

Theoretische Physik I: Punktmechanik und mathematische Methoden

Matthias Bartelmann
Institut für Theoretische Astrophysik
Universität Heidelberg



Herzlichen Dank an viele Studentinnen und Studenten, Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter, Kolleginnen und Kollegen, die dieses Vorlesungsskript kommentiert und korrigiert haben und damit sehr dazu beigetragen haben, es zu verbessern und verständlicher zu machen! Besonders erwähnen möchte ich Dr. Christian Angrick, der das gesamte Skript durchgearbeitet und viele teils erhebliche Verbesserungen angebracht hat.

Dieses Skript ging teilweise in ein Lehrbuch ein¹. Einige Abbildungen sind daraus entnommen. Sie werden durch die Quellenangabe „TP“ gekennzeichnet.

¹Bartelmann M. et al., Theoretische Physik. Heidelberg (Springer) 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Die Newtonschen Axiome	1
1.1	Einführung	1
1.2	Newton'sche Axiome	4
1.3	Differentialgleichungen I	5
1.4	Fallbewegungen	9
2	Mathematische Grundlagen	17
2.1	Differentialgleichungen II	17
2.2	Taylor-Reihen	21
2.3	Einfache Anwendungen des Taylor'schen Satzes	23
2.4	Vektoren I	25
3	Impuls, Drehimpuls und Energie	31
3.1	Vektoren II	31
3.2	Koordinaten und Bezugssysteme	35
3.3	Impuls und Drehimpuls	38
3.4	Energie	40
4	Bewegung in drei Dimensionen	45
4.1	Kinematik in drei Dimensionen	45
4.2	Kurvenintegrale	50
4.3	Differentialoperatoren	51
4.4	Energiesatz in drei Dimensionen	55
5	Koordinatentransformationen	59

5.1	Darstellung durch Matrizen	59
5.2	Determinanten und Matrixinversion	61
5.3	Orthonormale Transformationen	64
5.4	Physikalische Bedeutung	67
6	Systeme von Massenpunkten	71
6.1	Konservative Kraftfelder	71
6.2	Der Satz von Stokes	74
6.3	Systeme von N Massenpunkten	76
6.4	Das Zweikörperproblem	82
7	Bewegung im Zentralfeld	85
7.1	Krummlinig-orthogonale Koordinaten	85
7.2	Keplerproblem: Bewegung im Zentralfeld	90
7.3	Keplerproblem: Arten der Bewegung	92
7.4	Keplerproblem: Form der Bahnen	96
8	Stöße und Streuung	103
8.1	Stöße und Streuung	103
8.2	Energieübertrag bei elastischer Streuung	107
8.3	Streuquerschnitt	109
8.4	Mechanische Ähnlichkeit und der Virialsatz	113
9	Kräfte in beschleunigten Bezugssystemen	117
9.1	Zeitabhängige Transformationen	117
9.2	Infinitesimale Transformationen	119
9.3	Bewegung auf der rotierenden Erde	121
9.4	Das reduzierte Dreikörperproblem	124
10	Bewegung starrer Körper	129
10.1	Die Euler-Winkel	129
10.2	Tensoren	133

10.3 Lineare Abbildungen und ihre Diagonalisierung	136
10.4 Der Trägheitstensor	139
11 Trägheitstensor und Trägheitsmomente	143
11.1 Volumenintegrale	143
11.2 Koordinatentransformationen	145
11.3 Drehimpuls und Trägheitsmomente starrer Körper . . .	147
11.4 Der Gauß'sche Satz	151
12 Harmonische Schwingungen	155
12.1 Der Harmonische Oszillator I	155
12.2 Komplexe Zahlen	158
12.3 Komplexe Darstellung harmonischer Schwingungen .	162
12.4 Der harmonische Oszillator II	163
13 Pendelschwingung und Resonanz	169
13.1 Mathematisches und physikalisches Pendel	169
13.2 Erzwungene Schwingungen	172
13.3 Resonanz	176
13.4 Allgemeine Lösung für erzwungene Schwingungen .	180
A Stabilität der Lagrange-Punkte $L_{4,5}$	183
A.1 Effektives Potential in der Umgebung von $L_{4,5}$	183
B Eigenschwingungen eines gekoppelten Pendels	187
B.1 Kinetische und potentielle Energie	187
B.2 Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen	189
C Schwingungen gekoppelter Systeme	191
C.1 Bewegungsgleichungen	191
C.2 Normalkoordinaten	194
C.3 Stabilität	197
C.4 Schwingungen eines linearen, dreiatomigen Moleküls .	199

D Grundlagen der Gruppentheorie und Galilei-Invarianz	203
D.1 Grundlagen der Gruppentheorie	203
D.2 Lie-Gruppen und Generatoren	206
D.3 Galilei-Invarianz	209
D.4 Räumliche Translation und Impuls	211

