Theo-II: Analytische Mechanik und Thermodynamik (PTP2)

Klausur vom 29. Juli 2020
Beginn: 14:00 Uhr
Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Universität Heidelberg, Sommersemester 2020
Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor*innen: Veronika Oehl & Christian Sorgenfrei

Vor- und Nachname: Josua Kugler

Matrikelnummer: 4119892 Gruppennummer: 12

Wichtige Hinweise:

- **Tragen Sie oben Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer ein.**
- Beachten Sie, dass Ihr PDF-Viewer so eingestellt sein muss, dass er es erlaubt, die Felder auszufüllen. Berücksichtigen Sie unbedingt die **Hinweise am Ende der Klausur** zum Speichern und zur Abgabe und:

  Stimmen Sie insbesondere der dortigen Erklärung zu!
- Bei den Verständnisfragen ist immer genau *eine* der *drei* Antwortmöglichkeiten korrekt, bei den Rechenaufgaben immer genau *eine* der *fünf* Antwortmöglichkeiten. Setzen Sie das Häkchen immer bei der *einen* korrekten Antwort.
- *Achtung*: Falls mehrere Antworten bei einer Teilaufgabe markiert sind, gibt es keine Punkte!
- Es gibt insgesamt 9 Aufgaben. Die maximale Gesamtpunktzahl beträgt 74 Punkte. Einzelne Teilaufgaben bringen in der Regel einen Punkt; davon Abweichendes ist angegeben.
- Am besten rechnen Sie die Klausur ganz normal auf Papier und übertragen Ihre Ergebnisse direkt. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg :)

1. *Verständnisfragen: Analytische Mechanik und Thermodynamik* *(8 Punkte)*

a) *Der Liouville'sche Satz…*

- [ ] …besagt, dass das Volumen eines mechanischen Systems im Impulsraum konstant bleibt.
- [x] …folgt aus der symplektischen Eigenschaft der Hamilton'schen Gleichungen.
- [ ] …belegt das Grundpostulat der statistischen Physik.

b) *Sie nehmen an einem Raumschiffwettfliegen teil und bewegen sich relativ zur Erde mit der Geschwindigkeit $v_1 = 0,50c$. Leider werden Sie von einem anderen Raumschiff, das sich in dieselbe Richtung auf der Strecke bewegt, überholt. Sie messen als Überholgeschwindigkeit des anderen Raumschiffes relativ zu Ihnen die Geschwindigkeit $v_2 = 0,40c$. Mit welcher Geschwindigkeit v_2' bewegt sich das zweite Raumschiff beim Überholen relativ zur Erde?*

- [x] $v_2' = 0,75c$.
- [ ] $v_2' \approx 0,94c$.
- [ ] $v_2' = 0,90c$.

c) *Welches der unten genannten Systeme kann durch die folgende Lagrange-Funktion mit geeigneten positiven Konstanten m, η, λ und ω beschrieben werden?*

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{m\omega}{2} \exp(\omega t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[q^2 \exp(-\omega t)\right] + \frac{m}{2}\dot{q}^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sqrt{\ln(\lambda q - \omega t) + \operatorname{arcosh}\left(\frac{\omega^2 t^2}{1 - \eta q^7}\right)}$$

- [x] Eine Kette konstanter Massendichte, die reibungsfrei von einem Tisch rutscht.
- [ ] Eine Punktmasse im freien Fall im homogenen Gravitationsfeld.
- [ ] Eine Punktmasse, die harmonische Schwingungen ausführt.

d) *Eine Lagrange-Funktion kann. . .*

- [ ] . . . nur für physikalische Systeme, in denen keine Reibung auftritt, aufgestellt werden.
- [x] . . . für physikalische Systeme mit konservativen Kraftfeldern immer aufgestellt werden.
- [ ] . . . für jedes physikalische System aufgestellt werden.

e) *Die Kühlung eines Gases mit Hilfe des Joule-Thomson-Effekts funktioniert. . .*

- [x] . . . bei einem Van-der-Waals-Gas nur unterhalb der Inversionstemperatur.
- [ ] . . . bei einem idealen Gas nur oberhalb der kritischen Temperatur.
- [ ] . . . bei einem idealen Gas und einem Van-der-Waals-Gas gleichermaßen.

f) *Der Wirkungsgrad idealer Kreisprozesse ist. . .*

- [ ] . . . allein durch die Energieerhaltung bedingt.
- [ ] . . . nur beim Carnot'schen Kreisprozess gleich $1 - T_2/T_1$.
- [x] . . . wesentlich dadurch bedingt, dass die Gesamtentropie konstant bleibt.

g) *Die Entropie und weitere thermodynamische Potentiale. . .*

- [ ] . . . können allein aus der Zustandsgleichung thermodynamischer Systeme konstruiert werden.
- [ ] . . . sind bei der Suche nach Gleichgewichtslagen thermodynamischer Systeme äquivalent.
- [x] . . . werden im Gleichgewicht thermodynamischer Systeme unter verschiedenen Bedingungen extremal.

h) *Aus den gemischten zweiten partiellen Ableitungen welcher thermodynamischen Funktion in ihren natürlichen Variablen ergibt sich die folgende Maxwell-Relation?*

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

- [ ] Aus denen der freien Enthalpie G.
- [ ] Aus denen der Enthalpie H.
- [x] Aus denen der freien Energie F.

