4. Übungsblatt

Ausgabe 24.11.2020 – Besprechung 30.11-3.12.2020

1. Lösung:

(a)

$$l = 0 : \tag{1}$$
$$Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{2}$$
$$\int \mathrm{d}\Omega\, Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \mathrm{d}\Omega \tag{3}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}\mu \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \tag{4}$$
$$= \frac{4\pi}{\sqrt{4\pi}} \tag{5}$$
$$= \sqrt{4\pi} \tag{6}$$

$$l \geq 0 : \tag{7}$$
$$\int \mathrm{d}\Omega\, Y_{lm}(\theta,\phi) = \int \mathrm{d}\Omega\, Y_{lm}(\theta,\phi) \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{4\pi}} \tag{8}$$
$$= \sqrt{4\pi} \int \mathrm{d}\Omega\, Y_{lm}(\theta,\phi) Y_{00}(\theta,\phi) \tag{9}$$
$$= \sqrt{4\pi} \int \mathrm{d}\Omega\, Y_{lm}(\theta,\phi) Y^*_{00}(\theta,\phi) \tag{10}$$
$$= \sqrt{4\pi}\delta_{l0}\delta_{m0} \tag{11}$$
$$= 0 \tag{12}$$

(b)

$$a(\theta,\phi) = \sum_l \sum_m a_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi) \Leftrightarrow a_{lm} = \int \mathrm{d}\Omega\, a(\theta,\phi) Y^*_{lm}(\theta,\phi) \tag{13}$$

$$\left\langle a^2(\theta,\phi)\right\rangle = \int \mathrm{d}\Omega\, a(\theta,\phi)^* a(\theta,\phi) \tag{14}$$

$$= \sum_l \sum_m |a_{lm}|^2 \tag{15}$$

$$\left\langle a^2\right\rangle = \int \mathrm{d}\Omega\, a^*(\theta,\phi) a(\theta,\phi) \tag{16}$$

$$= \int \mathrm{d}\Omega\, \sum_{lm} a^*_{lm} Y^*_{lm} \sum_{l'm'} a_{l'm'} Y_{l'm'} \tag{17}$$

$$= \sum_{lm} \sum_{l'm'} a^*_{lm} a_{l'm'} \int \mathrm{d}\Omega\, Y^*_{lm} Y_{l'm'} \tag{18}$$

$$= \sum_{lm} \sum_{l'm'} a^*_{lm} a_{l'm'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{19}$$

$$= \sum_l \sum_m |a_{lm}|^2 \tag{20}$$

(c) Additionstheorem:

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m Y_{lm}(\theta,\phi) Y^*_{lm}(\theta',\phi') \tag{21}$$

Falls $\theta = \theta'$ und $\phi = \phi'$, dann gilt $\alpha = 0, \cos\alpha = 1, P_l(1) = 1 \forall l$.

$$\sum_m |Y_{lm}(\theta,\phi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(1) \tag{22}$$

$$= \frac{2l+1}{4\pi} \tag{23}$$

(d)

$$\sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\alpha) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(1) \tag{24}$$

$$= \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} \tag{25}$$

$$\to \infty. \tag{26}$$

(e) Spiegeln am Äquator:

$$
\begin{aligned}
a(\theta,\phi) &\to a(\pi-\theta,\phi) && (27)\\
\mu=\cos(\theta) &\to \mu'=\cos(\theta')=\cos(\pi-\theta)=-\mu && (28)\\
{a'}_{lm} &= \int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, a(\mu',\phi)Y^*_{lm}(\theta,\phi) && (29)\\
&= \int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, a(\mu',\phi)Y^*_{lm}(\mu,\phi) \leftarrow \theta \text{ geht nur als } \cos\theta \text{ in } Y_{lm} \text{ ein} && (30)\\
&= -\int_{+1}^{-1}\mathrm{d}\mu'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\, a(\mu',\phi')Y^*_{lm}(-\mu',\phi') \leftarrow \mu'=-\mu, \mathrm{d}\mu'=-\mathrm{d}\mu && (31)\\
&= \int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\mu'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\, a(\mu',\phi')Y^*_{lm}(-\mu',\phi') && (32)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{lm} &\sim P_{lm}\exp(-im\phi) && (33)\\
P_{lm}(\mu) &= \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-\mu^2)\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}\mu^{l+m}}(\mu^2-1)^l && (34)\\
&= \frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-\mu^2)(-1)^{l+m}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}(-\mu)^{l+m}}(\mu^2-1)^l && (35)\\
&= (-1)^{l+m}P_{lm}(-\mu) && (36)\\
\to P_{lm}(-\mu) &= (-1)^{l+m}P_{lm}(+\mu) && (37)\\
\to Y_{lm}(-\mu) &= (-1)^{l+m}Y_{lm}(+\mu) && (38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{a'}_{lm} &= \int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\mu'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi' a(\mu',\phi')Y^*_{lm}(-\mu',\phi') && (39)\\
&= \int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\mu'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi' a(\mu',\phi')(-1)^{l+m}Y^*_{lm}(\mu',\phi') && (40)\\
&= (-1)^{l+m}\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\mu'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi' a(\mu',\phi')Y^*_{lm}(\mu',\phi') && (41)\\
&= (-1)^{l+m}a_{lm} && (42)
\end{aligned}
$$

