INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 7 - Update-Nr.: 1 12. Juni 2020

Abgabe bis Fr. 19.06.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei: *Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf*. Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf*. Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.
- An alle, die lieber Beweis- statt Rechenaufgaben haben: Es kommen auch wieder Übungsblätter mit mehr Beweisaufgaben, es ist aber essentiell, dass Ihr den Umgang mit partiellen und totalen Ableitungen und mithin mit Gradienten, Jacobi-Matrizen etc. sicher beherrscht. Daher ist dieses Übungsblatt sehr rechenlastig gehalten.

Themen:

- Partielle Differenzierbarkeit
- Totale Differenzierbarkeit
- Kettenregel
- Mittelwertsatz

Aufgabe 7.1 (6 Punkte): Partielle Differenzierbarkeit

(a) Man berechne den Gradienten ∇f der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^x \cos(y) + \ln\left(1 + y^2\right).$$ 1

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Man zeige, dass f überall zweimal partiell differenzierbar ist, aber

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\,\partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\,\partial x}$$

gilt. Warum widerspricht dies nicht dem Satz von Schwarz (Satz 4.1.2 der Vorlesung)? Mit Begründung! 5

Lösungsvorschlag:

(a) Die partielle Ableitung von f nach x ist

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = e^x \cos(y).$$

Für die partielle Ableitung von f nach y ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -e^x \sin(y) + \frac{\partial}{\partial y} \log\left(1+y^2\right) \overset{\text{Kettenregel}}{=} -e^x \sin(y) + \frac{1}{1+y^2} 2y$$
$$= \frac{2y}{1+y^2} - e^x \sin(y).$$

Daher folgt für den Gradienten von f:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ \frac{2y}{1+y^2} - e^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

(b) Wir unterscheiden zwei Fälle, um zu zeigen dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar ist.

- Sei zunächst $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gilt $x^2+y^2 > 0$ und somit ist

  $$f(x,y) = xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

  sowohl nach x als auch y einmal partiell differenzierbar (aufgrund der Standardargumente aus Analysis 1 bezüglich Produkten, Summen, Differenzen und Quotienten differenzierbarer Funktionen). Für die Berechnung der partiellen Ableitungen definieren wir die folgende Hilfsfunktion.

  $$\Phi\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ (a,b) \mapsto \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

  Offensichtlich ist Φ nach a und b partiell differenzierbar. Per Konstruktion gilt $f(x,y) = xy\Phi(x,y)$. Daher folgt unter Verwendung der Produktregel

  $$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y\Phi(x,y) + xy \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y)$$

  und

  $$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x\Phi(x,y) + xy \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y).$$

  Unter Verwendung der Quotientenregel erhält man folgende partielle Ableitungen von Φ:

  $$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{2x\left(x^2+y^2\right) - 2x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
  $$= \frac{2x\left(x^2+y^2-x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2y\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{2y\left(-x^2-y^2-x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-4x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{aligned}$$

Also folgt insgesamt

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = y\Phi(x,y) + xy\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y) = \frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = x\Phi(x,y) + xy\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y) = \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Wegen $(x,y)\neq 0$, gilt $x^2+y^2\neq 0$ und somit auch $\left(x^2+y^2\right)^2\neq 0$ und daher existieren die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

(wieder nach den Standardregeln aus Analysis 1). Also wurde gezeigt, dass f auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ zweimal partiell differenzierbar ist.