2. *Hamilton-Formalismus für ein geladenes Teilchen* *(7 Punkte)*

Die Lagrange-Funktion für ein Teilchen der Masse m und mit Ladung q im elektromagnetischen Feld sei

$$L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\phi(\vec{r},t) + \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t),$$

wobei $\phi(\vec{r},t)$ und $\vec{A}(\vec{r},t)$ die elektromagnetischen Potentiale sind, $\vec{r}$ der Ortsvektor in drei Dimensionen und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

a) Bestimmen Sie alle konjugierten Impulse. Im Folgenden bezeichnet $\vec{p}$ den zu $\vec{r}$ konjugierten Impuls.

- ☐ $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} - q\phi(\vec{r},t) - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)$
- ☐ $p_\phi = -q$ und $\vec{p}_{\vec{A}} = \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}$
- ☐ $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} - q\phi(\vec{r},t)\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial t}$
- ☑ $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)$
- ☐ $p_q = -\phi(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)$ und $\vec{p}_{\vec{A}} = \frac{q}{c}\dot{\vec{r}}$

b) Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion. *(2 Punkte)*

- ☑ $H(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + q\phi(\vec{r},t)$
- ☐ $H(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{1}{m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 - q\phi(\vec{r},t)$
- ☐ $H(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + q\phi(\vec{r},t)$
- ☐ $H(\phi,\vec{A},p_\phi,\vec{p}_{\vec{A}}) = \frac{1}{2m}p_\phi^2 + \vec{p}_{\vec{A}}\cdot\vec{A} + q\phi - \frac{q}{mc}\vec{p}_{\vec{A}}\cdot\vec{\nabla}p_\phi$
- ☐ $H(\vec{A},\vec{p},\phi) = \frac{1}{m}\left(\vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi$

c) *Verständnisfrage: Unter welchen Bedingungen beschreibt diese Hamilton-Funktion ein zeittranslationsinvariantes System?*

- ☐ Wenn sich das betrachtete Teilchen auf einer Kreisbahn bewegt.
- ☐ Nie, denn $\vec{p}$ hängt über die elektromagnetischen Potentiale von der Zeit ab.
- ☑ Nur, wenn die elektromagnetischen Potentiale zeitunabhängig sind.

d) **Eine** der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen lautet: *(2 Punkte)*

- ☐ $\dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}\left(\vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)$
- ☐ $\dot{\vec{p}} = \vec{\nabla}\left(\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right) - q\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)$
- ☐ $\dot{\vec{p}} = q\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t) - \vec{\nabla}\left(\left(\vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\right)$
- ☑ $\dot{\vec{p}} = \frac{1}{m}\frac{q}{c}\left(\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A}(\vec{r},t) - q\vec{\nabla}\phi(\vec{r},t)$
- ☐ $\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}$

Eine Transformation der elektromagnetischen Potentiale, die durch

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r},t) &\rightarrow \phi'(\vec{r},t) = \phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t) \\ \vec{A}(\vec{r},t) &\rightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t) \end{aligned}$$

gegeben ist, heißt Eichtransformation.

e) *Verständnisfrage: Wieso ändert sich die Bewegungsgleichung unter Eichtransformationen nicht?*

- [x] Weil sich die Wirkung entlang der wirklichen Bahn von $\vec{r}_i = \vec{r}(t_i)$ nach $\vec{r}_f = \vec{r}(t_f)$ nur um die Konstante $\frac{q}{c}\left[\chi(\vec{r}_f, t_f) - \chi(\vec{r}_i, t_i)\right]$ ändert.
- [ ] Weil sich dadurch die Lagrange-Funktion nicht ändert.
- [ ] Weil sich die Lagrange-Funktion nur um die partielle Zeitableitung $\frac{\partial}{\partial t}\chi$ ändert.

3. *Hamilton-Jacobi-Theorie: Harmonischer Oszillator* *(8 Punkte)*

Betrachten Sie eine Punktmasse m in einem eindimensionalen Potential $V(q)$, wobei q die eindimensionale kartesische Ortskoordinate ist. Der Impuls p des Teilchens ist der kanonisch konjugierte Impuls zu q.

a) Die Hamilton-Funktion des Systems ist gegeben durch:

- ☐ $H = \frac{p^2}{2m}$
- ☐ $H = \frac{p^2}{2m} - V(q)$
- ☐ $H = -p^2 + V(q)$
- ☐ $H = \frac{p^3}{3m} - V(q)$
- ☑ $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$

Das System kann durch kanonische Transformationen auf Ruhe transformiert werden, wobei die neuen Phasenraumkoordinaten Q und P sind. Betrachten Sie dazu nun eine erzeugende Funktion der 2. Art:

$$\Phi \equiv \Phi_2(q, P, t), \qquad \text{wobei} \qquad p = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \quad \text{und} \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P}$$

gilt. Der Index 2 an der erzeugenden Funktion wird in dieser Aufgabe fortan weggelassen. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung lautet:

$$H\left(q, \frac{\partial \Phi}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion Φ. Verwenden Sie dafür den Separationsansatz $\Phi(q, P, t) = f(q, P) + g(P, t)$ und $\frac{\partial g}{\partial t} = -P$. Beachten Sie, dass das auftretende Integral bei allgemeinem $V(q)$ noch nicht gelöst werden kann. Die erzeugende Funktion lautet: *(2 Punkte)*

- ☐ $\Phi(q, P, t) = -P - \int \sqrt{2m\,(Pt - V(q))}\,\mathrm{d}q$
- ☑ $\Phi(q, P, t) = -Pt + \int \sqrt{2m\,(P - V(q))}\,\mathrm{d}q$
- ☐ $\Phi(q, P, t) = Pt - \int 2m\,(P - V(q))^2\,\mathrm{d}q$
- ☐ $\Phi(q, P, t) = Pt - \int \sqrt{2mV(q)}\,\mathrm{d}q$
- ☐ $\Phi(q, P, t) = -Pt + \int 2m\,(P - V(q))\,\mathrm{d}q$

c) Bestimmen Sie aus der erzeugenden Funktion p und Q. **Eine** dieser Größen ist gegeben durch:

