# Funktionalanalysis - Übungsblatt 8

Wintersemester 2023

Dr. Jan Fuhrmann, Christian Düll

**Abgabe:** 15. Dezember 2023, in die Zettelkästen 55/56 oder online über Mampf

**Aufgabe 8.1** 4 Punkte

[2.5+1.5 Punkte]

(a) Für $c > 0$ definieren wir

$$M_c := \left\{ f \in C^1([0,1]) \mid \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx + \int_0^1 |f'(x)|^2 \, dx \leq c \right\}$$

Zeigen Sie, dass $\overline{M}_c$ kompakt ist in $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Sei $V$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ und es gebe ein $c > 0$ mit

$$\forall f \in V \, \exists \, a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) : |f(x) - f(y)| \leq c\|f\|_\infty \|x - y\|^a. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $V$ endlich dimensional ist.

**Aufgabe 8.2** 4 Punkte

[2+2 Punkte]

Seien $X, Y$ Banachräume. Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ heißt *beschränkt von unten*, falls ein $c > 0$ existiert, sodass

$$\|Tx\| \geq c\|x\| \qquad \forall x \in X.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen

(a) Ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ von unten beschränkt, so ist $\operatorname{im}(T) \subset Y$ abgeschlossen.

(b) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(X,X)$ ist invertierbar genau dann, wenn $T$ von unten beschränkt ist und $\operatorname{im}(T) \subset Y$ dicht liegt.

**Aufgabe 8.3** 4 Punkte

[1.5 + 1 + 1.5 Punkte]

Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein linearer Operator.

(a) Zeigen Sie, dass $T$ stetig ist, falls

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \qquad \forall \, x, y \in H. \tag{2}$$

Nehmen Sie nun an, dass $T$ stattdessen die folgende Bedingung erfülle

$$\langle Tx, x \rangle \geq 0 \qquad \forall \, x \in H \tag{3}$$

b) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $T$ Bedingung (2) erfüllt und somit stetig ist.

c) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $T$ stetig ist aber im Allgemeinen (2) nicht erfüllt.

*Hinweis: Satz vom abgeschlossenen Graphen.*

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 8.4** 4 Punkte

Seien $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ zwei Banachräume und $T \in \mathcal{L}(V, W)$ mit $\mathrm{im}(T)$ abgeschlossen und $\dim \ker(T) < \infty$. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf $V$, die von $\|\cdot\|_V$ dominiert wird, d.h. es existiert eine Konstante $M > 0$, sodass $\|x\| \leq M\|x\|_V$ für alle $x \in V$. Zeigen Sie, dass dann ein $C > 0$ existiert, sodass

$$\|x\|_V \leq C(\|Tx\|_W + \|x\|) \qquad \forall x \in V.$$

*Hinweis: Argumentieren Sie per Widerspruch und schauen Sie sich den Beweis von der offenen Abbildung noch einmal an.*