Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020 **Musterlösung**

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 3

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 27. November

Die besten vier von fünf Aufgaben werden gewertet. Sie können bei jeder Aufgabe die Ergebnisse der vorherigen nutzen, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben.
Fixiere ein Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ und die Eisensteinreihen $G_k = \sum_{0 \neq \gamma \in \Gamma} \gamma^{-k}$ für ganze Zahlen $k \geq 3$.

9. Aufgabe: (2+1+1 = 4 Punkte) Sei $a(z,\gamma) = \left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{2\gamma^2}\right)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $0 \neq \gamma \in \Gamma$. Zeigen Sie:

(a) Für ein festes Kompaktum K in $\mathbb{C}$ gibt es eine Konstante C sodass für alle $z \in K$ gilt: $|a(z,\gamma) - 1| \leq C|\gamma|^{-3}$.

(b) Das folgende Produkt konvergiert kompakt absolut in $z \in \mathbb{C}$ und definiert eine holomorphe ganze Funktion mit einfachen Nullstellen in Γ und ungleich Null sonst:

$$\sigma(z) = z \prod_{0 \neq \gamma \in \Gamma} a(z,\gamma) \; .$$

Hinweis: Verwende (a) und Aufgabe 6.

(c) Es gilt $(\sigma'/\sigma)' = -\wp$. Hinweis: Leibnizregel für kompakt konvergente Produkte.

Lösung:

(a) Man bilde die Taylorreihe in z/γ. Die konstanten, linearen und quadratischen Terme kürzen sich. Es gibt eine Konstante c_0 mit $|z/\gamma| \leq c_0$ wegen des Kompaktums und weil das Gitter diskret ist. Dann gibt es eine Konstante c_1 mit

$$|a(z,\gamma) - 1| < c_1 \cdot |z/\gamma|^3$$

wegen der Standardabschätzung für Taylorreihen auf der Kreisscheibe mit Radius c_0. Dann benutzt man $|z| < c_2$ mit einer weiteren Konstanten c_2 (Kompaktum). Setze $C = c_2 c_1$.

(b) Man benutzt das Konvergenzkriterium für Produkte, zeigt also, dass $\sum_{0 \neq \gamma} |a(z,\gamma)|$ kompakt konvergiert. Dies folgt aus a) und dem Majorantenkriterium, weil $\sum_0 \neq \gamma |\gamma|^{-3}$ nach Aufgabe 6 konvergiert. Die Nullstellen sind die Nullstellen der Faktoren. Diese kann man ablesen.

(c) Die Leibnizregel liefert $\sigma'/\sigma = \frac{-1/z^2}{1/z} + \sum_{0 \neq \gamma} \frac{a'(z,\gamma)}{a(z,\gamma)}$. Eine explizite Rechnung zeigt

$$\frac{a'(z,\gamma)}{a(z,\gamma)} = \frac{-1/\gamma}{1 - z/\gamma} + (\gamma^{-1} + \gamma^{-2}) = -\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2} \; .$$

Jetzt leitet man noch einmal ab, dann folgt die Aussage aus Aufgabe 7.

10. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) $2\wp''(z) = 12\wp(z)^2 - 60G_4$.

(b) Folgern Sie für alle ganzen $m \geq 4$:

$$(2m+1)(m-3)(2m-1)G_{2m} = 3\sum_{j=2}^{m-2}(2j-1)(2m-2j-1)G_{2j}G_{2m-2j} \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie Cauchy-Faltung und die Laurententwicklung der $\wp$-Funktion.

Lösung:

(a) Man nehme die bekannte Differentialgleichung der $\wp$-Funktion und leite beide Seiten ab.

(b) Die Laurententwicklung von $\wp$ haben wir in Aufgabe 8 berechnet. Daraus ergibt sich durch zweifaches Ableiten die Laurententwicklung von $\wp''$. Durch Cauchy-Faltung erhalten wir die Laurententwicklung von $\wp^2$. (a) liefert dann eine Gleichheit von Laurentreihen. Insbesondere stimmen alle Koeffizienten überein, das liefert die Aussage.

11. Aufgabe: (2+2=4 Punkte)

(a) Das elliptische Differential $\wp(z)\,\mathrm{d}z$ ist von zweiter, aber nicht von dritter Gattung.

(b) Das elliptische Differential $\frac{\mathrm{d}z}{\wp'(z)}$ ist von dritter, aber nicht von zweiter Gattung.

Lösung:

(a) Die Pole von $\wp$ sind bekanntlich von zweiter Ordnung und liegen in Γ. Es genügt, den Pol in Null zu untersuchen. Da $\wp$ eine gerade Funktion ist, verschwinden die Residuen.

(b) Die Pole des Differentials sind die Nullstellen von $\wp'$. Laut Satz aus der Vorlesung hat $\wp$ nur drei einfache Nullstellen. Diese liefern drei einfache Pole des Differentials. Die Residuen müssen alle nichttrivial sein.

12. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie folgende explizite Werte für die j-Funktion:

(a) Im Gitter $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$ gilt $j(\Gamma) = 1$.

(b) Im Gitter $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}e^{-\pi i/3}$ gilt $j(\Gamma) = 0$.

Hinweis: Rotationssymmetrie des Gitters.

Lösung:

(a) Es gilt $i\Gamma = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}i^2 = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = \Gamma$. Damit folgt $G_6(\Gamma) = G_6(i\Gamma) = i^{-6}G_6(\Gamma) = -G_6(\Gamma)$, also ist $G_6(\Gamma) = 0$. Nach Definition folgt $j(\Gamma) = 1$.

(b) Sei $\rho = \exp(i\pi/3)$. Dann gilt $\rho^2 = \rho - 1$ (gleichseitiges Dreieck). Daraus folgt $\rho\Gamma = \rho(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\rho^{-1}) = \mathbb{Z}\rho^{-1}(\rho - 1) \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}(1-\rho^{-1}) \oplus \mathbb{Z} = \Gamma$. Letzteres benutzt Aufgabe 1c) und die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann folgt $G_4(\Gamma) = G_4(\rho\Gamma) = \rho^{-4}G_4(\Gamma)$, also $G_4(\Gamma) = 0$, also insbesondere $j(\Gamma) = 0$.

13. Aufgabe: (4 Punkte) Sei η ein elliptisches Differential dritter Gattung mit ganzzahligen Residuen zum Gitter Γ. Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ und eine holomorphe elliptische Funktion f zum Gitter Γ sodass $\eta = c\,\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}f}{f}$.

Lösung: Das Differential η hat nur einfache Pole. Die Residuen von η liegen diskret, bilden also eine Funktion $r : \mathbb{C} \to \mathbb{Z}\ ,\ z \mapsto \mathrm{Res}_z(f)$. Die Summe $\sum_{\gamma \pmod{\Gamma}} r(\gamma) = 0$ ist Null, da man η über den Rand des Fundamentalbereichs integrieren kann. (Wenn Pole auf dem Rand liegen, verschiebt man um ein ϵ.) Nach dem abelschen Theorem existiert eine elliptische Funktion f mit vorgegebenen Null- und Polstellen der Ordnung r. Damit hat $\frac{f'(z)\mathrm{d}z}{f(z)}$ ebenfalls einfache Pole an denselben Stellen wie η mit denselben Residuen. Damit ist das Differential $\eta - \frac{\mathrm{d}f}{f}$ holomorph, also gleich $c\mathrm{d}z$ für ein konstantes c.