- ☑ $p = \sqrt{2m\,(P - V(q))}$
- ☐ $Q = -t - \int \frac{m\mathrm{d}q}{\sqrt{2m(Pt - V(q))}}$
- ☐ $p = [2m\,(P - V(q))]^{-1/2}$
- ☐ $Q = t - \int \sqrt{2m\,(P - V(q))}\,\mathrm{d}q$
- ☐ $p = \int \sqrt{2m\,(P - V(q))}\,\mathrm{d}q$

Betrachten wir nun den eindimensionalen harmonischen Oszillator, d.h. das Potential ist durch

$$V(q) = \frac{m}{2}\omega^2 q^2$$

gegeben, wobei ω die Kreisfrequenz ist.

d) Berechnen Sie für diesen Fall zunächst Q. * *(2 Punkte)*

- [ ] $Q = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}} \arcsin\left(\frac{m\omega^2 q^2}{2P}\right) - Pt$
- [ ] $Q = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}}\right) - t$
- [ ] $Q = \frac{m\omega^2}{2P} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2P}}\right) + \omega t$
- [x] $Q = \frac{m\omega}{2P} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\right) - t$
- [ ] $Q = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2Pq^2}{m}}\,\omega t\right) - t$

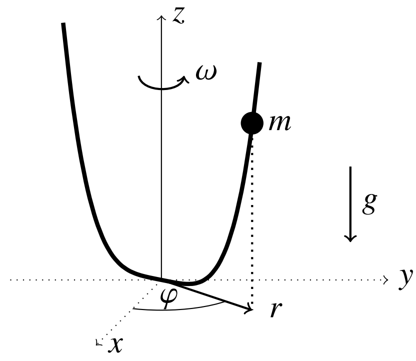
e) Lösen Sie Ihr Ergebnis für Q nach q auf. Berechnen Sie nun auch p für das vorgegebene Potential. Das Ergebnis für p lautet: *(2 Punkte)*

- [x] $p = \sqrt{2m\omega P}\,\cos(\omega t + Q)$
- [ ] $p = \sqrt{\frac{2P}{\omega m}}\,\cos(\omega t + \omega Q)$
- [ ] $p = \sqrt{2mP}\,\cos(\omega t + Q)$
- [ ] $p = \sqrt{\frac{2P}{m\omega^2}}\,\cos(\omega t + \omega Q)$
- [ ] $p = \sqrt{2mP}\,\cos(\omega t + \omega Q)$

***Hinweis:* Verwenden Sie hierbei, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1/2}$ gilt.

4. *Lagrange-I: rotierender gebogener Draht* *(9 Punkte)*

Eine Punktmasse m bewege sich reibungsfrei auf einem masselosen gebogenen Draht, der um die z-Achse mit konstanter, positiver Winkelgeschwindigkeit ω rotiere. Die Form des Drahts ist quartisch, d.h. es gilt $z(r) = br^4$ mit einer positiven Konstante b und dem Abstand r zur z-Achse. Das System befindet sich im homogenen Gravitationsfeld der Erde, die Erdbeschleunigung g wirkt in die negative z-Richtung. Dem System angemessen führen wir Zylinderkoordinaten (r, φ, z) ein, d.h. für einen Ortsvektor gilt allgemein $\vec{x} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)^T$.



a) Welche der folgenden Zwangsbedingungen gelten für dieses System?

- [ ] $f_1(r,z) = \frac{z}{b} - r^4 = 0$ und $f_2(\varphi, t) = \varphi + \omega t = 0$
- [ ] $f_1(r,z) = r^4 - bz = 0$ und $f_2(\varphi, t) = \varphi - \omega t = 0$
- [ ] $f_1(r,z) = z - br^4 = 0$ und $f_2(\varphi) = \varphi - \omega = 0$
- [x] $f_1(r,z) = z - br^4 = 0$ und $f_2(\varphi, t) = \varphi - \omega t = 0$
- [ ] $f_1(r,z) = br^2 - z = 0$ und $f_2(\varphi, t) = \varphi - \omega t = 0$

b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen 1. Art auf. Dabei werden Sie den Nabla-Operator in Zylinderkoordinaten $\vec{\nabla} = \vec{e}_r\partial_r + r^{-1}\vec{e}_\varphi\partial_\varphi + \vec{e}_z\partial_z$ benötigen, wobei für die Einheitsvektoren $\vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T$, $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)^T$ und $\vec{e}_z = (0,0,1)^T$ gilt. Die Lagrange-Gleichungen 1. Art lauten damit: *(2 Punkte)*