Kapitel 1

Die Newtonschen Axiome

1.1 Einführung

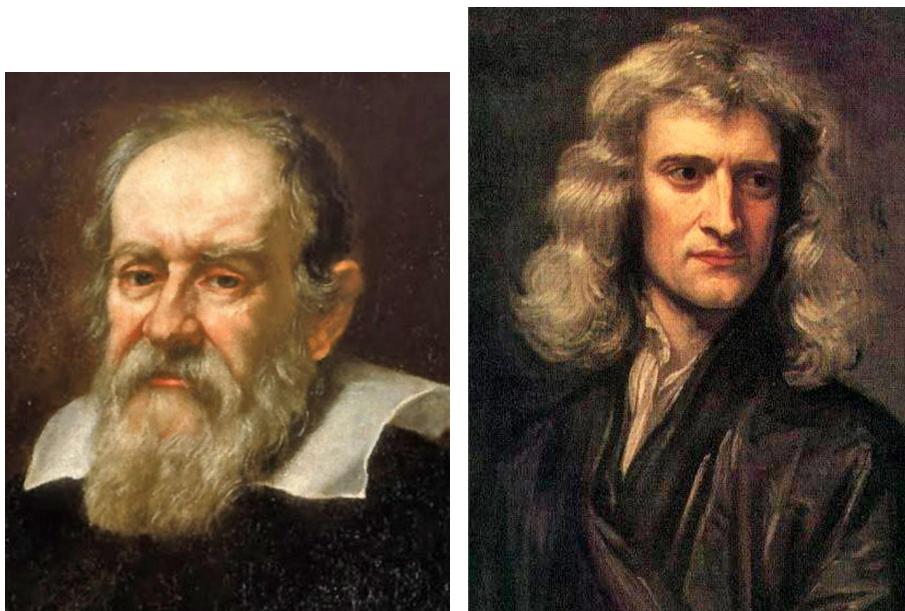


Abb. 1.1 Galileo Galilei (links), 1564–1642; Sir Isaac Newton, 1643–1727.
Quelle: Wikipedia

Physik ist eine Erfahrungswissenschaft, die Vorgänge in der (meist unbelebten) Natur zu quantifizieren und auf Gesetzmäßigkeiten zurückzuführen sucht. Theoretische Physik sucht die Einheit hinter der Vielfalt, die möglichst fundamentalen Gesetze, die der Vielfalt der Erfahrungstatsachen zugrunde liegen. Diese Gesetze nehmen die Form mathematischer Gleichungen an, in denen die mathematischen Symbole semantisch an die Stelle physikalischer Größen treten. Die Gesetze der Physik müssen prüfbare Vorhersagen erlauben.

Physikalischen Gesetzen liegen notwendigerweise *Idealisierungen* zu grunde, weil wesentliche von unwesentlichen Eigenschaften physika-

lischer Systeme unterschieden werden müssen. Erst durch geeignete Näherungen wird theoretische Physik überhaupt möglich, weil erst durch Näherungen Abgrenzungen physikalischer Systeme von ihrer Umwelt eingeführt werden können.

Theoretische Mechanik

Theoretische Mechanik beschreibt die Gesetze, nach denen sich Körper im Raum unter dem Einfluss von Kräften mit der Zeit bewegen. Kräfte werden als gegeben angenommen; ihre Ursache wird nicht untersucht.

Die theoretische Mechanik führt zu Begriffen und Methoden, die sich durch die gesamte theoretische Physik ziehen und vor allem für die Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie außerordentlich fruchtbar wurden.

Meilensteine in der geschichtlichen Entwicklung der klassischen Mechanik (im Unterschied zur Quantenmechanik) waren Galileo Galileis Fallversuche, Tycho Brahes Messungen der Marsbahn und deren gesetzmäßige Zusammenfassung durch Johannes Kepler sowie Sir Isaac Newtons Axiome und seiner Erklärung der Keplerschen Gesetze durch das Gravitationsgesetz. Weitere für die Entwicklung vor allem der analytischen Mechanik wichtige Personen waren Joseph Lagrange, Leonhard Euler, Jean Baptiste le Rond d'Alembert, William Hamilton und Emmy Noether.

Die klassische Punktmechanik kennt demnach eine „Vierheit“ von Objekten, nämlich Körper, Kräfte, Raum und Zeit. Die moderne Vereinheitlichung der Physik setzt fundamental an dieser Stelle ein. Die Feldtheorie, geschichtlich zuerst die Elektrodynamik, verknüpft Kräfte und Raum, die spezielle Relativitätstheorie verbindet Raum und Zeit, und die allgemeine Relativitätstheorie schließlich verknüpft Körper mit der Raum-Zeit-Struktur.

Körper werden idealisiert als Punkte bestimmter Masse. Ihre Ausdehnung ist sehr klein gegenüber den Dimensionen des gesamten betrachteten Systems, wobei „klein“ oder „groß“ höchst relative Begriffe sind. Ein System aus vielen Massenpunkten bewegt sich im Ganzen so, als würden die äußeren Kräfte an seinem Schwerpunkt angreifen. Ein fester Körper wird als System von Massenpunkten aufgefasst, deren Abstände untereinander konstant sind.

