Aufgabe 1 (Artin-Schreier-Theorie). Moritz, Josua **(4 Punkte)**

Sei K von positiver Charakteristik p. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\wp\colon K^{\text{sep}} \to K^{\text{sep}}, x \mapsto x^p - x$, ist ein surjektiver Homomorphismus von G_K-Moduln mit Kern $\mathbb{F}_p$.

G_K-Hom:

$\wp(\sigma(x)) = \sigma(x)^p - \sigma(x) = \sigma(x^p - x) = \sigma \circ \wp(x)$

Es gilt außerdem

$f = X^p - X - a \in K^{sep}[X]$ separabel, da

$f' = p \cdot X - 1 = -1$.

Insbesondere $\exists\ \alpha \in K^{sep}$ mit $f(a) = 0 \Rightarrow a = \alpha^p - \alpha$

$\Rightarrow \wp(\alpha) = a \Rightarrow \wp$ surjektiv.

$\ker \wp = \{ x \in K^{sep} : x^p - x = 0 \}$

Über einem Körper hat $x^p - x$ höchstens p Nullstellen

Für $x \in \mathbb{F}_p$ gilt aber $x^p - x \Rightarrow \ker \wp = \mathbb{F}_p$ $\boxtimes$

(b) Es ist

$$H^i(G_K,\mathbb{Z}/p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p & (i=0) \\ K/\wp(K) & (i=1) \\ 0 & (i\geq 2). \end{cases}$$

$$0 \to \mathbb{Z}/p \to K^{sep} \to K^{sep} \to 0$$

$$0 \to \mathbb{Z}/p^{G_K} \to (K^{sep})^{G_K} \to (K^{sep})^{G_K} \to H^1(G_K,\mathbb{Z}/p) \to H^1(G_K, K^{sep}) \to H^1(G_K, K^{sep}) \to H^2(G_K,\mathbb{Z}/p) \to H^2(G_K,K^{sep}) \to \dots$$

$\mathbb{Z}/p^{G} = \mathbb{Z}/p$, da $\mathbb{Z}/p \subset K$

$(K^{sep})^{G_K} = (K^{sep})^{Gal(K^{sep}/K)} = K$ nach Ag 1

Nach VL gilt $H^n(G_K, K^{sep}) = 0 \quad \forall n \geq 1$

$$0 \to \mathbb{Z}/p \to K \xrightarrow{x \mapsto x^p - x} K \to H^1(G_K,\mathbb{Z}/p) \to 0 \to 0 \to H^2(G_K,\mathbb{Z}/p) \to 0 \to 0 \dots$$

$\Rightarrow$ $\underline{H^0(G_K,\mathbb{Z}/p) = \mathbb{Z}/p}$

$\Rightarrow$ $K/\ker(K \to H^1(G_K,\mathbb{Z}/p)) \cong \underline{H^1(G_K,\mathbb{Z}/p)}$

$\cong K/\mathrm{im}(K \xrightarrow{\wp} K)$

$\cong \underline{K/\wp(K)}$

$\Downarrow$ $\underline{H^n(G_K,\mathbb{Z}/p) = 0 \quad \forall n \geq 2}$

Aufgabe 2 (Kummer-Theorie). **(8 Punkte)**

Es existiere eine primitive n-te Einheitswurzel $\zeta_n \in K$ für ein zu $\mathrm{char}(K)$ teilerfremdes $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mu_n \subset K^\times$ die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln. Dann existieren Isomorphismen

$$\phi\colon\ \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}^1(G_K, \mu_n) \xrightarrow{\cong} K^\times/(K^\times)^n.$$

Für $x \in K^\times$ und $\alpha = \phi^{-1}([x]) \in \mathrm{H}^1(G_K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Der}(G_K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\mathrm{IDer}(\mathrm{G_K}, \mathbb{Z}/\mathrm{n}\mathbb{Z})$ sei $f \in \mathrm{Der}(G_K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ein Repräsentant von α. Zeigen Sie:

$\| \ \mathrm{Hom}(G_K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ $\quad \| \ 0$, da $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ triviales G_K-Modul

(a) Es ist $\ker(f)$ ein offener Normalteiler von G_K und es existiert ein Isomorphismus

$$G_K/\ker(f) \xrightarrow{\cong} d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \quad (\subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

für einen geeigneten Teiler d von n.

$G_K/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f) \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \# G_K/\ker(f) = \#\mathrm{im}(f) \leq \#\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = n \Rightarrow (G_K : \ker(f)) \leq n.$

Kerne sind Normalteiler, außerdem ist $\ker(f)$ eine Untergruppe von endlichem Index in der proendlichen Gruppe G_K und damit offen.

