Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 5

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 11. Dezember

Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Darauf operiert die Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ durch Möbius-Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \langle \tau \rangle = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \; .$$

Der abgeschlossene Fundamentalbereich $\overline{\mathcal{F}} = \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1 \; , \; |\mathrm{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2}\}$ ist der grüne Bereich in Abbildung 1. Die besten vier Aufgaben werden gewertet.

19. Aufgabe: (2+4 = 6 Punkte) Sei $f \in [\Gamma, k]$ eine holomorphe elliptische Modulform vom Gewicht k. Wir nehmen an, f hat keine Nullstelle auf dem Rand des Fundamentalbereichs $\mathcal{F}$, außer eventuell in $\rho = \exp(\pi i/3)$ und $\rho^2 = \rho - 1$. Sei $\epsilon > 0$ klein genug, sodass f auf der Kreisscheibe $D_{0,\epsilon}(\rho)$ um ρ keine Nullstelle hat. Wir definieren eine nicht-geschlossene Kurve γ wie folgt:
Sei $B = \rho^2 + i\epsilon \in \mathbb{H}$ und $B' = B + 1 = \rho + i\epsilon \in \mathbb{H}$. Sei $C \in \mathbb{H}$ der eindeutige Punkt mit $|C| = 1$ und $|C - \rho^2| = \epsilon$ auf dem Rand des Fundamentalbereichs und sei $C' = -\overline{C}$. Sei γ ein stückweise glatter Weg von B nach B' wie folgt: Zunächst von B im Uhrzeigersinn entlang des Kreisbogens um ρ^2 vom Radius ϵ nach C, dann von C im Uhrzeigersinn entlang des Einheitskreises nach C' und dann von C' im Uhrzeigersinn entlang des Kreisbogen um ρ vom Radius ϵ nach B', siehe Abbildung 1. Zeigen Sie:

(a) Das Integral $I_\epsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)\mathrm{d}\, z}{f(z)}$ ist unabhängig von ϵ für hinreichend kleine ϵ.

(b) Das Integral ist gleich $I_\epsilon = \frac{k}{12} - \frac{1}{3}\mathrm{ord}_\rho(f)$.

Hinweis zu (b): Finden Sie eine Matrix $M \in \Gamma$ mit $M \left\langle \rho^2 \right\rangle = \rho^2$ und $M \langle C \rangle = C' - 1$. Zerlegen Sie das Pol- und Nullstellenzählende Integral um ρ^2 in drei Teile entlang C, $C' - 1$ und $M^2 \langle C \rangle$. Betrachten Sie $\epsilon \to 0$ für das Integral von C nach C'.

Lösung:

(a) Wir fixieren ein $\epsilon_0 > 0$, das die Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt. Dann können wir jedes $0 < \epsilon < \epsilon_0$ betrachten. Sei γ_ϵ der in der Aufgabe beschriebene Weg. Sei δ die Verbindungsgerade von B_ϵ nach B_{ϵ_0} und $\delta + 1$ die Gerade von B'_ϵ nach B'_{ϵ_0} Dann bildet die Hintereinanderausführung von $\gamma_\epsilon \cdot \delta^{-1} \cdot \gamma_{\epsilon_0}^{-1} \cdot (\delta')^{-1}$ einen geschlossenen Weg, in dessen Inneren nach Annahme keine Nullstellen liegen. Nach dem Cauchy-Integralsatz verschwindet also das Integral

$$I_\epsilon + \int_\delta \frac{f'(z)}{f}(z)\mathrm{d}z - I_{\epsilon_0} - \int_{\delta'} \frac{f'}{f}\mathrm{d}z = 0 \; .$$

Da f eine Modulform ist, gilt $f(z) = f(z+1)$ und ebenso für die Ableitung. Damit ist

$$\int_\delta \frac{f'}{f}\mathrm{d}z = \int_{\delta'} \frac{f'}{f}\mathrm{d}z$$

und die entsprechenden Terme kürzen sich aus obigem Ausdruck. Wir erhalten $I_\epsilon = I_{\epsilon_0}$.