- Für die zweifache partielle Differenzierbarkeit in $0\in\mathbb{R}^2$, stellen wir zunächst fest, dass

$$f(x,0)=0 \text{ und } f(0,y)=0$$

für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gelten. Dies folgt unmittelbar aus der Definition von f. Sei nun $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dann gelten insbesondere

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0}0 = 0$$

und

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = \lim_{h\to 0}0 = 0.$$

Daher folgt, dass f in $0\in\mathbb{R}^2$ einmal partiell differenzierbar ist mit partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) = 0 = \frac{\partial}{\partial y}f(0,0).$$

Seien nun $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ beliebig. Wir haben im ersten Fall die ersten partiellen Ableitungen von f auf ganz $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ berechnet. Durch Einsetzen erhalten wir die folgenden Spezialfälle:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}f(x,0) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial y}f(x,0) = \frac{x^3}{x^2} = x,\\ &\frac{\partial}{\partial x}f(0,y) = -\frac{y^3}{y^2} = -y,\\ &\frac{\partial}{\partial y}f(0,y) = 0.\end{aligned}$$

Daher folgt für die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial x}f(h,0)-\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0,\\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial y}f(h,0)-\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1,\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial x}f(0,h)-\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1,\\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}f(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial y}f(0,h)-\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0.
\end{aligned}$$

Also ist f auch in $0 \in \mathbb{R}^2$ zweifach partiell differenzierbar.

Die Ungleichheit, die zu zeigen ist, haben wir bereits gezeigt, denn es gilt

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0) = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}$$

nach obiger Rechnung.

Dies steht nicht im Widerspruch zum Satz von Schwarz, denn die zweite partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

müsste in $(0,0)$ stetig sein, damit der Satz von Schwarz anwendbar ist. Dies ist aber nicht der Fall, denn für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}f(x,0)}_{=0} = 0 \neq -1 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f(0,0).$$

Aufgabe 7.2 (8 Punkte): Partielle und totale Differenzierbarkeit

<u>Motivation:</u> In der Vorlesung haben wir gesehen, dass jede Funktion, die stetig partiell differenzierbar ist, auch total differenzierbar ist und wiederum jede Funktion, die total differenzierbar ist, auch partiell differenzierbar ist. Ebenso findet sich in der Vorlesung der Hinweis, dass die umgekehrten Richtungen im Allgemeinen nicht gültig sind. In dieser Aufgabe wollen wir uns entsprechende Beispiele anschauen. Die Funktion aus Aufgabenteil (a) ist ein Beispiel für eine Funktion, die zwar partiell aber nicht total differenzierbar ist, und die Funktion aus Aufgabenteil (b) ein Beispiel für eine Funktion, die zwar total aber nicht stetig partiell differenzierbar ist.

<u>Aufgabe:</u>

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Man zeige, dass f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ nicht total differenzierbar ist, dort jedoch Richtungsableitungen in alle Richtungen besitzt (und somit dort insbesondere partiell differenzierbar ist). 3

Tipp: Auch im mehrdimensionalen Fall gilt, dass eine in einem Punkt (x, y) unstetige Funktion an dieser Stelle auch nicht differenzierbar sein kann.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Man zeige, dass f im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ total differenzierbar ist, dort aber nicht alle partiellen Ableitungen stetig sind. 5

Lösungsvorschlag:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$x_n = \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R} \text{ und } y_n = \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$$

Nach Konstruktion gilt

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = 0 \in \mathbb{R}^2.$$

Da $x_n \neq 0$ und $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt aber auch

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^4}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-4}}{2n^{-4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0) = f\left(\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n)\right).$$

Daher ist f in $0 \in \mathbb{R}^2$ nicht stetig und insbesondere nicht total differenzierbar.
Um zu zeigen, dass alle Richtungsableitungen von f im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ existieren, sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor. Falls $v = 0$, so gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+hv) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Somit existiert die Richtungsableitung in Richtung $v = 0$. Sei nun $v \neq 0$ vorausgesetzt. Dann gilt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+hv) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{hv_1 h^2 v_2^2}{h^2 v_1^2 + h^4 v_2^4}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 v_1 v_2^2}{h^3 v_1^2 + h^5 v_2^4}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4} = \lim_{h\to 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4} = \begin{cases} 0, \text{ falls } v_1 = 0, \\ \frac{v_2^2}{v_1}, \text{ falls } v_1 \neq 0. \end{cases}$$

Daher existiert auch die Richtungsableitung für $v \neq 0$.
Da f in jede Richtung $v \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist, gilt dies insbesondere für die Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$, weshalb f auch partiell differenzierbar ist.

