Aufgabe 6

(a) **Zu zeigem:** $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.

Beweis. Schritt 2 und Schritt 3 sind bereits erledigt. Daher betrachten wir die Menge $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} | \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$.

(i) Da $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}$ ist, muss $\Omega \in \mathcal{E}$ liegen, somit gilt $\mathbb{P}_1(\Omega) = \mathbb{P}_2(\Omega)$ und daraus folgt $\Omega \in \mathcal{D}$.

(ii) Sei $E \in \mathcal{D}$. Dann gilt $\mathbb{P}_1(E^c) = \mathbb{P}_1(\Omega \setminus E) = \mathbb{P}_1(\Omega) - \mathbb{P}_1(\Omega \cap E) = 1 - \mathbb{P}_1(E) = 1 - \mathbb{P}_2(E)$. Mithilfe analoger Umformungsschritte auf der rechten Seite erhält man $\mathbb{P}_1(E^c) = \mathbb{P}_2(E^c)$ und damit $E^c \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ ist also komplementstabil

(iii) Sei $\forall n \in \mathbb{N}$: $E_n \in \mathcal{D}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_1\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_1(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_2(E_n) = \mathbb{P}_2\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n\right).$$

Somit ist auch $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}$ ist also ein Dynkin-System. Da $\mathcal{E}$ schnittstabil ist, gilt $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$. Insbesondere folgt unter Benutzung des $\pi - \lambda-$Satzes

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) = \delta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D},$$

da $\mathcal{D}$ ja ein Dynkin-System ist, das $\mathcal{E}$ enthält. Wegen $\mathcal{D} \subset \mathcal{A}$ erhalten wir die sofort $\mathcal{A} = \mathcal{D}$. Somit gilt $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A) \forall A \in \mathcal{A}$. □

(b) **Behauptung:** $\sigma(\mathcal{E}) = 2^\Omega$. Außerdem sind die Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ eindeutig gegeben durch

$$\mathbb{P}_1(\{x\}) = 0.25 \forall x \in \Omega$$

$$\mathbb{P}_2(\{a\}) = \mathbb{P}_2(\{c\}) = 0.2, \quad \mathbb{P}_2(\{b\}) = \mathbb{P}_2(\{d\}) = 0.3$$

und stimmen auf $\mathcal{E}$ überein, nicht aber auf 2^Ω.

Beweis. Eine σ-Algebra enthält stets Ω und ist stabil bezüglich Schnitt, Vereinigung und Komplement. Daher liegen $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $\{a\} = A \setminus C$, $\{b\} = A \cap C$, $c = C \setminus A$ und $\{d\} = \Omega \setminus (A \cup C)$ in $\sigma(\mathcal{E})$. Aus den Mengen $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ erhält man durch disjunkte Vereinigung jede Teilmenge $E \in 2^\Omega$. Daraus folgt auf der einen Seite $\sigma(\mathcal{E}) = \Omega$. Auf der anderen Seite folgt auch, dass $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$ durch die Werte auf diesen vier einelementigen Mengen bereits eindeutig bestimmt sind, da jeder beliebige Wert als disjunkte Vereinigung aus den Mengen und damit als Summe aus den Werten von $\mathbb{P}_i$ konstruiert werden kann. Offensichtlich ist $\mathbb{P}_1(\{a\}) \neq \mathbb{P}_2(\{a\})$. Daher stimmen die beiden Maße auf 2^Ω nicht überein. Es gilt aber $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_1(\{a\} \uplus \{b\}) = \mathbb{P}_1(\{a\}) + \mathbb{P}_1(\{b\}) = 0.5 = \mathbb{P}_2(\{a\}) + \mathbb{P}_2(\{b\}) = \mathbb{P}_2(A)$ und $\mathbb{P}_1(B) = \mathbb{P}_1(\{b\} \uplus \{c\}) = \mathbb{P}_1(\{b\}) + \mathbb{P}_1(\{c\}) = 0.5 = \mathbb{P}_2(\{b\}) + \mathbb{P}_2(\{c\}) = \mathbb{P}_2(B)$. □

Offensichtlich ist $\mathcal{E}$ einfach nicht schnittstabil, da $A \cap C = \{b\} \notin \mathcal{E}$. Also lässt sich auch der Maßeindeutigkeitssatz nicht anwenden.

