Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 5

Besprechung in den Übungsgruppen am 18. November 2019

1. *Hausaufgabe:* Bewegung entlang einer Kurve

Ein Teilchen bewege sich auf der Kurve

$$\vec{x}(t) = \left(\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t)\,, \mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t)\,, 0\right)^\top \qquad \text{mit} \qquad a, \omega > 0.$$

a) Skizzieren Sie die Bahn und berechnen Sie den Tangentialvektor $\vec{\tau}(t)$, den Hauptnormalenvektor $\vec{n}_\mathrm{H}(t)$ und den Binormalenvektor $\vec{n}_\mathrm{B}(t)$.

b) Berechnen Sie den lokalen Krümmungsradius $\rho(t)$ der Bahn.

2. *Hausaufgabe:* Differentialoperatoren

a) Berechnen Sie den Gradienten $\vec{\nabla} f$ der folgenden Funktionen,

(i) $f(x, y, z) = y\sin(xz^2)$,

(ii) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \equiv r$.

b) Verwenden Sie das Ergebnis von a) (ii), um $\vec{\nabla} g(r)$ zu berechnen, wobei $g(r)$ eine beliebige differenzierbare Funktion sei, die nur vom Abstand r abhängt.

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\nabla_\mathrm{e} f$ von

$$f(x, y, z) = x^{yz}$$

in die Richtung $(12, 3, 4)^\top$.* Welchen Wert hat $\nabla_\mathrm{e} f$ im Punkt $(1, 1, 1)$?

d) Berechnen Sie die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ und die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{f}$ der folgenden Funktionen,

(i) $\vec{f}(x, y, z) = (xy + 2z^3, x^2/2, 6xz^2)^\top$,

(ii) $\vec{f}(x, y, z) = \mathrm{e}^{x+y}\,(4z^2, y^2, x^2 + z)^\top$.

3. *Hausaufgabe:* Kurvenintegral

Berechnen Sie das Arbeitsintegral

$$W = \int_{\vec{A}}^{\vec{B}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \qquad \text{mit} \qquad \vec{F}(x, y, z) = (6xyz - 1, 3x^2 z + 2y, 3x^2 y)^\top$$

von $\vec{A} = (0, 0, 1)^\top$ nach $\vec{B} = (1, 1, 1)^\top$ entlang

a) $\vec{x}(t) = (t, t, 1)^\top$ mit $0 \le t \le 1$,

b) einer geraden Linie vom Ausgangspunkt $\vec{A}$ zum Punkt $(1, 0, 1)^\top$ und danach entlang einer geraden Linie zum Endpunkt $\vec{B}$.

---

* *Hinweis:* Stellen Sie sicher, dass der Richtungsvektor normiert ist!

4. ***Präsenzaufgabe:*** **Teilchen auf Ellipsenbahn**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich auf einer Ellipsenbahn,

$$\vec{x}(t) = (a\cos(\omega t)\,, b\sin(\omega t)\,, 0)^{\top}$$

mit den Halbachsen $a, b > 0$ und der Kreisfrequenz ω.

a) Welche Kraft $\vec{F}(x, y, z)$ wirkt auf das Teilchen? Berechnen Sie das zugehörige Potential $V(x, y, z)$.

b) Bestimmen Sie die zeitliche Änderung der Energie $E(t)$ und des Drehimpulses $\vec{L}(t)$.

5. Verständnisfragen

a) Benennen Sie die einschränkenden Bedingungen, die wir bei der Herleitung des Energiesatzes in einer bzw. in drei Dimensionen angenommen haben.

b) Erklären Sie die Begriffe der partiellen Ableitung, des Gradienten, der Divergenz und der Rotation.

c) Was ist eine Potentialfunktion?

