $i \in \mathcal{I}$ , so ist  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i \in \mathcal{T}$  (beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen)
- (iii) Sind  $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$  (endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen)

*Beweis.* Übungsblatt 0

□

Selbstverständlich sind (nach Dreiecksungleichung) alle offenen Kugeln offen (also in  $\mathcal{T}$ ), wie Sie sich schnell überzeugen. Wir werden gleich sehen, dass auch der Begriff der abgeschlossenen Kugel durchaus sinnvoll gewählt ist.

**Definition 1.6.** Die Norm  $\|\cdot\|$  auf dem Vektorraum  $V$  heißt stärker als die Norm  $||[\cdot]|$  auf  $V$ , wenn die von  $||[\cdot]|$  erzeugte Topologie in der von  $\|\cdot\|$  erzeugten enthalten ist. Zwei Normen  $\|\cdot\|$ ,  $||[\cdot]|$  auf dem gleichen Vektorraum heißen äquivalent, wenn sie die gleiche Topologie erzeugen.

Zwei Normen sind also äquivalent, wenn jede der beiden stärker als die andere ist.

**Lemma 1.7.** Zwei Normen  $\|\cdot\|$ ,  $||[\cdot]|$  auf einem Vektorraum sind genau dann äquivalent, wenn Konstanten  $C \geq c > 0$  derart existieren, dass für alle  $v \in V$

$$c\|v\| \leq |[v]| \leq C\|v\| \tag{1.1}$$

gilt.

*Beweis.* Zum Beweis der Äquivalenz der Normen genügt es zu zeigen, dass in jeder offenen Kugel bezüglich  $\|\cdot\|$  eine offene Kugel bezüglich  $||[\cdot]|$  liegt und umgekehrt. Dann finden wir nämlich zu einer Menge  $U$  und einem  $v \in U$  stets genau dann eine in  $U$  liegende  $\varepsilon$ -Kugel bezüglich  $\|\cdot\|$  um  $v$ , wenn wir eine solche bezüglich  $||[\cdot]|$  finden.

### 1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

Zu  $\varepsilon > 0$  und  $v \in V$  gilt

$$B_{\varepsilon, [\cdot]}(v) = \{w : |[v - w]| < \varepsilon\} \subset \{w : c\|v - w\| < \varepsilon\} = B_{\frac{\varepsilon}{c}, \|\cdot\|}(v)$$

und umgekehrt  $B_{\varepsilon, \|\cdot\|}(v) \subset B_{C\varepsilon, [\cdot]}(v)$ , wie verlangt.

Zur Notwendigkeit der Bedingung nehmen wir an, wir hätten zu jedem  $C_n = n$  ein  $v_n \in V$  derart, dass  $|[v_n]| > n\|v_n\|$  ist, dass also die rechte Ungleichung nicht gilt. Dank der Homogenität beider Normen gilt dann auch für  $w_n := \frac{v_n}{\|v_n\|}$  (man beachte, dass die  $v_n$  notwendigerweise von 0 verschieden sind):

$$|[w_n]| > n \left\| \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\| = n.$$

Die Einheitskugel  $U = B_{1, [\cdot]}(0)$  ist offen in  $(V, [\cdot])$ , also nach Annahme der Äquivalenz auch in  $(V, \|\cdot\|)$ . Zu  $0 \in U$  müssten wir also ein  $\varepsilon > 0$  derart finden, dass  $B_{\varepsilon, \|\cdot\|}(0) \subset U$  gilt. In  $B_{\varepsilon, \|\cdot\|}(0)$  liegen nun aber alle  $\frac{\varepsilon}{2}w_n$ , also gilt für alle  $n$ :

$$\frac{\varepsilon}{2}w_n \in B_{\varepsilon, \|\cdot\|}(0) \subset U = B_{1, [\cdot]}(0), \quad \text{also} \quad \frac{\varepsilon}{2}|[w_n]| \leq 1.$$

Das steht aber für  $n > \frac{2}{\varepsilon}$  im Widerspruch zu  $|[w_n]| > n$ .

Völlig symmetrisch führen wir auch die Annahme, die linke Ungleichung gälte nicht, zu einem Widerspruch.  $\square$

In diesem Beweis haben wir einige sehr mächtige Tricks benutzt, die Beweise zu normierten Vektorräumen oft erleichtern. Zum einen haben wir uns im zweiten Teil auf Kugeln um den Ursprung beschränkt. Das funktioniert, weil  $V$  dank der Vektorraumstruktur überall lokal gleich aussieht. Die Kugel  $B_\varepsilon(0)$  unterscheidet sich also nicht von  $B_\varepsilon(v)$ . Tatsächlich liegt ja  $w$  genau dann in  $B_\varepsilon(v)$ , wenn  $w - v$  in  $B_\varepsilon(0)$  liegt. Zweitens haben wir benutzt, dass Kugeln eines gegebenen Radius wegen der Homogenität einfach durch Aufblähen oder Schrumpfen aus solchen mit Radius 1 hervorgehen:  $v \in B_1(0) \iff \varepsilon v \in B_\varepsilon(0)$ , d.h.:

$$B_\varepsilon(w) = \{w + \varepsilon v : v \in B_1(0)\}.$$

Das Studium der Einheitskugel eines normierten Vektorraums verrät uns also schon alles über, was wir über Kugeln in diesem Raum wissen müssen, insbesondere charakterisiert die Einheitskugel die Norm und die von ihr erzeugte Topologie vollständig. Da Kugeln auch Umgebungen eindeutig charakterisieren, erhalten wir insbesondere folgende Aussage.

**Korollar 1.8.** *Die Normen  $\|\cdot\|$  und  $[\cdot]$  auf dem Vektorraum  $V$  sind genau dann äquivalent, wenn für jede Folge  $(v_n)_n$  in  $V$  gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |[v_n]| = 0.$$

## 1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

*Beweis.* Übung.

Man erinnere sich daran, dass Konvergenz<sup>5</sup> bzgl. einer Topologie über  $V$  bedeutet:

$$v_n \rightarrow v \quad : \Longleftrightarrow \quad \text{Für jede Umgebung } U \text{ von } v \text{ ex. } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } v_n \in U \text{ f.a. } n \geq n_0.$$

Eine Umgebung von  $v$  ist im topologischen Sinn einfach eine Menge  $U$ , die eine offene Menge  $W$  mit  $v \in W \subset U$  enthält. In normierten Räumen können wir uns um kugelförmige Umgebungen beschränken, also:

$$v_n \rightarrow v \Longleftrightarrow \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ ex. } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } v_n \in B_\varepsilon(v) \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Äquivalente Normen (bzw. Metriken) ergeben also für genau die gleichen Folgen Konvergenz (mit gleichem Grenzwert)<sup>6</sup>.  $\square$

Da wir normierte Vektorräume als spezielle topologische Räume identifiziert haben, können wir uns über Stetigkeit unterhalten. Dabei benutzen wir ohne Beweis, dass in normierten Vektorräumen wie in allen metrischen Räumen  $\varepsilon$ - $\delta$ -Stetigkeit (wie auch Folgenstetigkeit, aber dafür brauchen wir noch Grenzwerte) äquivalent zur topologischen Definition (Urbilder offener Mengen unter stetigen Funktionen sind offen) ist.

**Korollar 1.9.** *Die Norm auf einem normierten Vektorraum ist eine stetige Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn wir  $\mathbb{R}$  mit seinem Standardbetrag versehen.*

*Beweis.* Das ist gerade die Aussage der Dreiecksungleichung nach unten.  $\square$

Ebenso schnell rechnen wir folgende Aussage nach.

**Lemma 1.10.** *Ist  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, so sind die Vektorraumoperationen*

$$(v, w) \mapsto v + w \quad (V \times V \rightarrow V), \quad (\alpha, v) \mapsto \alpha v \quad (\mathbb{K} \times V \rightarrow V)$$

*stetig bezüglich  $\|\cdot\|$ .*

*Beweis.* Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  gilt für  $v, w, \tilde{v}, \tilde{w} \in V$  mit  $\|v - \tilde{v}\|, \|w - \tilde{w}\| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ :

$$|\|\tilde{w} + \tilde{v}\| - \|w + v\|| \leq \|(\tilde{w} + \tilde{v}) - (w + v)\| \leq \|\tilde{w} - w\| + \|\tilde{v} - v\| < 2\delta = \varepsilon.$$

Die Addition ist also sogar gleichmäßig stetig. Analog gilt zu gegebenen  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $v \in V$  und  $\varepsilon > 0$  für  $\tilde{\alpha} \in \mathbb{K}$ ,  $\tilde{v} \in V$  mit

$$\|\tilde{v} - v\|, |\tilde{\alpha} - \alpha| < \delta = \frac{\varepsilon}{2(1 + |\alpha| + \|v\|)} \wedge \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} :$$

<sup>5</sup>Konvergenz einer Folge - in topologischen (Vektor-)Räumen interessiert man sich eher für die Konvergenz von Netzen, die eine Verallgemeinerung von Folgen (mit nicht zwingend wohlgeordneter abzählbarer Indexmenge) darstellen.

<sup>6</sup>Kleine Warnung: In allgemeinen topologischen Räumen (ohne Metrik) kann es vorkommen, dass verschiedene Topologien die gleichen konvergenten Teilfolgen liefern. Unter anderem deshalb braucht man dort die oben erwähnten Netze.

### 1.1. Definition und grundlegende Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\alpha}\tilde{v} - \alpha v\| &= \|(\tilde{\alpha}\tilde{v} - \tilde{\alpha}v) + (\tilde{\alpha}v - \alpha v)\| \\
&\leq \|\tilde{\alpha}(\tilde{v} - v)\| + \|(\tilde{\alpha} - \alpha)v\| \\
&= |\tilde{\alpha} - \alpha| \|\tilde{v} - v\| + |\tilde{\alpha} - \alpha| \|v\| \\
&< (\delta + |\alpha|)\delta + \delta\|v\| < \delta^2 + \delta(1 + |\alpha| + \|v\|) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Die Aussage dieses Lemmas bedeutet schlicht, dass  $V$  unter der von der Norm erzeugten Topologie ein topologischer Vektorraum ist.

Wir erinnern auch noch an die Definition abgeschlossener Mengen. In einem topologischen Raum  $(X, \mathcal{T})$  heißt eine Teilmenge  $A \subset X$  abgeschlossen, wenn ihr Komplement  $X \setminus A$  offen ist. In metrischen Räumen und erst recht in normierten Vektorräumen haben wir eine oft deutlich leichter zu überprüfende Bedingung. Dazu müssen wir noch die Konzepte konvergenter Folgen wiederholen, die wir bereits angedeutet haben.

**Definition 1.11.** Eine Folge  $(v_n)_n$  in einem metrischen Raum  $(V, d)$  heißt Cauchyfolge, falls für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart existiert, dass  $d(v_n, v_m) < \varepsilon$  für alle  $n, m \geq n_0$  gilt. Die Folge  $(v_n)_n$  heißt konvergent, falls ein  $v \in V$  derart existiert, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(v, v_n) = 0$  gilt. In diesem Fall heißt  $v$  der<sup>a</sup> Grenzwert der Folge, und wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$  oder  $v_n \rightarrow v$  für  $n \rightarrow \infty$ .

<sup>a</sup>Wir erinnern uns, dass eine Folge in einem metrischen Raum höchstens einen Grenzwert haben kann.

An dieser Stelle ist eine kleine Warnung angebracht. Haben wir auf einer gegebenen Menge verschiedene Metriken, so muss die Konvergenz bezüglich einer Metrik keineswegs die bezüglich der anderen implizieren. Wir hatten bereits festgestellt: Sollten zwei Metriken (bzw. im Fall normierter linearer Räume zwei Normen) für genau die gleichen Folgen Konvergenz (gegen die gleichen Grenzwerte) liefern, so bedeutet das, dass sie die gleiche Topologie erzeugen, also äquivalent sind. Diese Aussage formulieren wir nochmal in anderer Form als ein Lemma, das ebenfalls nur der Wiederholung dient.

**Lemma 1.12.** Eine Teilmenge  $A \subset V$  eines metrischen Raums  $(V, d)$  ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge  $(v_n)_n$  in  $A$  der Grenzwert  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$  ebenfalls in  $A$  liegt.

Das liefert auch eine geeignete Definition des Abschlusses von Teilmengen metrischer Räume.

**Definition 1.13.** Ist  $M \subset V$  Teilmenge des metrischen Raums  $(V, d)$ , so bezeichnen wir den Abschluss  $\bar{M}$  von  $M$  (in  $(V, d)$ ) als die Menge aller Grenzwerte von Folgen in  $M$ :

$$\bar{M} = \{v \in V : \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \text{ für eine Folge } (v_n)_n \text{ mit } v_n \in M \text{ für alle } n\}.$$

## 1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

Selbstverständlich ist  $\bar{M}$  damit abgeschlossen<sup>7</sup>, und es gilt  $M \subset \bar{M}$  (man betrachte konstante Folgen). Genauer ist  $\bar{M}$  die nach Mengeninklusion kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $V$ , die  $M$  enthält<sup>8</sup>:

$$\bar{M} = \bigcap_{M \subset A \subset V, A \text{ abgeschl.}} A.$$

Eine weitere nützliche Charakterisierung des Abschlusses nähert sich dem Problem über kleine Abstände. Der Abschluss einer Menge ist die Menge aller Berührungsspunkte von  $M$ . Das sind all jene Punkte, für die jede  $(\varepsilon)$ -Umgebung mindestens einen Punkt aus  $M$  enthält.

**Lemma 1.14.** *Der Abschluss  $\bar{M}$  einer Teilmenge  $M \subset V$  eines metrischen Raums  $(V, d)$  ist durch*

$$\bar{M} = \{v \in V : \text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ existiert ein } w \in M \text{ mit } d(v, w) < \varepsilon.\}$$

*gegeben.*

*Beweis.* Übungsblatt 0 □

Auch hier haben wir wieder gute Nachrichten mit Blick auf normierte Vektorräume.

**Lemma 1.15.** *(i) Sind  $U$  ein Untervektorraum eines Vektorraums  $V$  und  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $V$ , so ist auch  $\bar{U}$  ein Untervektorraum von  $V$ .*

*(ii) In einem normierten Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  gilt für alle  $v \in V$  und  $\varepsilon > 0$ :*

$$\bar{B}_\varepsilon(v) = \overline{B_\varepsilon(v)}.$$

*Beweis.* Übung (man überprüfe für (i), dass  $\bar{U}$  unter den Vektorraumoperationen abgeschlossen ist). □

**Bemerkung.** *Eine beliebige Menge  $M$  mit mindestens zwei Elementen, versehen mit der diskreten Metrik, zeigt sofort, dass Aussage (ii) in allgemeinen metrischen Räumen nicht gelten muss.*

## 1.2. Vollständigkeit und Kompaktheit

Dank der Dreiecksungleichung ist natürlich jede konvergente Folge in einem metrischen Raum eine Cauchyfolge. Wir hatten auch schon eine Bezeichnung für jene metrischen Räume eingeführt, in denen die Umkehrung gilt.

<sup>7</sup>Machen Sie sich das klar. Benutzen Sie, dass Sie für jede Folge  $(v_n)_n$  in  $\bar{M}$ , die gegen ein  $v \in V$  konvergiert, zu jedem  $n$  eine Folge in  $M$  finden, die ihrerseits gegen  $v_n$  konvergiert. Aus je einem Element jeder dieser Folgen generieren Sie eine Folge in  $M$ , die gegen  $v$  konvergiert.

<sup>8</sup>Unsere Definition stimmt also mit der Definition des Abschlusses für allgemeine topologische Räume überein.



**Definition 1.16.** Ein metrischer Raum  $(V, d)$  heißt vollständig, falls jede Cauchyfolge in  $V$  (gegen einen in  $V$  liegenden Grenzwert) konvergiert.  
Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt Banachraum.

**Beispiel 2.** Sie überzeugen sich schnell, dass  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  unter allen  $p$ -Normen  $\|\cdot\|_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , zu Banachräumen werden. Kraft Isomorphie ist dann jeder endlichdimensionale normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ein Banachraum.

Mit der durch  $d(x, y) = |x - y|$  gegebenen Metrik ist der Raum  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen hingegen nicht vollständig. Denken Sie etwa an die durch  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  gegebene Cauchyfolge. Das erklärt auch, warum wir nur  $\mathbb{R}$ - und  $\mathbb{C}$ -Vektorräume betrachten. Über nicht vollständigen Körpern würde es uns schwer fallen, vollständige Vektorräume zu finden.

**Beispiel 3.** Erfreulicherweise sind die Räume  $\ell_p^{\mathbb{K}}$  unter ihren natürlichen Normen  $\|\cdot\|_p$  ( $p \in [1, \infty]$ ) wie ihre endlichdimensionalen Geschwister auch Banachräume. Wir zeigen das hier für den Fall  $p = \infty$ , der Fall  $p \in [1, \infty)$  ist eine (konzeptionell nicht schwierige, aber für  $p > 1$  recht rechenintensive) Übung.

Angenommen, wir hätten eine  $\|\cdot\|_{\infty}$ -Cauchyfolge  $(v^{(k)})_k$  beschränkter Folgen. Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  finden wir also ein  $k_0$  derart, dass für alle  $k, l \geq k_0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$

$$|v_n^{(k)} - v_n^{(l)}| \leq \|v^{(k)} - v^{(l)}\| < \varepsilon$$

gilt. Zu festem  $n$  ist damit  $(v_n^{(k)})_k$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{K}$ , die einen Grenzwert  $v_n$  hat. Die Folge  $v = (v_n)_n$  dieser Grenzwerte ist dann beschränkt und erfüllt  $\|v^{(k)} - v\|_{\infty} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Ist nämlich  $k_0$  zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wie oben gewählt, so gilt für  $k \geq k_0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ :

$$|v_n^{(k)} - v_n| = \lim_{l \rightarrow \infty} \underbrace{|v_n^{(k)} - v_n^{(l)}|}_{< \varepsilon \text{ f. } l \geq k_0} \leq \varepsilon.$$

Das gilt für alle  $n$ :

$$\|v^{(k)} - v\|_{\infty} = \sup_n |v_n^{(k)} - v_n| \leq \varepsilon \quad \text{für } k \geq k_0.$$

Allgemeiner sind die Räume  $L_p(\mathbb{R}^n)$  (oder noch allgemeiner  $L_p(\mu)$ ) der zur  $p$ ten Potenz integrierbaren ( $p \in [1, \infty)$ ) bzw. wesentlich beschränkten ( $p = \infty$ ) (Äquivalenzklassen von) Funktionen ebenfalls Banachräume. Das haben wir in der Maßtheorie gezeigt (siehe Theorem A.21), also wird es hier nur erwähnt. Wieder sind die Folgenräume nur Spezialfälle, die sich für das Zählmaß über der Grundmenge  $\mathbb{N}$  als "Integrationsgebiet" ergeben.

**Beispiel 4.** Mit  $c_{00}^{\mathbb{K}}$  bezeichnen wir den Raum der abbrechenden Folgen in  $\mathbb{K}$ :

$$c_{00}^{\mathbb{K}} := \left\{ (a_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \text{es existiert ein } n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n = 0 \text{ für alle } n > n_0 \right\}.$$

Da alle abbrechenden Folgen beschränkt sind und Summen sowie Vielfache abbrechender Folgen abbrechen, handelt es sich um einen linearen Unterraum von  $\ell_{\infty}^{\mathbb{K}}$ . Versehen mit

## 1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  ist  $c_{00}$  aber keineswegs abgeschlossen. Wir finden nämlich eine Cauchyfolge  $(v^{(k)})_k$ , die wir folgendermaßen definieren:

$$v_n^{(k)} := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } n \leq k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h., das  $k$ te Folgenglied ist jene Zahlenfolge, deren erste  $k$  Einträge  $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}$  sind, gefolgt von Nullen. Dass es sich bei  $(v^{(k)})$  um eine Cauchyfolge handelt sehen wir schnell. Zu  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $k_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass  $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$  ist. Dann stimmen  $(v^{(k)})$  und  $(v^{(l)})$  für  $k, l \geq k_0$  bis zum  $(k \wedge l)$ ten Folgenglied überein. Ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $k > l \geq k_0$ , so ist also

$$\|v^{(k)} - v^{(l)}\|_\infty = \left| \frac{1}{l+1} - 0 \right| \leq \frac{1}{k_0+1} < \varepsilon.$$

Nun überzeugen wir uns aber, dass

$$v = (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad v_n = \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

die einzig mögliche Grenzfolge ist. Nehmen wir an, es gäbe eine andere Grenzfolge  $w = (w_n)_n$ , so wäre  $w_N \neq v_N = \frac{1}{N}$  für ein  $N \in \mathbb{N}$ . Zu  $\varepsilon = \frac{1}{2}|w_N - \frac{1}{N}|$  gälte dann für alle  $k \geq N$ :

$$v_N^{(k)} = \frac{1}{N}, \quad \text{also: } \|v^{(k)} - w\|_\infty \geq \left| \frac{1}{N} - w_N \right| = 2\varepsilon > \varepsilon,$$

also kann  $w$  unmöglich Grenzwert der Folge  $(v^{(k)})_k$  sein. Die Grenzfolge  $v$  bricht aber keineswegs ab, gehört also nicht zu  $c_{00}$ .

Auch hier gibt es wieder Analoga für Funktionen auf allgemeineren Grundmengen:

**Beispiel 5.** Der Raum  $V := C([a, b]; \mathbb{R})$  der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem kompakten Intervall  $[a, b]$  ist ein Vektorraum, und für alle  $f \in V$  ist (sogar das Regel-)Integral

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$$

wohldefiniert. Sie rechnen schnell nach, dass es sich bei  $\|\cdot\|_1$  um eine Norm auf  $V$  handelt. Für die Definitheit ist wesentlich, dass wir nur stetige Funktionen als Integranden betrachten – das relevante Argument werden wir unten noch einmal sehen. Der normierte Vektorraum  $(V, \|\cdot\|_1)$  ist nicht vollständig, also kein Banachraum. Das klassische Beispiel für eine Cauchyfolge ohne (stetige) Grenzfunktion liefert der Fall  $[a, b] = [0, 2]$ ,

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n & \text{für } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{für } 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

für die

$$\|f_n - f_k\|_1 = \int_0^1 |t^n - t^k| dt \leq \frac{1}{(n \wedge k) + 1}$$

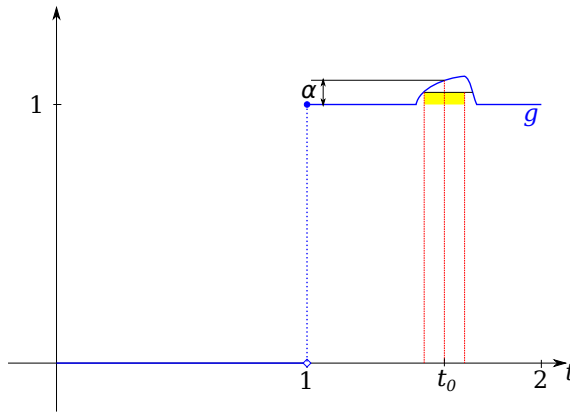
## 1.2. Vollständigkeit und Kompaktheit

gilt. Als Grenzfunktion drängt sich  $f = \mathbf{1}_{[1,2]}$  auf, schließlich handelt es sich dabei um den punktweisen Grenzwert der  $f_n$ , und es gilt:

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

jedoch ist  $f$  keineswegs stetig.

Tatsächlich kann die Folge  $(f_n)_n$  keinen stetigen Grenzwert haben. Wäre nämlich  $g$  eine solche stetige Grenzfunktion, die auf  $[1, 2]$  von 1 verschieden ist, so gäbe es ein  $t_0 \in [1, 2]$  mit  $g(t_0) := 1 + \alpha$  für ein  $\alpha \neq 0$ . Dann existiert wegen der Stetigkeit ein  $\delta > 0$  derart, dass  $|g(t) - 1| > \frac{|\alpha|}{2}$  auf  $[1, 2] \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  gilt.



Wir können dabei  $\delta$  so klein wählen, dass mindestens eines der Teilintervalle  $(t_0 - \delta, t_0]$ ,  $[t_0, t_0 + \delta)$  ganz in  $[1, 2]$  liegt. Dann wäre aber z.B. im Fall  $(t_0 - \delta, t_0] \subset [1, 2]$

$$\|f_n - g\|_1 = \int_0^2 |f_n(t) - g(t)| dt \geq \int_{t_0 - \delta}^{t_0} |1 - g(t)| dt \geq \int_{t_0 - \delta}^{t_0} \frac{|\alpha|}{2} dt = \frac{|\alpha|}{2} \delta.$$

Das kriegen wir beim besten Willen nicht kleiner als etwa  $\varepsilon = \frac{|\alpha|}{4} \delta$ , also gilt bezüglich  $\|\cdot\|_1$  nicht  $f_n \rightarrow g$ . Der Fall,  $g$  sei auf  $[0, 1)$  nicht identisch Null wird analog behandelt<sup>9</sup>. Wir werden also keinen stetigen Grenzwert finden.

In einer Übungsaufgabe werden Sie sich überzeugen, dass  $V$  unter der durch

$$\|f\|_\infty := \sup_{0 \leq t \leq 2} |f(t)|$$

sehr wohl ein Banachraum ist<sup>10</sup>. Schließlich ist die Konvergenz bezüglich dieser Norm (wohlgemerkt bei kompaktem  $[a, b]$ ) die gleichmäßige Konvergenz, und gleichmäßige Limes stetiger Funktionen sind stetig.

<sup>9</sup>Wir müssen dann  $\delta$  so klein wählen, dass  $t_0 + \delta =: s < 1$  gilt, damit  $f_n(t) \leq s^n$  für  $t < t_0 + \delta$  gilt.

<sup>10</sup>Diese Norm kennen wir von den Räumen  $L_\infty(\mu)$  der (Äquivalenzklassen von) wesentlich beschränkten messbaren Funktionen. Wir stellen also fest, dass  $V$  ein abgeschlossener Unterraum des Raums  $L_\infty(\lambda^1|_{[a,b]})$ , versehen mit der Norm  $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|$ , ist.

## 1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

**Notation.** Den Raum  $C(M; \mathbb{K})$  der stetigen Funktionen von einem kompakten metrischen Raum<sup>11</sup>  $(M, d)$ , versehen mit der Maximumsnorm

$$\|v\|_\infty = \sup_{x \in M} |v(x)|$$

bezeichnen wir als  $C^0(M; \mathbb{K})$ . Das passt im reellen Fall in eine ganze Familie von Räumen  $C^k(M; \mathbb{R})$  der auf kompaktem  $M \subset \mathbb{R}^n$   $k$ mal stetig differenzierbaren Funktionen, versehen mit der Norm

$$\|v\|_{C^k} = \sum_{|a| \leq k} \|D^a v\|_\infty,$$

bei denen die Summation über alle Multiindizes  $a = (a_1, \dots, a_n)$  der Länge  $|a| = a_1 + \dots + a_n \leq k$  läuft. Wir summieren also einfach die Maximumsnormen aller Ableitungen von  $v$  der Ordnungen  $0, 1, \dots, k$  auf. Die so definierten Räume  $C^k(M; \mathbb{R})$  sind auch Banachräume.

Wir merken uns: Der gleiche Vektorraum  $V$  kann unter manchen Normen ein Banachraum, unter anderen aber unvollständig sein.

Folgenden Zusammenhang zwischen abgeschlossenen Mengen und Vollständigkeit kennen wir auch schon: abgeschlossene Teilräume vollständiger Räume sind vollständig.

**Lemma 1.17.** *Eine Teilmenge  $M \subset V$  eines vollständigen metrischen Raums  $(V, d)$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $(M, d|_{M \times M})$  ebenfalls vollständig ist.*

*Beweis.* Übungsblatt 0 □

Das folgende Beispiel beantwortet bereits eine unserer Fragen vom Anfang: Sind lineare Unterräume eines normierten Vektorraums stets abgeschlossen?

**Beispiel 6.** *Wir folgern, dass  $c_{00}$  ein nicht abgeschlossener Teilraum von  $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$  ist. Im Rahmen einer Übungsaufgabe überzeugen Sie sich, dass der Abschluss von  $c_{00}$  in  $\ell_\infty$  der Raum  $c_0$  der Nullfolgen ist.*

In Erinnerung an die rationalen Zahlen hatten wir den Begriff dichter Teilmengen metrischer Räume eingeführt. Auch diesen wiederholen wir hier.

**Definition 1.18.** *Eine Teilmenge  $M \subset V$  eines (nicht notwendigerweise vollständigen) metrischen Raums  $(V, d)$  heißt dicht in  $V$ , wenn  $\bar{M} = V$  gilt.*

**Beispiel 7.** *Im Rahmen unseres Standardbeispiels folgt, dass  $c_{00}$  in  $\ell_\infty$  nicht dicht liegen kann, da der Abschluss  $c_0$  von  $c_{00}$  ein echter Teilraum von  $\ell_\infty$  ist. Das hätten wir natürlich auch einfacher haben können. Versuchen Sie etwa mal, eine  $\|\cdot\|_\infty$ -Cauchyfolge in  $c_{00}$  zu finden, deren Grenzwert  $\mathbb{1}_{\ell_\infty}$  (die nur aus Einsen bestehende Folge) ist.*

Dichte Teilmengen können wir dank Lemma 1.14 alternativ auch folgendermaßen charakterisieren.

<sup>11</sup>Die Definition sollten Sie schon kennen, wir werden sie aber gleich nochmal wiederholen.

**Korollar 1.19.** Eine Teilmenge  $M \subset V$  eines metrischen Raums  $(V, d)$  ist genau dann dicht, wenn zu jedem  $v \in V$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $w \in M$  mit  $d(v, w) < \varepsilon$  existiert.

Mit anderen Worten: Ist  $M \in V$  dicht, so gilt für jedes  $\varepsilon > 0$ :

$$V \subset \bigcup_{w \in M} B_\varepsilon(w).$$

**Beispiel 8.** Der Approximationssatz von Stone-Weierstraß<sup>12</sup> besagt, dass der (Vektor-)Raum der Polynome auf  $[a, b]$  dicht im Raum  $C^0([a, b]; \mathbb{R})$  liegt, dass wir also stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beliebig genau gleichmäßig durch Polynome approximieren können: Zu stetigem  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein Polynom  $p$  derart, dass

$$\|f - p\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - p(t)| < \varepsilon$$

gilt.

Wir werden in Kürze auf dichte Teilmengen zurück kommen, wenn wir separable Räume betrachten.

Nun stellt sich noch die Frage, ob wir aus einem nicht vollständigen metrischen Raum  $(V, d)$  stets durch Hinzunahme weiterer Elemente einen vollständigen machen können, in dem  $V$  dann dicht liegt. Bei den rationalen Zahlen hat das ja ganz gut funktioniert; das Ergebnis waren die reellen Zahlen. Sofern der gegebene Raum Teilraum eines vollständigen Raums ist, lösen wir das Problem einfach gemäß Lemma 1.17 durch Abschluss. Wie sieht es nun aber aus, wenn wir (noch) gar keinen Raum haben, dessen Teilraum  $V$  ist?

**Satz 1.20.** Zu jedem metrischen Raum  $(V, d)$  existiert ein vollständiger Raum  $(\tilde{V}, \tilde{d})$  derart, dass  $V$  eine (bzgl.  $\tilde{d}$ ) dichte Teilmenge von  $\tilde{V}$  ist und

$$\text{für alle } v, w \in V \quad \tilde{d}(v, w) = d(v, w)$$

gilt.

*Beweis.* Auf der Menge  $\mathcal{C}_d$  aller Cauchyfolgen in  $(V, d)$  definieren wir die Äquivalenzrelation  $\sim$  durch

$$(v_n)_n \sim (w_n)_n : \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : d(v_n, w_n) < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

Zwei Cauchyfolgen sind also äquivalent, wenn ihre Glieder für hinreichend große  $n$  beliebig nah beieinander liegen. Überzeugen Sie sich, dass es sich bei  $\sim$  tatsächlich um eine Äquivalenzrelation handelt, und dass wir für äquivalente Folgen  $(v_n)_n \sim (w_n)_n$  zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  sogar ein  $n_1$  derart finden, dass  $d(v_m, w_l) < \varepsilon$  für beliebige  $k, n \geq n_1$  gilt.

<sup>12</sup>siehe etwa Satz I.2.11 bei Werner (2018)

## 1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

Nun bezeichnen wir mit  $\tilde{V} = \mathcal{C}_d / \sim$  die Menge der Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in  $V$  und konstruieren  $\tilde{d}$  wie folgt. Für zwei Cauchyfolgen  $(v_n)_n$  und  $(w_n)_n$  definieren wir

$$\hat{d}((v_n)_n, (w_n)_n) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(v_n, w_n).$$

Das ist wohldefiniert, weil  $\alpha_n := d(v_n, w_n)$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  definiert, die selbstverständlich einen Grenzwert hat. Weiter stellen wir fest, dass dieser Pseudoabstand<sup>13</sup> nach Konstruktion genau dann verschwindet, wenn beide Folgen zur gleichen Äquivalenzklasse gehören, und dass dann wegen der Dreiecksungleichung für andere Repräsentanten  $(x_n)_n \sim (v_n)_n$  und  $(y_n)_n \sim (w_n)_n$  stets

$$\hat{d}((x_n)_n, (y_n)_n) = \hat{d}((v_n)_n, (w_n)_n)$$

gilt. Es ergibt also Sinn,

$$\tilde{d}([(v_n)_n], [(w_n)_n]) := \hat{d}((v_n)_n, (w_n)_n)$$

für die durch  $(v_n)_n$  bzw.  $(w_n)_n$  repräsentierten Äquivalenzklassen zu definieren.

Hat eine Cauchyfolge  $(v_n)_n$  nun einen Grenzwert  $v \in V$ , so ist  $v$  auch Grenzwert einer jeden Cauchyfolge  $(w_n)_n \sim (v_n)_n$ :

$$d(w_n, v) \leq d(w_n, v_n) + d(v_n, v) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wenn  $(w_n)_n \sim (v_n)_n$  und  $v_n \rightarrow v$ . Ferner gibt es zu jedem  $v \in V$  die durch  $v_n = v$  gegebene konstante Cauchyfolge, die trivialerweise gegen  $v$  konvergiert. Indem wir  $v$  also mit der Äquivalenzklasse dieser konstanten Folge identifizieren, erhalten wir  $V \subset \tilde{V}$  und

$$\tilde{d}(v, w) = \hat{d}((v_n = v)_n, (w_n = w)_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(v, w) = d(v, w).$$

Wir haben noch zu zeigen, dass  $V$  dicht in  $\tilde{V}$  liegt. Dazu sei  $(v_n)_n$  Repräsentant einer beliebigen Äquivalenzklasse. Zu  $\varepsilon > 0$  finden wir  $n_0$  derart, dass  $d(v_n, v_k) < \varepsilon$  für  $n, k \geq n_0$  gilt. Dann betrachten wir die konstante Folge  $w_n = w := v_{n_0}$  für alle  $n$ . Diese repräsentiert (per Identifikation von  $w$  mit  $[(w_n)_n]$ ) ein Element in  $V \subset \tilde{V}$ , für das

$$\tilde{d}(w, [(v_n)_n]) = \hat{d}((w_n)_n, (v_n)_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{d(v_{n_0}, v_n)}_{< \varepsilon \text{ f. } n \geq n_0} \leq \varepsilon$$

gilt. □

Wir interessieren uns nun für kompakte Teilmengen metrischer Räume. Dazu definieren zwei Arten von Kompaktheit, die zunächst wenig miteinander zu tun zu haben scheinen.

**Definition 1.21.** (1) Ein metrischer Raum  $(V, d)$  heißt überdeckungskompakt, wenn jede offenen Überdeckung  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  von  $V$  eine endliche Teilüberdeckung  $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$  enthält.

(2) Ein metrischer Raum  $(V, d)$  heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in  $V$  eine in  $V$  konvergente Teilfolge enthält.

<sup>13</sup>Überzeugen Sie sich, dass  $\hat{d}$  nicht negativ und symmetrisch ist und die Dreiecksungleichung erfüllt.

Nach Teil (1) muss also jede, nicht notwendigerweise abzählbare, Familie offener Mengen, die ganz  $V$  ausfüllen, eine endliche Teilfamilie enthalten, die schon genügt, um  $V$  auszufüllen. Teil (2) besagt, dass  $V$  folgenkompakt ist, wenn jede Folge  $(v_n)_n$  in  $V$  eine Teilfolge  $(v_{n_k})_k$  enthält, die gegen ein Element von  $V$  konvergiert.

Die Definitionen ergeben auch in allgemeinen topologischen Räumen Sinn, allerdings haben metrische Räume die erfreuliche Eigenschaft, dass beide übereinstimmen.

**Theorem 1.22.** *Für einen metrischen Raum  $(V, d)$  sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i)  $(V, d)$  ist überdeckungskompakt.
- (ii)  $(V, d)$  ist folgenkompakt.
- (iii)  $(V, d)$  ist vollständig und zu jedem  $\varepsilon > 0$  existieren endlich viele  $v_1, \dots, v_n$  derart, dass

$$V \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(v_j)$$

*gilt.*

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii). Hat die Folge  $(v_n)_n$  keine konvergente Teilfolge (d.h., kein  $v \in V$  ist Grenzwert einer Teilfolge), so finden wir zu jedem  $v \in V$  ein  $\varepsilon_v > 0$  derart, dass  $U_v := B_{\varepsilon_v}(v)$  höchstens endlich viele der  $v_n$  enthält (genauer enthält  $U_v$  nur  $v_n$  für endlich viele  $n$ ). Die  $U_v$  bilden eine offene Überdeckung von  $V$ , denn jedes  $v \in V$  liegt mindestens in seinem persönlichen  $U_v$ . Wäre  $V$  also kompakt, so genügten endlich viele der  $U_v$ , um  $V$  zu überdecken. In jedem dieser endlich vielen  $U_v$  liegen aber nur endlich viele der  $v_n$  im Widerspruch dazu, dass alle (unendlich vielen)  $v_n$  in  $V$  liegen.

(ii)  $\implies$  (iii). Angenommen, die Überdeckungsbedingung in (iii) wäre verletzt, wir hätten also ein  $\varepsilon > 0$ , für das wir  $V$  nicht mit endlich vielen  $\varepsilon$ -Kugeln überdecken können. Dann wählen wir  $v_1 \in V$  beliebig und finden wegen  $B_\varepsilon(v_1) \subsetneq V$  ein  $v_2$  mit  $d(v_1, v_2) \geq \varepsilon$ . Induktiv finden wir so stets ein

$$v_{n+1} \in V \setminus \bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(v_k),$$

das von allen bisher gefundenen  $v_k$  mindesten den Abstand  $\varepsilon$  hat. Wir haben also eine Folge  $(v_n)_n$  konstruiert, für die  $d(v_k, v_n) \geq \varepsilon$  für alle  $n$  gilt. Das gilt natürlich auch für jede Teilfolge, also kann keine Teilfolge von  $(v_n)_n$  eine Cauchyfolge sein, geschweige denn konvergieren.

Die Vollständigkeit folgt einfach daraus, dass nach (ii) insbesondere jede Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge besitzt, dann aber notwendigerweise (gegen den Grenzwert dieser Teilfolge) selbst konvergiert.

(iii)  $\implies$  (i). Angenommen  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$  sei eine Überdeckung von  $V$ , die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Zu  $k \in \mathbb{N}$  setzen wir  $\varepsilon_k = 2^{-k}$  und finden nach (iii) jeweils

## 1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

$v_1^k, \dots, v_{n(k)}^k$  derart, dass

$$V = \bigcup_{j=1}^{n(k)} B_{2^{-k}}(v_j^k)$$

gilt. Im ersten Schritt kann mindestens eines der  $B_{2^{-1}}(v_j^1)$  nicht von endlich vielen der  $U_\alpha$  überdeckt werden, ohne Beschränkung der Allgemeinheit möge dies das mit  $j = 1$  sein.

Im zweiten Schritt können wir diese Kugel  $B_1 = B_{2^{-1}}(v_1^1)$  als

$$B_1 = \bigcup_{j=1}^{n(2)} (B_1 \cap B_{2^{-2}}(v_j^2))$$

darstellen. Da aber unendlich viele  $U_\alpha$  benötigt werden um  $B_1$  zu überdecken, brauchen wir auch für mindestens einen der  $n(2)$  Durchschnitte unendlich viele  $U_\alpha$ . Wir nehmen wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, es sei der mit  $j = 1$  und setzen  $B_2 := B_{2^{-2}}(v_1^2)$ :  $B_1 \cap B_2$  kann nicht von endlich vielen  $U_\alpha$  überdeckt werden

Im dritten Schritt stellen wir dann analog fest, dass  $B_1 \cap B_2 \cap B_3$  nicht von endlich vielen  $U_\alpha$  überdeckt werden kann, wobei  $B_3 = B_{2^{-3}}(v_1^3)$  ist. Wir erhalten so eine Folge  $(w_k)_k$ , gegeben durch  $w_k := v_1^k$ , derart, dass

$$\bigcap_{k=1}^m B_{2^{-k}}(w_k)$$

für kein  $m$  von endlich vielen der  $U_\alpha$  überdeckt werden kann. Da nun also für alle  $k$  die Folgenglieder  $w_k$  und  $w_{k+1}$  insbesondere in  $B_k \cup B_{k+1}$  mit  $B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset$  liegen, gilt

$$d(w_k, w_{k+1}) \leq 2^{-k} 2 = 2^{-k+1},$$

also gilt für  $l > m$ :

$$d(w_m, w_l) \leq \sum_{k=m}^{l-1} d(w_k, w_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{l-1} 2^{-k+1} \leq \sum_{k=m-1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1 - (\frac{1}{2})^m}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{-m+1}.$$

Also ist  $(w_n)_n$  eine Cauchyfolge, die wegen der Vollständigkeit von  $V$  gegen ein  $w \in V$  konvergiert.



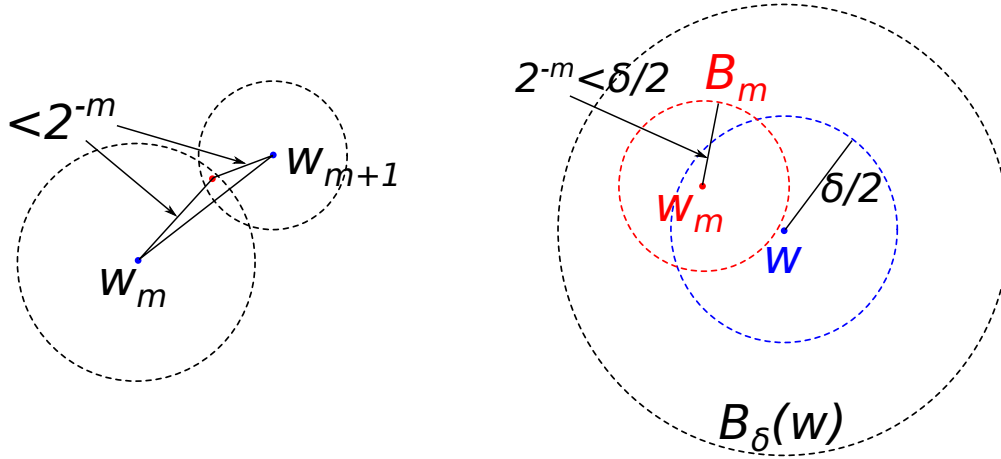


Illustration des Abstands  $d(w_m, w_{m+1})$  via Dreiecksungleichung (links) und der Überdeckung aller  $B_m$ ,  $m \geq n$ , durch  $B_\delta(w)$  (rechts).

Dieses liegt in mindestens einem der  $U_\alpha$ , sagen wir  $w \in U_{\alpha_0}$ , und da  $U_{\alpha_0}$  offen ist, finden wir ein  $\delta > 0$  derart, dass  $B_\delta(w) \subset U_{\alpha_0}$  gilt. Wählen wir nun  $n$  so, dass

1.  $d(w_m, w) < \frac{\delta}{2}$  für alle  $m \geq n$  (möglich wegen der Konvergenz) und
2.  $2^{-n} < \frac{\delta}{2}$

gelten, so liegen alle  $B_m$ ,  $m \geq n$ , in  $B_\delta(w) \subset U_{\alpha_0}$ , werden also vom einzelnen  $U_{\alpha_0}$  überdeckt:

$$u \in B_m \implies d(u, w) \leq \underbrace{d(u, w_m)}_{< 2^{-m} \leq 2^{-n}} + d(w_m, w) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Insbesondere gilt also

$$B_1 \cap \dots \cap B_n \subset B_n \subset U_{\alpha_0}$$

im Widerspruch zu Konstruktion der  $B_j$ . □

Die Äquivalenz von (i) und (ii) ermuntert uns zu folgender Definition.

**Definition 1.23.** Eine Teilmenge  $M \subset V$  eines metrischen Raums  $(V, d)$  heißt kompakt, wenn sie (als Teilraum  $(M, d|_{M \times M})$ ) die Aussagen von Theorem 1.22 erfüllt.

Wir werden also im folgenden bei Teilmengen metrischer Räume und insbesondere normierter Vektorräume nur noch von kompakten Mengen sprechen, beachten aber, dass in allgemeineren topologischen Räumen Überdeckungs- und Folgenkompaktheit sehr wohl verschiedenen Bedingungen sein können<sup>14</sup>. In den meisten Texten, vor allem im Englischen, wird Überdeckungskompaktheit als Definition der Kompaktheit genutzt. Der Begriff der Überdeckungskompaktheit wird dann oft gar nicht separat eingeführt.

<sup>14</sup>Aussage (iii) ergibt in allgemeinen topologischen Räumen ohne Metrik gar keinen Sinn.

## 1. Grundlagen: Topologie normierter Vektorräume

**Bemerkung.** Unabhängig davon, dass wir uns sehr für kompakte Teilmengen von Banachräumen interessieren werden, liefern kompakte metrische Räume die Grundlage für eine große Klasse von Banachräumen. Ist nämlich  $(M, d)$  ein kompakter metrischer Raum, so wissen wir, dass stetige reellwertige Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  Minimum und Maximum annehmen, und dass der Raum  $C(M; \mathbb{K})$  der stetigen Funktionen von  $M$  nach  $\mathbb{K}$ , versehen mit der Maximumsnorm

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in M} |f(x)|$$

ein Banachraum ist. Das ist eine Verallgemeinerung des zweiten Teils von Beispiel 5.

Bedingung (iii) in Theorem 1.22 erinnert uns an den Satz von Heine-Borel, der uns sagte, dass die kompakten Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  genau jene sind, die abgeschlossen und beschränkt sind. Nun ergibt das Konzept der Beschränktheit in allgemeinen metrischen Räumen nur wenig topologischen Sinn, da wir zur Metrik  $d$  auf  $V$  durch

$$\tilde{d}(v, w) = 1 \wedge d(v, w)$$

eine Metrik finden, welche die gleiche Topologie (also die gleichen konvergenten Folgen und die gleichen kompakten Mengen) erzeugt<sup>15</sup> und bezüglich der alle Mengen beschränkt sind.

**Definition 1.24.** Eine Teilmenge  $M$  eines metrischen Raums  $(V, d)$  heißt total beschränkt (auch: präkompakt), falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  endlich viele  $v_1, \dots, v_n \in M$  derart existieren, dass

$$M \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(v_j)$$

gilt.

$M$  heißt relativ kompakt, wenn  $\bar{M}$  kompakt ist.

**Bemerkung.** Oft wird auch der Begriff der relativen Folgenkompaktheit benutzt. Eine Menge  $M \subset V$  heißt relativ folgenkompakt, wenn jede Folge  $(v_n)_n$  in  $M$  eine in  $V$  konvergente Teilfolge besitzt. Überzeugen Sie sich, dass relativ folgenkompakt und relativ kompakt für Teilmengen metrischer Räume äquivalente Eigenschaften sind.

Das Theorem besagte also in Analogie zum Satz von Heine-Borel, dass Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums (z.B. eines Banachraums) genau dann kompakt sind, wenn sie abgeschlossen und total beschränkt sind. Insbesondere gilt, da aus totaler Beschränktheit stets Beschränktheit folgt, eine Richtung des Satzes von Heine-Borel weiterhin: Kompakte Teilmengen metrischer Räume sind abgeschlossen und beschränkt. Wir fassen das zusammen.

**Korollar 1.25.** Eine Teilmenge  $M \subset V$  eines vollständigen metrischen Raums  $(V, d)$  ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und total beschränkt ist. Insbesondere sind kompakte Teilmengen metrischer Räume abgeschlossen und beschränkt.

<sup>15</sup>Überzeugen Sie sich davon!

Für allgemeine topologische Räume ist selbst der erste Teil der zweiten Aussage nicht immer wahr. Versuchen wir etwa die Menge  $X = \{0, 1\}$  mit der Klumpentopologie  $\{\emptyset, X\}$ , so ist die Teilmenge  $\{0\}$  offensichtlich kompakt (endliche Teilmengen topologischer Räume sind immer kompakt), jedoch nicht abgeschlossen (das sind nur  $\emptyset$  und  $X$ ).

Die zweite Aussage des Korollars ist besonders für normierte Vektorräume interessant, bei denen die geforderte Homogenität der Norm die künstliche Beschränkung unbeschränkter Mengen verhindert. Überlegen Sie sich, dass in *vollständigen* metrischen Räumen relative Kompaktheit und Präkompaktheit äquivalent sind.

Dass wir uns im allgemeinen auch bei normierten Vektorräumen nicht auf Beschränktheit und Abgeschlossenheit berufen dürfen um Kompaktheit zu zeigen, zeigt folgendes Beispiel.