Kräfte sind die Ursachen der Änderung einer Bewegung und mathematisch genauer zu definieren. In der klassischen Mechanik wird angenommen, dass Kräfte instantan wirken, d.h. mit unendlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die klassische Mechanik nimmt die Kräfte als gegeben an und fragt nicht nach ihren Ursachen.

Die Lage von Körpern im dreidimensionalen *Raum* hat keinen absoluten Sinn, sondern muss relativ zu anderen Körpern, den *Bezugssystemen*,

angegeben werden. Der physikalische Raum wird als ein reeller, dreidimensionaler Vektorraum aufgefasst¹. Die momentane Lage eines Massenpunkts im Raum wird durch einen *Ortsvektor* \vec{x} angegeben. Seine Bahnkurve $\vec{x}(t)$ beschreibt, wie sich sein Ort zeitlich ändert. Die *Geschwindigkeit* \vec{v} ist die Änderung des Ortes mit der Zeit, dargestellt durch die Zeitableitung des Ortes,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} =: \dot{\vec{x}}(t) . \quad (1.1)$$

Generell bezeichnet ein Punkt über einem Funktionssymbol die Zeitableitung dieser Funktion.

Achtung Zur Ableitung einer vektorwertigen Funktion werden alle ihre Komponentenfunktionen abgeleitet. ◀

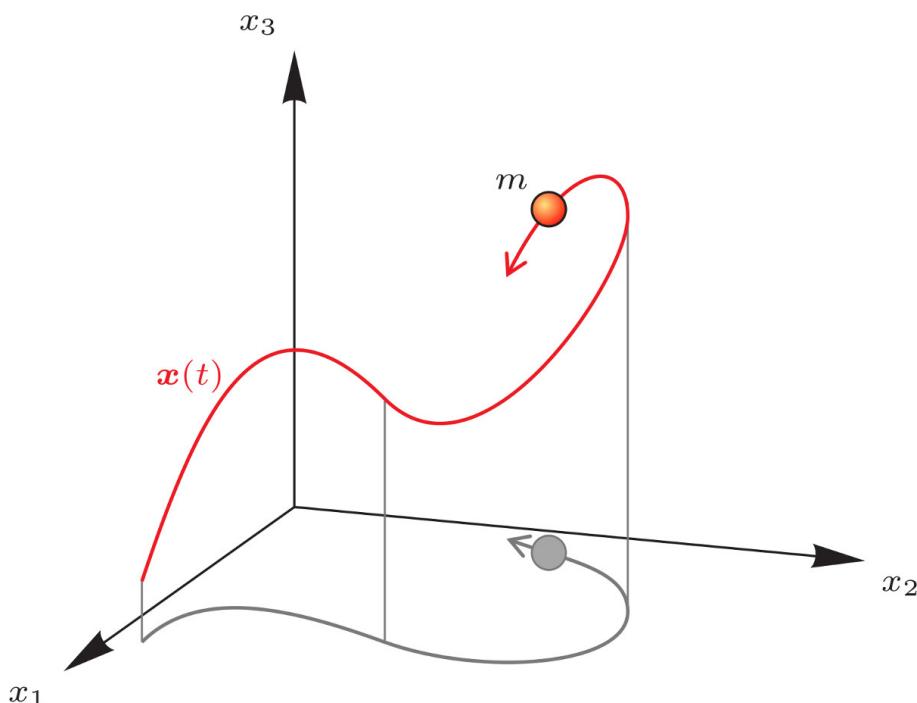


Abb. 1.2 Bahnkurve in einem kartesischen Koordinatensystem. Quelle: TP

Im Allgemeinen kann der Ursprung des Bezugssystems beliebig gewählt werden (Homogenität), und seine Achsen können beliebig orientiert werden (Isotropie). Als Bezugssysteme werden üblicherweise kartesische Koordinatensysteme gewählt.

Die *Zeit* spielt in der klassischen Mechanik die Rolle eines unabhängigen Ordnungsparameters. Der Nullpunkt der Zeit ist im Allgemeinen frei wählbar (Homogenität der Zeit).

In der klassischen Mechanik sind Raum und Zeit unabhängig von der Existenz von Körpern und ihrer Bewegung relativ zueinander gegeben. Sie sind in diesem Sinne absolut.

¹Streng genommen handelt es sich dabei um einen affinen Raum; dazu später mehr.

1.2 Newton'sche Axiome

1. Newton'sches Axiom

Trägheitsgesetz, *Lex Prima*: Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum nisi quatenus a viribus cogiter statum illum mutare.*

Postuliert wird damit die *Trägheit* eines Körpers, sein Beharrungsvermögen. Als „Bewegungsgröße“ wird das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit \vec{v} definiert, d.h. der *Impuls* $\vec{p} = m\vec{v}$. Die Begriffe „Masse“ und „Kraft“ bleiben zu definieren.

