AZT II Zettel 2

1) a) Sei $m := \operatorname{ord}(\zeta)$. $\zeta^n = 1 \Rightarrow m \mid n$.

Nach Def von $\hat{\mathbb{Z}}$ gilt dann

$e_{n,m}(a_n) = a_m \Rightarrow a_n \equiv a_m \mod m$

$\Rightarrow \zeta^a = \zeta^{a_n} = \zeta^{a_m}$, da $\zeta^m = 1$.

b) $(ab)_n = a_n \cdot b_n$ $\quad n := \operatorname{ord}(\zeta)$

$\operatorname{ord}(\zeta^{a_n}) \mid \operatorname{ord}(\zeta) = n$

$\Rightarrow b_{\operatorname{ord}(\zeta^{a_n})} \equiv b_n \mod \operatorname{ord}(\zeta^{a_n})$

$\Rightarrow (\zeta^{a_n})^{b_{\operatorname{ord}(\zeta^{a_n})}} = (\zeta^{a_n})^{b_n}$

$(\zeta^a)^b = (\zeta^{a_n})^{b_{\operatorname{ord}(\zeta^{a_n})}} = (\zeta^{a_n})^{b_n} = \zeta^{a_n \cdot b_n} = \zeta^{ab}$ ✓

$\zeta^a \zeta^b = \zeta^{a_n} \cdot \zeta^{b_n} = \zeta^{a_n + b_n} = \zeta^{(a+b)_n}$ ✓

c) $\zeta^a \xi^a = \zeta^{a_{\operatorname{ord}\zeta}} \xi^{a_{\operatorname{ord}\xi}}$

$\operatorname{ord}(\zeta\xi) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(\zeta), \operatorname{ord}(\xi))$

$\Rightarrow a_{\operatorname{ord}(\xi)} \equiv a_{\operatorname{ord}(\zeta\xi)} \mod \operatorname{ord}(\xi)$

$a_{\operatorname{ord}(\zeta)} \equiv a_{\operatorname{ord}(\zeta\xi)} \mod \operatorname{ord}(\zeta)$

$(\zeta\xi)^a = (\zeta\xi)^{a_{\operatorname{ord}(\zeta\xi)}} = \zeta^{a_{\operatorname{ord}(\zeta\xi)}} \cdot \xi^{a_{\operatorname{ord}(\zeta\xi)}} = \zeta^{a_{\operatorname{ord}(\zeta)}} \xi^{a_{\operatorname{ord}(\xi)}} = \zeta^a \xi^a$ ✓

3 a) Sei H eine offene UG von G. unvollständig

Angenommen, H enthält keines der g^i, dann $G \setminus H$ abg und $g^i \in G \setminus H$ $\forall i$ $\Rightarrow$ $G\setminus H \supseteq \overline{\{g^i \mid i \in \mathbb{N}\}} = G \Rightarrow H = \emptyset$.

$\Rightarrow \exists n: \ g^n \in H$. Alle offenen UGs sind auch abgeschlossen, d.h.

$$H \supseteq \overline{\langle g^n \rangle} = \overline{\{g^n, g^{2n}, \dots, \}}$$

$$g^{n+m} \in g^m \overline{\langle g^n \rangle} \Rightarrow g^i \in \bigcup_{r=0}^{n-1} g^r \overline{\langle g^n \rangle} \quad \forall i$$

abg. als end. Vereinigung abg. Mengen

$$\Rightarrow \bigcup_{r=0}^{n-1} g^r \overline{\langle g^n \rangle} = G$$

$$\Rightarrow (G : \overline{\langle g^n \rangle}) \leq n$$

$$\Rightarrow (G : H) \leq n$$

Idee: $(G : H) = n \iff g^n \in H$ mit n minimal

$\Downarrow$

H offen in G

$\Downarrow$

$\exists m: \ g^m \in H \Rightarrow (G:H) \leq m$,

also $n \leq m$

$\Downarrow$

$\overline{\langle g^n \rangle} = G^n$? G^n ist UG ✓, G^n offen oder abg ?

