Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 8

Besprechung in den Übungsgruppen am 9. Dezember 2019

1. *Hausaufgabe:* Divergenz in Kugelkoordinaten

Wie Sie in der Vorlesung gesehen haben, ist die Orthonormalbasis in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) mit

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad \text{und} \quad z = r\cos\theta$$

durch die folgenden drei Vektoren gegeben,

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y.$$

a) Berechnen Sie alle neun möglichen Ableitungen der drei Basisvektoren $\partial_i \vec{e}_j$ mit $i, j \in \{r, \theta, \varphi\}$ und drücken Sie ihre Ergebnisse wiederum über die Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$ aus.*

b) Zeigen Sie, dass die Divergenz des Vektorfeldes

$$\vec{A} = A_r(r, \theta, \varphi)\,\vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi)\,\vec{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi)\,\vec{e}_\varphi$$

in Kugelkoordinaten durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\,\partial_r\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\theta\left(\sin\theta\,A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\varphi A_\varphi \qquad \text{(I)}$$

gegeben ist. Verwenden Sie hierfür den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten, den Sie aus der Vorlesung kennen.

c) Berechnen Sie die Komponenten A_r, A_θ und A_φ des Vektorfeldes $\vec{A} = (y, -x, z)^\top$ in Kugelkoordinaten. Benutzen Sie dieses Ergebnis sowie (I), um $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ in Kugelkoordinaten zu berechnen.

2. *Hausaufgabe:* Periheldrehung von Merkur

Bewegt sich ein Körper im Newton'schen Gravitationspotential, muss seine Bahn geschlossen sein. Dies bedeutet insbesondere, dass die Position des Perizentrums zeitlich konstant sein muss.

Beobachtungen der Bahn von Merkur um die Sonne haben allerdings gezeigt, dass das Perihel seiner Bahn wandert. Selbst wenn alle Störungen durch die Gravitation anderer Planeten berücksichtigt werden, bleibt eine mit Newton'scher Gravitation nicht erklärbare Periheldrehung von 43 Winkelsekunden pro Jahrhundert in positiver Richtung. Hierbei bedeutet eine positive/negative Richtung, dass der Winkel zwischen zwei Perihelien mehr/weniger als 2π beträgt.

**Hinweis:* Der Ausdruck $\partial_\varphi \vec{e}_\varphi$ lässt sich über eine Linearkombination aus $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\theta$ darstellen.

Erweiteren Sie im Folgenden das Newton'sche Gravitationspotential um einen Term höherer Ordnung,

$$\tilde{V}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{2}\frac{1}{r^2}$$

mit den beiden Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$, wobei β klein ist.

a) Zeigen Sie analog zum Vorgehen in der Vorlesung, dass die Bahngleichung für den Radius eines Teilchens der Masse m die Form

$$r(\varphi) = \frac{\eta^2 p}{1 + \tilde{\varepsilon}\cos(\eta\varphi)} \qquad \text{mit} \qquad \eta \equiv \sqrt{1 + \frac{\beta m}{L^2}} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\varepsilon} \equiv \sqrt{1 + \frac{2mE\eta^2 p^2}{L^2}}$$

annimmt, wenn $\varphi = 0$ für den ersten Periheldurchgang der Bahn gewählt wird. Hierbei ist L der Drehimpuls des Teilchens, E seine Energie und p sein Bahnparameter, der in der Vorlesung definiert wurde.

b) Bei welchem Winkel wird während des nächsten Durchgangs der geringste Abstand durchlaufen? Wie lautet die Einschränkung für β, damit ein Potential der Form $\tilde{V}(r)$ für die Periheldrehung von Merkur verantwortlich sein kann?

3. *Präsenzaufgabe:* Bewegung im Zentralpotential

Ein Massenpunkt bewege sich unter dem Einfluss einer konservativen Zentralkraft auf der Bahn

$$r(\varphi) = r_0\, \mathrm{e}^{-\varphi/\alpha}$$

mit den beiden Konstanten $r_0 > 0$ und $\alpha > 0$. Hierbei wächst φ kontinuierlich an und springt bei 2π nicht auf 0 zurück.

a) Bestimmen Sie das zu dieser Bewegung gehörige Kraftgesetz.

b) Bestimmen Sie $\varphi(t)$ und $r(t)$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(t = 0) = 0$.

c) Nach welcher Zeit t_f erreicht der Massenpunkt das Kraftzentrum?