Damit besagt das Trägheitsgesetz:

$$\vec{p} = \text{konstant} \quad (1.2)$$

in Abwesenheit von Kräften, d.h. in diesem Fall ist der Impuls erhalten.

2. Newton'sches Axiom

Bewegungsgesetz, *Lex Secunda*: Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.*

Die Änderung der Bewegungsgröße ist die Zeitableitung des Impulses. Sei \vec{F} die Kraft, besagt das Bewegungsgesetz

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \quad \text{bzw.} \quad m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \quad (1.3)$$

bei konstanter Masse m . Dieses Axiom besagt, dass Bewegungsgleichungen in der Regel zweite Ableitungen des Ortes nach der Zeit enthalten.

Die Masse m ist hier die *träge* Masse, im Gegensatz zur *schweren* Masse, zu der die Gravitationskraft proportional ist. Experimente zeigen, dass beide unabhängig von der Zusammensetzung der betrachteten Körper gleich groß sind.

Kräfte werden definiert, indem man Messvorschriften angibt, die z.B. eine unbekannte Kraft mit der Gravitationskraft vergleichen. Kräfte addieren sich wie Vektoren.

3. Newton'sches Axiom

Reaktionsgesetz, *Lex Tertia*: Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.

Actio = reactio.

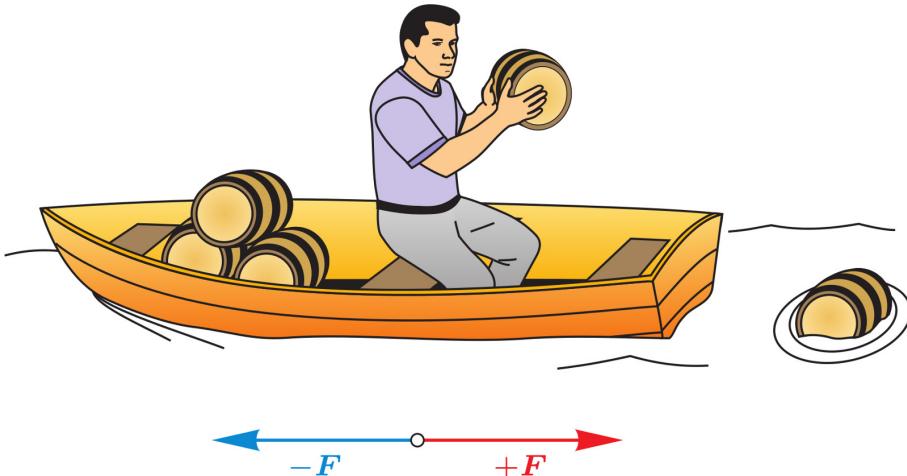


Abb. 1.3 Zum dritten Newton'schen Axiom. Quelle: TP

Die träge Masse wird sich später aufgrund der speziellen Relativitätstheorie als geschwindigkeitsabhängig erweisen. In der klassischen, nicht-relativistischen Mechanik wird sie als konstant vorausgesetzt.

Kräfte hängen im Allgemeinen vom Ort und von der Zeit ab, können aber auch von der Geschwindigkeit abhängen wie etwa die Lorentzkraft auf ein geladenes Teilchen im Magnetfeld.

Beispiele für Kräfte sind etwa die Gravitations- und die Coulombkraft, die beide indirekt proportional zum Abstandsquadrat sind (das ist eine notwendige Folge der Masselosigkeit der Austauschteilchen).

Offenbar setzt die Formulierung der Newtonschen Axiome eine geeignete Wahl der Einheiten voraus. Die *Proportionalität* von Impulsänderung und Kraft wird erst durch die geeignete Wahl der Einheit der Masse zu einer Gleichheit. Die *Proportionalität* von schwerer und träger Masse wird zu einer Gleichheit durch die Definition der Gravitationskonstante G .

Achtung Die Gleichheit von schwerer und träger Masse wird als Äquivalenzprinzip zur Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. ▶

1.3 Differentialgleichungen I

1.3.1 Definition und Klassifikation

Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Ableitungen einer oder mehrerer Funktionen nach einer oder mehreren Variablen enthalten. *Gewöhnliche* Differentialgleichungen beschreiben Funktionen einer unabhängigen Variablen, während *partielle* Differentialgleichungen von mehreren unabhängigen Variablen abhängen. Die *Ordnung* einer Differentialgleichung ist der Grad der höchsten auftretenden Ableitung. Wegen Newtons zweitem Axiom führen die Bewegungsgesetze der klas-

sischen Mechanik in der Regel auf gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in denen die unabhängige Variable die Zeit t ist.

Wenn die unbekannte Funktion $y(x)$ und alle ihre Ableitungen $y'(x)$, $y''(x)$ usw. höchstens linear in einer Differentialgleichung vorkommen, heißt die Gleichung selbst linear. Zum Beispiel ist

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 , \quad (1.4)$$

in der $p(x)$ und $q(x)$ bekannte Funktionen sind, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in x .

