Aufgabe 36

Es gilt

$$\begin{aligned}
\bigwedge\nolimits^2 f_A(e_1 \wedge e_2) &= f_A(e_1) \wedge f_A(e_2) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = e_2 \wedge 2e_1 + e_2 \wedge e_2 + e_2 \wedge 3e_3 = -2(e_1 \wedge e_2) + 3(e_2 \wedge e_3)\\
\bigwedge\nolimits^2 f_A(e_1 \wedge e_3) &= f_A(e_1) \wedge f_A(e_3) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = e_2 \wedge e_2 + e_2 \wedge 2e_3 = 2(e_2 \wedge e_3)\\
\bigwedge\nolimits^2 f_A(e_2 \wedge e_3) &= f_A(e_2) \wedge f_A(e_3) = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\\
&= 2e_1 \wedge e_2 + 2e_1 \wedge 2e_3 + e_2 \wedge e_2 + e_2 \wedge 2e_3 + 3e_3 \wedge e_2 + 3e_3 \wedge 2e_3\\
&= 2e_1 \wedge e_2 + 4e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_3
\end{aligned}$$

Für die gesuchte Darstellungsmatrix erhalten wir also

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 37

(a) Sei $n \in N$, $m \in M$ und $(m_1, \dots, m_n$ eine Basis von M. Ist $\varphi(n) \otimes m = 0$, so ist $\mathrm{id}_N \otimes \Phi^{-1}(\varphi(n) \otimes m) = \mathrm{id}_L \otimes \Phi^{-1}(\varphi(n) \otimes \sum_{i=1}^n m_i) = \varphi(n) \otimes (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ebenfalls 0 und mit dem Isomorphismus aus 8.14 auch $0 = (\alpha_1\varphi(n), \dots, \alpha_n\varphi(n)) = (\varphi(\alpha_1 n), \dots, \varphi(\alpha_n n))$. Aufgrund der Injektivität von φ muss also bereits $(\alpha_1 n, \dots, \alpha_n n) = 0$ sein. Wir können nun erneut 8.14 benutzen, um zu folgern, dass $n \otimes (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ ist. Unter der Abbildung $\mathrm{id}_N \otimes \Phi$ erhalten wir $n \otimes m = 0$. Daraus folgt, dass $\ker \varphi \otimes \mathrm{id}_M = \{0\}$ sein muss, da sich die Argumentation auf Summen von reinen Tensoren überträgt.

(b) Da M flach ist, folgt aus der Injektivität von φ sofort die Injektivität von $(\varphi \otimes \mathrm{id}_M)\colon M \otimes M \to N \otimes M$ nach Definition von flachen Moduln. Da N ebenfalls flach ist, folgt analog die Injektivität von $(\mathrm{id}_N \otimes \varphi)\colon N \otimes M \to N \otimes N$. Die Komposition zweier injektiver Abbildungen ist wieder injektiv, sodass $\varphi \otimes \varphi = (\mathrm{id}_N \otimes \varphi) \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}_M)$ injektiv ist.

(c) Wähle $R = \mathbb{Z}$ und $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dann ist nach Beispiel 8.12 M nicht flach.

Aufgabe 38

(a) Seien $f\colon \bigwedge^2 M \to M \otimes M$ und $g\colon \bigwedge^2 N \to N \otimes N$ die entsprechenden eindeutigen R-Modulhomomorphismen aus Aufgabe 35. Da M und N beide freie Moduln sind, sind f und g nach Aufgabe 35b beide injektiv, genau wie $(\varphi \otimes \varphi)\colon M \otimes M \to N \otimes N$ nach Aufgabe 37b.
Behauptung: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M \otimes M \arrow[r, hook, "\varphi\otimes\varphi"] & N \otimes N \\
\bigwedge^2 M \arrow[u, hook, "f"] \arrow[r, "\bigwedge^2 \varphi"] & \bigwedge^2 N \arrow[u, hook, "g"]
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Wir definieren die offensichtlich bilineare Abbildung

$$\beta\colon M \times M \to N \otimes N,\ (a, b) \mapsto \varphi(a) \otimes \varphi(b) - \varphi(b) \otimes \varphi(a).$$

Wegen der universellen Eigenschaft UA gibt es daher einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus

$$F\colon \bigwedge^2 M \to N \otimes N,\ a \wedge b \mapsto \varphi(a) \otimes \varphi(b) - \varphi(b) \otimes \varphi(a).$$

Man sieht leicht, dass $((\varphi\otimes\varphi)\circ f)(a,b) = F(a,b)$ und $(g\circ(\bigwedge^2\varphi))(a,b) = F(a,b)$. Da F aber eindeutig bestimmt ist, sind beide Abbildungen gleich. $\square$

Daher ist auch der Kern beider Abbildungen gleich.

$$\ker((\varphi \otimes \varphi) \circ f) = 0 = \ker(f \circ (\bigwedge^2 \varphi)).$$

Ist die Komposition zweier Abbildungen injektiv, so auch die zwei Komponenten. Also muss $\bigwedge^2\varphi$ injektiv sein.