4. Verständnisfragen

a) Beschreiben Sie, mit welchem Ziel und auf welche Weise krummlinige Koordinaten eingeführt werden.

b) Warum ist der Drehimpuls in einem Zentralkraftfeld immer erhalten?

c) Welche Bahnformen treten im Gravitationsfeld unter welchen Bedingungen auf?

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 8: Lösungen

1. Hausaufgabe: Divergenz in Kugelkoordinaten

a) Man erhält für die gesuchten Ausdrücke

$$\partial_r \vec{e}_r = 0, \qquad \partial_r \vec{e}_\theta = 0, \qquad \partial_r \vec{e}_\varphi = 0,$$

$$\partial_\theta \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \vec{e}_\theta, \qquad \partial_\theta \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\theta \end{pmatrix} = -\vec{e}_r, \qquad \partial_\theta \vec{e}_\varphi = 0,$$

$$\partial_\varphi \vec{e}_r = \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin\theta\,\vec{e}_\varphi, \qquad \partial_\varphi \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi,$$

$$\partial_\varphi \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta.$$

b) Die Divergenz ergibt sich als

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\vec{e}_r\,\partial_r + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\,\partial_\theta + \frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}\,\partial_\varphi\right)\cdot\left(A_r\,\vec{e}_r + A_\theta\,\vec{e}_\theta + A_\varphi\,\vec{e}_\varphi\right).$$

Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, werden die drei Ableitungen separat behandelt. Als erstes erhält man

$$\begin{aligned}\vec{e}_r\,\partial_r\left(A_r\,\vec{e}_r + A_\theta\,\vec{e}_\theta + A_\varphi\,\vec{e}_\varphi\right) &= (\partial_r A_r)\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r + (\partial_r A_\theta)\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta + (\partial_r A_\varphi)\,\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\varphi \\ &\quad + A_r\,\vec{e}_r\cdot(\partial_r\vec{e}_r) + A_\theta\,\vec{e}_r\cdot(\partial_r\vec{e}_\theta) + A_\varphi\,\vec{e}_r\cdot(\partial_r\vec{e}_\varphi) = \partial_r A_r,\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass es sich um eine orthonormale Basis handelt, und außerdem die Ergebnisse aus a) eingesetzt wurden. Weiterhin erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\vec{e}_\theta}{r}\,\partial_\theta\left(A_r\,\vec{e}_r + A_\theta\,\vec{e}_\theta + A_\varphi\,\vec{e}_\varphi\right) &= \frac{1}{r}\left[\partial_\theta A_\theta + A_r\,\vec{e}_\theta\cdot(\partial_\theta\vec{e}_r) + A_\theta\,\vec{e}_\theta\cdot(\partial_\theta\vec{e}_\theta) + A_\varphi\,\vec{e}_\theta\cdot(\partial_\theta\vec{e}_\varphi)\right] \\ &= \frac{1}{r}\left(\partial_\theta A_\theta + A_r\,\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta - A_\theta\,\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_r\right) = \frac{1}{r}\left(\partial_\theta A_\theta + A_r\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}\,\partial_\varphi\left(A_r\,\vec{e}_r + A_\theta\,\vec{e}_\theta + A_\varphi\,\vec{e}_\varphi\right) &= \frac{1}{r\sin\theta}\Big[\partial_\varphi A_\varphi + A_r\,\vec{e}_\varphi\cdot\left(\partial_\varphi\,\vec{e}_r\right) + A_\theta\,\vec{e}_\varphi\cdot\left(\partial_\varphi\,\vec{e}_\theta\right) \\ &\quad + A_\varphi\,\vec{e}_\varphi\cdot\left(\partial_\varphi\vec{e}_\varphi\right)\Big] \\ &= \frac{1}{r\sin\theta}\Big[\partial_\varphi A_\varphi + A_r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi + A_\theta\cos\theta\,\vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi \\ &\quad + A_\varphi\,\vec{e}_\varphi\cdot(-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta)\Big] \\ &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\varphi A_\varphi + A_r\sin\theta + A_\theta\cos\theta\right).\end{aligned}$$

