Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie I

Wintersemester 2021/22

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. A. Schmidt
Dr. K. Hübner

Blatt 4
Abgabetermin: Freitag, 19.11.2013, 09.30 Uhr

Aufgabe 1 (7 Punkte).

(a) Sei $d < -1$ quadratfrei. Zeigen Sie: Die Einheiten von $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sind ± 1.

(b) Sei $d < -2$ quadratfrei. Zeigen Sie: $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist irreduzibel, aber nicht prim. Insbesondere ist $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ nicht faktoriell.

(c) Welche der Primzahlen < 15 sind Primelemente im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$? Wie lautet das allgemeine Zerlegungsgesetz für Primzahlen in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$?

Aufgabe 2 (6 Punkte). Sei ζ_3 eine primitive dritte Einheitswurzel in $\mathbb{C}$ und $R = \mathbb{Z}[\zeta_3]$. Zeigen Sie:

(a) R ist der Ganzabschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

(b) R ist euklidisch bezüglich der Funktion $N : R \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{N}, r \mapsto |r|^2$, wobei $|r|$ den Absolutbetrag von komplexen Zahlen bezeichnet.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Zeigen Sie, dass ein Dedekindring genau dann faktoriell ist, wenn er ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte). Man zeige: $X = 3$, $Y = \pm 5$ ist die einzige ganzzahlige Lösung der diophantischen Gleichung

$$X^3 = Y^2 + 2.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Primfaktorzerlegung von $x^3 = (y+\sqrt{-2})(y-\sqrt{-2})$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.