Aufgabe 7.1 4 Punkte

Sei X ein Banach-Raum und $T \in \mathcal{L}(X, X)$ mit

$$\limsup_{m\to\infty} \|T^m\|^{1/m} < 1.$$

Dann ist $I - T$ bijektiv mit $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$ und es gilt

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

wobei $T^0 := I$ die Identität auf X bezeichne und T^n die n-fache Komposition $T \circ ... \circ T$ von T.

Viel leichter: $L(X,X)$ ist Banachraum. Zeige, dass $\sum_{n=1}^{n} T^n$ Cauchy-Folge ist.

Betrachte die Familie von Operatoren F_k := sum_0^k T^n. Sei x in X. Dann gilt

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|F_k(x)\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \Big\|\sum_{n=0}^{k} T^n(x)\Big\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{n=0}^{k} \|T^n(x)\| = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \underbrace{\|T^n(x)\|}_{\leq \|T^n\|\,\|x\|} \leq \|x\| \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \|T^n\|$$

Nach Voraussetzung gilt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$ und mit dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

Die punktweise Beschränktheit liefert uns mit dem Satz von Banach-Steinhaus, dass auch sup ||F_k|| endlich sein muss.
Weil X ein Banachraum ist, folgt außerdem aus der absoluten Konvergenz von sum_0^infty T^n(x) die Konvergenz.
Nach Satz 3.15 erhalten wir damit die Existenz eines stetigen Grenzwerts F \in L(X,X). Weiter gilt:

$$[F \circ (I-T)](x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \circ (I-T)(x) = \overbrace{\sum_{n=0}^{\infty} T^n(x) - T^{n+1}(x)}^{\text{Teleskop}} = T^0(x) = x$$

$$[(I-T)\circ F](x) = I\Big(\sum_{n=0}^{\infty} T^n(x)\Big) - T\Big(\sum_{n=0}^{\infty} T^n(x)\Big) = x + \sum_{n=1}^{\infty} T^n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} T^n(x) = x \checkmark$$

I - T ist also invers zu F, F = (I - T)^{-1}.

Aufgabe 7.2 4 Punkte

[1+1+1.5+0.5 Punkte]

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $Y \subset X$ ein linearer Unterraum. Zeigen Sie:

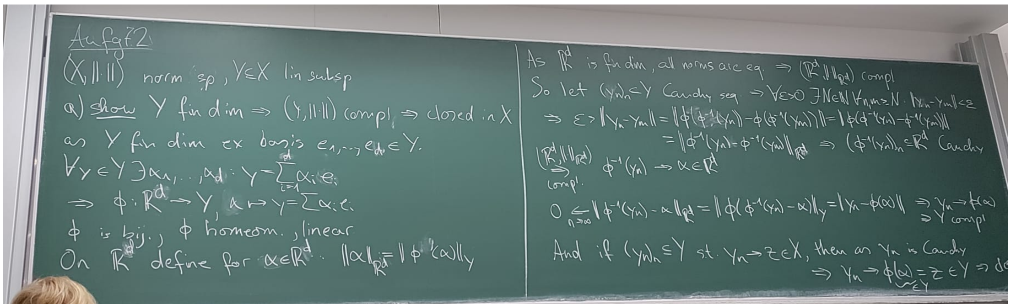
a) Ist Y endlich dimensional, so ist $(Y, \|\cdot\|)$ vollständig und insbesondere $Y \subset X$ abgeschlossen.

Mit VL (Bsp. 2) folgt sofort die Vollständigkeit. Nach Lemma 1.17 ist dann auch Y in X abgeschlossen.

b) Ist X ein Banachraum und Y besitzt nicht leeres Inneres, dann ist $Y = X$.