Zusammengenommen ergibt sich also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_r A_r + \frac{2}{r} A_r + \frac{1}{r} \partial_\theta A_\theta + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta} A_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \partial_\varphi A_\varphi. \tag{I}$$

Dies ist äquivalent zu der Formel auf dem Übungsblatt, denn

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \partial_r \left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \partial_\varphi A_\varphi \\
&= \frac{1}{r^2} \left(2rA_r + r^2 \partial_r A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta} (\cos\theta A_\theta + \sin\theta\, \partial_\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \partial_\varphi A_\varphi \\
&= \partial_r A_r + \frac{2}{r} A_r + \frac{1}{r} \partial_\theta A_\theta + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta} A_\theta + \frac{1}{r\sin\theta} \partial_\varphi A_\varphi.
\end{aligned}$$

c) Die Komponenten des Vektorfeldes $\vec{A}$ in Kugelkoordinaten erhält man, indem man die kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten ausdrückt und $\vec{A}$ auf die Basisvektoren der Kugelkoordinaten projiziert,

$$\begin{aligned}
A_r = \vec{e}_r \cdot \vec{A} &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\sin\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - r\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + r\cos^2\theta \\
&= r\cos^2\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_\theta = \vec{e}_\theta \cdot \vec{A} &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\sin\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi - r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi - r\sin\theta\cos\theta = -r\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned}$$

$$A_\varphi = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\sin\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} = -r\sin\theta\sin^2\varphi - r\sin\theta\cos^2\varphi = -r\sin\theta.$$

Das Vektorfeld $\vec{A}$ lautet somit in Kugelkoordinaten

$$\vec{A} = r\cos^2\theta\,\vec{e}_r - r\sin\theta\cos\theta\,\vec{e}_\theta - r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi.$$

Die Divergenz ergibt sich somit mit Hilfe von (I) zu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \cos^2\theta + 2\cos^2\theta - \cos^2\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta = 1.$$

Dies ist in der kartesischen Darstellung besonders leicht zu sehen, denn dort gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_x y + \partial_y (-x) + \partial_z z = 1.$$

2. *Hausaufgabe:* **Periheldrehung von Merkur**

a) In der Vorlesung wurde die Differentialgleichung für den reziproken Radius $u = r^{-1}$ hergeleitet,

$$u'^2(\varphi) = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{2m}{L^2} (E - V_L),$$

wobei

$$V_L \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

das effektive Potential ist. Für das erweiterte Potential $\tilde{V}(r)$ vom Übungsblatt ergibt sich somit

$$u'^2 = \frac{2m}{L^2}\left(E - \frac{L^2u^2}{2m} + \alpha u - \frac{\beta u^2}{2}\right) = \frac{2mE}{L^2} - u^2 + \frac{2m\alpha}{L^2}u - \frac{\beta m}{L^2}u^2 = \frac{2mE}{L^2} - u^2 + \frac{2}{p}u - \frac{\beta m}{L^2}u^2, \quad \text{(II)}$$

wobei im letzten Schritt der Bahnparameter $p \equiv L^2/(\alpha m)$ definiert wurde. Eine weitere Ableitung der Differentialgleichung ergibt

$$2u'u'' = -2uu' + \frac{2}{p}u' - \frac{2\beta m}{L^2}uu'.$$

Eine Lösung der Differentialgleichung, die sofort abgelesen werden kann, ist $u' = 0$. Wird diese Lösung ausgeklammert, bleibt die Differentialgleichung

$$u'' = -u + \frac{1}{p} - \frac{\beta m}{L^2}u \qquad \Rightarrow \qquad u'' + \left(1 + \frac{\beta m}{L^2}\right)u = \frac{1}{p} \qquad \Rightarrow \qquad u'' + \eta^2 u = \frac{1}{p}$$

mit $\eta \equiv \sqrt{1 + \beta m/L^2}$. Die homogene Gleichung ist gerade eine harmonische Oszillator-Gleichung mit der allgemeinen Lösung

