Aufgabe 1

(a) Für die potentielle Energie V erhalten wir

$$V = -sM\cos(\alpha) - m(L\cos(\alpha) + d\cos(\beta)) = -(sM + Lm)\cos(\alpha) - dm\cos(\beta)$$

Die kinetische Energie ist

$$\begin{aligned} T &= \frac{M}{2}s^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m}{2}\left(L^2\dot{\alpha}^2 + d^2\dot{\beta}^2 + 2Ld\dot{\alpha}\dot{\beta}(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta))\right) \\ &= \frac{M}{2}s^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m}{2}L^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m}{2}d^2\dot{\beta}^2 + mLd\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

Wir erhalten daher folgende Lagrange-Gleichung:

$$L = \frac{M}{2}s^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m}{2}L^2\dot{\alpha}^2 + \frac{m}{2}d^2\dot{\beta}^2 + mLd\dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta) + (sM+Lm)\cos(\alpha) + dm\cos(\beta)$$

(b) Für die Bewegungsgleichungen folgt also

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial\alpha} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Ms^2\dot{\alpha} + mL^2\dot{\alpha} + mLd\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta)\right) - mLd\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\alpha-\beta) + (sM+Lm)\sin(\alpha) \\ &= (Ms^2 + mL^2)\ddot{\alpha} + mLd\left(\ddot{\beta}\cos(\alpha-\beta) + (-\dot{\beta}\dot{\alpha} + \dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta})\sin(\alpha-\beta)\right) + (sM+Lm)\sin(\alpha) \\ &= (Ms^2 + mL^2)\ddot{\alpha} + mLd\left(\ddot{\beta}\cos(\alpha-\beta) + \dot{\beta}^2\sin(\alpha-\beta)\right) + (sM+Lm)\sin(\alpha) \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial\beta} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(md^2\dot{\beta} + mLd\dot{\alpha}\cos(\alpha-\beta)\right) - mLd\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\alpha-\beta) + dm\sin(\alpha) \\ &= md^2\ddot{\beta} + mLd\left(\ddot{\alpha}\cos(\alpha-\beta) - \dot{\alpha}(\dot{\alpha}-\dot{\beta})\sin(\alpha-\beta) - \dot{\alpha}\dot{\beta}\sin(\alpha-\beta)\right) + dm\sin(\alpha) \\ &= md^2\ddot{\beta} + mLd\left(\ddot{\alpha}\cos(\alpha-\beta) - \dot{\alpha}^2\sin(\alpha-\beta)\right) + dm\sin(\alpha) \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass es eine Lösung gibt, bei der der zeitliche Verlauf von α und β übereinstimmt. Was bedeutet die Lösung anschaulich? Benutzen Sie, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix der beiden Differentialgleichungen für den Winkel α für eine nicht-triviale Lösung verschwindet.

Aufgabe 2

(a) x sei die Länge, die über die Tischkante hängt.

(i) $V(x) = -mgx,\ T(x) = m\dot{x}^2 \implies L = m\dot{x}^2 + mgx$

(ii) $V(x) = -mgx - \int_0^x \frac{M}{L}gx'\,\mathrm{d}x' = -mgx - \frac{M}{2}gx^2,\ T = m\dot{x}^2 + \frac{M}{2}\dot{x}^2 \implies L = \left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{x}^2 + mgx + \frac{1}{2}\frac{M}{L}gx^2$

(b) (i) $0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 2m\ddot{x} - mg \overset{v_0=0}{\Longrightarrow} \dot{x} = \frac{g}{2}t \overset{x_0=l_0}{\Longrightarrow} x = \frac{g}{4}t^2 + l_0$

(ii) $0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = (2m+M)\ddot{x} - mg - \frac{M}{L}gx$ Eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist $x_{\text{inh}} = -\frac{m}{M}L$. Die allgemeine Lösung ist also

$$x(t) = A \cdot e^{\sqrt{\frac{Mg}{L(2m+M)}}\cdot t} + B \cdot e^{-\sqrt{\frac{Mg}{L(2m+M)}}\cdot t} - \frac{m}{M}L$$

Mit den Anfangsbedingungen $\dot{x}(0) = 0$ und $x(0) = l_0$ erhalten wir als Lösung der Bewegungsgleichung

$$\left(l_0 + \frac{m}{M}L\right)\cosh\left(\sqrt{\frac{Mg}{L(M+2m)}}\cdot t\right)$$

(c) (i) $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T + \mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\dot{x}^2 - \mathrm{d}mgx}{\mathrm{d}t} = 2m\dot{x}\ddot{x} - mg\dot{x} \overset{\ddot{x}=\frac{g}{2}}{=} mg\dot{x} - mg\dot{x} = 0$

(ii)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}T + \mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\ \left(\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{x}^2 - mgx - \frac{1}{2}\frac{M}{L}gx^2\right)}{\mathrm{d}t} \\
&= (2m+M)\dot{x}\ddot{x} - mg\dot{x} - \frac{M}{L}gx\dot{x} \\
&\overset{(2m+M)\ddot{x}=mg+\frac{M}{L}gx}{=} mg\dot{x} + \frac{M}{L}gx\dot{x} - mg\dot{x} - \frac{M}{L}gx\dot{x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) keine Lust zu teχen

(b) Erhaltungsgrößen sind $p_\varphi,\ p_\psi$ und die Energie.