INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis I

WS 19/20

Blatt 11 - Update-Nr.: 1 20.01.2020

ARSnova-Code: 67 52 65 62

Abgabe bis Fr. 24.01.20, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)

Informationen:

- Bitte bedenken Sie während der Bearbeitung dieses Blattes, dass die heiBOX am Sonntag, den 19.01.20, voraussichtlich von 10 - 16Uhr nicht zur Verfügung steht!
- Zur Erinnerung: Es wird insgesamt 12 Übungsblätter geben. Da Aufg. 4.3 und Aufg. 11.3 (f) aus der Wertung genommen wurde, benötigen Sie **117** Punkte, um auf jeden Fall zur Klausur zugelassen zu werden.
- Dieses Übungsblatt wird in den Tutorien in der Woche vom 27.01-31.01. besprochen. Blatt 12 wird aus 20 Ja-Nein-Fragen bestehen, die jeweils einen Punkt geben. Blatt 12 wird nicht mehr in den Tutorien besprochen, sondern dient nur zum "last minute" Erwerben der Klausurzulassung oder zur Klausurvorbereitung.
- Am 29.01., 16:15-17:15Uhr wird es im INF 252, HS West eine Probeklausur geben. Falls Sie an dieser teilnehmen wollen, melden Sie sich bitte im MÜSLI dafür an. Die Probeklausur, sowie deren Lösung, werden in der heiBOX hochgeladen.
- Die Klausur findet am 07.02.20, 11:00-13:00Uhr statt. Die Anmeldung dazu wird ebenfalls via MÜSLI erfolgen. Aktuell ist dies aber noch nicht möglich. Wir werden Sie rechtzeitig über die Raumaufteilung, die Freischaltung der Anmeldung und alles weitere Wichtige in der Vorlesung und per Mail informieren.

Themen:

- Differenzierbarkeit
- Regel von de l'Hospital
- Taylor-Entwicklung
- Extremalbedingungen

Aufgabe 11.1 (6 Punkte): Differenzierbarkeit

Wir betrachten die für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$f_k(x) := \begin{cases} x^k \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

definierten Funktionen $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese Funktionen sind für $x \neq 0$ beliebig oft differenzierbar.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f_1 in $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist. 2

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion f_2 in $x_0 = 0$ einmal differenzierbar ist, aber die Ableitung dort nicht stetig ist. 2

(c) Ist die Funktion f_3 in $x_0 = 0$ zweimal differenzierbar und ist diese Ableitung, falls sie existiert, stetig? Begründen Sie Ihre Antwort! 2

Aufgabe 11.2 (4 Punkte + 1 Bonuspunkt(e)): Taylor-Entwicklung

Taylor-Reihen von recht unscheinbaren Funktionen müssen selbst nicht immer unbedingt simpel ausschauen. Ein eindrucksvolles Beispiel[1] ist die Taylor-Reihe von

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}.$$

Wir wollen in dieser Aufgabe, zeigen, dass die Taylor-Reihe $T_\infty(x, x_0)$ von $f(x) = \sqrt{x}$ für einen beliebigen Entwicklungspunkt $x_0 > 0$ gegeben ist durch

$$(*) \quad T_\infty(x, x_0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^{\frac{1}{2}-k}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-k\right) k!} (x - x_0)^k,$$

wobei $\Gamma(x)$ die sogenannte *Gamma-Funktion* ist.[2] Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Leiten Sie zunächst einen analytischen Ausdruck für $f^{(k)}(x)$, also für die k-te Ableitung, für $k \in \mathbb{N}$ her und beweisen Sie diesen. 2

(b) Nutzen Sie den Zusammenhang

$$(**) \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^k \prod_{n=0}^{k-1} (2n-1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{3}{2}-k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

um den Ausdruck aus (a) zu vereinfachen. 1

(c) Leiten Sie mithilfe des Ausdrucks $(**)$ aus (b) den Ausdruck $(*)$ für die Taylor-Reihe $T_\infty(x, x_0)$ von $f(x) = \sqrt{x}$ her. 1