$$u_\mathrm{h}(\varphi) = A\cos(\eta\varphi) + B\sin(\eta\varphi)$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten A und B. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$u_\mathrm{p}(\varphi) = \frac{1}{\eta^2 p}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung durch

$$u(\varphi) = u_\mathrm{h}(\varphi) + u_\mathrm{p}(\varphi) = A\cos(\eta\varphi) + B\sin(\eta\varphi) + \frac{1}{\eta^2 p}$$

gegeben. Die Konstanten sollen so gewählt werden, dass für $\varphi = 0$ das erste Perihel der Bahn erreicht wird. Da das Perihel einer der Umkehrpunkte der Bahn ist, muss hier $u' = 0$ gelten. Eingesetzt in (II) ergibt dies

$$0 = \frac{2mE}{L^2} - \left(1 + \frac{\beta m}{L^2}\right)u^2 + \frac{2}{p}u \qquad \Rightarrow \qquad u^2 - \frac{2}{\eta^2 p}u - \frac{2mE}{\eta^2 L^2} = 0.$$

Diese Gleichung wird durch

$$u_\pm = \frac{1}{\eta^2 p} \pm \sqrt{\frac{1}{(\eta^2 p)^2} + \frac{2mE}{\eta^2 L^2}} = \frac{1}{\eta^2 p}(1 \pm \tilde{\varepsilon}) \qquad \text{mit} \qquad \tilde{\varepsilon} = \sqrt{1 + \frac{2mE\eta^2 p^2}{L^2}}$$

gelöst. Das Perihel ist der Umkehrpunkt u_+, da im Perihel der Radius r ein Minimum erreicht und somit $u = r^{-1}$ ein Maximum. Mit den Forderungen $u(\varphi = 0) = u_+$ und $u'(\varphi = 0) = 0$ können nun die Konstanten der allgemeinen Lösung bestimmt werden,

$$u(\varphi = 0) = A + \frac{1}{\eta^2 p} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\eta^2 p}(1 + \tilde{\varepsilon}) \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\eta^2 p},$$

$$u'(\varphi = 0) = B\eta \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = 0,$$

und somit

$$u = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\eta^2 p}\cos(\eta\varphi) + \frac{1}{\eta^2 p}.$$

Das Inverse dieser Gleichung liefert schließlich die Bahngleichung

$$r = \frac{\eta^2 p}{1 + \tilde{\varepsilon}\cos(\eta\varphi)}.$$

b) Da $\tilde{\varepsilon}$ positiv ist, wird der Radius für

$$\cos(\eta\varphi) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_n = \frac{2\pi n}{\eta} \qquad \text{mit} \qquad n \in \mathbb{N}$$

minimal. Der erste Periheldurchgang findet bei $\varphi_0 = 0$ statt, sodass der nächste bei

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\eta}$$

stattfindet. Damit ein solches Potential für die positive Periheldrehung von Merkur verantwortlich sein kann, muss $\eta < 1$ und somit $\beta < 0$ sein, denn dann ist $\varphi_1 > 2\pi$.

3. *Präsenzaufgabe:* Bewegung im Zentralpotential

a) Da es sich bei der Bewegung um eine konservative Zentralkraft handeln soll, ist bekannt, dass sowohl der Drehimpuls und somit auch sein Betrag

$$L = mr^2\dot{\varphi} \tag{III}$$

als auch die Energie

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \tag{IV}$$

erhalten sind. Die Zeitableitung $\dot{r}$ kann für eine gegebene Bahn $r(\varphi)$ mit Hilfe von (III) leicht umgeschrieben werden,

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{L}{mr^2}.$$

Für den vorliegenden Fall gilt dabei

$$r(\varphi) = r_0\,\mathrm{e}^{-\varphi/\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} = -\frac{r_0}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\varphi/\alpha} = -\frac{r}{\alpha},$$

sodass zusammen mit (IV)

$$\dot{r} = -\frac{L}{\alpha m r} \qquad \Rightarrow \qquad V(r) = E - \frac{m}{2}\frac{L^2}{\alpha^2 m^2 r^2} - \frac{L^2}{2mr^2} = E - \frac{L^2}{2mr^2}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

gefolgert werden kann. Aus dem Potential $V(r)$ erhält man damit schließlich die Zentralkraft,

