Josua Kugler, Moritz Meyer

Aufgabe 1 (Koinduktion I). **(4 Punkte)**

Seien G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G und A ein G-Modul. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung
$$\mathrm{Koind}_G^H \circ \mathrm{Res}_H^G(A) \longrightarrow \mathrm{Abb}(G/H, A), \quad f \mapsto [gH \mapsto gf(g^{-1})],$$
ist ein Isomorphismus.

$$\mathrm{Koind}_G^H(\mathrm{Res}_H^G(A)) = \mathrm{Abb}_H(G, \mathrm{Res}_H^G(A)) = \{ f : G \to A : f(hg) = hf(g) \ \forall h \in H, g \in G \}$$

$$f \longmapsto [gH \longmapsto gf(g^{-1})]$$

Wohldefiniertheit:

$$gh\, f(h^{-1}g^{-1}) = ghh^{-1} f(g^{-1}) = ghf(g^{-1}) \ \checkmark$$

Injektivität: $[gH \longmapsto gf(g^{-1})] = 0 \Rightarrow gf(g^{-1}) = 0 \ \forall g \in G$
(da ich mir zu gH einen beliebigen Vertreter wählen darf und $\bigcup_{gH \in G/H} gH = G$)

$$\Rightarrow g^{-1}g\, f(g^{-1}) = g^{-1} \cdot 0 \Rightarrow f(g^{-1}) = 0 \ \forall g \in G \Leftrightarrow f(g) = 0 \ \forall g \in G$$
$$\Rightarrow f = 0$$

Surjektivität: Sei $\varphi \in \mathrm{Abb}(G/H, A)$. Dann $\exists \tilde{\varphi} \in \mathrm{Abb}(G, A)$ mit

$$\tilde{\varphi}(gh) = \tilde{\varphi}(g) \quad \forall h \in H, g \in G$$

Definiere $f(g) := g\tilde{\varphi}(g^{-1})$

Dann gilt $f(hg) = hg\tilde{\varphi}(g^{-1}h^{-1}) = hg\tilde{\varphi}(g^{-1}) = hf(g) \Rightarrow f \in \mathrm{Koind}_G^H \circ \mathrm{Res}_H^G(A)$

Es folgt

$$[gH \longmapsto gf(g^{-1}) = g(g^{-1}\tilde{\varphi}(g)) = \tilde{\varphi}(g)] = \varphi$$

Also haben wir mit f ein Urbild von φ in $\mathrm{Koind}_G^H \circ \mathrm{Res}_H^G(A)$ gefunden.

(b) Es ist $\text{Koind}_G^{\{1\}} \circ \text{Res}_{\{1\}}^G(A) \cong \text{Koind}_G(A)$ und $\text{Koind}_G(A) \cong \text{Koind}_G(A^{\text{tr}})$.

Es gilt $\text{Koind}_G^{\{1\}}(\text{Res}_{\{1\}}^G(A)) \overset{(G)}{\cong} \text{Abb}(G/\{1\}, A) = \text{Abb}(G, A) \overset{\text{Def}}{=} \text{Koind}_G(A)$

$\text{Koind}_G(A) \cong \text{Koind}_G^{\{1\}} \circ \text{Res}_{\{1\}}^G(A) = \text{Koind}_G^{\{1\}} \circ \text{Res}_{\{1\}}^G(A^{\text{tr}}) \cong \text{Koind}_G(A^{\text{tr}})$

$\text{Res}_{\{1\}}^G(A) = \text{Res}_{\{1\}}^G(A^{\text{tr}})$, da die G-Operation durch die Reduktion sowieso vergessen wird

(c) Ist A koinduzierter G-Modul, so ist $\text{Res}_H^G(A)$ ein koinduzierter H-Modul.
Hinweis: Ist $A \cong \text{Koind}_G(B)$, so existiert ein Isomorphismus

$$\psi \quad \text{Res}_H^G \circ \text{Koind}_G(B) \longrightarrow \text{Koind}_H(\text{Abb}(S, B)),$$

wobei S ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von H in G ist und $\text{Abb}(S, B)$ mit einer geeigneten H-Modulstruktur versehen wird.