(d) Statt den Zusammenhang $(**)$ direkt anzugeben, hatten wir zunächst überlegt, Ihnen drei andere Tipps zu geben, aus denen Sie $(**)$ hätten folgern müssen. Um einen Bonuspunkt zu bekommen, können Sie dies in diesem Aufgabenteil tun. Zeigen Sie also, dass aus den drei Formeln

$$\text{(i)} \quad -\frac{1}{2^{k-1}} \prod_{n=0}^{k-1} (2n-1) = \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\text{(ii)} \quad \Gamma(\varepsilon - k) = (-1)^{k-1} \frac{\Gamma(-\varepsilon)\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(k+1-\varepsilon)}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N},$$

$$\text{(iii)} \quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \pi$$

gemeinsam der Zusammenhang $(**)$ folgt. 1

[1] Diese Formel ist sicherlich ein Kandidat, den Sie präsentieren können, wenn Sie zeigen wollen, dass Erstsemester-Vorlesungen in der Mathematik kein Spaziergang sind. Aber keine Sorge, diese Formel können Sie mit Ihrem bisherigen Wissen und dem gegebenen Tipp selbst herleiten - muss ja niemand wissen, dass Sie einen Tipp hatten.

[2] Diese ist in gewisser Hinsicht eine Verallgemeinerung der Fakultät und ein beliebtes Schreckgespenst, wobei die Gamma-Funktion natürlich noch viel mehr ist. Sie ist eine dieser Funktionen, die einem in der Mathematik immer wieder mal begegnen. Für weitere Infos sei an dieser Stelle auf spätere Semester, Literatur, oder die Wikipedia-Seite `https://de.wikipedia.org/wiki/Gammafunktion` verwiesen.

Aufgabe 11.3 (5 Punkte + 4 Bonuspunkt(e)): Regel von de l'Hospital

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \left(e^{3x} - 5x\right)^{1/x}$, $\boxed{1}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(e^{3x} - 5x\right)^{1/x}$, $\boxed{1}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{5^x - 2^x}{x}$, $\boxed{1}$

(d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}\right)$, $\boxed{1}$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}$, $\boxed{1}$

(f) $\lim_{x\to 0} \left(\left(1 + x^{-1}\right)^x - e\right) \cdot x$. $\boxed{1}$

(g) $\lim_{x\to\infty} \left(\left(1 + x^{-1}\right)^x - e\right) \cdot x$. $\boxed{3}$

Tipp 1: Nicht für alle Grenzwerte ist die Regel von de l'Hospital anwendbar.
Tipp 2: Für Teile (f) und (g) kann die Transformation $y = x^{-1}$ nützlich sein.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte): Lineare Einfachregression

EINLEITUNG:

Der Dozent einer Analysis 1 Vorlesung wird gefragt, wieviele Übungsblätter er stellen muss bis niemand mehr Lösungen abgibt und wie lange somit die Beschäftigungsdauer der Tutoren sein muss. Glücklicherweise hat der Dozent schon mal eine Analysis 1 Vorlesung gehalten und sich notiert wieviele Abgabe es bei jedem Übungsblatt gab. Diese Daten sind in Tabelle 1 dargestellt.

Blattnummer x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl der Abgaben y_i	482	453	418	388	387	377	365	360	355

Tabelle 1. Datenpaare des Dozenten

Um vorhersagen zu können, wann niemand mehr Lösungen abgibt, muss der Dozent sich eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ überlegen, die jeder Blattnummer x eine Anzahl an Abgaben y zuordnet. Da der Dozent optimistisch ist, wählt der Dozent den Ansatz

$$(*) \quad f(x) = m \cdot x + b, \quad m, b \in \mathbb{R}.$$

Optimistisch deshalb, weil eine Exponentialfunktion wahrscheinlich ein realistischerer Ansatz wäre, diese aber nur für $x \to \infty$ gegen 0 geht. Allerdings weiß der Dozent noch nicht, wie er die Steigung m der Geraden und den Offset b wählen soll. Glücklicherweise arbeitet der Dozent in einer Arbeitsgruppe, die sich mit solchen Problemen auskennt, und weiß daher, dass man für solche Probleme den Ansatz der *kleinsten Fehlerquadrate* (engl.: *least squares*) anwenden kann. Dabei löst man das Optimierungsproblem

$$\min_{m,b\in\mathbb{R}} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - f(x_i)\right)^2 .$$

