# Gewöhnliche Differentialgleichungen - Übungsblatt 6

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Christian Düll

**Abgabe:** 3. Dezember, 11:00 Uhr in den Zettelkasten (1. Stock Mathematikon)

---

**Aufgabe 6.1** 4 Punkte

Sei $A \in M(n, \mathbb{R})$ und $y^* = 0$ der Fixpunkt der DGL $Y' = AY$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $y^*$ lokal stabil, dann gibt es eine Konstante $c > 0$, sodass $\|e^{At}\| \leq c$ für alle $t \geq 0$.

b) $y^*$ heißt *lokal exponentiell stabil*, wenn es eine offene Umgebung $U(y^*)$ und Konstanten $c, \sigma > 0$ gibt, sodass

$$\|\phi(t, y_0) - y^*\| \leq Ce^{-\sigma t}\|y_0 - y^*\| \qquad \forall t \geq 0 \text{ und alle } y_0 \in U(y^*).$$

Zeigen Sie: Ist $y^*$ lokal exponentiell stabil, so gilt $\|e^{At}\| \leq ce^{-\sigma t}$ für alle $t \geq 0$.

c) Falls ein $T > 0$ existiert, sodass $\|e^{AT}\| < 1$, so ist $y^*$ global exponentiell stabil, d.h. $U(y^*) = \mathbb{R}^n$.

**Aufgabe 6.2** 4 Punkte

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + \cos(x) \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie den Fluss dieser Gleichung.

b) Beweisen Sie, dass es eine eindeutige periodische Lösung zu (1) gibt.
*Hinweis: Wenn Sie den Fluss gefunden haben, setzen Sie ihn in die rechte Seite ein und betrachten die Monotonie.*

**Aufgabe 6.3** 5 Punkte

Betrachten Sie folgendes System

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ (x - \frac{1}{2})^3 - 2y \end{pmatrix}, \qquad \forall t > 0. \tag{2}$$

a) Finden Sie die allgemeine Lösung von (2) mit Anfangswert $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

b) Nutzen Sie Ihre Lösung aus a), um für alle Anfangswerte $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ die Omega- und Alpha Limesmengen von (2) zu bestimmen. Geben Sie auch alle Fixpunkte an.

c) Für alle Fixpunkte x, bestimmen Sie die stabilen und instabilen Mengen $W^{\pm}(\mathrm{x})$.

**Aufgabe 6.4** 3 Punkte

Sei $(\phi, M)$ ein kontinuierliches dynamisches System. Zeigen Sie die alternative Darstellung der Omega Limesmenge aus Satz 3.7, d.h

$$\omega(x) = \bigcap_{\rho \geq 0} \overline{\{\phi(t, x) \,|\, t \geq \rho\}}.$$