Es gilt $g^n \in G^n$, also $\langle g^n \rangle \subset G^n$, $\underline{G^n \text{ abg}} \Rightarrow \overline{\langle g^n \rangle} \subset G^n$

G^n abg $\Rightarrow$ $\bigcup_{i=0}^{n-1} g^i G^n = G$ disjunkt ?

sonst $h^n = g^i$ für $i < n$ ok

jedenfalls: $(G : G^n) \leq n$ falls G^n abg.

b) Wir setzen aus a) voraus, dass G^n eine offene Untergruppe ist, also insb. abgeschlossen

$$\Rightarrow g^n \in \dot{\bigcup_{a=1}^{i}} g^a G^i \quad \forall n \Rightarrow G = \overline{\langle g \rangle} \subset \dot{\bigcup_{a=1}^{i}} g^a G^i \subset G$$

$$\Rightarrow \dot{\bigcup_{a=1}^{i}} g^a G^i = G$$

und dass $G = \varprojlim_i G/G^i$. Dann wissen wir

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_i \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \qquad G = \varprojlim_i G/G^i$$

Wir erhalten $\varphi : \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \longrightarrow G/G^i$

$$a \longmapsto g^a G^i,$$

da $g^{a+i} G^i = g^a G^i$. Außerdem ist φ surjektiv, da

$$G = \dot{\bigcup_{a=1}^{i}} g^a G^i.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{Z}/i\mathbb{Z} \longrightarrow G/G^i \longrightarrow 0 \text{ ist exakt}$$

$\varprojlim$ rechtsexakt
$$\Rightarrow \quad \hat{\mathbb{Z}} \longrightarrow G \longrightarrow 0 \text{ exakt}$$

$\square$

4) a)

Wir bezeichnen die Abbildung mit φ

$$\varphi : \operatorname{map}(\{*\}, Y)^{ko} \longrightarrow Y, \quad f \longmapsto f(*)$$

Bem: $\{*\} \subset (\{*\})$ kompakt.

Betrachte eine beliebige offene Überdeckung von $\{*\}$. Diese besteht höchstens aus $\{*\}$ und besitzt damit eine endliche Teilüberdeckung.

Insbesondere ist also $C(\{*\}, U)$ offen $\forall\, U$

$$\varphi^{-1}(U) = \{ f \in \operatorname{map}(\{*\}, Y)^{ko} : f(\{*\}) \subseteq U \}$$
$$= C(\{*\}, U) \text{ offen in KO-Topologie.}$$

Da die KO-Topologie die gröbste Topologie ist, sodass alle $C(\{*\}, U)$ offen sind, genügt es zu zeigen, dass $\varphi(C(\{*\}, U))$ offen ist $\forall\, U \subseteq Y$ offen.

$\varphi(C(\{*\}, U)) = \{ f(*) \mid f \in C(\{*\}, U) \} = U$, weil jede Abbildung aus $\{*\}$ heraus stetig ist.

Also ist φ stetig und offen und damit ein Homöomorphismus.

(b) Wir bezeichnen die Auswertungsabbildung mit φ.

Es gilt $\varphi^{-1}(U) \overset{U \subseteq Y \text{ offen}}{=} \{ (f, x) \in \operatorname{map}(X, Y)^{ko} \times X : f(x) \in U \}$

$$= \bigcup_{\substack{(f,x) \in \operatorname{map}(X,Y)^{ko} \times X \\ f(x) \in U}} C(K_{f,x}, U) \times K_{f,x} \qquad x \in K_{f,x} \subseteq f^{-1}(U), \; K_{f,x} \text{ offen}$$

$C(K_{f,x}, U) \times K_{f,x}$ ist als Produkt offener Mengen offen, somit auch die Vereinigung $\Rightarrow \varphi^{-1}(U)$ offen.

c) $\forall x \neq y \in Y \Rightarrow \exists U_x, U_y:$

$$U_x \cap U_y = \emptyset$$

$$f \neq g \in \mathrm{Map}(X, Y).$$

z.z.: $\exists f \in U, \; g \in V: \quad U \cap V = \emptyset$

$$\begin{array}{ccccc} \exists x \in X: & f(x) & \neq & g(x) & \\ & \cap & & \cap & \\ & U & \cap & V & = \emptyset \\ & \cap & & \cap & \\ & & Y & & \end{array}$$

$$C(\{x\}, U) \cap C(\{x\}, V) = \emptyset.$$

aber $\{x\}$ ist kompakt (da jede offene Überdeckung eine Menge enthält, die x enthält. Diese ist dann die endliche Teilüberdeckung)
und U bzw. V sind offen, sodass nach Definition der KO-Topologie auch $C(\{x\}, U)$ und $C(\{x\}, V)$ offen sein müssen.
Es gilt $f \in C(\{x\}, U)$ (da $f(x) \in U$)
und $g \in C(\{x\}, V)$ (da $g(x) \in V$),
sodass wir damit zwei disjunkte Umgebungen gefunden haben. $\square$