- [ ] $-mg\vec{e}_z - m\left((\ddot{r} - r^2\omega^2)\vec{e}_r + 2\omega r\vec{e}_\varphi - \ddot{z}\vec{e}_z\right) + \lambda_1\left(\vec{e}_z - 4br^3\vec{e}_r\right) + \lambda_2\vec{e}_\varphi = 0$
- [ ] $-mg\vec{e}_z - m\left((\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + 2\omega\dot{r}\vec{e}_\varphi\right) + \lambda_1\left(\vec{e}_z + 4br^3\vec{e}_r\right) + \lambda_2 r^{-1}\vec{e}_\varphi = 0$
- [x] $-mg\vec{e}_z - m\left((\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + 2\omega\dot{r}\vec{e}_\varphi - \ddot{z}\vec{e}_z\right) + \lambda_1\left(\vec{e}_z - 4br^3\vec{e}_r\right) + \lambda_2 r^{-1}\vec{e}_\varphi = 0$
- [ ] $mg\vec{e}_z - m\left((\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + 2\omega\dot{r}\vec{e}_\varphi - \ddot{z}\vec{e}_z\right) + \lambda_2\left(\vec{e}_z - br^3\vec{e}_r\right) + \lambda_1 r^{-1}\vec{e}_\varphi = 0$
- [ ] $mg\vec{e}_z - m\left((\ddot{r} + r\omega^2)\vec{e}_r - 2\omega\dot{r}\vec{e}_\varphi - \ddot{z}\vec{e}_z\right) - \lambda_1\left(\vec{e}_z - 4br^3\vec{e}_r\right) - \lambda_2 r\vec{e}_\varphi = 0$

Betrachten Sie nun Gleichgewichtslagen, indem Sie die Bewegungsgleichungen für stationäre Lösungen in den Koordinaten r und z vereinfachen. Die Punktmasse bewegt sich an diesen Stellen dann nicht mehr in r und z Richtung. Lösen Sie die Lagrange-Gleichung 1. Art für diesen Fall.

c) Die beiden Lagrangemultiplikatoren ergeben sich zu: *(2 Punkte)*

- [x] $\lambda_1 = mg$ und $\lambda_2 = 0$
- [ ] $\lambda_1 = mg$ und $\lambda_2 = r$
- [ ] $\lambda_1 = -mg$ und $\lambda_2 = mr(\omega^2 - 4bgr^3)$
- [ ] $\lambda_1 = mg\vec{e}_z$ und $\lambda_2 = 0$
- [ ] $\lambda_1 = -m(g + \ddot{z})$ und $\lambda_2 = mr^2(\omega^2 - 4bgr^2)\tan(\omega t)$

d) Für stationäre Lösungen, die wir hier mit $\tilde{r}$ bezeichnen, gilt damit:

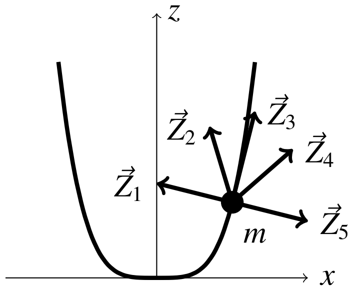
- [ ] $\tilde{r}\omega^2 - 4bg\tilde{r}^2 = 0$
- [ ] $\tilde{r}(\omega^2 - 4bg\tilde{r}^3) = 0$
- [x] $\tilde{r}(\omega^2 - 4bg\tilde{r}^2) = 0$
- [ ] $\tilde{r}(\omega^2 - 4bg\tilde{r}^3) = 0$
- [ ] $\tilde{r}^2(\omega^2 - 4bg) = 0$

e) Für die Zwangskraft in der Gleichgewichtlage mit $\tilde{r} > 0$ gilt: *(2 Punkte)*

- [ ] $\vec{Z} = mg\left(\vec{e}_z - \omega^3\left(2bg^3\right)^{-1/2}\vec{e}_r\right) + \tilde{r}^{-1}\vec{e}_\varphi$
- [ ] $\vec{Z} = mg\left(\vec{e}_z + \omega^2\left(4bg^3\right)^{-1/2}\vec{e}_r\right)$
- [x] $\vec{Z} = mg\left(\vec{e}_z - \omega^3\left(4bg^3\right)^{-1/2}\vec{e}_r\right)$
- [ ] $\vec{Z} = mg\left(\vec{e}_z - \omega^3\left(bg^2\right)^{-3/2}\vec{e}_r\right)$
- [ ] $\vec{Z} = -mg\left(\vec{e}_z - \omega^3\left(4bg^3\right)^{-1/2}\vec{e}_r + \vec{e}_\varphi\right)$

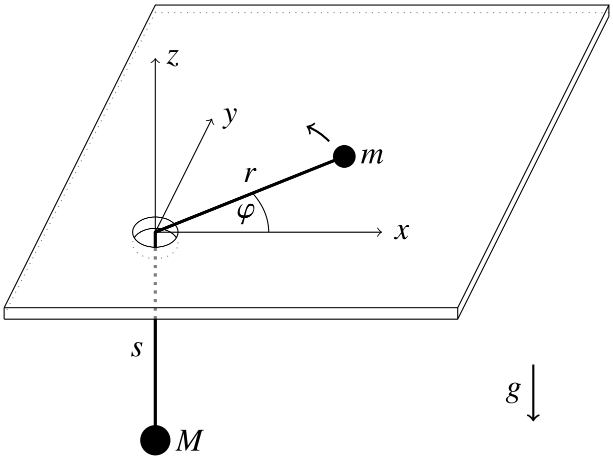
f) Berechnen Sie die Zwangskraft in der Gleichgewichtlage mit $\tilde{r} > 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Welche der in der nebenstehenden Skizze eingezeichneten Zwangskräfte $\vec{Z}_1$, $\vec{Z}_2$, $\vec{Z}_3$, $\vec{Z}_4$ und $\vec{Z}_5$ entspricht der tatsächlichen Zwangskraft am besten?

