Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
PROF. DR. A. SCHMIDT
DR. C. DAHLHAUSEN

Blatt 12
Abgabe: *Freitag, 09.07.2021, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1. **(6 Punkte)**
Sei p eine Primzahl. Die Monomorphismen $\alpha_n\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, 1 \mapsto p^{n-1}$, abelscher Gruppen induzieren einen Monomorphismus

$$\alpha\colon M := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} =: N.$$

Zeigen Sie:

(a) M ist vollständig bezüglich der p-adischen Topologie, d. h. $M \cong \lim_n M/p^nM$.

(b) M ist nicht vollständig bezüglich der Einschränkung der p-adischen Topologie von N auf M und die Vervollständigung von M ist natürlich isomorph zum direkten Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(c) Folgern Sie, dass die p-adische Vervollständigung kein rechtsexakter Endofunktor auf der Kategorie der abelschen Gruppen ist (vgl. Theorem 24.9).

Aufgabe 2 (Bewertungsringe[1])**.** **(12 Punkte)**
Ein *Bewertungsring* ist ein nullteilerfreier Ring A, für den gilt: für jedes Element $0 \neq x \in K := \mathrm{Quot}(A)$ ist $x \in A$ oder $x^{-1} \in A$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge der Ideale eines Bewertungsrings ist total geordnet bezüglich Inklusion.

(b) Ein Bewertungsring A ist lokal mit Maximalideal $\mathfrak{m} = \{0\} \cup \{x \in A \smallsetminus \{0\} \mid x^{-1} \notin A\}$.

(c) Ein Modul über einem Bewertungsring ist genau dann flach, wenn er torsionsfrei ist.
Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass ein endlich erzeugter, torsionsfreier A-Modul frei (und damit flach) ist. Hierzu zeigen Sie, dass jedes minimale Erzeugendensystem linear unabhängig ist.

(d) Ist $(A_i, (\phi_{i,j}\colon A_i \to A_j)_{i\leq j})_{i\in I}$ ein direktes System von Bewertungsringen, so ist sein direkter Limes $A := \varinjlim_{i\in I} A_i$ ebenfalls ein Bewertungsring.

(e) In einem Bewertungsring ist jedes endlich erzeugte Ideal bereits ein Hauptideal. Folgern Sie, dass ein Bewertungsring genau dann noethersch ist, wenn er ein Hauptidealring ist.

(f) Sei A ein Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Dann ist die Faktorgruppe $\Gamma := K^\times/A^\times$ total geordnet bezüglich der Relation $xA^\times \leq yA^\times :\Leftrightarrow xy^{-1} \in A$ und für die kanonische Projektion $|-|\colon K^\times \longrightarrow \Gamma, x \mapsto |x| := xA^\times$ gilt $|x+y| \leq \max\{|x|,|y|\}$.

Aufgabe 3 (Nüchterne Spektren[2])**.** **(6 Punkte)**
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei A eine K-Algebra von endlichem Typ, d. h. A ist als K-Algebra isomorph zu $K[T_1,\ldots,T_n]/I$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Ideal $I \subset K[T_1,\ldots,T_n]$. Wir versehen die Menge $\mathrm{Specm}(A)$ der Maximalideale von A mit der Unterraumtopologie der Zariski-Topologie von $\mathrm{Spec}(A)$. Zeigen Sie:

(a) Im Allgemeinen ist $\mathrm{Specm}(A)$ nicht nüchtern (Blatt 11, Aufgabe 3).

(b) Die Inklusionsabbildung $\varphi\colon \mathrm{Specm}(A) \to \mathrm{Spec}(A)$ ist die universelle stetige Abbildung von $\mathrm{Specm}(A)$ in einen nüchternen topologischen Raum: jede stetige Abbildung $f\colon \mathrm{Specm}(A) \to X$ in einen nüchternen topologischen Raum X faktorisiert in eindeutiger Weise über φ (d. h. es existiert eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $\tilde{f}\colon \mathrm{Spec}(A) \longrightarrow X$, so dass $f = \tilde{f} \circ \varphi$).

---

[1] Bewertungsringe werden auch das Thema eines Seminares im WS 2021/22 über Bewertungstheorie sein.
[2] Diese Aufgabe schließt die Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.