2. Lösung:

(a)

$$g\left(t\right)=A\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\sin\left(\omega_0 t\right)\theta(t) \tag{43}$$

Fouriertransformation:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\ f(t)e^{-i\omega t} && (44)\\ &= \int_0^{\infty}\mathrm{d}t\ A\sin\left(\omega_0 t\right)e^{-\frac{t}{\tau}}e^{-i\omega t} && (45)\\ &= \int_0^{\infty}\mathrm{d}t\ A\sin\left(\omega_0 t\right)e^{-\left(\frac{1}{\tau}+i\omega\right)\cdot t} && (46)\end{aligned}$$

Das Integral lässt sich durch partielle Integration lösen.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\ \sin(\alpha t)e^{\beta t} &= \left[-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)e^{\beta t}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\ \frac{\beta}{\alpha}\cos(\alpha t)e^{\beta t} && (47)\\ &= \left[-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)e^{\beta t}\right]_0^{\infty}+\left[\frac{\beta}{\alpha^2}\sin(\alpha t)e^{\beta t}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\ \frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin(\alpha t)e^{\beta t} && (48)\end{aligned}$$

$$\rightarrow\int_0^{\infty}\mathrm{d}t\ \sin(\alpha t)e^{\beta t}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left[-\alpha\cos(\alpha t)e^{\beta t}+\beta\sin(\alpha t)e^{\beta t}\right]_0^{\infty} \tag{49}$$

Damit ergibt sich für die Fouriertransformation:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\omega) &= A\cdot\left[\frac{e^{-\left(\frac{1}{\tau}+i\omega\right)t}}{\left(\frac{1}{\tau}+i\omega\right)^2+\omega_0^2}\cdot\left(\left(-\frac{1}{\tau}-i\omega\right)\sin\left(\omega_0 t\right)-\omega_0\cos\left(\omega_0 t\right)\right)\right]_0^{\infty} && (50)\\ &= A\cdot\frac{\omega_0}{\left(\frac{1}{\tau}+i\omega\right)^2+\omega_0^2} && (51)\end{aligned}$$

(b)

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\mathcal{F})}{\mathrm{Re}(\mathcal{F})}\right) \tag{52}$$

$$\mathcal{F}(\omega) = A \cdot \frac{\omega_0}{\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)^2 + \omega_0^2} \tag{53}$$

$$= \frac{A\omega_0}{\frac{1}{\tau^2} + 2\frac{i\omega}{\tau} - \omega^2 + \omega_0^2} \tag{54}$$

$$= \frac{A\omega_0}{\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 - \omega^2\right) + 2i\frac{\omega}{\tau}} \tag{55}$$

$$= A\omega_0 \cdot \frac{\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 - \omega^2\right) - 2i\frac{\omega}{\tau}}{\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\frac{\omega^2}{\tau^2}} \tag{56}$$

$$\mathrm{Re}(\mathcal{F}) = \frac{\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\frac{\omega^2}{\tau^2}} \tag{57}$$

$$\mathrm{Im}(\mathcal{F}) = \frac{-2i\frac{\omega}{\tau}}{\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\frac{\omega^2}{\tau^2}} \tag{58}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-2\frac{\omega}{\tau}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 - \omega^2}\right) \tag{59}$$

(c) Die Amplitude ergibt sich zu

$$\left|\mathcal{F}\left(\omega\right)\right| = \frac{A\omega_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\frac{\omega^2}{\tau^2}}} \tag{60}$$

Für $\tau \gg 1/\omega_0$ können wir diese nähern zu:

$$\left|\mathcal{F}\left(\omega\right)\right| \approx \frac{A\omega_0}{\left|\omega^2 - \omega_0^2\right|} \tag{61}$$

Daraus ergibt sich eine Polstelle für $\omega = \pm\omega_0$ haben, sowie einen quadratischen Abfall der Funktion.

