INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 7 12. Juni 2020

Abgabe bis Fr. 19.06.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei: *Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf*. Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf*. Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.
- An alle, die lieber Beweis- statt Rechenaufgaben haben: Es kommen auch wieder Übungsblätter mit mehr Beweisaufgaben, es ist aber essentiell, dass Ihr den Umgang mit partiellen und totalen Ableitungen und mithin mit Gradienten, Jacobi-Matrizen etc. sicher beherrscht. Daher ist dieses Übungsblatt sehr rechenlastig gehalten.

Themen:

- Partielle Differenzierbarkeit
- Totale Differenzierbarkeit
- Kettenregel
- Mittelwertsatz

Aufgabe 7.1 (6 Punkte): Partielle Differenzierbarkeit

(a) Man berechne den Gradienten ∇f der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = e^x \cos(y) + \ln\left(1 + y^2\right).$$ 1

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Man zeige, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, aber

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\, \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\, \partial x}$$

gilt. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Schwarz (Satz 4.1.2 der Vorlesung)? Mit Begründung! 5

Aufgabe 7.2 (8 Punkte): Partielle und totale Differenzierbarkeit

<u>MOTIVATION:</u> In der Vorlesung haben wir gesehen, dass jede Funktion, die stetig partiell differenzierbar ist, auch total differenzierbar ist und wiederum jede Funktion, die total differenzierbar ist, auch partiell differenzierbar ist. Ebenso findet sich in der Vorlesung der Hinweis, dass die umgekehrten Richtungen im Allgemeinen nicht gültig sind. In dieser Aufgabe wollen wir uns entsprechende Beispiele anschauen. Die Funktion aus Aufgabenteil (a) ist ein Beispiel für eine Funktion, die zwar partiell aber nicht total differenzierbar ist, und die Funktion aus Aufgabenteil (b) ein Beispiel für eine Funktion, die zwar total aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

<u>AUFGABE:</u>

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Man zeige, dass f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ nicht total differenzierbar ist, dort jedoch Richtungsableitungen in alle Richtungen besitzt (und somit dort insbesondere partiell differenzierbar ist). $\boxed{3}$

Tipp: Auch im mehrdimensionalen Fall gilt, dass eine in einem Punkt (x,y) unstetige Funktion an dieser Stelle auch nicht differenzierbar sein kann.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Man zeige, dass f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ total differenzierbar ist, dort aber nicht alle partiellen Ableitungen stetig sind. $\boxed{5}$

Aufgabe 7.3 (4 Punkte): Kettenregel

Es seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \ln(x_2) \\ \tan(x_1 x_2) \end{pmatrix}, \quad g(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \end{pmatrix}$$

und die Funktion $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Komposition von f und g und $x_0 := (1,e)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$. Man berechne die Jacobi-Matrix $D_h(x_0)$ von h an der Stelle x_0 einmal mithilfe der Kettenregel und einmal ohne die Kettenregel, d. h. durch Bestimmung eines Ausdrucks für $h(x,y)$ und Differentiation dieses Ausdrucks.

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass die theoretische Bedeutung der Kettenregel meist höher ist als ihr praktischer Nutzen bei der Berechnung von Jacobi-Matrizen.

Aufgabe 7.4 (2 Punkte): Mittelwertsatz

<u>Motivation:</u> Euch ist sicherlich bereits aufgefallen, dass der Mittelwertsatz im mehrdimensionalen Fall optisch relativ wenig mit dem Mittelwertsatz aus der Analysis 1 zu tun hat. Es stellt sich daher die Frage, warum das der Fall ist und ob man den Mittelwertsatz nicht wie in der Analysis 1 formulieren kann. Diese Aufgabe soll Euch zeigen, dass der Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen nicht wie der Mittelwertsatz der Analysis 1 formuliert werden kann, sondern nur in Integralform oder komponentenweise mit verschiedenen Zwischenstellen.

<u>Aufgabe:</u> Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \\ \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $a = 0$ und $b = 2\pi$. Man zeige, dass es dann **kein** $\xi \in (a, b)$ gibt mit

$$f(b) - f(a) = D_f(\xi)(b - a).$$

Der Ausdruck $D_f(\xi)$ bezeichnet dabei die Jacobi-Matrix der Funktion f an der Stelle ξ, wobei diese in diesem Fall die Form eines Spaltenvektors hat.