- [ ] $\vec{Z}_1$
- [x] $\vec{Z}_2$
- [ ] $\vec{Z}_3$
- [ ] $\vec{Z}_4$
- [ ] $\vec{Z}_5$



5. *Lagrange-II: Gravitation vs. Zentrifugalkraft* *(9 Punkte)*

Betrachten Sie das folgende dreidimensionale System: Eine Punktmasse m rotiere reibungsfrei auf einer (unendlich ausgedehnten) Platte in der x-y-Ebene. Über einen Faden der Länge $l = s + r$ sei sie durch ein Loch in der Platte mit einer zweiten Masse M verbunden. Wir wollen hier untersuchen, wie sich M unter dem Einfluss der Schwerkraft, die in negative z-Richtung wirkt, bewegt.



a) *Verständnisfrage: Welche Aussage über die Zwangsbedingungen stimmt?*

- ☑ Alle vier Zwangsbedingungen sind holonom-skleronom.
- ☐ Drei Zwangsbedingungen sind holonom-skleronom und eine ist holonom-rheonom.
- ☐ Alle drei Zwangsbedingungen sind holonom-skleronom.

b) Wählen Sie als generalisierte Koordinaten s und φ und bestimmen Sie die Lagrange-Funktion.
(2 Punkte)

- ☐ $L = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m(l-s)^2\dot{\varphi}^2 + Mgs$
- ☑ $L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m(l-s)^2\dot{\varphi}^2 + Mgs$
- ☐ $L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{s}^2 - \frac{1}{2}m(l-s)^2\varphi^2 - Mgs$
- ☐ $L = \frac{1}{2}(m+M)\dot{s}^2 - Mgs$
- ☐ $L = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}m(l-s)^2\dot{\varphi}^2 - Mgs$

c) *Verständnisfrage: Gibt es zyklische Variablen?*

- ☐ Ja, s ist eine zyklische Variable.
- ☑ Ja, φ ist eine zyklische Variable.
- ☐ Nein, weder s noch φ sind zyklische Variablen.

d) *Verständnisfrage: Welche der folgenden Aussagen die Erhaltungsgrößen betreffend stimmt?*

- ☐ Da die Lagrange-Funktion invariant unter räumlicher Translation ist, folgt aus dieser Symmetrie über das Noether-Theorem die Impulserhaltung der unteren Masse M.
- ☐ Die Energie der unteren Masse M ist erhalten.
- ☑ Der Drehimpuls der oberen Masse m und die Energie des gesamten Systems sind erhalten.

e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen 2. Art. **Eine** der Bewegungsgleichungen lautet: *(2 Punkte)*

- ☐ $0 = (m + M)\ddot{s} - M(l - s)\dot{\varphi}^2 + Mg$
- ☐ $0 = M\ddot{s} + m(l - s)\dot{\varphi}^2 - Mg$
- ☑ $0 = (m + M)\ddot{s} + m(l - s)\dot{\varphi}^2 - Mg$
- ☐ $0 = (m + M)\ddot{s} + Mg$
- ☐ $0 = M\ddot{s} + m(l - s)\dot{\varphi}^2 - Mg$

f) Unter welcher Bedingung wird M nach oben beschleunigt? *(2 Punkte)*

- ☐ $\dot{\varphi} > \sqrt{\frac{m(l-s)}{Mg}}$
- ☐ $\dot{\varphi} > \sqrt{\frac{M(l-s)}{mg}}$
- ☐ $\dot{\varphi} < \sqrt{\frac{Mg}{m(l-s)}}$
- ☐ $\dot{\varphi} < \sqrt{\frac{mg}{M(l-s)}}$
- ☑ $\dot{\varphi} > \sqrt{\frac{Mg}{m(l-s)}}$

6. *Verteilung von Molekülen & Entropie und Temperatur* *(10 Punkte)*

Hinweis: Die Aufgabenteile a) bis d) und e) bis g) können unabhängig voneinander bearbeitet werden!

In einem Behälter mit dem Volumen V_0 befinden sich N_0 Moleküle. Für jedes Molekül sind die Wahrscheinlichkeiten, dass es sich in irgendeinem Teilraum des Behälters mit festem Volumen aufhält, jeweils gleich groß.

a) Bestimmen Sie für ein Teilvolumen $V \leq V_0$ die Wahrscheinlichkeit $W(N, V)$ dafür, dass sich $N \leq N_0$ Moleküle in ihm befinden. *(2 Punkte)*

- [x] $W(N,V) = \binom{N_0}{N}\frac{V^N}{V_0^{N_0}}(V_0 - V)^{N_0-N}$
- [ ] $W(N,V) = \left(\frac{V}{V_0}\right)^N \frac{1}{N!}e^{-V/V_0}$
- [ ] $W(N,V) = \binom{N_0}{N_0-N}\frac{V^N}{V_0^{N_0}}V^{N_0-N}$
- [ ] $W(N,V) = \frac{V}{V_0}\frac{N}{N_0}$
- [ ] $W(N,V) = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{V/V_0} \frac{1}{N!}e^{-N/N_0}$

b) Wie groß ist die mittlere Anzahl $\langle N \rangle$ von Molekülen in V?

- [ ] $\langle N \rangle = \frac{N_0 V_0^2}{V^2}$
- [ ] $\langle N \rangle = \frac{N_0 V}{V - V_0}$
- [ ] $\langle N \rangle = \frac{N_0}{1-\frac{V}{V_0}}$
- [ ] $\langle N \rangle = \frac{N_0 V_0}{V}$
- [x] $\langle N \rangle = \frac{N_0 V}{V_0}$

c) Bestimmen Sie weiterhin die Varianz $\sigma^2 = \left\langle (N - \langle N \rangle)^2 \right\rangle$.

