Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 10 03. Juli 2020

Abgabe bis Fr. 10.07.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- In den beiden Aufgaben 10.1 und 10.2 müssen Anfangswertprobleme gelöst werden. Dies war nicht Teil der Vorlesung, sondern wurde in der Zentralübung vom 02. Juli 2020 besprochen. Das Lösen von linearen oder separierbaren eindimensionalen Differentialgleichungen 1. Ordnung ist ein klausurrelevantes Thema. Ausnahmsweise ist also der Inhalt der Zentralübung klausurrelevant!

Themen:

- Lineare Differentialgleichungen
- Separierbare Differentialgleichungen
- Existenz und Eindeutigkeit von Lsg.
- Stabilität von Lösungen von DGLn

Aufgabe 10.1 (6 Punkte): Newtonsches Abkühlgesetz

MOTIVATION:
Das Newtonsche Abkühlgesetz besagt, dass die Abkühlrate $T'(t)$ eines gut wärmeleitenden Körpers zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ proportional ist zur Differenz zwischen seiner Temperatur $T(t) \in \mathbb{R}$ und der (in dieser Aufgabe als konstant angenommenen) Umgebungstemperatur T_a. Das heißt es gilt

$$T'(t) = k\left(T(t) - T_a)\right), \ t \in [0, \infty),$$

mit einer Konstanten $k < 0$. Bezeichne weiter $T(0)$ die Anfangstemperatur des Körpers zum Startzeitpunkt $t_0 = 0$.

AUFGABE:

(a) Man bestimme die nichtkonstante Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} T'(t) &= k\left(T(t) - T_a\right), \ t \in [0, \infty), \\ T(0) &= T_0 > T_a. \end{aligned}$$ 3

(b) Wie lange dauert es, bis ein Körper bei einer Außentemperatur von $T_a = 20°$ auf $30°$ abgekühlt ist, wenn $T(0) = 100°$ und $T(20) = 60°$ ist? 2

(c) Man bestimme $\lim\limits_{t\to\infty} T(t)$ für die Lösung $T(t)$ des Anfangswertproblems mit den speziellen Daten aus Aufgabenteil (b). 1

Bemerkung: Es darf ohne Beweis angenommen werden, dass $T(t) > T_a$ für alle $t \in [0, \infty)$. Je nach Lösungsweg ist diese Annahme aber gar nicht notwendig, also nicht wundern, wenn Ihr sie nicht braucht.

Bemerkung: Einheiten können in der ganzen Aufgabe vernachlässigt werden.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten folgendes AWP:

$$T_k'(t) = k(T_k(t) - T_a)$$
$$T_k(0) = T_0$$

Hierbei handelt es sich um eine lineare DGL 1.Ordnung, wir formen die Gleichung um:

$$T_k'(t) + a(t)T_k(t) = b(t)$$

Wobei wir definieren:

$$a(t) := -k$$
$$b(t) := -kT_a$$

Zur Lösung der AWP verwenden wir die Variation der Konstante und lösen zunächst den homogenen Teil $T_h'(t) + a(t)T_h(t) = 0$. Dieser hat die Lösung:

$$T_h(t) = c \cdot \exp(\int_0^t -a(s)ds), c \in \mathbb{R}$$

Daraus ergibt sich durch einsetzen von $a(t)$:

$$T_h(t) = c \cdot \exp(\int_0^t -a(s)ds) = c \cdot \exp(\int_0^t kds) = c \cdot \exp(kt)$$

Wir bestimmen nun den inhomogenen Teil durch Variation der Konstante c. Es gilt:

$$\begin{aligned} c(t) &= \int_0^t e^{k\tau} b(\tau) d\tau \\ &= -\int_0^t e^{k\tau} kT_a d\tau \\ &= T_a \int_0^t (-k)e^{k\tau} d\tau \\ &=^{HDI} T_a[e^{-k\tau}]_0^t \\ &= T_a(e^{-kt} - 1) \end{aligned}$$

Für den inhomogenen Teil der Lösung $T_i(t)$ erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} T_i(t) &= c(t)e^{kt} \\ &= T_a(e^{-kt} - 1)e^{kt} \\ &= T_a(1 - e^{kt}) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Lösung:

$$T_k(t) = T_h(t) + T_i(t) = e^{kt}(T_a(e^{-kt} - 1) + c)$$

Nun bestimmen wir noch c, durch $T_k(0) = T_0$ erhalten wir: $c = T_0$

$$\Rightarrow T_k(t) = e^{kt}(T_a(e^{-kt} - 1) + T_0) = T_a + (T_0 - T_a)e^{kt}$$

