UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 19. Januar 2022

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE I
ÜBUNGSAUFGABEN 11

DEADLINE: Do. 27. Jan. 2022, 15:00.

1. Es sei Σ_g eine geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ (eine Sphäre mit g Henkeln). Berechnen Sie die Homologie von Σ_g.
   Hinweis: Dies wurde in der Vorlesung für $g = 0$ und $g = 1$ schon gemacht. Verwenden Sie zelluläre Homologie.
2. Sei X ein CW-Komplex mit Skeletten X^n, $n \geq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Eilenberg-Steenrod Axiome, dass die singuläre Homologiegruppe $H_n(X^n, X^{n-1})$ isomorph zur n-ten zellulären Kettengruppe $C_n^{\mathrm{zell}}(X)$ ist.
3. Zeigen Sie, dass unter der Identifizierung $C_n^{\mathrm{zell}}(X) \cong H_n(X^n, X^{n-1})$ der vorhergehenden Aufgabe der in der Vorlesung definierte Randoperator $\partial_n : C_n^{\mathrm{zell}}(X) \to C_{n-1}^{\mathrm{zell}}(X)$ übereinstimmt mit der Komposition

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}),$$

   wobei δ der Verbindungshomomorphismus in der langen exakten Homologiesequenz des Paares (X^n, X^{n-1}) ist und i_* die von der Inklusion $i : (X^{n-1}, \varnothing) \hookrightarrow (X^{n-1}, X^{n-2})$ induzierte Abbildung.