**Beispiel 9.** In  $\ell_p$  betrachten wir die kanonischen Einheitsvektoren  $b^{(n)}$ , gegeben durch

$$b_k^{(n)} = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese haben die Normen  $\|b^{(n)}\|_p = 1$ , liegen also in der abgeschlossenen (und beschränkten) Einheitskugel  $D = \bar{B}_1(0)$ . Allerdings ist für  $n \neq m$

$$\|b^{(n)} - b^{(m)}\|_p = 2^{\frac{1}{p}},$$

also kann keine Teilfolge eine Cauchyfolge sein, geschweige denn gegen ein  $v \in D$  konvergieren. Also ist die abgeschlossene Einheitskugel in  $\ell_p$  nicht (folgen-)kompakt.

Tatsächlich ist die abgeschlossene Einheitskugel in einem normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraum genau dann kompakt, wenn der Raum endlichdimensional ist.

Im nächsten Kapitel beschäftigen wir uns noch mit besonderen Banachräumen, in denen wir nicht nur Längen, sondern auch Winkel messen können. Die Grundlage dafür ist eine Verallgemeinerung des euklidischen Skalarprodukts.



## 2.1. Skalarprodukte und Hilberträume

**Definition 2.1.** Eine Abbildung  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  heißt

1. Semiskalarprodukt, falls für alle  $u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \langle u | \alpha v + w \rangle &= \alpha \langle u | v \rangle + \langle u | w \rangle && \text{(Linearität im zweiten Argument)} \\ \langle v | w \rangle &= \langle w | v \rangle^* && \text{(konjugiert symmetrisch)} \\ \langle v | v \rangle &\geq 0 && \text{(positiv semidefinit)} \end{aligned}$$

gilt<sup>a</sup>.

2. Gilt zusätzlich  $\langle v | v \rangle = 0 \implies v = 0$ , so ist  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt.
3. Ein mit einem Skalarprodukt versehener Vektorraum  $V$  heißt Prähilbertraum oder unitärer Raum.

---

<sup>a</sup>Dabei steht der Asterisk für die komplexe Konjugation. Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  kann dieser natürlich entfallen.

**Bemerkung.** Der Begriff des unitären Raums wird oft für komplexe Prähilberträume reserviert.

Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  können keine komplexen Werte auftreten. Die ersten beiden Bedingungen sagen dann einfach, dass es sich bei  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  um eine symmetrische Bilinearform handelt. Im komplexen Fall spricht man von einer konjugiert symmetrischen Sesquilinearform.

Sie rechnen sofort nach, dass daraus sofort die konjugierte Linearität im ersten Argument folgt:

$$\langle \alpha u + v | w \rangle = \alpha^* \langle u | w \rangle + \langle v | w \rangle \quad \text{für } u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{K}.$$

Ebenso leicht überzeugen Sie sich, dass  $\langle 0_V | v \rangle = 0 = \langle v | 0_V \rangle$  für alle  $v \in V$  gelten muss.

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

Ein Skalarprodukt erhalten wir dann, wenn diese Form auch noch positiv definit ist.

Als kleine Warnung sei hier noch angemerkt, dass in manchen Texten die Linearität im ersten Argument gefordert wird. Dann ist  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  natürlich im zweiten Argument konjugiert linear. Diese Konvention tritt besonders gern bei der in der Quantenmechanik beliebten Bracket-Notation auf.

**Lemma 2.2** (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). *In einem Prähilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  gilt für alle  $v, w \in V$*

$$|\langle v | w \rangle|^2 \leq \langle v | v \rangle \langle w | w \rangle.$$

*Beweis.* Dank der Symmetriebedingung hat  $\langle w | v \rangle$  den Betrag  $|\langle v | w \rangle|$ , also finden wir ein  $\alpha \in \mathbb{K}$  mit  $|\alpha| = 1$  derart, dass  $\langle w | v \rangle = \alpha |\langle v | w \rangle|$  ist. Dann rechnen wir für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle v - \lambda \alpha w | v - \lambda \alpha w \rangle \\ &= \langle v | v \rangle - \lambda \alpha^* \underbrace{\langle w | v \rangle}_{=\alpha |\langle v | w \rangle|} - \lambda \alpha \underbrace{\langle v | w \rangle}_{=(\alpha |\langle v | w \rangle|)^*} + \lambda^2 \underbrace{\alpha^* \alpha}_{=1} \langle w | w \rangle \\ &= \langle v | v \rangle - 2\lambda |\langle v | w \rangle| + \lambda^2 \langle w | w \rangle. \end{aligned}$$

Das so definierte quadratische Polynom in  $\lambda$  hat also höchstens eine reelle Wurzel, muss also eine nicht positive Diskriminante

$$D = (2|\langle v | w \rangle|)^2 - 4\langle v | v \rangle \langle w | w \rangle \leq 0$$

haben. Das ergibt aber genau die gesuchte Ungleichung.  $\square$

Bewaffnet mit dieser Ungleichung können wir aus (Semi-)Skalarprodukten sofort (Halb-)Normen machen.

**Satz 2.3.** *Auf jedem Prähilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ist durch*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v | v \rangle}, \quad v \in V$$

*eine Norm definiert.*

*Beweis.* Die Wohldefiniertheit und positive Definitheit der Norm sind sofort klar. Für die Homogenität rechnen wir in einer Zeile

$$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v | \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^* \alpha \langle v | v \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2} \|v\|.$$

Und schließlich ergibt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v | v \rangle + \underbrace{\langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle}_{=2\operatorname{Re}\langle v | w \rangle} + \langle w | w \rangle \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v | w \rangle| + \|w\|^2 \\ \text{(C.-S.)} \quad &\leq \|v\|^2 + 2\sqrt{\langle v | v \rangle \langle w | w \rangle} + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2. \end{aligned}$$

## 2.1. Skalarprodukte und Hilberträume

Ziehen wir auf beiden Seiten die Wurzel und beachten, dass alle Terme an den Enden der Ungleichungskette nicht negativ sind, steht die Dreiecksungleichung schon da.  $\square$

**Beispiel 10.** Der  $\mathbb{K}^n$  mit dem euklidischen Skalarprodukt

$$\langle v|w \rangle = \sum_{k=1}^n v_k^* w_k$$

ist uns schon hinlänglich bekannt. Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  können wir die wirkungslose komplexe Konjugation einfach ignorieren.

Wie so oft können wir dieses Beispiel auf Folgenräume erweitern. Auf  $\ell_2^{\mathbb{K}}$  ist durch

$$\langle v|w \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^* w_k$$

ein Skalarprodukt gegeben. Die Sesquilinearität und konjugierte Symmetrie sind anhand der Rechenregeln für (absolut konvergente Reihen) klar.

Wegen  $v_k^* v_k = |v_k|^2$  folgt auch die positive Semidefinitheit.

Ist  $\langle v|v \rangle = 0$ , so müssen alle Summanden  $|v_k|^2 = 0$  sein, wir haben es also mit der trivialen Folge  $0_{\ell_2}$  zu tun.

Wir müssen noch zeigen, dass  $\langle v|w \rangle$  tatsächlich durch eine absolut konvergente Reihe gegeben und damit wohldefiniert ist. Das ist aber gerade die Hölderungleichung (siehe Lemma A.19) für das Zählmaß auf  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

Die von den hier angegebenen Skalarprodukten erzeugten Normen sind genau die bereits bekannten  $\|\cdot\|_2$ -Normen.

**Beispiel 11.** Für allgemeinere Maßräume erhalten wir völlig analog zu  $\ell_2$  auf  $\mathcal{L}_2(\mu; \mathbb{K})$  das Semiskalarprodukt

$$\langle f|g \rangle = \int_{\Omega} f^* g \, d\mu,$$

das auf dem Restklassenraum  $L_2(\mu; \mathbb{K})$  zum Skalarprodukt wird, durch das auch hier die bereits bekannte Norm  $\|\cdot\|_2$  induziert wird.

All diese Räume hatten wir als Banachräume identifiziert. Das motiviert folgende Definition.

**Definition 2.4.** Ein unitärer Raum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  heißt Hilbertraum, wenn er unter der durch das Skalarprodukt induzierten Norm vollständig ist.

Im Rahmen einer Übungsaufgabe rechnen Sie noch folgende Gleichungen nach:

**Lemma 2.5** (Polarisierungsidentitäten). In einem Prähilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  gilt mit der durch das Skalarprodukt induzierte Norm  $\|\cdot\|$  für alle  $v, w \in V$

$$(i) \quad \langle v|w \rangle = \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R})$$

$$(ii) \quad \langle v|w \rangle = \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - i\|v+iw\|^2 + i\|v-iw\|^2) \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C})$$

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

*Beweis.* Auf der rechten Seite beginnend nachrechnen (Übung).  $\square$

Die Polarisierungsidentitäten stellen sicher, dass eine gegebene Norm nicht durch verschiedene Skalarprodukte induziert werden kann. Umgekehrt stellt sich aber die Frage, ob jeder Norm ein Skalarprodukt zugrunde liegt, das durch die jeweilige Polarisierungsidentität gegeben ist. Die Antwort ist negativ, aber wir können ein Kriterium angeben.

**Satz 2.6** (Jordan-von Neumann). *Die Norm  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum wird genau dann durch ein Skalarprodukt induziert, wenn für alle  $v, w \in V$  die Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad (2.1)$$

*gilt. In diesem Fall ist das Skalarprodukt durch die Polarisierungsidentitäten eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Von der Gültigkeit der Parallelogrammgleichung in einem unitären Raum überzeugen Sie sich durch Nachrechnen. Dabei hilft die Skizze eines ganz elementar im euklidischen  $\mathbb{R}^2$  von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

Die Umkehrung zeigen wir für den Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , müssen also zeigen, dass die durch

$$\langle v|w \rangle = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$$

definierte Abbildung  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  ein Skalarprodukt ist. Der rechnerisch etwas aufwendige Teil ist die Linearität.

(I) Für  $x_1, x_2, y \in V$  berechnen wir

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2 + y\|^2 &= \frac{1}{2} (\|(x_1 + y) + x_2\|^2 + \|(x_2 + y) + x_1\|^2) \\ &\quad (2.1) \text{ mit } v = x_2, w = x_1 + y \text{ bzw. } v = x_2 + y, w = x_1 \\ &= \frac{1}{2} (2\|x_1 + y\|^2 + 2\|x_2\|^2 - \|x_1 - x_2 + y\|^2) \\ &\quad + \frac{1}{2} (2\|x_2 + y\|^2 + 2\|x_1\|^2 - \|-x_1 + x_2 + y\|^2) \\ &= \|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (\|x_1 - x_2 + y\|^2 + \|-x_1 + x_2 + y\|^2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

und durch Ersetzen von  $y$  durch  $-y$  analog

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2 - y\|^2 &= \|x_1 - y\|^2 + \|x_2 - y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (\|x_1 - x_2 - y\|^2 + \|-x_1 + x_2 - y\|^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$



Das nutzen wir zum Nachrechnen der Additivität (im ersten Argument):

$$\begin{aligned}
 \langle x_1 + x_2 | y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x_1 + x_2 + y\|^2 - \|x_1 + x_2 - y\|^2) \\
 (\text{via (2.2)}) &= \frac{1}{4} \left[ \|x_1 + y\|^2 + \|x_2 + y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (\|x_1 - x_2 + y\|^2 + \|-x_1 + x_2 + y\|^2) \right] \\
 (\text{via (2.3)}) &= \frac{1}{4} \left[ \|x_1 - y\|^2 + \|x_2 - y\|^2 + \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (\|x_1 - x_2 - y\|^2 + \|-x_1 + x_2 - y\|^2) \right] \\
 &= \frac{1}{4} (\|x_1 + y\|^2 - \|x_1 - y\|^2) + \frac{1}{4} (\|x_2 + y\|^2 - \|x_2 - y\|^2) \\
 &= \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle.
 \end{aligned}$$

(II) Für den Rest der Linearität (im reellen Fall entfällt der Teil mit der komplexen Konjugation) zeigen wir zunächst für  $\alpha = 0$ :

$$\langle 0v | w \rangle = \frac{1}{4} (\|w\|^2 - \|w\|^2) = 0 \langle v | w \rangle$$

und für  $\alpha = 2$  ( $\alpha = 1$  ist trivial):

$$\langle 2v | w \rangle = \langle v + v | w \rangle = \langle v | w \rangle + \langle v | w \rangle = 2 \langle v | w \rangle,$$

und dann induktiv  $\langle \alpha v | w \rangle = \alpha \langle v | w \rangle$  für  $\alpha \in \mathbb{N}_0$ . Für nicht negative rationale Zahlen  $\alpha = \frac{k}{m}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$  erhalten wir

$$m \langle \alpha v | w \rangle = \langle m \alpha v | w \rangle = \langle kv | w \rangle = k \langle v | w \rangle,$$

was nach Teilen durch  $m$  die Aussage für  $\alpha \in \mathbb{Q}_+$  ergibt. Zu den negativen rationalen Zahlen  $\alpha$  kommen wir dann via

$$0 = \langle 0_V | w \rangle = \langle \alpha v + (-\alpha v) | w \rangle = \langle \alpha v | w \rangle + \underbrace{\langle -\alpha v | w \rangle}_{-\alpha \langle v | w \rangle}.$$

Wegen der Stetigkeit der Normen (und damit auch von  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  nach der Definition) folgt daraus  $\langle \alpha v | w \rangle = \alpha \langle v | w \rangle$  für beliebige  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $v, w \in V$ .

(III) Für die positive Definitheit rechnen wir nach

$$\langle v | v \rangle = \frac{1}{4} (\|2v\|^2 - \|0\|^2) = \|v\|^2 \geq 0$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $v = 0$ .

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

Die Symmetrie ist dank der Homogenität der Norm auch leicht nachzurechnen

$$\langle w|v \rangle = \frac{1}{4} (\|w+v\|^2 - \underbrace{\|w-v\|^2}_{=-(v-w)}) = \frac{1}{4} (\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2) = \langle v|w \rangle.$$

Zusammen haben wir also gezeigt, dass es sich um ein Skalarprodukt handelt.

Im komplexen Fall werden die Rechnungen deutlich länger, aber im Prinzip ganz ähnlich.  $\square$

## 2.2. Orthogonale Projektionen, erster Satz von Riesz

Wir hatten erwähnt, dass das Skalarprodukt uns bei der Bestimmung von Winkeln helfen soll. Der erste Schritt ist folgende Definition.

**Definition 2.7.** Zwei Vektoren  $v, w \in V$  in einem Prähilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  heißen *orthogonal*, geschrieben  $v \perp w$ , falls  $\langle v|w \rangle = 0$  gilt.

Die Familie  $\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset V$  heißt *Orthogonalsystem*, falls die  $v_i$  paarweise orthogonal sind. Gilt zusätzlich noch  $\langle v_i|v_i \rangle = 1$  für alle  $i \in \mathcal{I}$ , so sprechen wir von einem *Orthonormalsystem*.

**Beispiel 12.** In  $\ell_2$ , versehen mit dem Skalarprodukt aus Beispiel 10, ist die Familie  $\{b^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , gegeben durch  $b_k^{(n)} = \delta_{k,n}$ , ein Orthonormalsystem. Im endlichdimensionalen Fall sind das gerade die Standardeinheitsvektoren.

**Beispiel 13.** In  $L_2([-\pi, \pi]; \mathbb{K})$  sind sowohl  $S = \{v_k = \sin(k \cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$  als auch  $C = \{w_k = \cos(k \cdot)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  Orthogonalsysteme, wie wir schnell durch Integration nachrechnen<sup>1</sup>. Sie rechnen sogar nach, dass  $S \cup C$  ein Orthogonalsystem ist. Ferner berechnen wir

$$\langle v_k|v_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kt) \, dt = \pi,$$

$$\langle w_k|w_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kt) \, dt = \begin{cases} 2\pi & \text{für } k = 0, \\ \pi & \text{für } k \geq 1. \end{cases}$$

Normieren wir die  $v_k$  und  $w_k$  entsprechend und  $\sqrt{\pi}$  oder  $\sqrt{2\pi}$ , so erhalten wir sogar ein Orthonormalsystem.

**Bemerkung.** Wir finden sofort den aus der euklidischen Ebene bekannten Satz des Pythagoras wieder. Sind  $v, w \in V$  mit  $v \perp w$ , so gilt

$$\|v - w\|^2 = \langle v - w|v - w \rangle = \langle v|v \rangle - \langle v|w \rangle - \langle w|v \rangle + \langle w|w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Die gleiche Rechnung funktioniert natürlich auch für  $v + w$ .

<sup>1</sup>Für die diese stetigen Funktionen genügt auf dem Kompaktum  $[-\pi, \pi]$  das Riemann- oder Regelintegral.

**Lemma 2.8.** Sind  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum,  $v \in V$  beliebig und  $M \subset V$  dicht in  $V$ , so gilt

$$w \perp v \text{ für alle } w \in M \implies v = 0.$$

*Beweis.* Übung (man nutze die Stetigkeit des Skalarprodukts). □

**Definition 2.9.** Für zwei  $\mathbb{K}$ -Hilberträume  $(V_i, \langle \cdot | \cdot \rangle_i)$ ,  $i = 1, 2$ , definieren wir die orthogonale (direkte) Summe  $(V_1 \oplus V_2, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  von  $V_1$  und  $V_2$  durch

$$V_1 \oplus V_2 = \{(v_1, v_2) : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}, \quad \langle (v_1, v_2) | (w_1, w_2) \rangle := \langle v_1 | w_1 \rangle_1 + \langle v_2 | w_2 \rangle_2.$$

Dass es sich dabei um einen Hilbertraum handelt, zeigt das folgende Lemma.

**Lemma 2.10.** Sind  $(V_i, \langle \cdot | \cdot \rangle_i)$ ,  $i = 1, 2$ , Hilberträume, so ist die ihre orthogonale Summe ebenfalls ein Hilbertraum.

*Beweis.* Dass es sich bei  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  um ein Skalarprodukt handelt, rechnen Sie schnell nach. Zur Vollständigkeit stellen wir fest, dass die erzeugte Norm durch

$$\|(v_1, v_2)\| = \sqrt{\langle (v_1, v_2) | (v_1, v_2) \rangle} = \sqrt{\langle v_1 | v_1 \rangle_1 + \langle v_2 | v_2 \rangle_2} = (\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben ist. Ist also  $\left((v_1^{(n)}, v_2^{(n)})\right)_n$  eine Cauchyfolge in  $V_1 \oplus V_2$ , so sind notwendigerweise  $(v_i^{(n)})_n$  Cauchyfolgen in  $V_i$ ,  $i = 1, 2$ , haben also Grenzwerte  $v_i = \lim_{n \rightarrow \infty} v_i^{(n)}$ . Dann gilt aber zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  für  $n$  so groß, dass  $\|v_i - v_i^{(n)}\|_i < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\|(v_1, v_2) - (v_1^{(n)}, v_2^{(n)})\| = \sqrt{\|v_1 - v_1^{(n)}\|_1^2 + \|v_2 - v_2^{(n)}\|_2^2} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon,$$

also ist  $(v_1, v_2)$  Grenzwert der Folge  $\left(v_1^{(n)}, v_2^{(n)}\right)_n$ . □

**Beispiel 14.** Die klassischen Fälle sind  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$ . Sogar das “richtige” Skalarprodukt erhalten wir.

**Beispiel 15.** Als weniger triviales Beispiel gilt für  $a < b < c$ :

$$L_2([a, b]; \mathbb{K}) \oplus L_2([b, c]; \mathbb{K}) = L_2([a, c]; \mathbb{K}).$$

Tatsächlich ist mit  $v = v_1 \mathbf{1}_{[a, b]} + v_2 \mathbf{1}_{[b, c]}$ , also

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t) & \text{für } t \in [a, b], \\ v_2(t) & \text{für } t \in [b, c], \end{cases}$$

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

(wir beachten, dass die Änderung auf der Nullmenge  $\{b\}$  die Funktion  $f$  im  $L_2$ -Sinn nicht ändert), das Skalarprodukt durch

$$\begin{aligned}
 \langle v|w \rangle &= \langle v_1|w_1 \rangle_1 + \langle v_2|w_2 \rangle_2 \\
 &= \int_{[a,b]} v_1(t)^* w_1(t) dt + \int_{[b,c]} v_2(t)^* w_2(t) dt \\
 &= \int_{[a,c]} v_1(t)^* w_1(t) \mathbf{1}_{[a,b)}(t) + v_2(t)^* w_2(t) \mathbf{1}_{[b,c]}(t) dt \\
 &= \int_{[a,c]} v(t)^* w(t) \mathbf{1}_{[a,b)}(t) + v(t)^* w(t) \mathbf{1}_{[b,c]}(t) dt \\
 &= \int_{[a,c]} v(t)^* w(t) dt.
 \end{aligned}$$

Offensichtlich wir die Summanden einer solchen orthogonalen Summe als Unterräume von  $V_1 \oplus V_2$  auffassen. Da es sich bei ihnen kraft der Inklusionen

$$\iota_1 : V_1 \ni v_1 \mapsto (v_1, 0_{V_2}) \in V_1 \oplus V_2, \quad \iota_2 : V_2 \ni v_2 \mapsto (0_{V_1}, v_2) \in V_1 \oplus V_2$$

um vollständige Räume nicht nur bezüglich ihres jeweils eigenen Skalarprodukts, sondern auch bezüglich  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  handelt, sind sie sogar abgeschlossen. Umgekehrt ist jeder abgeschlossene Unterraum  $U$  eines beliebigen Hilbertraums  $V$  kraft Lemma 1.17 ebenfalls vollständig unter der durch die Einschränkung des Skalarprodukts definierten Norm. Wir bezeichnen abgeschlossene Untervektorräume von Hilberträumen daher auch als Unterhilberträume oder kurz als Unterräume des gegebenen Hilbertraums.

Für die Summanden einer orthogonalen Summe gilt mittels der oben angegebenen Inklusionen sogar noch mehr:

$$\langle (v_1, 0_{V_2}) | (0_{V_1}, v_2) \rangle = \langle v_1, 0 \rangle_1 + \langle 0, v_2 \rangle = 0 \quad \text{für alle } v_1 \in V_1, v_2 \in V_2.$$

**Definition 2.11.** Zwei Unterräume  $U_1, U_2$  eines Hilbertraums  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  heißen orthogonal, geschrieben  $U_1 \perp U_2$ , falls

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = 0 \quad \text{für alle } v_1 \in U_1, v_2 \in U_2$$

gilt.

Die obige Identifizierung der Summanden  $V_1, V_2$  mit den Unterräumen

$$\tilde{V}_1 := \iota_1(V_1) = \{(v_1, 0_{V_2}) : v_1 \in V_1\} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{V}_2 := \iota_2(V_2) = \{(0_{V_1}, v_2) : v_2 \in V_2\}$$

von  $V_1 \oplus V_2$  war bisher rein formal über die Inklusionen  $\iota_1, \iota_2$  gegeben. Noch ist uns nicht ganz klar, ob diese Identifizierung gerechtfertigt ist.

**Definition 2.12.** Eine Abbildung  $J : V \rightarrow Y$  zwischen den Hilberträumen  $V$  und  $Y$  heißt isometrischer Isomorphismus, wenn sie linear und bijektiv ist und

$$\langle J(v) | J(w) \rangle_Y = \langle v | w \rangle_V \quad \text{für alle } v, w \in V$$

erfüllt. Existiert ein isometrischer Isomorphismus von  $V$  nach  $Y$ , so heißen  $V$  und  $Y$  isometrisch isomorph.

## 2.2. Orthogonale Projektionen, erster Satz von Riesz

Zwei isometrisch isomorphe Hilberträume sind als Hilberträume nicht von einander zu unterscheiden. Selbstverständlich gilt durch die Bijektivität auch für die Umkehrabbildung  $J^{-1} : Y \rightarrow V$  eines isometrischen Isomorphismus

$$\langle J^{-1}(x) | J^{-1}(y) \rangle_V = \langle x | y \rangle_Y,$$

also ist auch  $J^{-1}$  ein isometrischer Isomorphismus ist.

Nach unserer bisherigen Diskussion ist sofort klar, dass  $\iota_i : V_i \rightarrow \tilde{V}_i$ ,  $i = 1, 2$ , isometrische Isomorphismen sind.

Wir merken uns also, dass die Summanden  $V_1, V_2$  einer orthogonalen Summe  $V_1 \oplus V_2$  (isometrisch isomorph zu und damit nicht unterscheidbar von den) Unterhilberträumen  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2$  sind, die ihrerseits orthogonal sind und die Summe vollständig aufspannen, da nach Konstruktion jedes  $v \in V_1 \oplus V_2$  als  $v = (v_1, v_2)$  mit gewissen  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2$  gegeben ist. Wir werden also ab sofort auf die Unterscheidung von  $V_i$  und  $\tilde{V}_i$  verzichten und einfach  $V_i$  als Unterraum von  $V_1 \oplus V_2$  auffassen.

Induktiv können wir nun auch endliche orthogonale Summen mehrerer Hilberträume definieren. Mit etwas Arbeit geht sogar noch mehr.

**Definition 2.13.** Für  $n \in \mathbb{N}$  seien die Hilberträume  $(V_n, \langle \cdot | \cdot \rangle_n)$  über dem gleichen Körper  $\mathbb{K}$  gegeben. Wir setzen

$$V := \left\{ (v_n)_{n \in \mathbb{N}} : v_n \in V_n \text{ für alle } n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n | v_n \rangle < \infty \right\}.$$

Auf  $V$  definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle (v_n)_n | (w_n)_n \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n | w_n \rangle_n$$

und nennen  $V = \bigoplus_{n=1}^{\infty} V_n$  die orthogonale Summe der  $V_n$ .

**Beispiel 16.** Im Fall  $V_n = \mathbb{K}^1 (= \mathbb{K})$ , jeweils versehen mit dem (Skalar-)produkt  $\langle v | w \rangle_n = v^* w$ , ist das genau die Definition von  $\ell_2^{\mathbb{K}}$ .

**Bemerkung.** Tatsächlich ist das so definierte  $V$  nach Lemma 2.2 ein Vektorraum. Dass  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt ist, rechnen wir ganz analog zum  $\ell_2$  nach. Und auch die Vollständigkeit folgt exakt wie beim  $\ell_2$  (dort aus der Vollständigkeit von  $\mathbb{K}$  unter dem Betrag, hier aus der Vollständigkeit der  $V_n$  unter den von  $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$  definierten Normen). Die Definition ergibt also Sinn, denn  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ist in der Tat ein Hilbertraum.

Wieder können wir jedes der  $V_n$  per isometrischer Isomorphie mit einem Unterhilbertraum der abzählbaren orthogonalen Summe identifizieren.

Wir kommen nun zur umgekehrten Frage: Finden wir zu jedem Unterhilbertraum  $U$  eines Hilbertraums  $V$  stets einen Unterraum  $W$  derart, dass  $U \perp W$  und  $V = U \oplus W$  ist? Die Antwort wird der erste Satz von Riesz liefern, für den wir aber noch ein paar Vorbereitungen brauchen.

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

Zur Erinnerung wiederholen wir noch einmal das Konzept einer konvexen Teilmenge eines Vektorraums.

**Definition 2.14.** Eine Teilmenge  $A \subset V$  eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums heißt konvex, wenn für alle  $v, w \in A$  und  $\lambda \in [0, 1]$  die Konvexkombination  $\lambda v + (1 - \lambda)w$  auch in  $A$  liegt.

Lassen wir  $\lambda$  alle Werte in  $[0, 1]$  durchlaufen, erhalten wir die griffige Formulierung, dass  $A$  genau dann konvex ist, wenn für je zwei Punkte in  $A$  auch deren Verbindungsstrecke in  $A$  liegt.

**Beispiel 17.** (a) Wir haben uns schon davon überzeugt, dass Kugeln in normierten linearen Räumen konvex sind.

(b) Eine besonders wichtige Klasse konvexer Teilmengen sind lineare Teilräume eines gegebenen Vektorraums. Die Abgeschlossenheit des Unterraums unter den Vektorraumoperationen liefert  $\lambda v + (1 - \lambda)w \in A$  sogar für beliebige  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $v, w \in A$ .

**Lemma 2.15.** Sind  $A \subset V$  nicht leer, konvex und abgeschlossen im Hilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  und  $v \in V$  beliebig, so existiert ein eindeutig bestimmtes  $w_0 \in A$  derart, dass

$$\|v - w_0\| = \text{dist}(v, A) \equiv \inf_{w \in A} \|v - w\|.$$

Wir finden also zu gegebenem  $v \in V$  genau ein  $w_0 \in A$ , das unter allen Punkten in  $A$  am nächsten an  $v$  liegt.

*Beweis.* Für  $v \in A$  ist einfach  $w_0 = v$ .

Wir betrachten nun  $v \in V \setminus A$ . Nach Definition des Infimums finden wir eine Folge  $(w_n)_n$  in  $A$  derart, dass

$$\|v - w_n\| \rightarrow \text{dist}(v, A) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt. Wir schreiben kurz  $d(v) := \text{dist}(v, A)$ .

(I)  $(w_n)_n$  ist Cauchyfolge:

$$\begin{aligned} 0 \leq \|w_n - w_m\|^2 &= \|(w_n - v) + (v - w_m)\|^2 \\ &\stackrel{(2.1)}{=} 2\|w_n - v\|^2 + 2\|v - w_m\|^2 - \|2v - w_n - w_m\|^2 \\ &= 2 \underbrace{\|w_n - v\|^2}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(v)^2} + 2 \underbrace{\|w_m - v\|^2}_{\xrightarrow{m \rightarrow \infty} d(v)^2} - 4 \underbrace{\left\|v - \frac{1}{2}(w_n + w_m)\right\|^2}_{\substack{\in A \\ \geq d(v)^2}} \end{aligned}$$

Für hinreichend große  $m, n$  ist die rechte Seite also kleiner als jedes beliebig vorgegebene  $\varepsilon > 0$ , also ist  $(w_n)_n$  tatsächlich eine Cauchyfolge.

(II) Der Grenzwert  $w_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$  der Cauchyfolge  $(w_n)_n$  liegt in der abgeschlossenen Menge  $A$  und erfüllt wegen der Stetigkeit der Norm:

$$\|w_0 - v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - v\| = \text{dist}(v, A),$$

wie behauptet.

(III) Wir haben noch die Eindeutigkeit von  $w_0$  zu zeigen. Sei also  $u_0$  ein weiterer Vektor in  $A$  mit  $\|v - u_0\| = d(v)$ . Dann gilt wieder mittels Parallelogrammgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|w_0 - v + v - u_0\|^2 \\ &= 2\|w_0 - v\|^2 + 2\|v - u_0\|^2 - 4\left\|v - \frac{1}{2}(u_0 + w_0)\right\|^2 \\ &\leq 2d(v)^2 + 2d(v)^2 - 4d(v)^2 = 0, \end{aligned}$$

also  $\|w_0 - u_0\| = 0$ , d.h.,  $u_0 = w_0$ . □

Das folgende Lemma passt hier gut als Übungsaufgabe, wird aber erst später benutzt.

**Lemma 2.16.** *Ist  $C \subset V$  eine konvexe Teilmenge eines normierten linearen Raums  $V$ , so sind der Abschluss  $\bar{C}$  und für jedes  $r > 0$  die  $r$ -Umgebung*

$$U_r(C) = \{v \in V : \|v - w\| < r \text{ für ein } w \in C\} \equiv \bigcup_{w \in C} B_r(w)$$

*von  $C$  auch konvex.*

*Beweis.* Übung. □

Als Folgerung erhalten wir den ersten Satz von Riesz. Zunächst führen wir noch eine Notation ein.

**Definition 2.17.** *Zur Teilmenge  $A \subset V$  eines Hilbertraums  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  bezeichnet*

$$A^\perp := \{w \in V : \langle w | v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in A\}$$

*das orthogonale Komplement von  $A$ .*

Streng genommen handelt es sich um das orthogonale Komplement des von  $A$  aufgespannten linearen Unterraums. Für  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  mit beliebigen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  und  $v_1, \dots, v_n \in A$  sowie  $w \in A^\perp$  gilt nämlich

$$\langle w | v \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle w | v_k \rangle = 0.$$

Lemma 2.8 besagt, dass das orthogonale Komplement einer dichten Teilmenge  $M \subset V$  trivial ist:  $M^\perp = \{0_V\}$ . Überzeugen Sie sich, dass diese Aussage schon in der Einheitssphäre von  $V$  dichte Teilmengen  $M$  gilt.

Wir formulieren den folgenden Satz nur für abgeschlossene Teilräume, also Unterhilberträume.

**Satz 2.18** (1. Satz von Riesz). *Für jeden Unter(hilbert)raum  $V_1$  des Hilbertraums  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ist  $V_1^\perp$  ein Unterhilbertraum von  $V$ , und es gilt  $V_1 \oplus V_1^\perp = V$ .*

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

Die letzte Aussage bedeutet, dass jedes  $v \in V$  eindeutig als  $v = v_1 + v_2$  mit  $v_1 \in V_1$  und  $v_2 \in V_1^\perp$  geschrieben werden kann. Spätestens dafür brauchen wir die Vollständigkeit von  $V_1$ .

*Beweis.* (I) Existenz der Zerlegung.  $V_1$  ist abgeschlossen und konvex, also finden wir zu  $v \in V$  ein eindeutig bestimmtes

$$v_1 := \pi_1(v) \in V_1 \quad \text{mit} \quad \|v_1 - v\| = \text{dist}(v, V_1).$$

Für beliebige  $\alpha \in \mathbb{K}$  und  $u_1 \in V_1$  gilt dann

$$\|v - v_1\| = \inf_{w \in V_1} \|v - w\| \leq \|v - (v_1 + \alpha u_1)\|.$$

Daraus folgt (Übung!)  $v_2 := v - v_1 \perp u_1$  für beliebige  $u_1 \in V_1$ , also  $v_2 \in V_1^\perp$ . Nach Definition von  $v_2$  gilt natürlich auch  $v = v_1 + v_2$ .

(II) Eindeutigkeit. Sind  $\tilde{v}_1 \in V_1, \tilde{v}_2 \in V_1^\perp$  weitere Vektoren mit  $v_1 + v_2 = v = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2$ , so erhalten wir für

$$u := \underbrace{v_1 - \tilde{v}_1}_{\in V_1} = \underbrace{\tilde{v}_2 - v_2}_{\in V_1^\perp}$$

$\langle u|u \rangle = 0$ , also  $u = 0$ . Das ist nur der Fall, wenn  $v_1 = \tilde{v}_1$  und  $v_2 = \tilde{v}_2$  sind.  $\square$

Einen ganz ähnlichen Satz für allgemeine Banachräume werden wir in einer Übungsaufgabe kennen lernen und daraus eine Verallgemeinerung des Satzes von Heine und Borel auf allgemeine endlichdimensionale normierte Vektorräume schließen.

Die Aussage und der Beweis des Satzes motivieren folgende Notation.

**Definition 2.19.** Sind  $V_1, V_2$  Unterräume des Hilbertraums  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  mit  $V_2 = V_1^\perp$  (also  $V = V_1 \oplus V_2$ ), so bezeichnen wir zu gegebenem  $v \in V$  die eindeutig bestimmten  $\pi_1(v) := v_1 \in V_1, \pi_2(v) := v_2 \in V_2$  mit  $v = v_1 + v_2$  als orthogonale Projektionen von  $v$  auf  $V_1$  bzw.  $V_2$ .

**Lemma 2.20.** Für den Unterraum  $V_1$  des Hilbertraums  $V$  sind die orthogonalen Projektionen  $\pi_1$  auf  $V_1$  und  $\pi_2$  auf  $V_2 = V_1^\perp$  lineare Abbildungen mit  $\text{im } \pi_1 = \ker \pi_2 = V_1$  und  $\text{im } \pi_2 = \ker \pi_1 = V_2$ .

*Beweis.* (I) Zur Linearität haben wir zu  $v, w \in V$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\pi_1(\alpha v + w) = \alpha v_1 + w_1$$

zu zeigen. Wir müssen als dank der Eindeutigkeit nur zeigen, dass  $\alpha v_1 + w_1 (\in V_1)$  den Abstand von  $\alpha v + w$  zu  $V_1$  minimiert. Sei dazu  $u \in V_1$  beliebig. Wegen  $\alpha v_2 + w_2 \in V_1^\perp$  liefert der Pythagoras in der Tat:

$$\begin{aligned} \|u - (\alpha v + w)\|^2 &= \|u - (\alpha v_1 + w_1) - (\alpha v_2 + w_2)\|^2 \\ &= \|u - (\alpha v_1 + w_1)\|^2 + \|\alpha v_2 + w_2\|^2 \\ &= \underbrace{\|u - (\alpha v_1 + w_1)\|^2}_{\geq 0} + \|\alpha v + w - (\alpha v_1 + w_1)\|^2. \end{aligned}$$



## 2.2. Orthogonale Projektionen, erster Satz von Riesz

(II) Die Aussagen zu Kern und Bild sind leicht gezeigt:

$$\ker \pi_1 = \{v \in V : \pi_1(v) = 0\} = \{v \in V : v = 0 + v_2 \text{ für ein } v_2 \in V_1^\perp\} = V_1^\perp.$$

Die anderen Aussagen dieses Typs ergeben sich ganz analog.  $\square$

**Beispiel 18.** Wir betrachten den Raum  $V = L_2([0, \pi]; \mathbb{K})$  und als  $V_1$  den Unterraum der linearen Funktionen.  $V_1$  wird also von den Funktionen  $\mathbf{1}_{[0, \pi]}$  und  $\text{id}_{\mathbb{R}}$  aufgespannt:

$$V_1 = \{\alpha \mathbf{1}_{[0, \pi]} + \beta \text{id} : \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}.$$

Wir wollen die orthogonale Projektion von  $v = \sin$  auf  $V_1$  berechnen. Wir haben also  $\|\sin - \alpha \mathbf{1}_{[0, \pi]} - \beta \text{id}\|_2$  bezüglich  $\alpha$  und  $\beta$  zu minimieren. Wir minimieren das Quadrat:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta) &= \|\sin - \alpha \mathbf{1}_{[0, \pi]} - \beta \text{id}\|_2^2 \\ &= \int_0^\pi \sin^2 t + \alpha^2 + \beta^2 t^2 - 2\alpha \sin t - 2\beta t \sin t + 2\alpha\beta t \, dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \alpha^2 \pi + \frac{\beta^2}{3} \pi^3 - 4\alpha - 2\beta\pi + \alpha\beta\pi^2. \end{aligned}$$

Wir berechnen

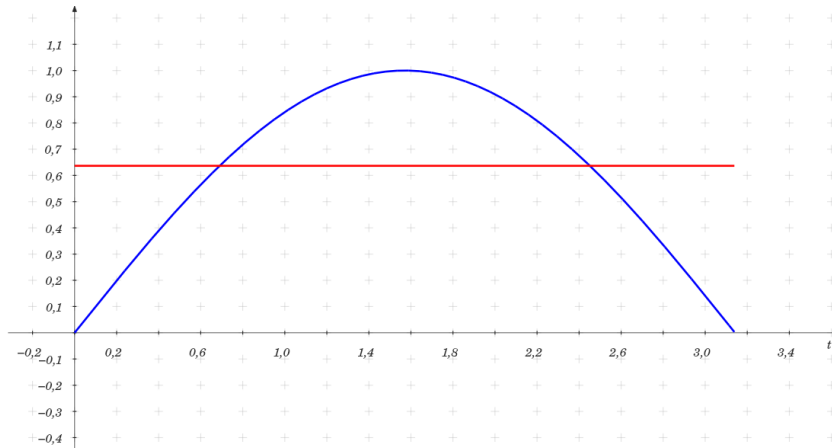
$$DF = \begin{pmatrix} 2\alpha\pi - 4 + \beta\pi^2 \\ \frac{2}{3}\pi^3\beta - 2\pi + \alpha\pi^2 \end{pmatrix},$$

lösen das lineare Gleichungssystem  $DF = 0$  nach  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \frac{2}{\pi}$  auf und überzeugen uns, dass die Hessesche

$$D^2F = \begin{pmatrix} 2\pi & \pi^2 \\ \pi^2 & \frac{2}{3}\pi^3 \end{pmatrix}$$

(unabhängig von  $\alpha$  und  $\beta$ ) positiv definit ist (da  $a_{1,1} = 2\pi > 0$  und  $\det A = \frac{1}{3}\pi^4 > 0$ ). Bei den so berechneten  $\alpha, \beta$  finden wir also ein Minimum vor:

$$v_1(t) = \frac{2}{\pi}.$$



Das war einiges an Rechnung (und man stelle sich nur vor, der Unterraum  $V_1$  wäre von höherer Dimension als 2). Wir werden in Kürze einen deutlich einfacheren Weg, orthogonale Projektionen auf abgeschlossene Unterräume zu berechnen, kennen lernen.

### 2.3. Stetige lineare Funktionale, zweiter Satz von Riesz

Wir beginnen mit dem Begriff des (linearen) Funktional, der namensgebend für den Titel unserer Vorlesung ist. Diese definieren wir zunächst auf beliebigen normierten Vektorräumen.

**Definition 2.21.** 1. Ein lineares Funktional auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ist eine ( $\mathbb{K}$ -)lineare Abbildung  $\phi : V \supset \mathcal{D}_\phi \rightarrow \mathbb{K}$ :

$$\phi(\alpha v + w) = \alpha \phi(v) + \phi(w) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{K}, v, w \in \mathcal{D}_\phi.$$

Dabei ist der Definitionsbereich  $\mathcal{D}_\phi$  von  $\phi$  ein linearer Unterraum von  $V$ .

2. Ein sublineares Funktional auf  $V$  ist eine Abbildung  $p : V \supset \mathcal{D}_p \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass für alle  $v, w \in \mathcal{D}_p$  und  $\alpha > 0$

$$p(v + w) \leq p(v) + p(w) \quad \text{und} \quad p(\alpha v) \leq \alpha p(v)$$

gelten.

3. Ist  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum, so nennen wir ein lineares Funktional  $\phi$  auf  $V$  stetig, falls es auf ganz  $V$  definiert und bezüglich der durch  $\|\cdot\|$  erzeugten Topologie (folgen-)stetig ist:

$$\|v_n - v\| \rightarrow 0 \implies |\phi(v_n) - \phi(v)| \rightarrow 0.$$

**Bemerkung.** Da  $(V, \|\cdot\|)$  und  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  insbesondere metrische Räume sind, hätten wir völlig äquivalent auch  $\varepsilon$ - $\delta$ -Stetigkeit oder schlicht Stetigkeit bezüglich der von  $\|\cdot\|$  auf  $V$  und von  $|\cdot|$  auf  $\mathbb{K}$  induzierten Topologien fordern können.

Überzeugen Sie sich zur Übung, dass für ein sublineares Funktional sogar  $p(\alpha v) = \alpha p(v)$  für  $v \in \mathcal{D}_p$ ,  $\alpha \geq 0$  gilt.

Man beachte, dass wir nicht von der Stetigkeit in einem Punkt  $v_0$  gesprochen haben. Das ist kein Zufall.

**Lemma 2.22.** Ein lineares Funktional ist entweder in jedem oder in keinem  $v_0 \in V$  stetig.

*Beweis.* Ist  $\phi$  in irgend einem  $v_0$  stetig, so gilt für jedes  $w_0 \in V$  und jede Folge  $(w_n)_n$  mit  $w_n \rightarrow w_0$

$$\begin{aligned} |\phi(w_n) - \phi(w_0)| &= |\phi(w_n) - \phi(w_0 - v_0) + \phi(w_0 - v_0) - \phi(w_0)| \\ &= |\phi(\underbrace{w_n - w_0 + v_0}_{=: v_n \rightarrow v_0}) - \phi(v_0)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dabei haben wir  $\|v_n - v_0\| = \|w_n - w_0 + v_0 - v_0\| = \|w_n - w_0\| \rightarrow 0$  und zuvor die Linearität von  $\phi$  benutzt.  $\square$

Insbesondere genügt uns also die Stetigkeit in der Null, um auf die globale Stetigkeit eines linearen Funktional zu schließen.

**Beispiel 19.** Als prototypisches Beispiel eines global definierten sublinearen Funktional auf  $(V, \|\cdot\|)$  dient die Norm selbst:  $p(v) = \|v\|$ . Die Stetigkeit ist hier auch klar, und die Bedingungen für die Sublinearität sind einfach die Dreiecksungleichung und die Homogenität der Norm.

Jede Halbnorm ist ebenfalls ein sublineares Funktional, eine Quasinorm (z.B.  $p = \|\cdot\|_1$  auf  $\ell_\infty \not\supseteq \mathcal{D}_p = \ell_1$ ) wäre ein Beispiel für ein nicht global definiertes sublineares Funktional. Umgekehrt überzeugen Sie sich schnell, dass ein stetiges lineares Funktional  $\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$  via  $p(v) := |\phi(v)|$  ein sublineares Funktional und sogar eine Halbnorm definiert.

**Beispiel 20.** Auf  $V = L_1([0, 1])$  ist

$$\phi(v) = \int_{[0,1]} v(t) dt$$

ein stetiges lineares Funktional, wie Sie schnell nachrechnen, wenn Ihnen diese Aussage aus der Maßtheorie nicht ohnehin schon geläufig ist.

Die global definierten linearen Funktionale bilden unter punktweisen Operationen ihrerseits wieder einen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum:

$$(\alpha\phi + \psi)(v) := \alpha\phi(v) + \psi(v) \quad \text{für } v \in V.$$

**Definition 2.23.** Der Raum der linearen Funktionale  $\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$  auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  wird als  $V^*$  bezeichnet und heißt (algebraischer) Dualraum von  $V$ .

Für einen normierten Vektorraum bezeichnen wir mit  $V'$  den Raum der stetigen linearen Funktionale auf  $V$  und nennen  $V'$  der (topologischen) Dualraum von  $V$ .

Sie überzeugen sich schnell, dass Summen und skalare Vielfache von stetigen linearen Funktionalen stetig sind und folgern, dass  $V'$  ein linearer Unterraum von  $V^*$  ist.

Wir wissen aus der Analysis 2, dass lineare Abbildungen  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zwingend stetig sind. Das gilt für beliebige endlich-dimensionale Räume, und zwar unabhängig von der Norm<sup>2</sup>. Damit gibt es für endlichdimensionale normierte Vektorräume keinen Unterschied zwischen algebraischem und topologischem Dualraum. Da drängt sich die Frage auf, wie ein unstetiges lineares Funktional aussehen sollte. Gibt es derartiges überhaupt?

**Beispiel 21.** Wir betrachten den Raum  $V = C^1([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$  der stetig differenzierbaren<sup>3</sup> Funktionen  $v : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , versehen mit der Norm

$$\|v\|_\infty = \max_{-\pi \leq t \leq \pi} |v(t)|.$$

Da stetig differenzierbare Funktionen insbesondere stetig und Summen sowie Vielfache von stetig differenzierbaren Funktionen stetig differenzierbar sind, ist  $V$  natürlich ein linearer Unterraum des Banachraums  $(C([-\pi, \pi]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ , also tatsächlich ein normierter Vektorraum. Auf  $V$  betrachten wir nun das lineare Funktional

$$\phi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(v) = v'(0).$$

<sup>2</sup>Wir erinnern uns, dass auf endlichdimensionalen Räumen alle Normen äquivalent sind.

<sup>3</sup>In  $t = 0$  bzw.  $t = \pi$  genügt uns die einseitige Ableitung.

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

Das ist auf ganz  $V$  definiert und offensichtlich linear.

Nun betrachten wir die durch

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(n \cdot), \quad \text{also } v_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nt)$$

gegebene Folge  $(v_n)_n$  in  $V$ , für die offensichtlich

$$\|v_n - 0_V\|_\infty = \max_{-\pi \leq t \leq \pi} |v_n(t) - 0| = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0,$$

also gilt  $v_n \rightarrow v = 0_V$  in  $V$ . Allerdings ist

$$\phi(v_n) = \frac{n}{\sqrt{n}} \cos(nt) \Big|_{t=0} = \sqrt{n} \rightarrow \infty, \quad \text{aber } \phi(v) = 0.$$

Wir bemerken, dass es sich bei  $V$  unter der angegebenen Norm nicht um einen Banachraum handeln kann, da  $V$  den Raum der Polynome enthält, welcher seinerseits bereits dicht in  $C([-\pi, \pi]; \mathbb{R})$  liegt.

Stetige lineare Funktionale können wir auch anders erkennen.

**Lemma 2.24.** Ein lineares Funktional  $\phi : V \rightarrow \mathbb{K}$  auf einem normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  ist genau dann stetig, wenn ein  $c \geq 0$  derart existiert, dass für alle  $v \in V$

$$|\phi(v)| \leq c\|v\|$$

gilt.

*Beweis.* Haben wir ein solches  $c$  gefunden, so folgt aus der Bedingung die Stetigkeit in der Null:

$$|\phi(v_n) - \underbrace{\phi(0_V)}_{=0}| \leq c\|v_n\| \rightarrow 0,$$

falls  $v_n \rightarrow 0_V$ , also ist  $\phi$  dann überall stetig.

Ist umgekehrt  $\phi$  in  $0_V$  stetig, so existiert zu  $\varepsilon = 1 > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, dass  $|\phi(v) - 0| < 1$  für alle  $v \in V$  mit  $\|v - 0_V\| < \delta$  gilt. Für alle  $w \in V \setminus \{0\}$  gilt dann mit  $c := \frac{2}{\delta}$ :

$$|\phi(w)| = \left| \phi \left( \frac{2\|w\|}{\delta} \frac{\delta}{2\|w\|} w \right) \right| = \left| \frac{2\|w\|}{\delta} \right| \left| \phi \left( \underbrace{\frac{\delta}{2\|w\|} w}_{=v, \|v\|=\frac{\delta}{2}} \right) \right| < \frac{2}{\delta} \|w\| \cdot 1 = c\|w\|.$$

□

Man spricht im Rahmen der Funktionalanalysis daher auch gern von beschränkten statt stetigen linearen Funktionalen und meint mit beschränkt, dass ein  $c$  wie in der Aussage des Lemmas existiert.