(b) Wir berechnen als erstes den Gradienten f in $0 \in \mathbb{R}^2$. Dafür seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\left| \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \right| = \left| \frac{x^2 \sin\left(x^{-1}\right)}{x} \right| = \left| x \sin\left(x^{-1}\right) \right| \leq |x|$$

und analog

$$\left| \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} \right| = \left| \frac{y^2 \sin\left(y^{-1}\right)}{y} \right| = \left| y \sin\left(y^{-1}\right) \right| \leq |y|\,.$$

Folglich gilt

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} \right| = 0 = \lim_{y \to 0} \left| \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} \right|,$$

was für den Gradienten

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)\,,\, \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \right) = 0 \in \mathbb{R}^2$$

impliziert. Wir behaupten, dass der Gradient von f in 0 die totale Ableitung von f in 0 ist. Um dies zu zeigen sei $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(v) - f(0) - \nabla f(0,0)\, v^T}{\|v\|} \right| &= \frac{|f(v)|}{\|v\|} = \frac{\left| \|v\|^2 \sin\left(\|v\|^{-1} \right) \right|}{\|v\|} \\ &= \frac{\|v\|^2 \left| \sin\left(\|v\|^{-1} \right) \right|}{\|v\|} \leq \|v\|\,. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$\lim_{v \to 0} \left| \frac{f(v) - f(0) - \nabla f(0,0)\, v^T}{\|v\|} \right| = 0,$$

was die totale Differenzierbarkeit von f in 0 beweist.
Um zu zeigen, dass f nicht stetig partiell differenzierbar in $0 \in \mathbb{R}^2$ ist, sei ein Vektor $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben. Dann gilt unter Verwendung der Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(v) &= 2x \sin\left(\frac{1}{\|v\|} \right) + \|v\|^2 \frac{-x}{\|v\|^3} \cos\left(\frac{1}{\|v\|} \right) \\ &= 2x \left(\sin\left(\frac{1}{\|v\|} \right) - \frac{1}{2\,\|v\|} \cos\left(\frac{1}{\|v\|} \right) \right) \end{aligned}$$

Wähle nun $v = (x, 0)$ mit $x > 0$. Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(v) = 2x \left(\sin\left(x^{-1}\right) - \frac{1}{2x} \cos\left(x^{-1}\right) \right) = 2x \sin\left(x^{-1}\right) - \cos\left(x^{-1}\right).$$

Nach Analysis 1 hat $\cos(t)$ für $t \to \infty$ keinen Limes. Daher hat $\cos\left(x^{-1}\right)$ für $x \to 0$ keinen Limes, und somit hat insbesondere die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x} f(v) == 2x \sin\left(x^{-1}\right) - \cos\left(x^{-1}\right)$$

keinen Limes für $x \to 0$. Daher ist die partielle Ableitung von f nach x nicht stetig in $0 \in \mathbb{R}^2$, was insbesondere zeigt, dass f nicht stetig partiell differenzierbar in 0 ist.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte): Kettenregel

Die Funktionen $f : D := \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \middle| x_2 \leq 0 \text{ oder } x_1 x_2 = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \ln(x_2) \\ \tan(x_1 x_2) \end{pmatrix}, \quad g(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \end{pmatrix}$$

und die Funktion $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}^2$ die Komposition von f und g und $x_0 := (1, e)^{\mathrm{T}} \in D$. Man berechne die Jacobi-Matrix $D_h(x_0)$ von h an der Stelle x_0 einmal mithilfe der Kettenregel und einmal ohne die Kettenregel, d. h. durch Bestimmung eines Ausdrucks für $h(x, y)$ und Differentiation dieses Ausdrucks.

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass die theoretische Bedeutung der Kettenregel meist höher ist als ihr praktischer Nutzen bei der Berechnung von Jacobi-Matrizen.

