1 Ziel und Vorgehensweise

Satz 1 (Uniformisierungssatz)**.** *Jede einfach zusammenhängende Riemann'sche Fläche ist biholomorph äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ oder zur Zahlebene $\mathbb{C}$ oder zur Zahlkugel $\overline{\mathbb{C}}$.*

Beweisstrategie:

- Fallunterscheidung je nach Eigenschaften des Randes (positiv berandet / nullberandet).
- **Konstruiere jeweils eine injektive holomorphe Funktion $f\colon X \to \overline{\mathbb{C}}$.**
- Erhalte eine biholomorphe Abbildung $X \cong f(X) \subseteq \mathbb{C}$.
- Ist $X \subsetneq \mathbb{C}$, so folgt mit dem Riemann'schen Abbildungssatz $X \cong \mathbb{C}$ oder $X \cong \mathbb{E}$.

2 Grundlagen

Def. 1 (positiv berandet/nullberandet)**.** Eine Riemann'sche Fläche X heißt nullberandet, wenn . Sonst heißt X positiv berandet.

Def. 2 (Greensche Funktion)**.** ...

Lemma 2. *Auf positiv berandeten Flächen existiert die Greensche Funktion zu jedem Punkt.*

Lemma 3. *Auf nullberandeten Flächen gilt der Satz von Liouville.*

Lemma 4. *Auf einer beliebigen Riemann'schen Fläche existiert eine harmonische Funktion $u := u_{a,b}\colon X \setminus \{a, b\} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- *u ist logarithmisch singulär bei a.*
- *$-u$ ist logarithmisch singulär bei b.*
- *u ist beschränkt im Unendlichen, d.h. in $X \setminus [U(a) \cup U(b)]$, wobei $U(a)$ und $U(b)$ zwei beliebige Umgebungen von a, b seien.*

3 Beweis für Fall 1 (positiv berandet)

Behauptung Einfach zusammenhängend impliziert elementar.

Beweis. Sei $X = \bigcup U_i$ eine offene Überdeckung von X und sei $f_i\colon U_i \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Schar invertierbarer meromorpher Funktionen mit der Eigenschaft $|f_i/f_j| = 1$ auf $U_i \cap U_j$. Man kann nun für ein $a \in U_i \cap U_j$ analytische Fortsetzungen für f_i entlang von Wegen konstruieren, indem man auf U_j die Funktion f_j benutzt und diese mit dem konstanten (Maximumprinzip) Faktor $c_{ij} = |f_i/f_j|$ multipliziert. Auf $U_j \cap U_k$ benutzt man dann f_k und multipliziert mit dem Faktor $c_{ij} \cdot |f_j/f_k|$. (Bild wäre vllt. echt hilfreich) Da X einfach zusammenhängend ist, erhält man nach dem Monodromiesatz eine meromorphe Fortsetzungen von f_i auf ganz X. Nach Konstruktion ist auf U_k dann f/f_k konstant und vom Betrag 1. □

- Es existiert eine holomorphe Funktion $F_a\colon X \to \mathbb{C}$ mit $|F_a(x)| = e^{-G_a(x)}$ für $x \neq a$, $G_a\colon X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ Greensche Funktion.

- Greensche Funktion existiert stets.
- Es genügt, zu jedem Punkt b mit Umgebung $U(b)$ eine holomorphe Funktion F mit $|F(x)| = e^{-G_a(x)} \forall x \in U(b), x \neq a$ anzugeben. Dann ist nämlich $|F/\tilde{F}| = 1$ auf $U(b) \cap U(\tilde{b})$ und mit obiger Aussage erhalten wir eine Funktion $F\colon X \to \mathbb{C}$ mit dem geforderten Betrag.
- Fall 1: $b \neq a$. Für geschickte Wahl von $U(b)$ ist G_a Realteil einer analytischen Funktion f (das ist auf Elementargebieten stets der Fall) und wir wählen $F_a := e^{-f}$.
- Fall 2: $b = a$. OE $X = \mathbb{E}$ (kleine Umgebung um a, die sich konform auf eine Kreisscheibe abbildet). Dann gilt $G_a(z) = -\log|z|$ und $F_a(z) = z$ ist die gesuchte Funktion.
- Insbesondere ist $\lim\limits_{x \to a} |F_a(x)| = \lim\limits_{x \to a} e^{-G_a(x)} = 0$, also $F_a(a) = 0$ und wegen $G_a(x) > 0$ gilt außerdem $|F_a(x)| < 1$.

• F_a ist injektiv.
  - Betrachte
$$F_{a,b}(x) := \frac{F_a(x) - F_a(b)}{1 - \overline{F_a(b)} F_a(x)}.$$
  Diese Funktion erfüllt folgende Eigenschaften.
    * $|F_{a,b}| < 1$. (Rechnung)
    * $F_{a,b}$ ist als Quotient analytischer Funktionen meromorph. Aufgrund der Beschränktheit muss $F_{a,b}$ aber sogar analytisch in X sein.
    * $F_{a,b}(b) = 0$, Ordnung k. (klar wegen $|F_a(b)|^2 < 1$)
    * $F_{a,b}(a) = -F_a(b)$. Klar wegen $F_a(a) = 0$.
  - $|F_{a,b}(x)| = |F_b(x)| \forall x \in X$.
    * $u(x) := -\frac{1}{k} \log|F_{a,b}(x)|$ ist außerhalb einer diskreten Teilmenge ≥ 0 und harmonisch mit einer logarithmischen Singularität bei $x = b$.
    * Greensche Funktion: $G_b(x) \leq u(x)$.
    * $e^{G_b(x)} \leq e^{u(x)}$. Umformen ergibt
$$\frac{|F_{a,b}(x)|}{|F_b(x)|} \leq 1.$$
    * Für $x = a$ folgt $|F_a(b)| \leq |F_b(a)|$. Symmetrie $\implies$ $\frac{|F_{a,b}(x)|}{|F_b(x)|}$ nimmt an einer Stelle ein Maximum an, nach dem Maximumprinzip erhalten wir die Behauptung.
  - Es folgt $F_{a,b} \neq 0$ für $x \neq b$, also $F_a(x) \neq F_a(b)$ für $x \neq b$. b war beliebig $\implies$ F_a injektiv.