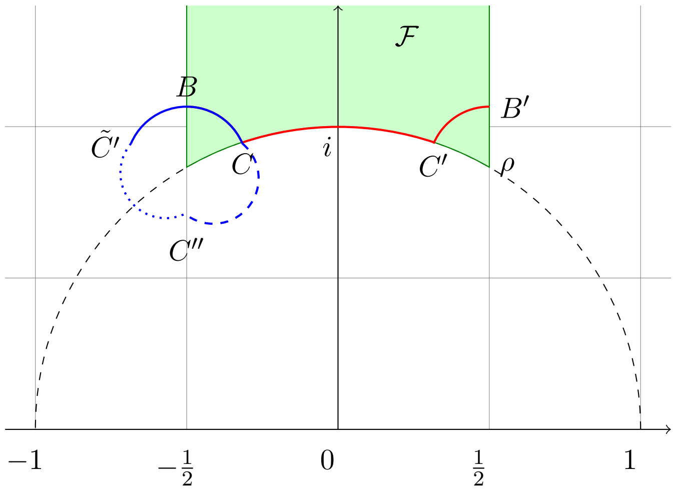

Abbildung 1: Der Integrationspfad γ (rot) für Aufgabe 19.

(b) Da f eine Modulform ist, ist $f(z) = f(z-1)$. Wir können also $\widetilde{C'} := C' - 1$ setzen. Sei α eine Kurve von $\widetilde{C'}$ nach C über den oberen Teil des Kreises um ρ^2 vom Radius ϵ (blau im Diagramm). Das Integral über α ist dann gleich dem Integral über die "äußeren" Stücke von γ, also von B nach C und von C' nach B'.

Die Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erfüllt $M^3 = -E_2$ und $M\langle C\rangle = \widetilde{C'}$. Sei $C'' = M\left\langle \widetilde{C'} \right\rangle = M^2\langle C\rangle$, dann ist $M\langle\alpha\rangle$ eine Kurve von C'' nach $\widetilde{C'}$ (blau punktiert). Entsprechend ist $M^2\langle\alpha\rangle$ eine Kurve von C nach $\widetilde{C'}$ (blau gestrichelt). Alle drei Kurvenstücke zusammen liefern einen geschlossenen Weg mit genau Umlaufzahl 1 um ρ^2. [Skizze oder Beweis durch Homotopie.] Damit liefert das Null- und Polstellenzählende Integral

$$\int_\alpha \frac{f'}{f}\mathrm{d}z + \int_{M\circ\alpha} \frac{f'}{f}\mathrm{d}z + \int_{M^2\circ\alpha} \frac{f'}{f}\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{ord}_{\rho^2}(f)\ .$$

Außerdem ist $\tau^k f(\tau) = f(M\langle\tau\rangle)$ und Ableiten liefert $\tau^k f'(\tau) + k\tau^{k-1}f(\tau) = f'(M\langle\tau\rangle)\tau^{-2}$. Wir erhalten für die blau punktierten Kurve

$$\int_{M\circ\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \int_\alpha \frac{f'(M(z))}{f(M(z))}\mathrm{d}z = \int_\alpha \left(\frac{f'(\tau)\tau^2}{f((\tau)} + \frac{k}{\tau}\right)\mathrm{d}(M\tau) = \int_\alpha \left(\frac{f'(\tau)}{f((\tau)} + \frac{k}{\tau^3}\right)\mathrm{d}(\tau)\ .$$

Das Differential ist $\mathrm{d}(M\tau) = \tau^{-2}\mathrm{d}\tau$, also ist dieser Ausdruck gleich $\int_\alpha (\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}\mathrm{d}\tau + \int_\alpha \frac{k}{\tau^3})\mathrm{d}\tau$. Der Fehlerterm $\int_\alpha \frac{k}{\tau^3}\mathrm{d}\tau$ geht gegen Null für $\epsilon \to 0$ nach der Standardintegralabschätzung. Die blau gestrichelte Kurve $M^2 \circ \alpha$ behandelt man genauso und erhält

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{M^2\circ\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z - \int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 0\ .$$

Insgesamt also $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\alpha \frac{f'(z)\mathrm{d}z}{f(z)} = \frac{2\pi i}{3}\operatorname{ord}_{\rho^2}(f)$.

