Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 3 - Update-Nr.: 1 08. Mai 2020

Abgabe bis Fr. 15.05.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Achtet bei der Abgabe darauf, Eure Abgabe tatsächlich zu bestätigen.
- Genau eine (beliebige) Person pro Abgabegruppe gibt bitte die Lösungen ab, wobei aus denen der Name der zweiten Person, falls vorhanden, klar hervorgeht.
- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei: *Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf*. Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf*. Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.

Themen:

- Metriken
- Normen
- Hölder-Ungleichung
- Kompaktheit

Aufgabe 3.1 (6 Punkte): Metriken auf den reellen Zahlen

Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien folgende Abbildungen $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, 5$ definiert:

(a) $d_1(x, y) = (x - y)^2$, $\boxed{1}$

(b) $d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$, $\boxed{1}$

(c) $d_3(x, y) = \left|x^2 - y^2\right|$, $\boxed{1}$

(d) $d_4(x, y) = |x - 2y|$, $\boxed{1}$

(e) $d_5(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$. $\boxed{2}$

Man zeige oder widerlege jeweils, dass durch diese Abbildungen jeweils eine Metrik auf $\mathbb{R}$ gegeben ist.

Aufgabe 3.2 (3 Punkte): Normen aus Metriken konstruieren

Sei (X, d) ein metrischer Vektorraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ erfülle des Weiteren die Eigenschaften

(E1) $d(y - x, 0) = d(x, y)$,

(E2) $d(\lambda x, 0) = |\lambda|\, d(x, 0)$,

mit $x, y \in X$ und $\lambda \in K$. Man beweise, dass dann durch

$$\|x\|_d := d(x, 0) \quad \forall x \in X$$

eine Norm auf X definiert wird.

Aufgabe 3.3 (5 Punkte): Youngsche Ungleichung und Hölder-Ungleichung

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Man zeige zunächst für $a, b \geq 0$ den folgenden Spezialfall der Youngsche Ungleichung:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, d. h.

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \in [0,1]$$

erfüllt, wenn ihre zweite Ableitung nichtnegativ ist. $\boxed{3}$

(b) Seien nun zusätzlich $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Man folgere mithilfe der Youngschen Ungleichung, die Hölder-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$ $\boxed{2}$

Motivation: Auf den ersten Blick mag diese Aufgabe wenig mit unseren aktuellen Themen zu tun haben. Bei etwas genauerer Betrachtung entdecken wir aber auf der rechten Seite die p- bzw. q-Norm im $\mathbb{R}^n$, wo wir dann $a = (a_1, \dots, a_n)^T,\ b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ schreiben. Der Ausdruck auf der linken Seite ähnelt bis auf die Betragsstriche dem euklidischen Skalarprodukt oder wir identifizieren ihn als Summennorm eines Vektors $c \in \mathbb{R}$, der definiert ist durch $c_i = a_i \cdot b_i,\ i = 1, \dots, n$. Und tatsächlich erhalten wir für $p = q = 2$ die diskrete Variante der uns bereits bekannten Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Skalarprodukte und Normen.

Außerdem ist der zu führende Beweis der Prototyp für den Beweis der Hölder-Ungleichung

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

wobei $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu),\ g \in \mathcal{L}^q(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist, wobei wiederum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein sog. Maßraum ist und $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ der Raum der p-fach Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist. Keine Sorge, Ihr müsst noch nicht wissen, was Maßräume und das Lebesgue-Integral sind, dies wird Euch erst nächstes Semester begegnen, aber nun wisst Ihr zumindest wofür man die Hölder-Ungleichung denn braucht ;)

Die Hölder-Ungleichung ist wiederum die Grundlage für die Minkowski-Ungleichung

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

die zeigt, dass die L^p-Normen die Dreiecksungleichung erfüllen und somit tatsächlich Normen sind.

Aufgabe 3.4 (6 Punkte): Voraussetzungen des Satzes von Heine und Borel

Im Banachraum $\mathcal{C}([0,1])$ aller stetigen Funktionen $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, sei

$$B_1 := \{f \in \mathcal{C}([0,1]) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$$

die abgeschlossene Einheitskugel. Um sie von der offenen Kugel zu unterscheiden, nutzen wir hier B statt K als Bezeichnung.

(a) Man konstruiere eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \in B_1$ mit $\|f_n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$f_n(x)f_m(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1],\ \forall n \neq m.$$ 3

(b) Man zeige, dass eine solche Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine bzgl. der Supremumsnorm konvergente Teilfolge besitzt. 3

Bemerkung: Aufgabenteil (b) kann mithilfe der beschriebenen Eigenschaften auch gelöst werden, ohne dass man eine konkrete Folge in (a) konstruiert hat.

Motivation: Damit ist gezeigt, dass B_1 nicht kompakt ist, obwohl B_1 abgeschlossen und beschränkt ist. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Heine und Borel (Satz 2.2.5 aus der Vorlesung)? Nach dem Beweis zu dem Satz findet Ihr eine Bemerkung, dass der Satz von Heine und Borel nur für endlich-dimensionale Vektorräume gilt. Allerdings ist $\mathcal{C}([0,1])$ ein unendlich-dimensionaler Vektorraum, wie bereits in einem Video zu offenen Fragen kurz erwähnt. Mit der Aufgabe soll also nochmal die Bedeutung der Voraussetzung der endlichen Dimension betont werden.