**Einführung in die**
**Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik**
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

# 7. Übungsblatt

## Aufgabe 25 (Faltung und Ausdünnung einer Poisson-Verteilung, 4 = 2 + 2 Punkte).

(a) **Ausdünnung einer Poisson-Verteilung:**
Die Anzahl der Siebenmeter während eines Handballspiels sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Die Siebenmeter werden unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p > 0$ in ein Tor verwandelt. Berechnen Sie die Verteilung der geworfenen Tore durch Siebenmeter während des Spiels.
***Hinweis:*** *Gesucht ist also eine Zähldichte $\mathbb{p}(k)$, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass während des Spiels $k$ Tore durch Siebenmeter geworfen werden.*

(b) **Faltung zweier Poisson-Verteilungen:**
Wir nehmen an, dass die Lebensdauer (in Tagen) zweier Glühbirnen 1 und 2 Poisson-verteilt ist mit Parametern $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$. Wir schrauben nun die Glühbirne 1 in eine Lampe, und ersetzen sie durch Glühbirne 2, wenn sie durchgebrannt ist. Berechnen Sie die Verteilung der Zeit (in Tagen), bis Sie wieder im Dunkeln sitzen. Nehmen Sie dazu an, dass die beiden Glühbirnen unabhängig voneinander durchbrennen.

## Aufgabe 26 (Faltung von stetigen Verteilungen, 4 = 3 + 1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stochastisch unabhängige und stetig verteilte Zufallsvariablen mit Wahrscheinlichkeitsdichten $\mathbb{f}_X, \mathbb{f}_Y$.

(a) **Faltung von Normalverteilungen:**
Seien $X \sim \mathrm{N}_{(\mu_1,\sigma_1^2)}$ und $Y \sim \mathrm{N}_{(\mu_2,\sigma_2^2)}$ mit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 > 0$. Zeigen Sie, dass

$$X + Y \sim \mathrm{N}_{(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)}.$$

***Hinweis:*** *Begründen Sie, warum man o.B.d.A. $\mu_1 = \mu_2 = 0$ und $\sigma_1 = 1$ annehmen kann. Nutzen Sie quadratische Ergänzung im Exponenten.*

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit $X_1, ..., X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \mathrm{N}_{(\mu,\ \sigma^2)}$. Sei $\overline{X_n} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ der Mittelwert. Berechnen Sie die Verteilung von

$$Z_n := \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma}.$$

## Aufgabe 27 (Erwartungswert von Summe und Produkt von ZV, 4 = 1 + 3 Punkte).

(a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen aus $\overline{\mathcal{A}}^+$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X_n\right)$$

gilt (vgl. Lemma 20.18. aus der Vorlesung).

(b) Sei nun $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teil-$\sigma$-Algebren für eine nicht-leere Indexmenge $I$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, genau dann unabhängig sind, wenn für jede Familie $(X_i)_{i\in I}$ positiver numerischer Zufallsvariablen mit $X_i \in \overline{\mathcal{A}_i}^+$, $i \in I$, und jede endliche nicht-leere Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq I$

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j\in\mathcal{J}} X_j\right) = \prod_{j\in\mathcal{J}} \mathbb{E}\left(X_j\right)$$

gilt (vgl. Lemma 20.21 aus der Vorlesung).

**Aufgabe 28 (Multivariate Normalverteilung, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).**

Beweisen Sie Korollar 18.10. aus der Vorlesung:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X = (X_1, ..., X_n) \sim N_{(\mu,\Sigma)}$ gemeinsam normalverteilt mit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\Sigma = (\Sigma_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit. Zeigen Sie:

(a) Für $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt $Y = AX + b \sim N_{(A\mu+b, A\Sigma A^t)}$.

(b) Für $i \in \{1, ..., n\}$ gilt $X_i \sim N_{(\mu_i,\Sigma_{ii})}$.

(c) Gelte $\Sigma_{ij} = 0$ für zwei $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Dann sind die Koordinaten $X_i$ und $X_j$ unabhängig.

---

**Abgabe:**

In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **18. Januar 2021, 09:00 Uhr**.

**Homepage der Vorlesung:**

`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`