(b)

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Es gilt $\ker \psi = \{(a,b) \in R^2 \mid \psi(a,b) = 0\} = \{(a,b) \in R^2 \mid am_1 + bm_2 = 0\} \overset{(m_1,m_2)\text{ l.u.}}{=} \{0\}$. Daher ist ψ injektiv. Nach Satz 9.9 lässt sich jedes $x \in \bigwedge^2 R^2$ auf eindeutige Weise durch $r \cdot (e_1 \wedge e_2)$ mit $r \in R$ schreiben. Also ist

$$(\bigwedge^2\psi)(x) = (\bigwedge^2\psi)(r\cdot(e_1\wedge e_2)) = r\cdot(\psi(e_1)\wedge\psi(e_2)) = r\cdot(m_1\wedge m_2).$$

Ist nun $r \cdot (m_1 \wedge m_2) = 0$, dann ist $r \cdot (e_1 \wedge e_2) \in \ker\psi$. Da ψ injektiv ist, muss also schon $r = 0$ sein.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Wir zeigen die Aussage per Kontraposition. Seien $0 \neq a, b \in R$ mit $am_1 + bm_2 = 0$ gegeben. Dann gilt für $r = b$.

$$b(m_1 \wedge m_2) = (m_1 \wedge bm_2) = (m_1 \wedge -am_1) = -a(m_1 \wedge m_1) = 0.$$

(c) Sei (m_1, m_2) eine Basis von M. Da $m_1 \wedge m_2$ ein Erzeugendensystem ist, können wir jedes Element aus $\bigwedge^2 M$ schreiben als $r(m_1 \wedge m_2)$ für geeignetes $r \in R$. Es gilt

$$r\cdot(m_1\wedge m_2) \in \ker(\bigwedge^2\varphi) \iff 0 = (\bigwedge^2\varphi)(r\cdot(m_1\wedge m_2)) = r\cdot(\bigwedge^2\varphi)(m_1\wedge m_2) = r\cdot\det\varphi\cdot(m_1\wedge m_2) \iff r\cdot\det\varphi = 0.$$

Offensichtlich ist also die Injektivität von $(\bigwedge^2\varphi)$ äquivalent dazu, dass $\det\varphi$ kein Nullteiler ist.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Nach Teilaufgabe a ist $\bigwedge^2\varphi\colon \bigwedge^2 M \to \bigwedge^2 M$ injektiv, da M endlich erzeugt und frei ist und φ injektiv ist.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Angenommen, $\bigwedge^2\varphi\colon \bigwedge^2 M \to \bigwedge^2 M$ wäre injektiv, aber φ wäre nicht injektiv. Dann gäbe es $0 \neq a, b \in R$ bzw. ein $0 \neq am_1 + bm_2 \in R$, sodass $\varphi(m) = 0$. Ist nun $a \neq b$, so erhalten wir daraus $(am_1 + bm_2) \wedge (m_1 + m_2) = (a-b)(m_1 \wedge m_2) \neq 0$, aber $(\bigwedge^2\varphi)((am_1 + bm_2) \wedge (m_1 + m_2)) = \varphi(am_1 + bm_2) \wedge \varphi(bm_1 + am_2) = 0 \wedge \varphi(bm_1 + am_2) = 0$. Ist stattdessen $a = b$, so ist $(am_1 + bm_1) \wedge (m_1 - m_2) = 2a(m_1 \wedge m_2)$, aber $(\bigwedge^2\varphi)((am_1 + bm_2) \wedge (m_1 - m_2)) = \varphi(am_1 + bm_2) \wedge \varphi(m_1 - m_2) = 0 \wedge \varphi(m_1 - m_2) = 0$. Damit erhalten wir einen Widerspruch zur Injektivität von $\bigwedge^2\varphi$. Also muss φ injektiv sein.

Aufgabe 39

(a) Offensichtlich ist f injektiv. Es gilt $g(2n, 0) = (\overline{2n}, \overline{0}, \dots) = 0$. Daher ist $\operatorname{im} f \subset \ker g$. Sei nun $(i, (j_1, j_2, \dots)) \in \ker g$. Daraus folgt sofort, dass $(j_1, j_2, \dots) = 0$ sein muss. i muss gerade sein, da genau dann $\overline{i} = 0$ ist. Also ist $(i, (j_1, j_2, \dots)) = (2k, 0)$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$. Die kanonische Projektion ist trivialerweise surjektiv, also insbesondere auch die komponentenweise kanonische Projektion bzw. Identität. Insgesamt folgt, dass es sich um eine kurze exakte Folge von $\mathbb{Z}$-Moduln handelt.

(b) Sei ein Untermodul T von $N \otimes M$ gegeben, der die Eigenschaften aus Bemerkung 10.6 erfüllt. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Urbild $(a, (0, \dots))$ von $(1, 0, \dots)$ unter $g|_T$. Nun betrachten wir $2(a, (0, \dots))$. Es gilt $g_T(2(a, (0, \dots))) = 2(1, 0, \dots) = 0$, aber auch $2(a, (0, \dots)) = (a, 2(0, \dots)) = (a, (0, \dots))$. Aufgrund der Injektivität von g_T muss daher schon $(a, (0, \dots)) = 0$ sein. Nach Konstruktion ist aber $g_T((a, (0, \dots))) \neq 0$. Daher erhalten wir einen Widerspruch und die Folge zerfällt nicht.