INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 11 - Update-Nr.: 2 10. Juli 2020

Abgabe bis Fr. 17.07.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Dies ist das letzte Übungsblatt. Für die Klausurzulassung sind 110 Punkte insgesamt ausreichend!
- Wir haben ein Infodokument hochgeladen, das Euch darüber informiert, welche Bestandteile und Themen der Veranstaltung relevant für die Klausur sind.

Themen:

- Globale Existenz
- Fundamentalmatrix
- Taylor-Polynome mithilfe von DGLn
- Lösbarkeitsbedingungen für RWPs

Aufgabe 11.1 (6 Punkte): Globale Existenz bei linearer Beschränktheit

Die Funktion $f(t, x)$ in dem Anfangswertproblem (AWP)

$$(*) \quad \begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)), \quad t \geq t_0 \\ u(t_0) &= u_0 \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

sei auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ stetig und *linear beschränkt*, d. h. es gelte

$$\|f(t, u(t))\| \leq \alpha(t)\, \|u(t)\| + \beta(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

mit auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen und nicht-negativen Funktionen α, β.

(a) Man zeige, dass dann das AWP $(*)$ eine globale, d. h. auf ganz $[t_0, \infty)$ (bzw. sogar auf ganz $\mathbb{R}$) definierte Lösung u besitzt. Diese muss jedoch nicht notwendigerweise eindeutig sein. 4

Tipp: Gronwall-Lemma

(b) Man untersuche, ob die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f_1\left(t, x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}\right) &= t\, |x_1|^{\frac{1}{2}} + \sin(t) x_2, \\ f_2\left(t, x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}\right) &= e^{-t^2|x_1|} + x_1 \left(1 + x_2^2\right)^{-1} \end{aligned}$$

jeweils auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ linear beschränkt sind. *Vorschlag zum Weiterdenken: Man denke darüber nach, wann die Lösungen von AWPs mit f_1, f_2 eindeutig sind. Dies ist aber nicht Teil der Aufgabe.* 2

Aufgabe 11.2 (4 Punkte): Taylor-Entwicklung bei DGLn

Man berechne das Taylor-Polynom $T_4(u, t, t_0 = 0)$ mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ der 4. Ordnung der Lösung $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
u''(t) &= -\sin(u(t)) - 2u'(t), \quad t \geq 0,\\
u(0) &= 0,\\
u'(0) &= 1.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Man muss dazu nicht die Lösung u tatsächlich berechnen!

MOTIVATION: Dies zeigt uns erneut, wie mächtig die Taylor-Entwicklung ist! Wir können mithilfe des Taylor-Polynoms also Lösungen von Anfangswertproblemen approximieren, selbst wenn wir diese gar nicht berechnen können, wie etwa im Falle des Räuber-Beute-Modells.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte): Fundamentalmatrix für DGL-System

Ein Differentialgleichungssystem $u'(t) = A(t)u(t) + (1, t)^{\mathrm{T}}$ habe die Fundamentalmatrix

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ t^2 & t^2 - t + 1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimmte die Matrix $A(t)$ des Differentialgleichungssystems sowie die Lösung $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
u'(t) &= A(t)u(t) + (1, t)^{\mathrm{T}}, \quad t \geq 0,\\
u(0) &= (1, 0)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.4 (6 Punkte): Lösbarkeit von Randwertproblemen

Ein Randwertproblemsystem 1. Ordnung

$$\begin{aligned}
y'(t) &= A(t)y(t) + f(t), \quad t \in D := [a, b] \subset \mathbb{R},\\
B_a y(a) &+ B_b y(b) = g
\end{aligned}$$

mit $b > a$, (konstanten) Matrizen $B_a, B_b \in \mathbb{R}^{n \times n}$, einem (konstanten) Vektor $g \in \mathbb{R}^n$ und den stetigen Matrix- bzw. Vektorfunktionen $A : D \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ ist (nach Satz 5.6.1 der Vorlesung) eindeutig lösbar genau dann, wenn

$(*)\quad B_a + B_b\phi(b) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär

ist, wobei ϕ die Fundamentalmatrix ist, die

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= A(t)\phi(t), \quad t \in D,\\
\phi(a) &= I
\end{aligned}$$

erfüllt, wobei $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix bezeichne.

(a) Man zeige: Für ein Randwertproblem 2. Ordnung (RWP-2.Ord.)

$$
\begin{aligned}
&u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = \varphi(t), \quad t \in D,\\
&\alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = \eta_0,\\
&\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b) = \eta_1,
\end{aligned}
$$

mit $p, q, \varphi \in \mathcal{C}([a, b])$ und $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \eta_0, \eta_1 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 > 0$ sowie $\beta_0^2 + \beta_1^2 > 0$, ist die Bedingung für eindeutige Lösbarkeit

$$
(**) \quad \det \begin{pmatrix} \alpha_0 u_1(a) + \alpha_1 u_1'(a) & \alpha_0 u_2(a) + \alpha_1 u_2'(a) \\ \beta_0 u_1(b) + \beta_1 u_1'(b) & \beta_0 u_2(b) + \beta_1 u_2'(b) \end{pmatrix} \neq 0
$$

für ein beliebiges Fundamentalsystem $\{u_1, u_2\}$ der homogenen Gleichung mit

$$
\begin{pmatrix} u_1(a) & u_2(a) \\ u_1'(a) & u_2'(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

äquivalent zu obigen Bedingung für eindeutige Lösbarkeit $(*)$, wenn man das RWP 2. Ordnung als System 1. Ordnung umschreibt.

Kurzfassung: Man zeige, dass die Bedingung $(**)$ für die eindeutige Lösbarkeit von (RWP-2.Ord.) äquivalent zur Bedingung $(*)$ für eindeutige Lösbarkeit ist, wenn man (RWP-2.Ord.) als System 1. Ordnung formuliert. $\boxed{3}$

(b) Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$
u''(t) + u(t) = 1
$$

hat die allgemeine Lösung

$$
u(t) = c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + 1
$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, die durch die Randbedingungen festgelegt werden, und $u : D \to \mathbb{R}$.

Für die folgenden drei Randwertbedingungen prüfe man, ob das entstehende Randwertproblem 2. Ordnung das Lösbarkeitskriterium $(**)$ aus Aufgabenteil (a) erfüllt und bestimme wieviele Lösungen für die Randwertprobleme jeweils existieren:

(i) $u(0) = u(\pi/2) = 0, \quad D = [0, \pi/2]$,

(ii) $u(0) = u(\pi) = 0, \quad D = [0, \pi]$,

(iii) $u(0) = u(\pi) = 1, \quad D = [0, \pi]$. $\boxed{3}$