Aufgabe 1

(a) $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{-\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2n}}} = 1$. Die Reihe konvergiert also für alle $|x| < 1$.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n!}}{ne^n}\right|} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}e} = \frac{1}{e}$. Folglich kovergiert die Reihe für alle $|x+1| < \rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$.

(c) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^{n+1}}{nx_0}\right|} = \limsup\limits_{n\to\infty} 2 \cdot \sqrt[n]{\frac{2}{nx_0}} = 2$. Folglich ist $\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{2}$. Die Reihe konvergiert also für alle $(x-x_0)^2 < \frac{1}{2}$ und somit für alle $|x - x_0| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 2

(a) Nach Vorlesung sind konstante Funktionen sowie die Identität auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Also ist auch die Funktion $\min\{1, x\}$ für alle $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ stetig. An der Stelle $x = 1$ gilt $\forall \varepsilon > 0$ mit $\delta = \varepsilon$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x-1| < \delta = \varepsilon : |f(x) - f(1)| = |\min\{1,x\} - 1| = \begin{cases} |1-1| = 0 < \varepsilon & |x \geq 1 \\ |x-1| < \delta = \varepsilon & |x < 1 \end{cases}$$

Also ist die Funktion $\forall x \in \mathbb{R}$ stetig.

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-5x+4} = \frac{(x-1)x}{(x-4)(x-1)} = \frac{x}{x-4} & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ 2x - 5 & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Behauptung: $2n - 5 \neq \frac{n}{n-4} \forall n \in \mathbb{N}2, 4, 5$.

Beweis. Annahme:

$$\begin{aligned} 2n - 5 &= \frac{n}{n-4} \\ (2n-5)(n-4) &= n \\ 2n^2 - 5n - 8n + 20 - n &= 0 \\ 2n^2 - 14n + 20 &= 0 \\ n^2 - 7n + 10 &= 0 \\ (n-5)(n-2) &= 0 \end{aligned}$$

Satz vom Nullprodukt

$$n = 5 \vee n = 2$$

Das steht allerdings im Widerspruch zu $n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 4, 5\}$. □

Behauptung: Die Funktion ist für alle $x \in \mathbb{N} \setminus \{2,5\}$ unstetig und ansonsten überall stetig.

Beweis. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist f für alle $x \in I_n := (n, n+1)$ durch $f(x) = \frac{x}{x-4}$ definiert. Außerdem gilt $x \neq 4$. Für alle $0 > x \in \mathbb{R}$ ist f ebenfalls durch $f(x) = \frac{x}{x-4}$ definiert und es gilt auch $x \neq 4$. Somit ist f $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ stetig. Es gilt $\frac{2}{2-4} = -1 = 2 \cdot 2 - 5$. Daher ist f im Intervall $(1,3)$ durch die rationale Funktion $\frac{x}{x-4}$ definiert. Da $x \neq 4$ ist f in diesem Intervall, also insbesonder an der Stelle $x = 2$ ebenfalls stetig. Außerdem gilt $\frac{5}{5-4} = 5 = 2 \cdot 5 - 5$ und daher muss nach analoger Argumentation f an der Stelle $x = 5$ stetig sein. An der Stelle $x = 4$ gibt es eine wesentliche Unstetigkeitsstelle. Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{2,4,5\}$ definiere die Folge $(a_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ durch $a_{n,k} = n - \frac{\sqrt{2}}{k}$. Dann gilt $\lim\limits_{k \to \infty} a_{n,k} = n$ und $\lim\limits_{k \to \infty} f(a_{n,k}) = \frac{n}{n-4}$. Allerdings ist $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2,4,5\} \frac{4}{n-4} \neq 2n - 5$. Folglich ist f $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2,4,5\}$ unstetig. □

(c) Sei $x \in \mathbb{Q}$ und damit $f(x) \neq 0$. Dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x - \frac{\sqrt{2}}{n} = x$, aber $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) \overset{\sqrt{2} \text{ irrational}}{=} 0 \neq f(x)$ und folglich ist a_n unstetig für alle $x \in \mathbb{Q}$. Sei andererseits $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Behauptung: Dann existiert $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $\forall |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Beweis. Es gibt offensichtlich in jeder δ-Umgebung von x_0 rationale Zahlen. Da die natürlichen Zahlen nach unten beschränkt sind, gibt es mindestens eine rationale Zahl $q = \frac{r}{s}$ mit dem kleinsten Nenner s. Gibt es mehrere solcher Zahlen, so wähle die mit geringstem Abstand zu x_0. Ist nun $\frac{1}{s} > \varepsilon$, so wähle $\delta = \frac{|x_0 - q|}{2}$. Nun gibt es erneut mindestens eine rationale Zahl $q' = \frac{r'}{s'}$ mit dem kleinsten Nenner s' aller rationalen Zahlen in $U_\delta(x_0)$, allerdings ist nun $s' > s$. Da es nach dem archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon$, findet man durch diesen Prozess nach endlich vielen Schritten ein δ, sodass der kleinste Nenner $s > n$ ist. Also ist für alle rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$ in $U_\delta(x_0) : f(x) = |f(x)| <^{x_0 \text{ irrational}} \overset{}{=} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. □

(d) Annahme: $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) \neq g(x_0)$. Per Definition ist jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen. Sei also $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{Q} \forall n \in \mathbb{N}$. Da f stetig ist, gilt $f(x_0) = \lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = g(x_0)$. Damit haben wir unsere Annahme ad absurdum geführt.