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

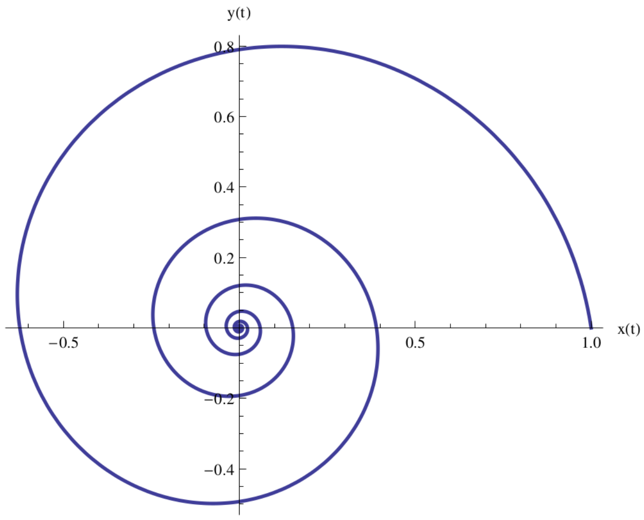
Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 5: Lösungen

1. Hausaufgabe: Bewegung entlang einer Kurve

a) Die Bewegung entlang der Kurve $\vec{x}(t) = (\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t), \mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t), 0)^\top$ beschreibt eine Spirale in der x-y-Ebene.



Der Tangentialvektor $\vec{\tau}$ an die Bahnkurve ist durch den auf 1 normierten Geschwindigkeitsvektor gegeben,

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}.$$

Die Zeitableitung von $\vec{x}(t)$ liefert den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$,

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-at}\begin{pmatrix} -\omega\sin(\omega t) - a\cos(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) - a\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag $|\vec{v}(t)|$ lautet daher

$$|\vec{v}(t)| = \mathrm{e}^{-at}\sqrt{[-\omega\sin(\omega t) - a\cos(\omega t)]^2 + [\omega\cos(\omega t) - a\sin(\omega t)]^2} = \mathrm{e}^{-at}\sqrt{\omega^2 + a^2}. \qquad \text{(I)}$$

Somit lautet der Tangentialvektor

$$\vec{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}\begin{pmatrix} -\omega\sin(\omega t) - a\cos(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) - a\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Hauptnormalenvektor $\vec{n}_\mathrm{H}(t)$ ist definiert durch

$$\vec{n}_\mathrm{H}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}s}\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}s}\right|^{-1} = \frac{1}{|\vec{v}(t)|}\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t}\left|\frac{1}{|\vec{v}(t)|}\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t}\right|^{-1} = \frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t}\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t}\right|^{-1}.$$

Die Zeitableitung von $\vec{\tau}(t)$ liefert zunächst

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \begin{pmatrix} -\omega\cos(\omega t) + a\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) - a\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag dieses Vektors ist gegeben durch

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \sqrt{[-\omega\cos(\omega t) + a\sin(\omega t)]^2 + [-\omega\sin(\omega t) - a\cos(\omega t)]^2} = \omega. \qquad \text{(II)}$$

Damit lautet der Hauptnormalenvektor

$$\vec{n}_{\mathrm{H}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} \begin{pmatrix} -\omega\cos(\omega t) + a\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) - a\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Binormalenvektor $\vec{n}_{\mathrm{B}}(t)$ ist orthogonal zu $\vec{\tau}(t)$ und $\vec{n}_{\mathrm{H}}(t)$ und kann mit Hilfe des Vektorprodukts berechnet werden zu

$$\begin{aligned}\vec{n}_{\mathrm{B}}(t) = \vec{\tau} \times \vec{n}_{\mathrm{H}}(t) &= \frac{1}{\omega^2 + a^2} \begin{pmatrix} -\omega\sin(\omega t) - a\cos(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) - a\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega\cos(\omega t) + a\sin(\omega t) \\ -\omega\sin(\omega t) - a\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\omega^2 + a^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [-\omega\sin(\omega t) - a\cos(\omega t)]^2 + [\omega\cos(\omega t) - a\sin(\omega t)]^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

b) Der lokale Krümmungsradius der Bahn $\rho(t)$ ist definiert durch

$$\rho(t) = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}s}\right|^{-1} = \left|\frac{1}{|\vec{v}(t)|}\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t}\right|^{-1} = |\vec{v}(t)| \left|\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t}\right|^{-1}.$$

Die entsprechenden Ausdrücke können aus (I) und (II) übernommen werden, sodass man

$$\rho(t) = \frac{\sqrt{\omega^2 + a^2}}{\omega} \mathrm{e}^{-at}$$

erhält.

