Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2022

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. K. Hübner
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 11
Abgabe: *Freitag, 08.07.2022, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Frobeniusautomorphismen). **(4 Punkte)**
Sei K ein lokaler Körper mit endlichem Restklassenkörper und L/K eine endliche Galoiserweiterung. Wir bezeichen mit $L^{\mathrm{nr}}/K^{\mathrm{nr}}$ die Erweiterung der jeweiligen maximalen unverzweigten Erweiterungen, sodass $L^{\mathrm{nr}} = L \cdot K^{\mathrm{nr}}$. Wir betrachten die Menge der *Frobeniusautomorphismen*

$$\mathrm{Frob}(L/K) := \{\tilde{\sigma} \in \mathrm{Gal}(L^{\mathrm{nr}}/K) \mid \exists k \geq 1 \colon \tilde{\sigma}|_{K^{\mathrm{nr}}} = \varphi_K^k\},$$

wobei $\varphi_K \in \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K) \cong \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_q)$ den Frobeniusmorphismus bezeichne; diese ist offensichtlich abgeschlossen unter Multiplikation. Zeigen Sie, dass für $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Frob}(L/K)$ mit Fixkörper $\Sigma := (L^{\mathrm{nr}})^{\langle\tilde{\sigma}\rangle}$ gilt:

(a) $[\Sigma \colon K] < \infty$, (b) $\Sigma^{\mathrm{nr}} = L^{\mathrm{nr}}$, (c) $\tilde{\sigma} = \varphi_\Sigma$.

Insbesondere besteht $\mathrm{Frob}(L/K)$ genau aus den Frobenii endlicher Teilerweiterungen Σ/K von L^{nr}/K mit $\mathrm{Gal}(L^{\mathrm{nr}}/\Sigma) \cong \hat{\mathbb{Z}}$. Zeigen Sie:

(d) Die Einschränkungsabbildung $\mathrm{Frob}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$, $\tilde{\sigma} \mapsto \tilde{\sigma}|_L$, ist surjektiv.

Aufgabe 2 (Die Neukirchabbildung). **(4 Punkte)**
Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung lokaler Körper. Wir definieren die Abbildung

$$\tilde{\Upsilon}_{L/K} \colon \mathrm{Frob}(L/K) \longrightarrow K^\times/\mathrm{N}_{L/K}(L^\times), \quad \tilde{\sigma} \mapsto \mathrm{N}_{\Sigma/K}\pi_\Sigma,$$

wobei π_Σ eine Uniformisierende des Fixkörpers Σ von $\tilde{\sigma}$ bezeichne. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\tilde{\Upsilon}_{L/K}$ ist wohldefiniert.

(b) Ist $\tilde{\sigma}|_L = \mathrm{id}_L$, so ist $\tilde{\Upsilon}_{L/K}(\tilde{\sigma}) = 1$.

Seien nun $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 \in \mathrm{Frob}(L/K)$ und wir setzen $\tilde{\sigma}_3 := \tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_1$. Für $i \in \{1,2,3\}$ sei Σ_i der Fixkörper von $\tilde{\sigma}_i$ und π_i eine Uniformisierende von. Man kann zeigen, dass $\mathrm{N}_{\Sigma_3/K}(\pi_3) \equiv \mathrm{N}_{\Sigma_1/K}(\pi_1) \cdot \mathrm{N}_{\Sigma_2/K}(\pi_2) \mod \mathrm{N}_{L/K}(L^\times)$. Folgern Sie daraus:

(c) Die Abbildung $\tilde{\Upsilon}_{L/K}$ induziert einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus (*Neukirchabbildung*)

$$\Upsilon_{L/K} \colon \mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow K^\times/\mathrm{N}_{L/K}(L^\times), \quad \sigma \mapsto \tilde{\Upsilon}_{L/K}(\tilde{\sigma}),$$

wobei $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Frob}(L/K)$ eine Fortsetzung von σ bezeichne (welche nach Aufgabe 1(d) existiert).

Aufgabe 3 (Zerfällungsmodul). **(4 Punkte)**
Seien G eine endliche Gruppe, $\gamma \in \mathrm{H}^2(G,\mathbb{Z})$ ein Erzeuger, wobei wir $\mathbb{Z}$ mit der trivialen G-Wirkung verstanden wissen, und $\mathbb{Z}(\gamma)$ der zugehörige Klassenmodul. Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus $\mathbb{Z}(\gamma) \cong \mathbb{Z}[G]$ von G-Moduln existiert.

Aufgabe 4 (Formeln für das Cup-Produkt). **(4 Punkte)**
Sei G eine Gruppe und sei $A, B \in G\text{-}\mathtt{Mod}$. Zeigen Sie:

(a) Für $\alpha \in \mathrm{H}^i(G,A)$ und $\beta \in \mathrm{H}^j(G,B)$ ist $\mathrm{res}(\alpha \cup \beta) = \mathrm{res}(\alpha) \cup \mathrm{res}(\beta)$.

(b) Für einen Normalteiler N von G und $\alpha \in \mathrm{H}^i(G/H,A^H)$ und $\beta \in \mathrm{H}^j(G/H,B^H)$ ist $\inf(\alpha \cup \beta) = \inf(\alpha) \cup \inf(\beta)$.

(c) Für eine Untergruppe $H \subset G$ von endlichem Index und $\alpha \in \mathrm{H}^i(H,A)$ und $\beta \in \mathrm{H}^j(G,B)$ ist $\mathrm{cor}(\alpha \cup \mathrm{res}(\beta)) = \mathrm{cor}(\alpha) \cup \beta$.