Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

6. Übungsblatt

Ausgabe 08.12.2020 – Besprechung 14.12-17.12.2020

Verständnisfragen

- Was ist der Vorteil der Lorentz-Eichung?
  Gleichung für skalares und Vektorpotential entkoppeln
  Formulierung der Lektrodynamik wird Lorentz-invariant
- Erfüllen die retardierten Potentiale die Lorenz-Eichung?
  ja
- Der verallgemeinerte Brechungsindex kann komplexe Werte annehmen. Welche Bedeutung hat der Imaginärteil?
  Dämpfung
- Schätzen Sie die Größenordnung des Impulses ab, der durch von der Sonne ausgehendem Licht pro Sekunde auf die Erde übertragen wird.
  Solarkonstante: $E_0 = 1367\frac{J}{m^2 s}$*, Erdradius:* $r = 6.4{\cdot}10^6 m$ *, Lichtgeschwindigkeit* $= 3{\cdot}10^8 m/s$
  $\rightarrow E_0 \pi r^2/c \approx 6{\cdot}10^8 \frac{kgm}{s^2}$*. Pro Sekunde der Impuls von 20 000 t (2 Eiffeltürme) die mit 100 km/h fliegen.*

1. Lösung: Ebene Welle

(a) Wir können die gegebene Welle für einen allgemeinen Ortsvektor $\boldsymbol{x}$ schreiben als

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= (A\hat{\boldsymbol{e}}_x + B\hat{\boldsymbol{e}}_y + C\hat{\boldsymbol{e}}_z) \cdot e^{i(kz-\omega t)} && (1)\\ &= (A\hat{\boldsymbol{e}}_x + B\hat{\boldsymbol{e}}_y + C\hat{\boldsymbol{e}}_z) \cdot e^{i(\boldsymbol{kx}-\omega t)} && (2) \end{aligned}$$

mit dem Wellenvektor $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{e}}_z$.

Für elektromagnetische Wellen im Vakuum gilt, dass Wellenvektor und Feld orthogonal zueinander sind, also $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$. Damit folgt, dass

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} &= k\hat{\boldsymbol{e}}_z \cdot (A\hat{\boldsymbol{e}}_x + B\hat{\boldsymbol{e}}_y + C\hat{\boldsymbol{e}}_z) \cdot e^{i(kz-\omega t)} && (3)\\ &= k \cdot C \cdot e^{i(kz-\omega t)} && (4)\\ &\overset{!}{=} 0\,. && (5) \end{aligned}$$

Daher gilt $C = 0$.

(b) Wir können zunächst die übrigen Koeffizienten A und B über ihre komplexe Phase ausdrücken:

$$A = |A| \cdot e^{i\phi_A} \tag{6}$$
$$B = |B| \cdot e^{i\phi_B} \tag{7}$$

Damit ergibt sich die Welle zu

$$\boldsymbol{E} = (|A| \cdot e^{i\phi_A}\hat{\boldsymbol{e}}_x + |B| \cdot e^{i\phi_B}\hat{\boldsymbol{e}}_y) \cdot e^{i(kz-\omega t)} \tag{8}$$
$$= (|A| \cdot e^{i(kz-\omega t+\phi_A)}\hat{\boldsymbol{e}}_x + |B| \cdot e^{i(kz-\omega t+\phi_B)}\hat{\boldsymbol{e}}_y \; . \tag{9}$$

Die Welle ist linear polarisiert, wenn der Betrag des Realteils beider Phasen zeitgleich maximal wird, also wenn

$$\phi_A = \phi_B \text{ oder } \phi_A = \phi_B \pm \pi \tag{10}$$

Damit ergibt sich für die Koeffizienten

$$\frac{A}{B} = \pm\frac{|A|}{|B|} \tag{11}$$

Für eine zirkular polarisierte Welle müssen die Phasen wiederum um $90°$ versetzt sein via