Aufgabe 3

Behauptung 1: $f(x) = \frac{x^{42}+42}{x-a} + \frac{x^6+42}{x-b}$ ist stetig im Intervall (a,b) und $g(x) := (x^{42}+42) \cdot (x-b) + (x^6+42) \cdot (x-a)$ ist stetig im kompakten Intervall $[a,b]$.

Beweis. Rationale Funktion $\frac{f(x)}{g(x)}$ sind nach Vorlesung $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für Polynome f, g wieder stetig. Im Intervall (a,b) ist $x - a \neq 0 \neq x - b$ und $x^{42} + 42$, $x - a$, $x^6 + 42$ und $x - b$ sind Polynome, sodass $\frac{x^{42}+42}{x-a}$ und $\frac{x^6+42}{x-b}$ sowie deren Summe wieder stetig sind. Analoge Argumentation liefert, dass g im Intervall $[a,b]$ stetig sein muss. □

Es gilt $g(a) = \underbrace{(a^{42}+42)}_{>0} \cdot \underbrace{(a-b)}_{<0} + \underbrace{(a^6+42) \cdot 0}_{=0} < 0$ und $g(b) = (b^{42}+42) \cdot 0 + \underbrace{(b^6+42)}_{>0} \cdot \underbrace{(b-a)}_{>0} > 0$.
Die Funktion $g(x)$ hat also im Intervall $[a,b]$ nach Mittelwertsatz eine Nullstelle an der Stelle x_0. Da $g(a) < 0$ und $g(b) > 0$, liegt x_0 im Intervall (a,b). Da $a \neq x_0 \neq b$, gilt $(x_0 - a) \neq 0 \neq (x_0 - b)$. Folglich ist auch $f(x_0) = \frac{x_0^{42}+42}{x_0-a} + \frac{x_0^6+42}{x_0-b} = 0$. Daher ist x_0 eine L

Aufgabe 4

1. Z.Z.: Es gibt keine hebbaren Unstetigkeiten.

   Beweis. Annahme: $\lim\limits_{x \searrow x_0} = y_0 = \lim\limits_{x \nearrow x_0}$, aber $f(x_0) \neq y_0$. Ist $f(x_0) > y_0$, so existiert nach Definition des Limes ein $x > x_0$ mit $f(x) < f(x_0)$. Dies widerspricht dem monotonen Wachstum von f. Also muss $f(x_0) < y_0$ sein. Dann existiert aber analog ein $x < x_0$ mit $f(x) > f(x_0)$, was ebenfalls dem monotonen Wachstum von f widerspricht. Daher ist unsere Annahme falsch und es gibt keine hebbaren Unstetigkeiten. □

2. Z.Z.: Es gibt keine wesentlichen Unstetigkeiten.

   Beweis. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ mit $x_n < x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nicht existent. Da die Funktion monoton wachsend ist, muss $f(x_n)$ ebenfalls monoton wachsen. Wäre die Folge auch beschränkt, so würde sie konvergieren. Also muss sie unbeschränkt sein. Sei $x_1 > x_0$. Aufgrund der Unbeschränktheit von $f(x_n)$ existiert ein x_n mit $f(x_n) > f(x_1)$, was aber dem monotonen Wachstum von f widerspricht. Sei andererseits $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ mit $x_n > x_0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nicht existent. Da die Funktion monoton wachsend ist, muss $f(x_n)$ monoton fallen. Wäre die Folge auch beschränkt, so würde sie konvergieren. Also muss sie unbeschränkt sein. Sei $x_1 < x_0$. Aufgrund der Unbeschränktheit von $f(x_n)$ existiert ein x_n mit $f(x_n) < f(x_1)$, was aber dem monotonen Wachstum von f widerspricht. □

3. Z.Z.: Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $a \in]0,1[$ mit

$$|f(a^+) - f(a^-)| := \left| \lim_{x \searrow a} f(x) - \lim_{x \nearrow a} f(x) \right| > \frac{1}{n}$$

   Beweis. Annahme: Es gibt unendlich viele Sprungunstetigkeiten im Intervall $]0,1[$ für ein beliebiges $n_0 \in \mathbb{N}$. Sei $]0,b[$ das Intervall mit dem kleinsten b, in dem noch alle Unstetigkeiten liegen. Die k-te Sprungunstetigkeit sei an der Stelle a_k. Es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = b$. Da f streng monoton wächst, gilt aber $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) \geq \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{l=0}^{k} |f(a_l^+) - f(a_l^-)| > \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n}$. Diese Reihe divergiert aber, also erhalten wir eine wesentliche Unstetigkeit an der Stelle b $\lightning$. □

   Wir erhalten also abzählbar viele Mengen mit jeweils endlich vielen Unstetigkeitsstellen. Die Vereinigung dieser Mengen ist also wieder abzählbar.