Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2021/22

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. K. Hübner

Blatt 3
Abgabetermin: Freitag, 12.11.2013, 09.30 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte). Sei K ein Zahlkörper, und sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine in $\mathcal{O}_K$ gelegene Basis von K über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: $d(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und d_K unterscheiden sich multiplikativ um ein Quadrat; ist $d(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ quadratfrei, so bilden $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Ganzheitsbasis von $\mathcal{O}_K$.

Aufgabe 2 (6 Punkte). Zeigen Sie, dass $\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}^2\}$ eine Ganzheitsbasis von $K := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist, und bestimmen Sie die Diskriminante d_K von K.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Sei R ein Dedekindring.

(a) Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ paarweise verschiedene Primideale von R. Zeigen Sie die Existenz eines Elements $x \in R$ mit $x \in \mathfrak{p}_1 \smallsetminus \mathfrak{p}_1^2$ und $x \equiv 1 \mod \mathfrak{p}_i$ für $i = 2, \dots, n$.

(b) Falls R nur endlich viele Primideale hat, zeigen Sie, dass R ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte). Sei K ein Zahlkörper vom Grad n über $\mathbb{Q}$. Wir bezeichnen mit $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ die Einbettungen $K \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$. Für eine Ganzheitsbasis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von $\mathcal{O}_K$ betrachten wir

$$P = \sum_{\tau \in \mathfrak{A}_n} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \alpha_{\tau(i)} \quad \text{und} \quad N = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathfrak{A}_n} \prod_{i=1}^{n} \sigma_i \alpha_{\tau(i)},$$

wobei $\mathfrak{S}_n$ die symmetrische und $\mathfrak{A}_n$ die alternierende Gruppe bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Sowohl $P + N$ als auch PN liegen in $\mathbb{Q}$ und sind ganze Zahlen.

(b) Für die Diskriminante von K gilt $d_K = (P - N)^2 - 4PN$.

(c) Es gilt $d_K \equiv 1 \mod 4$ oder $d_K \equiv 0 \mod 4$.