Das *Richtungsfeld* einer (gewöhnlichen) Differentialgleichung wird dadurch angegeben, dass in jedem Punkt der x - y -Ebene die Steigung $y'(x)$ angegeben wird. Linien gleicher Steigung heißen *Isoklinen*.

1.3.2 Lösungsmethoden: Trennung der Veränderlichen

Beginnen wir mit dem Beispiel des radioaktiven Zerfalls. Die Teilchenzahl $N(t)$ wird durch das Zerfallsgesetz

$$\dot{N}(t) = -\lambda N(t) \quad (1.5)$$

beschrieben, worin $\lambda > 0$ die Zerfallskonstante ist. Diese gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich lösen, indem man die Variablen N und t voneinander trennt,

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{N} = -\lambda dt . \quad (1.6)$$

In dieser Form kann die Gleichung einfach integriert werden,

$$\ln N = -\lambda t + C , \quad N(t) = e^{-\lambda t} e^C , \quad (1.7)$$

wobei C eine Integrationskonstante ist. Die Konstante C erlaubt es uns, eine *Anfangsbedingung* zu stellen. Soll bei $t = 0$ die Anzahl $N = N_0$ sein, folgt $e^C = N_0$ oder $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

Trennung der Variablen

Allgemein ist dieses Verfahren der Variablentrennung bei Gleichungen angebracht, die sich in die Form

$$g(y)y'(x) = f(x) \quad (1.8)$$

bringen lassen. Dann führt die Integration über x auf

$$\int g(y)y'(x)dx = \int g(y)dy = \int f(x)dx + C , \quad (1.9)$$

woraus dann implizit die Funktion $y(x)$ bestimmt werden kann.

Erinnern Sie sich an die Beziehung

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

und deren Beweis? Begründen Sie damit, dass

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

gilt.

1.3.3 Lösungsmethoden: Variation der Konstanten

Betrachten wir nun den etwas schwierigeren Fall, in dem Kerne der Sorte A in Kerne der Sorte B und diese dann in stabile Kerne der Sorte C zerfallen. Nach dem einfachen Zerfallsgesetz ist die Anzahl N_A der A -Kerne durch

$$N_A = N_{A0} e^{-\lambda_A t} \quad (1.10)$$

gegeben. Die Anzahl der Kerne B wird durch ihren Zerfall verringert, aber durch den Zerfall von A -Kernen erhöht,

$$\dot{N}_B = -\lambda_B N_B - \dot{N}_A = -\lambda_B N_B + \lambda_A N_{A0} e^{-\lambda_A t}. \quad (1.11)$$

Homogene und inhomogene Differentialgleichungen

Wir haben jetzt eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die Terme enthält, die nicht von y abhängen. Man bezeichnet solche Gleichungen als inhomogen und bringt gewöhnlich die homogenen und inhomogenen Teile auf verschiedene Seiten der Gleichung,

Im vorliegenden Fall besteht die Inhomogenität aus den von N_A abhängigen Termen der Gleichung,

$$\dot{N}_B + \lambda_B N_B = \lambda_A N_{A0} e^{-\lambda_A t}. \quad (1.12)$$

In so einem Fall verschafft man sich zunächst eine Lösung der homogenen Gleichung, also der Gleichung, die man erhält, wenn man die Inhomogenität auf der rechten Seite gleich Null setzt. Im Fall von (1.12) ist die Lösung das einfache Zerfallsgesetz

$$N_B(t) = N_{B0} e^{-\lambda_B t}. \quad (1.13)$$

Variation der Konstanten

Eine Lösung der inhomogenen Gleichung kann man sich oft dadurch verschaffen, dass man die Konstante N_{B0} nun als zeitabhängig auffasst, im gegenwärtigen Fall also durch $N_{B0} \rightarrow B(t)$ und

$$N_B(t) = B(t) e^{-\lambda_B t}. \quad (1.14)$$

Die Ableitung des so erhaltenen Ausdrucks nach der Zeit ist dann

$$\dot{N}_B(t) = \dot{B} e^{-\lambda_B t} - B \lambda_B e^{-\lambda_B t} = \dot{B} e^{-\lambda_B t} - \lambda_B N_B. \quad (1.15)$$

Eingesetzt in (1.12) lautet dann die zu lösende Differentialgleichung

$$(\dot{B} e^{-\lambda_B t} - \lambda_B N_B) + \lambda_B N_B = \lambda_A N_{A0} e^{-\lambda_A t}. \quad (1.16)$$