$$\phi_A = \phi_B \pm \frac{\pi}{2} \; . \tag{12}$$

Damit ergibt sich für die Koeffizienten

$$\frac{A}{B} = \pm i\frac{|A|}{|B|} \; . \tag{13}$$

2. Lösung: Rayleigh Entwicklung

Die einzigen von $\boldsymbol{x}$ abhängigen Terme der Rayleighentwicklung sind $j_\ell(kr)$ und $Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r)$.
Damit ergibt sich:

$$\Delta e^{i\boldsymbol{kx}} = \Delta 4\pi \sum_\ell i^\ell j_\ell(kr) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_k) Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r) \tag{14}$$
$$= 4\pi \sum_\ell i^\ell \Delta(j_\ell(kr)) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_k) Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r) \tag{15}$$
$$+ 4\pi \sum_\ell i^\ell j_\ell(kr)) \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_k) \Delta(Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r)) \tag{16}$$

Dabei haben wir verwendet, dass der Mischterm $(\partial_i j_\ell(kr))(\partial_i Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r))$ verschwindet, da die Gradienten orthogonal zueinander sind. Die lässt sich leicht nachvollziehen, wenn man den Gradienten in Kugelkoordinaten betrachtet: $j_\ell(kr)$ ist nur abhängig von der Länge des Ortsvektors und $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ von seiner Richtung.

Wenn wir den Laplace Operator in Kugelkoordinaten schreiben, ergibt sich für den ersten Term:

$$\Delta(j_\ell(kr)) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big)j_\ell(kr) \tag{17}$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big)j_\ell(kr) \tag{18}$$

$$= \Big(k^2\frac{\partial}{\partial (kr)^2} + \frac{2k}{r}\frac{\partial}{\partial (kr)}\Big)j_\ell(kr) \tag{19}$$

$$= \frac{1}{r^2}\Big((kr)^2\frac{\partial}{\partial (kr)^2} + 2kr\frac{\partial}{\partial (kr)}\Big)j_\ell(kr) \tag{20}$$

$$= \frac{1}{r^2}\Big(l(l+1) - (kr)^2\Big)j_\ell(kr) \tag{21}$$

wobei wir im letzten Schritt die Eigenschaften der Besselfunktion verwendet haben.
Aus der Eigenwertgleichung von $Y_{\ell m}$ ergibt sich für den zweiten Term:

$$\Delta(Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r)) = -\frac{1}{r^2}l(l+1)Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r) \tag{22}$$

Eingesetzt ein $\Delta e^{i\boldsymbol{kx}}$ erhalten wir schließlich:

$$\Delta e^{i\boldsymbol{kx}} = 4\pi\sum_\ell i^\ell \Delta(j_\ell(kr))\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_k)Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r) \tag{23}$$

$$+ 4\pi\sum_\ell i^\ell j_\ell(kr))\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_k)\Delta(Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r)) \tag{24}$$

$$= 4\pi\sum_\ell i^\ell \frac{1}{r^2}\Big(l(l+1) - (kr)^2\Big)(j_\ell(kr))\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_k)Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r) \tag{25}$$

$$+ 4\pi\sum_\ell i^\ell j_\ell(kr))\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_k)(-)\frac{1}{r^2}l(l+1)(Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r)) \tag{26}$$

$$= -k^2 4\pi\sum_\ell i^\ell j_\ell(kr)\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_k)Y_{\ell m}(\hat{\boldsymbol{e}}_r) \tag{27}$$

$$= -k^2 e^{i\boldsymbol{kx}} \tag{28}$$

3. Lösung: Vektorpotential in Lorenzeichung

(a) Für das skalare Potential folgt aus der Lorenz Eichbedingung

$$\partial_{ct}\Phi = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \tag{29}$$

$$\Phi = -c\int \mathrm{d}t\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} \tag{30}$$

Für das angenommene Vektorpotential ist

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = (\hat{\boldsymbol{e}}_x\partial_x + \hat{\boldsymbol{e}}_y\partial_y + \hat{\boldsymbol{e}}_z\partial_z)\boldsymbol{A} \tag{31}$$

$$= \left(\frac{\partial A_0}{\partial x} \pm i\frac{\partial A_0}{\partial y}\right)e^{i(kz-wt)} \tag{32}$$