Lösungsvorschlag:

- Zunächst die Lösung mithilfe der Kettenregel. Hierfür berechnen wir zuänchst die Jacobi-Matrizen $D_f(x)$ und $D_g(y)$ für beliebige $x = (x_1, x_2) \in D$ und $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Hierbei sei $f = (f_1, f_2)$ und $g = (g_1, g_2)$. Dann gelten

$$D_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log(x_2) & \frac{x_1}{x_2} \\ x_2\left(1 + \tan^2(x_1 x_2)\right) & x_1\left(1 + \tan^2(x_1 x_2)\right) \end{pmatrix}$$

und

$$D_g(y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & 2y_2 \end{pmatrix}$$

Daher folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
&D_h(x_0) = D_{g\circ f}(x_0) = D_g(f(x_0))\, D_f(x_0) = D_g(\log(e), \tan(e))\, D_f(x_0) \\
&= D_g(1, \tan(e))\, D_f(x_0) = D_g(1, \tan(e))\, D_f(1, e) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\tan(e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log(e) & \frac{1}{e} \\ e\left(1 + \tan^2(e)\right) & 1 + \tan^2(e) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\tan(e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{e} \\ e\left(1 + \tan^2(e)\right) & 1 + \tan^2(e) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{e} \\ 2e\tan(e)\left(1 + \tan^2(e)\right) & 2\tan(e)\left(1 + \tan^2(e)\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Nun zur Lösung ohne Kettenregel. Dafür stellen wir fest, dass $h = g \circ f$ gegeben ist durch

$$h(x) = \left(x_1^2 \log^2(x_2), \tan^2(x_1 x_2)\right) \in \mathbb{R}^2$$

für alle $x = (x_1, x_2) \in D$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
D_h(x_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} (1, e) \\
&= \begin{pmatrix} 2\log^2(x_2)\, x_1 & 2\frac{x_1^2}{x_2}\log(x_2) \\ 2x_2 \tan(x_1 x_2)\left(1 + \tan^2(x_1 x_2)\right) & 2x_1 \tan(x_1 x_2)\left(1 + \tan^2(x_1 x_2)\right) \end{pmatrix} (1, e) \\
&= \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{e} \\ 2e\tan(e)\left(1 + \tan^2(e)\right) & 2\tan(e)\left(1 + \tan^2(e)\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 7.4 (2 Punkte): Mittelwertsatz

<u>MOTIVATION:</u> Euch ist sicherlich bereits aufgefallen, dass der Mittelwertsatz im mehrdimensionalen Fall optisch relativ wenig mit dem Mittelwertsatz aus der Analysis 1 zu tun hat. Es stellt sich daher die Frage, warum das der Fall ist und ob man den Mittelwertsatz nicht wie in der Analysis 1 formulieren kann. Diese Aufgabe soll Euch zeigen, dass der Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen nicht wie der Mittelwertsatz der Analysis 1 formuliert werden kann, sondern nur in Integralform oder komponentenweise mit verschiedenen Zwischenstellen.

<u>AUFGABE:</u> Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $a = 0$ und $b = 2\pi$. Man zeige, dass es dann **kein** $\xi \in (a, b)$ gibt mit

$$f(b) - f(a) = D_f(\xi)(b - a).$$

Der Ausdruck $D_f(\xi)$ bezeichnet dabei die Jacobi-Matrix der Funktion f an der Stelle ξ, wobei diese in diesem Fall die Form eines Spaltenvektors hat.

<u>**Lösungsvorschlag:**</u>

Wir stellen fest, dass

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) \\ \sin(2\pi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Angenommen es gäbe ein $\xi \in (0, 2\pi)$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} = f(b) - f(a) = D_f(\xi)(b-a) = 2\pi D_f(\xi).$$

Dann würde insbesondere

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} = D_f(\xi) = \begin{pmatrix} -\sin(\xi) \\ \\ \cos(\xi) \end{pmatrix}$$

gelten. Also wäre ξ eine gemeinsame Nullstelle von sin und cos, was nicht möglich ist. Folglich existiert kein solches ξ.
