INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR
ANGEWANDTE
MATHEMATIK

Analysis I

WS 19/20

Blatt 10 - Update-Nr.: 2 13.01.2020

ARSnova-Code: 67 52 65 62

Abgabe bis Fr. 17.01.20, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)

Themen:

- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- Trigonometrische Funktionen
- Funktionenfolgen

Hinweise zur Bearbeitung:

- Wenn Sie bei Aufgabe 10.2 eine der Aussagen durch ein Gegenbeispiel widerlegen wollen, begründen Sie bitte warum dieses Beispiel funktioniert. D. h. zeigen Sie bitte auch, dass das entsprechende Beispiel tatsächlich die Bedingung für die eine Art der Stetigkeit erfüllt, und die Bedingung für die andere Art von Stetigkeit nicht erfüllt.

Aufgabe 10.1 (4 Punkte): Stetige Funktionen

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit

$$f(a) = 0 \quad \text{und} \quad f(x) \neq 42 \quad \forall x \in [a, b].$$

Dann gilt $f(b) < 42$. 1

(b) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit

$$f(42) > g(42) \quad \text{und} \quad f(x) \neq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt $f(x) > g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. 3

Aufgabe 10.2 (5 Punkte): Zusammenhang zwischen Stetigkeitsbegriffen

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig. 1

(b) Jede gleichmäßig stetige Funktion ist Lipschitz-stetig. 2

(c) Jede gleichmäßig stetige Funktion ist stetig. 1

(d) Jede stetige Funktion ist gleichmäßig stetig. 1

Bemerkung: Bitte beachten Sie die Hinweise zur Bearbeitung.

Aufgabe 10.3 (4 Punkte): Trigonometrische Funktionen

Beweisen Sie die im Beweis von Korollar 4.17.B auftauchende Tabelle und Korollar 4.17.A (siehe VL-19-2020-01-08). Korollar 4.17 und Ergebnisse, die auf Korollar 4.17 aufbauen, dürfen dabei nicht genutzt werden, da diese auf den zu zeigenden Aussagen aufbauen. Zeigen Sie also

(a) 3

$x =$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	—	-1	0	1

Bemerkung: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ *muss nicht gezeigt werden, da dies dem Satz 4.17 entspricht.*

(b) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad e^{i\pi} = -1, \qquad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \qquad e^{i2\pi} = 1.$ 1

Aufgabe 10.4 (7 Punkte): Differenzierbarkeit

Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = (x^x)^x, \quad x > 0$ 1

(b) $f(x) = \ln(x)^x, \quad x > 1$ 1

(c) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 - x}{x^3 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ 1

(d) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right), \quad x > 0$ 1

(e) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1 + x^2}, \quad x > 0$ 1

(f) $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}, \quad x \in (0, \pi)$ 1

(g) $f(x) = \ln(\tan(x)) - \dfrac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)}, \quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 1

Bemerkung: Bitte denken Sie daran, kurz zu erwähnen, warum die Funktionen differenzierbar sind und die Rechenregeln entsprechend anwendbar sind!

Bonusaufgabe 10.5 (6 Bonuspunkte): Konvergenz von Funktionenfolgen

EINLEITUNG:

Folgen (reeller) Zahlen sind uns jetzt bereits eine Weile vertraut. Allerdings gibt es auch Folgen von anderen Objekten. Insbesondere sogenannte *Funktionenfolgen* spielen in der Analysis eine wichtige Rolle. Eine Funktionenfolge definieren wir dabei wie folgt.

Definition: *Funktionenfolgen*

*Sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine **Folge von Funktionen (Funktionenfolge)** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung*

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto f_n,$$

die jedem Index n eine Funktion $f_n : D \to \mathbb{R}$ zuordnet.

Aber was bedeutet Konvergenz bei einer solchen Folge? Hier können wir zunächst auf den uns bekannten Zahlenfolgen aufbauen und bemerken, dass eine Funktionenfolge für festes $x \in D$ immer eine Zahlenfolge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad a_n = f_n(x)$$

liefert. Es liegt also nahe, Konvergenz von Funktionenfolgen so zu verstehen, dass für jedes $x \in D$ die entsprechende Zahlenfolge konvergieren soll. Das führt uns auf unseren ersten Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen.

Definition: *Punktweise Konvergenz*
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$. Für $x \in D$ ist $(f(x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Gilt nun

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in D,$$

*dann **konvergiert** die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **punktweise** gegen die Grenzfunktion f.*

Oder anders ausgedrückt:

*Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ **konvergiert punktweise** gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls*

$$\forall x \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt.

Allerdings ist punktweise Konvergenz recht unbefriedigend. Denn beispielsweise muss die Grenzfunktion f nicht stetig sein, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur punktweise gegen f konvergiert, auch wenn die Funktionen f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig sind. Würden die Funktionen f_n von einem Index n_ε an innerhalb eines "Schlauches" um die Grenzfunktion herum bleiben, hätten wir dieses und andere Probleme nicht. Das bringt uns auf die *gleichmäßige Konvergenz.* Der Begriff der Gleichmäßigkeit kommt uns von der gleichmäßigen Stetigkeit bekannt vor. Und tatsächlich bedeutet der Begriff auch hier die Unabhängigkeit der relevanten Größen von $x \in D$. Gleichmäßige Konvergenz wird wie folgt definiert.

Definition: *Gleichmäßige Konvergenz*
*Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$, falls*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon\ \forall x \in D : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt.

Gleichmäßige Konvergenz impliziert stets auch punktweise Konvergenz. Gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen haben eine Reihe von wichtigen und schönen Eigenschaften. Für weitere Infos sei hier auf entsprechende Lehrbücher verwiesen.

AUFGABE:

(a) Untersuchen Sie, ob die durch

$$f_n(x) := |\cos^n(x)|, \quad n \in \mathbb{N},$$

auf dem Intervall $D := [0, \pi]$ definierte Funktionenfolge auf D punktweise oder sogar gleichmäßig konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion. 4

(b) Wiederholen Sie die Untersuchung für dieselbe Funktionenfolge allerdings dieses Mal auf dem Intervall $\tilde{D} := [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \subset D$. 2