Das verbleibende Integral von C nach C' liefert den Wert $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_C^{C'} \frac{f'}{f}\mathrm{d}z = \frac{k}{12}$, siehe Freitag Busam Funktionentheorie 1, §VI2. Es gilt $f(-1/\tau) = \tau^k f(\tau)$ indem man die

Modulsubstitution $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Ableiten liefert $f'(-1/\tau)\tau^{-2} = \tau^k f'(\tau) + k\tau^{k-1} f(\tau)$, also erhält man für $g(\tau) = f'(\tau)/f(\tau)$ die Identität

$$g(-1/\tau)\tau^{-2} = g(\tau) + \frac{k}{\tau} \ .$$

Sei β_1 der Weg von C nach i, dann ist $\beta_2(\tau) = -1/\beta_1(\tau)$ der gespiegelte Weg von C' nach i entlang des Einheitskreises. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_C^{C'} g(\tau)\mathrm{d}\tau &= \int_{\beta_1} g(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{\beta_2} g(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^1 g(\beta_1(t)\beta_1'(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 g(\beta_2(t))\beta_2'(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 \frac{k}{\beta_1(t)}\beta_1'(t)\mathrm{d}t = -k(\log(i) - \log(C')) \ . \end{aligned}$$

Für $\epsilon \to 0$ geht das gegen $\lim_{\epsilon\to 0} k(\log(C') - \log(i)) = k(\log(\rho^2) - \log(i)) = 2\pi i \cdot \frac{k}{12}$.

20. Aufgabe: (4 Punkte) Seien $f, g \in [\Gamma, k]$ Modulformen vom Gewicht $k \geq 0$ zur Modulgruppe Γ. Zeigen Sie: $h = f'g - fg'$ ist eine Modulform vom Gewicht $2k+2$ zu Γ.

Lösung Für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gilt $f(Mz) = (cz+d)^k f(z)$ und Ableiten liefert $f'(Mz)(cz+d)^{-2} = (cz+d)^k f'(z) + kc(cz+d)^{k-1} f(z)$. Einsetzen liefert $h(Mz) = (cz+d)^{2k+2} h(z)$, also die gesuchte Transformationseigenschaft für h. Außerdem ist h holomorph (klar) und beschränkt für $\mathrm{Im}(z) \to 0$, weil dies für die einzelnen Faktoren gilt. Wenn f beschränkt ist in einem Gebiet, dann ist auch f' beschränkt wegen der Cauchy-Integralformel.

21. Aufgabe: (4 Punkte) Für natürliche Zahlen $k \in \mathbb{N}_0$ seien $F_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorphe Funktionen mit $F_k(M\langle\tau\rangle) = (c\tau+d)^k F_k(\tau)$ für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Zeigen Sie für $N \in \mathbb{N}_0$ die Aussage:

Wenn $\sum_{k=0}^N F_k \equiv 0$ dann $F_k \equiv 0$ für alle $0 \leq k \leq N$.

Hinweis: Betrachten Sie $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & n \end{smallmatrix}\right)$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Lösung: Angenommen, nicht alle F_k sind Null, dann sei OBdA F_N nicht konstant Null. Für $M_n = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & n \end{smallmatrix}\right)$ gilt

$$0 \equiv \sum_{k=0}^N F_k(M_n\langle\tau\rangle) = \sum_{k=0}^N (-\tau - n)^k F_k(\tau) \ . \tag{1}$$

Nun fixieren wir τ mit $F_N(\tau) \neq 0$ und fassen $F_k(\tau)$ als Konstanten auf. Dies liefert ein Polynom in der Variable n vom Grad N. Der führende Koeffizient ist genau $\pm F_k(\tau)$. Für jede natürliche Zahl n ist dieses Polynom jeweils Null, also ist das Polynom selbst gleich Null. Das liefert einen Widerspruch zur Wahl von N und τ und zeigt damit die Aussage. Also ist $F_k = 0$ für alle k.

