AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

12. November 2021

Modulformen 1 – Übungsblatt 4

Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1 (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde bereits behandelt, dass es keine nicht-verschwindende Modulform negativen Gewichts geben kann (Korollar 2.19). Wir möchten hier einige weitere Aussagen über Modul- und Spitzenformen beweisen.
Sei also $f \in M_k$ eine beliebige Modulform und $g \in M_k \setminus S_k$ eine beliebige Nichtspitzenform vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt kein f vom Gewicht 2 mit $f \not\equiv 0$.

(b) Für den Fall $k = 4$ sind alle Nullstellen von f einfach und an den (unter $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) zu ϱ äquivalenten Punkten zu finden.

(c) g hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{H}$.

(d) Für jedes $h \in M_k$ existiert eine Spitzenform g_0 und eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit

$$h(z) = g_0(z) + c \cdot g(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{H} .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Unter einer **Modulfunktion** verstehen wir eine meromorphe Modulform vom Gewicht 0. Weisen Sie für eine nicht-konstante Modulfunktion f folgendes nach:

(a) f hat in ${}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathbb{H}} \cup \{\infty\}$ gleich viele Nullstellen wie Pole.

(b) f nimmt jeden komplexen Wert in ${}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\backslash^{\mathbb{H}} \cup \{\infty\}$ gleich oft an.

(c) Folgern Sie, dass jede beschränkte Modulfunktion eine Konstante ist.

Hinweis zu (a) und (b):
Alle Stellen werden mit ihren Vielfachheiten und der Gewichtung aus der Valenzformel gezählt.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sie haben die Valenzformel (Satz 2.17) und den dazugehörigen, vollständigen Beweis für $0 \not\equiv f \in V_k$ mit Wirkung von $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ kennengelernt. Wir betonen hier eine kleine Ungenauigkeit im Beweis aus der Vorlesung und weisen deshalb nach:

$$\mathrm{ord}_\Gamma(f; z) = \mathrm{ord}_\Gamma(f; M\langle z \rangle) \text{ für alle } z \in \mathbb{H} \text{ und } M \in \Gamma .$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Die verallgemeinerte Valenzformel für Kongruenzuntergruppen (Satz 2.18) wurde in der Vorlesung nur erwähnt und ohne Beweis eingeführt. In dieser Aufgabe behandeln Sie einen Teilaspekt, der bei dieser Beweisführung hineinfließt.

Seien $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ zwei Kongruenzuntergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $f \in V_k(\Gamma) \subseteq V_k(\tilde{\Gamma})$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Seien weiter $\tilde{\mathfrak{s}} \in \mathrm{Cusps}(\tilde{\Gamma})$ und $\mathfrak{s}$ das Bild von $\tilde{\mathfrak{s}}$ unter der natürlichen Abbildung $\mathrm{Cusps}(\tilde{\Gamma}) \to \mathrm{Cusps}(\Gamma)$. Zeigen Sie:

(a) $h_\Gamma(\mathfrak{s}) \mid h_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})$ und $\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s}) \mid \tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})$.

(b) $\dfrac{\mathrm{ord}_{\tilde{\Gamma}}(f; \tilde{\mathfrak{s}})}{\tilde{h}_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{\mathfrak{s}})} = \dfrac{\mathrm{ord}_\Gamma(f; \mathfrak{s})}{\tilde{h}_\Gamma(\mathfrak{s})}$.

Abgabe: online über MaMpf bis Freitag, den 19. November 2021, spätestens um 12 Uhr s. t.