Titel

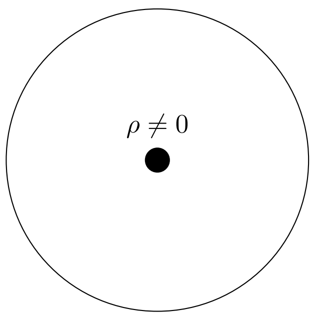
0.1 Maxwellgleichungen

Verbindung zwischen Feldern $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ und den Ladungen $\rho, \vec{j}$.

1.

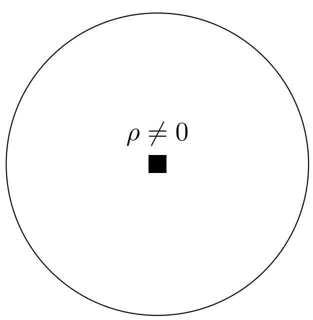
$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \partial_i E^i = 4\pi\rho$$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \operatorname{div} \vec{E} \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E} = \underset{\text{el. Fluss}}{\Psi} = \int_V \mathrm{d}^3$$



2.

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \partial_i B^i = 0$$



$\mathrm{d}^3 r \operatorname{div} \vec{B} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B} = \text{mag}\underset{\Phi}{.}\,\text{Fluß} = 0$ Es gibt keine magnetische Ladung (elektromagnetische Dualität)

3. $\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\partial_{ct}\vec{B}$. Faraday-Induktionsgesetz $\int_S \mathrm{d}S \operatorname{rot} \vec{E} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E} = \underset{U}{\text{Spannung}} =$ $-\underbrace{\frac{\int d}{\mathrm{d}(ct)}} \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B} = -\frac{\int d}{\mathrm{d}(ct)}\Phi$

4.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \text{Ampere-Gesetz.}$$

$$\int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B} \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ct)} \int_S \underbrace{\mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{E}}_{=\Psi} + \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{j}}_{=I \text{ Strom}}$$

zylindrische Symmetrie:

$$\int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B} = 4\pi r \left|\vec{B}(r)\right| = \frac{4\pi}{c} I \to \left|\vec{B}\right| \sim \frac{1}{r}$$

Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen

- lineare ($\to$ Superposition)
- partielle (Ableitungen in x^i und $ct \to \nabla, \partial_{ct}$)

$$\begin{tikzcd} \rho, \vec{j} \arrow[rr, bend left, "\text{Quelle}"] & & \vec{E}, \vec{B} \arrow[ll, bend left, "\text{Lokalisierung}"] \end{tikzcd}$$

- hyperbolische Differenzialgleichungen
- Inertialsystem
- Überbestimmtheit?

Erhaltung der elektrischen Ladung

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \qquad |\partial_{ct} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad |\operatorname{div} \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0 = \partial_{ct} \operatorname{div} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j}$$
$$= 4\pi \partial_{ct}\rho + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j}$$

Daraus folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} j = 0.$$

Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \mathrm{d}^3 r \rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q = -\int_V \mathrm{d}^3 r \operatorname{div} \vec{j} \underset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{j}$$

Elektrodynamik ist eien Kontinuumstheorie. Ladung ist eine Art „Fluid “.

Elektromagnetische Dualität

$\rho = 0, \vec{j} = 0$.

1. $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
2. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$
3. $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B}$
4. $\operatorname{rot} \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E}$.

Vertauschung $\vec{E} \to \vec{B}, \quad \vec{B} \to -\vec{E}$ (Dualität).
Wieso gibt es eigentlich keine magnetische Ladung?

1. $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$
2. $\operatorname{div} \vec{B} = 4\pi\rho_m$
3. $\operatorname{rot} \vec{E} = -\partial_{ct}\vec{B} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m$
4. $\operatorname{rot} \vec{B} = +\partial_{ct}\vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

Daraus würde folgen $\partial_t\rho_m + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0$, analog zu $\partial_t\rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.