Desweiteren gilt:

$$\lim_{\omega\to 0}\left|\mathcal{F}\left(i\omega\right)\right| = \frac{A\omega_0}{\omega_0^2} = \frac{A}{\omega_0} \tag{62}$$

$$\lim_{\omega\to\infty}\left|\mathcal{F}\left(i\omega\right)\right| = 0 \tag{63}$$

3. Lösung:

(a) Die Ladung sitzt bei

$$\vec{r}_1 = r\hat{\boldsymbol{e}}_3 = (R+a)\hat{\boldsymbol{e}}_3. \tag{64}$$

Wir setzen die Spiegelladung auf

$$\vec{r}_2 = r_2\hat{\boldsymbol{e}}_3, \tag{65}$$

sodass das Potenzial gegeben ist durch

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_1|} + \frac{q_2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_2|} \tag{66}$$

mit $|\boldsymbol{x}| = r$ und $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_{1,2}| = \sqrt{r^2 + r_{1,2}^2 - 2rr_{1,2}\cos\theta}$. Damit ergibt sich für das Potenzial:

$$\Phi(r,\theta) = q\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta}^{-1} + q_2\sqrt{r^2 + r_2^2 - 2rr_2\cos\theta}^{-1} \tag{67}$$

Jetzt bestimmen wir q_2 und r_2 aus der Bedingung

$$\begin{aligned}
\Phi(R,\theta) &= 0 && (68)\\
\Phi(R,\theta) &= q\sqrt{R^2 + r_1^2 - 2Rr_1\cos\theta}^{-1} + q_2\sqrt{R^2 + r_2^2 - 2Rr_2\cos\theta}^{-1} && (69)\\
&= \frac{q}{R}\sqrt{1 + \frac{r_1}{R}^2 - 2\frac{r_1}{R}\cos\theta}^{-1} + \frac{q_2}{r_2}\sqrt{1 + \frac{R}{r_2}^2 - 2\frac{R}{r_2}\cos\theta}^{-1} && (70)\\
\to \frac{q}{R} &= -\frac{q_2}{r_2} \text{ und } \frac{r_1}{R} = \frac{R}{r_2} && (71)\\
r_2 &= \frac{R^2}{r_1} = \frac{R^2}{R+a} && (72)\\
q_2 &= -q\frac{r_2}{R} = -q\frac{R}{R+a} && (73)
\end{aligned}$$

Damit ist Φ bestimmt. Das elektrische Feld ist

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi = \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r\partial_r\Phi + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta\Phi + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\Phi\right) \tag{74}$$

Da $\Phi(r,\theta)$ nicht von ϕ abhängt gilt $\partial_\phi\Phi = 0$. Für die anderen Komponenten folgt aus

$$\Phi(r,\theta) = q\left(\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta}^{-1} - \sqrt{\left(\frac{rr_1}{R}\right)^2 + R^2 - 2rr_1\cos\theta}^{-1}\right), \tag{75}$$

dass gilt

$$
\begin{aligned}
E_r &= -\partial_r \Phi(r,\theta) && (76)\\
&= q\left(\frac{r - r\cos\theta}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta}^3} - \frac{r\left(\frac{r_1}{R}\right)^2 - r_1\cos\theta}{\sqrt{\left(\frac{rr_1}{R}\right)^2 + R^2 - 2rr_1\cos\theta}^3}\right) && (77)\\
E_\theta &= -\frac{1}{r}\partial_\theta \Phi(r,\theta) && (78)\\
&= qr_1\sin\theta\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta}^3} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{rr_1}{R}\right)^2 + R^2 - 2rr_1\cos\theta}^3}\right). && (79)
\end{aligned}
$$

(b)

(c) Für $\Phi(R,\theta) = \Phi_0$ genügt es, eine dritte Spiegelladung auf den Ursprung zu setzen, sodass

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(r,\theta) &= \Phi(r,\theta) + \frac{q_3}{|\boldsymbol{x}|} && (80)\\
&= \Phi(r,\theta) + \frac{R\Phi_0}{r \to \Phi(R,\theta) = \Phi_0} && (81)
\end{aligned}
$$