Die Differentialgleichung, die sich für B ergibt,

$$\dot{B} = \lambda_A N_{A0} e^{-(\lambda_A - \lambda_B)t}, \quad (1.17)$$

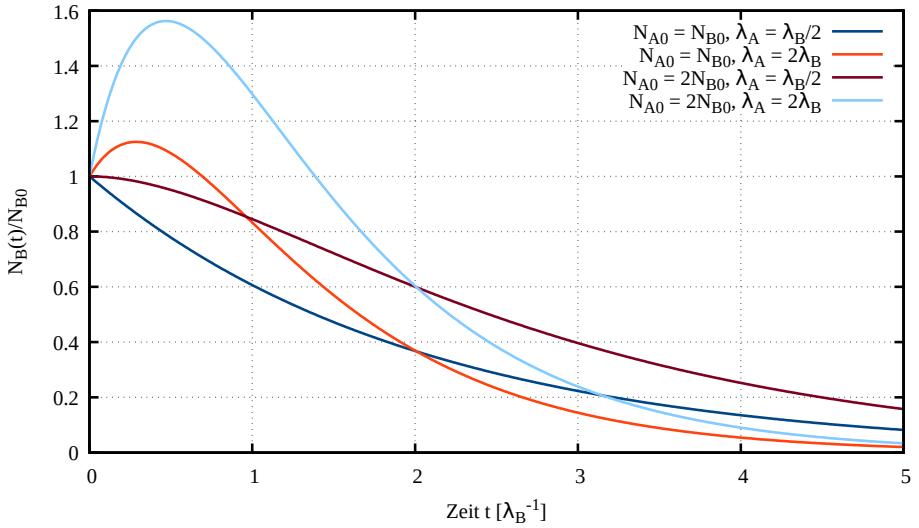


Abb. 1.4 Anzahl der B -Kerne unter verschiedenen Bedingungen

kann direkt integriert werden,

$$B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} e^{-(\lambda_A - \lambda_B)t} + C, \quad (1.18)$$

?

Führen Sie die Integration selbst aus, die auf (1.18) führt.

wobei C wieder eine Konstante ist, die wir noch festlegen können.

Gehen wir mit dem Ergebnis (1.18) zurück nach (1.14), folgt

$$N_B(t) = C e^{-\lambda_B t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} e^{-\lambda_A t}. \quad (1.19)$$

Die Konstante C ergibt sich nun wieder, indem wir willkürlich die Anzahl der B -Kerne bei $t = 0$ wählen. Sei also $N_B(t = 0) = N_{B0}$, dann erhalten wir

$$C + \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} = N_{B0} \quad \Rightarrow \quad C = N_{B0} - \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} \quad (1.20)$$

und daraus die endgültige Lösung

$$N_B(t) = N_{B0} e^{-\lambda_B t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}). \quad (1.21)$$

?

Betrachten Sie die Lösungen der Gleichung (1.21), die in Abb. 1.4 dargestellt sind. Aus welchem physikalischen Grund steigen manche der Kurven zuerst an, während andere nur abfallen?

Natürlich hat dieses Beispiel mit klassischer Mechanik nichts zu tun, aber es illustriert, wie man mithilfe der „Variation der Konstanten“ inhomogene Differentialgleichungen lösen kann. Wir kehren nun zur klassischen Mechanik zurück, stellen Bewegungsgleichungen in vier einfachen Fällen auf und lösen sie.

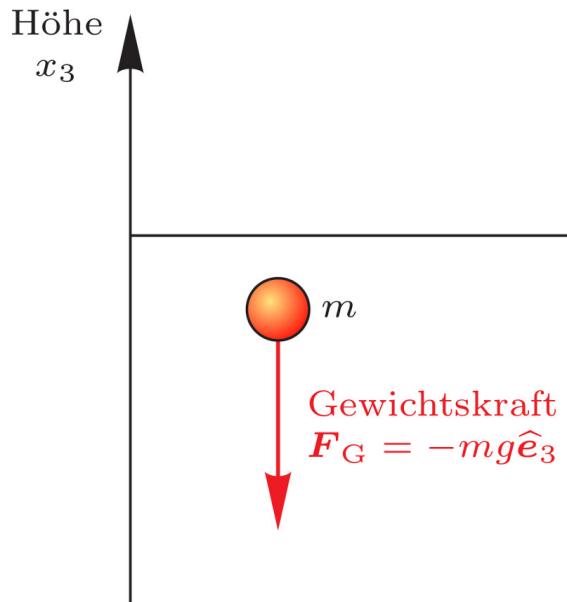


Abb. 1.5 Freier Fall aus geringer Höhe. Quelle: TP

1.4 Fallbewegungen

1.4.1 Freier Fall aus geringer Höhe

Wir stellen uns eine Punktmasse m vor, die aus einer Höhe r fällt. Wenn die Höhe sehr klein gegenüber dem Erdradius ist, $r \ll R_{\text{Erde}}$, dann ist die Schwerkraft $F_G = -mg$ durch die konstante Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ gegeben. Die Bewegungsgleichung lautet einfach

$$m\ddot{r} = -mg . \quad (1.22)$$

Das ist eine gewöhnliche, lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Indem wir die Geschwindigkeit $v = \dot{r}$ einführen, erhalten wir eine Differentialgleichung erster Ordnung,

$$\dot{v} = -g , \quad (1.23)$$

deren Lösung sofort durch Integration folgt,

$$v = -gt + C_1 . \quad (1.24)$$

Die Integrationskonstante C_1 ist offenbar die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, $C_1 = v(t_0) = v_0$.