**Definition 2.25.** Auf dem Vektorraum  $V'$  zu einem normierten Vektorraum  $(V, \|\cdot\|_V)$ ,  $V \neq \{0\}$ , definieren wir die Operatornorm  $\|\cdot\|_{V'}$  durch

$$\|\phi\|_{V'} = \sup\{|\phi(v)| : v \in V, \|v\|_V = 1\}.$$

### 2.3. Stetige lineare Funktionale, zweiter Satz von Riesz

**Bemerkung.** Dass es sich tatsächlich um eine Norm handelt, rechnen wir schnell nach. Zunächst ist die Norm endlich, denn zu gegebenem  $\phi$  gilt  $\|\phi\|_{V'} \leq c$  für jedes  $c$ , das die Bedingung des Lemmas erfüllt<sup>4</sup>.

Ist  $\phi = 0_{V'}$  das Nullfunktional, so ist  $\|\phi\|_{V'}$  das Supremum über viele Nullen, also  $\|0_{V'}\| = 0$ . Auch sonst nehmen wir stets das Supremum über nicht negative Zahlen, also ist  $\|\phi\|_{V'} \geq 0$  für alle  $\phi$ .

Sei umgekehrt  $\|\phi\|_{V'} = 0$ , also  $\phi(v) = 0$  für alle  $v \in V$  mit  $\|v\|_V = 1$ . Zu jedem  $w \in V$  finden wir dann ein  $v \in V$  mit  $\|v\| = 1$  und ein  $\alpha \in \mathbb{K}$  mit  $w = \alpha v$  und berechnen

$$\phi(w) = \phi(\alpha v) = \alpha \phi(v) = 0,$$

also  $\phi = 0_{V'}$ .

Ist nun neben  $\phi \in V'$  auch  $\alpha \in \mathbb{K}$  gegeben, so ergibt sich die Homogenität aus

$$|\phi(\alpha v)| = |\alpha \phi(v)| = |\alpha| |\phi(v)|.$$

Nehmen wir nun das Supremum über alle  $v$  in der Einheitskugel und beachten noch, dass beide Faktoren auf der rechten Seite nicht negativ sind, können wir  $|\alpha|$  aus dem Supremum herausziehen und erhalten die Behauptung.

Auch die Dreiecksungleichung erbt die Norm vom Betrag in  $\mathbb{K}$ . Sind nämlich  $\phi, \psi \in V'$ , so berechnen wir wieder für jedes  $v \in V$ :

$$|(\phi + \psi)(v)| \leq |\phi(v)| + |\psi(v)|.$$

Wieder können überträgt sich diese Ungleichung auf das Supremum über alle  $v$  mit  $\|v\|_V = 1$ , da sämtliche Summanden nicht negativ sind.

Wir kommen nun zu unseren Hilberträumen zurück und stellen fest, dass jedes Element eines Hilbertraums auf natürliche Art ein stetiges lineares Funktional erzeugt.

**Beispiel 22.** Sind  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum und  $v \in V$  beliebig gegeben, so ist

$$\phi_v : V \rightarrow \mathbb{K}, \quad \phi_v(w) := \langle v | w \rangle$$

ein stetiges lineares Funktional auf  $V$ . Die Linearität folgt sofort aus der Linearität des Skalarprodukts im zweiten Argument, und die Stetigkeit haben wir auch schon gesehen:

$$|\phi_v(w_n) - \phi_v(w)| = |\langle v | \underbrace{w_n - w}_{\rightarrow 0} \rangle| \rightarrow 0.$$

Tatsächlich gilt sogar die Umkehrung.

**Satz 2.26** (2. Satz von Riesz, Darstellungssatz von Riesz-Fréchet). Ist  $\phi$  ein stetiges lineares Funktional auf dem Hilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , so existiert genau ein  $v \in V$  mit  $\phi = \phi_v$ , also

$$\phi(w) = \langle v | w \rangle \quad \text{für alle } w \in V.$$

<sup>4</sup>Genauer ist nämlich  $\|\phi\|_{V'}$  das Infimum über alle solchen  $c$ .

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

*Beweis.* (I) Existenz. Wir betrachten linearen Unterraum  $V_1 := \ker \phi = \{w \in V : \phi(w) = 0\}$ . Dieser ist (als Urbild der in  $\mathbb{K}$  abgeschlossenen Menge  $\{0\}$  unter der nach Voraussetzung stetigen Abbildung  $\phi$ ) abgeschlossen<sup>5</sup>, also ein Unterhilbertraum von  $V$ . Nach Satz 2.18 ist  $V = V_1 \oplus V_1^\perp$ .

Falls  $V_1^\perp = \{0_V\}$ , so ist  $V_1 = V$ , also  $\phi(w) = 0$  für alle  $w$ . Dann ist  $v = 0$  das gesuchte  $\phi$  darstellende Element.

Ist  $V_1^\perp \neq \{0\}$ , so wählen wir  $u \in V_1^\perp \setminus \{0\}$  und haben  $\phi(u) \neq 0$ , denn sonst wäre auch  $u \in \ker \phi = V_1$  und dann  $\langle u|u \rangle = 0$ , also  $u = 0$ .

Für beliebige  $w \in V$  gilt nun

$$\phi\left(w - \frac{\phi(w)}{\phi(u)}u\right) = \phi(w) - \frac{\phi(w)}{\phi(u)}\phi(u) = 0,$$

also  $w - \frac{\phi(w)}{\phi(u)}u \in V_1$ . Wegen  $u \in V_1^\perp$  folgt dann aber

$$0 = \left\langle u \left| w - \frac{\phi(w)}{\phi(u)}u \right. \right\rangle = \langle u|w \rangle - \frac{\phi(w)}{\phi(u)}\langle u|u \rangle,$$

also:

$$\phi(w) = \frac{\phi(u)}{\|u\|^2} \langle u|w \rangle = \left\langle \frac{\phi(u)}{\|u\|^2}u \left| w \right. \right\rangle.$$

Dabei war  $w \in V$  beliebig. Mit  $v := \frac{\phi(u)}{\|u\|^2}u$  haben wir unser gesuchtes darstellendes Element also gefunden.

(II) Zur Eindeutigkeit nehmen wir an, es gäbe  $v, \tilde{v} \in V$  mit der gewünschten Eigenschaft. Dann gälte für alle  $w \in V$ :

$$0 = \phi(w) - \phi(w) = \langle v|w \rangle - \langle \tilde{v}|w \rangle = \langle v - \tilde{v}|w \rangle,$$

also insbesondere für  $w = v - \tilde{v}$ :  $\langle v - \tilde{v}|v - \tilde{v} \rangle = 0$ , also  $v = \tilde{v}$ . □

**Bemerkung.** Tatsächlich gilt umgekehrt: Kann jedes stetige lineare Funktional  $\phi$  auf dem Prähilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  als  $\phi = \langle v | \cdot \rangle$  mit einem  $v \in V$  dargestellt werden, so ist  $V$  schon ein Hilbertraum. Überzeugen Sie sich davon, indem Sie für  $y \in \tilde{V}$  (Vervollständigung von  $V$ , versehen mit Skalarprodukt  $(\cdot | \cdot)$ ) zeigen, dass  $y \in V$  gilt. Erinnern Sie sich daran, dass  $y$  eine Äquivalenzklasse von Cauchyfolgen in  $V$  ist.

Gelingt es uns also, für einen Prähilbertraum ein stetiges lineares Funktional zu finden, das nicht durch ein Element von  $V$  darstellbar ist, so haben wir gezeigt, dass der fragliche Raum nicht vollständig ist.

**Beispiel 23.** Alle stetigen linearen Funktionale auf  $V = L_2(\Omega; \mathbb{K})$  sind von der Form

$$\phi(w) = \int_{\Omega} v(x)^* w(x) \, dx \quad \text{für alle } w \in L_2$$

mit einem eindeutigen  $v \in L_2(\Omega; \mathbb{K})$ .

---

<sup>5</sup>Überzeugen Sie sich zur Übung, dass auch die Umkehrung gilt: Ist für  $\phi \in V^*$  der Kern  $\ker \phi$  abgeschlossen in  $V$ , so ist  $\phi$  stetig. Und andererseits ist  $\ker \phi$  genau dann dicht in  $V$ , wenn  $\phi$  unbeschränkt ist.

## 2.4. Fourierentwicklung in Hilberträumen

Wir haben also für jeden Hilbertraum  $V$  eine Bijektion  $J : V \rightarrow V'$  gefunden, die durch  $J(v) = \langle v | \cdot \rangle$  gegeben ist. Diese ist offensichtlich konjugiert linear:  $J(\alpha v + w) = \alpha^* J(v) + J(w)$ . In gewissem Sinn ist also jeder Hilbertraum sein eigener Dualraum.

Tatsächlich kann man den  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V^\dagger$  betrachten, der die gleichen Elemente wie  $V$  enthält, dessen Addition mit der in  $V$  übereinstimmt, und dessen Multiplikation mit Skalaren durch

$$\alpha \bullet v := \underbrace{\alpha^* v}_{\text{berechnet in } H}, \quad \alpha \in \mathbb{K}, v \in V^\dagger.$$

Damit wird  $\tilde{J} : V^\dagger \rightarrow V'$  zu einem Vektorraumisomorphismus.

Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , braucht man diese Feinheiten natürlich nicht, sondern hat direkt einen Isomorphismus  $J : V \rightarrow V'$ .

Wir können sogar noch mehr aussagen.

**Korollar 2.27.** *Auf dem Raum  $V'$  der stetigen linearen Funktione auf dem Hilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ist durch*

$$(\phi_v | \phi_u) := \langle u | v \rangle$$

*ein Skalarprodukt  $(\cdot | \cdot)$  gegeben, das die Operatornorm  $\| \cdot \|_{V'}$  erzeugt.*

*Beweis.* Übung (man rechne die Skalarprodukteigenschaften nach und zeige  $\|\phi_v\|_{V'} = \sqrt{(\phi_v | \phi_v)}$  für alle  $v \in V$ ).  $\square$

Der oben beschriebene Isomorphismus  $\tilde{J}$  ist also sogar ein isometrischer Isomorphismus. Als Hilbertraum ist  $V$  also (bis auf die etwas merkwürdige Multiplikation mit Skalaren) nicht von seinem Dualraum  $V'$  zu unterscheiden.

## 2.4. Fourierentwicklung in Hilberträumen

Wir kommen nun zu unseren Orthogonal- bzw. Orthonormalsystemen zurück und erinnern uns, dass wir im  $\mathbb{K}^n$  jeden Vektor  $v$  als Linearkombination

$$v = \sum_{k=1}^n v^k e_k$$

schreiben können, wobei  $v^k \in \mathbb{K}$  die Koordinaten des Vektors  $v$  in der Basis  $(e_1, \dots, e_n)$  aus Standardeinheitsvektoren sind, welche wir durch  $v^k = \langle e_k | v \rangle$  berechnen.

Das versuchen wir nun zu verallgemeinern. Das Konzept von Orthogonal- und Orthonormalsystemen hatten wir schon eingeführt und auch an den Satz des Pythagoras erinnert: Sind  $v_1, \dots, v_n \in V$  paarweise orthogonale Vektoren in einem Hilbertraum  $V$ , so gilt

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2.$$

**Satz 2.28.** *Ist  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthogonalsystem im Hilbertraum  $V$ , so konvergiert genau dann die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  in  $V$ , wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2$  in  $\mathbb{R}$  konvergiert.*

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

*Beweis.* Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  bedeutet natürlich die Konvergenz der Folge der Partialsummen  $s_k := \sum_{n=1}^k v_n$ .

(I) Wir zeigen zunächst die Konvergenz in  $V$ . Da es sich bei  $V$  um einen Hilbertraum handelt, müssen wir nur zeigen, dass  $(s_k)_k$  eine Cauchyfolge ist. Dazu finden wir wegen der Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2$  zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $k_0$  derart, dass für alle  $k \geq k_0, m \in \mathbb{N}$

$$|\sigma_{k+m} - \sigma_k| = \sum_{n=k+1}^{k+m} \|v_n\|^2 < \varepsilon^2$$

ist. Dabei haben wir mit  $\sigma_k := \sum_{n=1}^k \|v_n\|^2$  die Partialsummen der reellen Reihe bezeichnet. Dann ist

$$\|s_{k+m} - s_k\|^2 = \left\| \sum_{n=k+1}^{k+m} v_n \right\|^2 = \sum_{n=k+1}^{k+m} \|v_n\|^2 < \varepsilon^2.$$

Dabei durften wir den verallgemeinerten Pythagoras anwenden, weil es sich um eine endliche Summe handelte. Wir haben also für  $k \geq k_0$ :

$$\|s_{k+m} - s_k\| < \varepsilon,$$

also bilden die Partialsummen eine Cauchyfolge, die notgedrungen in  $V$  konvergiert.

(II) Haben wir Konvergenz in  $V$  gegeben, so gehen wir umgekehrt vor, finden zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $k_0$  derart, dass  $\|s_{k+m} - s_k\| < \sqrt{\varepsilon}$  für  $k \geq k_0, m \in \mathbb{N}$  gilt und erhalten mit den gleichen Rechnungen  $|\sigma_{k+m} - \sigma_k| < \varepsilon$  für  $k \geq k_0$ .  $\square$

In Erinnerung an den  $\mathbb{K}^n$  oder auch an klassische Fourierreihen führen wir folgende Definition ein.

**Definition 2.29.** Ist  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem im Hilbertraum  $V$ , so bezeichnen wir zu gegebenem  $v \in V$  die Zahlen  $\langle v_n | v \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , als Fourierkoeffizienten von  $v$  bzgl.  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Beispiel 24.** Das motivierende Beispiel ist  $V = L_2((-\pi, \pi); \mathbb{C})$  mit dem Orthonormalsystem

$$\left\{ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos(n \cdot)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(n \cdot)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Die Fourierkoeffizienten sind dann durch

$$a_0 = \left\langle \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{2\pi}} \middle| v \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(-\pi, \pi)} v(t) dt,$$

$$a_n = \left\langle \frac{\cos(n \cdot)}{\sqrt{\pi}} \middle| v \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(-\pi, \pi)} \cos(nt) v(t) dt$$

und

$$b_n = \left\langle \frac{\sin(n \cdot)}{\sqrt{\pi}} \middle| v \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{(-\pi, \pi)} \sin(nt) v(t) dt$$



## 2.4. Fourierentwicklung in Hilberträumen

gegeben. Da die  $v_n$  reellwertig sind, müssen wir uns hier über komplexe Konjugation keine Gedanken machen.

**Bemerkung.** Um deutlich zu machen, dass es sich um einen komplexen Hilbertraum handelt, wird das Orthonormalsystem gern via Eulerscher Formel zu  $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik\cdot}\}_{k\in\mathbb{Z}}$  umgeschrieben<sup>6</sup>. Die Normierungsfaktoren  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  errechnen wir schnell aus

$$\langle e^{ik\cdot} | e^{ik\cdot} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{ikt} dt = 2\pi.$$

Die Fourierkoeffizienten bezüglich eines beliebigen Orthonormalsystems erfüllen folgende Ungleichung.

**Satz 2.30** (Besselsche Ungleichung). Sind  $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem im Hilbertraum  $V$  und  $v \in V$  beliebig, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v_n | v \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Selbstverständlich gilt die Ungleichung auch für endliche Orthonormalsysteme, ist dann aber bei weitem nicht mehr so spannend.

*Beweis.* Zu  $k \in \mathbb{N}$  setzen wir  $w_k = v - \sum_{n=1}^k \langle v_n | v \rangle v_n$  und berechnen dank der Linearität des Skalarprodukts:

$$\langle v_l | w_k \rangle = \langle v_l | v \rangle - \sum_{n=1}^k \langle v_n | v \rangle \underbrace{\langle v_l | v_n \rangle}_{=\delta_{l,n}} = \begin{cases} 0 & \text{für } l \leq k, \\ \langle v_l | v \rangle & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit können wir auf die paarweise orthogonalen  $w_k, \langle v_1 | v \rangle v_1, \dots, \langle v_k | v \rangle v_k$  den verallgemeinerten Pythagoras anwenden:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k |\langle v_n | v \rangle|^2 \underbrace{\|v_n\|^2}_{=1} &\leq \sum_{n=1}^k \|\langle v_n | v \rangle v_n\|^2 + \underbrace{\|w_k\|^2}_{\geq 0} \\ &= \left\| \sum_{n=1}^k \langle v_n | v \rangle v_n + w_k \right\|^2 = \|v\|^2. \end{aligned}$$

Die Partialsummen der Reihe mit nicht negativen Summanden(!) sind also gegen  $\|v\|^2$  beschränkt, und diese Ungleichung bleibt im Grenzübergang erhalten.  $\square$

Zusammen mit Satz 2.28 ergibt das:

<sup>6</sup>Man beachte, dass wir komplexe Koeffizienten benutzen dürfen und daher jedes  $e^{ik\cdot}$  als  $\cos(k\cdot) - i \sin(k\cdot)$  für  $k \geq 0$  bzw. als  $\cos(-k\cdot) - i \sin(-k\cdot)$  für  $k < 0$  schreiben können.

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

**Korollar 2.31.** Sind  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem im Hilbertraum  $V$  und  $v \in V$  beliebig, so konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n | v \rangle v_n$  in  $V$ .

Konvergente Reihen sind oft hilfreich, also verdient diese Klasse einen eigenen Namen.

**Definition 2.32.** Sind  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem im Hilbertraum  $V$  und  $v \in V$  beliebig, so heißt  $\sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n | v \rangle v_n$  die Fourierreihe von  $v$  bzgl.  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Bislang konnte uns noch niemand garantieren, dass die Fourierreihe von  $v$  gegen  $v$  selbst konvergiert. Man denke nur an das klassische Beispiel  $V = L_2((-\pi, \pi); \mathbb{R})$  und das reduzierte Orthonormalsystem  $\{\sin(n \cdot)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Damit können wir nur ungerade Funktionen sinnvoll darstellen. Tatsächlich ist für jede gerade Funktion  $v \in L_2((-\pi, \pi))$ :

$$\int_{(-\pi, \pi)} \sin(kt) v(t) dt = \int_{(-\pi, 0)} \underbrace{\sin(kt) v(t)}_{= -\sin(-kt) v(-t)} dt + \int_{(0, \pi)} \sin(kt) v(t) dt = 0.$$

**Satz 2.33.** Für ein Orthonormalsystem  $\{u_n\}_n$  im Hilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Für alle  $v \in V$  gilt  $v = \sum_n \langle u_n | v \rangle v_n$ .
- (ii)  $\{u_n\}_n$  ist maximal: Gilt  $u_n \perp v$  für alle  $n$ , so ist  $v = 0$  bzw.  $\{u_n\}_n^\perp = \{0\}$ .
- (iii) Für alle  $v \in V$  gilt in der Besselschen Ungleichung Gleichheit:

$$\sum_n |\langle u_n | v \rangle|^2 = \|v\|^2.$$

(Parsevalsche Vollständigkeitsrelation)

- (iv) Für alle  $v, w \in V$  gilt

$$\langle v | w \rangle = \sum_n \langle v | u_n \rangle \langle u_n | w \rangle.$$

Wir haben offen gelassen, über welchen Bereich  $n$  läuft, da die gleiche Aussage auch für den endlichdimensionalen Fall gilt. Wir können es also mit endlichen, abzählbar unendlichen oder sogar überabzählbar unendlichen Orthonormalsystemen zu tun haben. Wir werden uns hier nur den höchstens abzählbar unendlichen Fall beweisen.

*Beweis.* (i)  $\implies$  (iv): Zu beliebigen  $v, w \in V$  nutzen wir die Darstellung nach (i) und berechnen

$$\begin{aligned}
 \langle v|w \rangle &\stackrel{(i)}{=} \left\langle \sum_n \langle u_n|v \rangle u_n \left| \sum_m \langle u_m|w \rangle u_m \right. \right\rangle \\
 (\text{Stetigkeit von } \langle \cdot | \cdot \rangle) &= \sum_n \sum_m \langle \langle u_n|v \rangle u_n | \langle u_m|w \rangle u_m \rangle \\
 &= \sum_n \sum_m \underbrace{\langle u_n|v \rangle^*}_{=\langle v|u_n \rangle} \langle u_m|w \rangle \underbrace{\langle u_n|u_m \rangle}_{=\delta_{n,m}} \\
 &= \sum_n \langle v|u_n \rangle \langle u_n|w \rangle.
 \end{aligned}$$

(iv)  $\implies$  (iii): ergibt sich einfach durch  $v = w$  in (iv). Die Summanden auf der linken Seite sind dann  $\langle u_n|v \rangle^* \langle u_n|v \rangle = |\langle u_n|v \rangle|^2$ .

(iii)  $\implies$  (i): Gilt für  $v \perp u_n$  für alle  $n$ , so ist nach (iii)

$$\|v\|^2 = \sum_n \underbrace{|\langle u_n|v \rangle|^2}_{=0} = 0, \quad \text{also } v = 0_V.$$

(ii)  $\implies$  (i): Sind  $v \in V$  beliebig und  $w := \sum_n \langle u_n|v \rangle u_n$  ( $\in V$  nach Korollar 2.31), so wollen wir zeigen, dass  $v = w$  ist. Nach (ii) genügt es dafür  $(v - w) \perp u_n$  für alle  $n$  zu zeigen. Tatsächlich ist:

$$\begin{aligned}
 \langle u_n|v - w \rangle &= \left\langle u_n \left| v - \sum_m \langle u_m|v \rangle u_m \right. \right\rangle \\
 &= \langle u_n|v \rangle - \sum_m \langle u_n | \langle u_m|v \rangle u_m \rangle \\
 &= \langle u_n|v \rangle - \sum_m \underbrace{\langle u_n|u_m \rangle}_{=\delta_{n,m}} \langle u_m|v \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir auf dem Weg zur zweiten Zeile die (absolute) Konvergenz der Reihe benutzt, die uns erlaubte, die Linearität des Skalarprodukts für eventuell unendlich viele Summanden anzuwenden.  $\square$

Im überabzählbaren Fall müssten wir noch definieren, was wir unter einer überabzählbaren Summe verstehen wollen. In den uns hier interessierenden Fällen ist das sogar möglich. Sind  $\mathcal{I}$  eine überabzählbare Indexmenge,  $\{\alpha_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  eine Familie nicht negativer reeller Zahlen und  $\{v_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  eine Familie von Vektoren im normierten Vektorraum  $V$ , so setzen wir

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i := \sup \left\{ \sum_{i \in \mathcal{J}} \alpha_i : \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \text{ endlich} \right\} \in [0, \infty]$$

(Konvergenz der Summe bedeutet dann natürlich, dass das Supremum endlich ist) und sagen,  $\sum_{i \in \mathcal{I}} v_i$  konvergiere in  $V$  (gegen  $v \in V$ ), falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine endliche Menge  $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$  derart existiert, dass

$$\left\| v - \sum_{j \in \mathcal{J}} v_j \right\| < \varepsilon \quad \text{für alle endlichen } \mathcal{J} \subset \mathcal{I} \text{ mit } \mathcal{K} \subset \mathcal{J}$$

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

ist. Damit können wir den Aussagen (i), (iii) und (iv) des Satzes Sinn verleihen, und der Satz gilt sinngemäß weiterhin. Ebenso sind die Besselungleichung und die Aussage von Satz 2.28 sinnvoll und gelten auch im überabzählbaren Fall.

Haben wir ein Orthonormalsystem, das die Aussagen von Satz 2.33 erfüllt, so können wir nach (i) jeden Vektor  $v \in V$  als (im allgemeinen abzählbar unendliche) Linearkombination der  $u_n$  darstellen. Dass keine anderen als die angegebenen (Fourier-)Koeffizienten infrage kommen, sehen wir sofort. Bezeichnen wir nämlich die Fourierkoeffizienten von  $v$  mit  $\alpha_n = \langle u_n | v \rangle$  und nehmen an, ein Vektor  $w$  sei durch  $w = \sum_n \beta_n u_n$  gegeben. Ist  $\alpha_{n_0} \neq \beta_{n_0}$  für ein  $n_0$ , so erhalten wir nach Pythagoras

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \left\| \sum_n (\alpha_n - \beta_n) u_n \right\|^2 \\ &= \left\| (\alpha_{n_0} - \beta_{n_0}) u_{n_0} + \sum_{n \neq n_0} (\alpha_n - \beta_n) u_n \right\|^2 \\ &= |\alpha_{n_0} - \beta_{n_0}|^2 \|u_{n_0}\|^2 + \left\| \sum_{n \neq n_0} (\alpha_n - \beta_n) u_n \right\|^2 \\ &\geq |\alpha_{n_0} - \beta_{n_0}|^2 > 0, \end{aligned}$$

und zwar unabhängig davon, ob die übrigen  $\alpha_n$  und  $\beta_n$  übereinstimmen.

Diese eindeutige Darstellbarkeit eines jeden Vektors durch eine feste Sammlung von speziellen vorgegebenen Vektoren kennen wir schon aus der linearen Algebra. Dort hatten wir das System der speziellen Vektoren als Basis bezeichnet. Folgende Definition sollte also nicht überraschen.

**Definition 2.34.** Ein Orthonormalsystem  $\{u_n\}_n$  im Hilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  heißt vollständiges Orthonormalsystem (oder Orthonormalbasis oder Hilbertraumbasis) für  $V$ , falls es die Bedingungen von Satz 2.33 erfüllt.

Man beachte, dass es sich bei einer Orthonormalbasis im allgemeinen nicht um eine Vektorraumbasis handelt! Eine solche wäre ein linear unabhängiges System  $\{v_i\}_{i \in I}$  derart, dass jedes  $v \in V$  (wegen der linearen Unabhängigkeit eindeutig) als Linearkombination *endlich vieler* der  $v_i$  schreiben lässt:  $v = \sum_{k=1}^{m(v)} \alpha_k v_{i_k}$ . Mittels Auswahlaxiom kann man zeigen, dass jeder Vektorraum (unabhängig von eventuellen Normen oder Skalarprodukten) eine solche (Hamel-)Basis besitzt. Tatsächlich kann man zeigen, dass jede Hamel-Basis eines Banachraums entweder endlich oder überabzählbar unendlich ist.

Bislang haben wir definiert, was wir unter einer Orthonormalbasis verstehen wollen und uns angesehen, woran wir eine solche erkennen können. Über die Existenz solcher Basen wissen wir aber noch nicht viel. Im endlichdimensionalen Fall ist das nicht schwierig.

**Beispiel 25** (Gram-Schmidt-Verfahren). Im euklidischen  $\mathbb{K}^n$  haben wir die kanonische Orthonormalbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  aus den Standardeinheitsvektoren. Ist  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein beliebiger Hilbertraum mit (Vektorraum-)Dimension  $n$  über  $\mathbb{K}$  und ist  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine beliebige

## 2.4. Fourierentwicklung in Hilberträumen

(Vektorraum-)Basis von  $V$ , so erhalten wir eine Orthonormalbasis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  wie folgt.

1. Setze  $b_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$ .

2. Setze  $w_2 = v_2 - \langle b_1 | v_2 \rangle b_1$ . Überzeugen Sie sich, dass  $w_2$  die orthogonale Projektion auf  $(\mathbb{K}b_1)^\perp$ , das orthogonale Komplement des von  $b_1$  aufgespannten Unterraums, ist (vgl. Beweis von Satz 2.30). Wegen  $v_2 \notin \mathbb{K}b_1$  ist  $w_2 \neq 0$ , und selbstverständlich ist  $w_2 \perp b_1$ . Anschließend normieren wir  $w_2$  zu  $b_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2$ . 3. Wir wiederholen den zweiten Schritt für  $k = 3, \dots, n$ : Setze

$$w_k = v_k - \sum_{l=1}^{k-1} \langle b_l | v_k \rangle b_l \in {}^\perp \{b_1, \dots, b_{k-1}\},$$

stelle fest, dass  $w_k \neq 0$  und  $w_k \perp b_l$  für  $l = 1, \dots, k-1$  gelten. Setze  $b_k = \frac{1}{\|w_k\|} w_k$ .

Dass der endlichdimensionale Fall einfach ist, kennen wir schon von den Vektorraumbasen. Wie sieht es nun aber im unendlichdimensionalen Fall aus.

**Beispiel 26.** Im prototypischen unendlichdimensionalen Hilbertraum  $\ell_2$  setzen wir einfach unsere Basen des  $\mathbb{K}^n$  fort:

$$b^{(n)} \in \ell_2, \quad b_k^{(n)} = \delta_{k,n}$$

liefert offensichtlich ein Orthonormalsystem, und jedes  $v = (v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\ell_2$  ist durch

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k b^{(k)}$$

gegeben. Selbstverständlich ist

$$v_k = \sum_{l=1}^{\infty} \delta_{l,k}^* v_l = \langle b^{(k)} | v \rangle,$$

der richtige Fourierkoeffizient, wie in der allgemeinen Darstellung vorgegeben.

Wir prüfen auch sehr schnell die Maximalität: Gilt zu  $v \in \ell_2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ :  $0 = \langle b^{(n)} | v \rangle = v_n$ , so ist  $v = 0$ .

Wie bei Basen üblich, können wir nicht ein einziges Element weg lassen, ohne die Basis-eigenschaft zu verlieren.

**Korollar 2.35.** Ist  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis im Hilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , dann ist  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}, n \neq n_0}$  für kein  $n_0 \in \mathbb{N}$  eine Orthonormalbasis.

*Beweis.*  $v = v_{n_0}$  ist normiert, also  $v \neq 0$ , erfüllt aber für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq n_0$ :  $v \perp v_n$ . Damit ist (ii) in 2.33 nicht erfüllt.  $\square$

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

**Beispiel 27.** Das Orthonormalsystem aus Beispiel 24 in  $L_2((-\pi, \pi); \mathbb{K})$  ist ebenfalls eine Orthonormalbasis. Durch Skalierung und Translation der reellen Achse können wir daraus Orthonormalbasen für jeden  $L_2((a, b); \mathbb{K})$  machen.

Wir dürfen aber keine der Basisfunktionen weglassen.

Weitere Beispiele sind Systeme orthogonaler Polynome auf kompakten Intervallen oder (zusammen mit geeigneten Gewichtungsfunktionen) auf der reellen (Halb-)Achse. In quaderförmigen Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ergeben Produkte trigonometrischer Funktionen Orthonormalbasen von  $L_2(\Omega; \mathbb{K})$ , für Kugeln benutzt man Bessel-Funktionen und deren Verwandte.

Konkrete Orthonormalbasen zu finden, ist oft recht schwierig. Allerdings können wir eine große Klasse von Hilberträumen angeben, für die wir die Existenz einer abzählbaren Orthonormalbasis garantieren können.

**Definition 2.36.** Ein metrischer Raum  $(V, d)$  heißt separabel, wenn es eine abzählbare Teilmenge  $B \subset V$  mit  $\bar{B} = V$  gibt.

**Beispiel 28.** (a)  $\mathbb{R}^n$  ist als normierter Vektorraum separabel, da die abzählbare Teilmenge  $\mathbb{Q}^n$  (unter jeder Norm) dicht in  $\mathbb{R}^n$  liegt.

(b)  $\ell_2$  ist ein separabler Hilbertraum, denn

$$B = \{a = (a_n)_n \in c_{00} : a_n \text{ algebraisch für alle } n\}$$

ist eine abzählbare dichte Teilmenge. Ist nämlich  $v \in \ell_2$  beliebig, so finden wir zu  $\varepsilon > 0$  zunächst ein  $N$  mit

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |v_n|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}$$

und dann zu  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq N$ , eine algebraische Zahl  $a_n$  mit  $|a_n - v_n|^2 < 2^{-n-2}\varepsilon^2$ . Dann gilt (mit  $a_n = 0$  für  $n \geq N+1$ ):

$$\|v - a\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |v_n - a_n|^2} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{n=1}^N 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} |v_n|^2} \leq \varepsilon.$$

(c)  $C([a, b]; \mathbb{R})$  ist unter der Supremumsnorm ein separabler Banachraum. Nach dem Approximationssatz von Stone-Weierstraß ist zunächst der Raum  $W$  der Polynome mit reellen Koeffizienten eine dichte Teilmenge. Andererseits finden wir zu jedem Polynom, definiert durch  $p(t) = \sum_{j=0}^m \alpha_j t^j$  und gegebenem  $\varepsilon > 0$  ein weiteres, durch  $q(t) = \sum_{j=0}^m r_j t^j$  gegebenes Polynom mit rationalen Koeffizienten derart, dass

$$\|p - q\|_{\infty} = \sup_{a \leq t \leq b} \left| \sum_{j=0}^m (\alpha_j - r_j) t^j \right| \leq \sup_{a \leq t \leq b} \sum_{j=0}^m |\alpha_j - r_j| |t|^j \leq \sum_{j=0}^m |\alpha_j - r_j| (|a| \vee |b|)^j < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Man suche dazu etwa die  $r_j$  so, dass  $|\alpha_j - r_j| \leq \frac{\varepsilon}{2^m}(|a| \vee |b| \vee 1)^m$  gilt. Die Menge

$$B = \left\{ \sum_{j=0}^m r_j (\cdot)^j : m \in \mathbb{N}, r_0, \dots, r_m \in \mathbb{Q} \right\}$$

ist also eine abzählbare dichte Teilmenge.

Wir können einem metrischen Raum auch ansehen, wenn er nicht separabel ist. Ein Kriterium liefert das folgende intuitiv klare Lemma: Können wir in einem metrischen Raum überabzählbar viele Punkte unterbringen, die paarweise um mindestens  $\delta$  voneinander entfernt sind, so kann der Raum nicht separabel sein.

**Lemma 2.37.** *Ist  $A \subset V$  eine überabzählbare Teilmenge eines metrischen Raums  $(V, d)$  derart, dass für ein  $\delta > 0$  gilt:  $d(v, w) > \delta$  für alle  $v, w \in A$  mit  $v \neq w$ , so ist  $V$  nicht separabel.*

*Beweis.* Wäre  $B \subset V$  eine abzählbare dichte Teilmenge von  $V$ , so gäbe es zu jedem  $v \in A$  und  $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$  ein  $b \in B$  mit  $d(v, b) < \varepsilon$ . Das müsste aber nach Dreiecksungleichung zu jedem  $v$  ein anderes  $b$  sein. Sind nämlich  $v, w \in A$ ,  $v \neq w$ , so gilt für jedes  $b \in B \subset V$ :

$$\delta < d(v, w) \leq d(v, b) + d(b, w).$$

Das ist aber im Widerspruch zur  $B$  abzählbar,  $A$  überabzählbar.  $\square$

Dieses Lemma liefert nun auch erste Beispiele oft benutzter nicht separabler Banachräume.

**Beispiel 29.** (a)  $\ell_\infty$  ist nicht separabel. Die Menge  $\{0, 1\}^\mathbb{N}$  aller Folgen  $v = (v_n)_n$  mit  $v_n \in \{0, 1\}$  ist nicht abzählbar (ihre Mächtigkeit ist die der Potenzmenge von  $\mathbb{N}$ ), und zu  $\delta = \frac{1}{2}$  gilt: Sind  $v, w \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ ,  $v \neq w$ , also  $v_{n_0} \neq w_{n_0}$  für mindestens ein  $n_0$ :

$$d(v, w) = \|v - w\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |v_n - w_n| \geq |v_{n_0} - w_{n_0}| = 1 > \delta.$$

(b) Ganz analog ist  $L_\infty((0, 1); \mathbb{K})$  nicht separabel. Eine überabzählbare Teilmenge mit  $\|v - w\|_\infty > \frac{1}{2}$  für  $v \neq w$  wäre zum Beispiel  $A = \{\mathbf{1}_{(0, t)} : t \in (0, 1)\}$ .

Nicht separable Hilberträume sind schon etwas schwieriger zu finden. Man könnte etwa an  $L_2(\mu)$  für ein nicht  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu$  denken. So ist  $L_2((\mathbb{R}, \zeta); \mathbb{K})$  auf  $\mathbb{R}$ , versehen mit dem Zählmaß, nicht separabel.

**Satz 2.38.** *Der Hilbertraum  $V$  besitzt genau dann eine höchstens abzählbar unendliche Orthonormalbasis, wenn  $V$  (unter der durch das Skalarprodukt induzierten Metrik) separabel ist.*

## 2. Hilberträume und die Sätze von Riesz

*Beweis.* (I) Ist  $\{u_n\}_n$  ein höchstens abzählbares Orthonormalsystem, so ist

$$B = \left\{ \sum_{n=1}^N a_n u_n : N \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_N \text{ algebraisch} \right\}$$

eine abzählbare dichte Teilmenge. Zu  $v \in V$  und  $\varepsilon > 0$  finden wir nämlich ein  $N \in \mathbb{N}$  derart, dass

$$\left\| v - \sum_{n=1}^N \langle u_n | v \rangle u_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Zu den  $\alpha_n = \langle u_n | v \rangle$ ,  $n = 1, \dots, N$  finden wir nun noch algebraische  $a_n$  derart, dass

$$\left\| \sum_{n=1}^N a_n u_n - \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zusammen liefert die Dreiecksungleichung, dass  $\sum_{n=1}^N a_n u_n$  das gegebene  $v$  auf höchstens  $\varepsilon$  genau approximiert.

(II) Für die Umkehrung benutzen wir wieder Gram-Schmidt. Ist  $\{0_V\} \neq M = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$  eine abzählbare dichte Teilmenge, so wählen wir  $k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq 0\}$  und setzen  $u_1 = \frac{1}{\|x_{k_1}\|} x_{k_1}$ . Dann spannt  $u_1$  den gleichen Unterraum  $V_1$  auf wie  $\{x_1, \dots, x_{k_1}\}$ . Ist das schon ganz  $V$ , so sind wir fertig. Andernfalls finden wir in  $M_1 = \{x_k : k > k_1\}$  ein erstes  $x_{k_2}$ , welches nicht in  $V_1$  liegt. Von diesem nehmen wir den zu  $V_1$  orthogonalen Anteil  $w_2$  und normieren diesen zu  $u_2$ . Dann ist  $\{u_1, u_2\}$  ein Orthonormalsystem, das den gleichen Raum  $V_2$  wie  $\{x_1, \dots, x_{k_2}\}$  aufspannt.

So fahren wir fort, solange nicht  $V_m = \langle \{u_1, \dots, u_m\} \rangle = V$  ist. Passiert das bei endlichem  $m$ , so ist  $\{u_1, \dots, u_m\}$  nicht nur eine Orthonormal-, sondern auch eine Vektorraum-basis. Andernfalls erhalten wir induktiv zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $u_n$  derart, dass  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem ist und die gleiche lineare Hülle hat wie  $M$ .

Ist nun  $v \in V$  beliebig mit  $\langle u_n | v \rangle$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so folgt wegen der Linearität des Skalarprodukts  $\langle w | v \rangle$  für alle  $w$  in der linearen Hülle  $\langle \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \langle M \rangle$ , also insbesondere für alle  $w \in M$ . Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts gilt dann aber  $\langle w | v \rangle$  für alle  $w \in V$ , also auch für  $w = v$  und damit  $v = 0$ . Nach (ii) in Satz 2.33 ist  $\{u_n\}_n$  also eine Orthonormalbasis.  $\square$

Als Folgerung erhalten wir eine ganz bemerkenswerte Aussage: Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  gibt es bis auf isometrische Isomorphie genau zwei  $n$ -dimensionale Hilberträume, nämlich die euklidischen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$ . Ebenso gibt es bis auf isometrische Isomorphie genau zwei unendlichdimensionale separable Hilberträume, nämlich  $\ell_2^{\mathbb{R}}$  und  $\ell_2^{\mathbb{C}}$ . Wir formulieren die zweite Aussage als Lemma.

**Lemma 2.39.** *Ist  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum, so ist  $V$  isometrisch isomorph zu  $\ell_2$ .*



## 2.4. Fourierentwicklung in Hilberträumen

*Beweis.* Satz 2.38 sichert die Existenz einer abzählbaren Orthonormalbasis  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Zu  $v \in V$  bezeichnen wir die Folge der Fourierkoeffizienten von  $v$  mit

$$J(v) := (\langle u_n | v \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_2^{\mathbb{K}}.$$

Dass  $J(v)$  quadratintegrierbar ist, folgt dabei aus Satz 2.28.

Wir haben zu zeigen, dass  $J$  ein isometrischer Isomorphismus ist.

Die Linearität ist klar, da das Skalarprodukt von  $V$  linear im zweiten Argument ist.

Ist ferner  $a = (a_n)_n \in \ell_2^{\mathbb{K}}$  beliebig, so ist  $v := \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \in V$  ein Urbild von  $a$  unter  $J$ , also ist  $J$  surjektiv.

$J$  ist isometrisch, denn für  $v, w \in V$  ist

$$(J(v) | J(w)) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n | v \rangle^* \langle v_n | w \rangle \stackrel{(iv) \text{ in S.2.33}}{=} \langle v | w \rangle.$$

Dabei haben wir das Skalarprodukt des  $\ell_2$  mit  $(\cdot | \cdot)$  bezeichnet.

Daraus folgt schließlich auch die Injektivität. Ist nämlich  $J(v) = 0_{\ell_2}$ , so ist

$$\langle v | v \rangle = (J(v) | J(v)) = 0,$$

also  $v = 0$ . □

Das Vorgehen ist also genau so, wie wir es aus dem endlichdimensionalen Fall kennen. Wir identifizieren  $v \in V$  einfach mit dem (Spalten-)vektor seiner Koordinaten (Fourierkoeffizienten) bezüglich einer frei gewählten (Orthonormal-)Basis von  $V$ . Da es sich um eine Orthonormalbasis handelt, übertragen sich alle Rechnungen (Vektorraumoperationen, Skalarprodukt, insbesondere Norm und Abstand) eins zu eins von  $V$  nach  $\ell_2$  und vor allem auch wieder zurück.



---

### Funktionalanalytische Grundprinzipien

---

#### 3.1. Lineare Operatoren

Bevor wir uns mit den allgemeinen Prinzipien der linearen Funktionalanalysis beschäftigen, klären wir noch einige Begrifflichkeiten. Wir erinnern uns an die Definition linearer Funktionale. Diese sind einfach spezielle lineare Abbildungen. Den Begriff linearer Abbildungen kennen wir aus der linearen Algebra. Wir interessieren uns natürlich für lineare Abbildungen zwischen normierten linearen Räumen und geben diesen einen speziellen Namen.

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

**Definition 3.1.** 1. Sind  $(V, \|\cdot\|_V)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, so heißt  $F : V \supset \mathcal{D}_F \rightarrow Y$  ein linearer Operator, falls für alle  $v, w \in \mathcal{D}_F$  und  $\alpha \in \mathbb{K}$

$$F(\alpha v + w) = \alpha F(v) + F(w)$$

gilt. Der lineare Unterraum  $\mathcal{D}_F$  heißt Definitionsbereich von  $F$ .

2. Den Raum der linearen Operatoren  $F$  von  $V$  nach  $Y$  nennen wir  $L(V, Y)$ . Dessen Unterraum der global definierten linearen Operatoren bezeichnen wir mit

$$\text{Hom}(V, Y) = \{F \in L(V, Y) : \mathcal{D}_F = V\}.$$

3. Der lineare Operator  $F \in \text{Hom}(V, Y)$  heißt stetig in  $v \in V$ , falls für alle konvergenten Folgen  $(v_n)_n$  in  $V$  mit Grenzwert  $v$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(v_n) = F(v)$$

gilt.  $F$  heißt stetig, wenn  $F$  in allen  $v \in V$  stetig ist. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{L}(V, Y) := \{F \in \text{Hom}(V, Y) : F \text{ stetig}\}$$

den Raum der stetigen linearen Operatoren von  $V$  nach  $Y$ .

Die Stetigkeitsdefinition über Folgen haben wir wieder von den metrischen Räumen übernommen.

**Beispiel 30.** Die (stetigen) linearen Funktionale sind Spezialfälle (stetiger) linearer Operatoren mit  $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$ . Es ist also  $L(V, \mathbb{K}) = V^*$ ,  $\mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = V'$ .

Anhand dieses Beispiels erinnern wir uns auch an die Definition der Beschränktheit und der Operatornorm, die genau dem gleichen Prinzip folgen.

**Definition 3.2.** Ein linearer Operator  $F : V \rightarrow Y$  heißt beschränkt, falls ein  $C \geq 0$  derart existiert, dass

$$\|F(v)\|_Y \leq C\|v\|_V \quad \text{für alle } v \in V$$

gilt.

Wie in Abschnitt 2.3 erhalten wir auch hier die Äquivalenz von Beschränktheit und Stetigkeit. Nach unseren Standardargumenten zu Verschiebungen und Streckungen bzw. Stauchungen erhalten wir sogar noch mehr.

**Lemma 3.3.** Für  $F \in \text{Hom}(V, Y)$  sind folgende Aussagen äquivalent.

- (a) Es existiert ein  $v \in V$  derart, dass  $F$  in  $v$  stetig ist<sup>a</sup>.
- (b)  $F$  ist stetig in allen  $v \in V$ .
- (c)  $F$  ist stetig in  $0_V$ .
- (d)  $F$  ist beschränkt.
- (e)  $F(B^V)$  ist beschränkt in  $Y$ .
- (f)  $F(S^V)$  ist beschränkt in  $Y$ .
- (g)  $F(M)$  ist beschränkt in  $Y$  für jede beschränkte Teilmenge  $M \subset V$ .

Dabei sind  $B^V$  und  $S^V$  die Einheitskugel bzw. Einheitskugel in  $V$ .

<sup>a</sup>Erinnern Sie sich:  $V$  enthält als Vektorraum mindestens ein Nullelement.

*Beweis.* Den Beweis haben wir schon weitgehend in Abschnitt 2.3 geführt. Die Anpassung von  $Y = \mathbb{K}$  auf allgemeine  $Y$  nehmen Sie als Übung selbst vor.  $\square$

**Definition 3.4.** Für einen beschränkten linearen Operator  $F : V \rightarrow Y$  definieren wir die Operatornorm

$$\|F\| := \sup\{\|F(v)\|_Y : v \in V, \|v\|_V \leq 1\}.$$

Dass es sich tatsächlich um eine Norm handelt, prüfen Sie wie schon im Fall der linearen Funktionale schnell nach. Ebenso schnell erhalten wir den Zusammenhang zwischen der Norm und der Konstante  $C$  aus der Definition der Beschränktheit.

**Lemma 3.5.** Für  $F \in \mathcal{L}(V, Y)$  ist

$$\|F\| = \inf\{C \geq 0 : \|F(v)\|_Y \leq C\|v\|_V \text{ für alle } v \in V\}.$$

Aus der linearen Algebra erinnern wir uns, dass  $\text{Hom}(V, Y)$  für beliebige Vektorräume  $V, Y$  wieder ein Vektorraum ist. Im Fall stetiger linearer Operatoren zwischen normierten linearen Räumen haben wir sogar noch mehr.

**Satz 3.6.** Sind  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, so ist auch  $\mathcal{L}(V, Y)$  ein normierter Vektorraum unter der Operatornorm, und  $\mathcal{L}(V, Y)$  ist ein Banachraum, wenn  $Y$  ein Banachraum ist.

*Beweis.* Wir haben nur noch die Vollständigkeit zu prüfen, falls  $Y$  ein Banachraum ist. Dazu sei  $(F_n)_n$  eine Cauchyfolge in  $\mathcal{L}(V, Y)$ . Für beliebige  $v \in V$  ist dann  $(F_n(v))_n$  eine Cauchyfolge in  $Y$ : Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist  $v \neq 0_V$  (sonst ist  $F_n(v) = 0_Y$  für alle  $n$ ), und wir finden zu  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  derart, dass  $\|F_n - F_m\| < \frac{\varepsilon}{\|v\|_V}$  für alle  $n, m \geq n_0$  gilt. Dann ist

$$\|F_n(v) - F_m(v)\|_Y = \|(F_n - F_m)(v)\|_Y \leq \|F_n - F_m\| \|v\|_V < \varepsilon.$$

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

Damit können wir für alle  $v \in V$

$$F(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(v)$$

definieren und erhalten einen linearen Operator  $F : V \rightarrow Y$ . Dieser ist auch stetig, denn für beliebige  $v \in V$  gilt (wegen der Stetigkeit der Norm):

$$\| \underbrace{(F - F_n)(v)}_{=F(v)-F_n(v)} \|_Y = \lim_{m \rightarrow \infty} \| \underbrace{(F_m - F_n)(v)}_{\leq \|F_m - F_n\| \|v\|_V} \|_Y \leq \left( \liminf_{m \rightarrow \infty} \|F_m - F_n\| \right) \|v\|_V.$$

Dabei ist der Limes inferior auf der rechten Seite gegen ein von  $n$  und  $v$  unabhängiges  $C \geq 0$  beschränkt, da die Cauchyfolge  $(F_n)_n$  in  $\mathcal{L}(V, Y)$  beschränkt ist. Für

$$\|v\|_V < \delta = \frac{\varepsilon}{1 + \sup_m \|F_m\|}$$

ist nämlich wegen  $\|F\| \leq \sup_m \|F_m\|$  und damit  $\|F(v)\|_Y \leq \|F\| \|v\|_V < \varepsilon$ ,  $F$  also stetig in  $0_V$ .  $\square$

Wir sehen uns einige Beispiele linearer Operatoren an.

