Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis I

WS 19/20

Blatt 09 - Update-Nr.: 1 22.12.2019

ARSnova-Code: 67 52 65 62

Abgabe bis Fr. 10.01.20, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)

Informationen:

- **Wir wünschen Ihnen schöne und erholsame Feiertage und einen guten Start in das neue Jahr!**

Themen:

- Vollständige Induktion
- Konvergenz von Folgen
- Konvergenz von Reihen
- Stetigkeit

Hinweise zur Bearbeitung:

- Dies Blatt besteht aus zwei Teilen: Der erste Teil (Aufgaben 9.1 - 9.4) sind Aufgaben, mit denen Sie hoffentlich ohne größeren Aufwand mehr als 50% (=10 Punkte) auf diesem Übungsblatt erreichen können. Mit dem zweiten Teil (Aufgaben 9.5 - 9.8) verfolgen wir zwei Ziele. Zum einen gibt er Ihnen die Möglichkeit, weitere Bonuspunkte zu sammeln, zum anderen wollen wir Ihnen damit Aufgaben zur Verfügung stellen, mit denen Sie sich auf die Klausur vorbereiten können. Ob Sie diese jetzt schon bearbeiten oder erst in der Klausurvorbereitung, bleibt Ihnen überlassen.
- Um den Korrekturaufwand für unsere Tutoren zu begrenzen, bitten wir Sie bei den Aufgaben 9.6 - 9.8 die Lösungen, wie in der jeweiligen Aufgabe beschrieben, anzugeben. Bei diesen Aufgaben zählen also nur die Ergebnisse und Lösungswege werden nicht bewertet oder korrigiert. Lösungen, bei denen die Tutoren Ihre Antworten erst zusammensuchen müssen, werden nicht berücksichtigt! Sie können Ihre Lösungswege später selbst überprüfen, wenn die Lösungen in der heiBOX bereitgestellt werden und in den Tutorien besprochen werden. Aufgabe 9.5 kann wie gewohnt beantwortet werden!

Aufgabe 9.1 (4 Punkte): Vollständige Induktion

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$ $\boxed{2}$

(b) Bestimmen Sie eine mit $(*)$ vergleichbare Darstellung für die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} (3k+2)^2.$$ $\boxed{2}$

Aufgabe 9.2 (4 Punkte): Konvergenz von Folgen

Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(a) $a_n := \sqrt[n]{nF^n},\ F \in \mathbb{R}_+,$ $\boxed{1}$

(b) $b_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^k,\ \rho \in [2, 100],$ $\boxed{1}$

(c) $c_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{S^k}{k!}, S \in \mathbb{R},$ $\boxed{1}$

(d) $d_n := \dfrac{3 - Fn^5}{\frac{n^5}{E} + n} \cdot \dfrac{R - GSTn}{\frac{U}{n} + Gn},\ E, F, G, R, S, T, U \in \mathbb{R}.$ $\boxed{1}$

Aufgabe 9.3 (6 Punkte): Konvergenz von Reihen

(a) Gegeben seien die Reihen

$$(1)\ \sum_{k=0}^{\infty} k \quad \text{und} \quad (2)\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)}.$$

(i) Wie lauten die Folgen der Partialsummen? $\boxed{1}$

(ii) Konvergieren die Reihen? $\boxed{1}$

(b) Berechnen Sie die Grenzwerte der Reihen

(i) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k},$ $\boxed{1}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{3^{k+1}} - \sqrt{3^k}}.$ $\boxed{1}$

(c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k},$ $\boxed{1}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!},$ $\boxed{1}$

Aufgabe 9.4 (6 Punkte): Stetige Funktionen

(a) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beschränkte (aber nicht notwendigerweise stetige) Funktion und $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x) := x \cdot h(x)$. Zeigen Sie, dass die Funktion u im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist. $\boxed{2}$

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion an, die überall unstetig ist, aber deren Betrag überall stetig ist. $\boxed{2}$

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass es eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ gibt, die im Punkt $x_0 = 0$ stetig und in alle anderen Punkten unstetig ist. $\boxed{2}$

Bonusaufgabe 9.5 (6 Bonuspunkte): Ein weiteres Konvergenzkriterium

(a) Zeigen Sie das folgende Konvergenzkriterium für Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_+$:

(i) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a,$ $\boxed{2}$

(ii) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$ $\boxed{1}$

Tipp: Sie dürfen wieder verwenden, dass die Wurzel streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+$ *ist.*

(b) Verwenden Sie dieses Konvergenzkriterium zur Untersuchung der Konvergenz folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

(i) $a_n := \sqrt[n]{n!},$ $\boxed{1}$

(ii) $b_n := \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}},$ $\boxed{1}$

(iii) $c_n := \dfrac{n^n}{n!}.$ $\boxed{1}$

Bonusaufgabe 9.6 (3 Bonuspunkte): Beschränktheit, Monotonie, Konvergenz

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie, Beschränktheit, und Konvergenz. Geben Sie bei der Beschränktheit ggf. möglichst scharfe untere und obere Schranken an. Die ggf. existierenden Grenzwerte brauchen Sie nicht berechnen (Sie sollten aber bei der (b) dazu in der Lage sein!).