Setzen wir den Hinweis voraus, so folgt

$$\text{Res}_H^G(A) \overset{A \text{ koinduziert}}{=} \text{Res}_H^G \circ \text{Koind}_G(B) \cong \text{Koind}_H(\underset{H\text{-Modul}}{\text{Abb}(S, B)})$$

$\Rightarrow \text{Res}_H^G(A)$ koinduzierter H-Modul

Beweis Hinweis:

$\text{Koind}_H(\text{Abb}(S, B)) = \text{Abb}(H, \text{Abb}(S, B))$

$\varphi \in \text{Res}_H^G \circ \text{Koind}_G(B) = \text{Res}_H^G(\text{Abb}(G, B))$

Für jedes $g \in G$ $\exists!$ Zerlegung $g = s \cdot h$ mit $s \in S$, $h \in H$.
Daher ist

$$\psi : \text{Res}_H^G(\text{Abb}(G, B)) \longrightarrow \text{Abb}(H, \text{Abb}(S, B))$$

$$\varphi \longmapsto (h \longmapsto (s \longmapsto \varphi(s \cdot h)))$$

wohldefiniert

Injektivität: $(h \longmapsto (s \longmapsto \varphi(s \cdot h))) = 0 \Rightarrow \varphi(sh) = 0 \; \forall s \in S, h \in H,$

$\Rightarrow \varphi(g) = 0 \; \forall g \in G \Rightarrow \varphi = 0$ ✓

Surjektivität

Sei $\varphi \in \mathrm{Abb}(H, \mathrm{Abb}(S, B))$. Dann ist

$\tilde{\varphi} := (g \longmapsto \varphi(h)(s))$ für die eindeutige Zerlegung $g = s \cdot h$

ein Urbild von φ, da

$$\Psi(\tilde{\varphi}) = (h \longmapsto (s \mapsto \tilde{\varphi}(s \cdot h)))$$
$$= (h \longmapsto (s \mapsto \varphi(h)(s)))$$
$$= (h \longmapsto \varphi(h))$$
$$= \varphi$$

H-Modulhom:

$$\Psi(h' \cdot \varphi) = (h \mapsto s \mapsto h' \varphi(sh))$$
$$= h' \cdot (h \mapsto s \mapsto \varphi(sh))$$
$$= h' \Psi(\varphi)$$

(d) Falls H ein Normalteiler ist, so gilt $\left(\mathrm{Koind}_G(A)\right)^H \cong \mathrm{Abb}(G/H, A^{\mathrm{tr}}) \cong \mathrm{Koind}_{G/H}^{\{1\}}(A^{\mathrm{tr}})$.

$$\mathrm{Koind}_G(A)^H \overset{(b)}{\cong} \mathrm{Koind}_G(A^{tr})^H = \mathrm{Abb}(G, A^{tr})^H = \{f : G \to A^{tr},\ hf = f$$
$$\iff hf(h^{-1}g) = f(g)\ \forall h \in H, g \in G$$
$$\iff f(hg) = hf(g)\ \forall h \in H, g \in G\}$$
$$= \mathrm{Abb}_H(G, A^{tr}) = \mathrm{Koind}_G^H(\mathrm{Res}_H^G(A^{tr}))$$
$$\overset{(a)}{\cong} \mathrm{Abb}(G/H, A^{tr})$$

G/H ist wieder eine Gruppe, d.h. $\mathrm{Abb}(G/H, A^{tr})$ wird zum G/H-Modul. Wir folgern mit (b)

$$\mathrm{Abb}(G/H, A^{tr}) = \mathrm{Koind}_{G/H}(A^{tr}) \overset{(b)}{\cong} \mathrm{Koind}_G^{\{1\}} \circ \mathrm{Res}_{\{1\}}^G(A^{tr})$$

$\square$

Aufgabe 2 (Koinduktion II). **(4 Punkte)**
Seien G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

(a) Für jeden G-Modul A und jeden H-Modul B ist die Abbildung

$$\phi: \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G(A), B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(A, \mathrm{Koind}_G^H(B)), \quad f \mapsto [a \mapsto [g \mapsto f(ga)]],$$

ein Isomorphismus, der funktoriell in A und B ist (d.h. Res_H^G ist linksadjungiert zu Koind_G^H).
Hinweis: Geben Sie die Umkehrabbildung an.

$$\mathrm{Hom}_G(A, \mathrm{Koind}_G^H(B)) = \mathrm{Hom}_G(A, \mathrm{Hom}_H(G, B))$$

Wohldefiniertheit: z.z.: $[a \longmapsto [g \mapsto f(ga)]] \in \mathrm{Hom}_G(A, \mathrm{Hom}_H(G,B)) \ \forall f \in \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G(A), B)$