**Beispiel 31.** Den Fall  $V = \mathbb{K}^n$ ,  $Y = \mathbb{K}^m$ , jeweils versehen mit einer beliebigen Norm müssen wir kaum erwähnen. Hier sind alle linearen Abbildungen beschränkt, wie wir aus der linearen Algebra wissen.

**Beispiel 32.** Den Dualraum  $V' = \mathcal{L}(V; \mathbb{K})$ , also den Raum der stetigen linearen Funktione auf  $V$  kennen wir schon. Der Satz liefert nun, dass  $V'$  stets vollständig ist, auch wenn  $V$  selbst das unter Umständen nicht ist.

Konkret liefert etwa die Hölderungleichung, dass zu  $p \in (1, \infty)$  jedes  $w \in L_{p'}(\Omega)$  ( $p' = \frac{p}{p-1}$ ) via

$$\phi_w(v) = \int_{\Omega} w(x)^* v(x) \, dx$$

ein stetiges lineares Funktional auf  $L_p(\Omega)$  mit  $\|\phi_w\| \leq \|w\|_{p'}$  definiert. Tatsächlich gilt sogar Gleichheit, und analog zum zweiten Rieszschen Darstellungssatz 2.26 ist mittels dieser Identifikation  $L'_p(\Omega) \cong L_{p'}(\Omega)$ . Man schreibt in Analogie zum Skalarprodukt auch

$$\phi_w(v) = \langle w, v \rangle$$

und bezeichnet dieses Konstrukt als duale Paarung. Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ist die duale Paarung wie auch das Skalarprodukt linear im zweiten Argument (aus  $V$ ) und konjugiert linear im ersten Argument (aus  $V'$ ).

Ähnlich gilt  $L'_1 \cong L_{\infty}$ , jedoch gilt  $L'_{\infty} \supsetneq L_1$ .

Beachten Sie, dass für die  $L_p$ -Räume ( $p \in (0, 1)$ ) wegen  $(p')' = p$  gilt:

$$(L'_p)' \cong L_p,$$

wobei für einen normierten Vektorraum  $V$  mit  $V'' = (V')'$  der Raum der stetigen linearen Funktione auf dem Dualraum  $V'$  bezeichnet wird. Diesen nennen wir auch den Bidualraum von  $V$ .

Diese Eigenschaft, die wir schon von Hilberträumen kennen, hat einen eigenen Namen.

**Definition 3.7.** Ein Banachraum  $(V, \|\cdot\|)$  heißt reflexiv, wenn für seinen Bidualraum  $V'' \cong V$  (via der kanonischen Inklusion) gilt.

Dabei heißen die normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  isometrisch isomorph, geschrieben  $V \cong W$ , wenn es eine bijektive lineare Abbildung  $J : V \rightarrow W$  mit

$$\|J(v)\|_W = \|v\|_V \quad \text{für alle } v \in V$$

gibt.  $J$  heißt dann isometrischer Isomorphismus.

Wir verlangen für Reflexivität also, dass die Abbildung  $\iota : V \rightarrow V''$ , definiert durch  $(\iota(v))(\phi) := \phi(v)$  für  $v \in V$ ,  $\phi \in V'$ , surjektiv ist.

Da  $V''$  nach der obigen Diskussion stets ein Banachraum ist, können nicht vollständige normierte Räume unmöglich reflexiv sein. Deshalb haben wir die Definition nur für Banachräume formuliert.

Für einen reflexiven Raum ist die duale Paarung in Analogie zu (Semi-)Skalarprodukten also auch konjugiert symmetrisch in dem Sinn, dass für alle  $v \in V$ ,  $w \in V'$

$$\langle w, v \rangle = \langle J(v), w \rangle^*$$

gilt.

Beachten Sie bitte die etwas gefährlich Dopplung der Bezeichnungen in der Definition. Für Prähilberträume hatten wir für den isometrischen Isomorphismus nicht die Norm- sondern auch die Skalarprodukttreue gefordert. Das liegt in der Etymologie des Begriffs isometrisch begründet. Dieser bedeutet, dass wir in beiden Räumen genau gleich messen. In normierten Räumen können wir kraft der Norm Abstände bzw. Längen messen. Daher sollte eine Isometrie normerhaltend sein. In Hilberträumen haben wir zusätzlich noch das Skalarprodukt, das uns neben der Längenmessung via  $\|v\|^2 = \langle v|v \rangle$  auch die Messung von Winkeln und insbesondere die Untersuchung der Orthogonalität erlaubt. Eine Hilbertraum-Isometrie sollte also auch das Skalarprodukt selbst erhalten, damit sich an unseren Messungen nichts ändert.

Wie schon bei (Prä-)Hilberträumen, schließen wir auch für isometrische Isomorphismen zwischen normierten Räumen sofort, dass diese lineare Homöomorphismen mit  $\|J\| = \|J^{-1}\| = 1$  sind.

**Beispiel 33** (Integraloperatoren). Eine große Klasse beschränkter Operatoren erhalten wir in der Form

$$F(v)(x) := \int_{\Omega} k(x, y)v(y) \, dy.$$

Dabei sind  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen,  $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  und ein sogenannter Integralkern. Dann nimmt  $F$  eine Funktion  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  entgegen und bildet diese auf eine Funktion  $F(v) : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  ab. Sind  $k$  und  $v$  dergestalt, dass das Integral für alle  $x$  existiert, so ist die Linearität klar. Für die Wohldefiniertheit und Stetigkeit von  $F$  muss  $k$  gewisse Bedingungen erfüllen, und  $v$  muss aus einem geeigneten Urbildraum  $V$  kommen.

Sind zum Beispiel  $\Omega$  beschränkt und glatt berandet sowie  $k$  stetig und beschränkt, kann also zu  $K \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}; \mathbb{K})$  fortgesetzt werden (wir nennen dieses wieder  $k$ , nehmen also

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

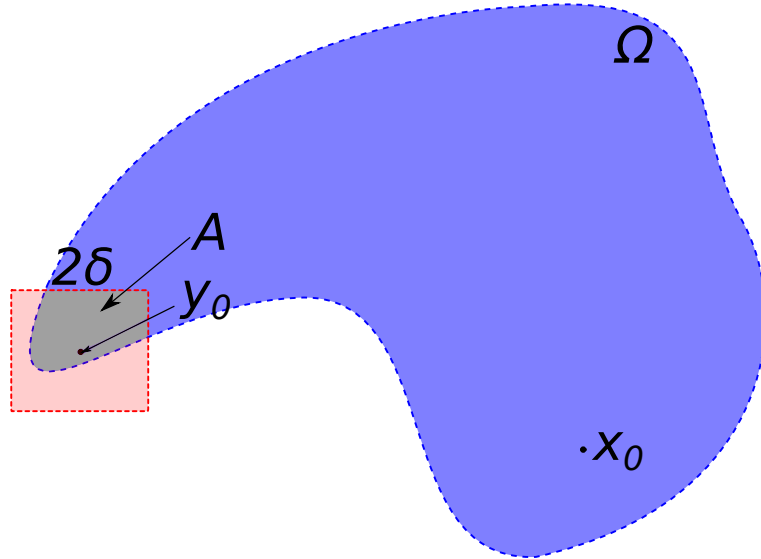
einfach an,  $k$  sei von vorn herein auf  $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$  gegeben), so liefert  $F$  einen stetigen linearen Operator  $F : L_1(\Omega) \rightarrow C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{K})$  mit Operatornorm  $\|F\| \leq \|k\|_\infty$ . Die Existenz erhalten wir aus Satz A.23 über parameterabhängige Integrale (mit  $f(x, y) = k(x, y)u(y)$ ) und der Abschätzung

$$|F(v)(x)| \leq \int_{\Omega} \underbrace{|k(x, y)|}_{\leq \|k\|_\infty} |v(y)| \, dy \leq \|k\|_\infty \|v\|_1.$$

Diese liefert auch eine obere Schranke für  $\|F\|$ . Diese ist sogar scharf. Da  $|k|$  sein Maximum auf der kompakten Menge  $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$  annimmt, finden wir ein  $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$  mit  $|k(x_0, y_0)| = \|k\|_\infty =: a$ . Ist  $a = 0$ , so ist  $k \equiv 0$  und damit  $F$  trivial, also  $\|F\| = 0$ . Andernfalls finden wir zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, dass  $|k(x_0, y)| \geq (1 - \varepsilon)a$  für alle  $y \in \Omega$  mit  $|y - y_0| < \delta$  gilt, wobei  $|\cdot|$  die Maximumsnorm auf  $\mathbb{R}^d$  bezeichne. Nun wählen wir  $v = \mathbf{1}_A$ , wobei

$$A = \{y \in \Omega : |y - y_0| < \delta\} = \Omega \cap \underbrace{(y_0 - \delta \mathbf{1}, y_0 + \delta \mathbf{1})}_{\text{Würfel um } y_0}$$

ist.



Dann ist  $\|v\|_1 = \int_A dy = \text{vol}(A) > 0^1$  und

$$\begin{aligned} \|F(v)\|_\infty &\geq |F(v)(x_0)| \\ &= \left| \int_{\Omega} k(x_0, y) v(y) \, dy \right| = \left| \int_A k(x_0, y) \mathbf{1} \, dy \right| \\ &\geq \inf_{y \in A} |k(x_0, y)| \int_A dy \\ &\geq a(1 - \varepsilon) \|v\|_1 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Das ist das  $d$ -dimensionale Lebesgue-Maß von  $A$ . Dass wir  $\Omega$  einen glatten Rand spendiert haben, liegt daran, dass wir uns auch im Fall  $y_0 \in \partial\Omega$  nicht darum sorgen wollten, dass  $A$  positives Maß hat.



Also ist für jedes  $\varepsilon > 0$ :

$$\|k\|_\infty(1 - \varepsilon) \leq \|F\| \leq \|k\|_\infty$$

und damit  $\|F\| = \|k\|_\infty$ .

Analog überzeugen Sie sich, dass wir mit dem gleichen  $k$  auch einen beschränkten linearen Operator  $\tilde{F} : C(\Omega; \mathbb{K}) \rightarrow C(\Omega; \mathbb{K})$ , nun aber mit der Normabschätzung

$$\|\tilde{F}\| \leq \|k\|_\infty \text{vol}(\Omega).$$

**Beispiel 34.** Analog liefert  $k \in L_\infty(\Omega \times \Omega)$  einen beschränkten linearen Operator von  $L_1(\Omega)$  nach  $L_\infty(\Omega)$ . Hier liefert der Satz von Fubini die Existenz und Stetigkeit. Konkret betrachten wir die Fouriertransformation: Zu  $\Omega = \mathbb{R}$  und  $k(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ist}$  definieren für  $v \in L_1(\mathbb{R})$ :

$$F(v)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ist} v(t) dt.$$

Das ist ein stetiger linearer Operator  $F : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow L_\infty(\mathbb{R})$ , denn

$$\|F(v)\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|v\|_1.$$

**Beispiel 35** (Ableitungsoperatoren). (a) Wir betrachten  $V = C^1([0, 1]; \mathbb{K})$ , versehen mit der Norm

$$\|v\|_V = \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty$$

und  $Y = C^0([0, 1]; \mathbb{K})$  (der Raum der stetigen Funktionen versehen mit der Maximumsnorm). Die Linearität des Operators

$$D : V \rightarrow Y, \quad v \mapsto v'$$

steht außer Frage, und die Beschränktheit liefert eine ganz einfache Rechnung:

$$\|D(v)(t)\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |v'(t)| = \|v'\|_\infty \leq \|v\|_V,$$

also  $\|D\| \leq 1$ . Dass tatsächlich  $\|D\| = 1$  ist, rechnen Sie schnell nach, indem Sie die Funktionen  $v_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $v_n(t) = t^n$ , betrachten. Für diese ist

$$\|D(v_n)\|_\infty = n = \frac{n}{n+1} \underbrace{(\|v_n\|_\infty + \|v'_n\|_\infty)}_{n+1} = \frac{n}{n+1} \|v_n\|_V.$$

Allerdings können Sie sich überzeugen, dass es kein  $v \in V$  mit  $\|D(v)\|_\infty = \|D\| \|v\|_V$  geben kann.

(b) Wir betrachten den gleichen Urbildraum  $W = C^1([0, 1]; \mathbb{K})$ , aber nun mit der Norm  $\|w\|_W = \|w\|_\infty$ . Der Operator  $D$  ist weiterhin wohldefiniert und linear, aber nicht mehr beschränkt, wie die Folge  $v_n$  aus (a) zeigt:

$$\|D(v_n)\| = n \|v_n\|_W.$$

(c) Verallgemeinerungen ergeben sich schnell. Auf  $V, Y$  wie in (a) können wir zu gegebenem  $k \in C^1([0, 1]; \mathbb{K})$  den Operator  $F : V \rightarrow Y$  durch  $F(v) := (kv)'$  definieren und erhalten (nach Produktregel) einen beschränkten Operator.

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

**Beispiel 36** (Multiplikationsoperatoren). Zu den Räumen  $V = C(X; \mathbb{K})$ ,  $Y = C(X; \mathbb{K})$  der stetigen Funktionen auf dem kompakten metrischen Raum  $X$ , jeweils versehen mit der Maximumsnorm, und gegebenem  $k \in C(X; \mathbb{K})$  definieren wir ganz ähnlich wie in (c) des vorigen Beispiels den Multiplikationsoperator  $M : V \rightarrow Y$  durch  $M(v) = k(\cdot)v(\cdot)$ . Dies ist ein stetiger linearer Operator mit Operatornorm  $\|k\|_\infty$ .

**Beispiel 37** (Shift-Operatoren). Zu  $V = \ell_p$ , versehen mit seiner Standardnorm, definieren wir den Linksshift  $L : \ell_p \rightarrow \ell_p$  durch  $L(v) = (v_{n+1})_n \in \mathbb{N}$  sowie den Rechtsshift  $R : \ell_p \rightarrow \ell_p$  durch

$$R : (v_n)_n \mapsto (0, v_1, v_2, \dots).$$

Wir erkennen sofort, dass  $\|R(v)\|_p = \|v\|_p$ , also  $\|R\| = 1$  ist. Analog berechnen wir auch für den Linksshift  $\|L\| = 1$ . Nun finden wir tatsächlich  $v \in \ell_p$  mit  $\|L(v)\|_p = \|v\|_p$ . Das sind mindestens jene, für die  $v_1 = 0$  ist.

## 3.2. Der Satz von Baire

Wir wollen uns nun mit Familien beschränkter Operatoren beschäftigen. Dazu benötigen wir ein Hilfsmittel.

**Definition 3.8.** 1. Eine Teilmenge  $A \subset V$  eines metrischen Raums  $(V, d)$  heißt nirgends dicht, falls ihr Abschluss keine inneren Punkte enthält:  $\text{int}(\bar{A}) = \emptyset$ .

2. Eine Teilmenge  $B \subset V$  eines metrischen Raums heißt von erster Kategorie (oder mager), falls sie als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen geschrieben werden kann. Andernfalls heißt  $B$  von zweiter Kategorie (oder fett).

Die Bedingung,  $\bar{A}$  enthalte keine inneren Punkte, lässt sich alternativ auch anders formulieren:  $\bar{A}$  enthält keine offene Kugel von positivem Radius (um einen inneren Punkt gäbe es nämlich eine solche) bzw.  $\bar{A}$  enthält keine nicht leere offene Menge.

**Beispiel 38.** Endliche Teilmengen normierter Vektorräume sind nirgends dicht. Ebenso ist  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  unter dem üblichen Betrag nirgends dicht. Es folgt, dass  $\mathbb{Q}$  als abzählbare Vereinigung einelementiger Mengen eine Menge erster Kategorie in  $\mathbb{R}$  ist.

**Beispiel 39.**  $\mathbb{N}$  ist nicht nirgends dicht in  $\{1\} \cup [2, \infty)$  mit dem Standardbetrag, da

$$B_{\frac{1}{2}}(1) = \{1\} \subset \mathbb{N} \subset \bar{\mathbb{N}}$$

eine nicht triviale offene Teilmenge ist. Analog ist in jedem diskreten metrischen Raum keine nicht leere Menge nirgends dicht.

**Satz 3.9** (Das Prinzip geschachtelter Intervalle). Ist  $(K_n)_n$  eine absteigende Folge nicht leerer, abgeschlossener Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums  $(V, d)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } K_n = 0 \tag{3.1}$$

so existiert genau ein  $v \in V$  derart, dass  $\{v\} = \bigcap_{n \geq 1} K_n$ .

*Beweis.* Wir wählen für jedes  $n$  ein  $v_n \in K_n$ . Wegen der Bedingung (3.1) handelt es sich dabei um eine Cauchyfolge, die einen eindeutigen Grenzwert  $v$  hat. Dieser liegt als Grenzwert der Folge  $(v_n)_{n \geq k}$  in jedem der (abgeschlossenen)  $K_k$ , also auch im Durchschnitt.

Enthielte der Durchschnitt einen weiteren Punkt  $w$ , so wäre wegen (3.1)  $d(v, w) < \varepsilon$  für jedes  $\varepsilon > 0$ , also  $d(v, w) = 0$ .  $\square$

**Satz 3.10** (Bairesches Kategorientheorem). *Jede nicht leere offene Teilmenge  $U$  eines Banachraums  $(V, \|\cdot\|)$  ist von zweiter Kategorie.*

*Beweis.* Angenommen, es gäbe eine abzählbare Familie  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  nirgends dichter Mengen derart, dass  $U = \bigcup_{n \geq 1} A_n$  ist.

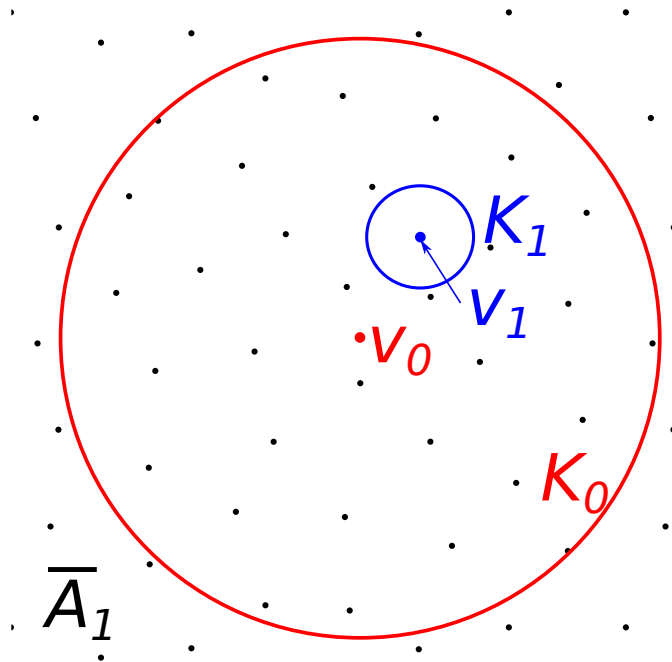
Da  $U$  offen und nicht leer ist, finden wir ein  $v_0 \in U$  und ein  $r_0 > 0$  derart, dass  $K_0 = \bar{B}_{r_0}(v_0) \subset U$  gilt.

In  $K_0$  finden wir nun ein  $v_1$  mit  $\text{dist}(v_1, \bar{A}_1) > 0$ . Sonst wäre nämlich  $v \in \bar{A}_1$  für alle  $v \in K_0$ , also  $K_0 \subset \bar{A}_1$ . Dann enthielte  $\bar{A}_1$  aber die offene Kugel  $B_{r_0}(v_0)$  im Widerspruch dazu, dass  $A_1$  nirgends dicht ist.

Dann finden wir ein  $r_1 \in (0, \frac{1}{2}r_0)$  derart, dass

$$\bar{A}_1 \cap \bar{B}_{r_1}(v_1) = \emptyset, \quad K_1 = \bar{B}_{r_1}(v_1) \subset \bar{B}_{r_0}(v_0) = K_0$$

ist.



Konstruktion der (ersten beiden)  $K_n$ . Der Abschluss der nirgends dichten Menge  $A_1$  ist durch schwarze Punkte angedeutet.

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

Iterativ erhalten wir eine absteigende Folge abgeschlossener Kugeln  $K_n$  mit Radien  $r_n \rightarrow 0$ , deren Durchschnitt einen einzelnen Punkt  $v$  enthält. Allerdings liegt  $v$  in keinem der  $\bar{A}_n$ , also insbesondere in keinem der  $A_n$ , im Widerspruch zu

$$v \in B_{r_0}(a_0) \subset U = \bigcup_{n \geq 1} A_n.$$

□

Insbesondere sind natürlich Banachräume selbst von zweiter Kategorie.

**Bemerkung.** Man zeigt ganz analog, dass jeder vollständige, nicht leere metrische Raum von zweiter Kategorie (in sich selbst) ist.

**Korollar 3.11.** Ist  $A \subset V$  von erster Kategorie im Banachraum  $(V, \|\cdot\|)$ , so ist  $V \setminus A$  nicht leer und von zweiter Kategorie in  $V$ .

*Beweis.* Da  $V = A \cup (V \setminus A)$  von zweiter Kategorie ist, muss eine der beiden Teilmengen von zweiter Kategorie sein – das kann nur  $V \setminus A$  sein. Insbesondere kann nicht  $V = A$  sein, also ist  $V \setminus A$  nicht leer. □

Eine klassische Anwendung des Kategorientheorems liegt in der Existenz stetiger, aber nirgends differenzierbarer Funktionen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Konstruktion einer solchen Funktion geht auf Karl Weierstraß zurück, der explizit ein Beispiel folgender Art angab:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n t\}}{10^n},$$

wobei  $\{t\} = \min\{|t - k| : k \in \mathbb{Z}\}$  den Abstand von  $t$  zur nächstgelegenen ganzen Zahl bezeichnet. Der Beweis, dass die so definierte Funktion  $f$  stetig, aber nirgends differenzierbar ist, erfordert einiges an Rechenarbeit. Das folgende Beispiel beweist die Existenz solcher Funktionen nicht konstruktiv.

**Beispiel 40.** Wir betrachten den Banachraum  $V = C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , versehen mit der Maximumsnorm. Darin definieren wir

$$A := \{v \in V : v'(t_0) \text{ existiert für mind. ein } t_0 \in [0, 1]\}.$$

Ist  $t_0 = 0$  oder  $t_0 = 1$ , handelt es sich dabei um die einseitige Ableitung.

Können wir zeigen, dass  $A$  von erster Kategorie ist. Daraus folgt, dass die Menge  $V \setminus A$  aller stetigen Funktionen  $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die nirgends in  $[0, 1]$  differenzierbar sind, nicht leer und von zweiter Kategorie in  $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$  ist.

Dazu betrachten wir die Mengen  $A_n$ , bestehend aus jenen Funktionen  $v$ , für die ein  $t_0 \in [0, 1]$  derart existiert, dass für alle  $h \in [-t_0, 1 - t_0]$

$$|v(t_0 + h) - v(t_0)| \leq n|h|$$

gilt. Ist  $v \in A$ , so gehört  $v$  (wegen der Differenzierbarkeit in  $t_0$  und der gleichmäßigen Stetigkeit auf  $[0, t_0]$  sowie auf  $[t_0, 1]$ ) zu einem der  $A_n$ , also  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

Wir haben also noch zu zeigen, dass alle  $A_n$  nirgends dicht sind. Das geschieht in zwei Schritten.

(I) Die  $A_n$  sind abgeschlossen. Zur Folge  $(v_k)_k$  in  $A_n$  mit Grenzwert  $v \in V$  (also  $v_k \rightarrow v$  gleichmäßig auf  $[0, 1]$ ) existieren nämlich Punkte  $t_k \in [0, 1]$  derart, dass für alle  $k$

$$|v_k(t_k + h) - v_k(t_k)| \leq n|h| \quad \text{für } h \in [-t_k, 1 - t_k]$$

gilt. Die Folge  $(t_k)_k$  enthält eine im Kompaktum  $[0, 1]$  konvergente Teilfolge  $(t_{k_l})_l$  mit Grenzwert  $t_0 \in [0, 1]$ . Die Teilfolge  $(v_{k_l})_l$  konvergiert immer noch gleichmäßig gegen die Grenzfunktion  $v$  der ursprünglichen Folge, also gilt für diese (auf  $[0, 1]$  stetige, also gleichmäßig stetige) Funktion:

$$|v(t_0 + h) - v(t_0)| \leq n|h| \quad \text{für } h \in [-t_0, 1 - t_0],$$

also ist  $v \in A_n$ .

(II)  $\text{int}(\bar{A}_n) = \emptyset$ : Zu jedem  $v \in A_n = \bar{A}_n$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es eine stetige, stückweise lineare Funktion  $w : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\|v - w\|_\infty < \varepsilon$  und  $|w'_+(t)| > n$  für alle  $t \in [0, 1]$  und  $|w'_-(t)| > n$  für  $t \in (0, 1]$ . Dieses  $w$  liegt also nicht in  $A_n$ , und damit enthält  $A_n$  tatsächlich keine offene Kugel.

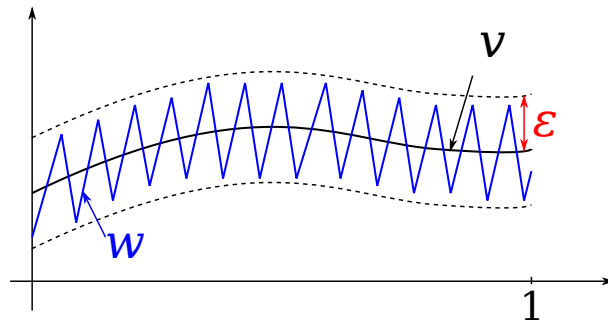


Illustration der Funktion  $v \in A_n$  und der stückweise linearen Approximation  $g$  mit überall großer (einseitiger) Ableitung. Man kann  $w$  sogar so wählen, dass  $|w'_+(t)| = |w'_-(t)| = C > n$  konstant ist.

Analog haben E. Corominas und F. Sunyer Balaguer 1954 folgenden Satz gezeigt.

**Korollar 3.12.** Sind  $I \subset \mathbb{R}$  ein nicht triviales Intervall<sup>a</sup> und  $f \in C^\infty(I; \mathbb{R})$  derart, dass für jedes  $t \in I$  ein (von  $t$  abhängiges)  $n \in \mathbb{N}$  derart existiert, dass  $f^{(n)}(t) = 0$  ist, dann ist  $f$  ein Polynom.

<sup>a</sup>d.h.,  $I$  soll mehr als einen Punkt enthalten

Anders ausgedrückt: Für nicht polynomiale glatte Funktionen gibt es Stellen, an denen alle Ableitungen von Null verschieden sind.

Man beachte, dass für ein Polynom  $f$  sogar ein  $n_0 = \deg f + 1$  derart existiert, dass  $f^{(n_0)}(t) = 0$  für alle  $t$  gilt.

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

*Beweis.* Wir beschränken uns auf den Fall eines offenen Intervalls  $I$ , sonst schränken wir einfach  $f$  auf das Innere von  $I$  ein.

Wir definieren zu gegebenem  $f$  die abgeschlossenen Mengen  $A_n = \{t \in I : f^{(n)}(t) = 0\}$  und die offene Menge

$$B = \{t \in I : f|_{(a,b)} \text{ ist ein Polynom für gewisse } a, b \in I, a < t < b\}.$$

Nach Voraussetzung ist  $I = \bigcup_n A_n$ , also ist  $\{B^c \cap A_n\}_n$  eine Überdeckung des (in  $I$  abgeschlossenen) Komplements  $B^c = I \setminus B$  von  $B$ . Es gibt also zwei Möglichkeiten:

(a)  $B^c$  ist nicht leer.

(b)  $B^c$  ist leer. Dann ist  $f$  ein Polynom wie behauptet.

Wir wollen Möglichkeit (a) ausschließen. Dazu stellen wir fest:

(I)  $B^c$  enthält keine isolierten Punkte. Wäre nämlich  $t_0 \in B^c$  ein isolierter Punkt in  $B^c$ , so wäre  $f$  eingeschränkt auf  $(a, t_0)$  ein Polynom für ein  $t_0 > a \in I$ , aber auch eingeschränkt auf  $(t_0, b)$  für ein  $t_0 < b \in I$ . Auf beiden dieser Intervalle wäre  $f$  dann jeweils als Polynom durch die Taylor-Entwicklung von  $f$  um  $t_0$  gegeben (da  $f$  auf ganz  $(a, b)$  beliebig oft differenzierbar ist) – also wären beide Polynome gleich und  $f$  stimmt mit diesem Polynom auf ganz  $(a, b) \ni t_0$  überein.

(II) Nach (I) ist  $B^c$  entweder leer oder hat ein nicht leeres Inneres, ist also von zweiter Kategorie. Dann müsste eines der (abgeschlossenen)  $A_n \cap B^c$ , sagen wir für  $n = n_0$ , ebenfalls ein nicht leeres Inneres (in  $B^c$ ) haben, da  $B^c$  nicht als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen geschrieben werden kann. Also existiert ein Intervall  $(c, d)$  positiver Länge derart, dass  $[c, d] \cap B^c \subset A_{n_0} \cap B^c$  und  $f^{(n_0)}(t) = 0$  für alle  $t \in (c, d) \cap B^c$ . Da  $(c, d) \cap B^c$  keine isolierten Punkte enthält, verschwinden dann auch alle höheren Ableitungen von  $f$  auf dieser Menge:  $f^{(n)} \equiv 0$  auf  $(c, d) \cap B^c$ . Nun kann  $(c, d) \cap B^c$  nicht ganz  $(c, d)$  sein, da sonst nach Konstruktion  $(c, d) \subset B$  gälte. Daher ist  $B \cap (c, d) \neq \emptyset$ , enthält also (wegen der Offenheit von  $B$ ) ein offenes Intervall. Ist nun  $(r, s) \subset B \cap (c, d)$  ein maximales solches (d.h.,  $r, s \notin B$ ), auf dem  $f$  ein Polynom ist, dann verschwinden dessen Ableitungen  $f^{(n)}$ ,  $n \geq n_0$ , in den Punkten  $r$  und  $s$ . Also ist  $f^{(n_0)}(t) = 0$  auf  $(r, s)$ , und damit auch alle höheren Ableitungen. Das klappt für alle derartigen Intervalle  $(r, s)$ , also gilt auch  $f^{(n)} \equiv 0$  auf  $B \cap (c, d)$  für  $n \geq n_0$  und zusammen  $f^{(n)} \equiv 0$  auf  $[c, d]$  für  $n \geq n_0$ . Dann ist aber  $f$  auf  $(c, d)$  ein Polynom und damit doch  $(c, d) \subset B$ .

Damit ist also  $B^c$  leer. □

### 3.3. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Wir wenden das Bairesche Kategorientheorem nun auf Familien beschränkter Operatoren an.

**Satz 3.13** (gleichmäßige Beschränktheit). *Ist  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(V, Y)$  eine beliebige Familie beschränkter linearer Operatoren vom Banachraum  $V$  in den normierten Vektorraum  $Y$  derart, dass für alle  $v \in V$*

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \|F(v)\|_Y < \infty$$

*gilt, dann existiert eine abgeschlossene Kugel  $B \subset V$  mit positivem Radius derart, dass*

$$\sup_{v \in B} \sup_{F \in \mathcal{F}} \|F(v)\|_Y < \infty.$$

### 3.3. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Kurz: Ist die Familie  $\mathcal{F}$  punktweise beschränkt, so ist sie auch gleichmäßig beschränkt (auf einer Kugel). Die Behauptung gilt trivialerweise für jede endliche (insbesondere die leere) Familie  $\mathcal{F}$ , ist für unendliche Familien aber ein sehr mächtiges Werkzeug.

*Beweis.* Zu  $k \in \mathbb{N}$  setzen wir

$$A_k := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \{v \in V : \|F(v)\|_Y \leq k\}.$$

Die  $A_k$  bilden eine Ausschöpfung von  $V$ , also eine aufsteigende Folge von Mengen mit  $V = \bigcup_k A_k$ . Ferner ist wegen der Stetigkeit für jedes  $F$  und  $k$  die Menge

$$\{v \in V : \|F(v)\|_Y \leq k\} = (\|\cdot\|_Y \circ F)^{-1}([0, k])$$

abgeschlossen. Damit sind auch die  $A_k$  als Durchschnitte abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Nach dem Baireschen Kategorientheorem muss eines der  $A_k$  also einen inneren Punkt, und damit eine abgeschlossene Kugel  $B$  von positivem Radius enthalten. Nach Konstruktion der  $A_k$  gilt dann aber

$$\|F(v)\|_Y \leq k \text{ für alle } F \in \mathcal{F}, v \in B.$$

Das ist gerade die Behauptung. □

Aus diesem Satz folgern wir sofort einen der Kernsätze der linearen Funktionalanalysis.

**Theorem 3.14** (Banach-Steinhaus). *Ist  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(V, Y)$  eine beliebige Familie beschränkter linearer Operatoren vom Banachraum  $V$  in den normierten Vektorraum  $Y$  derart, dass für alle  $v \in V$*

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \|F(v)\|_Y < \infty$$

*gilt, dann ist  $\mathcal{F}$  eine beschränkte Teilmenge von  $\mathcal{L}(V, Y)$ :*

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \|F\| < \infty.$$

*Beweis.* Sei  $B = \bar{B}_r(v_0)$  die nach dem Satz über gleichmäßige Beschränktheit existierende Kugel, auf der die  $F \in \mathcal{F}$  gleichmäßig beschränkt sind:

$$C := \sup_{v \in B} \sup_{F \in \mathcal{F}} \|Fv\|_Y < \infty.$$

Wegen der Linearität der  $F$  gilt

$$\|F(\varrho(v - v_0))\|_Y \leq \varrho(\|F(v)\|_Y + \|F(v_0)\|_Y) \quad \text{für alle } v \in V, \varrho > 0.$$

Die Beschränktheit überträgt sich also direkt von  $B$  auf die abgeschlossene Einheitskugel, denn  $v \in \bar{B}_1(0_V) \iff rv + v_0 \in B$ , also:

$$\|Fv\|_Y = \left\| F\left(\frac{1}{r}(\underbrace{rv + v_0}_{=:w \in B} - v_0)\right) \right\| \leq \frac{1}{r} \underbrace{\|F(w)\|_Y}_C + \frac{1}{r} \underbrace{\|F(v_0)\|_Y}_{=:c} \quad \text{für alle } v \in \bar{B}_1(0_V)$$

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

und damit

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \|F\| = \sup_{F \in \mathcal{F}} \sup_{\|v\|_V \leq 1} \underbrace{\|F(v)\|_Y}_{\leq \frac{1}{r}(C+c)} \leq \frac{1}{r}(C+c).$$

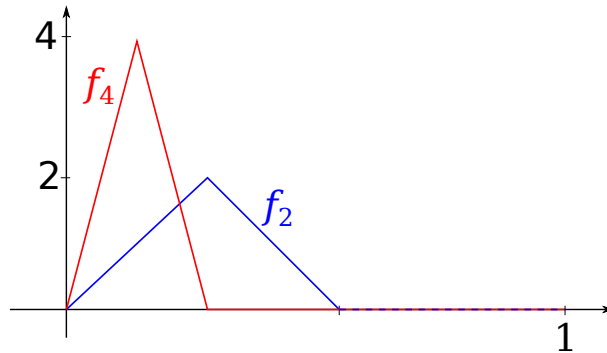
□

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Linearität eine wesentliche Rolle spielt. Für allgemeine Familien stetiger Funktionen folgt aus punktweiser Beschränktheit keineswegs die Beschränktheit im betrachteten Raum.

**Beispiel 41.** Wir betrachten den (vollständigen und kompakten metrischen) Raum  $V = [0, 1]$ , versehen mit der Standardmetrik, als Bildraum  $Y = \mathbb{R}$ , ebenfalls versehen mit dem Betrag als Norm, sowie im Raum  $C^0([0, 1])$  der stetigen (aber nicht notwendigerweise linearen) Abbildungen von  $V$  nach  $Y$  die Familie  $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$f_n(x) = 2n^2 x \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{2n}]}(x) + 2n(1 - nx) \mathbf{1}_{(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]}(x),$$

also  $f_n(\frac{1}{2n}) = n$ ,  $f_n(0) = 0 = f_n(\frac{1}{n})$  und dazwischen linear interpoliert. Diese Familie ist punktweise beschränkt, denn  $f_n(0) = 0$  für alle  $n$ , und zu  $x > 0$  finden wir ein  $n_0 > \frac{1}{x}$ . Für  $n \geq n_0$  ist dann  $f_n(x) = 0$ , und für  $n < n_0$  ist  $f_n(x) \leq n < n_0$ . Allerdings ist  $\|f_n\|_\infty = n$ , die Familie  $\{f_n\}_n$  in  $C^0([0, 1])$  also keineswegs beschränkt.



Und dabei sind die  $f_n$  sogar stückweise linear, und wir hätten als Urbildraum natürlich auch den ganzen Banachraum  $\mathbb{R}$  statt  $V = [0, 1]$  nehmen können, ohne den Effekt zu verlieren. Der relevante Raum wäre dann der Raum  $C_b^0(\mathbb{R})$  der beschränkten stetigen Funktionen, auf dem wir ebenfalls die Supremumsnorm definieren können.

Als Folgerung aus dem Satz von Banach und Steinhaus erkennen wir, dass die Untersuchung dichter Teilmengen des Urbildraums genügt.



### 3.3. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

**Satz 3.15.** Sind  $(V, \|\cdot\|_V)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banachräume und  $(F_n)_n$  eine Folge beschränkter linearer Operatoren  $F_n \in \mathcal{L}(V, Y)$ , so sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Es existiert ein  $F \in \mathcal{L}(V, Y)$  derart, dass

$$F(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

gilt.

(ii)  $\sup_n \|F_n\| < \infty$  und es existiert eine dichte Teilmenge  $D \subset V$  derart, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(v)$  für alle  $v \in D$  existiert.

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii) ist einfach der Satz von Banach und Steinhaus.

(ii)  $\implies$  (i) Wir setzen  $M := \sup_n \|F_n\|$ . Zu gegebenem  $v \in V$  und  $\varepsilon > 0$  finden wir ein  $w \in D$  mit  $\|w - v\|_V < \frac{\varepsilon}{3(1+M)}$ . Für die Cauchyfolge  $(F_n(w))_n$  finden wir ferner ein  $n_0$  derart, dass

$$\|F_n(w) - F_m(w)\|_Y < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für } n, m \geq n_0$$

gilt. Dann schätzen wir für  $n, m \geq n_0$  nach Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|F_n(v) - F_m(v)\|_Y &\leq \|F_n(v) - F_n(w)\|_Y + \|F_n(w) - F_m(w)\|_Y + \|F_m(w) - F_m(v)\|_Y \\ &\leq \underbrace{\|F_n\|}_{\leq M} \|v - w\|_V + \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{\|F_m\|}_{\leq M} \|v - w\|_V \\ &\leq M \frac{\varepsilon}{3(1+M)} + \frac{\varepsilon}{3} + M \frac{\varepsilon}{3(1+M)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist auch  $(F_n(v))_n$  eine Cauchyfolge, die im Banachraum  $Y$  gegen einen Grenzwert konvergiert, den wir  $F(v)$  nennen. Die so definierte Abbildung  $F : V \rightarrow Y$  ist nach den Rechenregeln für konvergente Folgen offensichtlich linear und erfüllt im Grenzübergang

$$\|F(v)\|_Y \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|F_n\| \|v\|_V,$$

ist also beschränkt. □

Die nächste Folgerung verbessert unsere Abschätzung der Norm des Grenzoperators.

**Korollar 3.16.** Sind  $(V, \|\cdot\|_V)$  ein Banachraum,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  ein normierter Vektorraum und  $(F_k)_k$  eine Folge beschränkter linearer Operatoren von  $V$  nach  $Y$  derart, dass  $F(v) := \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(v)$  für alle  $v \in V$  existiert. Dann ist  $F \in \mathcal{L}(V, Y)$  und

$$\|F\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|F_k\|.$$

*Beweis.* Die punktweise Beschränktheit ist klar, da für jedes  $v$  die Folge  $(F_k(v))_k$  sogar konvergiert. Nach dem Satz von Banach und Steinhaus ist also  $M := \sup_k \|F_k\| < \infty$ . Dann gilt also für alle  $v \in V$

$$\|F(v)\| \overset{k \rightarrow \infty}{\longleftarrow} \|F_k(v)\|_Y \leq \|F_k\| \|v\|_V \leq M \|v\|_V,$$

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

also ist  $F$  beschränkt. Wählen wir eine Teilfolge  $(F_{k_l})_l$  mit  $\|F_{k_l}\| \rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} \|F_k\|$ , so liefert die gleiche Abschätzung:

$$\|F(v)\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|F_{k_l}\| \|v\|_V.$$

□

**Beispiel 42.** Wir können im allgemeinen im Satz von Banach und Steinhaus und in der letzten Folgerung nicht auf die Vollständigkeit des Raums  $V$  verzichten. Dazu betrachten wir den Raum  $V = Y = c_{00}$  der abbrechenden Folgen, versehen mit der Norm  $\|\cdot\|_\infty$ . Als Operatoren betrachten wir die Multiplikationsoperatoren  $M_n$  mit  $(1, 2, \dots, n, 0, \dots)$ , gegeben durch

$$M_n(v) = (1v_1, 2v_2, \dots, nv_n, 0, \dots).$$

Sie überzeugen sich schnell, dass

1.  $\|M_n\| = n$  ist, dass
2. für alle  $v = (v_1, \dots, v_k, 0, \dots) \in c_{00}$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|M_n(v)\|_\infty = \|(v_1, \dots, kv_k, 0, \dots)\|_\infty \leq k\|v\|_\infty < \infty$$

ist (die Familie  $\{M_n\}_n$  ist punktweise beschränkt) und dass

3. der punktweise Grenzwert  $M$  durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(v) =: M(v) = (v_1, \dots, kv_k, 0, \dots)$$

gegeben ist.

Allerdings ist  $M$  nicht beschränkt, denn für alle  $k \in \mathbb{N}$  liefert die Anwendung auf den  $k$ -ten Standardeinheitsvektor  $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ :

$$\|M(e_k)\|_\infty = \|(0, \dots, 0, k, 0, \dots)\|_\infty = k = k\|e_k\|_\infty.$$

Auch die Familie  $\{M_n\}_n$  selbst ist nicht beschränkt:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|M_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} n = \infty,$$

erfüllt also nicht die Behauptung des Satzes von Banach und Steinhaus (und keine der beiden Aussagen von Satz 3.15).

Eine weitere Anwendung betrifft Bilinearformen.

**Definition 3.17.** Eine *Bilinearform* ist eine Abbildung  $b : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $(v, w) \mapsto b(v, w)$ , vom Produkt der  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $V, W$  nach  $\mathbb{K}$  derart, dass für alle  $v, v' \in V$ ,  $w, w' \in W$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$b(\alpha v + v', w) = \alpha b(v, w) + b(v', w), \quad b(v, \beta w + w') = \beta b(v, w) + b(v, w')$$

gilt. Das Paar  $\langle V, W \rangle$ , zusammen mit  $b$ , wird dann auch als *duales Paar* bezeichnet. Sind  $(V, \|\cdot\|_V)$ ,  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte lineare Räume, so heißt die Bilinearform  $b : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$  *partiell stetig*, falls für  $v_k \rightarrow v$  in  $V$ ,  $w_k \rightarrow w$  in  $W$  und beliebige  $v_0 \in V$ ,  $w_0 \in W$  gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b(v_k, w_0) = b(v, w_0), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b(v_0, w_k) = b(v_0, w).$$

Bilinearformen kennen wir natürlich schon. Zum Beispiel sind (Semi-)Skalarprodukte im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  positiv (semi)definite, symmetrische Bilinearformen. Diese hatten sich sogar als stetig erwiesen. Der folgende Satz besagt, dass im Fall von Banachräumen die Stetigkeit einer Bilinearform schon aus der partiellen Stetigkeit folgt.

**Korollar 3.18** (Mazur-Orlicz). Ist  $b : V \times W \rightarrow \mathbb{K}$  eine partiell stetige Bilinearform auf den Banachräumen  $V, W$ , so ist  $b$  stetig, d.h.:

$$b(v_n, w_n) \rightarrow b(v, w), \text{ falls } v_n \rightarrow v \text{ in } V, w_n \rightarrow w \text{ in } W.$$

*Beweis.* Wegen der Bilinearität genügt es, die Behauptung für  $v = 0_V$ ,  $w = 0_W$  zu zeigen. Zu  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $\psi_n \in W'$  durch  $\psi_n(z) := b(v_n, z)$  für  $z \in W$  (man beachte, dass  $b(v_n, \cdot)$  nach Voraussetzung stetig ist) und erhalten wegen der partiellen Stetigkeit im ersten Argument

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(z) = b(v, z) =: \psi(z).$$

Die Familie  $\{\psi_n\}_n$  ist also punktweise und damit nach Banach-Steinhaus auch gleichmäßig beschränkt:

$$M := \sup_n \|\psi_n\|_{W'} < \infty.$$

Damit erhalten wir

$$|b(v_n, w_n)| = |\psi_n(w_n)| \leq \|\psi_n\|_{W'} \|w_n\|_W \leq M \|w_n\|_W \rightarrow 0 \quad \text{f. } n \rightarrow \infty,$$

also  $b(v_n, w_n) \rightarrow 0 = b(0, 0)$ . □

### Einschub: Satz von Arzelá-Ascoli

Eine verwandte Aussage über Familien stetiger Abbildungen zwischen metrischen Räumen kennen Sie möglicherweise bereits aus der Analysis. Dazu führen wir noch einen Begriff ein.

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

**Definition 3.19.** 1. Eine Familie  $\mathcal{F}$  stetiger Abbildungen  $f : V \rightarrow W$  von einem metrischen Raum  $(V, d_V)$  in einen metrischen Raum  $(W, d_W)$  heißt gleichgradig stetig in  $v_0 \in V$ , falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart existiert, dass

$$d_W(f(v), f(v_0)) < \varepsilon \quad \text{für alle } v \in B_\delta(v_0) \subset V, f \in \mathcal{F}$$

gilt.

2.  $\mathcal{F}$  heißt punktweise gleichgradig stetig, falls  $\mathcal{F}$  in jedem  $v_0 \in V$  gleichgradig stetig ist.

3.  $\mathcal{F}$  heißt gleichmäßig gleichgradig stetig (oft einfach: gleichgradig stetig), falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart existiert, dass

$$d_W(f(v), f(v')) < \varepsilon \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}, v, v' \in V \text{ mit } d_V(v, v') < \delta$$

gilt (das  $\delta$  also nicht von  $v_0$  abhängt).

Das *Gleichgradige* an der Stetigkeit besteht darin, dass wir in allen Fällen ein einzelnes  $\delta > 0$  finden, das für *alle*  $f \in \mathcal{F}$  genügt.

Der folgende Satz liefert nun eine Aussage über die gleichmäßige Beschränktheit (übersetzt in relative Kompaktheit im Raum  $C(V, Y)$ ) von Familien stetiger Abbildungen. Erinnern Sie sich an Beispiel 41, in dem wir gesehen hatten, dass punktweise Beschränktheit dafür nicht hinreichend sein kann.

**Satz 3.20** (Arzelà, Ascoli). Zum kompakten metrischen Raum  $(V, d)$  und dem Banachraum  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  versehen wir  $C(V; Y)$  mit der Supremumsnorm<sup>a</sup>

$$\|f\|_\infty := \sup_{v \in V} \|f(v)\|_Y$$

und betrachten eine Familie  $\mathcal{F} \subset C(V; Y)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i)  $\mathcal{F}$  ist relativ kompakt in  $C(V; Y)$ .

(ii) Für alle  $v \in V$  ist  $A_v := \{f(v) : f \in \mathcal{F}\}$  relativ kompakt in  $Y$ , und  $\mathcal{F}$  ist punktweise gleichgradig stetig, d.h. für alle  $v \in V$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  derart, dass  $\|f(w) - f(v)\|_Y < \varepsilon$  für alle  $w \in B_\delta(v)$ ,  $f \in \mathcal{F}$  gilt.

<sup>a</sup>Wie auch  $C^0(V; \mathbb{K})$  ist  $C(V; Y)$  unter dieser Norm vollständig.

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii). Wir zeigen beide Teile von (ii) separat.

(I) Zu  $v \in V$  und  $\varepsilon > 0$  finden wir wegen der relativen Kompaktheit (und damit totalen Beschränktheit) von  $\mathcal{F}$  endlich viele  $f_1, \dots, f_n \in C(V; Y)$  derart, dass  $\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^n B_{\frac{\varepsilon}{3}}(f_k)$  gilt. Für jedes  $k = 1, \dots, n$  finden wir  $\delta_k > 0$  derart, dass

$$\|f_k(w) - f_k(v)\|_Y < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } w \in V, d(v, w) < \delta_k.$$

Für alle  $w \in V$ ,  $d(v, w) < \delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$  und  $f \in \mathcal{F}$  gilt dann mit einem  $k \in$

### 3.3. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

$\{1, \dots, n\}$ , für das  $\|f - f_k\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$  ist:

$$\begin{aligned} \|f(v) - f(w)\|_Y &\leq \|f(v) - f_k(v)\|_Y + \|f_k(v) - f_k(w)\|_Y + \|f_k(w) - f(w)\|_Y \\ &\leq \|f - f_k\|_\infty + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_k - f\|_\infty < \varepsilon, \end{aligned}$$

also  $\mathcal{F}$  punktweise gleichgradig stetig.

(II) Zu festem  $v \in V$  setzen wir  $\phi_v : C(V; Y) \rightarrow A_v$ ,  $\phi_v(f) = f(v)$ . Wegen

$$\|\phi_v(f_1) - \phi_v(f_2)\|_Y = \|f_1(v) - f_2(v)\|_Y \leq \|f_1 - f_2\|_\infty \quad \text{für } f_1, f_2 \in C(V; Y)$$

ist  $\phi_v$  (sogar gleichmäßig) stetig, bildet also die relativ kompakte Menge  $\mathcal{F}$  auf eine relativ kompakte Menge  $\phi_v(\mathcal{F}) = A_v$  ab.