Aufgabe 8

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\mathrm{Hyp}_{(N,M,n)}}(\omega) &= \frac{\binom{N-M}{n-\omega}\binom{M}{\omega}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{\frac{(N-M)!}{(N-M-(n-\omega))!\cdot(n-\omega)!}\cdot\frac{M!}{(M-\omega)!\cdot\omega!}}{\frac{N!}{(N-n)!\cdot n!}} \\
&= \frac{n!}{(n-\omega)!\cdot\omega!}\cdot\frac{M!}{(M-\omega)!}\cdot\frac{(N-n)!}{N!}\cdot\frac{(N-M)!}{(N-M-(n-\omega))!} \\
&= \binom{n}{\omega}\cdot\frac{M^\omega\cdot\prod_{i=1}^{\omega}(1-\frac{i}{M})}{N^\omega\cdot\prod_{i=1}^{\omega}(1-\frac{i}{N})}\cdot\frac{(N-M)^{n-\omega-1}\prod_{i=1}^{n-\omega-1}\left(1-\frac{i}{N-M}\right)}{N^{n-1-\omega}\prod_{i=\omega}^{n-1}(1-\frac{i}{N})}
\end{aligned}$$

Bilden wir nun den Grenzwert $\lim\limits_{N,M\to\infty}$, so erhalten wir

$$= \lim_{N,M\to\infty}\binom{n}{\omega}\cdot\left(\frac{M}{N}\right)^\omega\cdot\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-\omega-1}$$

Wegen $M/N \to p$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{\omega}\cdot(p)^\omega\cdot(1-p)^{n-\omega-1} \\
&= \mathbb{P}_{\mathrm{Bin}_{(n,p)}}(\omega)
\end{aligned}$$

(b) Die Situation kann durch eine hypergeometrische Verteilung $\mathrm{Hyp}_{(N,M,n)}$ mit $N = 1000, M = 200, n = 10$ modelliert werden. Daher erhalten wir als exaktes Ergebnis

$$\mathbb{P}_{\mathrm{Hyp}_{(1000,200,10)}}(2) = \frac{\binom{800}{8}\binom{200}{2}}{\binom{1000}{10}} \approx 0.304$$

und für die Näherung durch $\mathrm{Bin}_{(10,0.2)}$ ergibt sich

$$\mathbb{P}_{\mathrm{Bin}_{(10,0.2)}}(2) = \binom{10}{2}(0.2)^2(0.8)^2 \approx 0.302.$$

(c) Die Zähldichte entspricht genau einer Binomialverteilung $\mathrm{Bin}_{(n,p)}$ mit $n = 100$ und $p = 0.01$. Es gilt nun für das eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}(\{x|2 \le x \le 100\}) = \mathbb{P}(\{1,\dots,100\}\setminus\{0,1\}) = 1 - \mathbb{P}_{\mathrm{Bin}_{(100,0.01)}}(0) - \mathbb{P}_{\mathrm{Bin}_{(100,0.01)}}(1).$$

Wegen $\mathbb{P}_{\mathrm{Bin}_{(100,0.01)}}(0) = \binom{100}{0}\cdot 0.01^0\cdot 0.99^100 \approx 0.366$ und $\mathbb{P}_{\mathrm{Bin}_{(100,0.01)}}(1) = \binom{100}{1}\cdot 0.01^1\cdot 0.99^99 = 0.370$ erhalten wir damit als exakte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{x|2 \le x \le 100\}) \approx 1 - 0.366 - 0.370 = 0.264$. Wir nähern nun die Binomialverteilung durch eine Poisson-Verteilung. Wegen $p \cdot n = 0.01 \cdot 100 = 1$ wählen wir $\lambda = 1$ und erhalten $\mathbb{P}_{\mathrm{Bin}_{(100,0.01)}}(0) \approx \mathbb{P}_{\mathrm{Poi}_1}(0) = e^{-1}\frac{1^0}{0!} = \frac{1}{e}$ und $\mathbb{P}_{\mathrm{Bin}_{(100,0.01)}}(1) \approx \mathbb{P}_{\mathrm{Poi}_1}(1) = e^{-1}\frac{1^1}{1!} = \frac{1}{e}$. Für die genäherte Wahrscheinlichkeit ergibt sich damit $\mathbb{P}(\{x|2 \le x \le 100\}) \approx 1 - \frac{2}{e} = 0.264$.