Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 8

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: Do 25.06.2020 um 9:15 Uhr

---

28. Aufgabe: *(6 Punkte, Isomorphismen von Moduln)* Seien R ein Ring, M und N zwei R-Moduln und $f\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist ein R-Modulisomorphismus.

(ii) Für alle R-Moduln L ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(L, M) &\to \mathrm{Hom}_R(L, N)\\ g &\mapsto f \circ g\end{aligned}$$

bijektiv.

Hinweis: Für die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) setze man in (ii) $L = N$ und $L = M$ ein.

29. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Elementare Tensorprodukte)* Man zeige:

(a) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0$.

(b) $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) $2 \otimes 1 = 0$ in $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, aber $2 \otimes 1 \neq 0$ in $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

30. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Ideale und Tensorprodukte)* Seien R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal und M ein R-Modul.

(a) Man zeige, dass es einen eindeutigen surjektiven R-Modulhomomorphismus

$$f\colon I \otimes_R M \to IM$$

mit $f(a \otimes m) = am$ für $a \in I$, $m \in M$ gibt.

(b) Man zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass die Abbildung f aus Teil (a) im Allgemeinen kein R-Modulisomorphismus ist.
Hinweis: Man verwende Aufgabe 29 (b).

31. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Eigenwerte und Tensorpodukte)* Seien K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Seien $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ und sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f und $\mu \in K$ ein Eigenwert von g.

(a) Seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Man zeige, dass $v \otimes w \neq 0$ in $V \otimes_K V$.
Hinweis: Man zeige zunächst, dass es eine bilineare Abbildung $\beta\colon V \times V \to K$ gibt, sodass $\beta(v, w) \neq 0$.

(b) Man zeige, dass $\lambda\mu$ ein Eigenwert von $f \otimes g \in \mathrm{End}_K(V \otimes_K V)$ ist.

(c) Man zeige, dass $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von $f \otimes \mathrm{id}_V + \mathrm{id}_V \otimes g \in \mathrm{End}_K(V \otimes_K V)$ ist.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.