(ii)  $\implies$  (i). Wir zeigen äquivalent zur relativen Kompaktheit die Präkompaktheit von  $\mathcal{F}$  im Banachraum  $(C(V; Y), \|\cdot\|_\infty)$ .

(III) Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  und  $v \in V$  finden wir wegen der gleichgradigen Stetigkeit ein  $\delta_v > 0$  derart, dass

$$\|f(v) - f(w)\|_Y < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle } w \in B_{\delta_v}(v), f \in \mathcal{F}. \quad (3.2)$$

Von der offenen Überdeckung  $\{B_{\delta_v}(v)\}$  des kompakten Raums  $V$  genügen endlich viele:

$$V \subset \bigcup_{j=1}^J B_{\delta_{v_j}}(v_j). \quad (3.3)$$

Nach Voraussetzung ist jedes  $A_{v_j}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , relativ kompakt, also präkompakt im Banachraum  $Y$ . Wir finden zu unserem fest vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  also endlich viele

$$y_1, \dots, y_M \in A = \bigcup_{j=1}^J A_{v_j} \quad \text{mit} \quad A \subset \bigcup_{m=1}^M B_{\frac{\varepsilon}{4}}(y_m). \quad (3.4)$$

Man beachte, dass jedes  $y_m$  in einem der  $A_{v_j}$  liegt, also von der Form  $y_m = f(v_j)$  für ein  $f \in \mathcal{F}$ ,  $j \in \{1, \dots, J\}$  ist.

(IV) Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \underbrace{\text{Abb}(\{1, \dots, J\}; \{1, \dots, M\})}_{=:\Sigma \text{ (endlich!)}} &\rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}), \\ \Phi(\sigma) &= \left\{ f \in \mathcal{F} : \|f(v_j) - y_{\sigma(j)}\|_Y < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } j = 1, \dots, J \right\}. \end{aligned}$$

Zu gegebenem  $f \in \mathcal{F}$  und  $j \in \{1, \dots, J\}$  finden wir laut (3.4) ein  $y_m$  mit  $\|f(v_j) - y_m\|_Y < \frac{\varepsilon}{4}$ , also existiert ein  $\sigma \in \Sigma$  mit  $f \in \Phi(\sigma)$ , also:

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \Phi(\sigma).$$

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

Wir haben also eine endliche Überdeckung von  $\mathcal{F}$  durch Mengen der Form  $\Phi(\sigma)$  gefunden.

(V) Schließlich hat jedes nicht leere  $\Phi(\sigma)$  Durchmesser  $\text{diam}\Phi(\sigma) \leq \varepsilon$ , kann also in eine Kugel vom Radius  $\varepsilon$  eingeschlossen werden, sagen wir  $\Phi(\sigma) \subset B_\varepsilon(f_\sigma)$ . Dazu seien  $f, g \in \Phi(\sigma)$  beliebig. Wir haben  $\|f(v) - g(v)\|_Y < \varepsilon$  für alle  $v \in V$  zu zeigen. Dann ist  $\|f - g\| < \varepsilon$  wie behauptet.

Zu  $v \in V$  wählen wir ein  $v_j$  mit  $d(v, v_j) < \delta_{v_j}$  und berechnen dann nach Dreiecksungleichung

$$\|f(v) - g(v)\| \leq \underbrace{\|f(v) - f(v_j)\|}_{< \frac{\varepsilon}{4} \text{ nach (3.2)}} + \underbrace{\|f(v_j) - y_{\sigma(j)}\|}_{< \frac{\varepsilon}{4} \text{ da } f \in \Phi(\sigma)} + \underbrace{\|y_{\sigma(j)} - g(v_j)\|}_{< \frac{\varepsilon}{4} \text{ da } g \in \Phi(\sigma)} + \underbrace{\|g(v_j) - g(v)\|}_{< \frac{\varepsilon}{4} \text{ nach (3.2)}} < \varepsilon,$$

wobei hier alle Normen als  $\|\cdot\|_Y$  zu lesen sind.

Wir haben also  $\mathcal{F}$  durch endlich (höchstens  $\sharp\Sigma$ ) viele  $\varepsilon$ -Kugeln überdeckt. Da  $\varepsilon > 0$  ganz am Anfang beliebig gewählt war, zeigt das die Prä- (und damit relative) Kompaktheit von  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Sie kennen die Aussage des Satzes vermutlich in einer etwas übersichtlicheren Form.

**Korollar 3.21.** Eine Familie  $\mathcal{F}$  stetiger Funktionen  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{K}$  auf einer kompakten Menge  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  ist genau dann relativ kompakt in  $C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{K})$ , wenn sie punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Hier ist  $V = \bar{\Omega}$ , versehen mit der euklidischen Metrik,  $Y = \mathbb{K}$  mit dem Betrag als Norm und die Familie  $\mathcal{F}$  sogar gleichgradig stetig. Manchmal wird sogar statt der punktweisen die gleichmäßige Beschränktheit gefordert. Das verkürzt den Beweis deutlich. In  $Y = \mathbb{K}$  sind die beschränkten Mengen  $\{f(v)\}_{f \in \mathcal{F}}$  natürlich relativ kompakt.

**Beispiel 43.** Zu beschränktem  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D \in \mathbb{N}$  und  $C > 0$  ist die Familie

$$\mathcal{F} = \{f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ Polynom mit } \deg f \leq D \text{ und Koeffizienten } |c_a| \leq C\}$$

relativ kompakt in  $C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{K})$ .

Die Bedingungen des Satzes können Sie im Rahmen einer Übung prüfen. Ein Polynom vom Grad  $d$  wird dabei als

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|a| \leq D} c_a x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

geschrieben, wobei  $a$  über alle Multiindizes der Länge  $|a| \leq D$  läuft.

Die Menge aller Polynome kann natürlich nicht relativ kompakt sein, da deren Abschluss nach einer Verallgemeinerung des Satzes von Stone-Weierstraß der gesamte Raum  $C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{K})$  ist, der selbstverständlich nicht kompakt ist.

### 3.4. Offene Abbildungen, abgeschlossene Graphen

In diesem Abschnitt widmen wir uns den Sätzen von der offenen Abbildung und dem abgeschlossenen Graphen. Da beide eng verwandt sind, bringen wir sie im gleichen Abschnitt unter. Außerdem werden wir einige Folgerungen dieser beiden Sätze kennen lernen. Wir beginnen mit der recht einleuchtenden Definition offener Abbildungen.

**Definition 3.22.** Eine Abbildung  $F : V \rightarrow Y$  von einem metrischen Raum  $(V, d_V)$  in einen metrischen Raum  $(Y, d_Y)$  heißt *offen*, falls sie offene Mengen auf offene Mengen abbildet:  $f(U)$  ist offen in  $Y$  für alle offenen  $U \subset V$ .

Die Definition ergibt natürlich auch ohne Metriken in allgemeinen topologischen Räumen Sinn.

**Theorem 3.23** (Satz von der offenen Abbildung, Banach-Schauder; open mapping theorem (OMT)). Sind  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banachräume, so sind für  $F \in \mathcal{L}(V; Y)$  folgende Aussagen äquivalent.

(i)  $F$  ist surjektiv.

(ii)  $F$  ist offen.

*Beweis.* (i)  $\implies$  (ii). Wegen der Linearität genügt es zu zeigen, dass das Bild  $F(B_1(0_V))$  der Einheitskugel in  $V$  eine Kugel  $B_\delta(0_Y)$  für ein  $\delta > 0$  enthält. Ist  $U \subset V$  nämlich eine beliebige offene Menge, so finden wir um jedes  $v \in U$  eine Kugel  $B_\varepsilon(v) = \varepsilon B_1(0_V) + v$  und damit um  $F(v)$  eine Kugel  $B_{\varepsilon\delta}(F(v)) \subset F(B_\varepsilon(v)) \subset F(U)$ .

(I) Zeige: Zu  $R > 0$  existiert ein  $r > 0$  derart, dass  $B_r(0_Y) \subset \overline{\text{int} F(B_R(0_V))}$ .

Wir stellen fest, dass wegen der Surjektivität von  $F$  und wegen  $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n(0_V)$  gilt:

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{F(B_n(0_V))}.$$

Dabei brauchen wir den Abschluss auf der rechten Seite nur für das Bairesche Kategorientheorem, dass uns nun sichert, dass im Banachraum  $Y$  (welcher von zweiter Kategorie ist) eine der abgeschlossenen Mengen  $\overline{F(B_n(0_V))}$  einen inneren Punkt  $y$  enthalten muss. Die Surjektivität von  $F$  sichert nun die Existenz eines  $v \in V$  mit  $F(v) = y$ , also gilt (nach Linearität)  $0_Y \in \overline{F(B_n(0_V) - v)}$ . Nun wählen wir  $R$  so groß, dass  $B_n(0_V) - v \subset B_R(0_V)$  gilt und erhalten  $0_Y \in \overline{\text{int} F(B_R(0_V))}$  und damit

$$B_r(0_Y) \subset \overline{\text{int} F(B_R(0_V))} \text{ für ein } r > 0.$$

(II) Zu  $R = \frac{1}{3}$  finden wir also  $r > 0$  mit  $B_r(0_Y) \subset \overline{\text{int} F(B_{\frac{1}{3}}(0_V))}$ . Wir wollen  $B_r(0_Y) \subset F(B_1(0_V))$  zeigen, müssen also zu beliebigem  $y \in Y$ ,  $\|y\|_Y < r$  ein  $v \in B_1(0_V)$  mit  $F(v) = y$  finden.

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

Sei also  $y_0 = y \in B_r(0_Y)$  beliebig. Da  $F(B_{\frac{1}{3}}(0_V))$  dicht in seinem Abschluss liegt, finden wir zu  $\varepsilon = \frac{r}{2}$  ein  $v_0 \in B_{\frac{1}{3}}(0_V)$  mit  $\|y_0 - F(v_0)\|_Y < \frac{r}{2}$ , also

$$\underbrace{\|2(y_0 - F(v_0))\|_Y}_{=: y_1} \leq r.$$

Zu  $y_1 \in B_r(0_Y)$  finden wir dann wieder ein  $v_1 \in B_{\frac{1}{3}}(0_V)$  mit

$$\underbrace{\|2(y_1 - F(v_1))\|_Y}_{=: y_2} \leq r.$$

Das setzen wir iterativ fort und erhalten Folgen  $(y_n)_n$  in  $B_r(0_Y)$  und  $(v_n)_n$  in  $B_{\frac{1}{3}}(0_V)$  derart, dass für alle  $n$

$$y_{n+1} = 2(y_n - F(v_n)) \xrightarrow{:2^{n+1}} 2^{-(n+1)}y_{n+1} = 2^{-n}y_n - \underbrace{2^{-n}F(v_n)}_{=F(2^{-n}v_n)}$$

gilt. Für alle  $N \in \mathbb{N}$  gilt also per Teleskopsummentrick:

$$F\left(\sum_{n=0}^N 2^{-n}v_n\right) = y_0 - 2^{-(N+1)}y_{N+1} \rightarrow y_0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

denn

$$\|2^{-(N+1)}y_{N+1}\|_Y = 2^{-N+1} \underbrace{\|y_{N+1}\|_Y}_{< r} \rightarrow 0.$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|2^{-n}v_n\|_V \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

konvergiert, handelt es sich bei den Partialsummen  $\sum_{n=0}^N 2^{-n}v_n$  um eine Cauchyfolge, die im Banachraum  $V$  gegen ein  $v = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}v_n$  konvergiert, und von den Partialsummen erbt  $v$  dank der Stetigkeit der Norm auch die Beschränkung:

$$\|v\|_V = \left\| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N 2^{-n}v_n \right\|_V = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=0}^N 2^{-n}v_n \right\|_V \leq \frac{2}{3} < 1,$$

also  $v \in B_1(0_V)$ . Und schließlich liefert die Stetigkeit von  $F$  noch

$$F(v) = F\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N 2^{-n}v_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} F\left(\sum_{n=0}^N 2^{-n}v_n\right) \stackrel{(3.5)}{=} y_0.$$

Mit  $\delta = r$  haben wir also  $B_\delta(0_Y) \subset F(B_1(0_V))$  wie gewünscht.

(ii)  $\implies$  (i): Zunächst ist  $F(0_V) = 0_Y$ , also  $F(V) \neq \emptyset$ . Da  $F$  offen ist, enthält  $F(V)$  (offen in  $Y$ ) einen inneren Punkt, also eine Kugel  $B = B_r(y_0)$ , insbesondere  $y_0 = F(v_0)$



### 3.4. Offene Abbildungen, abgeschlossene Graphen

für ein  $v_0 \in V$ . Wegen  $F(0_V) = 0_Y$  müssen wir nur noch Urbilder zu  $y \in Y \setminus \{0_Y\}$  finden. Mit  $a = \|y\|_Y > 0$  ist dann  $\frac{r}{2a}y + y_0 \in B \subset F(Y)$ , hat also ein Urbild  $w \in V$ :

$$F(w) = \frac{r}{2a}y + y_0, \quad \text{also } F\left(\frac{2a}{r}(w - v_0)\right) = \underbrace{\frac{2a}{r}F(w)}_{=y + \frac{2a}{r}y_0} - \underbrace{\frac{2a}{r}F(v_0)}_{=\frac{2a}{r}y_0} = y.$$

Der gesuchte Urbildpunkt zu  $y$  ist also  $v = \frac{2a}{r}(w - v_0)$ .  $\square$

**Beispiel 44.** Die folgenden Beispiele nicht nur stetiger, sondern sogar glatter Abbildungen von unserem einfachsten Banachraum  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  in sich selbst zeigen, dass keine der Implikationen gesichert ist, wenn wir auf die Linearität von  $F$  verzichten.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$  ist surjektiv, aber nicht offen (denn  $f((-1.1, 1.1)) = [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$  ist nicht offen).

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist offen, aber nicht surjektiv.

**Beispiel 45.** Für  $V = Y = C([a, b]; \mathbb{R})$ , versehen mit den Normen  $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_\infty$  (Maximumnorm) bzw.  $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_1$  ( $L_1$ -Norm) ist die Identitätsabbildung  $I: V \rightarrow Y$ ,  $v \mapsto v$ , stetig und selbstverständlich sogar bijektiv, aber nicht offen. Die Stetigkeit folgt dabei aus der Standardabschätzung für Integrale:

$$\|I(v)\|_1 \leq (b - a)\|v\|_\infty.$$

$I$  kann aber nicht offen sein, dann wäre nämlich auch eine umgekehrte Abschätzung gültig und dann beide Normen äquivalent. Dann wäre aber auch  $Y$  ein Banachraum unter  $\|\cdot\|_Y$ , was wir in Beispiel 5 ausgeschlossen haben.

Das Beispiel zeigt, dass auf die Vollständigkeit nicht verzichtet werden kann, wenn die Aussage des OMT richtig bleiben soll.

Eine wichtige Folgerung aus dem Satz von der offenen Abbildung ist nun die Aussage, dass stetige lineare Bijektionen zwischen Banachräumen sogar lineare Homöomorphismen sind.

**Korollar 3.24** (Satz von der stetigen Umkehrung, Banach). Ist  $F \in \mathcal{L}(V, Y)$  eine bijektive (stetige lineare) Abbildung vom Banachraum  $V$  in den Banachraum  $Y$ , so ist auch die Umkehrung  $F^{-1}: Y \rightarrow V$  stetig.

*Beweis.* Zur offenen Menge  $U \subset V$  ist die Urbildmenge unter  $F^{-1}$

$$(F^{-1})^{-1}(U) = F(U)$$

nach dem Satz von der offenen Abbildung offen in  $Y$ . Das ist gerade die (topologische) Definition der Stetigkeit von  $F^{-1}$ .  $\square$

In Anwendungen werden Theorem und Korollar gern in folgender Form geschrieben, die Ihnen aus der linearen Algebra bekannt vorkommen sollte (man lese  $F(v) = y$  als  $Av = y$ ).

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

**Korollar 3.25.** Für  $F \in \mathcal{L}(V, Y)$  vom Banachraum  $V$  in den Banachraum  $Y$  sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) Die Gleichung  $F(v) = y$  hat für jedes  $y \in Y$  eine eindeutige Lösung  $v \in V$ , und diese hängt stetig von  $y$  ab.
- (ii) Die Gleichung  $F(v) = y$  hat für jedes  $y \in Y$  eine Lösung, und zu  $y = 0_Y$  ist  $v = 0_V$  die einzige Lösung.

Für den Satz vom abgeschlossenen Graphen müssen wir klären, was es bedeutet, dass der Graph einer Abbildung (naturgemäß eine Teilmenge des kartesischen Produkts von Urbild- und Bildraum) abgeschlossen ist. Dafür erweitern wir das Konzept des Produktraums, das wir schon als orthogonale Summe für Hilberträume kennen, auf allgemeine normierte Räume. Von Orthogonalität kann dabei natürlich keine Rede mehr sein, dafür sind wir bei der Wahl der Norm auf dem Produktraum etwas flexibler.

**Definition 3.26.** Sind  $(V, \|\cdot\|_V)$  und  $(W, \|\cdot\|_W)$  normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, so definieren wir auf dem kartesischen Produkt  $V \times W$  die Vektorraumoperationen

$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w'), \quad \alpha(v, w) := (\alpha v, \alpha w) \quad \text{f. } v, v' \in V, w, w' \in W, \alpha \in \mathbb{K}$$

und versehen den so entstandenen Vektorraum  $V \oplus W$  mit der Norm

$$\|(v, w)\| := \|v\|_V + \|w\|_W.$$

Den so definierten normierten Vektorraum bezeichnen wir als (normierten) Produktraum  $V \times W$ .

**Bemerkung.** Jede andere  $p$ -Norm der Form

$$\|(v, w)\|_p = (\|v\|_V^p + \|w\|_W^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in (1, \infty) \quad \text{oder} \quad \|(v, w)\|_\infty = \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\}$$

täte es hier auch. Wir bleiben aber bei der Summennorm.

Erinnern oder überzeugen Sie sich, dass es sich dabei tatsächlich um Normen handelt.

Auch die Vollständigkeit erbt das Produkt von seinen Faktoren – wir kennen das Prinzip vom  $\mathbb{K}^n$  (unter der Norm  $\|\cdot\|_2$ ) und von Hilberträumen im allgemeinen.

**Lemma 3.27.** Sind  $(V_i, \|\cdot\|_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , Banachräume, so ist auch das Produkt  $V_1 \times \dots \times V_n$  ein Banachraum.

*Beweis.* (vgl. auch Lemma 2.10) Wir müssen nur den Fall  $n = 2$  betrachten, der Rest folgt induktiv. Dazu nennen wir die Räume wieder  $V$  und  $W$  und stellen fest, dass für eine Cauchyfolge  $((v_k, w_k))_k$  in  $V \times W$  zu  $\varepsilon > 0$  ein  $k_0$  derart existiert, dass für alle  $k, m \geq k_0$

$$\varepsilon > \|(v_k, w_k) - (v_m, w_m)\| = \|v_k - v_m\|_V + \|w_k - w_m\|_W$$

### 3.4. Offene Abbildungen, abgeschlossene Graphen

gilt. Also sind  $(v_k)_k$  und  $(w_k)_k$  Cauchyfolgen, die in (den Banachräumen)  $V$  bzw.  $W$  Grenzwerte  $v$  bzw.  $w$  haben. Dann ist  $(v, w) \in V \times W$  aber auch Grenzwert der ursprünglichen Folge, denn

$$\|(v_k, w_k) - (v, w)\| = \|v_k - v\|_V + \|w_k - w\|_W \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

□

**Definition 3.28.** Sind  $V$  und  $Y$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $F : V \rightarrow Y$  eine beliebige Abbildung, so heißt  $\Gamma_F := \{(v, F(v)) : v \in V\} \subset V \times Y$  der Graph von  $F$ .

**Bemerkung.** Der Graph ist auch für partielle Abbildungen  $F : V \supset \mathcal{D}_F \rightarrow Y$  als  $\{(v, F(v)) : v \in \mathcal{D}_F\}$  sinnvoll definiert.

In jedem Fall ist der Graph  $\Gamma_F$  eines linearen Operators  $F : V \rightarrow W$  ein Untervektorraum von  $V \times W$ .

Bislang ist der Graph einfach eine Teilmenge des kartesischen Produkts  $V \times Y$ . Im Fall normierter Räume können wir nach topologischen Eigenschaften von  $\Gamma_F$  im normierten Produktraum  $V \times Y$  fragen. Eine dieser Eigenschaften liefert uns den Begriff des abgeschlossenen Operators.

**Definition 3.29.** Eine Abbildung  $F : V \rightarrow Y$  vom normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $(V, \|\cdot\|_V)$  in den normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  heißt (Graph-)abgeschlossen, wenn  $\Gamma_F$  in  $V \times Y$  abgeschlossen ist.

Manchmal werden in Analogie zu offenen auch Abbildungen *abgeschlossen* genannt, die abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbilden. Dann kann auf den Zusatz “Graph-” nicht verzichtet werden. Das ist aber eine für uns wenig hilfreiche Definition, deshalb nutzen wir die angegebene und verzichten in der Regel auf den Zusatz.

**Beispiel 46.** Stetige Operatoren sind abgeschlossen. Sind nämlich  $F : V \rightarrow Y$  stetig und  $(v, y) \in \overline{\Gamma_F}$ , so finden wir eine Folge  $((v_n, F(v_n)))_n$  in  $\Gamma_F$  derart, dass  $(v_n, F(v_n)) \rightarrow (v, y)$  in  $V \times Y$ , also

$$0 \leftarrow \|(v, y) - (v_n, F(v_n))\|_{V \times Y} = \|v - v_n\|_V + \|y - F(v_n)\|_Y.$$

Beide Terme auf der rechten Seite müssen gegen Null konvergieren, also gelten

$$v_n \rightarrow v \text{ in } V \quad \text{und} \quad F(v_n) \rightarrow y \text{ in } Y.$$

Andererseits folgt aber wegen der Stetigkeit von  $F$  aus der ersten dieser Konvergenzen  $F(v_n) \rightarrow F(v)$  in  $Y$ . Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts gilt also  $(v, y) = (v, F(v)) \in \Gamma_F$ . Wir haben also  $\overline{\Gamma_F} \subset \Gamma_F$ , was nur möglich ist, wenn  $\Gamma_F$  abgeschlossen ist.

Beachten Sie, dass wir an keiner Stelle benutzt haben, dass  $F$  linear ist. Die Aussage gilt für beliebige stetige Abbildungen, die auf ganz  $V$  definiert sind.

**Lemma 3.30.** Der lineare Operator  $F : V \rightarrow Y$  ist genau dann abgeschlossen, wenn aus  $v_n \rightarrow 0$  in  $V$  und  $F(v_n) \rightarrow y$  in  $Y$  schon  $y = 0_Y$  folgt.

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

*Beweis.* “ $\implies$ ”: Ist  $(0_V, y) \in \overline{\Gamma_F} = \Gamma_F$ , so folgt wegen der Linearität  $y = F(0_V) = 0_Y$ .

“ $\impliedby$ ”: Angenommen,  $(v_n, F(v_n)) \rightarrow (v, z)$  in  $V \times Y$ . Dann gelten  $v_n - v \rightarrow 0$  in  $V$  und  $F(v_n - v) = F(v_n) - F(v) \rightarrow z - F(v)$  in  $Y$  und damit nach der Bedingung

$$0 \longleftarrow F(v_n - v) \rightarrow z - F(v), \quad \text{also } z = F(v),$$

also  $(v, z) = (v, F(v)) \in \Gamma_F$ . □

Wir haben im letzten Beispiel gesehen, dass stetige lineare Operatoren abgeschlossen sind. Das folgende Beispiel zeigt, dass die Umkehrung im allgemeinen falsch ist.

**Beispiel 47.** Wir betrachten den Raum  $V = c_{00}$  der abbrechenden Folgen, versehen mit der Norm  $\|\cdot\|_2$ . Zu einer beliebigen Zahlenfolge  $a = (a_n)_n$  betrachten wir den Multiplikationsoperator  $M_a : V \rightarrow V$ ,  $M_a(v) = (a_n v_n)_n$ . Selbstverständlich ist  $M_a$  linear und bildet  $V$  in sich selbst ab.

$M_a$  ist auch abgeschlossen. Gelten nämlich  $v^{(k)} \rightarrow 0_V$  und  $M_a(v^{(k)}) \rightarrow y$  in  $V$  (also  $\|(a_n v_n^{(k)})_n - (y_n)_n\|_2 \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ ), so gilt insbesondere komponentenweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^{(k)} = 0, \quad \text{also} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n v_n^{(k)} = a_n \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^{(k)} = 0,$$

aber auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n v_n^{(k)} = y_n,$$

also  $y_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Allerdings ist  $M_a$  nur beschränkt, wenn  $(a_n)_n$  selbst beschränkt ist. Ein Gegenbeispiel (für  $a_n = n$ ) haben wir schon gesehen.

Bei diesem Beispiel ist  $V$  unter der gegebenen Norm nicht abgeschlossen. Tatsächlich gilt nämlich sogar:

**Theorem 3.31** (Satz vom abgeschlossenen Graphen, closed graph theorem (CGT)). Sind  $V$  und  $Y$  Banachräume, so ist jeder abgeschlossene lineare Operator  $F : V \rightarrow Y$  stetig.

*Beweis.* Da  $F$  abgeschlossen ist, ist  $\Gamma_F$  ein abgeschlossener linearer Teilraum des Banachraums (!)  $V \times Y$  und als solcher selbst ein Banachraum. Wir definieren die natürliche Projektion

$$P : \Gamma_F \rightarrow V, \quad (v, F(v)) \mapsto v.$$

Diese ist linear und beschränkt, denn  $\|v\|_V \leq \|v\|_V + \|F(v)\|_Y = \|(v, F(v))\|_{V \times Y}$ . Außerdem ist  $P$  bijektiv (völlig unabhängig von den Eigenschaften von  $F$ ).

Nach dem Satz über die stetige Umkehrabbildung (Korollar 3.24) ist  $P^{-1} : V \rightarrow \Gamma_F$ ,  $v \mapsto (v, F(v))$ , ebenfalls stetig.

Gilt also  $v_n \rightarrow v$  (in  $V$ ), so folgt

$$(v_n, F(v_n)) = P^{-1}(v_n) \rightarrow P^{-1}(v) = (v, F(v)),$$

also  $F(v_n) \rightarrow F(v)$  (in  $Y$ ). Damit ist  $F$  also (folgen-)stetig. □

**Beispiel 48.** Für  $V = C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ , versehen mit Norm  $\|v\|_V = \max_t |v(t)|$  und  $Y = C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ , ebenfalls versehen mit der Maximumnorm, betrachten wir den Ableitungsoperator  $D : V \rightarrow Y, v \mapsto v'$ . Dieser ist unbeschränkt (man betrachte etwa die Funktionen  $v_n \in V, v_n(t) = t^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ ). Sie rechnen aber (als Übung) schnell nach, dass  $D$  abgeschlossen ist.

Wieder sehen wir anhand dieses Beispiels, dass auf die Vollständigkeit der beteiligten Räume nicht ohne weiteres verzichtet werden kann.

### 3.5. Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

Im wesentlichen werden wir uns in diesem Abschnitt die Frage stellen, ob zu einem gegebenem normierten Raum  $V$  “genügend” viele stetige lineare Funktionale existieren, um den Raum zu charakterisieren. Genauer stellt sich die Frage, ob es zu jedem  $v \in V \setminus \{0\}$  ein  $\phi \in V'$  mit  $\phi(v) \neq 0$  gibt. Die Idee dazu ist folgende. Wir setzen  $\phi(v) = 1$  und haben damit  $\phi$  auf dem von  $v$  aufgespannten Unterraum  $\langle \{v\} \rangle$  eindeutig bestimmt. Nun fragen wir uns, ob wir  $\phi$  linear und stetig auf ganz  $V$  fortsetzen können.

Wir beginnen zunächst mit den uns schon bekannten Halbnormen und stellen fest, dass wir solche durch stetige lineare Funktionale darstellen können.

**Lemma 3.32.** Ist  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, und sind  $\phi_1, \dots, \phi_n \in V'$  stetige lineare Funktionale, so definiert

$$p(v) := \sum_{j=1}^n |\phi_j(v)|$$

eine Halbnorm auf  $V$ .

*Beweis.*  $p(v) \in [0, \infty)$  ist klar (man beachte, dass die Summe endlich ist).

Sind  $\alpha \in \mathbb{K}$  und  $v \in V$ , so ist

$$p(\alpha v) = \sum_{j=1}^n |\phi_j(\alpha v)| = \sum_{j=1}^n |\alpha| |\phi_j(v)| = |\alpha| \sum_{j=1}^n |\phi_j(v)| = |\alpha| p(v).$$

Und schließlich gilt

$$|\phi_j(v+w)| = |\phi_j(v) + \phi_j(w)| \leq |\phi_j(v)| + |\phi_j(w)|$$

für  $v, w \in V$  und  $j = 1, \dots, n$ , also nach Summation:

$$p(v+w) \leq p(v) + p(w).$$

□

**Beispiel 49.** (a) Mit  $\phi_j(x) = x_j, j \in J \subset \{1, \dots, n\}$  erhalten wir auf  $V = \mathbb{K}^n$  die Halbnorm

$$p(v) = \sum_{j \in J} |x_j|,$$

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

die genau dann zur (Summen-)Norm wird, wenn  $J = \{1, \dots, n\}$  ist.

(b) Auf  $V = C^0([0, 1])$  definiert  $\delta_{t_0}(f) = f(t_0)$  zu gegebenem  $t_0 \in [0, 1]$  ein stetiges lineares Funktional. Damit erhalten wir einen ganzen Zoo von Halbnormen:

$$p(f) = |f(t_0)|$$

und für  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ :

$$q(f) = \sum_{k=1}^n |f(t_k)|.$$

Wir können Halbnormen nutzen, um Halbordnungen auf einem Vektorraum  $V$  zu definieren.

**Definition 3.33.** Eine binäre Relation  $\preceq$  auf einer nicht leeren Menge  $X$  heißt eine Halbordnung, wenn für alle  $x, y, z \in V$

(i)  $x \preceq x$  (Reflexivität)

(ii)  $x \preceq y, y \preceq x \implies x = y$  (Antisymmetrie)

(iii)  $x \preceq y, y \preceq z \implies x \preceq z$  (Transitivität)

gelten.

Eine Teilmenge  $A \subset X$  einer halbgeordneten Menge  $X$  heißt total geordnet, falls für alle  $a, b \in A$  mit  $a \neq b$  entweder  $a \preceq b$  oder  $b \preceq a$  gilt. Auf  $A$  bildet  $\preceq$  dann eine (totale) Ordnung.

Eine totale Ordnung ist also eine Halbordnung, bezüglich der alle Paare von Elementen vergleichbar sind.

Die übliche Schreibweise  $v \succeq w$  für  $w \preceq v$  dürfte niemanden überraschen.

**Beispiel 50.** (a) Die klassische Ordnung  $\leq$  auf den reellen Zahlen ist eine totale Ordnung und damit insbesondere eine Halbordnung auf  $\mathbb{R}$ .

(b) Auf  $\mathbb{R}^n$  können wir eine Halbordnung durch

$$x \preceq y : \iff x_j \leq y_j \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n$$

definieren. In  $\mathbb{R}^2$  ist dann zum Beispiel jede Gerade positiver Steigung eine total geordnete Teilmenge.

Lassen wir  $j$  durch alle natürlichen Zahlen laufen, so erhalten wir eine Halbordnung auf  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  oder seinen Unterräumen  $\ell_p^{\mathbb{R}}$ .

Auf  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  lautet die analoge Definition

$$z \preceq w : \iff \operatorname{Re} w_j \leq \operatorname{Re} w_j, \operatorname{Im} w_j \leq \operatorname{Im} w_j \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

**Beispiel 51.** Analog definiert

$$f \preceq g : \iff f(t) \leq g(t) \quad \text{für alle } t \in [a, b]$$

eine Halbordnung auf  $C([a, b]; \mathbb{R})$ .

**Definition 3.34.** 1. Ist  $(X, \preceq)$  eine halbgeordnete Menge, so nennen wir  $x \in X$  eine obere Schranke für  $A \subset X$ , wenn  $a \preceq x$  für alle  $a \in A$  gilt.

2.  $m \in A$  heißt maximales Element von  $A \subset X$ , falls für alle  $a \in A$  aus  $m \preceq a$  schon  $a = m$  folgt.

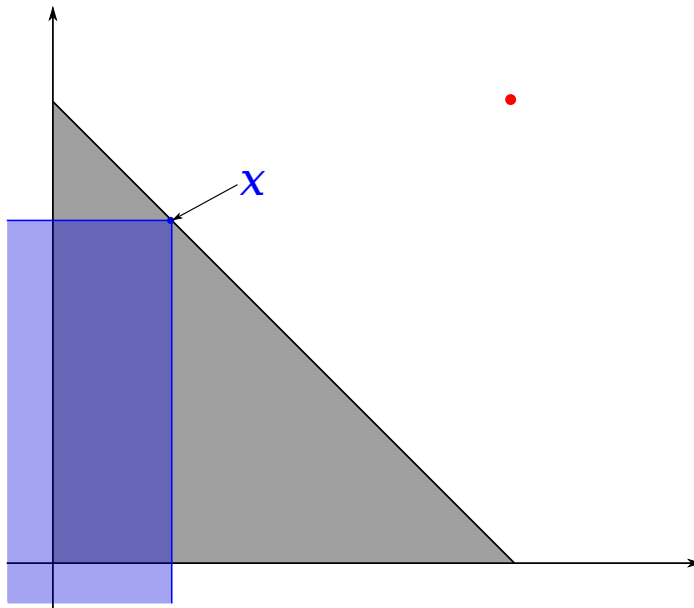
Ein Element  $m \in A$  ist also maximal, falls es für jedes gegebene  $a \in A$  entweder nicht mit  $m$  vergleichbar ist oder  $a \preceq m$  erfüllt. Es gibt also in ganz  $A$  kein bezüglich  $\preceq$  “echt größeres” Element. Beachten Sie, dass wir nie von “dem” maximalen Element in  $A$  gesprochen haben. Weder haben wir behauptet, jede Menge enthalte ein maximales Element, noch hatten wir ausgeschlossen,  $A$  könne mehrere maximale Elemente enthalten.

**Beispiel 52.** (a) In unserer total geordneten Menge  $\mathbb{R}$  kennen wir das Prinzip oberer Schranken schon. Maximale Elemente gibt es aber auch dort schon nicht in jeder Teilmenge. Suchen Sie etwa mal ein maximales Element in  $(0, 1)$ . Aber auch obere Schranken gibt es natürlich nur für nach oben beschränkte Mengen. Die Teilmenge  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  etwa besitzt keine obere Schranke.

(b) Versetzen wir  $\mathbb{R}^2$  mit unserer komponentenweise definierten Halbordnung  $\preceq$  aus Beispiel 50 (b) und betrachten die Teilmenge

$$N = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$$

(der Standardsimplex in  $\mathbb{R}^2$  oder schlicht das Dreieck mit den Eckpunkten  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$  und  $(0, 1)$ ), so finden wir  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$  als maximale Elemente.



Simplex  $N$  (grau) und zu gegebenem  $x = (t, 1 - t)$  der Kegel aller  $y \in \mathbb{R}^2$  mit  $y \preceq x$  (blau).

Allgemeiner sind sogar alle Elemente der Form  $x = (t, 1 - t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , maximale Elemente. Haben wir nämlich ein  $y = (y_1, y_2) \in N$  mit  $y_1 \geq t$  und  $y_2 \geq 1 - t$ , so folgt daraus

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

$y_1 + y_2 \geq 1$ , also wegen der Definition von  $N$  sofort  $y_1 + y_2 = 1$ . Damit liegt  $y$  auf der Hypothenuse des Dreiecks. Zwei Punkte auf dieser Strecke können aber nur miteinander verglichen werden, wenn sie gleich sind.

Keines dieser maximalen Elemente ist aber eine obere Schranke von  $N$ . Eine offensichtliche solche ist  $(1, 1)$  (rot in der Skizze).

Die folgende Argumentation beruht auf folgendem Satz, welcher äquivalent zum Auswahlaxiom ist. Ohne dieses zu akzeptieren, wären wir schon mehrfach gescheitert, können also hier getrost davon ausgehen, dass das Auswahlaxiom gilt.

**Fakt 3.35** (Lemma von Zorn). *Besitzt jede(!) total geordnete Teilmenge  $M \subset X$  einer halbgeordneten Menge  $(X, \preceq)$  eine in  $X$  **liegende** obere Schranke, so besitzt  $X$  ein maximales Element.*

Es handelt sich bei uns lediglich um einen Fakt, da wir nicht beweisen werden, dass das Lemma von Zorn aus dem Auswahlaxiom folgt.

**Beispiel 53.** *Dass wir sehr aufpassen müssen, wo wir nach oberen Schranken und maximalen Elementen suchen, zeigt schon das einfache Beispiel unseres Simplex  $N$  aus dem letzten Beispiel. Betrachten wir nämlich das Innere  $X = \text{int } N$  von  $N$ , versehen mit der vom  $\mathbb{R}^2$  geerbten Halbordnung  $\preceq$  aus Beispiel 50 (b), so finden wir zu jeder total geordneten Teilmenge von  $X$  eine obere Schranke in  $\mathbb{R}^2$  (und sogar in  $N$ ). Diese liegen aber nicht immer in  $X$  - man betrachte etwa die total geordnete Menge  $M = \{(t, t) : 0 < t < \frac{1}{2}\} \subset N$ . Die einzige obere Schranke (in  $N$ ) wäre hier der Punkt  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , aber diese gehört nicht zu  $X$ .*

*Geradezu folgerichtig werden Sie in  $X$  kein maximales Element (von  $X$ ) finden.*

*Wir bemerken noch, dass wir der Menge  $X$  etwa den Punkt  $x = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$  hinzufügen können. Dieser ist ein maximales Element von  $X \cup \{x\}$ , aber  $M$  hat auch in  $X \cup \{x\}$  noch keine obere Schranke. Die Voraussetzung des Lemmas von Zorn ist also nur hinreichend, jedoch keineswegs notwendig für die Existenz maximaler Elemente.*

**Beispiel 54.** *Eine oft genutzte Halbordnung ist die Inklusionsrelation auf Mengensystemen. Ist nämlich  $\Omega$  eine beliebige Menge, so ist auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(\Omega)$  durch die Inklusion  $A \preceq B : \iff A \subset B$  eine Halbordnung gegeben (überzeugen Sie sich davon). Für ein beliebiges Teilsystem  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ist dann etwa  $M = \bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$  eine obere Schranke. Ebenso ist jede Obermenge von  $M$  eine obere Schranke von  $\mathcal{M}$ . Total geordnete Teilsysteme ergeben sich aus in einander geschachtelten Mengen.*

*Ein konkretes Beispiel aus der Maßtheorie ist die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$  der Borelmengen auf  $\mathbb{R}$ . Ein gern benutztes total geordnetes Teilsystem ist das der einseitig unbeschränkten Intervalle*

$$\mathcal{Q}_1^\infty = \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}.$$

*Dieses besitzt aber nur  $\mathbb{R}$  selbst als obere Schranke, enthält also keine obere Schranke der Form  $(-\infty, b_{\max}]$  (dazu müsste  $b_{\max}$  die größte reelle Zahl sein). Aber  $\mathbb{R} \in \mathcal{B}$  ist sogar obere Schranke für jede, und dieses ist auch ein maximales Element von  $\mathcal{B}$ .*



Eine weiteres Teilsystem ist

$$X = \mathcal{Q}_1 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}.$$

Das total geordnete Teilsystem  $M = \{(-n, n] : n \in \mathbb{N}\} \subset X$  besitzt keine obere Schranke in  $X$ . Das System  $X$  enthält auch kein maximales Element.

Das folgende Beispiel ist so interessant, dass es in den Rang eines Korollars erhoben wird. Wir hatten vollständige Orthonormalsysteme zwar nur in Hilberträumen untersucht, sie sind aber auch für Prähilberträume definiert. Dann hat zwar nicht jede Reihe mit quadratsummierbaren Koeffizienten zwingend einen Grenzwert, aber die Fourierreihe zu einem gegebenen  $v \in V$  konvergiert dennoch gegen  $v$ .

**Korollar 3.36.** *Ist  $A$  ein Orthonormalsystem im (Prä-)Hilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , so existiert ein vollständiges Orthonormalsystem  $B$  für  $V$  mit  $A \subset B$ .*

*Beweis.* Man wende das Zornsche Lemma auf die durch Inklusion halbgeordnete Familie  $\mathcal{A}$  aller Orthonormalsysteme in  $V$  an, die  $A$  enthalten. Jedes maximale Element in dieser nicht leeren Familie ( $A$  selbst gehört dazu) ist ein vollständiges Orthonormalsystem. Überzeugen Sie sich als Übung, dass tatsächlich jede total geordnete Teilfamilie von  $\mathcal{A}$  eine obere Schranke enthält.  $\square$

Wir werden das Lemma von Zorn nun nutzen, um auf linearen Teilräumen gegebene lineare Funktionale fortzusetzen. Dabei wenden wir das Lemma auf Familien von Funktionalen an, die für die Fortsetzung infrage kommen.

**Theorem 3.37** (Satz von Hahn-Banach für reelle Vektorräume). *Auf dem linearen Unterraum  $W$  des reellen Vektorraums  $V$  sei ein lineares Funktional  $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}$  derart gegeben, dass für eine Halbnorm  $p$  auf  $V$  gilt:*

$$|\phi(w)| \leq p(w) \quad \text{für alle } w \in W.$$

*Dann existiert ein lineares Funktional  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass*

- (i)  $\Phi(w) = \phi(w)$  für alle  $w \in W$  ( $\Phi$  ist eine Fortsetzung von  $\phi$ ),
- (ii)  $|\Phi(v)| \leq p(v)$  für alle  $v \in V$  ( $\Phi$  hält die Beschränkung von  $\phi$  ein).

*Beweis.* (ii) ist äquivalent zu  $\Phi(v) \leq p(v)$  für alle  $v \in V$ , denn  $-\Phi(v) = \Phi(-v)$ , aber  $p(-v) = |-1|p(v) = p(v)$ .

(I) Ist nun  $v_0 \in V \setminus W$  beliebig gegeben. Dann definieren wir den von  $W$  und  $v_0$  aufgespannten Teilraum

$$H := \{\lambda v_0 + w : \lambda \in \mathbb{R}, w \in W\}$$

und zeigen, dass  $\phi$  zunächst eine Fortsetzung auf  $H$  mit der gewünschten Beschränktheit besitzt.

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

Dazu zerlegen wir jedes  $z \in H$  eindeutig in  $z = \lambda v_0 + w$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  und ein  $w \in W$ . Die Eindeutigkeit ergibt sich dabei aus  $v_0 \notin W$  (genauer: der linearen Unabhängigkeit von  $v_0$  und  $W$ ) und definieren für beliebiges  $c \in \mathbb{R}$ :

$$\psi_c(z) = \psi_c(\lambda v_0 + w) := \lambda c + \phi(w).$$

Das ist natürlich linear, und für  $z = w \in W$  ergibt sich insbesondere aus  $\lambda = 0$ :

$$\psi_c(w) = \phi(w).$$

Wir müssen nun noch  $c$  derart wählen, dass (ii) gilt. Dazu beobachten wir, dass für  $w, w' \in W$  nach Voraussetzung

$$\phi(w) - \phi(w') = \phi(w - w') \leq p(v_0 + w - w' - v_0) \leq p(v_0 + w) + p(v_0 + w')$$

gilt. Für alle  $w, w' \in W$  folgt also

$$-\phi(w') - p(v_0 + w') \leq p(v_0 + w) - \phi(w).$$

Diese Ungleichung gilt für alle  $w, w' \in W$ , also:

$$c_1 := \sup_{w' \in W} (-\phi(w') - p(v_0 + w')) \leq \inf_{w \in W} (p(v_0 + w) - \phi(w)) =: c_2. \quad (3.6)$$

Wir wählen unser  $c \in [c_1, c_2]$  und erhalten (ii), denn für alle  $\lambda > 0$ ,  $w' \in W$  berechnen wir:

$$\psi_c(\lambda v_0 + w') = \underbrace{\lambda c}_{\leq \lambda c_2} + \phi(w') \leq \lambda \left( p\left(v_0 + \frac{w'}{\lambda}\right) - \phi\left(\frac{w'}{\lambda}\right) \right) + \phi(w') = p(\lambda v_0 + w'),$$

wobei wir im Infimum in (3.6)  $w = \frac{w'}{\lambda}$  benutzt haben.

Analog erhalten wir für  $\lambda < 0$ ,  $w \in W$  mit  $w' = \frac{w}{\lambda}$  im Supremum in (3.6):

$$\psi_c(\lambda v_0 + w) \leq \lambda c_1 + \phi(w) \leq \lambda \left( -\phi\left(\frac{w}{\lambda}\right) - p\left(v_0 + \frac{w}{\lambda}\right) \right) + \phi(w) = p(\lambda v_0 + w).$$

Für  $\lambda = 0$  und  $w \in W$  ist natürlich:

$$\psi_c(0v_0 + w) = \phi(w) \leq p(w) = p(0v_0 + w).$$

Nach der einleitenden Beobachtung ist damit aber schon  $|\psi_c(z)| \leq p(z)$  für alle  $z \in H$ .

(II) Nun betrachten wir die Menge  $\mathcal{M}$  aller gemäß Schritt (I) iterativ konstruierten Funktionale  $\psi$  auf linearen Teilräumen  $H_\psi$  von  $V$  (mit  $W \subset H_\psi$ ), für die wir

$$\begin{aligned} W \subset H_\psi \subset V \quad \psi(w) &= \phi(w) \quad \text{für alle } w \in W, \\ |\psi(z)| &\leq p(z) \quad \text{für alle } z \in H_\psi \end{aligned}$$

erhalten.

Nach (I) haben wir zu jedem  $v_0 \in V \setminus W$  ein solches  $\psi$ , wobei die Konstruktion für  $v'_0 = \alpha v_0$  mit einem  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  natürlich das gleiche Ergebnis liefert, da sich der gleiche Raum  $H$  ergibt.

Auf  $\mathcal{M}$  definieren wir die Halbordnung

$$\psi \preceq \eta : \Longleftrightarrow H_\psi \subset H_\eta \quad \text{und} \quad \psi = \eta|_{H_\psi}.$$

$\psi \preceq \eta$  bedeutet also einfach, dass  $\eta$  eine Fortsetzung von  $\psi$  ist.

(III) Wir zeigen nun, dass  $\mathcal{M}$  unter  $\preceq$  die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt. Ist  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  eine total geordnete Teilmenge, so setzen wir  $\hat{H} := \bigcup_{\psi \in \mathcal{N}} H_\psi$  und definieren für  $z \in \hat{H}$ :

$$\hat{\psi}(z) := \psi(z) \quad \text{für } z \in H_\psi.$$

Das ist wohldefiniert, denn sollte  $z$  in mehreren der  $H_\psi$  liegen, sagen wir,  $z \in H_\psi \cap H_\eta$ , so gilt, da  $\mathcal{N}$  total geordnet ist,  $\psi \preceq \eta$  (und damit  $\psi(z) = \eta(z)$  für  $z \in H_\psi = H_\psi \cap H_\eta$ ) oder  $\eta \preceq \psi$  (und damit  $\eta(z) = \psi(z)$  für  $z \in H_\eta = H_\psi \cap H_\eta$ ).

Ferner ist  $\hat{H}$  ein linearer Teilraum von  $V$  (man beachte, dass  $\{H_\psi : \psi \in \mathcal{N}\}$  eine bezüglich Mengeninklusion total geordnete Familie von Teilräumen ist), auf dem  $\hat{\psi}$  nach Konstruktion ein lineares Funktional darstellt: Für beliebige  $z, z' \in \hat{H}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  finden wir ein  $H_{\psi_0}$  mit  $z, z' \in H_{\psi_0}$ , also auch  $\alpha z + z' \in H_{\psi_0}$  und damit:

$$\hat{\psi}(\alpha z + z') = \psi_0(\alpha z + z') = \alpha \psi_0(z) + \psi_0(z') = \alpha \hat{\psi}(z) + \hat{\psi}(z').$$

Insbesondere ist also  $\hat{\psi} \in \mathcal{M}$  und nach Konstruktion  $\psi \preceq \hat{\psi}$  für alle  $\psi \in \mathcal{N}$ .

Nach dem Lemma von Zorn besitzt  $\mathcal{M}$  also ein maximales Element  $\Phi$ , das notwendigerweise auf ganz  $V$  definiert ist. Andernfalls fänden wir nach (I) ein  $v_0 \in V \setminus H_\Phi$  und damit eine Fortsetzung  $\Psi$  von  $\Phi$  auf  $\mathbb{R}v_0 + H_\Phi \supsetneq H_\Phi$ . Für diese gälte dann  $\Phi \preceq \Psi$ , aber nicht  $\Phi = \Psi$ , was im Widerspruch zur Maximalität von  $\Phi$  steht.

Als Element von  $\mathcal{M}$  erfüllt  $\Phi$  auch die gewünschten Bedingungen (i) und (ii), ist also die gesuchte Fortsetzung von  $\phi$ .  $\square$

**Bemerkung.** Wir merken an, dass der Beweis zeigt, dass wir nicht mit Eindeutigkeit der Fortsetzung rechnen dürfen. Das ergibt sich schon daraus, dass bei der Wahl der einzelnen  $\psi_c$  in Schritt (I) eine gewisse Freiheit in der Wahl von  $c$  besteht, falls nicht  $c_1 = c_2$  gilt.

