Funktionalanalysis - Übungsblatt 2

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 3. November 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Aufgabe 2.1 4 Punkte

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) A ist präkompakt $\Rightarrow$ A ist **beschränkt**, d.h.

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} < \infty.$$

(b) A ist präkompakt $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ ist präkompakt.

(c) A ist kompakt $\Rightarrow$ A ist beschränkt und abgeschlossen.

Sei nun (X, d) ein vollständiger metrischer Raum.

(d) Zeigen Sie die Äquivalenz

$$A \text{ ist präkompakt} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ist relativ kompakt, d.h. } \overline{A} \text{ ist kompakt.}$$

Aufgabe 2.2 4 Punkte

(a) Es sei (V, d) ein metrischer Raum, sowie $x \in V$ ein Punkt und $A \subseteq V$ eine Menge. Die **Distanz** von x zu A ist definiert durch

$$\operatorname{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Zeigen Sie die folgende Äquivalenz

$$\operatorname{dist}(x, A) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in \overline{A}.$$

(b) Sei nun $A \subsetneq X$ ein abgeschlossener, echter Untervektorraum eines normierten $\mathbb{K}$-Vektorraums $(X, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie, dass für jedes $\theta \in (0, 1)$ ein $x_\theta \in X$ existiert mit $\|x_\theta\| = 1$ und

$$\|x_\theta - a\| \geq 1 - \theta \qquad \forall\, a \in A.$$

Aufgabe 2.3 4 Punkte

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, (Y, d_Y) vollständig und $S \subset X$ eine dichte Teilmenge.

(a) Eine Funktion $\tau : X \to Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$d_Y(\tau(x), \tau(y)) < \varepsilon \qquad \forall\, x, y \in A \text{ mit } d_X(x, y) < \delta.$$

Zeigen Sie, dass sich eine gleichmäßig stetige Funktion $\tau : S \to Y$ eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Funktion $\tilde{\tau} : X \to Y$ fortsetzen lässt, d.h. dass $\tilde{\tau}_{|S} = \tau$ und $\tilde{\tau}$ ist gleichmäßig setig auf ganz X. **Bitte wenden!**

(b) Eine Funktion $\tau : X \to Y$ heißt (metrische) **Isometrie**, wenn für alle $x, y \in X$ gilt

$$d_Y(\tau(x), \tau(y)) = d_X(x, y).$$

Zeigen Sie, dass sich auch eine Isometrie $\tau : S \to Y$ eindeutig zu einer Isometrie $\tilde{\tau} : X \to Y$ fortsetzen lässt, d.h. dass $\tilde{\tau}_{|S} = \tau$ und

$$d_Y(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) = d_X(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X.$$

Hinweis: Verwenden Sie Teil a).

Aufgabe 2.4 4 Punkte

Sei X der Raum der reellen Folgen, d.h. $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{R}\}$ und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x, y) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

(a) Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, 1)$, $t \mapsto \frac{t}{1+t}$.

(b) Sei $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeigen Sie, dass $d(x^{(n)}, 0) \to 0$ äquivalent ist zu $x_j^{(n)} \to 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

(c) Beweisen Sie, dass es keine Norm $\|\cdot\|$ auf X gibt, so dass es $c, C > 0$ gibt mit

$$c\,\|x\| \le d(x, 0) \le C\,\|x\| \qquad \forall\, x \in X$$

Hinweis. Betrachte $e^{(n)} : \mathbb{N} \to X$ mit $e_j^{(n)} = \delta_{jn}$ (Kroneckersymbol).