D. h. man wählt m und b so, dass die quadrierte Abweichung zwischen den vorhergesagten Abgabezahlen $f(x_i)$ und den tatsächlichen Abgabezahlen y_i minimiert wird.
N ist dabei die Anzahl der vorhandenen Datenpaare (x_i, y_i). Der Vorteil der kleinsten Fehlerquadrate ist, dass er die Lösung analytisch berechnen kann und sich (wenn er korrekt vorgeht) dabei nicht mal Gedanken darum machen muss, ob er am Ende tatsächlich ein globales Minimum oder doch ein lokales Minimum oder sogar ein Maximum oder einen Sattelpunkt hat, da die Funktion konvex ist und somit nur globale Minima hat auf den reellen Zahlen. Er hat auch schon herausgefunden, wie er b berechnen muss. Und zwar ist der optimale Wert b^* für b gegeben durch

$$(**) \quad b^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i) - m \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i) =: \bar{y} - m \cdot \bar{x}.$$

Dabei sind $\bar{x}$, $\bar{y}$ die Mittelwerte der x_i und y_i. Dass dabei nicht zwingend $y_1 = b^*$ gilt, schiebt der Dozent darauf, dass anfangs möglicherweise einige Studierende sich in der Vorlesung geirrt haben. Leider fehlt ihm immer noch eine Formel für den optimalen Wert m^* von m. Außerdem muss er jetzt los zur Doktorfeier eines Arbeitskollegen. Daher beschließt er, diese Aufgabe den Studierenden seiner Vorlesung zu überlassen.

<u>Aufgabe:</u>

(a) Leiten Sie einen Ausdruck für den optimalen Wert m^* von m her. Der optimale Wert m^* ist der Wert für m, sodass

$$r(m) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - f(x_i)\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - m \cdot x_i - b^*\right)^2$$

minimiert wird. Geben Sie einen Ausdruck an, der es erlaubt m^* explizit aus den Datenpaaren zu berechnen. *Tipp: Denken Sie an die Bedingungen für Extrema einer Funktion, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben.* $\boxed{3}$

(b) Ab welchem Übungsblatt gibt niemand mehr Lösungen hab (basierend auf dem Ansatz $(*)$ und den Daten aus Tabelle 1)? $\boxed{1}$

<u>Hintergrundinfo:</u>
Bei dem beschriebenen Verfahren handelt es sich um die sogenannte *lineare Einfachregression*. Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate ist von enormer Bedeutung in der modernen angewandten Mathematik und es gibt sowohl die *linear least squares* als auch die *nonlinear least squares* Methode. Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate spielt insbesondere eine große Rolle im Bereich des maschinellen Lernens.

Bonusaufgabe 11.5 (6 Bonuspunkte): Funktionenfolgen und Mittelwertsatz

Auf dem letzten Übungsblatt haben wir schon einmal mit Funktionenfolgen gearbeitet hat. Dieses Mal wollen wir erneut Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz untersuchen. Dabei wollen wir allerdings zur Untersuchung der gleichmäßigen Konvergenz den Mittelwertsatz verwenden.

Bestimmen Sie also die punktweisen Grenzwerte der folgenden Funktionenfolgen und untersuchen Sie mithilfe des Mittelwertsatzes, ob die Konvergenz gleichmäßig ist:

(a) $f_n(x) := \sin(\frac{1}{n}x), \quad x \in [-\pi, \pi]$, $\boxed{2}$

(b) $f_n(x) := nx(1-x)^n, \quad x \in [0, 1]$. $\boxed{4}$