Bevor wir eine Version des Satzes von Hahn-Banach für normierte lineare Räume folgern (klar: Normen sind ja nur spezielle Halbnormen), formulieren wir den Satz noch für komplexe Vektorräume. Dazu beobachten wir zunächst, dass wir ein (komplex-)lineares Funktional  $\phi \in V^*$  auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  als

$$\phi(v) = \phi_1(v) + \imath \phi_2(v) \quad \text{mit reellwertigen } \phi_1, \phi_2 : V \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

schreiben können<sup>2</sup>. Wegen der komplexen(!) Linearität von  $\phi$  gilt für alle  $v \in V$ :

$$\phi_1(\imath v) + \imath \phi_2(\imath v) = \phi(\imath v) = \imath \phi(v) = \imath \phi_1(v) - \phi_2(v).$$

<sup>2</sup>Die  $\phi_i$  sind einfach Real- und Imaginärteil von  $\phi$ .

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

Daraus ergibt sich, dass Real- und Imaginärteil getrennt übereinstimmen müssen:

$$\phi_1(v) = \phi_2(\imath v), \quad \phi_1(\imath v) = -\phi_2(v),$$

also

$$\phi(v) = \phi_1(v) - \imath \phi_1(\imath v)$$

mit dem (reell) linearen Funktional  $\phi_1$ . Genauer wirkt  $\phi_1$  als reell lineares Funktional auf  $\tilde{V}$ , dem als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aufgefassten  $V$  mit  $\dim_{\mathbb{R}} \tilde{V} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$ . Die Multiplikation mit  $\imath$  ist dabei als die durch  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dargestellte Abbildung  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  aufzufassen.

Wir hätten also eher  $\phi(v) = \phi_1(\tilde{v}) - \imath \phi_1(\imath \tilde{v})$  schreiben sollen, wobei  $\tilde{v} \in \tilde{V}$  die als reell aufgefasste Kopie von  $v \in V$  ist.

Die ganze Konstruktion erinnert nicht zufällig an die Herleitung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Auch diese hatten wir aus der Zusatzbedingung, die Ableitung möge nicht nur reell linear (von  $\mathbb{R}^2$  nach  $\mathbb{R}^2$ ), sondern sogar komplex linear (von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$ ) sein.

Umgekehrt kann man schnell nachrechnen (versuchen Sie das!), dass jedes reell lineare Funktional  $\psi_1$  auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\tilde{V}$  vermöge

$$\psi(v) = \psi_1(\tilde{v}) - \imath \psi_1(\imath \tilde{v})$$

ein komplex lineares Funktional  $\psi \in V^*$  liefert.

**Theorem 3.38** (Satz von Hahn-Banach für komplexe Vektorräume). *Auf dem linearen Teilraum  $W$  des komplexen Vektorraum  $V$  sei ein lineares Funktional  $\phi : W \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben. Ferner existiere eine Halbnorm  $p$  auf  $V$  derart, dass  $|\phi(w)| \leq p(w)$  für alle  $w \in W$  gilt. Dann existiert ein lineares Funktional  $\Phi$  auf  $V$  mit*

- (i)  $\Phi|_W = \phi$  (also  $\Phi(w) = \phi(w)$  für alle  $w \in W$ ) und
- (ii)  $|\Phi(v)| \leq p(v)$  für alle  $v \in V$ .

*Beweis.* (I) Mit  $\phi(w) = \phi_1(\tilde{w}) - \imath \phi_1(\imath \tilde{w})$  wie oben erhalten wir

$$|\phi_1(\tilde{w})| \leq |\phi(w)| \leq p(w) =: \tilde{p}(\tilde{w})$$

für alle  $w \in W$  (identifiziert mit  $\tilde{w} \in \tilde{W}$ ). Überzeugen Sie sich, dass  $\tilde{p}$  eine Halbnorm auf dem reellen Vektorraum  $\tilde{V}$  ist.

Theorem 3.37 liefert dann ein lineares Funktional  $\Phi_1 : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , das  $\phi_1$  fortsetzt und

$$|\Phi_1(\tilde{v})| \leq p(v) \quad \text{für } v \in V$$

erfüllt. Wir setzen für alle  $v \in V$

$$\Phi(v) = \Phi_1(\tilde{v}) - \imath \Phi_1(\imath \tilde{v})$$

und erhalten ein komplex lineares Funktional auf  $V$ , das  $\phi$  fortsetzt.

(II) Wir haben noch  $|\Phi(v)| \leq p(v)$  für beliebige  $v \in V$  zu zeigen. Dazu beobachten wir, dass für beliebige  $\theta \in \mathbb{R}$  die Linearität

$$|\Phi(v)| = |e^{i\theta}| |\Phi(v)| = |\Phi(e^{i\theta}v)|$$

gilt. Zu gegebenem  $v \in V$  schreiben wir nach Euler  $\Phi(v) = re^{i\theta}$  für ein  $\theta \in \mathbb{R}$  und ein  $r > 0$ , also:

$$|\Phi(v)| = \Phi(e^{-i\theta}v) = \Phi_1(e^{-i\theta}\tilde{v}) + i \underbrace{\Phi_1(e^{i\theta}\tilde{v})}_{=0, \text{ da reell}} = |\Phi_1(e^{-i\theta}\tilde{v})| = \underbrace{|e^{-i\theta}|}_{=1} |\Phi_1(\tilde{v})| \leq p(v),$$

wie gefordert.  $\square$

Nun folgern wir die Existenz stetiger Fortsetzungen von auf Teilräumen definierten stetigen linearen Funktionalen gleich für beliebige normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume.

**Korollar 3.39** (Satz von Hahn-Banach für normierte Räume). *Zu jedem beschränkten linearen Funktional  $\phi$  auf dem linearen Teilraum  $W$  des normierten Vektorraums  $V$  existiert ein  $\Phi \in V'$  mit*

(i)  $\Phi|_W = \phi$  und

(ii)  $\|\Phi\|_{V'} = \|\phi\|_{W'}$ .

*Beweis.* Wir setzen

$$r := \|\phi\|_{W'} = \sup\{|\phi(w)| : w \in W, \|w\|_V \leq 1\}$$

und beobachten, dass  $p(v) = r\|v\|_V$  eine Halbnorm auf  $V$  darstellt<sup>3</sup>. Nach Theorem 3.37 oder 3.38 finden wir ein lineares Funktional  $\Phi \in V'$ , das  $\Phi|_W = \phi$  und

$$|\Phi(v)| \leq p(v) = \|\phi\|_{W'}\|v\|_V$$

erfüllt. Damit ist  $\Phi$  schon beschränkt mit  $\|\Phi\|_{V'} \leq \|\phi\|_{W'}$ . Andererseits ist aber auch

$$\|\Phi\|_{V'} = \sup\{\underbrace{|\Phi(v)| : v \in V, \|v\|_V \leq 1}_{\sup\{|\Phi(w)| : w \in W, \|w\|_V \leq 1\}}\} \geq \underbrace{\{|\phi(w)| : w \in W, \|w\|_V \leq 1\}}_{=\Phi(w)} = \|\phi\|_{W'}.$$

$\square$

Insbesondere finden wir nun unsere punktgetrennenden linearen Funktionalen.

**Korollar 3.40.** *Zu gegebenem  $z \in V$ ,  $z \neq 0$ , im normierten Vektorraum  $V$  finden wir ein  $\Phi_z \in V'$  mit  $\Phi_z(z) = \|z\|_V$  und  $\|\Phi_z\|_{V'} = 1$ .*

*Beweis.* Auf dem eindimensionalen Teilraum  $W = \mathbb{K}z$  definieren wir das lineare Funktional  $\phi$  durch  $\phi(\alpha z) = \alpha\|z\|_V$  für alle  $w = \alpha z \in W$ . Dafür ist natürlich  $\|\phi\|_{W'} = 1$ . Dazu existiert dann eine Fortsetzung  $\Phi_z \in V'$  mit  $\|\Phi_z\|_{V'} = 1$  und  $\Phi_z(z) = \Phi_z(1z) = 1\|z\|_V$ .  $\square$

<sup>3</sup> $p$  ist sogar eine Norm, wenn  $\phi$  nicht das Nullfunktional ist

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

Insbesondere folgt aus  $\phi(v) = 0$  für alle  $\phi \in V'$  sofort  $v = 0$ .

**Korollar 3.41.** Zu  $v_1, v_2 \in V$ ,  $v_1 \neq v_2$ , existiert ein  $\Phi \in V'$  mit  $\Phi(v_1) \neq \Phi(v_2)$ .

*Beweis.* Man wende einfach Korollar 3.40 auf  $z = v_1 - v_2 \neq 0$  an. Das zeigt sogar, dass  $\Phi$  mit Norm 1 gewählt werden kann.  $\square$

Wir folgern sogar, dass wir die Norm von  $v \in V$  durch Anwendung linearer Funktionale auf  $v$  ausdrücken können.

**Korollar 3.42.** Für  $v \in V$  im normierten Vektorraum  $V$  ist

$$\|v\|_V = \sup\{|\phi(v)| : \phi \in V', \|\phi\|_{V'} \leq 1\}.$$

*Beweis.* “ $\geq$ ”: Für alle  $\phi \in V'$  mit  $\|\phi\|_{V'} \leq 1$  ist  $|\phi(v)| \leq \|\phi\|_{V'} \|v\|_V \leq \|v\|_V$ .

“ $\leq$ ”: Für  $v = 0$  ist nichts zu zeigen, dann ist nämlich  $\phi(v) = 0$  für alle  $\phi \in V'$ . Zu  $v \neq 0$  ist mit  $\Phi_v$  aus Korollar 3.40

$$\sup\{|\phi(v)| : \phi \in V', \|\phi\|_{V'} \leq 1\} \geq |\Phi_v(v)| = \|v\|_V.$$

$\square$

Der zweite Teil des Beweises zeigt, dass das Supremum sogar (durch  $\phi = \Phi_v$ ) angenommen wird.

Als weitere Anwendung stellen wir erneut fest, dass jedes  $v \in V$  ein stetiges lineares Funktional auf  $V'$  definiert. Wir hatten das schon auf anderem Wege gezeigt und benutzt.

**Korollar 3.43.** Ist  $V$  ein normierter Vektorraum, so gibt es eine isometrische lineare Abbildung  $\iota : V \rightarrow V''$ .

*Beweis.* Wir können diese Isometrie sogar angeben. Zu  $v \in V$  definieren wir  $\iota(v) = j_v : V' \rightarrow \mathbb{K}$  durch

$$j_v(\phi) := \phi(v) \quad \text{für } \phi \in V'.$$

Wegen

$$j_v(\alpha\phi + \psi) = \alpha\phi(v) + \psi(v) = \alpha j_v(\phi) + j_v(\psi) \quad \text{für } \phi, \psi \in V', \alpha \in \mathbb{K}$$

ist  $j_v$  ein lineares Funktional und dank

$$|j_v(\phi)| = |\phi(v)| \leq \|v\|_V \|\phi\|_{V'}$$

ist  $j_v$  sogar stetig (d.h.,  $j_v \in (V')' = V''$ ) mit  $\|j_v\|_{V''} \leq \|v\|_V$ . Und dank  $\phi = \Phi_v$  mit

$$|j_v(\Phi_v)| = |\Phi_v(v)| = \|v\|_V$$

wissen wir sogar, dass  $\|j_v\|_{V''} = \|v\|_V$  ist.

Damit ist  $\iota : v \mapsto j_v$  tatsächlich eine Isometrie.  $\square$

Wir erinnern uns, dass die Folgerung nicht garantiert, dass  $\iota$  ein isometrischer Isomorphismus ist. Die Surjektivität ist keineswegs gesichert. Die Räume, in denen  $\iota$  surjektiv ist, haben wir reflexiv genannt.

Wir kehren nochmal zu Korollar 3.41 zurück und überlegen uns anschaulich, was das in  $V = \mathbb{R}^2$ , versehen mit der euklidischen Standardnorm, bedeutet. Hier kann jedes lineare Funktional als Skalarprodukt  $\phi = \langle v_\phi | \cdot \rangle$  dargestellt werden. Zu gegebenen  $x, y$  haben wir also ein  $v$  mit  $\langle v | x \rangle \neq \langle v | y \rangle$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\langle v | x \rangle < \langle v | y \rangle$ . Wegen der Linearität gilt dann

$$\langle v | x \rangle < \langle v | \frac{1}{2}(x + y) \rangle < \langle v | y \rangle.$$

Die Gerade  $\{z \in \mathbb{R}^2 : \langle v | z \rangle = \langle v | \frac{1}{2}(x + y) \rangle\}$  teilt also  $\mathbb{R}^2$  in zwei Halbebenen, die  $x$  bzw.  $y$  enthalten.

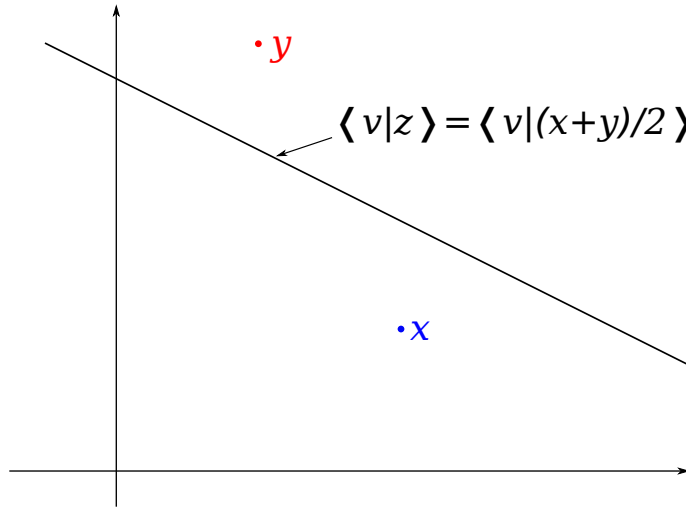


Illustration der Punkttrennung am Beispiel  $x = (1, 2)^T$ ,  $y = (3, 1)^T$ ,  $v = (1, 2)^T$ .

Tatsächlich können wir  $v$  sogar so wählen, dass  $\langle v | \frac{1}{2}(x + y) \rangle = 0$  ist. Die Halbebenen wären dann also durch  $H_+ = \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle v | z \rangle > 0\} \ni y$  bzw.  $H_- = \{z \in \mathbb{R}^2 : \langle v | z \rangle < 0\}$  gegeben.

Dass es sich hier nicht um eine Eigenheit des euklidischen  $\mathbb{R}^2$  handelt, werden wir jetzt sehen. Die Rolle der trennenden Geraden wird dann durch eine Hyperebene übernommen, die den Raum in zwei Halbräume teilt. Damit der Schritt mit dem Vergleichen funktioniert, müssen wir uns aber auf reelle Vektorräume beschränken.

**Definition 3.44.** Eine (abgeschlossene) Hyperebene in einem reellen normierten Vektorraum  $(V, \| \cdot \|)$  ist eine Menge

$$H = H_{\phi, \alpha} = \{v \in V : \phi(v) = \alpha\}$$

zu gegebenen  $\phi \in V'$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Die zugehörigen Halbräume bezeichnen wir mit

$$H_{\phi, \alpha}^< = \{v \in V : \phi(v) < \alpha\}, \quad H_{\phi, \alpha}^> = \{v \in V : \phi(v) > \alpha\}.$$

### 3. Funktionalanalytische Grundprinzipien

Tatsächlich ist  $H = \phi^{-1}(\{\alpha\})$  als Urbild der abgeschlossenen Menge  $\{\alpha\}$  unter der stetigen Abbildung  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$  abgeschlossen. Ferner wird aus den Definitionen sofort klar, dass  $V$  die disjunkte Vereinigung von  $H^>$ ,  $H^<$  und  $H$  ist. Abkürzend definieren wir ganz analog die (abgeschlossenen) Halbräume  $H^\geq$  und  $H^\leq$ .

**Definition 3.45.** Sind  $H \subset V$  eine abgeschlossene Hyperebene und  $A, B \subset V$  beliebige Teilmengen von  $V$ , so sagen wir,  $H$  trenne  $A$  und  $B$ , falls  $A \subset H^\leq$  und  $B \subset H^\geq$ . Gilt sogar  $A \subset H^\leq$  und  $B \subset H^>$ , so sagen wir,  $H$  trenne  $A$  und  $B$  strikt.

Die Definition ist natürlich symmetrisch, denn  $H_{\phi, \alpha}^\geq = H_{-\phi, -\alpha}^\leq$  usw. – wir können die Rollen von  $A$  und  $B$  also problemlos vertauschen.

**Beispiel 55.** Für  $A = \{v_1\}$ ,  $B = \{v_2\}$  wissen wir aus Korollar 3.41 schon, dass es sogar eine Hyperebene  $H$  mit  $A \subset H^>$  und  $B \subset H^<$  gibt. Das klappt aber auch für allgemeinere Mengen, wie der nächste Satz zeigt.

**Satz 3.46.** Sind  $W \subset V$  ein linearer Teilraum und  $v \in V$  ein Element in einem normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $(V, \|\cdot\|)$  mit

$$\text{dist}(v, W) \equiv \inf\{\|v - w\| : w \in W\} > 0,$$

so existiert ein  $\Phi \in V'$  derart, dass

$$\|\Phi\|_{V'} = 1, \quad \Phi(v) = \text{dist}(v, W), \quad \Phi(w) = 0 \quad \text{für alle } w \in W.$$

Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  bedeutet das, dass die Hyperebene  $H_{\Phi, 0}$  die Mengen  $W$  und  $\{v\}$  strikt trennt. Hier gilt sogar  $W \subset H_{\Phi, 0}$  und  $v \in H_{\Phi, 0}^>$ .

*Beweis (des Satzes).* Übungsaufgabe. □

Wir haben nun einelementige Mengen  $\{v\}$  von einem linearen Teilraum (der  $v$  nicht enthält) getrennt. Im endlichdimensionalen Fall ist das wenig überraschend. Dort ist ein linearer Teilraum der Dimension  $n - 1$  genau eine abgeschlossene Hyperebene.

Tatsächlich trennt das gleiche Funktional auch  $\{v\}$  und den Abschluss  $\bar{W}$  des fraglichen Teilraums  $W$ . Schließlich ist  $W \subset \phi^{-1}(\{0\})$ , also liegt  $\bar{W}$  in der abgeschlossenen Menge  $\phi^{-1}(\{0\})$ . Da wegen der Stetigkeit der Norm auch  $\text{dist}(v, W) = \text{dist}(v, \bar{W})$  gilt, finden wir also zum linearen Teilraum  $W \subset V$  und  $v \in V$  mit  $\text{dist}(v, W) > 0$  ein normiertes  $\Phi \in V'$  mit  $\Phi(v) = \text{dist}(v, \bar{W})$  und  $\Phi|_{\bar{W}} = 0$ .

Im nächsten Schritt trennen wir Punkte von abgeschlossenen konvexen Teilmengen. Das ist etwas allgemeiner, da abgeschlossene lineare Teilräume auch abgeschlossene konvexe Teilmengen sind.

**Satz 3.47.** Sind  $C \subset V$  eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  und  $v \in V \setminus C$ , so existiert ein  $\Phi \in V'$  mit

$$\text{Re } \Phi(w) \leq 1 \quad \text{für alle } w \in C, \quad \text{Re } \Phi(v) > 1.$$



### 3.5. Der Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

*Beweis.* Den Beweis führen wir hier nicht, sondern verweisen etwa auf Theorem III.2.5 bei Werner (2018).  $\square$

Noch allgemeiner können wir die einpunktige Menge  $\{v\}$  durch eine beliebige kompakte konvexe Menge ersetzen. Den Beweis dazu führen wir nicht, merken uns aber, dass in reellen normierten Vektorräumen zwei konvexe Mengen  $C$  und  $K$  stets strikt durch eine Hyperebene getrennt werden können, wenn  $C$  abgeschlossen und  $K$  kompakt ist.



---

## Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

---

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns insbesondere mit stetigen linearen Operatoren. Viele unserer Aussagen gelten für solche Operatoren zwischen Banachräumen, manche ergeben aber nur für Hilberträume Sinn, auf die wir uns hier konzentrieren wollen. Besonders interessieren wir uns nun für lineare Operatoren, die  $V$  in sich selbst abbilden. Wir haben es also mit Verallgemeinerungen quadratischer Matrizen – bzw. den durch solche dargestellten Abbildungen – zu tun.

Im folgenden nehmen wir – sofern nicht ausdrücklich anders gesagt – an,  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  sei ein komplexer Hilbertraum und bezeichnen mit  $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$  den Raum der beschränkten linearen Operatoren von  $V$  in sich selbst. Dieser ist bekanntermaßen selbst ein komplexer Banachraum. Für reelle Hilberträume gelten oft – aber nicht immer – jeweils entsprechende Aussagen, wenn man alle komplexen Konjugationen schlicht ignoriert.

**Lemma 4.1.** *Ist  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein komplexer Hilbertraum, so gilt für  $F \in \mathcal{L}(V)$ :*

$$F = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Fv \perp v \quad \text{für alle } v \in V.$$

*Beweis.* Übung. □

Hier haben wir nun schon eine Aussage, die in reellen Hilberträumen im allgemeinen falsch ist, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Beispiel 56.** *Auf  $V = \mathbb{R}^2$  mit dem euklidischen Skalarprodukt betrachte  $F : V \rightarrow V$ ,  $(v_1, v_2)^T \mapsto (-v_2, v_1)^T$ . Selbstverständlich ist  $F$ , dargestellt durch  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ein nicht trivialer, stetiger linearer Operator, der aber  $Fv \perp v$  für alle  $v \in V$  erfüllt.  $F$  dreht einfach den Vektor  $v$  im euklidischen  $\mathbb{R}^2$  um  $\frac{\pi}{2}$  im mathematisch positiven Sinn. Sie haben natürlich längst erkannt, dass  $F$  die Multiplikation mit  $i$  in der Komplexifizierung  $\mathbb{C}$  des  $\mathbb{R}^2$  darstellt. Da in  $\mathbb{C}^1$  das Skalarprodukt aber nicht die Multiplikation selbst*

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

ist  $(\langle z|w\rangle = z^*w)$ , ginge bei der Komplexifizierung die Orthogonalität verloren. Wir haben also keineswegs einen Widerspruch zum Lemma.

Ferner nutzen wir, wie auch schon im Lemma, regelmäßig die übliche Schreibweise  $Fv := F(v)$  für den linearen Operator  $F$  und den Vektor  $v$ . Man beachte, dass damit noch nicht eine Matrixdarstellung von  $F$  bezüglich einer hypothetischen Basis angenommen ist. Analog schreiben wir  $FG := F \circ G$  für  $F, G \in \mathcal{L}(V)$ .

### 4.1. Selbstadjungierte und unitäre Operatoren

Wir beginnen mit der Definition des adjungierten Operators zu gegebenem  $F \in \mathcal{L}(V)$ .

**Satz 4.2.** Zu  $F \in \mathcal{L}(V)$  im Hilbertraum  $V$  existiert genau ein  $G \in \text{End}(V)^a$ , derart, dass für alle  $v, w \in V$

$$\langle v|Fw\rangle = \langle Gv|w\rangle$$

gilt. Dieser Operator ist beschränkt und erfüllt

$$\|G\| = \|F\| = \sqrt{\|GF\|} = \sqrt{\|FG\|}. \quad (4.1)$$

<sup>a</sup>Gemäß der Standardnotation aus der linearen Algebra bezeichnen wir mit  $\text{End}(V) = \text{Hom}(V, V)$  den Raum der (linearen) Endomorphismen in  $V$ , also der linearen Abbildungen  $F : V \rightarrow V$ .

*Beweis.* (I) *Existenz.* Zu  $v \in V$  definieren wir  $\phi_v : V \rightarrow \mathbb{K}$  durch  $\phi_v(w) := \langle v|Fw\rangle$ . Das ist offensichtlich ein lineares Funktional auf  $V$ , und es ist sogar beschränkt<sup>1</sup>:

$$|\phi_v(w)| = |\langle v|Fw\rangle| \leq \|Fw\|_V \|v\|_V \leq \|F\| \|v\|_V \|w\|_V \quad \text{für alle } w \in V,$$

also  $\|\phi_v\|_{V'} \leq \|F\| \|v\|_V$ .

Nach dem zweiten Satz von Riesz, Satz 2.26, existiert genau ein  $v^* \in V$ , das  $\phi_v$  darstellt:  $\phi_v(\cdot) = \langle v^*|\cdot\rangle$ , also

$$\phi_v(w) = \langle v|Fw\rangle = \langle v^*|w\rangle \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Weiter besagt Satz 2.26, dass kraft Isometrie  $\|\phi_v\|_{V'} = \|v^*\|_V$  gilt, und wir hatten festgestellt, dass  $v \mapsto v^*$  eine lineare Abbildung ist. Also definiert

$$G : V \rightarrow V, \quad Gv := v^*$$

eine lineare Abbildung,  $G \in \text{End}(V)$ , für den nach Konstruktion für alle  $v, w \in V$

$$\langle v|Fw\rangle = \langle v^*|w\rangle = \langle Gv|w\rangle$$

gilt.

<sup>1</sup>Es handelt sich einfach um die Komposition  $\psi_v \circ F$ , wobei  $\psi_v \in V'$  das durch  $\langle v|\cdot\rangle$  dargestellte Funktional ist.

(II) *Eindeutigkeit*. Angenommen  $H \in \text{End}(V)$  sei ein weiterer Operator mit diesen Eigenschaften. Dann gilt für alle  $v, w \in V$ :

$$0 = \langle v|Fw \rangle - \langle v|Fw \rangle = \langle Gv|w \rangle - \langle Hv|w \rangle = \langle Gv - Hv|w \rangle.$$

Das gilt dann auch für  $w = Gv - Hv$ , also ist  $Gv - Hv = 0$  für alle  $v \in V$  und damit  $G = H$ .

(III) *Beschränktheit*. Wir zeigen dafür  $\|G\| \leq \|F\|$ . Dazu haben wir in Schritt (I) bereits abgeschätzt, dass für alle  $v \in V$

$$\|Gv\|_V = \|v^*\|_V = \|\phi_v\|_{V'} \leq \|F\| \|v\|_V$$

gilt. Damit ist  $G \in \mathcal{L}(V)$ , und wir können alles bislang gezeigte auf  $G$  anwenden und finden ein  $H \in \text{End}(V)$  mit  $\|H\| \leq \|G\|$  derart, dass für alle  $v, w \in V$

$$\langle Gv|w \rangle^* = \langle w|Gv \rangle = \langle Hw|v \rangle$$

gilt. Andererseits gilt aber

$$\langle Gv|w \rangle^* = \langle v|Fw \rangle^* = \langle Fw|v \rangle.$$

Also gilt

$$\langle Fw|v \rangle = \langle Hw|v \rangle \quad \text{für alle } v, w \in V \quad \text{und damit} \quad F = H,$$

da nach (II) zu  $G$  nur ein solches  $H$  existieren kann. Es folgt

$$\|F\| = \|H\| \leq \|G\| \leq \|F\|, \quad \text{also } \|F\| = \|G\|.$$

(IV) Die Aussage über die Norm von  $\|GF\|$  rechnen wir auch schnell nach. Für alle  $v \in V$  gilt

$$\|Fv\|_V^2 = \langle Fv|Fv \rangle = \langle GFv|v \rangle \leq \|GFv\|_V \|v\|_V \leq \|GF\| \|v\|_V^2 \leq \underbrace{\|G\| \|F\|}_{=\|F\|^2} \|v\|_V^2.$$

Gehen wir die Ungleichungskette durch, so erhalten wir aus  $\|Fv\|_V^2 \leq \|GF\| \|v\|_V^2$  durch Ziehen der Wurzel  $\|F\| \leq \sqrt{\|GF\|}$  und aus der letzten Ungleichung die umgekehrte Richtung, also  $\|F\| = \sqrt{\|GF\|}$ . Die erste und letzte Gleichung in (4.1) folgen dann wegen  $F = H$  nach Teil (III).  $\square$

Sie überzeugen sich unter Verwendung der Sesquilinearität des Skalarprodukts, dass die nach dem Satz wohldefinierte Abbildung  $F \mapsto G$  eine konjugiert lineare Abbildung von  $\mathcal{L}(V)$  in sich selbst ist. Genauer handelt es sich um einen Funktor, der aus linearen Abbildungen von  $V$  nach  $V$  solche von  $V'$  nach  $V'$  macht. Da wir aber  $V$  nach dem zweiten Satz von Riesz (via konjugiert isometrischer Isomorphie) mit  $V'$  identifiziert hatten, ergibt das im Fall eines Hilbertraums keinen Unterschied. Analog erhalten wir in allgemeinen Banachräumen zu  $F \in \mathcal{L}(V, Y)$  per (konjugiert) linearem Funktor ein  $G \in \mathcal{L}(Y', V')$  mit

$$\langle \eta, Fv \rangle_Y = \langle G\eta, v \rangle_{V'} \quad \text{für alle } v \in V, \eta \in Y'.$$

Die Wirkung dieses Funktors nennen wir Adjungieren und definieren:

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

**Definition 4.3.** Der in Satz 4.2 eindeutig bestimmte Operator  $G \in \mathcal{L}(V)$  zu  $F \in \mathcal{L}(V)$  heißt der zu  $F$  adjungierte Operator und wird mit  $F^*$  bezeichnet.

**Beispiel 57.** Wir betrachten  $V = \ell_2^{\mathbb{C}}$  und den Linksshift-Operator  $L : V \rightarrow V$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Für alle  $v, w \in V$  gilt dann

$$\langle v | Lw \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^* w_{n+1}.$$

Wir zeigen, dass der Rechtsshift-Operator

$$R : V \rightarrow V, \quad (v_1, v_2, v_3, \dots) \mapsto (0, v_1, v_2, \dots),$$

der zu  $L$  adjungierte Operator ist. Tatsächlich ist nämlich für  $v, w \in V$ :

$$\langle Rv | w \rangle = 0w_1 + \sum_{n=2}^{\infty} v_{n-1}^* w_n = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^* w_{k+1} = \langle v | Lw \rangle.$$

Die meisten der folgenden Aussagen haben wir bereits gezeigt. Wir formulieren sie aber noch einmal in der Schreibweise für adjungierte Operatoren.

**Korollar 4.4.** Sind  $F, F_1, F_2 \in \mathcal{L}(V)$  für einen Hilbertraum  $V$ , so gelten:

- (i)  $(\alpha F_1 + F_1)^* = \alpha^* F_1^* + F_2^*$  für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$
- (ii)  $(F^*)^* = F$
- (iii)  $(F_1 F_2)^* = F_2^* F_1^*$
- (iv)  $\|FF^*\| = \|F^*F\| = \|F\|^2 = \|F^*\|^2$

Die Aussagen gelten in reellen Hilberträumen analog, wobei dann  $\alpha \in \mathbb{R}$  natürlich keiner komplexen Konjugation unterzogen werden muss.

*Beweis.* Wir haben noch (iii) zu zeigen. Tatsächlich gilt für  $u, z \in V$ :

$$\langle u | F_1(F_2 z) \rangle \stackrel{v=u, w=F_2 z}{=} \langle F_1^* u | F_2 z \rangle \stackrel{v=F_1^* u, w=z}{=} \langle F_2^* (F_1^* u) | z \rangle.$$

Wegen der Eindeutigkeit des adjungierten Operators ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Wir stellen fest, dass der normierte  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathcal{L}(V)$  einige interessante Eigenschaften hat. Zum einen bildet die Komposition  $FG = F \circ G$  zweier stetiger linearer Operatoren wieder einen stetigen linearen Operator. Wir haben also eine Art Multiplikation in  $\mathcal{L}(V)$ , die sogar mit der Multiplikation mit Skalaren kommutiert:  $F \circ (\alpha G) = \alpha(F \circ G)$ . Punktweise ist das einfach die Linearität von  $F$ . Außerdem haben wir den Funktor  $*$  :  $\mathcal{L}(V) \rightarrow \mathcal{L}(V)$ ,  $F \mapsto F^*$ , der die im Korollar aufgeführten Eigenschaften hat. Er ist insbesondere mit der Norm auf  $\mathcal{L}(V)$  verträglich (Punkt (iv) des Korollars). Jede dieser Eigenschaften führt dazu, dass  $\mathcal{L}(V)$  zusammen mit der Operatornorm und dem Funktor  $*$  einer ganz speziellen Kategorie mathematischer Objekte angehört.

**Definition 4.5.**

1. Eine Algebra über  $\mathbb{K}$  ist ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $\mathcal{A}$  zusammen mit einer Verknüpfung  $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $(a, b) \mapsto ab = a \circ b$  derart, dass  $(\mathcal{A}, +, \circ)$  ein Ring ist und für alle  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $a, b \in \mathcal{A}$

$$\underbrace{(\alpha a)b}_{\text{lies: } (\alpha a) \circ b} = a(\alpha b) = \alpha(ab)$$

gilt.

2. Eine Algebra  $\mathcal{A}$  über  $\mathbb{C}$  heißt \*-Algebra (lies: Stern-Algebra), falls es eine Abbildung  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $a \mapsto a^*$  mit

$$\begin{array}{lll} (i) & (\alpha a + b)^* = \alpha^* a^* + b^* & \text{für alle } \alpha \in \mathbb{C}, a, b \in \mathcal{A} \\ (ii) & (a^*)^* = a & \text{für alle } a \in \mathcal{A} \quad (*^2 = \text{id}_{\mathcal{A}}) \\ (iii) & (ab)^* = b^* a^* & \text{für alle } a, b \in \mathcal{A}. \end{array}$$

3. Eine Banachalgebra ist eine Algebra  $\mathcal{A}$ , versehen mit einer Norm  $\|\cdot\|$ , unter der  $\mathcal{A}$  ein Banachraum ist, und die  $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$  für alle  $a, b \in \mathcal{A}$  erfüllt.

4. Eine  $C^*$ -Algebra ist eine komplexe Banachalgebra, die zusätzlich eine \*-Algebra ist und für die  $\|a\|^2 = \|a^* a\|$  für alle  $a \in \mathcal{A}$  gilt. In diesem Fall heißt  $\|\cdot\|$  eine  $C^*$ -Norm auf der \*-Algebra  $\mathcal{A}$ .

Denken Sie bei  $\circ$  an die Multiplikation komplexer Zahlen, bei  $*$  an die komplexe Konjugation und bei  $\|\cdot\|$  an den üblichen Betrag zum Skalarprodukt  $\langle \alpha | \beta \rangle = \alpha^* \beta$ , so sehen Sie, dass  $C^*$ -Algebren eine Verallgemeinerung des Körpers  $\mathbb{C}$  darstellen. Selbstverständlich können Sie  $\mathbb{C}$  auch als (eindimensionalen) komplexen Hilbertraum interpretieren und dank der Identifizierung von  $\mathbb{C}$  selbst mit  $\mathcal{L}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}'$  (via  $F_\alpha := \alpha^*$  für  $\alpha \in \mathbb{C}$ ) direkt die Definition anwenden.

Anders als im allgemeinen Fall ist die  $C^*$ -Algebra  $\mathbb{C}$  sogar kommutativ (genauer: die Multiplikation), und zu jedem nicht trivialen Element existiert ein multiplikatives Inverses. Beides dürfen wir von beschränkten linearen Operatoren im allgemeinen natürlich nicht erwarten.

Unsere bisherigen Beobachtungen zeigen, dass  $\mathcal{L}(V)$  für einen komplexen Hilbertraum  $V$ , versehen mit der Komposition als Multiplikation, der Operatornorm und dem Adjungieren als  $*$  zu einer  $C^*$ -Algebra wird.

Als Übung dürfen Sie sich überzeugen, dass  $\mathcal{L}(V)$  für jeden Banachraum eine Banachalgebra ist. Weitere Beispiele folgen.

In beiden Fällen hat die Algebra  $\mathcal{L}(V)$  auch ein Einselement, nämlich  $\text{id}_V$  (ist also ein Ring mit Eins).

**Beispiel 58.** (a) Ist  $(M, d)$  ein kompakter metrischer Raum, so ist  $\mathcal{A} = C(M; \mathbb{C})$ , versehen mit der punktweisen Multiplikation  $(fg)(x) := f(x)g(x)$  und  $f^*(x) := (f(x))^*$  eine  $C^*$ -Algebra unter der Maximumsnorm  $\|f\|_\infty = \max_{x \in M} |f(x)|$ . Auch hier existiert ein Einselement, gegeben durch  $\mathbf{1}(x) = 1$  für alle  $x$ .

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

(b) Der Raum der Polynome auf der kompakten Menge  $K \subset \mathbb{C}$  mit komplexen Koeffizienten bildet unter den gleichen Operationen ebenfalls eine  $*$ -Algebra mit Eins, ist allerdings unter  $\|\cdot\|_\infty$  nicht vollständig, also keine  $C^*$ - oder auch nur Banachalgebra.

Nach unseren Vorbereitungen sollte mindestens der erste Teil der folgenden Definition nicht mehr überraschen.

**Definition 4.6.** Weiterhin sei  $V$  ein komplexer Hilbertraum.

1. Ein Operator  $F \in \mathcal{L}(V)$  heißt selbstadjungiert, falls  $F^* = F$  ist. Den Teilraum der selbstadjungierten Operatoren auf  $V$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}(V)_h$ .

2.  $F \in \mathcal{L}(V)$  heißt normal, falls  $F^*F = FF^*$  gilt.

Die Bezeichnung  $\mathcal{L}(V)_h$  kommt von “hermitesch”, was in der Literatur manchmal als Synonym für “selbstadjungiert” benutzt wird.

Das ist für beschränkte lineare Operatoren zwar richtig, allerdings gilt für unbeschränkte Operatoren  $F : V \supset \mathcal{D}_F \rightarrow V$  nur

$$F \text{ selbstadjungiert} \implies F \text{ wesentlich selbstadjungiert} \implies F \text{ hermitesch.}$$

Die Definitionen werden dann aber auch etwas komplizierter. In den uns besonders interessierenden Hilberträumen ist glücklicherweise nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen jeder global definierte, lineare, hermitesche Operator  $F : V \rightarrow V$  automatisch beschränkt.

**Bemerkung.** Für  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $F, G \in \mathcal{L}(V)_h$  gilt:

- (i)  $(\alpha F + G) \in \mathcal{L}(V)_h$ ,
- (ii)  $FG \in \mathcal{L}(V)_h \iff FG = GF$ ,
- (iii)  $F^* \in \mathcal{L}(V)_h$ ,

wie Sie schnell nachrechnen. Tatsächlich handelt es sich bei  $\mathcal{L}(V)_h$  sogar um ein (unter der Operatornorm) abgeschlossenen Teilraum, wie wir später sehen werden.

**Beispiel 59.** Wir wissen, dass wir lineare Abbildungen  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  (bezüglich der Standardbasis) durch Matrizen  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  darstellen können:  $F(v) = Av$ . Der adjungierte Operator  $F^*$  wird dann durch die adjungierte Matrix  $A^\dagger$  dargestellt, die sich durch Transposition und eintragsweise komplexe Konjugation aus  $A$  ergibt. Damit ist  $F$  genau dann selbstadjungiert, wenn für die darstellende Matrix  $A^\dagger = A$  gilt.

Offensichtlich ist jeder selbstadjungierte beschränkte Operator auch normal. Das folgende Beispiel zeigt, dass umgekehrt nicht jeder normale beschränkte Operator selbstadjungiert ist.

**Beispiel 60.** Auf dem Hilbertraum  $V = L_2(\Omega)$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen) ist jeder Multiplikationsoperator  $M_f$  ( $f \in \mathcal{L}_\infty(\Omega)$ ), gegeben durch

$$(M_f v)(x) := f(x)v(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega,$$

normal. Tatsächlich ist  $M_f^* = M_{f^*}$ , denn für alle  $v, w \in V$  gilt

$$\langle v | M_f w \rangle = \int_{\Omega} v(x)^* (f(x)w(x)) \, dx = \int_{\Omega} ((f(x)^*)^* v(x)^*) w(x) \, dx = \langle M_{f^*} v | w \rangle$$



#### 4.1. Selbstadjungierte und unitäre Operatoren

und damit für alle  $v \in V$  punktweise

$$(M_f^* M_f v)(x) = f(x)^* f(x) v(x) = f(x) f(x)^* v(x) = (M_f M_f^* v)(x) \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

Allerdings ist  $M_f$  offensichtlich nur dann selbstadjungiert, wenn  $f$  reellwertig ist.

**Lemma 4.7.** Der Operator  $F \in \mathcal{L}(V)$  ist genau dann normal, wenn  $\|Fv\| = \|F^*v\|$  für alle  $v \in V$  gilt.

Beweis. Übung. □

**Lemma 4.8.** Der Operator  $F \in \mathcal{L}(V)$  ist genau dann selbstadjungiert, wenn  $\langle v|Fv \rangle$  für alle  $v \in V$  reell ist.

Beweis. Ist  $F$  selbstadjungiert, so gilt für alle  $v \in V$ :

$$\langle v|Fv \rangle = \langle Fv|v \rangle = \langle v|Fv \rangle^*.$$

Ist umgekehrt  $\langle v|Fv \rangle \in \mathbb{R}$  für alle  $v \in V$ , so folgt

$$\langle F^*v|v \rangle = \langle v|Fv \rangle = \langle Fv|v \rangle.$$

Die Polarisierungsidentität angewandt auf  $\langle v|Fw \rangle$  und  $\langle v|F^*w \rangle$  liefert dann (nachrechnen!)

$$\langle v|Fw \rangle = \langle v|F^*w \rangle \quad \text{für alle } v, w,$$

woraus  $Fw = F^*w$  für alle  $w \in V$  folgt. □

Das Lemma erlaubt uns außerdem die Definition einer Halbordnung auf dem Raum  $\mathcal{L}(V)_h$  der selbstadjungierten Operatoren auf dem Hilbertraum  $V$ . Dass es sich um eine solche handelt, ist Teil der Aussage des im Anschluss folgenden Lemmas.

**Definition 4.9.** Für  $F, G \in \mathcal{L}(V)_h$  definieren wir:

$$F \leq G : \Longleftrightarrow \langle v|Fv \rangle \leq \langle v|Gv \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

**Lemma 4.10.** Für beliebige  $F, G, H \in \mathcal{L}(V)_h$  gilt:

$$(i) \quad F \leq G, \quad G \leq H \implies F \leq H$$

$$(ii) \quad F \leq F$$

$$(iii) \quad F \leq 0 \text{ und } -F \leq 0 \implies F = 0$$

$$(iv) \quad F \leq G \implies F + H \leq G + H$$

Beweis. Übung durch direktes Nachrechnen anhand der Definition. □

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

Das Lemma besagt, dass  $\leq$  nicht nur eine Halbordnung auf  $\mathcal{L}(V)_h$  darstellt, sondern (laut (iv))  $\mathcal{L}(V)_h$  sogar ein halbgeordneter Vektorraum ist.

**Korollar 4.11.** Ist  $F \geq 0$  ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum  $V$ , so definiert  $(v|w) := \langle v|Fw \rangle$  ein Semiskalarprodukt auf  $V$ .

*Beweis.* Übung. □

Wir erinnern uns noch an die isometrischen (linearen) Isomorphismen. Dabei handelt es sich um spezielle isometrische Operatoren.

**Definition 4.12.** Ein beschränkter linearer Operator  $F : V \rightarrow V$  im Hilbertraum  $V$  heißt *isometrisch*, falls  $\langle Fv|Fw \rangle = \langle v|w \rangle$  für alle  $v, w \in V$  gilt.

$F$  heißt *unitär*, falls  $F^*F = \text{id}_V = FF^*$  gilt.

**Lemma 4.13.** Der Operator  $F \in \mathcal{L}(V)$  ist genau dann isometrisch, wenn  $\|Fv\| = \|v\|$  für alle  $v \in V$  gilt.

Das Lemma besagt, dass  $F$  genau dann isometrisch im Sinne der Hilbertraumisometrie ist, wenn es isometrisch im Sinne der Banachraumisometrie ist.

*Beweis.* Die Richtung " $\implies$ " folgt aus  $v = w$  in der Definition.

Die Umkehrung folgt durch Nachrechnen unter Verwendung der Polarisierungsidentität. □

Das folgende Lemma besagt, dass unitäre Operatoren und isometrische Isomorphismen nur zwei Begriffe für die gleiche Klasse von Operatoren sind.

**Lemma 4.14.** Für einen Operator  $F \in \mathcal{L}(V)$  auf dem Hilbertraum  $V$  sind folgende Aussagen äquivalent.

(i)  $F$  ist unitär.

(ii)  $F$  ist isometrisch und surjektiv.

(iii)  $F$  ist ein isometrischer Isomorphismus.

*Beweis.* Übung. □

**Beispiel 61.** Der Rechtsshift  $R$  auf  $\ell_2^{\mathbb{C}}$  ist isometrisch, aber nicht unitär. Tatsächlich ist für alle  $v, w \in \ell_2$ :

$$\langle Rv, Rw \rangle = 0^*0 + \sum_{k=1}^{\infty} v_k^* w_k = 0 + \langle v|w \rangle.$$

Allerdings ist  $R$  bekanntermaßen nicht surjektiv:  $R(V) = \{v \in \ell_2 : v_1 = 0\} \subsetneq \ell_2$ , denn  $b^{(1)} = (1, 0, 0, \dots) \notin R(V)$ .

**Lemma 4.15.** Für unitäre  $F, G \in \mathcal{L}(V)$  sind  $F^{-1}$  und  $FG$  ebenfalls unitär. Ferner ist  $\text{id}_V$  unitär.

*Beweis.* Übung. □

Die Teilmenge  $\mathcal{U}(V) \subset \mathcal{L}(V)$  bildet also eine Gruppe unter der Komposition von Operatoren.

## 4.2. Projektionen

Wir widmen uns noch einmal den vom ersten Satz von Riesz bekannten Projektionen. Wir erinnern uns daran, dass wir zu einem Unterhilbertraum  $V_1$  des Hilbertraums  $V$  und gegebenem  $v \in V$  eindeutige  $v_1 \in V_1$ ,  $v_2 \in V_2 = V_1^\perp$  mit  $v = v_1 + v_2$  finden, die wir mit  $\pi_1(v) = v_1$  und  $\pi_2(v) = v_2$  bezeichnet hatten. Zunächst stellen wir fest, dass die Projektion  $\pi_1$  auf  $V_1$  nach dem verallgemeinerten Pythagoras (man beachte  $v_1 \perp v_2$ ) stets

$$\|\pi_1(v)\|^2 \leq \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = \|v_1 + v_2\|^2 = \|v\|^2$$

erfüllt. Es gilt also  $\|\pi_1\| \leq 1$ . Analog gilt natürlich  $\|\pi_2\| \leq 1$ . Tatsächlich gilt sogar

$$\|\pi_1\| = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } V_1 = \{0_V\} \\ 1 & , \text{ falls } V_1 \neq \{0_V\}, \end{cases}$$

wie Sie schnell prüfen.

Die Erkenntnisse des letzten Abschnitts erlauben uns eine weitere Charakterisierung von Projektionen.

**Satz 4.16.** Der Operator  $P \in \mathcal{L}(V)$  ist genau dann eine Projektion  $\pi_1$  auf einen Unterhilbertraum  $V_1$  von  $V$ , wenn er selbstadjungiert ist und  $P^2 = P$  erfüllt. In diesem Fall ist  $V_1 = P(V)$ .

*Beweis.* Wir zeigen die Richtung “ $\Leftarrow$ ”, die andere Richtung ist eine Übung. Wir setzen also  $V_1 := P(V)$ . Da  $P$  stetig ist, ist  $V_1$  ein abgeschlossener linearer Teilraum von  $V$ , also ist  $V = V_1 + V_1^\perp$ . Wir haben noch zu zeigen, dass  $P = \pi_1$  ist. Sei also  $v = v_1 + v_2 \in V$  beliebig mit  $v_1 \in V_1, v_2 \in V_1^\perp$ . Dann ist  $P(Pv) = Pv \in P(V)$  (wegen  $P^2 = P$ ). Wir haben noch zu zeigen, dass  $v - Pv \in V_1^\perp$  ist. Zu gegebenem  $w \in V_1$  finden wir ein  $u \in V$  mit  $Pu = w$ , also  $Pw = P^2u = Pu = w$ . Damit berechnen wir:

$$\langle v - Pv | w \rangle = \langle v | w \rangle - \langle Pv | w \rangle \stackrel{P=P^*}{=} \langle v | w \rangle - \langle v | Pw \rangle = \langle v | w \rangle - \langle v | w \rangle = 0,$$

also  $(v - Pv) \perp w$  für alle  $w \in V_1$ . Damit sind  $Pv \in V_1$  und  $v - Pv \in V_1^\perp$ , also wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung:  $Pv = v_1 = \pi_1 v$ . Da  $v$  beliebig war, folgt  $P = \pi_1$ . □

Orthogonale Projektionen sind sehr spezielle Operatoren. Für viele Klassen von Operatoren hatten wir uns überzeugt, dass sie Untervektorräume von  $\text{End}(V) = \text{Hom}(V, V)$  oder sogar Teilalgebren von  $\mathcal{L}(V)$  handelt. Für Projektionen ist es etwas komplizierter.

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

**Lemma 4.17.** Für die Projektionen  $\pi_i$  auf  $V_i \subset V$ ,  $i = 1, 2$ , sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $\pi_1 + \pi_2$  ist eine Projektion
- (ii)  $\pi_1\pi_2 = 0 = \pi_2\pi_1$
- (iii)  $V_1 \perp V_2$

In diesem Fall projiziert  $\pi_1 + \pi_2$  auf  $V_1 \oplus V_2$ .