Eine weitere Integration nach der Zeit liefert

$$r = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + C_2 , \quad (1.25)$$

wobei die weitere Integrationskonstante C_2 offenbar die Anfangshöhe zur Zeit $t = 0$ ist, $C_2 = r(t = 0) = r_0$.

Wenn der Massenpunkt bei $t = 0$ in der Höhe h losgelassen wird, sind $v_0 = 0$ und $r_0 = h$, und die Lösung lautet

$$r = h - \frac{g}{2}t^2. \quad (1.26)$$

Die Fallzeit bis $r = 0$ beträgt

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (1.27)$$

und die Endgeschwindigkeit ist

$$v = -gt = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}. \quad (1.28)$$

Beispiel: Sprung vom Zehnmeterturm

ein Sprung vom Zehnmeterturm dauert $t = 1.4$ s und endet mit einer Geschwindigkeit von $v = -14 \text{ m s}^{-1}$ (etwa -50 km h^{-1}). ◀

Anfangsbedingungen

Da die Bewegungsgleichung von zweiter Ordnung in der Zeit ist, werden zu ihrer vollständigen Lösung zwei Integrationskonstanten benötigt. Diese erlauben uns die Wahl von Anfangsbedingungen, die in diesem Fall die Bedeutung der Anfangshöhe und der Anfangsgeschwindigkeit haben.

1.4.2 Fall aus geringer Höhe mit Stokes'scher Reibung

Bei Stokes'scher Reibung ist die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit, $F_R = -Kv$; sie wirkt natürlich der Geschwindigkeit entgegen.

Die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} = m\dot{v} = m\frac{dv}{dt} = -mg - Kv, \quad (1.29)$$

die sich daraus ergibt, lässt sich wieder durch Trennung der Variablen lösen:

$$dv = -g \left(1 + \frac{Kv}{mg}\right) dt \quad (1.30)$$

und daher

$$\int \frac{dv}{1 + \frac{Kv}{mg}} = -g \int dt. \quad (1.31)$$

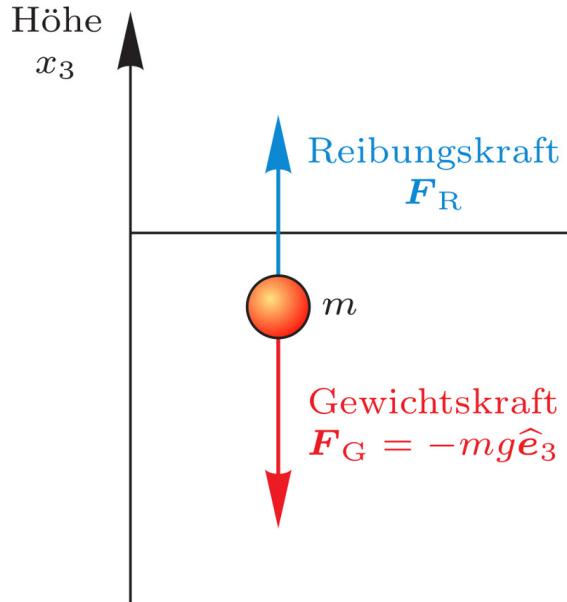


Abb. 1.6 Gebremster Fall aus geringer Höhe. Quelle: TP

Beide unbestimmte Integrale lassen sich elementar integrieren,

$$\frac{mg}{K} \ln \left(1 + \frac{Kv}{mg} \right) = -gt + C_1 , \quad (1.32)$$

wobei die beiden Integrationskonstanten gleich zu einer zusammengefasst wurden. Damit lautet die Geschwindigkeit

$$v = \frac{mg}{K} \left[\exp \left(\frac{K(C_1 - gt)}{mg} \right) - 1 \right] . \quad (1.33)$$

Nach sehr langer Zeit, d.h. für $t \rightarrow \infty$, nähert sich v der Endgeschwindigkeit mit dem Betrag

$$v_E = \frac{mg}{K} , \quad (1.34)$$

an, so dass die Lösung in der Form

$$v = v_E \left[\exp \left(\frac{C_1 - gt}{v_E} \right) - 1 \right] \quad (1.35)$$

geschrieben werden kann.

Wählt man weiter bei $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit, $v(t = 0) = v_0$, folgt

$$e^{C_1/v_E} = 1 + \frac{v_0}{v_E} \quad (1.36)$$

und damit

$$v = (v_0 + v_E) e^{-gt/v_E} - v_E . \quad (1.37)$$

Diese Lösung ist zugleich eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Höhe r ,

$$\dot{r} = (v_0 + v_E) e^{-gt/v_E} - v_E . \quad (1.38)$$

Führen Sie die Integrationen selbst aus, die für die Ergebnisse (1.32) bzw. (1.33) notwendig sind.

