Funktionalanalysis - Wiederholungsaufgaben

Wintersemester 2023

Christian Düll

Ein Hinweis vorab: Diese Aufgabensammlung dient als **ergänzende** Klausurvorbereitung. Sie ersetzt weder die Wiederholung der Aufgaben auf den Übungszetteln noch das Studium des Vorlesungsinhalts. Es handelt sich um ein zusätzliches Angebot. Bei Fragen, Unklarheiten oder Fehlern schicken Sie bitte eine Nachricht an **duell@math.uni-heidelberg.de**.

Aufgabe 1.1

Sei $I := (0,1)$ und $b > 0$ eine Konstante. Sei weiter $f \in L_2(I)$. Man zeige, es existiert genau ein $u \in \mathring{W}_2^2(I)$, so dass

$$\int_0^1 \big(u''w'' + bu'w' + uw\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 fw\,\mathrm{d}x \qquad \text{für alle } w \in \mathring{W}_2^2(I). \tag{1}$$

Aufgabe 1.2

Sei $(H, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ein reeller Hilbertraum. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ eine Folge und $x \in H$. Zeigen Sie:

$$x_k \rightharpoonup x \text{ schwach in } H \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \langle h \mid x_k \rangle = \langle h \mid x \rangle \qquad \text{für alle } h \in H.$$

Aufgabe 1.3

Betrachte $T : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ gegeben durch $(Tf)(x) = \frac{1}{x+1} f(x)$. Man zeige, dass T linear und beschränkt, aber nicht kompakt ist.

Aufgabe 1.4

Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Sei $(T_n)_n$ eine Folge in $\mathcal{L}(X,Y)$, sodass $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$ für alle $x \in X$ existiert. Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| < \infty$ gilt.

Aufgabe 1.5

Betrachte den Raum der stetigen und beschränkten Funktionen $(C_b([0,\infty), \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Man zeige, dass ein stetiges lineares Funktional $L : C_b([0,\infty)) \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$L(g) = \lim_{x\to\infty} g(x) \tag{2}$$

für alle $g \in C_b([0,\infty))$, für welche der Limes auf der rechten Seite von (2) existiert.

Aufgabe 1.6

Sei $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Folge zweimal stetig differenzierbarer Funktionen. Sei $g_n(0) = g_n'(0)$ für alle n und $|g_n'(x)| \leq 1$ für alle n und $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass eine Teilfolge von $(g_n)_n$ gleichmäßig in $[0,1]$ konvergiert.

Aufgabe 1.7

Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (S,d). Zeigen Sie, dass dann K separabel ist.

Aufgabe 1.8

Sei $(H, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $A : H \to H$ ein linearer Operator mit

$$\langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid Ay \rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

Zeigen Sie, dass A stetig ist.

Aufgabe 1.9
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Überlegen Sie sich, dass das folgende Randwertproblem für $f \in L_2(U)$ eine eindeutige, schwache Lösung besitzt

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \text{ in } U, \\ u = 0, \text{ auf } \partial U \end{cases} \tag{3}$$

Aufgabe 1.10
Überlegen Sie sich, dass es keine offenen Mengen $U_i \subset \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$ geben kann, sodass $\mathbb{Q} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$.

Aufgabe 1.11
Seien X, Y Banachräume, X reflexiv, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) T ist kompakt

(b) Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt $\Rightarrow$ $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist präkompakt.

(c) $x_k \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_k \to Tx$.

(d) $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow$ es existiert eine Teilfolge x_{k_j} und ein $y \in Y$, sodass $Tx_{k_j} \to y$.

(e) TA ist kompakt für alle $A \in \mathcal{L}(X)$.

Aufgabe 1.12
Zeigen Sie, dass $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ nicht reflexiv ist.

Aufgabe 1.13
Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(f_k)_k \subset L_3(\mathbb{R})$, die nicht stark in $L_3(\mathbb{R})$ konvergiert, aber so dass $f_k \rightharpoonup 0$ in $L_3(\mathbb{R})$ und $f_k \to 0$ punktweise fast überall. Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe 1.14
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $A \in \mathcal{L}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Sein $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge mit $\|x_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$A(x_n) - \lambda x_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Dann ist $\lambda \in \sigma(A)$.

Aufgabe 1.15
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein unendlich dimensionaler Banachraum und sei $x_0 \in X$, $\xi_0 \in X'$ mit $\xi_0(x_0) \neq 0$. Man definiere $A \in \mathcal{L}(X)$ durch

$$A(x) := \xi_0(x)x_0 \qquad \forall x \in X.$$

Zeigen Sie, dass $A^2 = A$ genau dann, wenn $\xi_0(x_0) = 1$ und bestimmen Sie $\sigma(A)$.

Aufgabe 1.16

a) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $D' \subset X'$ dicht bezüglich $\|\cdot\|_{X'}$. Sei weiterhin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine beschränkte Folge, die für alle $f \in D'$ erfüllt

$$f(x_n) \to f(x) \qquad (n \to \infty).$$

Zeigen Sie, dass dann schon $x_n \rightharpoonup x$.

b) Es sei $1 < p < \infty$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_p^{\mathbb{K}}$ eine Folge. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) $z_n \rightharpoonup z$ in ℓ_p.

ii) Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $z_n^j \to z^j$ $(n \to \infty)$.

Aufgabe 1.17

Sei V ein reeller Vektorraum und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ eine schwach konvergente Folge mit schwachem Grenzwert $v \in V$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(w_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset V$ existiert, sodass

(a) $w_j \to v$ stark und

(b) jedes w_j ist eine endliche Konvexkombination von $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, d.h.

$$w_j = \sum_{n=1}^{N_j} \alpha_n^j v_n, \qquad \text{mit } a_n^j \geq 0, \sum_{n=1}^{N_j} \alpha_n^j = 1.$$

Aufgabe 1.18

Sei X ein normierter Raum und $V \subseteq X$ ein Untervektorraum. Weiterhin sei $h \in V'$. Zeigen Sie, dass die Menge der Hahn-Banach Fortsetzungen von h konvex ist.

Aufgabe 1.19

Beweisen Sie die folgenden Aussagen

(a) Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $A \subset V$ schwach folgenabgeschlossen. Dann ist A stark (folgen)abgeschlossen.

(b) Im normierten Vektorraum V sei $A \subset V$ eine nicht leere Teilmenge derart, dass für jedes $\phi \in V'$ die Menge $\phi(A)$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass A dann in V beschränkt ist.