*Beweis.* Wir zeigen (i)  $\implies$  (ii), der Rest verbleibt als Übung. Ist also  $\pi_1 + \pi_2$  eine Projektion. Dann gilt

$$\begin{aligned}\pi_1 + \pi_2 &= (\pi_1 + \pi_2)^2 = \pi_1^2 + \pi_1\pi_2 + \pi_2\pi_1 + \pi_2^2 = \pi_1 + \pi_1\pi_2 + \pi_2\pi_1 + \pi_2, \\ 0 &= \pi_1\pi_2 + \pi_2\pi_1,\end{aligned}\tag{4.2}$$

wobei wohlgermerkt 0 den Nulloperator in  $\mathcal{L}(V)$  bezeichnet. Multiplizieren wir (4.2) einmal von links und einmal von rechts mit  $\pi_1$ , so erhalten wir unter Verwendung von  $\pi_1^2 = \pi_1$ :

$$\pi_1\pi_2 + \pi_1\pi_2\pi_1 = 0 = \pi_1\pi_2\pi_1 + \pi_2\pi_1,$$

also  $\pi_1\pi_2 - \pi_2\pi_1 = 0$ , was zusammen mit (4.2)  $\pi_1\pi_2 = 0 = \pi_2\pi_1$  ergibt.  $\square$

Insbesondere erkennen wir, dass  $\pi_1 + \pi_2 = \text{id}_V$  gilt, wenn  $V_2 = V_1^\perp$  gilt.

Nun sollte man meinen, dass das Produkt (d.h., die Komposition) zweier Projektionen wieder eine Projektion ist. Wir können das sicherstellen, wenn es bei der Komposition nicht auf die Reihenfolge ankommt.

**Lemma 4.18.** Sind  $\pi_i$  Projektionen auf  $V_i \subset V$ ,  $i = 1, 2$ , so ist  $\pi_1\pi_2$  genau dann eine Projektion, wenn  $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1$  ist. In diesem Fall ist  $\pi_1\pi_2$  die Projektion auf  $V_1 \cap V_2$ .

*Beweis.* Übung.  $\square$

Wir hatten bereits im Beweis der vorherigen Lemmas die Gleichung  $\pi_1\pi_2 - \pi_2\pi_1 = 0$  gesehen. Das drücken wir oft mittels folgender Definition aus.

**Definition 4.19.** Sind  $F, G \in \mathcal{L}(V)$  für einen Banachraum  $V$ , so nennen wir

$$[F, G] := FG - GF \in \mathcal{L}(V)$$

den Kommutator von  $F$  und  $G$ . Wir sagen,  $F$  und  $G$  kommutieren, wenn  $[F, G] = 0$  gilt.

Als selbstadjungierte Operatoren können wir Projektionen gemäß Definition 4.9 (halb) ordnen. Wir können sogar eine erstaunlich lange Liste von Charaktarisierungen dafür angeben. Den Beweis überlassen wir als Übung.

**Lemma 4.20.** Für Projektionen  $\pi_i$  auf  $V_i \subset V$ ,  $i = 1, 2$ , sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i)  $\pi_1 \leq \pi_2$
- (ii)  $\pi_2 \pi_1 = \pi_1$
- (iii)  $\pi_1 \pi_2 = \pi_1$
- (iv)  $\pi_2 - \pi_1$  ist Projektion<sup>a</sup>
- (v)  $V_1 \subset V_2$
- (vi)  $\|\pi_1 v\| \leq \|\pi_2 v\|$  für alle  $v \in V$ .

---

<sup>a</sup>Auf  $V_1^\perp$  in  $V_2$ , also  $V_1^\perp \cap V_2$

*Beweis.* Viele der Äquivalenzen lassen sich schnell nachrechnen. Zum Beispiel können Sie den Beweis von (iii)  $\iff$  (iv) ganz analog zu dem von Lemma 4.17 führen.  $\square$

Insbesondere entspricht die Halbordnung der Projektionen der durch Mengeninklusion gegebenen Halbordnung auf den entsprechenden (abgeschlossenen) Teilräumen, auf die projiziert wird. Wie wir bereits gesehen haben, überträgt sich sogar der Durchschnitt von Teilräumen als Multiplikation auf die entsprechenden Projektionen.

### 4.3. Schwache Konvergenz

Wir betrachten zunächst wieder einen allgemeinen Banachraum  $(V, \|\cdot\|_V)$  und dazu den Dualraum  $(V', \|\cdot\|_{V'})$ . Wir kennen schon einen Konvergenzbegriff in  $V$ , nämlich den der Normkonvergenz:  $v_n \rightarrow v \iff \|v_n - v\|_V \rightarrow 0$ . Das ist die Konvergenz in der durch  $\|\cdot\|_V$  induzierten Topologie. Nun definieren wir einen zweiten Konvergenzbegriff.

**Definition 4.21.** Die Folge  $(v_n)_n$  konvergiert schwach gegen  $v$  im normierten linearen Raum  $V$ , geschrieben

$$v_n \rightharpoonup v \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \text{oder} \quad \text{w-}\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v,$$

falls  $\phi(v_n) \rightarrow \phi(v)$  für alle  $\phi \in V'$  gilt.

Ist  $V$  ein Hilbertraum, so stellen wir fest, dass genau dann  $v_n \rightharpoonup v$  gilt, wenn  $\langle w | v_n \rangle \rightarrow \langle w | v \rangle$  für alle  $w \in V$  gilt. Das kennen Sie schon von einer Übungsaufgabe.

**Bemerkung.** Wir rechnen schnell nach, dass jede Folge in  $V$  höchstens einen schwachen Grenzwert haben kann. Wären nämlich  $v, w$  zwei schwache Grenzwerte der Folge  $(v_n)_n$ , so folgte aus der Definition (und der Stetigkeit und Linearität von  $\phi$ )  $\phi(v - w)$  für alle  $\phi \in V'$  und daraus  $v - w = 0$ .

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

Aufgrund der Stetigkeit der Funktionale  $\phi \in V'$ , gegen die getestet wird, gilt natürlich stets  $v_n \rightarrow v \implies v_n \rightharpoonup v$ . Schwache Konvergenz ist also tatsächlich eine schwächere Bedingung als die bereits bekannte (Norm-)Konvergenz.

**Beispiel 62.** Ist  $V = \mathbb{K}^n$ , versehen mit einer der Normen  $\|\cdot\|_p$ , so ist jedes  $\phi \in V'$  durch ein  $y \in V$  via  $\phi(v) = \langle y|v \rangle$  (im Fall  $p \neq 2$  zu lesen als duale Paarung) gegeben. Schwache Konvergenz impliziert dann durch die Wahl der Standardeinheitsvektoren für  $y$  die komponentenweise Konvergenz, was aber schon der Normkonvergenz entspricht. Hier gibt es also keinen Unterschied zwischen schwacher und Normkonvergenz.

**Beispiel 63.** (vgl. Übungen, Blatt 5) Dass schwache Konvergenz im allgemeinen echt schwächer als die Normkonvergenz ist, zeigt das Beispiel eines separablen unendlichdimensionalen Hilbertraums  $V$ . Ist nämlich  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Orthonormalsystem (nicht notwendigerweise vollständig), so konvergiert für jedes  $y \in V$  die formale Fourierreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \langle v_n|y \rangle v_n$  gegen ein  $w \in V$ . Insbesondere ist also die Folge der Koeffizienten quadratisch summierbar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v_n|y \rangle|^2 \leq \|w\|^2 < \infty,$$

was  $\langle v_n|y \rangle \rightarrow 0$  erfordert. Also gilt  $v_n \rightharpoonup 0$  in  $V$ , aber wir haben schon diskutiert, dass  $(v_n)_n$  keine Cauchyfolge ist, also nicht bezüglich der Norm konvergieren kann. Man beachte auch, dass  $\|v_n\| = 1$  für alle  $n$  gilt, die  $v_n$  also sämtlich auf der (abgeschlossenen) Einheitskugel liegen, der schwache Grenzwert 0 hingegen nicht.

Auch das Konzept der Cauchyfolge hat eine schwache Entsprechung.

**Definition 4.22.** Die Folge  $(v_n)_n$  im Banachraum  $V$  heißt schwache Cauchyfolge, falls zu jedem  $\phi \in V'$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0$  derart existiert, dass  $|\phi(v_n) - \phi(v_m)| < \varepsilon$  für alle  $n, m \geq n_0$  gilt.

Wir verlangen also, dass alle  $(\phi(v_n))_n$  für jedes  $\phi \in V'$  eine Cauchyfolge und damit konvergent in  $\mathbb{K}$  ist. Wir haben aber nicht gefordert, dass die Grenzwerte  $\phi(v)$  für ein (möglicherweise gar von  $\phi$  unabhängiges)  $v \in V$  sein müssen.

Beachten Sie, dass  $n_0$  nicht nur von  $\varepsilon$ , sondern auch von  $\phi$  abhängen darf. Diese Abhängigkeit bleibt auch bestehen, wenn wir uns auf  $\|\phi\|_{V'} = 1$  beschränken.

Die folgenden Aussagen zur schwachen Konvergenz zeigen, dass es sich dabei einerseits um einen durchaus sinnvollen Konvergenzbegriff handelt, der aber noch eine aus dem endlichdimensionalen Fall bekannte Eigenschaft mitbringt, die wir für die starke Konvergenz verloren hatten.

**Satz 4.23.** Für eine Folge  $(v_n)_n$  in einem reflexiven Banachraum gelten folgende Aussagen:

- (i) Ist  $(v_n)_n$  schwach konvergent, so ist  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\| < \infty$  (schwach konvergente Folgen sind beschränkt).
- (ii) Ist  $(v_n)_n$  beschränkt, so existiert eine schwach konvergente Teilfolge.
- (iii) Ist  $(v_n)_n$  eine schwache Cauchyfolge, so existiert  $v := \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} v_n$ .

*Beweis. ad (i).* Diese Aussage gilt sogar, wenn  $V$  nicht reflexiv ist. Wir betrachten  $j_n := \iota(v_n) \in V''$  und  $j_\infty = \iota(v) \in V''$  mit  $v = \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} v_n$ , gegeben durch

$$j_n(\phi) = \phi(v_n), \quad j_\infty(\phi) = \phi(v) \quad \text{für } \phi \in V'.$$

Die Familie  $\{j_n\}$  stetiger linearer Funktionale auf  $V'$  ist wegen ihrer punktweisen Konvergenz

$$j_n(\phi) = \phi(v_n) \rightarrow \phi(v) = j_\infty(\phi)$$

punktweise (d.h., in jedem  $\phi \in V'$ ) beschränkt. Der Satz von Banach-Steinhaus besagt dann, dass die Familie auch gleichmäßig beschränkt ist:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\|j_n\|_{V''}}_{=\|v_n\|} < \infty.$$

**ad (ii).** Für  $V = \{0\}$  ist nichts zu zeigen, wir nehmen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit an,  $V$  sei nicht trivial und setzen  $c := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\| < \infty$ .

(I) Wir beginnen mit dem Fall eines separablen Raums  $V$ . Dann ist wegen der Reflexivität auch  $V'$  separabel, wir finden also eine abzählbare dichte Teilmenge  $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $V'$ . Wir konstruieren unsere gesuchte Teilfolge durch ein klassisches Diagonalverfahren.

Dazu finden wir im ersten Schritt eine konvergente Teilfolge der wegen

$$|\phi_1(v_n)| \leq \|\phi_1\|_{V'} c < \infty$$

beschränkten Folge  $(\alpha_n^{(1)})_n := (\phi_1(v_n))_n$  in  $\mathbb{K}$ . Um Indizes zu sparen, nennen wir die Teilfolge wieder  $(\alpha_n^{(1)})_n$  und bezeichnen ihren Grenzwert mit  $\alpha^{(1)}$ .

Für die so erhaltene Teilfolge betrachten wir nun  $\alpha_n^{(2)} := \phi_2(v_n)$ . Diese bilden wieder eine beschränkte Folge in  $\mathbb{K}$ , also existiert auch davon wieder eine Teilfolge, wieder bezeichnet mit  $(\alpha_n^{(2)})_n$ , die gegen ein  $\alpha^{(2)} \in \mathbb{K}$  konvergiert. Da es sich um eine Teilfolge der im ersten Schritt gefundenen Teilfolge handelt, ändert sich an der Konvergenz von  $(\phi_1(v_n))_n$  nichts. So verfahren wir weiter und finden sukzessive Teilfolgen  $(v_n)_n$  derart, dass für alle  $k$  die Folgen  $(\phi_k(v_n))_n$  gegen ein  $\alpha^{(k)}$  konvergieren.

(II) Für die so erhaltene Teilfolge  $(v_n)_n$  (immer noch beschränkt gegen  $c$ ) und beliebiges  $\phi \in V'$  finden wir nun zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\phi_k$  mit  $\|\phi_k - \phi\|_{V'} < \frac{\varepsilon}{3(c+1)}$  und dann ein  $n_0$  derart, dass  $|\phi_k(v_n) - \phi_k(v_m)| < \frac{\varepsilon}{3}$  für  $n, m \geq n_0$  gilt. Damit gilt für  $n, m \geq n_0$ :

$$\begin{aligned} |\phi(v_n) - \phi(v_m)| &\leq |\phi(v_n) - \phi_k(v_n)| + |\phi_k(v_n) - \phi_k(v_m)| + |\phi_k(v_m) - \phi(v_m)| \\ &\leq \|\phi - \phi_k\|_{V'} \|v_n\|_V + \frac{\varepsilon}{3} + \|\phi_k - \phi\|_{V'} \|v_m\|_V \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3(c+1)} c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(c+1)} c < \varepsilon \end{aligned}$$

gilt. Die  $\phi(v_n)$  bilden also eine Cauchyfolge in  $\mathbb{K}$ , deren Grenzwert wir  $y(\phi)$  nennen wollen. Sie überzeugen sich schnell, dass die Abbildung  $\phi \mapsto y(\phi)$  linear ist. Außerdem ist sie wegen  $\phi(v_n) \rightarrow y(\phi)$  beschränkt:

$$|y(\phi)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\phi(v_n)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\| \|\phi\|_{V'} \leq c \|\phi\|_{V'},$$

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

wir haben also ein  $y \in V''$  derart gefunden, dass für alle  $\phi \in V'$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(v_n) = y(\phi).$$

Da  $V$  reflexiv ist, wird  $y$  durch ein eindeutiges  $v \in V$  dargestellt:

$$y(\phi) = \phi(v) \quad \text{für alle } \phi \in V'.$$

Dieses ist nun der schwache Grenzwert der oben konstruierten Teilfolge  $(v_n)_n$ .

(III) Ist  $V$  nicht separabel, so betrachten wir den abgeschlossenen Unterraum  $\overline{\langle \{v_n\} \rangle}$  von  $V$ , der separabel ist, eine abzählbare Teilmenge wäre etwa

$$\left\{ \sum_{j=1}^k \alpha_j v_j : k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} \text{ algebraisch} \right\}.$$

Wir nennen diesen Unterraum  $W$ . Als abgeschlossener Unterraum des reflexiven Banachraums  $V$  ist auch  $W$  reflexiv<sup>2</sup>. Damit ist auch  $W'$  separabel (da sein Dualraum  $W'' \cong W$  separabel ist).

Nach (I) und (II), angewandt auf  $W$ , finden wir eine Teilfolge  $(v_n)_n$  und  $y \in W''$  (dargestellt durch ein  $v \in W$ ) derart, dass

$$\psi(v_n) \rightarrow y(\psi) = \psi(v) \quad \text{für alle } \psi \in W'$$

gilt. Wegen  $V' \subset W'$  (folgt aus  $W \subset V$  – warum?) gilt diese Aussage aber insbesondere für alle  $\phi \in V'$ , also ist die gefundene Teilfolge wieder schwach konvergent in  $V$ .

**ad (iii).** Wie im Beweis von (i) stellen wir fest, dass  $(v_n)_n$  beschränkt ist, also nach (ii) eine schwach konvergente Teilfolge enthält. Dank der Dreiecksungleichung konvergiert dann aber die ganze Folge schon schwach gegen den schwachen Grenzwert  $v$  dieser Teilfolge. Sind nämlich zu gegebenem  $\phi \in V'$  und  $\varepsilon > 0$  ein Element  $v_n$  der Teilfolge und ein  $v_m$  aus der ursprünglichen Folge beliebig mit hinreichend großen  $n, m$  (nach Definition einer schwachen Cauchyfolge und der Konvergenz der Teilfolge), so erhalten wir:

$$|\phi(v_m) - \phi(v)| \leq |\phi(v_m) - \phi(v_n)| + |\phi(v_n) - \phi(v)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Die Aussagen gelten natürlich insbesondere für Hilberträume, die von Natur aus reflexiv sind.

**Bemerkung.** Die zweite Aussage des Satzes besagt, dass zum Beispiel die abgeschlossene Einheitskugel in einem reflexiven Banachraum schwach folgenkompakt ist. Tatsächlich kann man nämlich dank der Trennungssätze (vgl. Satz 3.47) zeigen, dass der schwache Grenzwert einer schwach konvergenten Folge in der abgeschlossenen konvexen Hülle der

<sup>2</sup>siehe etwa Satz III.3.4 (a) bei Werner



Folgeglieder (der kleinsten abgeschlossenen konvexen Menge, die alle Folgeglieder enthält) liegt.

Tatsächlich gilt sogar, dass ein Banachraum  $V$  genau dann reflexiv ist, wenn die abgeschlossene Einheitskugel in  $V$  schwach folgenkompakt ist. Der Beweis der Umkehrung ist aber etwas aufwendiger<sup>3</sup>.

Schließlich erinnern wir noch daran, dass die Aussage,  $V'$  sei separabel, wenn  $V$  separabel ist, für nicht reflexive Räume keineswegs gelten muss. Als Beispiel sei  $\ell_1$  genannt, dessen Dualraum  $\ell_\infty$  nicht separabel ist.

Wir untersuchen nun die Konvergenz von Folgen von Operatoren in  $\mathcal{L}(V)$  auf einem Banachraum  $V$ . Die folgenden Konvergenzbegriffe drängen sich auf.

**Definition 4.24.** Für eine Folge  $(F_n)_n$  in  $\mathcal{L}(V)$  und ein  $F \in \mathcal{L}(V)$  sagen wir, die Folge konvergiere

- (i) gleichmäßig gegen  $F$ , geschrieben  $F_n \rightrightarrows F$ , falls  $\|F_n - F\| \rightarrow 0$ . Wir sprechen hier auch von Normkonvergenz.
- (ii) punktweise gegen  $F$ , geschrieben  $F_n \rightarrow F$ , falls  $\|F_n v - Fv\|_V \rightarrow 0$  für alle  $v \in V$ . In diesem Fall spricht man auch von starker Konvergenz oder schlicht Konvergenz.
- (iii) schwach gegen  $F$ , geschrieben  $F_n \rightharpoonup F$ , falls  $F_n v \rightharpoonup Fv$  für alle  $v \in V$ .

Ganz offensichtlich folgt schwache Konvergenz aus starker und diese wiederum aus gleichmäßiger. Überzeugen Sie sich davon, indem Sie die entsprechenden Abschätzungen sauber aufschreiben. Überzeugen Sie sich auch, dass in endlichdimensionalen Räumen keinerlei Unterschiede zwischen den verschiedenen Konvergenzbegriffen bestehen. Das ist der wesentliche Grund, warum diese Begriffe in der Analysis noch keine Rolle gespielt haben dürften.

**Bemerkung.** Eine kleine Warnung zur zugegebenermaßen etwas unübersichtlichen Terminologie: Man beachte, dass es sich um Operatoren von  $V$  in sich selbst handelt. Für Folgen  $(\phi_n)_n$  stetiger linearer Funktionale hat die punktweise Konvergenz  $|\phi_n(v) - \phi(v)| \rightarrow 0$  einen anderen Namen. Wir sprechen dann von schwach-\*-Konvergenz und schreiben  $\phi_n \xrightarrow{*} \phi$ .

Sie überzeugen sich, dass diese für reflexive Räume mit der schwachen Konvergenz übereinstimmt: Ob wir gegen alle  $v \in V$  oder gegen alle  $j(v) \in V'' \cong V$  testen, ist dann irrelevant. In nicht reflexiven Räumen ist die schwach-\*-Konvergenz aber noch schwächer als die schwache Konvergenz.

Für Folgen von Operatoren erhalten wir analog zu Satz 4.23 folgende Aussagen.

<sup>3</sup>siehe etwa Theorem 3.17 bei Brezis

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

**Satz 4.25.** Für eine Folge  $(F_n)_n$  beschränkter linearer Operatoren im Banachraum  $V$  gilt:

- (i) Ist  $(F_n)_n$  schwach konvergent, so ist  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|F_n\|_{\mathcal{L}(V)} < \infty$ .
- (ii) Ist umgekehrt  $(F_n)_n$  beschränkt in  $\mathcal{L}(V)$  (unter der Operatornorm), so existiert eine schwach konvergente Teilfolge.
- (iii) Ist zusätzlich  $V$  ein Hilbertraum und ist  $(\langle v|F_n w \rangle)_n$  für alle  $v, w \in V$  eine Cauchyfolge, so konvergiert die Folge  $(F_n)_n$  schwach gegen ein  $F \in \mathcal{L}(V)$ .

*Beweis.* Übung. □

Wir erinnern uns daran, dass monotone beschränkte Folgen reeller Zahlen stets einen Grenzwert hatten. Eine ähnliche Aussage erhalten wir monotone Folgen selbstadjungierter Operatoren in Hilberträumen. Dazu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung.

**Lemma 4.26.** Ist  $F$  ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum  $V$  und gilt  $F \geq 0$ , so folgt für alle  $v, w \in V$ :

$$|\langle v|Fw \rangle|^2 \leq \langle v|Fv \rangle \langle w|Fw \rangle.$$

*Beweis.* Nach Korollar 4.11 definiert  $(v|w) := \langle v|Fw \rangle$  ein Semiskalarprodukt auf  $V$ . Die Behauptung ist dann einfach die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für dieses Semiskalarprodukt  $(\cdot|\cdot)$ . □

**Satz 4.27.** Ist  $(F_n)_n$  eine beschränkte monoton wachsende Folge selbstadjungierter Operatoren im Hilbertraum  $V$ , d.h.  $F_n \leq F_{n+1}$  und  $F_n \leq G$  für alle  $n$  mit einem selbstadjungierten Operator  $G$ , dann existiert ein selbstadjungierter Operator  $F$  auf  $V$  derart, dass  $F_n \rightarrow F$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Beweis.* Aus der Beschränktheit der  $F_n$  gegen  $G$  folgt

$$c := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|F_n\| \leq \max\{\|G\|, \|F_1\|\} < \infty.$$

Für  $m > n$  ist  $F_m - F_n \geq 0$  ein selbstadjungierter Operator, für den nach dem Lemma für alle  $v, w \in V$

$$|\langle v|(F_m - F_n)w \rangle|^2 \leq \langle v|(F_m - F_n)v \rangle \langle w|(F_m - F_n)w \rangle \leq 2c\|v\|^2 \langle w|(F_m - F_n)w \rangle$$

gilt.

Speziell folgt zu beliebig gewähltem  $w \in V$  und für  $v = (F_m - F_n)w$ :

$$0 \leq \|(F_m - F_n)w\|^4 \leq 2c\|(F_m - F_n)w\|^2 \langle w|(F_m - F_n)w \rangle,$$

also

$$0 \leq \|(F_m - F_n)w\|^2 \leq 2c(\langle w|F_m w \rangle - \langle w|F_n w \rangle).$$

Die Folge  $(\langle w|F_n w\rangle)_n$  ist monoton wachsend und (gegen  $|\langle w|Gw\rangle|$ ) beschränkt. Sie konvergiert also in  $\mathbb{R}$  und ist insbesondere eine Cauchyfolge. Daher ist nach der Abschätzung auch  $(F_n w)_n$  eine Cauchyfolge im Hilbertraum  $V$ , die einen Grenzwert  $Fw := \lim_{n \rightarrow \infty} F_n w$  hat.

Da  $w \in V$  beliebig gewählt war, konvergiert die Folge  $(F_n)_n$  also punktweise. Nach Korollar 3.16 ist  $F$  sogar ein beschränkter linearer Operator, und da aus der punktweisen Konvergenz auch schwache folgt, gilt für alle  $v, w \in V$ :

$$\langle Fv|w\rangle \leftarrow \langle F_n v|w\rangle \stackrel{F_n \text{ selbstadj.}}{=} \langle v|F_n w\rangle \rightarrow \langle v|Fw\rangle,$$

tatsächlich ist  $F$  also auch selbstadjungiert. □

Der Beweis zeigt, dass wir statt der Beschränktheit der  $F_n$  gegen einen selbstadjungierten Operator  $G$  auch direkt  $\sup_n \|F_n\| < \infty$  hätten fordern können. Je nach Anwendung ist mal die eine, mal die andere Voraussetzung leichter zu überprüfen.

**Bemerkung.** Im letzten Schritt des Beweises haben wir noch unsere frühere Aussage,  $\mathcal{L}(V)_h$  sei eine **abgeschlossene** Unteralgebra von  $\mathcal{L}(V)$ , bewiesen. Der Schritt, der zeigte, dass aus  $F_n \rightarrow F$  mit selbstadjungierten  $F_1, F_2, \dots$  auch die Selbstadjungiertheit von  $F$  folgt, hing nämlich gar nicht mehr davon ab, dass die  $F_n$  eine monotone Folge bildeten.

## 4.4. Anwendung: Elliptische Randwertprobleme

Wir beginnen mit einer Folgerung aus dem Rieszschen Darstellungssatz 2.26, die als Satz von Lax und Milgram bekannt ist.

**Satz 4.28** (Lax-Milgram). Auf dem Hilbertraum  $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  sei die beschränkte Sesquilinearform  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  gegeben<sup>a</sup>. Ferner sei  $a$  koerziv, d.h., es existiere  $c > 0$  derart, dass

$$|a(v, v)| \geq c \|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in V$$

gilt.

Dann existiert zu jedem  $\phi \in V'$  genau ein  $u \in V$  derart, dass  $\phi = a(u, \cdot)$  gilt. Die Abbildung  $S : V' \rightarrow V$ ,  $\phi \mapsto u$ , ist bijektiv, konjugiert linear und stetig.

<sup>a</sup>d.h., für alle  $v \in V$  seien  $a(v, \cdot)$  linear und  $a(\cdot, v)$  konjugiert linear und es existiert  $C > 0$  derart, dass  $|a(v, w)| \leq C \|v\| \|w\|$ . Dafür genügt nach dem Lemma von Mazur-Orlicz bereits die partielle Stetigkeit.

Die kurze Version dieser Aussage (im Fall einer symmetrischen Form  $a$ ) ist: Wir nutzen den Rieszschen Darstellungssatz für den Hilbertraum  $(V, a(\cdot, \cdot))$  und beachten, dass die Skalarprodukte  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  und  $a(\cdot, \cdot)$  äquivalente Normen auf  $V$  erzeugen, also unter beiden genau die gleichen linearen Funktionale stetig sind. Der erste Schritt des Beweises vollzieht also den Beweis des Darstellungssatzes nach.

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

*Beweis.* Da  $a(v, \cdot) \in V'$  für alle  $v \in V$ , finden wir nach dem Darstellungssatz genau ein  $\tilde{v} \in V$  mit  $a(v, \cdot) = \langle \tilde{v} | \cdot \rangle$ . Sie überzeugen sich schnell durch direktes Nachrechnen, dass  $F : V \rightarrow V$ ,  $v \mapsto \tilde{v} =: Fv$ , ein beschränkter linearer Operator mit  $\|F\| \leq C$  ist. Da wegen der Koerzivität auch  $\|Fv\|_V \geq c\|v\|_V$  für alle  $v \in V$  gilt, ist  $F$  injektiv.

Außerdem ist  $F$  nach Lemma 3.30 abgeschlossen, bildet also auf einen abgeschlossenen Unterraum  $W$  von  $V$  ab. Für die Surjektivität (also  $W = V$ ) müssen wir nur noch zeigen, dass  $W^\perp = \{0\}$  ist. Sei also  $w \in W^\perp$ , also

$$0 = \langle Fv | w \rangle = a(v, w) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Insbesondere ist dann für  $v = w$

$$0 = |a(w, w)| \geq c\|w\|^2, \quad \text{also } w = 0.$$

Wir haben also einen bijektiven stetigen Operator  $F : V \rightarrow V$ , dessen Inverse  $F^{-1} : V \rightarrow V$  nach Korollar 3.24 ebenfalls stetig ist.

Da nun aber jedes  $\phi \in V'$  als  $\langle \tilde{u} | \cdot \rangle$  mit einem  $\tilde{u} \in V$  dargestellt werden kann, liefert  $u = F^{-1}(\tilde{u})$  das gesuchte Element.

Als Komposition der konjugiert linearen (isometrischen) Bijektion  $J^{-1}\phi \mapsto \tilde{u}$  und der stetigen linearen Bijektion  $F^{-1}$  ist  $\phi \mapsto u$  also bijektiv, konjugiert linear und stetig.  $\square$

**Bemerkung.** Ist die Sesquilinearform  $a$  zusätzlich (konjugiert) symmetrisch, so ist der Operator  $F$  sogar selbstadjungiert, und das  $\phi$  in  $a$  darstellende Element  $u$  ist die Lösung des Minimierungsproblems

$$u = \operatorname{argmin}_{v \in H} \left( \frac{1}{2} a(v, v) - \phi(v) \right)$$

Um die störenden komplexen Konjugationen zu vermeiden, stellen wir die folgenden Überlegungen für reelle Hilberträume (also  $V \cong V'$ ) an. Ist dann nämlich ein stetiger linearer Operator  $A : V \rightarrow V \cong V'$  (also  $A \in \mathcal{L}(V, V') \cong \mathcal{L}(V)$ ) derart gegeben, dass ein  $c > 0$  mit  $\|Av\|_V \geq c\|v\|$  für alle  $v \in V$  gilt, so liefert  $a(v, w) := (Av)(w)$  eine koerzive, beschränkte Bilinearform wie im Satz verlangt. Für jedes  $\phi \in V'$  ist dann also die Gleichung  $Au = \phi$  äquivalent zu  $a(u, \cdot) = \phi$  und damit eindeutig lösbar. Und noch dazu ist der Lösungsoperator  $A^{-1} : V' \rightarrow V$  stetig und linear. Das Problem  $Au = \phi$  ist also wohlgestellt.

Im Hilbertraum identifiziert man nun das Funktional  $\phi$  mit dem es darstellenden Element  $v$  und spricht von der Lösung der Gleichung  $Au = v$ .

**Bemerkung.** Ist  $A : V \rightarrow V$  ein linearer Operator auf dem Hilbertraum  $V$ , so lautet zu gegebenem  $v \in V$  die schwache Formulierung der Gleichung  $Au = v$ :

$$\text{Finde } u \in V \text{ derart, dass } \langle Au | w \rangle = \langle v | w \rangle \quad \text{für alle } w \in V \text{ gilt.}$$

Das ganze funktioniert auch für  $A \in L(V)$  mit Definitionsbereich  $\mathcal{D}_A \subsetneq V$ :

$$\text{Finde } u \in \mathcal{D}_A \text{ derart, dass } \langle Au | w \rangle = \langle v | w \rangle \quad \text{für alle } w \in V \text{ gilt.}$$

#### 4.4. Anwendung: Elliptische Randwertprobleme

Dass hier die Bezeichnung schwach vorkommt, ist nicht überraschend: Wir untersuchen die Gleichheit  $Au = v$ , indem wir für alle (via  $w$  dargestellten) stetigen linearen Funktionale  $\phi$  testen, dass  $\phi(Au) = \phi(v)$  ist. Genau das haben wir bei der Definition der schwachen Konvergenz gemacht.

Im Sinne des oben erwähnten Minimierungsproblems gibt es (im reellen Hilbertraum  $V$ ) alternativ auch die Variationsform des Problems:

Finde  $u \in \mathcal{D}_A$ , welches  $\frac{1}{2} \langle Aw|w \rangle - \langle v|w \rangle$  über  $w \in \mathcal{D}_A$  minimiert.

Statt das Problem  $Au = v$  direkt zu lösen, betrachtet man oft die schwache Formulierung und testet die zu findende Lösung  $u$  gegen alle Testfunktionen  $w \in V$  – oder noch besser: nur gegen  $w \in W$  für einen dichten Teilraum  $W$  von  $V$  oder eine Orthonormalbasis  $W$ . Oft können wir uns dabei auf Teilräume/Basen besonders gut handhabbarer Funktionen beschränken und den Operator  $A$ , oder wenigstens Teile davon, durch Adjungieren auf die Testfunktionen abwälzen. Ist nämlich  $A = FG$ , so könnten wir alternativ zu  $Au = v$  das schwache Problem

Finde  $u \in V$  derart, dass  $\langle Gu|F^*w \rangle = \langle v|w \rangle$  für alle  $w \in W$  gilt.

lösen.

Dieser Vorteil wird noch größer, wenn  $A$  unbeschränkt ist. Wir können dann nämlich Lösungen in einer größeren Menge suchen, denn es ist  $\mathcal{D}_A \subset \mathcal{D}_G$ , wobei die Inklusion oft echt ist. Wir suchen zu  $F$  den adjungierten Operator – also im Fall  $\mathcal{D}_F \neq V$  insbesondere  $\mathcal{D}_{F^*}$  – und betrachten das schwache Problem

Finde  $u \in \mathcal{D}_G$  derart, dass  $\langle Gu|F^*w \rangle = \langle v|w \rangle$  für alle  $w \in \mathcal{D}_{F^*}$  gilt.

Liegt  $\mathcal{D}_{F^*}$  dicht in  $V$ , dann ist das ebenso gut wie das Testen gegen beliebige  $w \in V$ . Gelegentlich finden wir auf diesem Weg in  $\mathcal{D}_G$  eine (schwache) Lösung<sup>4</sup>, die gar nicht in  $\mathcal{D}_A$  liegt, also keine Lösung des starken Problems  $Au = v$  sein kann. Wir haben also einen Lösbarkeitsbegriff, der die starke Lösbarkeit echt erweitert (man sieht sofort, dass eine starke Lösung stets auch eine schwache ist).

**Beispiel 64.** Im Fall  $V = \mathbb{R}^n$  lösen wir das Problem  $Ax = b$  für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  derart, dass mit einem festen  $c > 0$   $\|Av\| \geq c\|v\|$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  gilt, indem wir ein  $x$  derart suchen, dass für alle  $y \in \mathbb{R}^n$

$$x^T A^T y = \langle Ax|y \rangle = \langle b|y \rangle = b^T y$$

erfüllt ist.

In diesem Fall genügt es, die Standardeinheitsvektoren für  $y$  einzusetzen, was die  $n$  Gleichungen

$$x^T A_j = b_j, \quad j = 1, \dots, n$$

<sup>4</sup>Genauer können wir die Existenz und in gewissem Sinn Eindeutigkeit einer solchen Lösung zeigen. Explizit angeben können wir sie selten.

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

liefert, wobei  $A_j$  die als Spalte geschriebene  $j$ -te Zeile von  $A$  ist. Diese  $n$  Gleichungen ergeben das klassische zu  $A$  und  $b$  gehörende lineare Gleichungssystem. Den Trick mit einer Zerlegung  $A = LR$  nutzen viele bekannte Lösungsmethoden, deren Namen schon darauf hinweisen (z.B. Cholesky-Zerlegung). Adjungieren im  $\mathbb{R}^n$  entspricht natürlich einfach dem Transponieren der betroffenen Matrix.

### Schwache Ableitungen und Sobolevräume

Viele der Aussagen dieses Kapitels werden wir nur formulieren ohne sie zu beweisen. Die Beweise finden Sie zum Beispiel im Buch von Brezis in den Kapiteln 8 und 9.

Das Abwälzen (von Teilen) des Operators  $A$  auf Testfunktionen hat sich besonders für Ableitungsoperatoren als hilfreich erwiesen. Das führt zum Konzept der schwachen Ableitung. Die Idee dürfte Ihnen nicht neu sein. Erinnern Sie sich daran, dass wir für differenzierbare Funktionen  $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die folgende Formel für die partielle Integration bewiesen hatten:

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = u(t)v(t) \Big|_{t=a}^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

Die Ableitung  $u'$  von  $u$  ist also dadurch charakterisiert, dass sie diese Gleichung für alle differenzierbaren  $v$  erfüllt. Um die störenden Randterme nicht dabei zu haben, testen wir nur gegen solche  $v$ , die in  $a$  und  $b$  verschwinden. Ferner können wir uns nach einem Dichtheitsargument analog zum Satz von Stone-Weierstraß (glatte Funktionen liegen dicht in allen  $L_p(\Omega)$ -Räumen für  $p < \infty$ ) auf beliebig oft differenzierbare Funktionen  $v$  beschränken. Und schließlich verstärken wir die Bedingung,  $v$  möge am Rand des Intervalls verschwinden, noch dadurch, dass wir fordern, es möge höchstens auf einem kompakten Teilintervall  $[c, d] \subset (a, b)$  von Null verschieden sein.

Weiterhin beschränken wir uns der Einfachheit halber auf reellwertige Funktionen, betrachten aber nun statt des Intervalls  $(a, b)$  offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  als Definitionsbereich. Erinnern Sie sich daran, dass für eine Funktion  $f$  auf einer beliebigen Menge  $A$  (in einem topologischen Raum) der Träger

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in A : f(x) \neq 0\}}$$

als Abschluss jener Menge definiert ist, auf der  $f$  nicht verschwindet<sup>5</sup>.

**Definition 4.29.** Für die offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  bezeichnen wir mit  $C_c^\infty(\Omega)$  den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger  $K \subset \Omega$ :

$$C_c^\infty(\Omega) := \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } v \subset \Omega \text{ kompakt}\}.$$

Wir bezeichnen  $C_c^\infty(\Omega)$  als Raum der Testfunktionen auf  $\Omega$ .

Man beachte, dass  $\text{supp } v \subset \Omega$  kompakt insbesondere bedeutet, dass jeder Punkt im Träger von  $v$  positiven Abstand zu  $\partial\Omega$  hat, da  $\Omega$  offen ist. Das ist wichtig, denn wir wollen

<sup>5</sup>Das  $\text{supp}$  steht für *support*. Oft finden Sie stattdessen auch die Abkürzung  $\text{spt}$ .

#### 4.4. Anwendung: Elliptische Randwertprobleme

am Rand von  $\Omega$  einen Bereich haben, in dem  $v$  verschwindet. Will man Testfunktionen auf nicht notwendigerweise offenen Definitionsbereichen  $\Omega$  definieren, so verlangt man, dass  $\text{supp } v$  eine kompakte Menge im Inneren von  $\Omega$  ist.

Üblicherweise werden Testfunktionen mit  $\varphi$  bezeichnet, daran werden wir uns auch halten.

Sie überzeugen sich schnell, dass  $C_c^\infty(\Omega)$  ein Vektorraum ist. Allerdings wird es schwer, diesen Raum mit einer sinnvollen Norm zu versehen, wenn man auch nur annähernd Hoffnung auf Vollständigkeit haben möchte. Selbstverständlich ist zwar jede  $L_p(\Omega)$ -Norm auch eine solche auf  $C_c^\infty(\Omega)$ , denn  $C_c^\infty(\Omega) \subset L_p(\Omega)$  für alle  $p \in [1, \infty]$ , aber ebenso selbstverständlich ist  $C_c^\infty(\Omega)$  unter keiner dieser Normen vollständig.

Stattdessen definiert man ein System von Halbnormen  $p_{K,m}$  auf  $C_c^\infty(\Omega)$  durch

$$p_{K,m}(\varphi) := \sum_{0 \leq |a| \leq m} \sup_{x \in K} |D^a \varphi|,$$

wobei  $K \subset \Omega$  eine beliebige kompakte Menge,  $m \in \mathbb{N}_0$  eine beliebige Ableitungsordnung und  $a \in \mathbb{N}_0^d$  ein Multiindex der Länge  $|a| \leq m$  sind. Wir summieren also die  $C^0(K)$ -Normen aller Ableitungen von  $\varphi$  bis zur Ordnung  $m$  auf.

Wir definieren dann Konvergenz, indem wir sagen

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \quad : \Longleftrightarrow \quad p_{K,m}(\varphi_n - \varphi) \rightarrow 0 \quad \text{für alle } K, m.$$

Mit  $\mathcal{D}(\Omega)$  bezeichnen wir also den Raum  $C_c^\infty(\Omega)$  der Testfunktionen, versehen mit diesem Konvergenzbegriff.

Da wir dank der  $\sigma$ -Kompaktheit von  $\mathbb{R}^d$  jede offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  durch eine aufsteigende Folge kompakter Mengen ausschöpfen können, genügen uns sogar abzählbar viele solcher Halbnormen. Ferner wird  $\mathcal{D}(\Omega)$  auf diese Art zum topologischen Vektorraum. Vereinfacht gesagt, bedeutet das, dass die Vektorraumoperationen (punktweise Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen) (folgen-)stetig sind.

**Fakt 4.30.** Gilt für  $v \in L_1^{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R})^a$  ( $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  offen)

$$\int_{\Omega} v \varphi \, dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

so gilt  $v = 0$  fast überall, sofern der Rand  $\partial\Omega$  eine Lebesgue-Nullmenge ist.

<sup>a</sup>der Raum der lokal integrierbaren Funktionen auf  $\Omega$ , also  $v|_K \in L_1(K)$  für jede kompakte Menge  $K \subset \Omega$ . Für allgemeines (lediglich messbares)  $\Omega$  fordert man die Integrierbarkeit über jede kompakt in  $\Omega$  enthaltene offene Menge  $U$ .

Der Beweis ist maßtheoretischer Natur und wird hier nicht geführt.

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

**Definition 4.31.** Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein Gebiet<sup>a</sup>, so sagen wir für  $v \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$  und  $a \in \mathbb{N}_0^d$ ,  $v$  habe auf  $\Omega$  die schwache Ableitung  $w = D^a v \in L_1^{\text{loc}}(\Omega)$ , falls für alle  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} w \varphi \, dx = (-1)^{|a|} \int_{\Omega} v D^a \varphi \, dx$$

gilt.

<sup>a</sup>also offen und mit hinreichend regulärem Rand

**Beispiel 65.** Ist  $v : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$   $k$  Mal differenzierbar, so ist die  $k$ -te schwache Ableitung von  $v$  gerade die  $k$ -te Ableitung von  $v$ , denn für alle  $\varphi \in C_c^\infty((a, b))$  gilt dank  $k$ -maliger partieller Integration (mit verschwindenden Randtermen):

$$\int_a^b v^{(k)}(t) \varphi(t) \, dt = (-1)^k \int_a^b v(t) \varphi^{(k)}(t) \, dt.$$

Eine analoge Aussage gilt auch für höhere Raumdimensionen, eine  $k$  Mal differenzierbare Funktion hat also auch schwache Ableitungen bis zur Ordnung  $k$ , und diese stimmen (fast überall, also in  $L_1^{\text{loc}}$ ) mit den klassischen Ableitungen überein. Tatsächlich gibt es aber Funktionen, die keine klassischen, aber sehr wohl schwache Ableitungen haben.

**Beispiel 66.** Die durch  $v(t) = |t|$  gegebene Funktion  $v \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R})$  hat die schwache Ableitung  $s = \mathbf{1}_{(0, \infty)} - \mathbf{1}_{(-\infty, 0)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben durch

$$\Theta(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } t < 0, \\ 0 & \text{für } t = 0, \\ 1 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Es handelt sich natürlich um die Ihnen wohlbekannte Vorzeichenfunktion.

Tatsächlich ist für  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  mit Träger  $K \subset [a, b]$  nämlich im Fall  $a > 0$ :

$$\int_{\mathbb{R}} s \varphi \, dt = \int_a^b 1 \varphi \, dt = \underbrace{(b \varphi(b))}_{=0} - \underbrace{(a \varphi(a))}_{=0} - \int_a^b t \varphi' \, dt = - \int_{\mathbb{R}} v \varphi' \, dt.$$

Analog behandeln wir den Fall  $b < 0$ . Ist nun  $a < 0 < b$ , so spalten wir das Integral kurzerhand auf:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} s \varphi \, dt &= \int_a^0 -1 \varphi \, dt + \int_0^b 1 \varphi \, dt \\ &= (-0 \varphi(0) + a \varphi(a)) - \int_a^0 -t \varphi' \, dt + (b \varphi(b) - 0 \varphi(0)) - \int_0^b t \varphi' \, dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} v \varphi' \, dt. \end{aligned}$$



Allgemeiner seien  $\Omega_1, \dots, \Omega_n \subset \Omega$  glatt berandet und paarweise disjunkt derart, dass  $\Omega \subset \bar{\Omega}_1 \cup \dots \cup \bar{\Omega}_n$ . Ist  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit hinreichendem Stetigkeitsmodul (in einer Raumdimension genügt etwa Lipschitz-Stetigkeit) und eingeschränkt auf jedes  $\bar{\Omega}_k$  stetig differenzierbar, so ist  $v$  schwach differenzierbar in  $\Omega$ , und die Ableitungen stimmen auf  $\Omega_k$  mit den klassischen Ableitungen der Einschränkungen  $v|_{\bar{\Omega}_k}$  überein.

Die üblichen Rechenregeln für Ableitungen gelten für schwache Ableitungen erfreulicherweise weiter. Insbesondere gibt es schwache Versionen der Kettenregel und der Leibnizschen Produktregel. Ferner überzeugen Sie sich, dass die schwache Ableitung  $D^{a+b}v$  von  $v$  existiert, wenn die schwache Ableitung  $w := D^b v$  existiert und eine schwache Ableitung  $D^a w$  hat, und dass in diesem Fall  $D^{a+b}v = D^a(D^b w)$  ist.

Umgekehrt kann es (im Fall  $d \geq 2$ ) aber vorkommen, dass eine Funktion schwache Ableitungen höherer Ordnung besitzt, ohne dass alle Ableitungen niedrigerer Ordnung existieren. So finden Sie etwa schnell Beispiele  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass  $D^{(1,1)}u$  existiert, aber weder  $D^{(1,0)}u$  noch  $D^{(0,1)}u$ .

Selbstverständlich hat aber nicht jede Funktion eine schwache Ableitung.

**Beispiel 67.** Für die im letzten Beispiel gefundene Vorzeichenfunktion  $s$  finden wir hingegen keine Funktion als schwache Ableitung, denn für alle  $\varphi \in C_c^\infty$  ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$-\int_{\mathbb{R}} s\varphi' dt = -\int_a^0 -\varphi' dt - \int_0^b \varphi' dt = (\varphi(0) - \varphi(a)) - (\varphi(b) - \varphi(0)) = 2\varphi(0).$$

Das lässt sich aber nicht als Integral  $\int_{\mathbb{R}} w\varphi dt$  für eine Funktion  $w$  schreiben. Tatsächlich handelt es sich um die Dirac-Distribution

$$s'(\varphi) = 2\delta_0(\varphi) = 2\varphi(0),$$

die ein bezüglich des oben erwähnten Halbnormensystems (folgen-)stetiges lineares Funktional auf  $\mathcal{D}(\Omega)$  darstellt. Man spricht auch von der distributiven Ableitung der Heaviside-Funktion, beachtet aber immer, dass es sich **nicht** um eine Funktion handelt.

Wieder haben wir den Effekt, dass es sich bei der distributiven um eine Verallgemeinerung der schwachen Ableitung handelt. Ist nämlich  $w$  die schwache Ableitung von  $v$ , so ist die distributive Ableitung von  $v$  durch das stetige lineare Funktional

$$\varphi \mapsto \int_{\Omega} w\varphi dx$$

gegeben. Allerdings lassen sich auf dem (im Vergleich zu  $L_2(\Omega)$  winzigen) Raum  $\mathcal{D}$  bei weitem nicht alle stetigen linearen Funktionalen durch ein  $L_2$ -Skalarprodukt darstellen. Es gibt also viel mehr potentielle distributive Ableitungen (in Form stetiger linearer Funktionalen auf  $\mathcal{D}(\Omega)$ ) als mögliche schwache Ableitungen (in Form lokal integrierbarer Funktionen). Tatsächlich können Sie das Spiel mit höheren Ableitungen der Betrags- und damit auch der Vorzeichenfunktion weiter spielen. Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist nämlich

$$-\int_{\mathbb{R}} s\varphi^{(k)} dt = -\int_a^0 -\varphi^{(k)} dt - \int_0^b \varphi^{(k)} dt = 2\varphi^{(k-1)}(0).$$

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

Die distributive  $k$ -te Ableitung der Heaviside-Funktion (und damit die  $(k+1)$ -te Ableitung der Betragsfunktion) ist also das Funktional  $2\delta_0^{(k-1)} : \varphi \mapsto \varphi^{(k-1)}(0)$ .

Unter Verwendung der schwachen Ableitungen können wir nun Sobolevräume definieren. Dazu beachten wir, dass für jede offene (tatsächlich jede messbare) Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  und jedes  $p \in [1, \infty]$  die Räume  $L_p(\Omega)$  in  $L_1^{\text{loc}}(\Omega)$  enthalten sind. Es ergibt also Sinn, die Frage nach schwachen Ableitungen für beliebige  $L_p$ -Funktionen zu stellen

**Definition 4.32.** Für die offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $p \in [1, \infty]$  und  $m \in \mathbb{N}$  definieren wir den Sobolevraum  $W_p^m(\Omega)$  durch:

$$W_p^m(\Omega) := \{v \in L_p(\Omega) : D^a v \in L_p(\Omega) \text{ für } |a| \leq m\},$$

wobei  $D^a v$  die schwache Ableitung von  $v$  zum Multiindex  $a$  ist.