(b) Wir müssen folgendes AWP lösen:

$$T'(t) = k(T(t) - 20)$$
$$T(0) = 100$$

Nach a) hat dies die Lösung:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{kt} = 20 + 80e^{kt}$$

Des weiteren soll die Lösung die folgende Bedingung erfüllen: $T(20) = 60$, daraus ergibt sich für k:

$$20 + 80e^{20k} = 60 \Leftrightarrow e^{20k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{1}{20}\ln(\frac{1}{2}) = -\frac{\ln 2}{20}$$

Somit ergibt sich $T(t) = 20 + 80 \cdot \frac{1}{2}^{(1/20)t}$ als die Lösung des AWP. Nun lösen wir noch $T(t) = 30$:

$$20+80\cdot\frac{1}{2}^{(1/20)t} = 60 \Leftrightarrow 10 = 80\cdot\frac{1}{2}^{(1/20)t} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{2}^{3} = \frac{1}{2}^{(1/20)t} \Leftrightarrow 3 = (1/20)t \Leftrightarrow t = 60$$

(c) Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} 20 + 80 \cdot \underbrace{\frac{1}{2}^{(1/20)t}}_{\to 0} = 20$$

Aufgabe 10.2 (4 Punkte): Nichtlineare Differentialgleichung

Man bestimme die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &y'(t) = -2t(1 + y(t))^2, \ t \in \mathbb{R} \\ &y(t_0) = y_0 \end{aligned}$$

für beliebige $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Achtung: Man achte darauf, dass alle Ausdrücke stets wohldefiniert sind und mache ggf. Fallunterscheidungen.

Lösungsvorschlag:

i. Wir untersuchen folgendes AWP:

$$\begin{aligned} y'(t) &= -2t(1 + y(t))^2 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

für beliebige $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und stellen zunächst fest, dass die rechte Seite

$$f(t, y) = -2t(1 + y)^2$$

stetig partiell diff'bar nach y ist und somit insbesondere lokal Lipschitz-stetig $\forall t, y \in \mathbb{R}$ bezüglich y.

ii. Weiter bemerken wir, dass $y'(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$, falls $1 + y(t) = 0$, also $y \equiv -1$.
Für $y_0 = -1$ haben wir also die Lösung $y \equiv -1$ des AWP. Diese ist wegen der festgestellten Lipschitz-Stetigkeit auch lokal eindeutig.

iii. Gelte im Folgenden $y_0 \neq -1$, dann gilt dies insbesondere auf einer Umgebung umy_0 für y. Wir können dann die DGL in die folgende Form bringen:

$$y'(t) = a(t)g(y(t))$$

Wobei hier definiert wird:

$$\begin{aligned} a(t) &:= -2t \\ g(y) &:= (1 + y)^2 \end{aligned}$$

Nach Vorlesung hat die DGL dann eine Lösung $y(t)$ die gegeben ist durch:

$$\underbrace{\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(x)} dx}_{=:G(y)} = \underbrace{\int_{t_0}^{t} a(s) ds}_{=:A(t)}$$

1. Wir lösen zunächst $A(t)$:

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{t_0}^{t} a(s) ds \\ &= \int_{t_0}^{t} -2s ds \\ &=^{HDI} [-s^2]_{t_0}^{t} = t_0^2 - t^2 \end{aligned}$$

2. Für $G(y)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
g(y &= \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(x)} dx) \\
&= \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{(1+x)^2} dx \\
&=^{HDI} [-(1+x)^{-1}]_{y_0}^{y(t)} \\
&= \frac{1}{1+y_0} - \frac{1}{1+y(t)}
\end{aligned}$$

3. Für $y(t)$ ergibt sich dann aus $A(t) = G(y)$:

$$\begin{aligned}
t_0^2 - t^2 &= \frac{1}{1+y_0} - \frac{1}{1+y(t)} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{1+y(t)} &= \frac{1}{1+y_0} + t^2 - t_0^2 \\
\Leftrightarrow 1 &= (\frac{1}{1+y_0} + t^2 - t_0^2)(1+y(t)) \\
\Leftrightarrow 1 &= \frac{1 + t^2 + y_0 t^2 - t_0^2 - y_0 t_0^2}{1+y_0}(1+y(t)) \\
\Leftrightarrow y(t) &= \frac{1+y_0}{1 + t^2 + y_0 t^2 - t_0^2 - y_0 t_0^2} - 1, \text{ falls * gilt} \\
\Leftrightarrow y(t) &= \frac{y_0 + t_0^2 + y_0 t_0^2 - t^2 - y_0 t^2}{1 + t^2 + y_0 t^2 - t_0^2 - y_0 t_0^2}, \text{ falls * gilt}
\end{aligned}$$

