Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2020/21

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. M. Leonhardt

Blatt 00
Keine Abgabe

Aufgabe 1. *(Beispiele von Untergruppen von* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$*)* Wir betrachten die Gruppe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (mit Gruppenverknüpfung = Matrixmultiplikation). Gegeben seien die Elemente

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ a' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ b' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmten Sie $\mathrm{ord}(a)$, $\mathrm{ord}(b)$ und $\mathrm{ord}(ab)$. Sei H die von a und b erzeugte Untergruppe von G. Bestimmen Sie $\#H$.

(b) Bestimmten Sie $\mathrm{ord}(a')$, $\mathrm{ord}(b')$ und $\mathrm{ord}(a'b')$. Sei H' die von a' und b' erzeugte Untergruppe von G. Bestimmen Sie $\#H'$.

Aufgabe 2. *(Bilder und Urbilder von Untergruppen)* Es sei $\varphi\colon G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist $\varphi(H)$ eine Untergruppe von G'. Falls $H \subset G$ sogar ein Normalteiler ist, ist dann auch $\varphi(H)$ ein Normalteiler von G'?

(b) Ist $H' \subset G'$ eine Untergruppe, so ist $\varphi^{-1}(H') \subset G$ eine Untergruppe. Falls $H' \subset G'$ sogar ein Normalteiler ist, ist dann auch $\varphi^{-1}(H') \subset G$ ein Normalteiler?

Aufgabe 3. *(Ordnung von Bild und Kern)* Es sei G eine endliche Gruppe und $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\mathrm{ord}(\mathrm{Kern}(\varphi)) \cdot \mathrm{ord}(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \mathrm{ord}(G)$.

(b) Ist H endlich, so ist $\mathrm{ord}(\mathrm{Bild}(\varphi))$ ein Teiler von $\mathrm{ggT}(\mathrm{ord}(G), \mathrm{ord}(H))$.

Aufgabe 4. *(Die Gruppe* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$*)* Wir fassen $\mathbb{Z}$ als (additive) Untergruppe von $\mathbb{Q}$ auf und betrachten die Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Jedes Element von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ hat endliche Ordnung.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ genau eine Untergruppe der Ordnung n, und diese ist zyklisch.

(c) (Bonus) Ist $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endlich erzeugt?

Aufgabe 5. *(Komplemente)* Es sei G eine endliche Gruppe und $N \subset G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist H eine Untergruppe von G mit

$$\mathrm{ord}(H) \cdot \mathrm{ord}(N) = \mathrm{ord}(G) \text{ und } H \cap N = \{e\},$$

so gilt $HN = G$.

(b) Ist N ein Normalteiler von G und sind $H_1, H_2 \subset G$ zwei Untergruppen mit den Eigenschaften aus (a), so sind H_1 und H_2 isomorph.