Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer — Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik — Wintersemester 2020/2021

3. Übungsblatt

Ausgabe 17.11.2020 – Besprechung 23.-26.11.2020

Verständnisfragen

- Warum gibt es nur 5 Quadrupolmomente? Wie würden Sie die Frage in kartesischen und wie in sphärischen Koordinaten beantworten
- Was versteht man unter Suszeptibilität. Kann sie einen imaginären Anteil haben?
- Warum ist die Zerlegung einer Ladungsdichte in Multipole eindeutig?
- Ohne zu rechnen: Welche der folgenden Funktionen sind orthogonal zueinander?
  $\sin(\phi), \cos\phi, \sin(\phi + \pi/2), \tan(x), e^{i\phi}, x^3$
- Wie lautet die Fouriertransformation der δ- Funktion, der Gauss Funktion und einer monochromatischen Welle?
- Warum nimmt der Beitrag eines Multipolmoments mit $1/r^{l+1}$ im Potenzial ab?
- Wie kann ich eine "Antenne" für die l-te Ableitung des Potenzials konstruieren?

1. Aufgabe: Poisson

a) Zeigen Sie, dass die Poisson-Gleichung für ein Vektor-Potential

$$\Delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x})$$

geschrieben werden kann als

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3x' \, G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \, \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}') \,,$$

mit der Green'schen Funktion

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \,.$$

Zeigen Sie, dass damit für das magnetische Feld folgt

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3x' \, \frac{\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \,.$$

b) Gegeben sei das uniforme magnetische Feld $\boldsymbol{B}$. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2} \, (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})$$

ein gültiges Vektorpotential zu $\boldsymbol{B}$ darstellt, d.h. zeigen Sie, dass $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ und $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. Ist die Definition von $\boldsymbol{A}$ eindeutig? Falls nein, geben Sie eine weitere mögliche Definition an.

2. Aufgabe: Fourier-Transformation Für Funktionen f einer reellen Variablen, die stetig differenzierbar und quadrat-integrierbar sind ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$) ist die Fourier-Transformation definiert als

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}[f(x); k] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{-ikx} \, f(x) \,.$$

Die inverse Transformation ist gegeben durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \, e^{ikx} \, \tilde{f}(k) \,.$$

Zeigen Sie für zwei Funktionen f, g und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, dass gilt

a) $\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x); k] = \alpha \mathcal{F}[f(x); k] + \beta \mathcal{F}[g(x); k] \,,$

b) $\mathcal{F}[f(x - a); k] = e^{-ika} \mathcal{F}[f(x); k] \,,$

c) $\mathcal{F}[f(ax); k] = a^{-1} \mathcal{F}[f(x); k/a] \,, \quad a > 0 \,,$

d) $\mathcal{F}[f(-x); k] = \mathcal{F}[f(x); -k] \,,$

e) $\mathcal{F}[(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)f(x);k] = ik\mathcal{F}[f(x);k]$,

f) $\mathcal{F}[xf(x);k] = i(\mathrm{d}/\mathrm{d}k)\mathcal{F}[f(x);k]$,

g) $\mathcal{F}[f(x);-k] = \mathcal{F}[f(x);k]^*$, für reellwertiges $f(x)$.

2. Aufgabe: Fourier-Transformation der Maxwell-Gleichungen Die Fourier-Transformation kann direkt auf mehrere Raumdimensionen erweitert werden und wir definieren

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{i\omega t}\, f(t)\,,$$

$$\tilde{f}(\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, f(\boldsymbol{x})\,,$$

$$\tilde{f}(\omega,\boldsymbol{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^3x\mathrm{d}t\, e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\, f(t,\boldsymbol{x})\,,$$

für die Fourier-Transformation der Zeitkoordinate, der drei Raumkoordinaten und der Fourier-Transformation bezüglich Raum- und Zeitkoordinaten.

a) Bestimmen Sie die Fourier Transformation der Maxwell-Gleichungen durch Substitution der inversen Transformation $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega)$ der Felder $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ und $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)$!

b) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung aus den Fourier transformierten Maxwell-Gleichungen ab.