Wobei * bedeutet:

$$y_0 t_0^2 (1+y_0) < 1 \text{ oder } t \neq \frac{\pm\sqrt{-(1+y_0)(1-t_0-y_0 t_0^2)}}{1+y_0}$$

4. Wir untersuchen noch den Kritischen Fall:

$$y_0 t_0^2 (1+y_0) \geq 1 \text{ und } t = \frac{\pm\sqrt{-(1+y_0)(1-t_0-y_0 t_0^2)}}{1+y_0}$$

Dann hat aber, wie man aus 3. leicht erkennt, y in t eine nicht hebbare Definitionslücke.

iv. Wir untersuchen zuletzt für welche $t \in \mathbb{R}$ gilt, dass $y(t) = -1$ ausgehend von der gefundenen Lösung für y:

$$\begin{aligned}
&y(t) = -1 \\
\Leftrightarrow -1 &= \frac{y_0 + t_0^2 + y_0 t_0^2 - t^2 - y_0 t^2}{1 + t^2 + y_0 t^2 - t_0^2 - y_0 t_0^2}
\end{aligned}$$

Dies gilt jedoch nur falls $y_0 = -1$.

v. Somit erhalten wir abschließend folgende Lösungen für das AWP:

$$\begin{cases}
y \equiv -1 & \text{falls } y_0 = -1 \\
y(t) = \frac{y_0 + t_0^2 + y_0 t_0^2 - t^2 - y_0 t^2}{1 + t^2 + y_0 t^2 - t_0^2 - y_0 t_0^2} \ \forall t \neq \frac{-\sqrt{-(1+y_0)(1-t_0-y_0 t_0^2)}}{1+y_0}, \frac{\sqrt{-(1+y_0)(1-t_0-y_0 t_0^2)}}{1+y_0} & \text{falls } y_0 t_0^2 (1+y_0) \geq 1 \\
y(t) = \frac{y_0 + t_0^2 + y_0 t_0^2 - t^2 - y_0 t^2}{1 + t^2 + y_0 t^2 - t_0^2 - y_0 t_0^2} \ \forall t \in \mathbb{R} & \text{sonst}
\end{cases}$$

Aufgabe 10.3 (5 Punkte): Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von DGLn

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = (1 + |y(t)|)^{-1}, \ t \in [0, b],$$
$$y(0) = y_0,$$

wobei $y : [0, b] \to \mathbb{R}$ und $b > 0$.

(a) Man zeige mithilfe des Satzes von Peano, dass eine Lösung $y : [0, b] \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems existiert. Man zeige also insbesondere, dass diese eine Lösung für alle $t \in [0, b]$ wohldefiniert ist und die gegebene Differentialgleichung erfüllt. 2

(b) Man zeige weiter, dass diese Lösung y für festes $y_0 \in \mathbb{R}$ eindeutig ist. 2

(c) Sei nun zusätzlich $v : [0, b] \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$v'(t) = (1 + |v(t)|)^{-1}, \ t \in [0, b],$$
$$v(0) = v_0.$$

Man zeige, dass

$$|y(t) - v(t)| \leq e^t \, |y_0 - v_0| \ \ \forall t \in [0, b].$$ 1

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten die Funktion $f(t, y) = \frac{1}{1+|y|}$ ist unabhängig von t und $1 + |y| \neq 0 \ \forall y \in \mathbb{R}$ und damit als Komposition stetiger Funktionen stetig auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \alpha, \|y - u_0\| \leq \beta\}$, wobei hier gilt $\alpha = \beta = \infty$. Nach dem Satz von Peano existiert eine Lösung auf $I := [t_0 - T, t_0 + T]$ mit $T := \min(\alpha, \frac{\beta}{M})$ und $M := \max_{(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \|f(t, y)\|$
Wir zeigen, dass $M < \infty$, daraus folgt dann $T = \infty$ und weil $[0, b] \subset \mathbb{R}$ die Behauptung.
Es gilt: $f(t, y) = \frac{1}{1+|y|} \leq 1$ und deshalb $M = 1 < \infty$.