Für das skalare Potential ergibt sich somit

$$\Phi = -c \int \mathrm{d}t \, \left(\frac{\partial A_0}{\partial x} \pm i \frac{\partial A_0}{\partial y} \right) e^{i(kz - wt)} \tag{33}$$

$$= -c \frac{i}{w} \left(\frac{\partial A_0}{\partial x} \pm i \frac{\partial A_0}{\partial y} \right) e^{i(kz - wt)} \tag{34}$$

$$= -\frac{i}{k} \left(\frac{\partial A_0}{\partial x} \pm i \frac{\partial A_0}{\partial y} \right) e^{i(kz - wt)} \tag{35}$$

(b) Das elektrische und das magnetische Feld sind gegeben durch

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \Phi - \partial_{ct} \boldsymbol{A} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \tag{37}$$

Als erstes berechnen wir den Gradienten von Φ. Dabei verwenden wir, dass das die Koeffizientenfunktion langsam veränderlich ist und somit $\partial_{ij} A_0 = 0$ für $i, j = x, y, z$. Damit erhalten wir

$$\boldsymbol{\nabla} \Phi = (\hat{\boldsymbol{e}}_x \partial_x + \hat{\boldsymbol{e}}_y \partial_y + \hat{\boldsymbol{e}}_z \partial_z) \Phi \tag{38}$$

$$= -\frac{i}{k} \left(\frac{\partial A_0}{\partial x} \pm i \frac{\partial A_0}{\partial y} \right) (ik) e^{i(kz - wt)} \hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{39}$$

$$= \left(\frac{\partial A_0}{\partial x} \pm i \frac{\partial A_0}{\partial y} \right) e^{i(kz - wt)} \hat{\boldsymbol{e}}_z \; . \tag{40}$$

Die zeitliche Ableitung des Vektorpotentials ergibt:

$$\partial_{ct} \boldsymbol{A} = \frac{1}{c} (-iw) A_0 (\hat{\boldsymbol{e}}_x \pm i \hat{\boldsymbol{e}}_y) e^{i(kz - wt)} \tag{41}$$

$$= -ik A_0 (\hat{\boldsymbol{e}}_x \pm i \hat{\boldsymbol{e}}_y) e^{i(kz - wt)} \tag{42}$$

Damit können wir nun das elektrische Feld angeben.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \Phi - \partial_{ct} \boldsymbol{A} \tag{43}$$

$$= \left(ik A_0 (\hat{\boldsymbol{e}}_x \pm i \hat{\boldsymbol{e}}_y) - \left(\frac{\partial A_0}{\partial x} \pm i \frac{\partial A_0}{\partial y} \right) \hat{\boldsymbol{e}}_z \right) e^{i(kz - wt)} \tag{44}$$

Für das magnetische Feld gilt

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \hat{\boldsymbol{e}}_i \tag{45}$$

$$= \begin{pmatrix} -\partial_z A_y \\ \partial_z A_x \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix} \tag{46}$$

$$= \begin{pmatrix} -(ik)(\pm i) A_0 e^{i(kz - wt)} \\ (ik) A_0 e^{i(kz - wt)} \\ (\pm i \partial_x A_0 - \partial_y A_0) e^{i(kz - wt)} \end{pmatrix} \tag{47}$$

$$\boldsymbol{B} = ((ik)(\hat{\boldsymbol{e}}_y \mp i \hat{\boldsymbol{e}}_x) A_0 - (\partial_y A_0 \mp i \partial_x A_0) \hat{\boldsymbol{e}}_z) \, e^{i(kz - wt)} \tag{48}$$

$$= i \, ((ik)(\mp \hat{\boldsymbol{e}}_x - i \hat{\boldsymbol{e}}_y) A_0 - (\mp \partial_x A_0 - i \partial_y A_0) \hat{\boldsymbol{e}}_z) \, e^{i(kz - wt)} \tag{49}$$

$$= \mp i \boldsymbol{E} \tag{50}$$

(c) Der Wellenvektor ist $\boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{e}}_z$, so dass $\boldsymbol{k}\boldsymbol{A} = 0$ und $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{A}$.