Beweis per Kontraposition: Wir nehmen an, dass X von Y verschieden ist, d.h. Y ist ein echter Unterraum von X und X\Y ist nichtleer.
Z.Z: Der Abschluss von X\Y ist der gesamte Raum. Für leeres Y ist das klar, sei also Y nichtleer
Sei y \in Y und x in X\Y. Dann ist y + a*x \in X\Y für alle a \in \R\{0}. Ansonsten wäre nämlich
alpha * x = (y + alpha*x) - y \in Y
und somit auch x in Y. Betrachte also die Folge x_n := y + 1/n * x. Diese konvergiert gegen y im Banachraum X.
Daher liegt y im Abschluss von X\Y und somit ist der Abschluss von X\Y bereits ganz X.

Wir sind an dieser Stelle schon fertig, weil das Innere von Y dadurch gekennzeichnet ist, dass es zu jedem Punkt einen Ball gibt,
der ganz in Y enthalten ist. Das kann aber nicht gegeben sein, wenn zu jedem Punkt y \in Yeine Folge in X\Y mit Grenzwert y existiert.



full proof of a

c) Ist X ein Banachraum, so besitzt X entweder eine endliche oder eine überabzählbare Hamelbasis, also insbesondere keine abzählbar unendliche.
Verwenden Sie den Satz von Baire.

Zunächst halten wir fest, dass nach LA1 jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Angenommen, X besitzt keine endliche Hamelbasis, aber dafür eine abzählbar unendliche Basis (v_i)_{i \in N}.
Dann lässt sich X schreiben als abzählbare Vereinigung der linearen Unterräume V_i = (v_i), die von einem Basiselement erzeugt werden.
Außerdem ist jedes V_i ein echter Unterraum (sonst wäre durch das Element v_i eine Basis gegeben).
Nach (a) sind diese Räume abgeschlossen und nach (b) ist ihr Inneres leer, d.h. V_i ist nirgends dicht für alle i.
Somit ist X mager, im Widerspruch zum Satz von Baire. Also besitzt X entweder eine endliche oder überabzählbare Basis.

d) Sei P der Raum aller reellwertigen Polynome. $(P, \|\cdot\|)$ ist für jede beliebige Norm $\|\cdot\|$ kein Banachraum.

Durch die Monome 1, x^1, x^2, ... ist eine abzählbar unendliche Basis von P gegeben (dass die Monome ein Erzeugendensystem bilden ist aus der Standarddarstellung der Polynome sofort ersichtlich. Lineare Unabhängigkeit ist auch klar per Definition:
Nur das Nullpolynom hat vor allen Monomen Koeffizient 0.
Mit Aufgabe (c) folgt daher, dass P kein Banachraum sein kann.

Aufgabe 7.3 4 Punkte

[1+1.5+1.5 Punkte]

Sei $X \subset L_1(\mathbb{R})$ ein abgeschlossener Untervektorraum mit

$$X \subseteq \bigcup_{p>1} L_p(\mathbb{R}).$$

$L_q \subset L_p$ falls $p < q$

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass ein $p_0 > 1$ existiert, sodass $X \subset L_{p_0}(\mathbb{R})$. Gehen Sie dafür, wie folgt vor:

$$\frac{1}{1+1/k} + \frac{1}{k+1} = 1$$

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Menge

$$F_k = \{f \in X \mid \|f\|_{L_{1+1/k}} \leq k\}.$$

wegen $k \geq 1$. warum?

Zeigen Sie, dass die F_k abgeschlossene Mengen bzgl. der L_1 Norm sind.

$$\int |f(x)|^{1+1/k} dx \leq k^{1+1/k}$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in F_k mit Grenzwert $f \in X$. z.z.: $f \in F_k$ d.h.

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} |f_n(x)|\right)^{1+1/k} dx \leq k^{1+1/k}$$

$$= \int \lim_{n\to\infty} |f_n(x)|^{1+1/k} dx$$

kann man den Limes vertauschen?