(b) Um den Eindeutigkeitssatz aus der Vorlesung anwenden zu können müssen wir Zeigen, dass $f(t, y)$ auf $[0, b]$ Lipschitz stetig ist:

$$|f(t, y) - f(t, x)| = \left| \frac{1}{1 + |y|} - \frac{1}{1 + |x|} \right| = \left| \frac{|x| + 1 - 1 - |y|}{1 + \underbrace{|x| + |y| + |xy|}_{\geq 0}} \right| \leq \left| \frac{|x| - |y|}{1} \right| \leq |y - x|$$

$\Rightarrow f$ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L=1. Aus dem Eindeutigkeitssatz aus der Vorlesung folgt nun die Eindeutigkeit der Lösung.

(c) Da f Lipschitz-stetig ist kann der Stabilitätssatz aus der Vorlesung angewandt werden,

$$|y(t) - v(t)| \leq e^{L(t - t_0)} \, |y(t_0) - v(t_0)|$$

mit $t_0 = 0$ und $L = 1$ folgt:

$$|y(t) - v(t)| \leq e^t \, |y_0 - v_0|$$

Aufgabe 10.4 (5 Punkte): Uneindeutigkeit von Lösungen von DGLn

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = 3(y(t))^{\frac{2}{3}}, \; t \in I$$
$$y(0) = 0,$$

wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges abgeschlossenes Intervall mit $0 \in I$ ist.

(a) Man zeige, dass mehrere verschiedene Lösungen für dieses Anfangswertproblem existieren. 1

(b) Warum widerspricht dies nicht dem Eindeutigkeitssatz aus der Vorlesung? Man begründe die Antwort. 2

(c) Man zeige weiter, dass sogar unendlich viele verschiedene Lösungen für dieses Anfangswertproblem existieren. 2

Lösungsvorschlag:

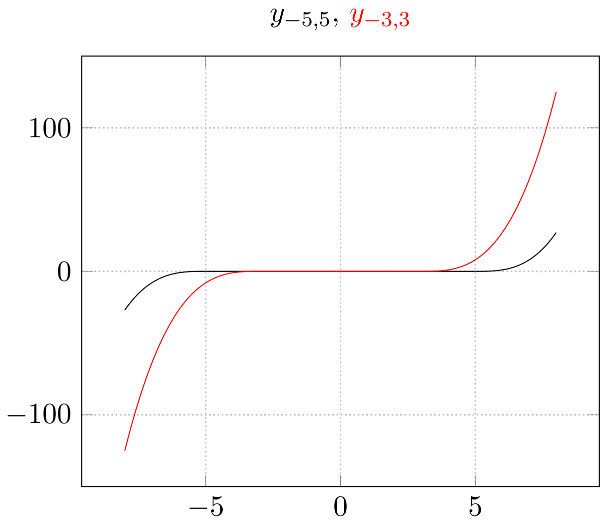
(a) Man findet leicht die Lösungen $y_1(t) = t^3$ und $y_2(t) = 0$, denn für beide Lösungen gilt: $y_1(0) = y_2(0) = 0$, die DGL ist für y_2 offensichtlich und für y_1 gilt:
$y_1'(t) = (t^3)' = 3t^2 = 3t^{3\frac{2}{3}} = 3(t^3)^{\frac{2}{3}}$

(b) Dies widerspricht nicht dem Eindeutigkeitssatz aus der Vorlesung, da $f(t, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ in keiner Umgebung um $y_0 = 0$ Lipschitz-stetig ist, denn f ist in $y_0 = 0$ nicht diff'bar, denn $\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| = \left|\frac{2}{y^{\frac{1}{3}}}\right| \to \infty$ für $y \to y_0 = 0$.

(c) Man sieht sofort, dass man $y_1(t) = 0$ und $y_\alpha(t) = (t - \alpha)^3$ glatt verbunden werden kann. Somit kann man $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$ folgende Funktion definieren:

$$y_{\alpha,\beta}(t) := \begin{cases} (t-\alpha)^3 & t < \alpha \\ 0 & t \in [\alpha, \beta] \\ (t-\beta)^3 & t > \beta \end{cases}$$

Diese Funktionen erfüllen alle das AWP, woraus die Behauptung folgt.


$y_{-5,5}$, $y_{-3,3}$
100
0
−100
−5
0
5
