Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer — Anja Butter

Theoretische Physik III: Elektrodynamik — Wintersemester 2020/2021

10. Übungsblatt

Ausgabe 26.01.2020 – Besprechung 01.02-04.02.2021

Verständnisfragen

- Wir befinden uns in einem Inertialsystem und betrachten zwei ruhende Raumschiffe, die mit einemSeil verbunden sind, das bei der geringsten Dehnung reißt. Wir beobachten nun, dass beide Raumschiffe beginnen gleichzeitig aus dem Stand heraus zu beschleunigen, und zwar in dieselbe Richtung, parallel zu ihrer Verbindungslinie. Auch die fortlaufende Beschleunigung ist aus unserer Sicht (der, des ruhenden Beobachters) synchron, bis sie im neuen Inertialsystem S' zur Ruhe kommen. Hält das Seil?
- Sie befinden sich in einer Tempo 30 Zone und nähern sich wahlweise auf einem Fahrrad, in einem Auto oder in einer Rakete einer roten Ampel. Was passiert wenn Sie sich der Ampel jeweils mit 20 km/h, 40 km/h, 10% oder 20% der Lichtgeschwindigkeit nähern?
- Was würde passieren, wenn man versucht einen Baseball zu schlagen, der mit 90% der Lichtgeschwindigkeit auf einen zufliegt?

1. Aufgabe:

In der Newtonschen Mechanik gilt $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Eine konstante Kraft würde daher zu konstanter Beschleunigung führen und die Geschwindigkeit würde ungehindert steigen bis $v = \infty$. In der speziellen Relativitätstheorie kann die Geschindigkeit $v = c$ niemals überschritten werden. Die Energie eines bewegten massiven Körpers ist gegeben durch

$$E = m\gamma c^2 = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2$$

wobei m die Masse ist. Dieser Ausdruck divergiert für $v \to c$, so dass es einem unendlichen Energieaufwand entspricht die Lichtgeschwindigkeit zu überschreiten.

a) Zeigen Sie, dass im Limit kleiner Geschwindigkeiten $v \ll c$ der nicht-relativistische Ausdruck für die kinetische Energie folgt.

b) Berechnen Sie das Verhältnis zwischen der Energie eines Raumschiffs mit Masse $m = 1000$ kg, für den Fall dass es sich mit einer Geschwindigkeit $v = 0$ und $v = 3/4c$ bewegt, beziehungsweise für den Fall, dass es sich mit $v = 0$ oder $v = 9/10c$ bewegt.

2. Aufgabe: Aberration

Der Effekt, daß Beobachter aus verschiedenen Inertialsystemen eine Lichtquelle in verschiedenen Winkeln sehen, wird *Aberration* genannt. Nehmen Sie an, daß Beobachter 1 im Ursprung seines Systems S sitzt und die Lichtquelle in seinem System unter einem Winkel θ bzgl. der x-Achse sieht. Beobachter 2 im System S' bewegt sich bzgl. des Systems S mit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$. Welchen Winkel misst Beobachter 2? Skizze !
HINWEIS: Benutzen Sie die Transformationsregel für Geschwindigkeiten (vgl. Übung 9):

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}\,, \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{u'_x v}{c^2})}\,.$$

Diese Formeln beschreiben, welche Geschwindigkeit u der Beobachter in S misst, wenn das Objekt die Geschwindigkeit u' in dem in x-Richtung mit v gegenüber S bewegten System S' hat.
Hilfreiche Identität: $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$.

3. Aufgabe: Lie-Gruppen

Elemente der Darstellung einer Lie-Gruppe $U \in G$ können als Matrixexponent ausgedrückt werden

$$U = \exp\big(i \sum_k \alpha_k\, A_k\big)\,,$$

wobei $\alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots, N$ kontinuierliche Parameter sind und A_k Elemente der zugehörigen Lie-Algebra, die *Generatoren* der Lie-Gruppe.

a) Zeigen Sie, dass die Elemente der Lie-Gruppe unitär sind, $U\,U^\dagger = \mathbb{1}$, falls die Generatoren hermitisch sind $A_k = A_k^\dagger$.

b) Zeigen Sie, dass gilt

$$U^\dagger \exp(iA) U = \exp(U^\dagger A U)$$

für eine unitäre Matrix U.

c) Zeigen Sie, dass für reelle $n \times n$ Matrizen gilt, dass $\det A = 0$, falls n ungerade und $A^\dagger = -A$.

d) Zeigen Sie, dass die Matrizen $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ eine Basis der reellen 2×2 Matrizen bilden

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \alpha\sigma_0 + \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \delta\sigma_3 \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\,, \end{aligned}$$

mit reellen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ergeben sich eindeutig aus a, b, c, d als Lösung eines linearen Gleichungssystem.

e) Zeigen Sie, dass für die Projektion einer reellen 2×2 Matrix $A = \sum_n \alpha_n \sigma_n$ auf die Basis gilt

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(A \cdot \sigma_n\big) = \frac{1}{2} A_{ij} (\sigma_n)_{ji} \qquad \text{für } n = 0, 1, 2$$

und

$$\alpha_n = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(A \cdot \sigma_n\big) = -\frac{1}{2} A_{ij} (\sigma_n)_{ji} \qquad \text{für } n = 3$$