- [ ] $\sigma^2 = \frac{N_0 V_0}{V}\left(1 - \frac{V_0}{V}\right)$
- [x] $\sigma^2 = \frac{N_0 V}{V_0^2}(V_0 - V)$
- [ ] $\sigma^2 = \frac{N_0 V^2}{V_0^2}(V_0 + V)$
- [ ] $\sigma^2 = \frac{N_0 V_0}{V}\left(1 + \frac{V}{V_0}\right)$
- [ ] $\sigma^2 = \frac{N_0 (V - V_0)}{V_0}\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)$

d) *Verständnisfrage: Für kleine Teilchenzahlen N pro Volumen V geht die Wahrscheinlichkeit $W(N, V)$ in eine ...*

- [ ] ... Poisson-Verteilung über.
- [x] ... Gauß-Verteilung über.
- [ ] ... Boltzmann-Verteilung über.

Betrachten wir nun ***ein einzelnes*** Molekül. Es handelt sich bei den Molekülen um eindimensionale Ketten, die aus $n \gg 1$ gleichartigen Atomen bestehen. Jedes Atom kann nur zwei verschiedene Energien $\varepsilon_1 \equiv 0$ und $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon > 0$ annehmen. Die Anzahl der Mikrozustände als Funktion der Gesamtenergie E eines Moleküls ist durch

$$\Omega(E) = \frac{n!}{\left(n - \frac{E}{\varepsilon}\right)! \left(\frac{E}{\varepsilon}\right)!}$$

gegeben.

e) Bestimmen Sie die Entropie dieses Systems.† *(2 Punkte)*

- ☐ $S \approx k_B \left[n \ln n - \left(n - \frac{E}{\varepsilon}\right) \ln \left(n - \frac{E}{\varepsilon}\right) + \frac{E}{\varepsilon} \ln \frac{E}{\varepsilon}\right]$
- ☐ $S \approx k_B \left[n \ln n - \left(n + \frac{E}{\varepsilon}\right) \ln \left(n - \frac{E}{\varepsilon}\right) - \frac{E}{\varepsilon} \ln \frac{E}{\varepsilon}\right]$
- ☐ $S \approx k_B \left[n \ln n + \left(n - \frac{E}{\varepsilon}\right) \ln \left(n - \frac{E}{\varepsilon}\right) + \frac{E}{\varepsilon} \ln \frac{E}{\varepsilon}\right]$
- ☑ $S \approx k_B \left[n \ln n - \left(n - \frac{E}{\varepsilon}\right) \ln \left(n - \frac{E}{\varepsilon}\right) - \frac{E}{\varepsilon} \ln \frac{E}{\varepsilon}\right]$
- ☐ $S \approx k_B \left[n \ln n + \left(n - \frac{E}{\varepsilon}\right) \ln \left(n + \frac{E}{\varepsilon}\right) - \frac{E}{\varepsilon} \ln \frac{E}{\varepsilon}\right]$

f) Bestimmen Sie die Temperatur dieses Systems. *(2 Punkte)*

- ☐ $T \approx \varepsilon \left[k_B \ln \left(\frac{E}{n\varepsilon - E}\right)\right]^{-1}$
- ☐ $T \approx \frac{k_B}{\varepsilon} \ln \left(\frac{E}{n\varepsilon - E}\right)$
- ☑ $T \approx \varepsilon \left[k_B \ln \left(\frac{n\varepsilon - E}{E}\right)\right]^{-1}$
- ☐ $T \approx \frac{\varepsilon}{k_B} \left[\ln \left(\frac{\varepsilon - nE}{\varepsilon + nE}\right)\right]^{-1}$
- ☐ $T \approx \varepsilon \left[k_B \ln \left(\frac{n\varepsilon - E}{n\varepsilon + E}\right)\right]^{-1}$

g) *Verständnisfrage: Welche der folgenden Aussagen stimmt?*

- ☑ Wenn zwei dieser Moleküle in thermischen Kontakt gebracht werden, Molekül 1 mit $T > 0$ und Molekül 2 mit $E = \frac{3n\varepsilon}{4}$, dann fließt Wärme vom Molekül 2 zum Molekül 1.
- ☐ Für $T \to 0^+$ divergiert die Entropie S des Moleküls.
- ☐ Für $0 \leq E < \frac{n\varepsilon}{2}$ ist die inverse Temperatur β negativ.

---

† *Hinweis: Verwenden Sie die Stirling-Näherung* $\ln n! \approx n \ln n - n$.

7. ***Magnetostriktion: Volumenänderung eines Ferromagneten*** *(6 Punkte)*

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik habe für einen Ferromagneten die Form

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}V + B\mathrm{d}M,$$

wobei B das angelegte, äußere Magnetfeld und M die Magnetisierung des Ferromagneten sind. Die magnetische Suszeptibilität ist definiert als

$$\chi_m = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_{T,P}.$$

Gehen Sie dabei von einem linearen Zusammenhang zwischen Magnetisierung und angelegtem, äußeren Magnetfeld aus, d.h. es gilt $M = \chi_m B$. Zusätzlich ist die magnetische Suszeptibilität des betrachteten Ferromagneten als Funktion von Temperatur und Druck gegeben durch

$$\chi_m(T,P) = \frac{A}{T - \Theta(P)} \qquad \text{mit} \qquad \Theta(P) = \Theta_0(1 + \alpha P)$$

wobei A, Θ_0 und α geeignete positive Konstanten sind. Im Folgenden soll die Volumenänderung des Ferromagneten bei quasistatischem Einschalten eines Magnetfeldes von $B = 0$ nach $B = B_0 > 0$, bei konstantem Druck und konstanter Temperatur $T > \Theta(P)$ berechnet werden.