2. *Hausaufgabe:* Differentialoperatoren

a) (i) Die partiellen Ableitungen von $f(x, y, z) = y\sin(xz^2)$ lauten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz^2\cos(xz^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(xz^2) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz\cos(xz^2).$$

Der gesuchte Gradient ist somit gegeben durch

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} yz^2\cos(xz^2) \\ \sin(xz^2) \\ 2xyz\cos(xz^2) \end{pmatrix}.$$

(ii) Die partiellen Ableitungen von $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ lauten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}.$$

Der gesuchte Gradient ist somit gegeben durch

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{r}$$

mit dem Ortsvektor $\vec{x} = (x, y, z)^\top$.

b) Gemäß Kettenregel gilt

$$\frac{\partial g(r)}{\partial x_i} = \frac{\mathrm{d}g(r)}{\mathrm{d}r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = g'(r) \frac{x_i}{r},$$

wobei der Strich die Ableitung nach r bezeichnet. Damit ist

$$\vec{\nabla} g(r) = g'(r) \frac{\vec{x}}{r}. \tag{III}$$

c) Die Richtungsableitung in Richtung $\vec{e}$ ist durch

$$\nabla_{\mathrm{e}} f = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} f$$

definiert, wobei $\vec{e}$ auf 1 normiert ist. Der auf dem Aufgabenblatt angegebene Vektor wird zunächst wie folgt normiert,

$$\vec{e} = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y, z) = x^{yz} = \mathrm{e}^{yz \ln(x)}$$

lauten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{x} \mathrm{e}^{yz \ln(x)} = yz x^{yz-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = z \ln(x) \, \mathrm{e}^{yz \ln(x)} = z \ln(x) \, x^{yz},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \ln(x) \, \mathrm{e}^{yz \ln(x)} = y \ln(x) \, x^{yz}.$$

Die Richtungsableitung lautet damit zunächst

$$\nabla_{\mathrm{e}} f = \frac{x^{yz}}{13} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} yz/x \\ z \ln(x) \\ y \ln(x) \end{pmatrix} = \frac{x^{yz} \left[12 yz x^{-1} + 3z \ln(x) + 4y \ln(x) \right]}{13}.$$

Im Punkt $(1, 1, 1)^\top$ erhält man damit:

$$\nabla_{\mathrm{e}} f|_{(1,1,1)^\top} = \frac{12}{13}.$$

d) (i) Für das Vektorfeld $\vec{f}(x, y, z) = (xy + 2z^3, x^2/2, 6xz^2)^\top$ erhält man die Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x} \left(xy + 2z^3 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(6xz^2 \right) = y + 12xz$$

und die Rotation

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xy + 2z^3 \\ x^2/2 \\ 6xz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 6z^2 - 6z^2 \\ x - x \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

(ii) Für das Vektorfeld $\vec{f} = \mathrm{e}^{x+y}\,(4z^2, y^2, x^2+z)^\top$ erhält man die Divergenz

