Theoretische Physik IV: Quantenmechanik (PTP4)

Universität Heidelberg
Sommersemester 2021

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Carsten Littek

Übungsblatt 10

Besprechung in den virtuellen Übungsgruppen in der Woche 21. - 25. Juni 2021
Bitte geben Sie maximal 2 Aufgaben per Übungsgruppensystem zur Korrektur an Ihre Tutorin / Ihren Tutor!
Nutzen Sie dazu den Link `https://uebungen.physik.uni-heidelberg.de/h/1291`

1. *Verständnisfragen*

a) Erläutern Sie, wieso der Hamilton-Operator für geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern von dem Viererpotential A^μ abhängt. Kann das Vektorpotential gemessen werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Worin besteht die Dipolnäherung, und warum ist sie in vielen Fällen akzeptabel?

c) Inwiefern geht die Eichung des elektromagnetischen Feldes in den Hamilton-Operator ein?

2. *Exponentialfunktion und Leiteroperatoren*

Wir wollen uns im Zusammenhang mit kohärenten Zuständen des harmonischen Oszillators (vgl. Übungsblatt 7) mit der Exponentialfunktion für Auf- und Absteigeoperatoren beschäftigen.

(a) Zeigen Sie explizit mittels der Reihendarstellung der Exponentialfunktion für Operatoren, dass

$$a\, e^{za^\dagger} = z\, e^{za^\dagger} + e^{za^\dagger}\, a$$

gilt. Hier ist $z \in \mathbb{C}$ und $a, a^\dagger$ sind die Leiteroperatoren des harmonischen Oszillators.

(b) Zeigen Sie, dass sich die kohärenten Zustände, die Sie auf Übungsblatt 7 kennengelernt haben, mittels des unitären Operators $\hat{D}(z) \equiv e^{za^\dagger - z^* a}$ aus dem Vakuum erzeugen lassen, also dass $\hat{D}(z)\,|0\rangle = |z\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{z\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$.
Hinweis: Benutzen Sie die Baker-Campbell-Hausdorff Formel, deren Spezialfälle Sie auf Übungsblatt 2 diskutiert haben.

3. *Dreidimensionaler isotroper harmonischer Oszillator*

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse $\tilde{m}$ im dreidimensionalen Oszillatorpotenzial

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2}\tilde{m}\omega^2\vec{x}^2.$$

Der Hamiltonoperator des Systems ist gegeben durch

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{3} \hat{H}_i \qquad \text{mit} \qquad \hat{H}_i = \frac{\hat{p}_i^2}{2\tilde{m}} + \frac{1}{2}\tilde{m}\omega^2\hat{x}_i^2.$$

Ist $\mathcal{H}_i$ der Zustandsraum des Variablenpaares $\{\hat{p}_i, \hat{x}_i\}$, so ist der Zustandsraum des Gesamtsystems gegeben durch das Tensorprodukt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$. Man definiert nun für jedes Variablenpaar $\{\hat{x}_i, \hat{p}_i\}$ analog zum eindimensionalen Fall Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{\tilde{m}\omega}\,\hat{x}_i - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\tilde{m}\omega}}\,\hat{p}_i\right) \qquad \text{und} \qquad \hat{a}_i = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\left(\sqrt{\tilde{m}\omega}\,\hat{x}_i + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\tilde{m}\omega}}\,\hat{p}_i\right).$$

Diese erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j\right] = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\right] = 0 \qquad \text{und} \qquad \left[\hat{a}_i\,, \hat{a}_j^\dagger\right] = \delta_{ij}.$$

