UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 7. Dezember 2021

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE I
ÜBUNGSAUFGABEN 8

DEADLINE: Do. 16. Dez. 2021, 15:00.

1. Die geschlossene orientierte Fläche S_g vom Geschlecht $g = 0, 1, 2, \ldots$ erhält man, indem man an die Sphäre S^2 g "Henkel" $S^1 \times I$ entlang des Randes anklebt, nachdem man vorher entsprechend kleine disjunkte offene Kreisscheiben aus der Sphäre entfernt hat. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe von S_g. (*Hinweis:* Repräsentieren Sie die Fläche durch ein Polygon mit Identifizierungen der Kanten.) Berechnen Sie auch die Abelisierung $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$ dieser Gruppen. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Abelisierungen, dass S_g und S_h nicht homotopieäquivalent sind, wenn $g \neq h$.
2. Sei X die Vereinigung der Einheitssphäre S^2 im $\mathbb{R}^3$ mit einem Geradensegment, das Nord- und Südpol verbindet. Berechnen Sie $\pi_1(X)$. Sei Y die Vereinigung der Einheitssphäre mit einer Kreisscheibe vom Radius 1, die in der x, y-Ebene (horizontalen Ebene) liegt. Berechnen Sie $\pi_1(Y)$.
3. Sei $\mathbb{R}P^2$ überdeckt durch offene Mengen $U_1, \ldots, U_n$, wobei jedes U_i homöomorph zur Ebene $\mathbb{R}^2$ ist. Setze $V_i = U_1 \cup \cdots \cup U_i$ für $1 \leq i < n$. Zeigen Sie, dass es ein $i \leq n$ gibt, sodass $U_i \cap V_{i-1}$ leer oder nicht zusammenhängend ist.
4. Zeigen Sie, dass für den Randoperator im singulären Kettenkomplex eines Raums die Identität $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ gilt.