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq g(x) \ ?$$

a) define $F_k := \{ f \in X \mid \|f\|_{1+1/k} \leq k \}$

show: $F_k \subseteq L^1(\mathbb{R})$ closed

proof: Let $(f_n)_n \subseteq F_k$ $\quad f_n \xrightarrow{L^1} f \in L^1(\mathbb{R})$

By Ana 3 we know $\exists (f_{n_m})_m$ subsequence s.t. $f_{n_m} \to f$ λ-almost everywhere ptw.

$$\|f\|_{1+1/k}^{1+1/k} = \int_{\mathbb{R}} |f|^{1+1/k} \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{m \to \infty} |f_{n_m}|^{1+1/k} \, d\lambda$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_{n_m}|^{1+1/k} \, d\lambda \leq k^{1+1/k}$$

$\Rightarrow f \in F_k$

b) show $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ by showing $\|f\|_{1+1/k}^{1+1/k} \leq \|f\|_1 + \|f\|_p^p$

proof: Let $f \in X \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R})$ for some $p > 1$.

Let k be suff large s.t. $1 + 1/k \leq p$

$$\|f\|_{1+1/k}^{1+1/k} = \int_{\mathbb{R}} |f|^{1+1/k} \, d\lambda = \int_{\{|f|<1\}} |f|^{1+1/k} \, d\lambda + \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^{1+1/k} \, d\lambda$$

$$\leq \int_{\{|f|<1\}} |f|^1 \, d\lambda + \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^p \, d\lambda$$

$(0, \infty) \ni \alpha \mapsto c^\alpha$

$c < 1$ mon decr

$c \geq 1$ mon incr.

$$\leq \|f\|_1 + \|f\|_p^p$$

$$\Rightarrow \|f\|_{1+1/k} \leq \left(\|f\|_1 + \|f\|_p^p \right)^{1/(1+1/k)} \xrightarrow{k \to \infty} \|f\|_1 + \|f\|_p^p$$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \|f\|_{1+1/k} \leq k \Rightarrow f \in F_k.$

(b) Zeigen Sie, dass $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$.

Hinweis: Zeigen Sie $\|f\|_{L_{1+1/k}} \leq \left(\|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^p\right)^{\frac{1}{1+1/k}}$, *indem Sie das Integral geeignet aufspalten.*

$$\|f\|_{L_{1+1/k}}^{1+1/k} = \int |f|^{1+1/k}\,dx = \int_{\{|f|\leq 1\}} |f|^{1+1/k}\,dx + \int_{\{|f|>1\}} |f|^{1+1/k}\,dx$$

$$\leq \int_{\{|f|\leq 1\}} |f|\,dx + \int_{\{|f|>1\}} |f|^p\,dx \qquad \forall p > 1+1/k$$

$$\leq \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^p}^p$$

Sei f \in X. Dann existiert ein p > 0 mit f \in L_p(R). Für alle k \in \N mit 1+1/k < p gilt dann ||f||_1 + ||f||_p^p < C^(1/(1 + 1/k)) für C \in \R.
Wir suchen nun ein solches k, sodass C^(1/(1 + 1/k)) <= k gilt.
Es gilt 0.5 <= (1/(1 + 1/k)) < 1 für k >= 1 und somit C^(1/(1 + 1/k)) < C. Wähle also k >= C und k so groß, dass 1 + 1/k < p.
Dann ist f \in F_k.

(c) Folgern Sie, dass ein $p_0 > 1$ existiert, sodass $X \subset L_{p_0}(\mathbb{R})$.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Baire.

Annahme: $\bigcup L_p$ ist offen in L_1 und X ist von erster Kategorie

$\Rightarrow$ $\bigcup_{p>1} L_p \setminus X$ ist offen und von zweiter Kategorie

insbesondere nichtleer $\Rightarrow$ $\exists\ f \in \bigcup_{p>1} L_p \setminus X$.