Wir schreiben kurz  $H^m(\Omega) := W_2^m(\Omega)$ .

Man beachte, dass wir insbesondere die Existenz der schwachen Ableitungen bis zur Ordnung  $m$  gefordert haben.

**Beispiel 68.** Die Betragsfunktion  $v$ , gegeben durch  $v(t) = |t|$ , gehört nach unserem obigen Beispiel zu  $W_p^1((a, b))$  für jedes beschränkte Intervall  $(a, b)$ , aber nicht zu  $W_p^1((-\infty, b))$  oder  $W_p^1((a, \infty))$ .

Insbesondere gilt  $v \notin W_\infty^1(\mathbb{R})$ , obwohl die schwache Ableitung  $s$  sehr wohl in  $L_\infty(\mathbb{R})$  liegt.

Wir können die Räume  $W_p^m$  mit Normen ausstatten, indem wir die  $L_p$ -Normen aller Ableitungen bis zur Ordnung  $m$  aufsummieren. Dass diese Normen zu vollständigen Räumen führen, zeigen wir hier nicht, sondern formulieren die Aussage nur. Sie dürfen sich als Übung gern von deren Richtigkeit überzeugen.

**Fakt 4.33.** Durch

$$\|v\|_{W_p^m} := \sum_{0 \leq |a| \leq m} \|D^a v\|_p$$

ist eine Norm auf  $W_p^m(\Omega)$  gegeben, unter der  $W_p^m(\Omega)$  zum Banachraum wird. Dieser ist für  $p < \infty$  separabel und für  $p \in (1, \infty)$  reflexiv.

In jedem Fall liegt  $C^\infty(\Omega) \cap W_p^m(\Omega)$  dicht in  $W_p^m(\Omega)$ .

**Bemerkung.** Für  $m = 1$  ist die Norm also durch

$$\|v\|_{W_p^1} = \|v\|_p + \sum_{i=1}^d \|\partial_i v\|_p$$

gegeben, wobei  $\partial_i$  die erste schwache Ableitung nach  $x_i$  bezeichnet.

Oft benutzt man die  $p$ -Kombination

$$|||v|||_{W_p^m} := \left( \sum_{0 \leq |a| \leq m} \|D^a v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

die eine zu  $\|\cdot\|_{W_p^m}$  äquivalente Norm  $|||\cdot|||_{W_p^m}$  liefert.

**Fakt 4.34.** Auf  $H^m(\Omega)$  definiert

$$\langle v|w \rangle := \sum_{0 \leq |a| \leq d} \int_{\Omega} D^a v(x) D^a w(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt, unter dem  $H^m(\Omega)$  zum separablen Hilbertraum wird.

Wir haben also die  $L_2$ -Skalarprodukte aufsummiert. Die dazu gehörige, zu  $\|\cdot\|_{W_2^1}$  äquivalente Norm bezeichnen wir mit  $\|\cdot\|_{H^1}$ .

## Elliptische Differentialgleichungen

Für partielle Differentialgleichungen betrachten wir typischerweise Randwertprobleme. Da unsere  $W_p^m$ -Funktionen streng genommen gar keine echten Funktionen, sondern Äquivalenzklassen fast überall übereinstimmender Funktionen sind, ergibt die Frage nach ihren Werten auf dem Rand  $\partial\Omega$  im allgemeinen wenig Sinn. Wenn wir nach Funktionen fragen, die zusammen mit ihren (schwachen) Ableitungen am Rand von  $\Omega$  verschwinden, haben wir aber schon eine große Klasse solcher, nämlich unsere glatten Funktionen mit kompaktem Träger. Das motiviert folgende Definition.

**Definition 4.35.** Mit  $\mathring{W}_p^1(\Omega)$  bezeichnen wir den Abschluss von  $C_c^\infty(\Omega)$  in  $W_p^1(\Omega)$ .

Dabei handelt es sich (als Abschluss eines beliebigen Unterraums im Banachraum  $W_p^1$ ) auch um einen Banachraum.

Die Elemente in  $\mathring{W}_p^1(\Omega)$  sind also jene  $W_p^1$ -Funktionen, die sich bezüglich der  $W_p^1$ -Norm beliebig gut durch  $C_c^\infty$ -Funktionen approximieren lassen. Wir finden also zu  $u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$  eine Folge  $(u_n)_n$  in  $C_c^\infty(\Omega)$  derart, dass  $\|u_n - u\|_{W_p^1} \rightarrow 0$  gilt.

**Lemma 4.36** (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung). Auf dem beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  gilt

$$\int_{\Omega} |v|^2 \, dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \quad \text{für alle } v \in \mathring{H}^1(\Omega),$$

wobei die Konstante  $C$  nur von  $\Omega$  abhängt.

Insbesondere definiert

$$\|v\|_{\mathring{H}^1} = \|\nabla v\|_{L_2(\Omega; \mathbb{R}^d)}$$

eine zu  $\|\cdot\|_{H^1}$  äquivalente Norm auf  $\mathring{H}^1(\Omega)$ .

*Beweis.* Übung. Tatsächlich genügt es sogar, wenn  $\Omega$  in einer Richtung beschränkt ist, also für ein  $L \geq 0$  einen Einheitsvektor  $\xi \in \mathbb{R}^d$  gilt:

$$|\xi^T x| \leq L \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$

□

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

**Bemerkung.** Die kleinste Konstante  $C$ , für die die Abschätzung des Lemmas gültig ist, wird als Poincaré-Konstante von  $\Omega$  bezeichnet.

Angewandt auf (lineare) partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung liefert diese Idee folgenden Ansatz.

Wir betrachten den linearen Differentialoperator  $L$ , gegeben durch

$$Lv := - \sum_{i,j=1}^d \partial_i(a_{i,j} \partial_j v) + \sum_{i=1}^d b_i \partial_i v + cv$$

zu vorgegebenen Funktionen  $a_{i,j}, b_i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Im einfachsten Fall ist dabei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und glatt berandet, die Koeffizientenfunktionen sind hinreichend glatt und zu geeigneten Potenzen integrierbar (z.B.  $a_{i,j}$  und  $b_i$  stetig differenzierbar mit beschränkten Ableitungen und  $c$  stetig und beschränkt auf  $\Omega$ ).

In der klassischen Theorie würden wir nun zum Dirichlet-Randwertproblem

$$Lu = f \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega \quad (\text{DS})$$

mit gegebenen  $f \in C^0(\bar{\Omega}), g \in C^2(\bar{\Omega})$  eine Funktion  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  suchen, die punktweise  $Lu(x) = f(x)$  in  $\Omega$  und  $u(x) = g(x)$  auf  $\partial\Omega$  erfüllt.

Als einfachsten Fall betrachten wir wieder den durch

$$Lv = -A\Delta v + c_0 v$$

gegebenen linearen Operator mit positiv definitem, symmetrischem  $A$  und  $c_0 \geq 0$ .

In der schwachen Formulierung suchen wir nun lediglich im Hilbertraum  $H^1(\Omega)$  nach einer Funktion  $u$  derart, die  $u - g \in \dot{H}^1(\Omega)$  und

$$\int_{\Omega} (\nabla u)^T A^T \nabla w + c_0 u w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx \quad \text{für alle } w \in \dot{H}^1(\Omega), \quad u \in \dot{H}^1(\Omega) \quad (\text{DW})$$

erfüllt. Dabei bezeichnet  $\nabla v = (\partial_1 v, \dots, \partial_d v)^T$  den schwachen Gradienten von  $v$ . Wir haben also schon einen Teil des Operators  $L_A$ , nämlich die Hälfte der Ableitungen, auf  $w$  abgewälzt. Man beachte, dass dabei durch die partielle Integration auch das negative Vorzeichen von  $-A\Delta u$  verschwunden ist.

Damit wir Lax-Milgram anwenden können, muss unsere Bilinearform

$$a(v, w) = \int_{\Omega} (\nabla v)^T A^T \nabla w + c_0 v w \, dx$$

stetig und koerziv sein. Die Stetigkeit ergibt sich für konstantes  $A$  und  $c_0$  automatisch aus der Stetigkeit des Skalarprodukts, aber für die Koerzivität müssen noch fordern, dass  $A$  positiv definit und  $c_0 \geq 0$  sind<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Genauer muss  $c_0 \geq C$  sein, wobei  $C \leq 0$  von  $A$  und  $\Omega$  abhängt. Mit  $c_0 \geq 0$  sind wir aber auf der sicheren Seite.

**Bemerkung.** Für variables  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  fordert man oft  $A \in L_\infty(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$  (damit  $a$  beschränkt ist) und gleichmäßige positive Definitheit, d.h., die Existenz eines  $\lambda_0 > 0$  derart, dass für alle  $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$\xi^T A(x) \xi \geq \lambda_0 \xi^T \xi \quad \text{für fast alle } x \in \Omega$$

gilt. Dies sichert die Koerzivität von  $a$  und wird je nach Quelle als starke oder gleichmäßige Elliptizität bezeichnet.

Schließlich definieren auf  $V = \dot{H}^1(\Omega)$  noch das stetige lineare Funktional  $\phi$  durch

$$\phi(v) := \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Nun passt unser Problem im homogenen Fall ( $g = 0$ ) in das Korsett des Satzes von Lax-Milgram, und wir erhalten den folgenden Satz.

**Satz 4.37.** Sind  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet,  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  positiv definit,  $c_0 \in [0, \infty)$  und  $f \in L_2(\Omega)$  beliebig gegeben, so hat das Problem

$$-A\Delta u + c_0 u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

genau eine schwache Lösung, d.h., es existiert genau ein  $u \in \dot{H}^1(\Omega)$  derart, dass für alle  $w \in \dot{H}^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (\nabla u)^T A^T \nabla w + c_0 u w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx$$

gilt.

Man beachte, dass wir nicht etwa  $f \in \dot{H}^1(\Omega)$  gefordert haben. Schließlich steht auf der rechten Seite ja auch nicht das  $H^1$ -Skalarprodukt von  $f$  mit  $w$ , sondern das  $L_2$ -Skalarprodukt. Tatsächlich lässt sich dadurch der Dualraum von  $\dot{H}^1(\Omega) \subsetneq L_2(\Omega)$  durch einen Raum  $H^{-1}(\Omega) \supsetneq L_2(\Omega) \cong L_2(\Omega)'$  darstellen. Tatsächlich hätten wir also sogar  $f \in H^{-1}(\Omega)$  erlauben können, haben uns aber hier die Mühe gespart, die Elemente dieses Raums zu charakterisieren.

Für ein inhomogenes Randwertproblem ( $u = g$  auf  $\partial\Omega$ ) suchen wir die Lösung  $u$  nicht im linearen Raum  $\dot{H}^1(\Omega)$ , sondern im affinen Raum

$$H_g^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u - g \in \dot{H}^1(\Omega)\}.$$

Um das Problem auf Lax-Milgram zurückzuführen, muss man noch etwas an den beteiligten Formen drehen. Zur Lösung  $u$  bei gegebenem  $g \in H^1(\Omega)$ <sup>7</sup> beachten wir, dass  $\tilde{u} = u - g \in \dot{H}^1(\Omega)$  das homogene Randwertproblem zur Gleichung

$$L\tilde{u} = f - Lg$$

<sup>7</sup>Oft wird  $g$  tatsächlich nur auf dem Rand von  $\Omega$  gegeben sein. Dann verlangt unser Vorgehen, dass  $g$  die sogenannte Spur einer Funktion  $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$  ist bzw. umgekehrt zu einer  $H^1(\Omega)$ -Funktion  $\tilde{g}$  fortgesetzt werden kann. Das Konzept der Spur- und Fortsetzungsoperatoren würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen, also gehen wir gleich davon aus, dass  $g \in H^1(\Omega)$  gegeben ist.

#### 4. Beschränkte lineare Operatoren in Banach- und Hilberträumen

lösen muss. Wir nutzen also wieder die gleiche Bilinearform  $a$  auf  $\mathring{H}^1(\Omega)$  wie zuvor und definieren als beschränktes lineares Funktional statt des einfachen Skalarprodukts mit  $f$

$$\phi(w) := \int_{\Omega} (f - c_0 g)w - (\nabla g)^T A \nabla w \, dx$$

und finden die eindeutige schwache Lösung  $\tilde{u}$ , aus der wir  $u = \tilde{u} + g$  als eindeutige schwache Lösung des inhomogenen Problems erhalten.

**Korollar 4.38.** Sind  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein beschränktes Gebiet,  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  positiv definit,  $c_0 \in [0, \infty)$ ,  $f \in L_2(\Omega)$  und  $g \in H^1(\Omega)$  beliebig gegeben, so hat das Problem

$$-A\Delta u + c_0 u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

genau eine schwache Lösung  $u \in H_g^1(\Omega)$ .

Man beachte, dass für diese (Dirichlet-)Randwertproblemen die Randbedingungen bei der schwachen Formulierung in den Räumen kodiert ist, in denen nach einer Lösung gesucht wird.

---

Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Operatoren

---

## 5.1. Kompakte und vollstetige Operatoren

Wir betrachten nun wieder allgemeine Banachräume.

**Definition 5.1.** Eine Abbildung  $K : V \rightarrow Y$  vom Banachraum  $V$  in den Banachraum  $Y$  heißt kompakt, wenn  $K$  beschränkte Teilmengen von  $V$  in relativ kompakte Teilmengen von  $Y$  abbildet:

$$\overline{\{K(v) : v \in A\}} \text{ kompakt in } Y, \text{ falls } A \subset V \text{ beschränkt.}$$

**Bemerkung.** Kompakte Abbildungen sind im allgemeinen mitnichten stetig. Tatsächlich ist jede Abbildung, die nur endlich viele Werte annehmen kann, kompakt, aber bezüglich der Normen auf  $V$  und  $Y$  nicht stetig, wenn es mindestens zwei Werte sind. In der Regel interessiert man sich daher für stetige kompakte Abbildungen.

**Definition 5.2.** Eine Abbildung  $F : V \rightarrow Y$  vom Banachraum  $V$  in den Banachraum  $Y$  heißt vollstetig, wenn  $F$  schwach konvergente Folgen auf (stark) konvergente Folgen abbildet:

$$v_n \rightharpoonup v \text{ in } V \implies F(v_n) \rightarrow F(v) \text{ in } Y.$$

Der Begriff ergibt durchaus Sinn, da vollstetige Abbildungen insbesondere (folgen-)stetig sind.

**Bemerkung.** Da wir im Banachraum  $Y$  Kompaktheit als Folgenkompaktheit definieren können, ist jede vollstetige Abbildung von einem reflexiven Banachraum  $V$  nach  $Y$  kompakt, wie sich zur Übung schnell klar machen.

Für lineare Operatoren gilt auch die Umkehrung, und zwar unabhängig von der Reflexivität der beteiligten Räume.

## 5. Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Operatoren

**Satz 5.3.** Sind  $K \in \text{Hom}(V, Y)$  kompakt, so ist  $K$  vollstetig und insbesondere stetig.

*Beweis.* (I) Zunächst sind lineare kompakte Operatoren tatsächlich stets beschränkt, da  $K(\bar{B}_1(0_V))$  nach Voraussetzung in  $Y$  relativ kompakt, also insbesondere beschränkt ist.

(II) Gilt  $v_n \rightharpoonup v$  in  $V$ , so ist  $A = \{v_n\}_n$  in  $V$  beschränkt<sup>1</sup> und damit  $\{Kv_n\}_n$  relativ kompakt in  $Y$ .

Angenommen,  $Kv_n \not\rightarrow Kv$  in  $Y$ . Dann existierte also zu einem  $\varepsilon > 0$  eine Teilfolge  $(v_{n_k})_k$  mit  $\|Kv_{n_k} - Kv\|_Y \geq \varepsilon$  für alle  $k$ . Diese Teilfolge liegt in der relativ kompakten Menge  $K(A)$ , enthält also ihrerseits eine konvergente Teilfolge  $(Kv_{n_{k_l}})_l$  mit Grenzwert  $y \in Y$ . Die Teilfolge  $(v_{n_{k_l}})_l$  konvergiert in  $V$  aber schwach gegen  $v$ . Da  $K$  nach (I) stetig ist, erhalten wir für jedes  $\psi \in Y'$  ein stetiges lineares Funktional  $\phi = \psi \circ K \in V'$  (Kompositionen stetiger Abbildungen sind stetig), also ist das Bild jeder in  $V$  schwach konvergenten Folge in  $Y$  schwach konvergent:

$$\psi(K(v_{n_{k_l}})) = \phi(v_{n_{k_l}}) \rightarrow \phi(v) = \psi(K(v)), \quad \text{d.h.: } Kv_{n_{k_l}} \rightharpoonup K(v) \quad \text{für } l \rightarrow \infty.$$

Allerdings konvergierte die Teilfolge  $(K(v_{n_{k_l}}))_l$  stark gegen ein  $y \in Y$ . Da dieser starke Grenzwert auch der schwache ist, folgt

$$y = \lim_{l \rightarrow \infty} K(v_{n_{k_l}}) = \text{w-lim}_{l \rightarrow \infty} K(v_{n_{k_l}}) = K(v).$$

Das steht aber im Widerspruch zu  $\|K(v_{n_{k_l}}) - K(v)\|_Y \geq \varepsilon$ .

Also muss die Folge  $(K(v_n))_n$  (stark) gegen  $K(v)$  konvergieren. □

**Bemerkung.** Ist  $V$  ein unendlichdimensionaler Banachraum, so ist  $\text{id}_V \in \mathcal{L}(V)$  nicht kompakt, da die Einheitskugel als ihr eigenes Bild nicht relativ kompakt ist.

**Beispiel 69.** In  $V = \ell_1$  ist die Identität vollstetig, da jede schwache Nullfolge auch eine starke Nullfolge ist<sup>2</sup>, nach der letzten Bemerkung aber nicht kompakt. Wir merken uns, dass bei nicht reflexiven Urbildräumen die Äquivalenz von Kompaktheit und Vollstetigkeit linearer Operatoren im allgemeinen versagt.

**Definition 5.4.** Sind  $V$  und  $Y$  Banachräume, so bezeichnen wir mit  $\mathcal{K}(V, Y)$  den Raum der kompakten linearen Operatoren  $K : V \rightarrow Y$ .

Wie immer bemerken wir, dass für die Kompaktheit eines linearen Operators  $K : V \rightarrow Y$  die relative Kompaktheit von  $K(B^V)$  in  $Y$  genügt, wobei  $B^V$  die (abgeschlossene) Einheitskugel in  $V$  bezeichnet.

Überzeugen Sie sich davon, dass  $\mathcal{K}(V)$  ein abgeschlossener linearer Unterraum von  $\mathcal{L}(V)$  ist. Es gilt sogar noch mehr:

**Lemma 5.5.** Sind  $V, W, X, Y$  Banachräume und  $F \in \mathcal{L}(V, W)$ ,  $K \in \mathcal{K}(W, X)$  und  $G \in \mathcal{L}(X, Y)$ , so ist  $GKF \in \mathcal{K}(V, Y)$ .

<sup>1</sup>Wir erinnern uns, dass diese Aussage von Satz 4.23 auch ohne die Reflexivität von  $V$  auskam.

<sup>2</sup>Man bezeichnet diese Eigenschaft von  $\ell_1$  als Schur-Eigenschaft nach J. Schur.



Beweis. Übung. □

Insbesondere ist also  $\mathcal{K}(V)$  ein abgeschlossenes beidseitiges Ideal in der Banachalgebra  $\mathcal{L}(V)$ .

Nach unseren bisherigen Beobachtungen stellt sich die Frage, ob es überhaupt nicht triviale kompakte Operatoren gibt, wenn schon die Identität in unendlichdimensionalen Räumen nicht kompakt ist.

**Beispiel 70.** Ist  $K : V \rightarrow Y$  ein beschränkter linearer Operator vom Banachraum  $V$  in den Banachraum  $Y$  derart, dass  $\text{im } K$  ein endlichdimensionaler Unterraum von  $Y$  ist, dann ist  $K$  kompakt. Wir nennen solche Operatoren endlichdimensional. Tatsächlich ist für jede beschränkte Menge  $A \subset V$  die Bildmenge  $K(A)$  eine beschränkte Teilmenge des endlichdimensionalen Raums  $\text{im } K$  und damit relativ kompakt.

**Definition 5.6.** Mit  $\mathcal{F}(V, Y) \subset \mathcal{L}(V, Y)$  bezeichnen wir den Raum der endlichdimensionalen beschränkten linearen Operatoren  $E : V \rightarrow Y$  vom Banachraum  $V$  in den Banachraum  $Y$ :

$$\mathcal{F}(V, Y) = \{E \in \mathcal{L}(V, Y) : \dim \text{im } E < \infty\}.$$

Wir überzeugen uns schnell, dass es sich um einen Untervektorraum von  $\mathcal{L}(V, Y)$  (und nach dem letzten Beispiel sogar von  $\mathcal{K}(V, Y)$ ) handelt, denn zu gegebenen  $E, F \in \mathcal{F}(V, Y)$  ist  $\text{im } (E + F) \subset \text{im } E \oplus \text{im } F$  und  $\text{im } (\alpha E) = \text{im } E$  (falls  $\alpha \neq 0$ ). Da der Raum der kompakten Operatoren vollständig ist, liefert jede (in  $\mathcal{L}(V, Y)$ ) konvergente Folge  $(E_n)_n$  endlichdimensionaler beschränkter Operatoren als Grenzwert (in der Operatornorm) einen kompakten Operator  $E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ .

**Beispiel 71.** Als Warnung betrachten wir einen unendlichdimensionalen Banachraum  $V$ . Darauf finden wir ein unbeschränktes lineares Funktional  $\phi \in V^* \setminus V'$  und definieren zu beliebigem  $v_0 \in V \setminus \{0\}$  den linearen Operator  $F : V \rightarrow V$  durch  $F(v) = \phi(v)v_0$ . Dieser ist unbeschränkt, aber zweifelsohne endlichdimensional ( $\text{im } F = \mathbb{K}v_0$ ). Wir können also bei der Definition von  $\mathcal{F}(V, Y)$  nicht auf die Forderung der Stetigkeit verzichten.

**Beispiel 72.** Wir betrachten  $V = C^1([a, b])$  (Erinnerung:  $\|v\|_{C^1} = \|v\|_\infty + \|v'\|_\infty$ ) und  $Y = C^0([a, b])$ . Dann ist die Einbettung  $\iota : V \rightarrow Y$ ,  $\iota(v) = v$ , kompakt.

Für  $v \in V$  und beliebige  $s, t \in [a, b]$  ist nämlich  $|v(t) - v(s)| = \left| \int_s^t v'(\tau) d\tau \right| \leq \|v'\|_\infty |t - s| \leq \|v\|_{C^1} |t - s|$ . Die abgeschlossene Einheitskugel  $B^V$  von  $V$  ist also punktweise gleichmäßig stetig und wegen

$$\|v\|_{C^0} = \|v\|_\infty \leq \|v\|_{C^1}$$

auch beschränkt in  $Y$ . Nach dem Satz von Arzelà und Ascoli ist  $B^V$  also in  $C^0([a, b])$  relativ kompakt (enthält eine gleichmäßig konvergente Folge), wie behauptet.

Dieses Verhalten verdient einen eigenen Namen.

**Definition 5.7.** Für zwei Banachräume  $V, Y$  heißt  $V$  stetig eingebettet in  $Y$ , geschrieben  $V \hookrightarrow Y$ , falls  $V \subset Y$  und die Einbettung  $\iota : V \rightarrow Y$ ,  $\iota(v) = v$ , stetig ist. Ist diese Einbettung sogar kompakt, so sagt man,  $V$  sei kompakt eingebettet in  $Y$  und schreibt  $V \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ .

## 5. Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Operatoren

Wir haben also gezeigt, dass  $C^1([a, b]) \hookrightarrow C^0([a, b])$  gilt.

**Beispiel 73.** Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und glatt berandet<sup>3</sup>, so bezeichnen wir für  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha \in (0, 1]$  mit

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) := \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : v \in C^k(\bar{\Omega}), D^a v \text{ Hölder-stetig zum Exp. } \alpha \text{ für } |a| = k\}.$$

Diesen Raum versehen wir mit der Norm

$$\|v\|_{C^{k,\alpha}} = \|v\|_{C^k} + \sum_{|a|=k} \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|D^a v(x) - D^a v(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

und bemerken, dass  $V = C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  unter dieser Norm zum Banachraum wird. Für  $\alpha = 0$  setzen wir einfach  $C^{k,0}(\bar{\Omega}) = C^k(\bar{\Omega})$ . Im Fall  $\alpha = 1$  erhalten wir Funktionen mit Lipschitz-stetigen kten Ableitungen.

Die klassische Theorie zu Hölderräumen besagt, dass für  $k + \alpha > l + \beta$  (also  $k > l$  oder  $k = l, \alpha > \beta$ ) die Einbettung  $\iota : C^{k,\alpha} \rightarrow C^{l,\beta}$  kompakt ist.

Den Beweis zu dieser Aussage, der im wesentlichen auf dem Satz von Arzelá-Ascoli beruht, finden Sie zum Beispiel in Abschnitt 8.6 bei Alt.

In Verallgemeinerung des adjungierten Operators zu  $F \in \mathcal{L}(V)$  auf dem Hilbertraum  $V$  definieren wir das Analogon auch für Banachräume.

**Definition 5.8.** Ist  $F$  ein beschränkter linearer Operator vom Banachraum  $V$  in den Banachraum  $Y$ , so definieren wir den dualen Operator  $F' : Y' \rightarrow V'$  durch

$$(F'\psi)(v) := \psi(Fv) \quad \text{für } \psi \in Y', v \in V.$$

**Bemerkung.** Sie sehen die Analogie zum adjungierten Operator, indem Sie die Funktionale via dualer Paarung darstellen. Die definierende Gleichung lautet dann nämlich

$$\langle F'\psi, v \rangle = \langle \psi, Fv \rangle.$$

Ganz analog zu Satz 4.2 beweist man, dass der duale Operator zu gegebenem  $F$  eindeutig bestimmt und ein stetiger linearer Operator ist.

Oft werden Sie auch die Bezeichnung  $F^T$  finden, die als Reminiszenz an den Fall  $V = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = \mathbb{R}^m$  an den Begriff der transponierten Matrix erinnert. Tatsächlich ist in diesem Fall nämlich zu gegebenen Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  der duale Operator  $F'_A$  durch  $F_{A^T}$  gegeben, wenn wir  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  als ihre eigenen Dualräume auffassen. Auch die Schreibweise  $F^*$  findet sich oft in der Literatur, vor allem dort, wo der topologische Dualraum von  $V$  mit  $V^*$  bezeichnet wird.

**Satz 5.9 (Schauder).** Ist  $K \in \mathcal{K}(V, Y)$ , so ist  $K' \in \mathcal{K}(Y', V')$ .

<sup>3</sup>Es genügt, wenn der Rand von  $\Omega$  lokal als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion  $\rho : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  darstellbar ist.

### 5.1. Kompakte und vollstetige Operatoren

*Beweis.* Für  $B = \bar{B}_1(0_V)$  ist beschränkt, also ist  $M = \overline{K(B)} \subset Y$  kompakt. Die abgeschlossene Einheitskugel  $C = \bar{B}_1(0_{Y'})$  ist wegen

$$|\psi(y) - \psi(z)| \leq \|\psi\|_{Y'} |y - z| \leq |y - z| \quad \text{für } \psi \in C, y, z \in Y$$

eine gleichgradig stetige Familie (stetiger Abbildungen von  $Y$  nach  $\mathbb{K}$ ). Die  $\psi \in C$  sind auch noch punktweise beschränkt, bilden also eingeschränkt auf das Kompaktum  $M$  nach Arzelá-Ascoli eine präkompakte Menge in  $C^0(M; \mathbb{K})$ , in der wir also zu jeder Folge  $(\phi_n = F'\psi_n)_n$  in  $F'(C)$  (genauer zu  $(\psi_n)_n$  in  $C$ ) eine auf  $M$  gleichmäßig konvergente Teilfolge  $(\psi_{n_k})_k$  finden. Diese ist also eine  $C^0(M; \mathbb{K})$ -Cauchy-Folge, d.h., zu  $\varepsilon > 0$  finden wir ein  $k_0$  derart, dass

$$\|F'\psi_{n_k} - F'\psi_{n_l}\|_{V'} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} |\psi_{n_k}(\underbrace{Fv}_{\in M}) - \psi_{n_l}(Fv)| < \varepsilon \quad \text{für } k, l \geq k_0.$$

Also ist  $(F'\psi_{n_k})_k$  eine Cauchyfolge, die (im Banachraum  $V'$ ) einen Grenzwert  $\phi$  hat. Also ist das Bild der Einheitskugel  $C$  von  $Y'$  unter  $F'$  relativ kompakt in  $V'$  und damit  $F'$  kompakt.  $\square$

Umgekehrt ist dank der Stetigkeit der natürlichen Einbettung  $\iota : V \hookrightarrow V''$  natürlich auch  $T$  kompakt, sofern  $T'$  kompakt ist.

Wir kehren nun zu unseren Hilberträumen zurück und fassen in folgenden Satz einige Aussagen über kompakte lineare Operatoren im Hilbertraum  $V$ .

**Satz 5.10.** Für  $F \in \mathcal{L}(V)$  auf dem Hilbertraum  $V$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $F$  ist vollstetig.
- (ii)  $F$  ist kompakt.
- (iii) Für beliebige Folgen  $(v_n)_n, (w_n)_n$  in  $V$  mit  $v_n \rightharpoonup v, w_n \rightharpoonup w$  gilt

$$\langle v_n | Fw_n \rangle \rightarrow \langle v | Fw \rangle \quad (\text{für } n \rightarrow \infty).$$

- (iv)  $F^*$  ist kompakt.

*Beweis.* Die Äquivalenz (ii)  $\iff$  (iv) ist einfach ein Spezialfall von Satz 5.9.

(ii)  $\implies$  (i) ist gerade Satz 5.3, die Umkehrung haben wir im Anschluss an Definition 5.2 bereits bemerkt (man beachte, dass  $V$  als Hilbertraum natürlich reflexiv ist).

Wir wissen also schon, dass (i), (ii) und (iv) äquivalent sind.

(ii)  $\implies$  (iii). Angenommen, wir fänden schwach konvergente Folgen  $(v_n)_n, (w_n)_n$  derart, dass

$$\langle v_n | Fw_n \rangle \not\rightarrow \langle v | Fw \rangle.$$

Dann gäbe es zu einem  $\varepsilon > 0$  eine Teilfolge  $(n_k)_k$  mit

$$|\langle v_{n_k} | Fw_{n_k} \rangle - \langle v | Fw \rangle| \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k. \quad (*)$$

## 5. Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Operatoren

Da  $F$  kompakt ist und die schwach konvergenten Folgen  $(v_n)_n, (w_n)_n$  insbesondere beschränkt sind, fänden wir aber eine weitere Teilfolge  $(n_{k_l})_l$  mit  $F(w_{n_{k_l}}) \rightarrow F(w)$ , also

$$\begin{aligned} \left| \langle v_{n_{k_l}} | F w_{n_{k_l}} \rangle - \langle v | F w \rangle \right| &\leq \left| \langle v_{n_{k_l}} - v | F w_{n_{k_l}} \rangle \right| + \left| \langle v_{n_{k_l}} | F w_{n_{k_l}} - F w \rangle \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \langle v_{n_{k_l}} - v | F w_{n_{k_l}} \rangle \right|}_{\rightarrow 0, \text{ da } v_{n_{k_l}} \rightharpoonup v, F w_{n_{k_l}} \rightarrow F w} + \underbrace{\|F w_{n_{k_l}} - F w\|}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sup_l \|v_{n_{k_l}}\|}_{\leq \sup_n \|v_n\|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch zu (\*).

(iii)  $\implies$  (i). Zu  $w_n \rightharpoonup w$  müssen wir also  $F w_n \rightarrow F w$  zeigen. Dazu beobachten wir zunächst, dass für jede konstante Folge  $(v_n = v)_n$  nach (iii) insbesondere  $\langle v | F w_n \rangle \rightarrow \langle v | F w \rangle$  gilt, also  $F w_n \rightharpoonup F w$ . Damit berechnen wir:

$$\|F w_n - F w\|^2 = \langle \underbrace{F w_n}_{=: v_n \rightharpoonup F w} | \underbrace{F(w_n - w)}_{\rightarrow 0} \rangle + \langle F w | \underbrace{F w_n - F w}_{\rightarrow 0} \rangle \rightarrow 0.$$

□

---

## Das Lebesgue-Integral

---

In diesem Anhang sammeln wir ohne jegliche Beweise einige Aussagen aus der Maßtheorie, die wir für unsere Betrachtungen benötigen.

**Definition A.1.** Eine  $\sigma$ -Algebra über einer nicht leeren Menge  $\Omega$  ist ein System  $\mathcal{F}$  von Teilmengen von  $\Omega$  derart, dass

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$  ( $A^c = \Omega \setminus A$  ist das Komplement von  $A$ )
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{F}$ .

Die zu  $\mathcal{F}$  gehörenden Mengen nennen wir messbare Mengen, das Paar  $(\Omega, \mathcal{F})$  heißt messbarer Raum.

**Lemma A.2** (und Definition). Ist  $\mathcal{E}$  eine beliebige Familie von Teilmengen von  $\Omega$ , so existiert eine kleinste  $\sigma$ -Algebra

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{F} \text{ } \sigma\text{-Algebra, } \mathcal{E} \subset \mathcal{F}} \mathcal{F},$$

die  $\mathcal{E}$  enthält. Diese wird als von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra bezeichnet.

Die auf dem  $\mathbb{R}^n$  vom System der offenen Menge erzeugte  $\sigma$ -Algebra heißt Borelsche  $\sigma$ -Algebra und wird als  $\mathcal{B}_n$  bezeichnet<sup>1</sup>. Sie wird auch von der Familie aller halboffenen Quader

$$(a, b] = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n], \quad a = (a_1, \dots, a_n)^T, b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

---

<sup>1</sup>Allgemeiner heißt für jeden topologischen Raum die von den offenen Mengen erzeugte  $\sigma$ -Algebra Borelsche  $\sigma$ -Algebra.

## A. Das Lebesgue-Integral

erzeugt.

**Definition A.3.** Ein Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  über der Menge  $\Omega$  ist eine Abbildung  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \infty$  derart, dass

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$  für beliebige paarweise disjunkte  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ .

Zusammen heißt  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  dann ein Maßraum.

**Satz A.4** (und Definition). Auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}_n$  existiert genau ein Maß  $\beta^n$ , das für alle Quader  $(a, b]$  mit  $a \leq b$

$$\beta^n((a, b]) = \text{vol}_n((a, b]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

erfüllt.

Allgemeiner wird jedes Maß  $\mu$  auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X)$  über einem topologischen Raum  $X$  als Borelmaß bezeichnet. Ein solches heißt regulär, wenn alle kompakten Mengen endliches Maß haben und für alle  $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ kompakt}\} = \inf\{\mu(U) : U \supset A \text{ offen}\} \quad (\text{A.1})$$

gilt, also jede messbare Menge bezüglich  $\mu$  beliebig gut von innen durch kompakte und von außen durch offene Mengen approximiert werden kann.

**Satz A.5.** Das Maß  $\beta^n$  aus Satz A.4 ist ein reguläres Borelmaß über dem mit seiner (euklidischen) Standardtopologie versehenen  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition A.6.** In einem Maßraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  heißt  $N \in \mathcal{F}$  eine  $(\mu)$ -Nullmenge, wenn  $\mu(N) = 0$  ist. Der Maßraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  heißt vollständig, wenn alle Teilmengen von Nullmengen messbar sind (also zu  $\mathcal{F}$  gehören):

$$B \subset N \in \mathcal{F}, \mu(N) = 0 \implies B \in \mathcal{F}.$$

**Satz A.7** (und Definition). Ist  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum, so ist durch

$$\tilde{\mathcal{F}} := \{A \cup B : A \in \mathcal{F}, B \subset N \text{ für eine Nullmenge } N \in \mathcal{F}\}$$

eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  gegeben, auf der durch

$$\tilde{\mu}(A \cup B) = \mu(A), \quad \text{falls } A \in \mathcal{F}, B \subset N \text{ für eine Nullmenge } N$$

ein Maß definiert ist<sup>a</sup>. Für  $A \in \mathcal{F}$  gilt  $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ , und der vollständige Maßraum  $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mu})$  heißt die Vervollständigung von  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .

<sup>a</sup>dessen Definition wohlgemerkt nicht von der Wahl von  $A$  und  $B$  abhängt. Ist nämlich für ein  $A' \in \mathcal{F}$  und ein  $B' \subset N'$  mit einer Nullmenge  $N'$   $A \cup B = A' \cup B'$ , so gilt  $\mu(A) = \mu(A')$ .

**Satz A.8** (und Definition). Der Maßraum  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta^n)$  ist nicht vollständig. Seine Vervollständigung bezeichnen wir mit  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda^n)$  und nennen  $\lambda^n$  das  $n$ -dimensionale Lebesgue-Maß. Die Elemente von  $\mathfrak{M}_n$  heißen (Lebesgue-)messbare Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .

Bislang haben wir nur das Konzept des Volumens von Quadern auf beliebige messbare Mengen erweitert. Da Quader aber eine wesentliche Rolle bei der Definition des Riemannintegrals spielten, sollte uns das bei der Definition eines allgemeineren Integralbegriffs helfen. Dazu brauchen wir zunächst Funktionen, über deren Integral wir uns Gedanken machen können.

**Definition A.9.** Sind  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $(\Omega', \mathcal{F}')$  messbare Räume, so nennen wir die Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$   $(\mathcal{F}-\mathcal{F}')$ -messbar, falls  $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$  für alle  $A' \in \mathcal{F}'$  gilt.

Wir befassen uns vor allem mit reell- oder komplexwertigen Funktionen auf dem  $\mathbb{R}^n$  und wählen dabei auf dem Urbildraum die Lebesguesche  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{M}_n$  und auf dem Bildraum die Borelsche. Dabei wollen unseren Funktionen aber auch erlauben, unendliche Werte anzunehmen. Solche Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} (= \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$  bezeichnen wir als numerische Funktionen. Dabei verstehen wir  $\bar{\mathbb{R}}$  mit der aus Mengen der Form  $A, A \cup \{\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{-\infty, \infty\}$  bestehenden  $\sigma$ -Algebra  $\bar{\mathcal{B}}_1$ .

**Definition A.10.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt messbar, wenn sie  $\mathfrak{M}_n$ - $\mathcal{B}_1$ -messbar ist.

Eine numerische Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt messbar, wenn sie  $\mathfrak{M}_n$ - $\bar{\mathcal{B}}_1$ -messbar ist.

Nicht nur für auf dem  $\mathbb{R}^n$ , sondern für auf allgemeinen messbaren Räumen definierte (numerische) Funktionen gilt:

**Lemma A.11.** Eine (numerische) Funktion  $f$  auf einem messbaren Raum  $(\Omega, \mathcal{F})$  ist genau dann  $(\mathcal{F}-\mathcal{B}_1$ - bzw.  $\mathcal{F}-\bar{\mathcal{B}}_1$ -)messbar, wenn für alle  $c \in \mathbb{R}$

$$\{f \leq c\} = \{x \in \Omega : f(x) \leq c\} \in \mathcal{F}$$

gilt.

Die messbaren reellwertigen Funktionen bilden einen Vektorraum:

**Lemma A.12.** Sind  $f_1, f_2, \dots$  messbare reellwertige Funktionen auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , so sind auch

- $\alpha f + g$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$
- $|f|, f^+, f^-$  (wobei  $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ ,  $f^- = \max\{-f(x), 0\}$ )
- $\sup_k f_k, \inf_k f_k$
- $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$

(jeweils punktweise verstanden) messbare (numerische) Funktionen.

## A. Das Lebesgue-Integral

Insbesondere sind also punktweise Grenzwerte (sofern existent) messbarer Funktionen wieder messbar. Das nutzen wir zur Definition des Integrals aus.

**Definition A.13.** Als Treppenfunktion bezeichnen wir eine messbare Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die nur endlich viele Werte annimmt:

$$f = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{1}_{A_k}, \quad A_1, \dots, A_N \in \mathcal{F}, \quad c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}.$$

Das Integral einer Treppenfunktion  $f = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{1}_{A_k}$  über  $\Omega$  bezüglich  $\mu$  ist als

$$\int_{\Omega} f \, d\mu := \sum_{k=1}^N c_k \mu(A_k)$$

definiert<sup>a</sup>, falls  $\mu(A_k) < \infty$  für alle  $k = 1, \dots, N$  gilt. In diesem Fall heißt  $f$  ( $\mu$ -)integrierbar.

---

<sup>a</sup>Dabei ist  $\mathbf{1}_A$  die Indikatorfunktion der Menge  $A$ , also  $\mathbf{1}_A(x) = 1$  für  $x \in A$  und  $\mathbf{1}_A(x) = 0$  für  $x \notin A$ . Der Wert des Integrals hängt nicht von der konkreten Darstellung der Treppenfunktion  $f$  ab.

**Lemma A.14.** Ist  $f$  eine nicht negative, messbare, numerische Funktion auf  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda^n)$ , so existiert eine (punktweise) monoton wachsende Folge  $(f_k)_k$  von Treppenfunktionen, die punktweise gegen  $f$  konvergiert.

**Definition A.15.** Für eine nicht negative, messbare, numerische Funktion auf  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda^n)$  definieren wir das (Lebesgue-)Integral als

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda^n := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\lambda^n,$$

wobei  $(f_k)_k$  eine monoton gegen  $f$  konvergierende Folge integrierbarer Treppenfunktionen ist.

In der Regel schreiben wir  $\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx$  statt  $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda^n$ , unsere Integrale sind also immer, sofern nicht anders gesagt, Lebesgue-Integrale. Wir bemerken, dass diese Definition nicht von der Wahl der konkreten Folge von Treppenfunktionen abhängt und dass das Integral durchaus den Wert  $\infty$  annehmen kann.

Für allgemeine numerische Funktionen zerlegen wir  $f$  in  $f^+ - f^-$  und definieren:



**Definition A.16.** Für eine messbare numerische Funktion auf  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n, \lambda^n)$  definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, dx,$$

falls mindestens eines der Integrale auf der rechten Seite endlich ist. Sind sogar beide dieser Integrale (und damit auch die linke Seite) endlich, so nennen wir  $f$  (Lebesgue-)integrierbar (über  $\mathbb{R}^n$ ).

Für eine messbare Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und eine messbare numerische Funktion  $f$  definieren wir

$$\int_{\Omega} f \, dx := \int_{\mathbb{R}^n} f \mathbf{1}_{\Omega} \, dx,$$

falls das Integral von  $f \mathbf{1}_{\Omega}$  im obigen Sinne existiert. Ist dieses Integral endlich, so nennen wir  $f$  integrierbar über  $\Omega$ .

Die Definition gilt auch für beliebige Maßräume, allerdings muss man dann schon für Treppenfunktionen den Wert  $\infty$  für das Integral erlauben, da man im allgemeinen keine Folge integrierbarer Treppenfunktionen finden wird, die monoton gegen  $f$  konvergiert.

Wollen wir Aussagen über die Elemente eines Maßraums treffen, so erweist sich folgende Sprechweise oft als nützlich. Wir sagen, eine Eigenschaft gelte  $(\mu)$ -fast überall auf  $\Omega$ , wenn eine  $\mu$ -Nullmenge  $N$  derart existiert, dass die fragliche Eigenschaft für alle  $x \in \Omega \setminus N$  gilt.

**Satz A.17** (und Definition). Die numerischen Funktionen  $f, g : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  seien messbar. Dann gilt

- $f$  ist genau dann integrierbar, wenn  $|f|$  integrierbar ist, und es gilt die Dreiecksungleichung für Integrale:

$$\left| \int_{\Omega} f \, d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, d\mu.$$

- **Monotonie:** Gilt  $f \leq g$  fast überall  $\implies \int_{\Omega} f \, d\mu \leq \int_{\Omega} g \, d\mu$ , falls beide Integrale (in  $\bar{\mathbb{R}}$ ) existieren.
- Sind  $f$  und  $g$  integrierbar, so ist auch  $\alpha f + g$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  integrierbar und  $\int_{\Omega} \alpha f + g \, d\mu = \alpha \int_{\Omega} f \, d\mu + \int_{\Omega} g \, d\mu$ . Die integrierbaren reellwertigen Funktionen bilden also einen (reellen) Vektorraum, den wir  $\mathcal{L}_1(\mu)$  nennen, und das Integral ist eine lineare Abbildung  $\int_{\Omega} \cdot \, d\mu : \mathcal{L}_1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Gilt  $f = g$  fast überall und existiert eines der Integrale  $\int_{\Omega} f \, d\mu$  oder  $\int_{\Omega} g \, d\mu$ , so existieren beide Integrale und stimmen überein. Ferner gilt dann  $\int_{\Omega} |f - g| \, d\mu = 0$ .

Die letzte Aussage erlaubt die Definition des Raums  $L_1$ .

**Definition A.18.** Auf der Menge der messbaren numerischen Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definieren wir die Äquivalenzrelation  $\sim$  durch

$$f \sim g : \Longleftrightarrow f = g \text{ fast überall.}$$

Mit  $L_1(\mathbb{R}^n)$  bezeichnen wir den Raum all jener Äquivalenzklassen, die einen integrierbaren Repräsentanten enthalten. Analog definieren wir  $L_1(\Omega)$  für messbare Mengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

Wir bemerken, dass jede Äquivalenzklasse aus  $L_1(\mathbb{R}^n)$  auch einen reellwertigen Repräsentanten  $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$  enthält. Oft werden wir die Äquivalenzklasse  $[f] \in L_1(\mathbb{R}^n)$  kurz als  $f$  schreiben und von  $L_1$ -Funktionen sprechen. Analog erhalten wir auch die Räume  $L_p(\mathbb{R}^n)$ , oder allgemeiner  $L_p(\mu)$ , für  $p \geq 1$ . Die entsprechenden Definitionen sind

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : f \text{ messbar, } \int |f| d\mu < \infty \right\}$$

für  $p \in [1, \infty)$  und

$$\mathcal{L}_\infty(\mu) = \{ f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : f \text{ messbar, } \exists C \geq 0 : |f(\omega)| \leq C \text{ für } \mu\text{-fast alle } \omega \in \Omega \}.$$

Dann fassen wir wieder alle fast überall übereinstimmenden Funktionen zu einer Äquivalenzklasse zusammen und erhalten die Räume  $L_p$ .

Aus der Definition haben wir sofort die Normen

$$\|f\|_p := \left( \int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_\infty := \underbrace{\inf \{ C > 0 : |f(\omega)| \leq C \text{ fast überall} \}}_{=:\text{ess sup}_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|}$$

abgelesen.

**Lemma A.19** (Hölder-Ungleichung). Sind  $p, p' \in (1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  oder  $p = 1$ ,  $p' = \infty$ , so gilt für  $f \in L_p(\mu)$ ,  $g \in L_{p'}(\mu)$ :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'},$$

insbesondere:  $fg \in L_1(\mu)$ .

Die Hölder-Ungleichung wird zum Beweis der Minkowski-Ungleichung benutzt.

**Lemma A.20** (Minkowski-Ungleichung). Für  $f, g \in L_p(\mu)$ ,  $p \in [1, \infty)$ , gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Theorem A.21** (Vollständigkeitssatz von Riesz-Fischer). Die Räume  $(L_p(\mu), \|\cdot\|_p)$  sind Banachräume für  $p \in [1, \infty]$ .

**Satz A.22** (Ausschöpfungslemma). *Im Maßraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  seien  $A, A_1, A_2, \dots$  messbare Mengen derart, dass*

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \quad \text{und} \quad A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

*gelten. Dann ist  $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  genau dann integrierbar über  $A$ , wenn  $f \mathbf{1}_{A_k}$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  integrierbar ist und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} |f| \, d\mu < \infty$  ist, und in diesem Fall gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_k} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

**Satz A.23** (parameterabhängige Integrale). *Für den Maßraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  und die offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^p$  sei  $f : \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Für  $\theta \in U$  definieren wir  $f_\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f_\theta(\omega) := f(\omega, \theta)$  und nehmen  $f_\theta \in \mathcal{L}^1(\mu)$  für alle  $\theta \in U$  an. Dann können wir  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  durch*

$$g(\theta) := \int_{\Omega} f_\theta \, d\mu$$

*definieren. Wir nehmen ferner an, es existiere ein  $h \in L^1(\mu)$  mit  $|f(\omega, \theta)| \leq h(\omega)$  für alle  $\theta \in U$  und fast alle  $\omega \in \Omega$ . Dann gilt:*

- (i) *Sind die Funktionen  $\theta \mapsto f(\omega, \theta)$  (von  $U$  nach  $\mathbb{R}$ ) für alle  $\omega \in \Omega$  stetig bei  $\theta^* \in U$ , so ist  $g$  stetig bei  $\theta^*$ .*
- (ii) *Sind die Funktionen  $\theta \mapsto f(\omega, \theta)$  für jedes  $\omega \in \Omega$  stetig differenzierbar und existiert ein  $k \in L^1(\mu)$  mit  $|\partial_{\theta_i} f(\omega, \theta)| \leq k(\omega)$  für alle  $\theta \in U$ , fast alle  $\omega \in \Omega$  und alle  $i = 1, \dots, p$ , so ist auch  $g$  stetig differenzierbar auf  $U$  und:*

$$\partial_{\theta_j} g(\theta) = \int_{\Omega} \partial_{\theta_j} f(\cdot, \theta) \, d\mu \quad \text{für alle } \theta \in U, \, j = 1, \dots, p.$$