Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 1 24. April 2020

Abgabe bis Fr. 01.05.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Da uns Eure Abgabegruppen noch nicht bekannt sind, müssen in dieser Woche **beide** Gruppenmitglieder die Lösung in Moodle einreichen.
- Gebt bitte klar erkennbar auf Eurer Lösung an mit wem Ihr gemeinsam abgebt, damit wir anhand dessen die Abgabegruppen in Moodle erstellen können und anschließend nur noch eine Person pro Abgabegruppe in Moodle abgeben muss!

Themen:

- Integration
- Uneigentliche Integrale
- Funktionenfolgen
- Gleichmäßige Konvergenz

Aufgabe 1.1 (6 Punkte): Integralberechnung

Man bestimme die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$ $\boxed{1}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^x\left(1-x+x^2\right)\mathrm{d}x$ $\boxed{1}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}x^3\mathrm{d}x$ $\boxed{2}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$ $\boxed{2}$

Bemerkung: Bei (c) und (d) hilft geschicktes Substituieren ggf. weiter.

Aufgabe 1.2 (6 Punkte): Weitere Eigenschaften von Integralen

(a) Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $\varphi,\psi:[c,d]\to[a,b]$ differenzierbar. Man zeige, dass dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f\left(\psi(x)\right)\psi'(x) - f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x), \quad x\in[c,d].$$ $\boxed{3}$

Tipp: Hauptsatz d. Differential- und Integralrechnung (Analysis 1, Satz 6.10) und Kettenregel.

(b) Eine wichtige Ungleichungen in der Mathematik ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU)[1]. Diese besagt im eindimensionalen Fall:
Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt

$$\text{(CSU)} \quad \left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x \right|^2 \leq \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)^2 \mathrm{d}x.$$

<u>Aufgabe</u>: Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(a) = 0$. Man zeige mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int_a^b \left| f(x) f'(x) \right| \mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x)^2 \mathrm{d}x.$$ 3

Tipp: Man nutze $(f^2)' = 2f'f$ und überlege sich, welche Eigenschaften $G(x) := \int_a^x |f'(t)|\, dt,\ x \in [a, b]$ hat und wie man $G(x)$ hier nutzen kann.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte): Funktionenfolgen und Integration

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{n^2 x}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

Man zeige, dass

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x) \mathrm{d}x.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Satz 1.3.1 (Analysis 2)? Beweisen Sie Ihre Antwort.
Tipp: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass f_n an der Stelle $x^* = 1/\left(\sqrt{3}n\right)$ maximal wird mit $f(x^*) = \frac{\sqrt{27}n}{16}$. (Ihr solltet allerdings in der Lage sein, dies selbst herzuleiten, und es ggf. wiederholen, falls Ihr es nicht mehr wisst.)

Aufgabe 1.4 (4 Punkte): Uneigentliche Integrale und Funktionenfolgen

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}}, \quad x \geq 0.$$

Man zeige, dass die Funktionfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, aber

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x) \mathrm{d}x \neq \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(x) \mathrm{d}x.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Satz 1.3.1 (Analysis 2)?

Bonusaufgabe 1.5 (2 Bonuspunkte): Stammfunktionen

Man berechne die Stammfunktionen

$$\int \cos(x) \sin(x) \mathrm{d}x.$$

[1] Keine Sorge, natürlich darf diese schöne Ungleichung mit dieser einprägsamen Abkürzung auch bei uns noch eine größere Rolle als nur diese Gastrolle auf dem Übungsblatt spielen. Sie wird uns in Kapitel 2 in diesem Semester in ihrer verallgemeinerten Form wieder begegnen.