$$\vec{F}(x,y,z) = -\vec{\nabla}V(r) = -V'(r)\frac{\vec{x}}{r} = -\frac{f}{r^3}\frac{\vec{x}}{r} \qquad \text{mit} \qquad f = \frac{L^2}{m}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) > 0.$$

b) Aus (III) erhält man durch Separation der Variablen

$$\mathrm{d}t = \frac{m}{L}r^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{m}{L}r_0^2\,\mathrm{e}^{-2\varphi/\alpha}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Integration dieser Gleichung vom Anfangszeitpunkt $t = 0$ mit $\varphi(t = 0) = 0$ bis zur Zeit t ergibt dann

$$\int_0^t \mathrm{d}t' = \frac{m}{L}r_0^2\int_0^\varphi \mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{e}^{-2\varphi'/\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad t = -\frac{\alpha m}{2L}r_0^2\left(\mathrm{e}^{-2\varphi/\alpha} - 1\right).$$

Diese Gleichung kann nun nach $\varphi(t)$ aufgelöst werden, sodass man

$$1 - \frac{2L}{\alpha m r_0^2}\,t = \mathrm{e}^{-2\varphi/\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t) = -\frac{\alpha}{2}\ln\left(1 - \frac{2L}{\alpha m r_0^2}\,t\right)$$

erhält. Für $r(t)$ ergibt sich somit der Ausdruck

$$r(t) = r_0\,\mathrm{e}^{-\varphi/\alpha} = r_0\exp\left[\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2L}{\alpha m r_0^2}\,t\right)\right] = r_0\sqrt{1 - \frac{2L}{\alpha m r_0^2}\,t}. \tag{V}$$

c) Aus (V) folgt, dass die Zeit, nach der der Massenpunkt in das Kraftzentrum bei $r = 0$ gestürzt ist, durch

$$r(t_\mathrm{f}) = r_0 \sqrt{1 - \frac{2L}{\alpha m r_0^2}\, t_\mathrm{f}} \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_\mathrm{f} = \frac{\alpha m r_0^2}{2L}$$

gegeben ist.

4. Verständnisfragen

a) In vielen Fällen sind kartesische Koordinaten für die Beschreibung physikalischer Systeme ungeschickt, weil physikalische Größen auf Flächen konstant sind, die nicht mit den Koordinatenflächen zusammenfallen. Ein Beispiel sind kugelsymmetrische Systeme, deren physikalische Eigenschaften auf Flächen mit konstantem Radius, also Kugeln, konstant sind.

Zur Verallgemeinerung wählt man im dreidimensionalen Raum drei Scharen von zunächst beliebigen Koordinatenflächen, die der Symmetrie des Systems angepasst und dadurch definiert sind, dass auf ihnen jeweils ein Parameter konstant ist. Ein Punkt im Raum wird dann dadurch angegeben, dass man drei Koordinatenflächen so wählt, dass sie sich in diesem Punkt schneiden, und die zu ihnen gehörenden Parameter als Koordinaten verwendet. Die Einheits-Normalenvektoren der Koordinatenflächen werden als neue Basisvektoren verwendet.

b) Unter dem Einfluss einer Zentralkraft bleibt der Drehimpuls erhalten, denn das Drehmoment $\vec{M} = \mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t = \vec{x} \times \vec{F}$ verschwindet wegen der radialen Orientierung der Kraft $\vec{F} \parallel \vec{x}$.

c) Bei den Bahnkurven im Gravitationsfeld handelt es sich im Allgemeinen um Kegelschnitte, bei denen drei Fälle unterschieden werden können. Ist die Energie des Teilchens im Gravitationsfeld negativ, also die Exzentrizität kleiner eins, so bewegt sich das Teilchen auf einer Kreis- oder Ellipsenbahn mit ortsfestem Perizentrum. Ist die Energie des Teilchens gleich null, also die Exzentrizität gleich eins, so kann das Teilchen ins Unendliche entkommen, und es bewegt sich auf einer Parabelbahn. Ist die Enerige des Teilchens positiv, also die Exzentrizität größer eins, so bewegt es sich ebenfalls auf einer ungebundenen Bahn, nämlich auf einem Hyperbelast.