# Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 1

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

*Abgabe:* Do 07.05.2020 um 9:15 Uhr

Wie in der Vorlesung sind im Folgenden alle Ringe kommutativ mit Eins.

**4. Aufgabe:** (*2+2+2 Punkte, Polynomringe über allgemeinen Ringen*) Sei $R$ ein Ring. Ein *Polynom* mit Koeffizienten in $R$ ist ein Ausdruck

$$f = f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n; \quad a_j \in R.$$

Die Menge der Polynome mit Koeffizienten in $R$ wird mit $R[t]$ bezeichnet. Ist in der obigen Darstellung $a_n \neq 0$, so heißt $n$ der *Grad* von $f$ (Notation $\deg(f)$). Wir haben eine natürliche Inklusion von $R \hookrightarrow R[t]$, die $r \in R$ das konstante Polynom $r$ ($a_0 = r$, $a_i = 0$ für $i \geq 1$) zuordnet. Seien $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ und $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ in $R[t]$. Wir definieren

$$f + g := \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) t^i \quad \text{und} \quad f \cdot g := \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) t^i.$$

Dann ist $(R[t], +, \cdot, 0)$ ein Ring. Die Inklusion $R \hookrightarrow R[t]$ ist ein Ringhomomorphismus.

(a) Man zeige: Ist $R$ nullteilerfrei, so gilt $R[t]^\times = R^\times$.

(b) Man zeige anhand einen Gegenbeispiels, dass die Aussage aus (a) für nicht nullteilerfreie Ringe im Allgemeinen falsch ist.

(c) Man gebe einen Ring $R$ und ein Polynom $f \in R[t] \setminus \{0\}$ an mit

$$\#\{r \in R \mid f(r) = 0\} > \deg(f).$$

**Bemerkung:** Ist $R$ ein Körper, so gibt es nach Korollar 4.10 aus der Linearen Algebra 1 kein solches Polynom.

**5. Aufgabe:** *(1,5+1,5+1,5+1,5 Punkte, Komplexe Zahlen als Faktorring)* Sei $\varphi\colon \mathbb{R}[t] \to \mathbb{C}$ die Abbildung

$$f = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \mapsto f(i) = a_0 + a_1 i + \cdots + a_n i^n.$$

Hierbei bezeichnet $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$. Man zeige:

(a) $\varphi$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

(b) Es ist $t^2 + 1 \in \ker(\varphi)$ und für alle $f \in \mathbb{R}[t] \setminus \{0\}$ mit $\deg(f) < 2$ gilt $\varphi(f) \neq 0$.

(c) Es gilt: $\ker(\varphi) = (t^2 + 1)$.
**Hinweis:** Man verwende Division mit Rest, Satz 4.6 aus der Linearen Algebra 1.

(d) Es gilt: Die Ringe $\mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$ und $\mathbb{C}$ sind isomorph, und $(t^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}[t]$ ist ein maximales Ideal.

**6. Aufgabe:** *(2+2+2 Punkte, Radikalideale)* Sei $R$ ein Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal. Wir definieren

$$\sqrt{I} := \{r \in R \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } r^n \in I\}.$$

(a) Man zeige: $\sqrt{I}$ ist ein Ideal in $R$ mit $I \subseteq \sqrt{I}$.

(b) Man zeige: Ist $I$ ein Primideal, so gilt $\sqrt{I} = I$.

(c) Man gebe ein Beispiel für einen Ring $R$ und ein Ideal $I \subseteq R$ an, sodass $I$ kein Primideal ist, aber $\sqrt{I} = I$ gilt.

**– bitte wenden –**

**7. Aufgabe:** *(2+3+1 Punkte, Ideale im Faktorring)* Ziel dieser Aufgabe ist es Bemerkung 1.14 aus der Vorlesung zu beweisen. Seien dazu $R$ ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und $\pi\colon R \to R/I$ die kanonische Projektion $r \mapsto \bar{r} = r + I$. Wir definieren Abbildungen $\Phi$ und $\Psi$ wie folgt:

$$\left\{\text{Ideale in } R/I\right\} \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \left\{\text{Ideale } \tilde{I} \text{ in } R \text{ mit } I \subseteq \tilde{I}\right\}$$
$$J \mapsto \pi^{-1}(J)$$
$$\pi(J) \leftarrow\!\shortmid J$$

(a) Man zeige, dass die Abbildungen $\Phi$ und $\Psi$ wohldefiniert und inklusionserhaltend sind.

(b) Man zeige, dass die Abbildungen $\Phi$ und $\Psi$ invers zueinander sind, es handelt sich also um inklusionserhaltende Bijektionen.

(c) Man bestimme für $R = \mathbb{Z}$ und $I = (15)$ alle Ideale in in $R/I$.

---

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.