Die zugehörigen Teilchenzahloperatoren sind gegeben durch $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Sind $|n_i\rangle$ die Eigenvektoren des Hamiltonoperators $\hat{H}_i$, so bilden $|n_1 n_2 n_3\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle$ in $\mathcal{H}$ ein vollständiges Orthonormalsystem. Ist $|000\rangle$ der Eigenvektor des Grundzustands, so ist

$$\begin{aligned}\hat{a}_1\,|000\rangle &= \hat{a}_2\,|000\rangle = \hat{a}_3\,|000\rangle = 0,\\ |n_1 n_2 n_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!n_3!}} \left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1} \left(\hat{a}_2^\dagger\right)^{n_2} \left(\hat{a}_3^\dagger\right)^{n_3} |000\rangle\,.\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass bei einem Zentralpotenzial $\hat{H}, \hat{L}^2$ und $\hat{L}_3$ auch einen vollständigen Satz kommutierender Observabler bilden. Die gemeinsamen Eigenvektoren sind durch die Quantenzahlen n, ℓ und m gekennzeichnet mit den zugehörigen Eigenwerten E_n, $\hbar^2\ell(\ell+1)$ und $\hbar m$. Die Zustände $|n\ell m\rangle$ ergeben sich aus den Zuständen $|n_1 n_2 n_3\rangle$ durch unitäre Transformation.

a) Drücken Sie die Operatoren $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$ und $\hat{L}_3$ durch die Operatoren $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ aus.

Betrachten Sie die Zustände mit der Energie $E = \hbar\omega\left(1 + \frac{3}{2}\right)$. Die zugehörigen Eigenvektoren von $\hat{H}$ in der $|n_1 n_2 n_3\rangle$ Darstellung sind dann $|100\rangle$, $|010\rangle$, $|001\rangle$. Diese bilden eine Basis des Unterraumes der Eigenvektoren von $\hat{H}$ zum Eigenwert $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$.

b) Geben Sie die Matrix an, die dem Operator $\hat{L}_3$ bezüglich dieser Basis zugeordnet ist und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren von $\hat{L}_3$ als Linearkombinationen der Zustände $|100\rangle$, $|010\rangle$, $|001\rangle$.

c) Zeigen Sie, dass die in b) konstruierten Eigenvektoren von $\hat{L}_3$ auch Eigenvektoren von $\hat{L}^2$ zum Eigenwert $2\hbar^2$ sind (d.h. also, dass $\ell = 1$ ist). Drücken Sie dazu $\hat{L}^2$ durch $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ aus und wenden Sie $\hat{L}^2$ dann direkt auf die Eigenvektoren an.

d) Geben Sie die Ortsraumdarstellung der Zustände $|100\rangle$, $|010\rangle$ und $|001\rangle$ an und zeigen Sie, dass die in b) als Eigenvektoren von $\hat{L}_3$ konstruierten Linearkombinationen dieser Funktionen tatsächlich

$$\psi_{1m}(r,\vartheta,\varphi) = C r\,\mathrm{e}^{-\alpha^2 r^2/2}\, Y_{1m}(\vartheta,\varphi)$$

mit $C = \text{const.}$, $m = \{0, \pm 1\}$ und $\alpha = \sqrt{\bar{m}\omega/\hbar}$ ergeben.

4. Algebraische Herleitung des Wasserstoff-Spektrums

Das Coulomb-Potential (und damit das Wasserstoff-Problem) besitzt eine verborgene Symmetrie, die es erlaubt, das Spektrum rein algebraisch herzuleiten. Diese Herleitung wollen wir hier durchführen. Konsequenz der verborgenen Symmetrie, die nur beim Coulomb-Potential auftritt, ist die Existenz einer zusätzlichen Erhaltungsgröße, des Lenz'schen Vektors*

$$\hat{\vec{F}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}} - \hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{p}}\right) - \frac{Ze^2}{r}\hat{\vec{x}}.$$

Dieser Vektor ist hermitesch (überzeugen Sie sich davon), vertauscht mit dem Hamilton-Operator des Coulomb-Problems und ist senkrecht zum Drehimpuls.