4. Lösung: Freie Wellengleichung

(a)

$$\psi_1 = f(x - ct) = f(y) \tag{51}$$
$$\Box\psi_1 = \Delta\psi_1 - \partial_{ct}^2\psi_1 \tag{52}$$
$$= \partial_x \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right) - \partial_{ct}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial ct}\right) \tag{53}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial (ct)^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial (ct)}\right)^2 \tag{54}$$

Wir können nun die Ableitungen nach y auxklammern. Die Ableitung von y nach x oder ct unterscheiden sich nur im Vorzeichen. Damit ergibt sich:

$$\Box\psi_1 = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial (ct)^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial (ct)}\right)^2 \tag{55}$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial ct}\right)^2\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial (ct)^2}\right) \tag{56}$$
$$= 0 \tag{57}$$

Die Rechnung erfolgt analog für $\psi_2 = g(x + ct)$.

f "läuft"mit Geschwindigkeit c in positive x-Richtung. g "läuft"mit Geschwindigkeit c in negative x-Richtung.

(b) Allgemeine Lösungen der homogenen Wellengleichung lassen sich durch Superposition von Lösungen mit verschiedenen Ausbreitungsrichtungen schreiben:

$$\Psi = Af + gf \tag{58}$$
$$A \cdot e^{ik_1(x-ct)} + B \cdot e^{ik_2(x+ct)} \tag{59}$$

(c) Mit $a = x + ct$ und $b = x - ct$ folgt:

$$\partial_a\Psi = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial ct}{\partial a}\frac{\partial \psi}{\partial ct} \tag{60}$$
$$= \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial ct} \tag{61}$$
$$\partial_b\Psi = \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial ct}{\partial b}\frac{\partial \psi}{\partial ct} \tag{62}$$
$$= \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial ct} \tag{63}$$
$$\Box\psi = (\partial_x^2 - \partial_{ct}^2)\psi \tag{64}$$
$$= (\partial_x + \partial_{ct})(\partial_x - \partial_{ct})\psi \tag{65}$$
$$= \partial_a\partial_b\psi \tag{66}$$
$$\partial_a\partial_b\psi = 0 \tag{67}$$

(d)

$$x^2-(ct)^2 = \begin{pmatrix} x & ct \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \tag{68}$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{69}$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{70}$$
$$= ab \tag{71}$$

(e)

$$\det\left[-\mathbb{1}\lambda + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \tag{72}$$
$$= -(1-\lambda)(1+\lambda) \tag{73}$$
$$= -(1-\lambda^2) \tag{74}$$
$$= 0 \tag{75}$$
$$\rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1 \tag{76}$$

$$\det\left[-\mathbb{1}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \tag{77}$$
$$= \lambda^2 - 1 \tag{78}$$
$$= 0 \tag{79}$$
$$\rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1 \tag{80}$$

(f) Das Linienelement der Fourier-transformierten Orts und Zeitkoordinaten lautet analog

$$k^2 - (w/c)^2 = 0. \tag{81}$$

Somit ergibt sich direkt $w = \pm ck$.

Analog zu Aufgabe (c/d) definieren wir die Lichkegelkoordinaten $k + \frac{w}{c}$ und $k - \frac{w}{c}$. Die Dispersionsrelation ergibt sich in diesen Koordinaten wieder via Matrix B zu:

$$\begin{pmatrix} k+\frac{w}{c} & k-\frac{w}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k+\frac{w}{c} \\ k-\frac{w}{c} \end{pmatrix} \tag{82}$$
$$=(k+\frac{w}{c}) \cdot (k-\frac{w}{c}) \tag{83}$$
$$=k^2 - (\frac{w}{c})^2 \tag{84}$$
$$\Rightarrow w = \pm ck \tag{85}$$