Aufgabe 1

$$\vec{\nabla} E + \lambda \vec{\nabla} V = 0$$

$$-2 \cdot \frac{h^2}{8m} \begin{pmatrix} \frac{1}{a^3} \\ \frac{1}{b^3} \\ \frac{1}{c^3} \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda bc \\ \lambda ac \\ \lambda ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{4m}\frac{1}{a^3} \\ \frac{h^2}{4m}\frac{1}{b^3} \\ \frac{h^2}{4m}\frac{1}{c^3} \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile erhalten wir

$$\lambda = \frac{h^2}{4m}\frac{1}{abc}\frac{1}{a^2}$$

In die zweite Zeile eingesetzt folgt

$$\frac{h^2}{4m}\frac{1}{abc}\frac{1}{a^2} ac = \frac{h^2}{4m}\frac{1}{b^3}$$
$$b^2 = a^2$$

Analog kann man schlussfolgern

$$c^2 = a^2$$

Da negative Seitenlängen wenig Sinn ergeben, muss es sich bei dem Quader um einen Würfel handeln.

Aufgabe 2

Da die Masse sich nur auf der schiefen Ebene aufhält, muss folgende Zwangsbedingung gelten:

$$f = z \cdot \cos(\alpha) - (x - \xi)\sin(\alpha) = 0$$

Da wir dies später noch benötigen werden, bilden wir gleich auch noch die zweite Ableitung:

$$\ddot{f} = \ddot{z} \cdot \cos(\alpha) - (\ddot{x} - \ddot{\xi})\sin(\alpha) = 0$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten:

$$0 = F_x - m\ddot{x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = -m\ddot{x} - \lambda\sin(\alpha)$$
$$0 = F_z - m\ddot{z} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = -mg_z - m\ddot{z} + \lambda\cos(\alpha)$$

Wir stellen die erste Gleichung nach λ um und erhalten:

$$\lambda = -\frac{m\ddot{x}}{\sin(\alpha)}.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung kann man sofort m kürzen und erhält:

$$\ddot{z} = -\frac{\ddot{x}\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - g_z$$

Nun stellen wir die zweite Ableitung der Zwangsbedingung nach $\ddot{z}$ um:

$$\ddot{z} = (\ddot{x} - \ddot{\xi}) \cdot \tan(\alpha).$$

Eingesetzt in unser obiges Ergebnis erhalten wir nun eine Gleichung für $\ddot{x}$.

$$\begin{aligned}
-\frac{\ddot{x}\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} - g_z &= (\ddot{x} - \ddot{\xi}) \cdot \tan(\alpha) \\
\ddot{\xi} \cdot \tan(\alpha) - g_z &= \ddot{x}\left(\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) \\
\ddot{\xi} \cdot \sin^2(\alpha) - g_z \sin(\alpha)\cos(\alpha) &= \ddot{x}\left(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)\right) \\
\ddot{x} &= \ddot{\xi} \cdot \sin^2(\alpha) - g_z \sin(\alpha)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Wegen $\dot{x}(0) = 0$ führt Integration auf

$$\dot{x} = \dot{\xi} \cdot \sin^2(\alpha) - g_z \sin(\alpha)\cos(\alpha) \cdot t$$

Wegen $x(0) = 0$ führt Integration auf

$$x = \xi \cdot \sin^2(\alpha) - \frac{1}{2} g_z \sin(\alpha)\cos(\alpha) \cdot t^2$$

Mithilfe der Zwangsbedingung folgt umittelbar

$$z = \left(\xi \cdot \sin^2(\alpha) - \frac{1}{2} g_z \sin(\alpha)\cos(\alpha) \cdot t^2 - \xi\right) \cdot \tan(\alpha)$$

Aufgabe 3

(a) Es gilt der Energiesatz:

$$\begin{aligned}
\frac{m}{2}(\dot{\vec{x}}^2) - mgf(x) &= E \\
\dot{x}^2 + \dot{z}^2 &= \frac{2}{m}(E + mgf(x)) \\
\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= \frac{2}{m}(E + mgf(x)) \\
\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= \frac{2}{m}(E + mgf(x)) \\
\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) &= \sqrt{\frac{\frac{2}{m}(E + mgf(x))}{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}}
\end{aligned}$$

Analog zu letztem Semester erhalten wir

$$\Delta t = \int_{x_0}^{x_E} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{\frac{2}{m}(E+mgf(x))}{1+\left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}}}$$

(b) Hier ist nun $f(x) = x$, $E = 0$, $x_0 = 0$ und $x_E = 1$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \int_{x_0}^{x_E} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{gf(x)}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{g}}\sqrt{x}\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{g}}
\end{aligned}$$