Funktionalanalysis - Übungsblatt 12

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

Abgabe: 26. Januar 2024, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

Aufgabe 12.1 4 Punkte

[2+1+1 Punkte]

Für $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen sei

$$\mathring{W}_p^1(\Omega) := \{f \in W_p^1(\Omega) \mid \exists\, (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega) \text{ mit } \|f - f_k\|_{W_p^1} \to 0 \text{ für } k \to \infty\}.$$

In dieser Aufgabe wollen wir auf $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (-L, L)$ für ein $L > 0$ die folgende Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_{L_p} \leq C_p L \|\nabla u\|_{L_p} \qquad \forall\, u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$$

beweisen, wobei C_p nur von p abhängt. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

(a) Betrachten Sie zunächst den eindimensionalen Fall $(-L, L)$ und zeigen Sie

$$\|u\|_{L_p((-L,L))} \leq C_p L \|u'\|_{L_p((-L,L))} \qquad \forall\, u \in C_c^\infty((-L, L)).$$

(b) Benutzen Sie Teil a), um die Poincaré Ungleichung auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \times (-L, L)$ zu zeigen, d.h. für alle $u \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq C_p L \|\nabla u\|_{L_p(\Omega)} \tag{1}$$

wobei C_p nur von p abhängt.
Hinweis: Es genügt, sich auf die beschränkte Dimension zurückzuziehen.

(c) Folgern Sie aus b), dass die die Poincaré-Ungleichung (1) für alle $u \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ gilt.

Aufgabe 12.2 4 Punkte

Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(x) = |x|^\alpha$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass f genau dann schwach differenzierbar ist, wenn $\alpha > -(n-1)$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis das folgende allgemeine Resultat aus der Analysis 3, welches uns erlaubt, das Integral von f über die Kugel umzuschreiben (siehe z.B. Evans Partial Differential equations, C.3-Theorem 4)

$$\int_{B_r(x_0)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^r \int_{\partial B_s(x_0)} f \,\mathrm{d}S^{n-1}\,\mathrm{d}s.$$

Aufgabe 12.3 4 Punkte

Seien $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir haben in der Vorlesung die folgenden Normen auf dem Raum $W_p^m(\Omega)$ eingeführt:

$$\|f\|_{W_p^m} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L_p}$$

$$|||f|||_{W_p^m} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L_p}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_{W_p^m}$ und $|||\cdot|||_{W_p^m}$ äquivalent sind.
Hinweis: Sie müssen nicht beweisen, dass es sich tatsächlich um Normen handelt.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.4 4 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Seien $a_{ij}, c \in L_\infty(\Omega), c \geq 0$ und $f \in L_2(\Omega)$, sodass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\xi^T A(x)\xi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \lambda_0 \|\xi\|^2 \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega, \tag{2}$$

wobei $\lambda_0 > 0$. Zeigen Sie, dass es genau eine schwache Lösung $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ des homogenen Dirichlet-Randwertproblems

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \partial_i \xi \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u + cu\xi \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_\Omega f\xi \, \mathrm{d}\lambda^n \qquad \forall\, \xi \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \tag{3}$$

gibt.

Hinweis: Verwenden Sie Lax-Milgram. Aufgabe 12.1 könnte hilfreich sein, um die Koerzivität zu zeigen.