(a) $a_n := \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ $\boxed{1.5}$

(b) $b_{n+1} := \dfrac{b_n + 2}{b_n + 1}, \quad b_1 := 1.$ $\boxed{1.5}$

Geben Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle der folgenden Form an:

Aufg.	Beschränkt (unten)?	Beschränkt (oben)?	Monoton?	Konvergent?
(a)	Nein/Ja durch ...	Nein/Ja, durch...	Nein/(Streng) wachsend/fallend	Ja, nach Satz/Lemma ... /Nein, da ...
(a)	Nein/Ja durch ...	Nein/Ja, durch...	Nein/(Streng) wachsend/fallend	Ja, nach Satz/Lemma ... /Nein, da ...

Bonusaufgabe 9.7 (5 Bonuspunkte): Konvergenz von Reihen

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(i) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k)}$, 1

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)^k - k^k}{(k+1)^k}$, 1

(iii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln(n))^2}$. 1

Tipp: Sie dürfen verwenden, dass der Logarithmus (und auch dessen Quadrat) monoton wachsend ist.

Bitte geben Sie Ihre Lösung in einem kurzen Satz an.

Beispielsweise: *Die gegebene Reihe ist konvergent, wie durch das Wurzelkriterium mit $q = 1/2$ gezeigt wird./Die gegebene Reihe ist nicht konvergent, da sie durch die harmonische Reihe minorisiert wird.*

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-42)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \begin{cases} k^2 \pi^k, & k \in 2\mathbb{N}_0, \\ k(-4)^k, & k \in 2\mathbb{N}_0 + 1. \end{cases}$$ 2

Bitte geben Sie den Konvergenzradius und das von Ihnen verwendete Kriterium in einem kurzen Satz an.

Beispielsweise: *Der Konvergenzradius ρ ist $\rho = 3$, was wir mithilfe des Satzes von Cauchy-Hadamard finden.*

Bemerkung: Diese Aufgabe ist eine alte Klausuraufgabe und bietet sich daher super zur Klausurvorbereitung an.

Bonusaufgabe 9.8 (6 Bonuspunkte): Grenzwerte

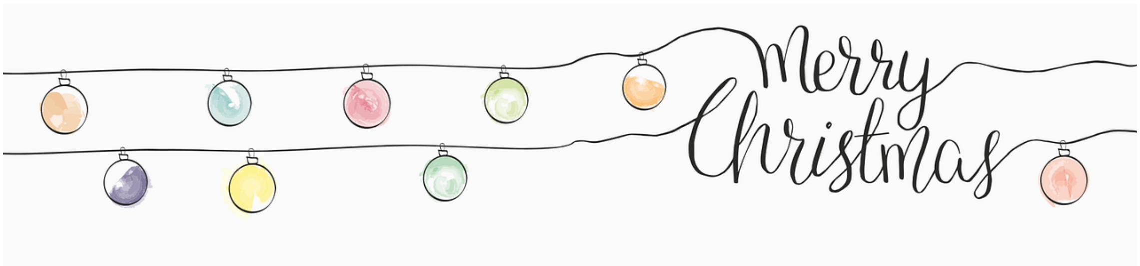
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls diese existieren, oder geben Sie an, warum diese nicht existieren. (1 Punkt pro Ausdruck)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{5x+1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-2x+3}-2x$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^{-x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\searrow 1} \frac{x^2+x}{x^2-1}$

Bitte geben Sie nur den Grenzwert an, bzw. eine kurze Begründung, falls dieser nicht existiert.

Beispielsweise: *Es ist* $\lim_{x\to 1} x = 1$*./Der Grenzwert existiert nicht, da* $1/x$ *für* $x \to 0$ *unbeschränkt ist.*



$$\spadesuit$$
$$\pm$$
$$\gg\ll$$
$$\gg \heartsuit \ll$$
$$\Uparrow\gg\gg\ll\ll\Uparrow$$
$$>\gg\gg \Diamond \ll\ll<$$
$$\gg\gg\ll\ll$$
$$\gg\gg \circ \ll\ll$$
$$\gg \nabla \gg\ll \vartheta \ll$$
$$\gg\gg\gg \infty \ll\ll\ll\ll$$
$$\Uparrow\gg \otimes \gg\gg\ll\ll \S \ll\Uparrow$$
$$>\gg\gg\gg\gg \mathit{\Theta} \ll\ll\ll\ll<$$
$$\gg \bigodot \gg\gg\ll\ll \partial \ll$$
$$\gg\gg\gg\gg\bowtie\ll\ll\ll\ll$$
$$\gg\gg \biguplus \gg\gg\ll\ll\ll \mathit{\Delta} \ll$$
$$\Uparrow\gg\gg\gg\gg\gg \bigotimes \ll\ll\ll\ll\ll\Uparrow$$
$$>\gg\gg \oint \gg\gg\gg\ll\ll\ll \ddagger \ll\ll<$$
$$\|$$
$$\Longleftrightarrow$$