• Wir erhalten eine bijektive holomorphe (und damit direkt biholomorphe nach Funktheo 1) Abbildung von X auf $F_a(X)$.

• $F_a(X)$ ist beschränkt ($|F_a(x)| < 1$) und einfach zusammenhängend.

• Mit dem Riemann'schen Abbildungssatz ist damit $X \cong \mathbb{E}$.

4 Zusammenfassung

- Ziel
- Wie viel davon haben wir schon bewiesen?

5 Wiederholung

- Was wir bisher bewiesen haben (copy paste von Zusammenfassung)
- Def 1
- Lemma 3
- Lemma 4

6 Beweis für Fall 2 (nullberandet)

- $\forall a \neq b \in X \exists f_{a,b} \colon X \setminus \{a,b\} \to \mathbb{C}$ mit 1. $f_{a,b}$ hat in a NST erster Ordnung und in b Pol erster Ordnung und 2. Zu Umgebungen $U(a), U(b)$ $\exists C$ mit $C^{-1} \leq |f_{a,b}(x)| \leq C$ für $x \notin U(a) \cup U(b)$, d.h. $f_{a,b}$ hat außer a und b weder Pole noch Nullstellen.
  - Benutze II.12.2: Es existiert eine harmonische Funktion $u := u_{a,b} \colon X \setminus \{a,b\} \to \mathbb{C}$. mit folgenden Eigenschaften:
    - u ist logarithmisch singulär bei a.
    - $-u$ ist logarithmisch singulär bei b.
    - u ist beschränkt im Unendlichen, d.h. in $X \setminus [U(a) \cup U(b)]$, wobei $U(a)$ und $U(b)$ zwei beliebige Umgebungen von a, b seien.
  - Konstruiere mithilfe der ersten Aussage eine analytische Funktion $f_{a,b} \colon X \setminus \{a,b\} \to \mathbb{C}$ mit $|f_{a,b}| = e^{u_{a,b}}$.
- $f_{a,b}$ ist injektiv.
  - Als Quotient analytischer Funktionen ist

$$g(z) := \frac{f(z) - f(c)}{f_{c,b}(z)}.$$

    meromorph und beschränkt außerhalb einer gewissen Umgebung um a, b, c.
  - Wegen $\lim_{z \to c} g(z) = \lim_{z \to c} \frac{f(z)-f(c)}{f_{c,b}(z)} = \text{const}$ ist g analytisch und beschränkt auf ganz X und damit nach dem Satz von Liouville für nullberandete RF konstant.
  - $f(z) - f(c) = \lambda f_{c,b}(z)$. Insbesondere hat $f(z) - f(c)$ genau eine Nullstelle bei $z = c$, d.h. f ist injektiv.
- Wir erhalten eine bijektive holomorphe (und damit direkt biholomorphe nach Funktheo 1) Abbildung von X auf $f_{a,b}(X) \subset \overline{\mathbb{C}}$.

- Ist $f_{a,b}(X)$ kompakt, so muss $f(X) = \overline{\mathbb{C}}$ gelten (Wäre dem nicht so, so müsste nach dem nächsten Punkt $f(x) \cong \mathbb{C}$ oder $\mathbb{E}$ gelten. Diese sind aber beide nicht kompakt).
- Sonst ist OE $f_{a,b}(X) \subset \mathbb{C}$ und damit nach dem Riemann'schen Abbildungssatz konform äquivalent zu $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{E}$, wobei letzeres Hyperbolizität impliziert (weil die Greensche Funktion für den Nullpunkt existiert und die Gruppe der konformen Selbstabbildungen transitiv operiert oder so ähnlich), sodass nur noch $\mathbb{C}$ möglich ist.

7 Diskussion Ergebnis und Idee der weiteren Klassifikation

- Sehr schönes Resultat :D etc.
- Einfach zusammenhängende Flächen kennen wir jetzt, allgemeine Flächen sind aber einfach zusammenhängende Flächen modulo einer frei operierenden Gruppe von konformen Selbstabbildungen (Überlagerungstheorie)

8 weitere Klassifikation

- Zahlkugel als universelle Überlagerung: Möbiustransformationen haben immer einen Fixpunkt, also besteht die einzige frei operierende Gruppe nur aus der Identität.
- Ebene als universelle Überlagerung: Selbstabbildungen $z \mapsto az + b$. Diese besitzen für $a \neq 1$ einen Fixpunkt, also $a = 1$. Es gibt drei Möglichkeiten für eine frei operierende Gruppe.
  - $\{0\}$, $X \cong \mathbb{C}$.
  - zyklische Untergruppen $L = \{z \mapsto z + \tilde{b}, \tilde{b} \in \mathbb{Z}b\}$. Dann ist $\mathbb{C}/L \xrightarrow{z \mapsto e^{2\pi i z/b}} \mathbb{C}^*$ eine konforme Äquivalenz
  - L ist ein Gitter, d.h. $\mathbb{C}/L$ ist ein Torus. Wann sind zwei Tori äquivalent?
- Einheitskreis/obere Halbebene: Untergruppen $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, die -1 enthalten. Welche operieren frei? Wann gilt $\mathbb{H}/\Gamma \cong \mathbb{H}/\Gamma'$? (zum Teil einfach VL von letztem Semester)