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4z^2\,\mathrm{e}^{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\,\mathrm{e}^{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(x^2+z\right)\mathrm{e}^{x+y}\right] = 4z^2\,\mathrm{e}^{x+y} + \left(2y+y^2\right)\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x+y}$$
$$= \left(1+2y+y^2+4z^2\right)\mathrm{e}^{x+y}$$

und die Rotation

$$\vec{\nabla}\times\vec{f} = \begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4z^2\,\mathrm{e}^{x+y}\\ y^2\,\mathrm{e}^{x+y}\\ (x^2+z)\,\mathrm{e}^{x+y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x^2+z)\,\mathrm{e}^{x+y}-0\\ 8z\,\mathrm{e}^{x+y}-[2x\,\mathrm{e}^{x+y}+(x^2+z)\,\mathrm{e}^{x+y}]\\ y^2\,\mathrm{e}^{x+y}-4z^2\,\mathrm{e}^{x+y}\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{x+y}\begin{pmatrix}x^2+z\\ 7z-2x-x^2\\ y^2-4z^2\end{pmatrix}.$$

3. Hausaufgabe: Kurvenintegral

a) Der Weg entlang der Diagonalen zwischen den Punkten $\vec{A}$ und $\vec{B}$ ist bereits durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}t\\ t\\ 1\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad 0 \le t \le 1$$

in Parameterform gegeben. Das Kraftfeld

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix}6xyz-1\\ 3x^2z+2y\\ 3x^2y\end{pmatrix} \tag{IV}$$

als Funktion des Parameters t lautet damit

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix}6t^2-1\\ 3t^2+2t\\ 3t^3\end{pmatrix},$$

während das gerichtete Wegelement $\mathrm{d}\vec{x}$ gegeben ist durch

$$\mathrm{d}\vec{x} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{d}t.$$

Das Arbeitsintegral ergibt somit

$$W = \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix}6t^2-1\\ 3t^2+2t\\ 3t^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \int_0^1 \mathrm{d}t\left(9t^2+2t-1\right) = \left(3t^3+t^2-t\right)\Big|_0^1 = 3.$$

b) Der zweite Weg besteht aus zwei Teilstücken, die separat parametrisiert werden müssen. Das erste Teilstück lautet

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix}t\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad 0 \le t \le 1,$$

sodass

$$\vec{F}_1(t) = \begin{pmatrix}-1\\ 3t^2\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{d}t.$$

Der Beitrag entlang dieses Wegstückes zum Arbeitsintegral lautet somit

$$W_1 = \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} -1 \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\int_0^1 \mathrm{d}t = -t\Big|_0^1 = -1.$$

Das zweite Teilstück kann durch

$$\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

parametrisiert werden, sodass

$$\vec{F}_2(t) = \begin{pmatrix} 6t-1 \\ 3+2t \\ 3t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t.$$

Der Beitrag entlang dieses Wegstückes zum Arbeitsintegral lautet somit

$$W_2 = \int_0^1 \mathrm{d}t \begin{pmatrix} 6t-1 \\ 3+2t \\ 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^1 \mathrm{d}t\,(3+2t) = \left(3t+t^2\right)\Big|_0^1 = 4.$$

Das Arbeitsintegral entlang des gegebenen Weges ergibt damit wiederum

$$W = W_1 + W_2 = -1 + 4 = 3.$$

4. *Präsenzaufgabe:* Teilchen auf Ellipsenbahn

a) Um die Beschleunigung zu berechnen, die auf ein Teilchen mit dem Ortsvektor $\vec{x}(t)$ wirkt, leitet man diesen zunächst zweimal nach der Zeit ab,

$$\dot{\vec{x}}(t) = \omega \begin{pmatrix} -a\sin(\omega t) \\ b\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad \ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2 \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ b\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{x}(t). \tag{V}$$

Die Kraft erhält man dann aus der Newton'schen Bewegungsgleichung,

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F} = -m\omega^2 \vec{x}.$$

Das dazugehörige Potential $V(x,y,z)$ erhält man aus der Bestimmungsgleichung

$$\vec{F}(x,y,z) = -\vec{\nabla} V(x,y,z) = -m\omega^2 \vec{x} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\nabla} V(x,y,z) = m\omega^2 \vec{x}.$$