a) Wechseln Sie dazu mittels Legendre-Transformationen zu einer geeigneten thermodynamischen Funktion in ihren natürlichen Variablen (T, P, B). Bestimmen Sie daraus eine benötigte Maxwell-Relation. Diese **eine** für die Aufgabe relevante Maxwell-Relation lautet: *(2 Punkte)*

- [ ] $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,B} = -\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{T,B}$
- [ ] $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{T,B} = -\left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,P}$
- [ ] $\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{P,B} = -\left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,P}$
- [ ] $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,B} = -\left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,P}$
- [x] $\left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,P} = -\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{T,B}$

b) Berechnen Sie damit die differenzielle Volumenänderung mit dem Magnetfeld bei konstanter Temperatur und Druck, also den Magnetostriktionskoeffizienten. Dieser lautet: *(2 Punkte)*

- [ ] $\left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,P} = \frac{AB}{T-\Theta(P)}$
- [x] $\left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,P} = \frac{AB\alpha\Theta_0}{(T-\Theta(P))^2}$
- [ ] $\left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,P} = -\frac{A\alpha\Theta_0}{(T-\Theta(P))^2}$
- [ ] $\left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,P} = -\frac{AB\alpha\Theta_0}{(T-\Theta(P))^2}$
- [ ] $\left(\frac{\partial V}{\partial B}\right)_{T,P} = -\frac{A\alpha}{(T-\Theta(P))^2}$

c) Berechnen Sie damit die Volumenänderung des Ferromagneten bei quasistatischem Einschalten eines Magnetfeldes von $B = 0$ nach $B = B_0 > 0$, bei konstantem Druck und konstanter Temperatur $T > \Theta(P)$. *(2 Punkte)*

- ☐ $\Delta V = -\frac{AB_0^2\Theta_0}{(T-\Theta(P))^2}$
- ☐ $\Delta V = -\frac{AB_0\alpha\Theta_0}{(T-\Theta(P))^2}$
- ☐ $\Delta V = -\frac{AB_0^2\alpha\Theta_0}{2(T-\Theta(P))^2}$
- ☐ $\Delta V = \frac{AB_0\alpha}{T-\Theta(P)}$
- ☑ $\Delta V = \frac{AB_0^2\alpha\Theta_0}{2(T-\Theta(P))^2}$

8. *Energie, Entropie und Adiabaten des Van-der-Waals-Gases* *(8 Punkte)*

Für Van-der-Waals-Gase gilt die Zustandsgleichung

$$\left(P + \frac{a\nu^2}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

wobei a und b positive Konstanten sind.

a) *Verständnisfrage: Welche der folgenden Aussagen zu den Konstanten des Van-der-Waals-Gases a und b stimmt?*

- [x] Die Konstante b quantifiziert das Volumen der Gasteilchen.
- [ ] Für die Konstanten gilt $a > b$, wenn für die Temperatur $T > T_{krit}$ gilt.
- [ ] Die Konstante a beschreibt die Wechselwirkung der Teilchen durch Stöße.

b) *Verständnisfrage: Die Wärmekapazität bei konstantem Volumen von Van-der-Waals-Gasen …*

- [x] …kann eine Funktion des Volumens sein.
- [ ] …ist immer unabhängig vom Volumen.
- [ ] …ist immer eine Funktion der Temperatur.

Sei C_V nun gegeben als $C_V(T) = A + BT$ mit nichtnegativen Konstaten A und B. Betrachten Sie im Folgenden die Energie und Entropie in den Variablen Temperatur und Volumen.

c) Das totale Differential der Energie in den Variablen T und V ist gegeben durch:

- [ ] $\mathrm{d}E = C_P \mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right]\mathrm{d}V$
- [ ] $\mathrm{d}E = C_V \mathrm{d}T + \left[\frac{P}{T} - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\right]\mathrm{d}V$
- [x] $\mathrm{d}E = C_V \mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P\right]\mathrm{d}V$
- [ ] $\mathrm{d}E = C_V \mathrm{d}V + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T$
- [ ] $\mathrm{d}E = C_V \frac{\mathrm{d}T}{T} + \left[P\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - T\right]\mathrm{d}V$

d) Die Änderung der Energie vom Zustand (T_0, V_0) nach (T, V) ist gegeben durch:

- [ ] $\Delta E = A(T - T_0) - \frac{B}{2}\left(T^2 - T_0^2\right) + a\nu\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right)$
- [ ] $\Delta E = A\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \frac{B}{2}\left(T^2 - T_0^2\right) - a\nu^2\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V}\right)$
- [ ] $\Delta E = \frac{A}{2}\left(T^2 - T_0^2\right) + B(T - T_0) - b\nu\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right)$
- [ ] $\Delta E = A(T - T_0) - \frac{B}{2}(T + T_0)^2 - a\nu\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V}\right)$
- [x] $\Delta E = A(T - T_0) + \frac{B}{2}\left(T^2 - T_0^2\right) - a\nu^2\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}\right)$

e) Die Änderung der Entropie vom Zustand (T_0, V_0) nach (T, V) ist gegeben durch: *(2 Punkte)*

- [ ] $\Delta S = A \ln\left(\frac{T_0}{T}\right) + \frac{B}{2}\left(T^2 - T_0^2\right) - \nu b\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V}\right)$
- [ ] $\Delta S = A \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - B\,(T - T_0) + a\nu \ln\left(\frac{V-\nu b}{V_0-\nu b}\right)$
- [ ] $\Delta S = \frac{A}{2}\left(T^2 - T_0^2\right) + B\,(T - T_0) + \nu R \ln\left(\frac{V_0-\nu b}{V-\nu b}\right)$
- [x] $\Delta S = A \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + B\,(T - T_0) + \nu R \ln\left(\frac{V-\nu b}{V_0-\nu b}\right)$
- [ ] $\Delta S = A \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + B\,(T - T_0) + \nu R\left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V}\right)$

f) Sei nun $B = 0$. Die Zustandsänderung von (T_0, V_0) nach (T, V) wird nun auf quasistatische, adiabatische Weise durchgeführt. Für einen solchen Prozess gilt: *(2 Punkte)*

