Namen: ____________________

____

Aufgabe	5.1	5.2	5.3	Z5.1	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 5

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 5.1 (Konvergenz von Produkt zweier Folgen) **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $f_k, f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen mit $f_k \to f$ in $L^1(X, \mu)$. Seien $g_k, g\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen mit $\sup_k \|g_k\|_{L^\infty(X,\mu)} < \infty$ und $g_k \to g$ punktweise μ–fast–überall. Zeigen Sie, dass $f_k g_k \to fg$ in $L^1(X, \mu)$.

Aufgabe 5.2 (Relation zwischen L^p–Räumen) **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum.

a) Zeigen Sie, dass $L^1(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$ für alle $1 < p < \infty$ und dass

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^1(X,\mu)}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty(X,\mu)}^{\frac{p-1}{p}} \qquad \text{für alle } f \in L^1(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu). \tag{2.1}$$

b) Sei $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeigen Sie, dass $L^q(X, \mu) \subset L^p(X, \mu)$, und dass eine Konstante $C > 0$ existiert, welche nur von p, q und $\mu(X)$ abhängt, so dass

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} \leq C \|f\|_{L^q(X,\mu)} \qquad \text{für alle } f \in L^q(X, \mu). \tag{2.2}$$

Ist $L^q(X, \mu) \subsetneqq L^p(X, \mu)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.3 (Konvergenzen) **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum. Seien $f_k, f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen.

a) Sei $f_k \to f$ in $L^1(X, \mu)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{k\to\infty} \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \qquad \int_X |f_k| \,\mathrm{d}\mu \xrightarrow{k\to\infty} \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu. \tag{3.1}$$

b) Sei $f_k \to f$ punktweise μ–fast–überall, und sei $g \coloneqq \sup_k |f_k|$ integrierbar. Zeigen Sie, dass dann $f_k \to f$ in $L^1(X, \mu)$.

c) Sei μ ein endliches Maß. Sei $f_k \to f$ im Maß μ und $\sup_k \|f_k\|_{L^\infty(X,\mu)} < \infty$. Dann gilt $f_k \to f$ in $L^1(X, \mu)$.

Tipp: Zu b): Konvergenzsätze erweisen sich als nützlich.

Zusatzufgabe 5.1 (Hölder Ungleichung) **3 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $1 \leq p_j < \infty$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = \frac{1}{p}. \tag{4.1}$$

Sei $f_j \in L^{p_j}(X, \mu)$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass $f \coloneqq \prod_j f_j \in L^p(X, \mu)$ und dass

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} \leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{p_j}(X,\mu)}. \tag{4.2}$$

Gilt die Hölderungleichung auch ohne die Annahme $p_j, p \geq 1$? Definieren Sie die Lebesgue Räume L^p für $0 < p < 1$ analog und diskutieren Sie Eigenschften (Vollständigkeit, Normiertheit, etc.).

Abgabe bis spätestens 10.12.2020, 14:00 Uhr in Moodle.