---

*Wir bleiben bei der Notation von Zettel 9. Beachten Sie, dass im Vorlesungsskript der Lenz'sche Vektor als $\hat{\vec{Q}} = \hat{\vec{F}}/(Ze^2)$ in Gleichung (9.59) definiert ist.

a) Zeigen Sie folgende Relationen:

$$
\begin{aligned}
\hat{\vec{x}} \cdot \left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}}\right) &= \hat{\vec{L}}^2 \\
\left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}}\right) \cdot \hat{\vec{x}} &= \hat{\vec{L}}^2 + 2\mathrm{i}\hbar \hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{x}} \\
\left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}}\right)^2 &= \hat{\vec{p}}^2 \hat{\vec{L}}^2 \\
\hat{\vec{p}} \cdot \left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}}\right) &= 0 \\
\left(\hat{\vec{p}} \times \hat{\vec{L}}\right) \cdot \hat{\vec{p}} &= 2\mathrm{i}\hbar \hat{\vec{p}}^2
\end{aligned}
$$

und nutzen Sie diese um $\hat{\vec{F}}^2$ darzustellen als

$$\hat{\vec{F}}^2 = \frac{2}{m} \hat{H} \left(\hat{\vec{L}}^2 + \hbar^2\right) + Z^2 e^4.$$

Laut dieser Darstellung lassen sich die Energieeigenwerte, d.h. die Eigenwerte vom Hamilton-Operator $\hat{H}$, aus den Eigenwerten von $\hat{\vec{F}}^2$ berechnen.

b) Im Folgenden wollen wir zeigen, dass $\hat{\vec{L}}$ und $\hat{\vec{F}}$ eine geschlossene Algebra bilden, die $\hat{H}$ involviert. Leiten Sie dazu folgende Kommutator-Relationen her

$$\left[\hat{F}_i, \hat{F}_j\right] = -\frac{2\mathrm{i}\hbar}{m} \epsilon_{ijk} \hat{H} \hat{L}_k, \qquad \left[\hat{L}_i, \hat{F}_j\right] = \mathrm{i}\hbar \epsilon_{ijk} \hat{F}_k$$

her.

c) In Abschnitt 9.2.4 im Vorlesungsskript finden Sie die Operatoren

$$\hat{\vec{U}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{L}} + \sqrt{-\frac{m}{2\hat{H}}} \hat{\vec{F}}\right), \qquad \hat{\vec{V}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{L}} - \sqrt{-\frac{m}{2\hat{H}}} \hat{\vec{F}}\right)$$

Zeigen Sie

$$\left[\hat{U}_i, \hat{U}_j\right] = \mathrm{i}\hbar \epsilon_{ijk} U_k, \qquad \left[\hat{V}_i, \hat{V}_j\right] = \mathrm{i}\hbar \epsilon_{ijk} \hat{V}_k, \qquad \left[\hat{U}_i, \hat{V}_j\right] = 0.$$

Diese Vertauschungsrelationen entsprechen Algebren zweier unabhängiger Drehgruppen, $SO(3) \times SO(3)$. Diese Symmetrie ist (lokal) isomorph zu $O(4)$.

d) Argumentieren Sie, dass die möglichen Eigenwerte der Operatoren $\hat{\vec{U}}$ und $\hat{\vec{V}}$ nur die Werte $\hbar u(u+1)$ bzw $\hbar v(v+1)$ mit $u, v \in \mathbb{N}_0/2$ annehmen können. Zeigen Sie, dass

$$\hat{\vec{U}}^2 = \hat{\vec{V}}^2 = \frac{1}{4}\left(\hat{\vec{L}}^2 + \left(-\frac{m}{2\hat{H}}\right) \hat{\vec{F}}^2\right)$$

und daher $u = v$ gilt.

e) Wenden Sie nun $\hat{\vec{U}}^2$ auf Eigenzustände des Hamilton-Operators zum Eigenwert E an. Benutzen Sie die Relation aus Teil a), um daraus die möglichen Werte von E zu bestimmen. Bringen Sie schließlich das Ergebnis auf die bekannte Form mit der Hauptquantenzahl n.