Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 3

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: **Fr** 22.05.2020 um 9:15 Uhr

---

12. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Einheiten in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)*

(a) Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\overline{m}$ ist eine Einheit in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(ii) $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

(b) Man untersuche mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus ob das Element $\overline{42}$ eine Einheit in den Ringen $\mathbb{Z}/51\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/55\mathbb{Z}$ ist und bestimme gegebenenfalls multiplikative Inverse.

13. Aufgabe: *(1,5+1,5+1,5+1,5 Punkte, Der Ring $\mathbb{Z}[i]$)* Sei $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Mit der üblichen Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen wird $\mathbb{Z}[i]$ zu einem nullteilerfreien Ring. Sei $\delta\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$ gegeben durch $a + bi \mapsto |a + bi|^2 = a^2 + b^2$.

(a) Man zeige, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ ein Element $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ existiert mit $|z - (a + bi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Man zeige: Für alle $z, w \in \mathbb{Z}[i]$ mit $w \neq 0$ gibt es $q \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\delta(z - q \cdot w) \leq \frac{1}{2}\delta(w)$.

(c) Man zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Euklidischer Ring ist.

(d) Man berechne einen größten gemeinsamen Teiler von 9 und $3 + 4i$ in $\mathbb{Z}[i]$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus in $\mathbb{Z}[i]$.

14. Aufgabe: *(6 Punkte, Wann ist ein Ring ein Körper?)* Sei $R \neq 0$ ein Ring. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) R ist ein Körper.

(ii) $R[t]$ ist ein Euklidischer Ring.

(iii) $R[t]$ ist ein Hauptidealring.

Bemerkung: Für die Definition des Ringes $R[t]$ siehe Aufgabe 4.

15. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Elementarteiler und Fittingideale)* Man bestimme mit dem Gauß-Verfahren die Elementarteiler der folgenden Matrizen und gebe ihre Fittingideale an:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 10 & 12 & 6 \\ 20 & 12 & 10 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Z})$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1-t & -1 & 2 \\ -1 & -t & 3 \\ 0 & -1 & 3-t \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}[t])$.

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.