Vorl. geg.: $ga \in A \Rightarrow ga \in \mathrm{Res}_H^G(A) \Rightarrow f(ga)$ wohldefiniert und $\in B \Rightarrow [g \mapsto f(ga)] \in \mathrm{Hom}(G, B)$

$$[g \mapsto f(ga)](hg) = f(hga) \overset{f \in \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G(A), B)}{=} h f(ga) = h \cdot [g \mapsto f(ga)](g) \Rightarrow [g \mapsto f(ga)] \in \mathrm{Hom}_H(G, B)$$

$$\Rightarrow [a \mapsto [g \mapsto f(ga)]] \in \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Koind}_G^H(B))$$

$$g' [a \mapsto [g \mapsto f(ga)]](a) = [a \longmapsto g'[g \mapsto f(ga)]](a) = [a \mapsto [g \mapsto f(gg'a)]](a)$$
$$= [a \mapsto [g \mapsto f(ga)]](g'a) \Rightarrow [a \mapsto [g \mapsto f(ga)]] \in \mathrm{Hom}_G(A, \mathrm{Koind}_G^H(B))$$

Umkehrabbildung:

$$\psi: \mathrm{Hom}_G(A, \mathrm{Koind}_G^H(B)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G(A), B)$$
$$f \longmapsto [a \mapsto f(a)(1)]$$

Wohldefiniertheit: $f(a)(1) \in B$ ✓ $\Rightarrow [a \mapsto f(a)(1)] \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Res}_H^G(A), B)$

$$[a \mapsto f(a)(1)](ha) = f(ha)(1) = [h f(a)](1) = h \cdot f(a)(1) = h \cdot [a \mapsto f(a)(1)](a)$$
$$\Rightarrow [a \mapsto f(a)(1)] \in \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G(A), B) \quad ✓$$

$\psi \circ \phi = \mathrm{id}$:
$$\psi(\phi(f)) = \psi([a \mapsto [g \mapsto f(ga)]])$$
$$= [a \mapsto [a \mapsto [g \mapsto f(ga)]](a)(1)]$$
$$= [a \mapsto [g \mapsto f(ga)](1)]$$
$$= [a \mapsto f(a)] = f$$

$\phi \circ \psi = \mathrm{id}$:
$$\phi(\psi(f)) = \phi([a \mapsto f(a)(1)]) = [a \mapsto [g \mapsto [a \mapsto f(a)(1)](ga)]]$$
$$= [a \mapsto [g \mapsto f(ga)(1)]] \overset{G\text{-Hom}}{=} [a \mapsto [g \mapsto g f(a)(1)]]$$
$$= [a \mapsto [g \mapsto f(a)(1g)]] = [a \mapsto f(a)] = f$$

(b) Der Funktoren Res_H^G und Koind_G^H sind exakt.

Da es sich um eine Adjunktion $\operatorname{Res}_H^G \dashv \operatorname{Koind}_G^H$ handelt, ist Res_H^G rechtsexakt und Koind_G^H linksexakt.

Nach Frobenius-Reziprozität ist Res_H^G aber auch rechtsadjungiert zu Ind_G^H und damit linksexakt $\Rightarrow$ Res_H^G ist exakt.

b.z.z. Koind_G^H rechtsexakt. Sei

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$ eine exakte Folge von G-Moduln

Da Koind_G^H linksexakt ist, muss

$$0 \to \operatorname{Koind}_G^H A' \to \operatorname{Koind}_G^H A \to \operatorname{Koind}_G^H A''$$ exakt sein

wir erhalten die lange exakte Folge

$$0 \to \operatorname{Koind}_G^H A' \to \operatorname{Koind}_G^H A \to \operatorname{Koind}_G^H A'' \to \underbrace{H_1(G, \operatorname{Koind}_G^H A')}_{=0} \to \cdots$$

, da koinduzierte Moduln kohomologisch trivial sind.

$$\Rightarrow \quad 0 \to \operatorname{Koind}_G^H A' \to \operatorname{Koind}_G^H A \to \operatorname{Koind}_G^H A'' \to 0 \quad \text{exakt}$$

$\Rightarrow$ Koind_G^H exakt $\square$

(c) Der Funktor Koind_G^H erhält injektive Objekte und der Funktor Res_H^G erhält projektive Objekte.

Folgt sofort aus $\operatorname{Res}_H^G \dashv \operatorname{Koind}_G^H$, da sowohl Res_H^G als auch Koind_G^H exakt sind.

