AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

04. Februar 2022

Modulformen 1 – Übungsblatt 13

Wintersemester 2021/22

Dies ist der letzte Übungszettel zur Vorlesung Modulformen 1 im Wintersemester 2021/22. Um an der Modulprüfung teilnehmen zu dürfen, sind 50% der 234 potentiell erreichbaren Punkte hinreichend.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Im Zuge von Satz 6.20 wurde für eine normierte Eigenform $f \in S_k$ mit $k := \mathrm{w} + 2$ ($\mathrm{w} \in \mathbb{N}$ gerade)

$$r_0\left(f|_k T_n\right) = \sigma_{\mathrm{w}+1}(n) r_0(f) + \sum_{l=1}^{\frac{\mathrm{w}-2}{2}} m_{2l,0}(n) r_{2l}(f)$$

nachgewiesen. Zeigen Sie, dass dieser Zusammenhang auch für eine beliebige Spitzenform f gilt.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

In dieser Aufgabe statten wir uns mit einem Werkzeug für den Beweis des Lemmas von Heilbronn aus, welchen wir in der Vorlesung außen vor gelassen haben. Dieses zielt auf ein Verständnis der Ketten- bzw. Näherungsbrüche aus Abschnitt 6.2 in Form von Polynomen ab.

Definition:
Für $m \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ seien die Polynome $Q_m \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots]$ rekursiv definiert durch

$$Q_{-1} := 0 \quad , \quad Q_0 := 1 \quad \text{und} \quad Q_m := X_m \cdot Q_{m-1} + Q_{m-2} \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \; .$$

Es ist offensichtlich, dass für $m \in \mathbb{N}$ stets $Q_m \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$. Im Folgenden schreiben wir deshalb stets $Q_m(X_1, \dots, X_m)$ statt $Q_m(X_1, X_2, \dots)$. Sei nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass unter obigen Voraussetzungen

$$[0, a_1, \dots, a_m] = \frac{Q_{m-1}(a_2, \dots, a_m)}{Q_m(a_1, \dots, a_m)} = \frac{p_m}{q_m}$$

für $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt.

(b) Weisen Sie per Induktion über m nach, dass die Polynome Q_m für $m \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ symmetrisch sind, also der Gleichung $Q_m(X_1, \dots, X_m) = Q_m(X_m, \dots, X_1)$ genügen.

(c) Folgern Sie aus (b) die Rekursionsgleichung

$$Q_m(X_1, \dots, X_m) = X_1 Q_{m-1}(X_2, \dots, X_m) + Q_{m-2}(X_3, \dots, X_m) \; .$$

Als Querverbindung zwischen Modulformen und der analytischen Zahlentheorie dienen L-Funktionen und **Dirichlet-Reihen** (nach Johann Peter Gustav Lejeune DIRICHLET), deren Stellenwert wir in der bisherigen Vorlesung unberücksichtigt ließen. Im Rahmen einer Aufgabenserie wird beginnend mit dem zehnten Übungszettel diese Materie studiert, die weiterhin regulär in die Punktevergabe eingeht und somit nicht als Bonusaufgabe deklariert ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei $k \geq 4$ gerade und $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_k$ eine normierte Hecke-Eigenform. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{l-1}(n) a_n n^{-s} = \frac{L(f,s) \cdot L(f,s-l+1)}{\zeta(2s+2-k-l)} \quad \text{für alle } l \geq 4 \text{ und } \mathrm{Re}(s) > l + \frac{k-1}{2} \ .$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeigen Sie unter Verwendung der Periodenrelationen die folgende Identität der Diskriminante Δ:

$$75 L(\Delta, 10) = 8\pi^2 L(\Delta, 8) \ .$$

Abgabe: online über MaMpf bis Freitag, den 11. Februar 2022, spätestens um 12 Uhr s. t.