Aufgabe 3

Wir zeigen per Induktion für $n \geq 1$ die Identität $\begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (i\pi)^n & n(i\pi)^{n-1} \\ 0 & (i\pi)^n \end{pmatrix}$. Der Induktionsanfang ist offensichtlich. Gelte die Behauptung für n. Dann ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (i\pi)^n & n(i\pi)^{n-1} \\ 0 & (i\pi)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i\pi & 1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (i\pi)^{n+1} & (i\pi)^n + n(i\pi)^n \\ 0 & (i\pi)^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (i\pi)^{n+1} & (n+1)(i\pi)^n \\ 0 & (i\pi)^{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \begin{pmatrix} (i\pi)^k & k(i\pi)^{k-1} \\ 0 & (i\pi)^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(i\pi)^{k-1}}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k}{k!} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{i\pi} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\pi)^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k}{k!} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Es gilt $B^2 = I_2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
e^B &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \\
&= I_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} + B \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \\
&= I_2 \cosh(1) + B \sinh(1) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + e^{-1} & e - e^{-1} \\ e - e^{-1} & e + e^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Es gilt (wie durch elementares Nachrechnen leicht zu verifizieren ist) $A = SJS^{-1}$ mit

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die allgemeine Lösung ist gegeben durch $Y = C \cdot e^{At}$. Gelte

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

womit wir den Induktionsschritt gezeigt haben. Der Induktionsanfang ist trivial. Durch Zusammensetzung zweier solcher Matrizen und unter Ausnutzung elementarer Eigenschaften für Blockmatrizen erhalten wir

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter berechnen wir

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{(k-1)!} = t \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = te^t$$

Es folgt

$$\begin{aligned} e^{At} &= Se^{Jt}S^{-1} \\ &= S \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k t}{k!} S^{-1} \\ &= S \begin{pmatrix} e^t & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} & 0 & 0 & & \\ 0 & e^t & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & e^t & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t & & \end{pmatrix} S^{-1} \\ &= e^t S \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & -t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$