22. Aufgabe: (1+3 = 4 Punkte) Sei $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ ein Polynom in zwei Variablen sodass gilt $P(G_4, G_6) \equiv 0$ für die Eisensteinreihen $G_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. Wir bezeichnen die Koeffizienten von P mit $c_{a,b}$, also $P(X, Y) = \sum_{a,b\in\mathbb{N}_0} c_{a,b} X^a Y^b$. Zeigen Sie:

(a) $\sum_{4a+6b=2k} c_{a,b} G_4^a G_6^b \equiv 0$ für alle ganzen k. Hinweis: Aufgabe 21.

(b) Folgern Sie $c_{a,b} = 0$ für alle a, b indem Sie die bekannten Nullstellen von G_4 und G_6 ausnutzen. Hinweis: Aufgabe 12.

Lösung:

(a) Man setze $F_{2k} = \sum_{4a+6b=2k} c_{a,b} G_4^a G_6^b$, dann folgt die Aussage aus der letzten Aufgabe.

(b) Wir liefern ein alternatives Argument zur Vorlesung. Wenn nur positive $a > 0$ zur Summe $\sum_{4a+6b=2k} c_{a,b} G_4^a G_6^b \equiv 0$ beitragen, dann kann man G_4 ausklammern. Es bleibt ein Polynom $\sum_{4a+6b=2k} d_{a,b} G_4^a G_6^b \equiv 0$ mit der Eigenschaft $d_{0,b} \neq 0$. Nun setzen wir die bekannte Nullstelle i ein mit $G_4(\rho) = 0$ ein mit $G_6(\rho) \neq 0$. Dann verschwindet jeder Summand im Punkt i außer $d_{0,b} G_6^b$. Damit ist $d_{0,b} = 0$ und das liefert einen Widerspruch. Man argumentiert entsprechend für den Punkt ρ. Also ist das Polynom P konstant und damit identisch Null.

23. Aufgabe: (2+1+1=4 Punkte) Seien a und b ganze Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine ganze Zahl $g \in \mathbb{Z}$ mit $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = g\mathbb{Z}$ und diese ist eindeutig bis auf das Vorzeichen.

Wir schreiben dann $\mathrm{ggT}(a, b) := g$ für positives g. Entsprechend definieren wir für ganzzahlige a, b, c den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a, b, c)$ als die positive ganze Zahl g mit $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} + c\mathbb{Z} = g\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(b) $\mathrm{ggT}(a, b, c) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b), c)$,

(c) Für gegebene ganze Zahlen a, b gibt es genau dann ganze c, d mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.

Hinweis zu (a): Euklidischer Algorithmus.

Lösung: Das ist ein Standard-Argument aus der elementaren Zahlentheorie.

(a) Der eukl. Algorithmus macht $\mathbb{Z}$ zu einem faktoriellen Ring. Also ist $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring. Das Ideal $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ wird also von einem g erzeugt, dieses ist eindeutig bis auf eine Einheit. Also gibt es ein eindeutiges $g \geq 0$, genannt $\mathrm{ggT}(a, b)$.

(b) $g = \mathrm{ggT}(a, b, c)$ ist der Erzeuger des Ideals $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} + c\mathbb{Z}$. Also ist $g\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} + c\mathbb{Z} = (a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}) + c\mathbb{Z} = (\mathrm{ggT}(a, b)\mathbb{Z}) + c\mathbb{Z} = \mathrm{ggT}((\mathrm{ggT}(a, b), c)\mathbb{Z}$.

(c) Wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, dann ist $1 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Damit gibt es also ganze c, d mit $1 = ad + b(-c)$. Umkehrung: Angenommen, es gibt c, d mit $ad - bc = 1$, dann wäre jeder gemeinsame Teiler von a, b schon ein Teiler von 1. Also liegt 1 im Ideal $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ und damit wird dieses erzeugt von 1. Also ist $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.