$G_K/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f) \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{Z}[G_K]$-Untermodul,

insb. $\mathbb{Z}$-Untermodul,

insb. Untergruppe,

also $e := \#\mathrm{im}(f) \mid n = \#\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $\quad d := \frac{n}{e}$

$\Rightarrow \mathrm{im}(f) \cong d \cdot \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(b) Es ist $(K^{\mathrm{sep}})^{\ker(f)} = K(\sqrt[n]{x})$ und der zu $d + n\mathbb{Z}$ gehörige Erzeuger der zyklischen Gruppe $G_K/\ker(f)$ ist der Körperautomorphismus

$$K(\sqrt[n]{x}) \to K(\sqrt[n]{x}), \quad \sqrt[n]{x} \mapsto \zeta_n^d \cdot \sqrt[n]{x}.$$

$\tilde{K} := (K^{\mathrm{sep}})^{\ker(f)}$

$\sigma \in \ker(f) \Leftrightarrow f(\sigma) = 0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K) \cong d \cdot \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, insb. zyklisch.

Nach Alg 1, 4.66 gilt daher $\tilde{K} = K(\sqrt[n]{c})$ für $c \in K^\times$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^0(\mu_n) \arrow[r] \arrow[d] & C^0(K^\times) \arrow[r, "(\,)^n"] \arrow[d] & C^0(K^\times) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^1(G_K, \mu_n) \arrow[r] & C^1(G_K, K^\times) \arrow[r] & C^1(G_K, K^\times) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\wr$

$$\begin{tikzcd}
& & \sqrt[n]{x} \arrow[r, mapsto] & x & \\
0 \arrow[r] & \mu_n \arrow[r] \arrow[d] & K^\times \arrow[r, "(\,)^n"] \arrow[d] & K^\times \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Abb}(G_K, \mu_n) \arrow[r] & \mathrm{Abb}(G_K, K^\times) \arrow[r] & \mathrm{Abb}(G_K, K^\times) \arrow[r] & 0 \\
& \left(\sigma \mapsto \frac{\sigma(\sqrt[n]{x})}{\sqrt[n]{x}}\right) & \left(\sigma \mapsto \frac{\sigma(\sqrt[n]{x})}{\sqrt[n]{x}}\right) \arrow[l, mapsto] & 0 \arrow[l, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \sigma(\sqrt[n]{x})/\sqrt[n]{x} \in \mu_n \Rightarrow \sigma(\sqrt[n]{x}) = \zeta \cdot \sqrt[n]{x}$ für $\zeta \in \mu_n$

Wir fassen f auf als Element von $\mathrm{Abb}(G_K, \mu_n)$. Dann gilt

$\sigma \in \ker(f) \Rightarrow \sigma(\sqrt[n]{x}) = 1 \cdot \sqrt[n]{x}$

$\Rightarrow K(\sqrt[n]{x}) \subset \tilde{K} = K(\sqrt[n]{c})$ für $c \in K^\times$

$\Rightarrow c(K^\times)^n = x(K^\times)^n$, also OE $\tilde{K} = K(\sqrt[n]{x})$

Wegen der Identifikation $\begin{array}{l} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mu_n \\ 1+n\mathbb{Z} \longmapsto \zeta_n \end{array}$ gilt

$\underline{d+n\mathbb{Z} \longmapsto \zeta_n^d}$, insb. $d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mu_n^d$

Anwenden $\begin{array}{l} G_K/\ker(f) \longrightarrow \mu_n^d \\ \sigma \ker(f) \longmapsto \frac{\sigma(\sqrt[n]{x})}{\sqrt[n]{x}} \end{array}$

Für das zu ζ_n^d korrespondierende σ gilt daher $\sigma(\sqrt[n]{x}) = \zeta_n^d \sqrt[n]{x}$

(c) Für eine Zwischengruppe $(K^\times)^n \subseteq \Delta \subseteq K^\times$ ist $K(\sqrt[n]{\Delta})$ eine abelsche Erweiterung von K vom Exponenten n und es ist $\mathrm{Gal}(K(\sqrt[n]{\Delta})/K) \cong \mathrm{Hom}(\Delta/(K^\times)^n, \mu_n)$.

Sei S ein Vertretersystem von $\Delta/(K^\times)^n$. Dann ist

$K(\sqrt[n]{\Delta}) = K((\sqrt[n]{s})_{s\in S})$.

Es gilt $K(\sqrt[n]{s_1}) \cap K(\sqrt[n]{s_2}) = K$, da $s_1(K^\times)^n \cap s_2(K^\times)^n = \{0\}$

Insbesondere können wir mit Abg 7 folgern: $\mathrm{Gal}(K(\sqrt[n]{\Delta})/K) = \prod_{s\in S} \mathrm{Gal}(K(\sqrt[n]{s})/K)$

also ist $K(\sqrt[n]{\Delta})$ abelsch und es gilt $\mathrm{Gal}(K(\sqrt[n]{s})/K) = \langle \sigma : \sqrt[n]{s} \mapsto \zeta_n^d \sqrt[n]{s} \rangle$.

Betrachte

$e : \mathrm{Gal}(K(\sqrt[n]{\Delta})/K) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Delta/(K^\times)^n, \mu_n)$

$\sigma \longmapsto \left(s \longmapsto \frac{\sigma(\sqrt[n]{s})}{\sqrt[n]{s}}\right)$.