Aufgabe 3 (Koinduktion für proendliche Gruppen). **(4 Punkte)**
Seien G eine proendliche Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe von G und A ein diskreter G-Modul. Zeigen Sie:

(a) Für eine abgeschlossene Untergruppe K von H hat die kanonische Projektion der Nebenklassenmengen $p\colon G/K \to G/H$ einen stetigen Schnitt (bezüglich der jeweiligen Quotiententopologien von G), d.h. eine stetige Abbildung $s\colon G/H \to G/K$ derart, dass $p \circ s = \mathrm{id}_{G/H}$.

Aufgabe 4 (Gruppenkohomologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten). **(4 Punkte)**
Bestimmen Sie für alle $n \geq 0$ die Gruppenkohomologiegruppen $\mathrm{H}^n(G,\mathbb{Z})$ für

(a) $G = \mathbb{Z}^2$. *Hinweis:* Verwenden Sie Blatt 3, Aufgabe 3.

$$0 \to \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[G] \oplus \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

Isos nach Algebra II

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \xleftarrow{0} & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) & \xleftarrow{\partial_2^*} & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G]\oplus\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) & \xleftarrow{\partial_1^*} & \mathrm{Hom}_G(\mathbb{Z}[G],\mathbb{Z}) & \xleftarrow{0} & 0 \\
 & & \varphi \ \ \wr\!\wr & \varphi\circ\partial_2 \mapsfrom \varphi & \wr\!\wr & \varphi\circ\partial_1 \mapsfrom \varphi & \wr\!\wr & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \varphi(1) & & (\varphi(1,0),\varphi(0,1)) & & \varphi(1) & & \\
0 & \xleftarrow{0} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{\tilde{\partial}_2^*} & \mathbb{Z}^2 & \xleftarrow{\tilde{\partial}_1^*} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & 0
\end{array}$$

$(x(t_1-1), x(t_2-1)) \mapsfrom x$
$= (x\cdot 0, x\cdot 0) = (0,0)$ $\quad \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{tr}$

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{tr} \cong$ $-x(t_2-1)+y(t_1-1) \mapsfrom (x,y)$
$= -x(1-1)+y(1-1)$
$= 0+0$

Dabei verwenden wir die folgenden Identitäten

$$\partial_2(1) = (-(t_2-1), (t_1-1))$$

$$\varphi(\partial_2(1)) = \varphi(-(t_2-1), (t_1-1))$$
$$= -(t_2-1)\varphi(1,0) + (t_1-1)\varphi(0,1)$$

$$\partial_1(1,0) = t_1-1$$
$$\partial_1(0,1) = t_2-1$$

Insgesamt erhalten wir die Folge

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} 0,$$

daher erhalten wir als Kohomologiegruppen

$$H^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ H^1(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\ H^2(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ H^{\geq 3}(G,\mathbb{Z}) = 0$$

(b) $G = C_n$. *Hinweis:* Verwenden Sie Blatt 4, Aufgabe 1.

Die folgende projektive Auflösung von $\mathbb{Z}$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\cdot \xi} \mathbb{Z}[C_n] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

verwenden wir, um die Homologiegruppen $H^n(C_n, \mathbb{Z})$ zu berechnen.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \mathrm{Hom}_{C_n}(\mathbb{Z}[C_n],\mathbb{Z}) \arrow[l] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{C_n}(\mathbb{Z}[C_n],\mathbb{Z}) \arrow[l, "(\cdot N)^*"'] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{C_n}(\mathbb{Z}[C_n],\mathbb{Z}) \arrow[l, "(\cdot \xi)^*"'] \arrow[d, "\cong"] & 0 \arrow[l, "0"'] \\
\cdots & \mathbb{Z} \arrow[l] & \mathbb{Z} \arrow[l, "\cdot N"', "\text{analog}"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "\cdot \xi"'] & 0 \arrow[l, "0"']
\end{tikzcd}$$

$\varphi \mapsto \varphi(1)$, $\quad \varphi \circ (\cdot N) \leftarrow\!\shortmid \varphi$, $\quad \varphi \circ (\cdot \xi) \leftarrow\!\shortmid \varphi$

$$\begin{tikzcd}
(a \mapsto a \xi x) \arrow[d] & {[a \mapsto a \cdot x]} \arrow[l, mapsto] \\
\xi \cdot x & x \arrow[l, mapsto, "\cdot \xi"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Da die C_n-Wirkung auf $\mathbb{Z}$ trivial ist, erhalten wir $\xi \cdot x = 0$ und $N \cdot x = n \cdot x$ (siehe Aufgabe 4.2b).

$$\cdots \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} 0$$

$H^0(C_n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ $\quad H^{2k+1}(C_n, \mathbb{Z}) = 0,$ $\quad H^{2k}(C_n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$