Tut: proof: As X is closed subspace of L^1 $\Rightarrow$ X Banach space $\overset{\text{Baire}}{\Rightarrow}$ $\mathring{X} = \emptyset$

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k \overset{\text{Baire}}{\Rightarrow} \exists k_0 \in \mathbb{N} : \mathring{F}_{k_0} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists f_0 \in F_{k_0},\ r_0 > 0 : \overline{B_{r_0}^{L_1}(f_0)} \subseteq F_{k_0}$$

$\forall f \in X$:
$$f_0 + \underbrace{\frac{r_0 f}{2\|f\|_1}}_{\|\cdot\| = \frac{r_0}{2}} \in \overline{B_{r_0}}^{L_1} \subseteq F_{k_0}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{r_0 f}{2\|f\|_1}\right\|_{1+1/k_0} \leq \left\|f_0 + \frac{r_0 f}{2\|f\|_1}\right\|_{1+1/k_0} + \|f_0\|_{1+1/k_0} \leq 2k_0$$

$$\Rightarrow \|f\|_{1+1/k_0} \leq \frac{4k_0}{r_0}\|f\|_1 < \infty, \quad \text{with } p_0 := 1 + 1/k_0$$

Aufgabe 7.4 3 Punkte

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) A ist beschränkt (siehe Aufgabe 2.1).

ii) Für alle $f \in X'$ gilt: $\sup\{|f(x)| \mid x \in A\} < \infty$.

(i) => (ii): Lemma 3.3(g). Alternativ:

$$|f(x)| = |f(a_0 + d)| \leq |f(a_0)| + |f(d)| \qquad \|d\| \leq \operatorname{diam} A$$

$$\sup_{x \in A} |f(x)| \leq |f(a_0)| + \sup_{\|d\| \leq \operatorname{diam} A} |f(d)| < \infty \qquad \text{Stetigkeit von } f$$

(ii) => (i). Definiere F_x: X' -> \R durch F_x(f) = f(x). Behauptung: F_x ist linear und stetig.

- Linearität: F_x(a*f+g) = (a*f + g)(x) = a* f(x) + g(x) = a * F_x(f) + F_x(g).
- Stetigkeit: Sei f_n eine Folge von Funktionalen in X'. X' ist ein Banachraum, also existiert ein eindeutiger Grenzwert f in X'. Der punktweise Grenzwert erfüllt dabei die geforderten Bedingungen, es gilt also f(x) = lim f_n(x). Nun gilt F_x(lim f_n) = F_x(f) = f(x) = lim f_n(x) = lim F_x(f_n). Somit ist F_x stetig.

Betrachte nun die Familie von linearen Operatoren M = {F_x | x\in A} \subset L(X', \R).
M ist punktweise beschränkt: Sei dazu f \in X' beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung

infty > sup_{x \in A} |f(x)| = sup_{x \in A} |F_x(f)| = sup_{F \in M} |F(f)|.

Wir können also den Satz von Banach-Steinhaus anwenden und erhalten, dass die Familie von Operatoren beschränkt ist, sup_{F \in M} ||F|| = C < infty.

sup_{F \in M} ||F|| = sup_{x \in A} sup_{f \in X': ||f|| <= 1} |F_x(f)| = sup_{x \in A} sup_{f \in X': ||f|| <= 1} |f(x)|

$$= \sup_{x \in A} \sup_{f \in X' : \|f\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{f \in X'} \sup_{x \in A} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

Consider $J : X \hookrightarrow X'' = \mathcal{L}(X'; \mathbb{K})$

J isometric: $\|J(x)\|_{X''} = \|x\|_X$ (use Hahn-Banach for backwards direction)

Aufgabe 7.5 1 Punkt

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\|T_n\| \to \infty$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass ein $x \in X$ existiert, sodass die Folge $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

Angenommen, es existiert kein solches x. Dann ist die Familie von Operatoren T_n punktweise beschränkt, denn es gilt sup T_n(x) < infty für alle x \in X. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist dann aber sup ||T_n|| < \infty, im Widerspruch zu ||T_n|| -> infty.