Nach (5) ist e wohldefiniert.

Betrachte $\varphi : \mathrm{Hom}(\Delta/(K^\times)^n, \mu_n) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K(\sqrt[n]{\Delta})/K)$

$(s \mapsto \zeta_s) \longmapsto \sigma : \sqrt[n]{s} \mapsto \zeta_s \sqrt[n]{s}$. $\forall s$

Wegen $(\zeta_s \sqrt[n]{s})^n - s = 0 \; \forall s$ ist das nach Abg 7 wohldefiniert. Insb. erhalten wir den geforderten Iso. $\boxed{6}$

(d) Der Körper $K(\sqrt[n]{K^\times}) := K(\sqrt[n]{x} \mid x \in K^\times)$ ist das Kompositum aller zyklischen Erweiterungen von K, deren Grad n teilt.

Jede zyklische Erweiterung von K hat die Form $K(\sqrt[d]{c})$ für $c \in K^\times$ und $d \mid n$, da für alle solche d eine primitive d-te Einheitswurzel in K liegt (siehe Abg 7).

Offensichtlich ist das Kompositum solcher Erweiterungen in $K(\sqrt[n]{K^\times})$ enthalten.

$K(\sqrt[n]{K^\times})$ ist aber selbst Kompositum von zyklischen Erweiterungen von K, deren Grad n teilt.

$\boxed{2}$

Aufgabe 3. **(4 Punkte)**

Sei $K^{\mathrm{ab}} := (K^{\mathrm{sep}})^{\overline{[G_K,G_K]}}$ der Fixkörper des Abschlusses der Kommutatorgruppe von G_K. Ferner sei $L := K(\sqrt[n]{K^\times})$. Zeigen Sie:

(a) Die Erweiterung K^{ab}/K is galoissch und K^{ab} ist das Kompositum aller endlichen abelschen Erweiterungen von K in K^{sep}.

1 z.z. $\overline{[G_K, G_K]}$ Normalteiler.

Es gilt $[G_K,G_K] \lhd G_K$

betrachte also die top. Grp $G_K/[G_K,G_K]$:

Dort ist $\overline{\{1\}} = \overline{[G_K,G_K]} \lhd G_K/[G_K,G_K]$ nach Alg II.

Nach Alg I gilt $\overline{[G_K,G_K]} \lhd G_K/[G_K,G_K] \Leftrightarrow \overline{[G_K,G_K]} \lhd G_K$ ✓

2. Weiter ist $G_K/[G_K,G_K]$ abelsch und als Untergruppe auch $G_K/\overline{[G_K,G_K]}$. Daher sind alle Teilerweiterungen

$(K^{\mathrm{sep}})^{\overline{[G_K,G_K]}} / \tilde{K} / K$ ebenfalls abelsch.

Daher können $(K^{\mathrm{sep}})^{\overline{[G_K,G_K]}}$ als Kompositum endlicher abelscher Erweiterungen schreiben.

3. Sei andererseits $\tilde{K}$ eine beliebige abelsche Erweiterung von K in K^{sep}.

Dann ist $\tilde{G} := \mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$ abelsch und $\exists \underset{\text{abgeschlossen}}{N} \lhd G_K$ mit $G_K/N = \tilde{G}$

$[G_K,G_K]$ ist der kleinste Normalteiler, sodass $G_K/[G_K,G_K]$ abelsch ist.

$\Rightarrow [G_K,G_K] \subset N$. Da N abgeschlossen ist, folgt $\overline{[G_K,G_K]} \subset N$.

$\Downarrow$

$K^{\mathrm{ab}} = (K^{\mathrm{sep}})^{\overline{[G_K,G_K]}} \supset (K^{\mathrm{sep}})^N = \tilde{K}$

Folglich ist auch das Kompositum aller endlichen abelschen Erweiterungen in K^{ab} enthalten.

$\square$

(b) Unter dem Isomorphismus $(G_K)^{\mathrm{ab}} \cong \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ entspricht die Untergruppe $(G_K^{\mathrm{ab}})^n \subset G_K^{\mathrm{ab}}$ der Untergruppe $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/L) \subset \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$.

$$\mathrm{Gal}(L/K) \cong \mathrm{Hom}(K^\times/(K^\times)^n, \mu_n) .$$

$$G_n^{ab} \cong H_1(G_n, \mathbb{Z}) \quad , \quad G_n^{ab} \cong H^1(G_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\vee$$

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0 \qquad \text{SES}$$

$\Rightarrow$ LES

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot n"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[dlll, bend left] \\
H^1(G_n, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(G_n, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(G_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] \arrow[dll, bend left] & \\
G_n^{ab} \arrow[r, "(\ )^n"] & G_n^{ab} \arrow[r] & \mathrm{Hom}(G_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \\
H^2(G_n, \mathbb{Q}) \arrow[d, equal] & & & \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad G_n^{ab}/(G_n^{ab})^n \cong \mathrm{Hom}(G_n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

ne, kann nur Homologie, nicht Kohomologie