Mit Hilfe von (III) erkennt man, dass das Potential nur vom Radialabstand abhängt,

$$\vec{\nabla} V(r) = V'(r)\,\frac{\vec{x}}{r} \qquad \Rightarrow \qquad V'(r) = m\omega^2 r.$$

Somit erhält man schließlich das dreidimensionale Oszillatorpotential

$$V(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2} \qquad \text{mit} \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{VI}$$

Die Integrationskonstante wurde dabei so gewählt, dass $V(r=0) = 0$ gilt.

b) Man kann die Energie mit Hilfe von (V) und (VI) explizit berechnen,

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + V(r) = \frac{m\omega^2}{2}\left[a^2 \sin^2(\omega t) + b^2 \cos^2(\omega t)\right] + \frac{m\omega^2}{2}\left[a^2 \cos^2(\omega t) + b^2 \sin^2(\omega t)\right] \\
&= \frac{m}{2}\omega^2\left(a^2 + b^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{E} = 0.
\end{aligned}
$$

Die Tatsache, dass die Energie zeitlich konstant ist, lässt sich auch bereits daraus erschließen, dass es sich bei $\vec{F}(x, y, z)$ um eine Potentialkraft handelt.

Der Drehimpuls ist explizit gegeben durch

$$
\vec{L} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}} = m\omega \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ b\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin(\omega t) \\ b\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = m\omega ab \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\vec{L}} = 0.
$$

Damit ist auch der Drehimpuls für diese Bewegung erhalten.

5. Verständnisfragen

a) Die Energiesätze in einer und in drei Dimensionen wurden unter der Bedingung hergeleitet, dass die auftretende Kraft nur vom Ort, jedoch nicht von der Geschwindigkeit abhängt. In drei Dimensionen gilt außerdem noch die Bedingung, dass die Kraft eine Potentialkraft ist, sie sich also als der negative Gradient eines skalaren Potentials schreiben lässt. Diese zusätzliche Bedingung ist in einer Dimension automatisch erfüllt.

b) Eine skalare Funktion f, die von n Variablen x_i abhängt, kann nach jeder ihrer Variablen abgeleitet werden, während die restlichen $n - 1$ Variablen festgehalten werden. Die Ableitung nach der i-ten Variablen bezeichnet man dann als *partielle Ableitung nach x_i*. Sie wird geschrieben als $\partial f/\partial x_i$ oder $\partial_i f$.

Der Gradient $\vec{\nabla} f$ ist der Vektor, der aus den n partiellen Ableitungen gebildet wird, also $\vec{\nabla} f = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)^\top$ in kartesischen Koordinaten. Der Gradient zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f.

Eine vektorwertige Funktion $\vec{f}$ mit n Komponenten, die ebenfalls von n Variablen abhängt, hat die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \partial_1 f_1 + \ldots + \partial_n f_n$ in kartesischen Koordinaten. Die Divergenz ist eine skalare Funktion, die an jedem Punkt angibt, wie sehr $\vec{f}$ in einer kleinen Umgebung dieses Punktes auseinanderstrebt oder zusammenfließt. Verschwindet die Divergenz an jedem Punkt, dann ist das Vektorfeld *quellenfrei*.

Die Rotation einer vektorwertigen Funktion $\vec{f}$ im dreidimensionalen euklidischen Raum ordnet dieser Funktion eine ebenfalls vektorwertige Funktion zu, die durch $\vec{\nabla} \times \vec{f} = (\partial_2 x_3 - \partial_3 x_2, \partial_3 x_1 - \partial_1 x_3, \partial_1 x_2 - \partial_2 x_1)^\top$ in kartesischen Koordinaten definiert ist. Verschwindet die Rotation von $\vec{f}$ an jedem Punkt, so ist $\vec{f}$ *wirbelfrei*.

c) Ist ein Kraftfeld $\vec{F}$ konservativ, so lässt es sich als negativer Gradient einer skalaren Funktion V, der sog. *Potentialfunktion*, schreiben, also $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$. In diesem Fall ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie erhalten.