- [ ] $\left(\frac{T}{T_0}\right)^{C_V} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\nu R}$
- [ ] $\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\nu R} = \left(\frac{V_0-\nu b}{V-\nu b}\right)^{C_V}$
- [ ] $\left(\frac{T}{T_0}\right)^{C_V} = \left(\frac{V-a\nu^2}{V_0-a\nu^2}\right)^{\nu R}$
- [ ] $\left(\frac{T}{T_0}\right)^{A} = \left(\frac{V-\nu R}{V_0-\nu R}\right)^{\nu b}$
- [x] $\left(\frac{T}{T_0}\right)^{C_V} = \left(\frac{V_0-\nu b}{V-\nu b}\right)^{\nu R}$

9. *Thermodynamische Responsefunktionen eines Gases* *(9 Punkte)*

Für ein Gas gelte die Zustandsgleichung

$$P = aT\left(\frac{b}{V} - \frac{V}{c}\right),$$

wobei a, b und c positive Konstanten sind. Berechnen Sie die folgenden thermodynamischen Responsefunktionen:

a) Den isobaren Wärmeausdehnungskoeffizienten $\alpha \equiv \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$, *(2 Punkte)*

- ☐ $\alpha = \frac{V(bc-V^2)}{P(bc-V^3)}$
- ☐ $\alpha = \frac{bc-V^2}{P(bc+V^2)}$
- ☐ $\alpha = \frac{bc+V^2}{T(bc+V^3)}$
- ☑ $\alpha = \frac{bc-V^2}{T(bc+V^2)}$
- ☐ $\alpha = \frac{V(bc-V^2)}{T(bc+V^2)}$

b) und die isotherme Kompressibilität $\kappa_T \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$. *(2 Punkte)*

- ☐ $\kappa_T = \frac{V(bc-V^2)}{P(bc+V^2)}$
- ☐ $\kappa_T = \frac{V(bc-V^3)}{T(bc-V^2)}$
- ☑ $\kappa_T = \frac{bc-V^2}{P(bc+V^2)}$
- ☐ $\kappa_T = \frac{bc-V^2}{T(bc+V^2)}$
- ☐ $\kappa_T = \frac{bc+V^2}{P(bc+V^3)}$

Setzen Sie nun $a = \nu R$, $b = 1$ und betrachten Sie den Grenzfall $c \to \infty$.

c) Für diesen Fall sind α und κ_T gegeben durch: *(2 Punkte)*

- ☐ $\alpha = \frac{T}{V}$ und $\kappa_T = \frac{P}{V}$
- ☐ $\alpha = \frac{V}{P}$ und $\kappa_T = \frac{V}{T}$
- ☑ $\alpha = \frac{1}{T}$ und $\kappa_T = \frac{1}{P}$
- ☐ $\alpha = \frac{1}{P}$ und $\kappa_T = \frac{1}{T}$
- ☐ $\alpha = \frac{V}{T}$ und $\kappa_T = \frac{V}{P}$

d) *Verständnisfrage: An dem Gas wurde der Adiabatenkoeffizient zu $\gamma = \frac{6}{5}$ bestimmt. Welche der folgenden Erklärungen ist dafür möglich?*

- ☑ Es handelt sich um ein ultrarelativistisches zweiatomiges Gas, bei dem zusätzlich zu den translatorischen Freiheitsgraden auch die Freiheitsgrade der Rotation angeregt sind.
- ☐ Es handelt sich um ein nichtrelativistisches zweiatomiges Gas, bei dem zusätzlich zu den translatorischen Freiheitsgraden auch die Freiheitsgrade der Rotation angeregt sind.
- ☐ Es handelt sich um ein ultrarelativistisches zweiatomiges Gas, bei dem die translatorischen Freiheitsgrade und alle Freiheitsgrade der Rotation und der Vibration angeregt sind.

e) Berechnen Sie die adiabatische Kompressibilität $\kappa_S \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$ aus der Relation

$$\kappa_T = \kappa_S + \frac{VT\alpha^2}{C_P}$$

weiterhin für $a = \nu R$, $b = 1$, $c \to \infty$ und $\gamma = \frac{6}{5}$. *(2 Punkte)*

- ☑ $\kappa_S = \frac{5}{6P}$
- ☐ $\kappa_S = \frac{3}{5P}$
- ☐ $\kappa_S = \frac{7}{5P}$
- ☐ $\kappa_S = \frac{6}{5P}$
- ☐ $\kappa_S = \frac{7}{8P}$

Wichtige Bemerkungen zum Schluss:

- Überprüfen Sie bitte, ob Sie Ihren **Namen**, Ihre **Matrikelnummer** und Ihre **Gruppennummer** eingetragen haben. Haben Sie alle Fragen beantwortet?
- Speichern Sie Ihre ausgefüllte Klausur, benannt als **Klausur_Matrikelnummer.pdf**, und schicken Sie das Ergebnis per Email an dieselbe Adresse bis spätestens um 17:00 Uhr zurück.
- **Bestätigen Sie unbedingt die folgende Erklärung:**

☑ **Hiermit versichere ich, Josua Nathanael Kugler,**
dass ich diese Klausur selbstständig bearbeitet
und keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel verwendet habe.