INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis I

WS 19/20

Blatt 0 - Update Nr. 2 18.10.19

ARSnova-Code: 67 52 65 62

Präsenzübung: Dieses Blatt wird in den Tutorien der 43. Kalenderwoche (21.-27.10.2019) besprochen.

Informationen:

- Die Tutorien beginnen in der 43. Kalenderwoche (d.h., in der Woche vom 21.10.2019 bis 27.10.2019) mit einer Präsenzübung.
- Präsenzübung bedeutet, dass die folgenden Aufgaben **unbewertet** sind und in den Tutorien besprochen werden. Bitte geben Sie Ihre Lösungen daher **nicht** ab.
- Diese Aufgaben sollen Ihnen einen ersten Eindruck geben, wie die Übungsblätter aussehen werden und Ihnen die Chance geben, das Lösen solcher Aufgaben zu üben. Wir empfehlen Ihnen daher diese Aufgaben sorgfältig zu bearbeiten.
- Auch bei den Übungsblättern haben Sie die Möglichkeit, uns Feedback zu geben. Auch dazu nutzen wir `https://arsnova.eu/`. Den Zugangsschlüssel finden Sie oben links unter der Nummer des aktuellen Übungsblattes.

Aufgabe 0.1

Seien A, B Aussagen. Beweisen Sie die Regeln von De Morgan

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B),$$
$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

mithilfe von Wahrheitstafeln.

Aufgabe 0.2

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \; f(n) = n^2 + n + 41.$$

(a) Berechnen Sie

$$f(n) \text{ für } n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie:

$$f(n) \text{ ist für alle } n \in \mathbb{N} \text{ eine Primzahl.}$$

Auf einer früheren Version dieses Übungsblattes war die Funktion f falsch definiert. Bitte nutzen Sie die auf diesem Zettel angegebene Funktion!

Aufgabe 0.3

Beschreiben Sie die folgenden, durch Aufzählung beschriebenen, Mengen durch eine charakterisierende Eigenschaft, wie in dem folgenden Beispiel:

Beispiel: ***Mengenbeschreibung***
Aufzählende Beschreibung:

$$\mathcal{A} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$$

Beschreibung durch charakterisierende Eigenschaft:

$$\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \textit{ ist Primzahl}\}$$

(a) $\mathcal{A} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

(b) $\mathcal{C} = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25} \dots\}$

(c) $\mathcal{B} = \{3, 9, 27, 81, 243, \dots\}$

(d) $\mathcal{F} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$

Tipp: Bei der Menge $\mathcal{F}$ handelt es sich um die Folgenglieder einer sehr bekannten Zahlenfolge, die auch in der Kunst eine Rolle spielt. Dass das Element 1 zweimal aufgeführt ist, soll Ihnen helfen diese Zahlenfolge zu identifizieren.
Auch hier hatte sich auf einer früheren Version dieses Übungsblattes ein Fehler bei der Menge $\mathcal{C}$ eingeschlichen. Bitte nutzen Sie die auf diesem Zettel angegebene Menge!

Aufgabe 0.4 (Bonus)

Zeigen Sie, dass zwei irrationale Zahlen x, y existieren, sodass x^y rational ist.

Tipp 1: Irrational bedeutet, dass die Zahl nicht als Bruch dargestellt werden kann. Die Zahl π ist ein bekanntes Beispiel für eine irrationale Zahl. Die Menge der irrationalen Zahlen ist die Menge $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ und wird eine wichtige Rolle in der Analysis 1 spielen.

Tipp 2: Die Zahlen x und y müssen nicht zwingend verschieden sein.

Tipp 3: Machen Sie sich nicht zu viele Gedanken darüber, wie irrationale Exponenten funktionieren. Sie brauchen nur die üblichen Potenzgesetze, welche auch für irrationale Exponenten gültig sind.

Bemerkung zu Bonusaufgaben: *Gelegentlich werden wir Ihnen freiwillige Bonusaufgaben stellen, die anspruchsvoller sein können und ggf. nur indirekt in Bezug zu den Inhalten der Vorlesung stehen können. Zum einen sollen diese Aufgaben eine – hoffentlich interessante – Herausforderung sein und einen Blick über den Tellerrand der üblichen Analysis 1 Inhalte ermöglichen und zum anderen Ihnen die Chance geben, sich zusätzliche Punkte zu erarbeiten. Diese Aufgaben werden mit dem Hinweis "'(Bonus)"' markiert sein. Da alle Aufgaben auf diesem Übungsblatt unbewertet sind, sagt Ihnen dieser Hinweis in diesem Fall bloß, dass diese Aufgabe unter Umständen schwieriger ist als die übrigen Aufgaben.*

Die obenstehende Aufgabe ist ein erstes Beispiel für solche Aufgaben. Der Beweis ist, laut landläufiger Meinung im Internet, einer der elegantesten Beweise, der auch von Studienanfängern gut zu verstehen ist, und das obwohl die zu beweisende Aussage alles andere als trivial ist. Der Beweis ist letztlich nur wenige Zeilen lang, aber um auf diese zu kommen, braucht es unter Umständen etwas Zeit.