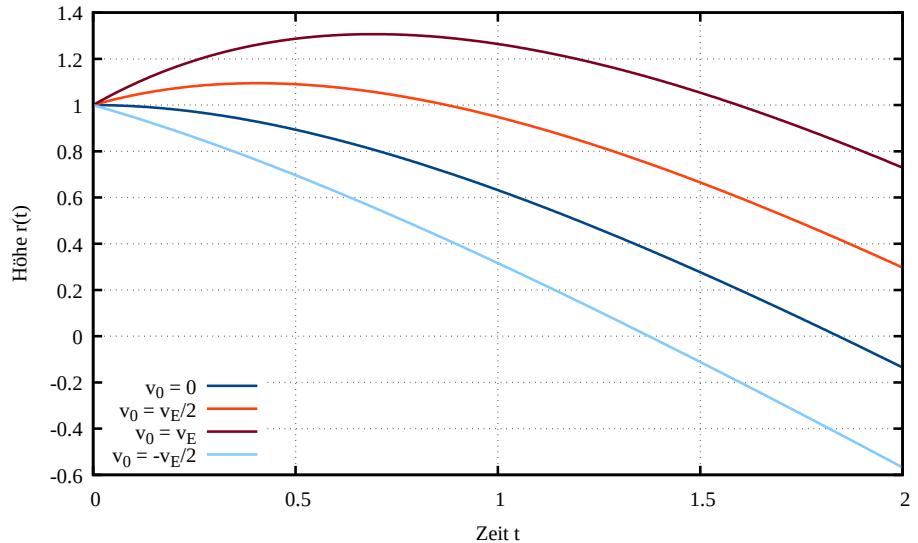


Abb. 1.7 Gebremster Fall mit Stokes'scher Reibung aus jeweils derselben Höhe, aber mit vier verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten.

Eine weitere Integration führt auf

$$r = C_2 - v_E t - (v_0 + v_E) \frac{v_E}{g} e^{-gt/v_E} . \quad (1.39)$$

Setzt man hier $r(t = 0) = r_0$ ein, ergibt sich die Integrationskonstante C_2 zu

$$C_2 = r_0 + (v_0 + v_E) \frac{v_E}{g} . \quad (1.40)$$

Freier Fall mit Stokes'scher Reibung

Mit dieser weiteren Integrationskonstante erhält man die Lösung

$$r = r_0 - v_E t + (v_0 + v_E) \frac{v_E}{g} \left[1 - e^{-gt/v_E} \right] \quad (1.41)$$

für die Höhe eines Körpers als Funktion der Zeit, der sich unter dem Einfluss von Schwerkraft und Stokes'scher Reibung bewegt.

Nach sehr langer Zeit, für $t \rightarrow \infty$, verschwindet der Exponentialterm, und r nimmt linear mit der Zeit ab:

$$r \rightarrow r_0 - v_E t + (v_0 + v_E) \frac{v_E}{g} . \quad (1.42)$$

1.4.3 Fall aus geringer Höhe mit Luftwiderstand

Bei Luftwiderstand ist der Betrag der Reibungskraft zum Quadrat der Geschwindigkeit proportional. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{r} = -mg - Kv|v| , \quad (1.43)$$

denn die Reibungskraft muss wieder der Bewegung entgegen gerichtet sein. Da wir von einem fallenden Körper reden, nehmen wir $v < 0$ an, also

$$\ddot{r} = \dot{v} = -g + \frac{K}{m}v^2. \quad (1.44)$$

Mit der Definition $v_E^2 = mg/K$ folgt nach Trennung der Variablen

$$\frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{v_E}\right)^2} = -gdt. \quad (1.45)$$

Hier hilft die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} \right) \quad (1.46)$$

weiter, denn sie erlaubt uns zu schreiben

$$\int \frac{dv}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{v}{v_E}} + \frac{1}{1 + \frac{v}{v_E}} \right) = -g \int dt, \quad (1.47)$$

was sich wieder elementar integrieren lässt,

$$\frac{v_E}{2} \ln \frac{v_E + v}{v_E - v} = -gt + C_1. \quad (1.48)$$

Die Integrationskonstante C_1 wird so bestimmt, dass $v = v_0$ bei $t = 0$ ist,

$$C_1 = \frac{v_E}{2} \ln \frac{v_E + v_0}{v_E - v_0}, \quad (1.49)$$

und damit lässt sich die Gleichung für die Geschwindigkeit umformen zu

$$v = -v_E \left[\frac{v_E - v_0 - (v_E + v_0)e^{-2gt/v_E}}{v_E - v_0 + (v_E + v_0)e^{-2gt/v_E}} \right]. \quad (1.50)$$

Für $t \rightarrow \infty$ fallen die Exponentialterme weg, und $v \rightarrow -v_E$, d.h. es wird die asymptotische Endgeschwindigkeit erreicht, wenn $t \gg v_E/g$ ist.

Eine weitere Integration führt auf die durchfallene Höhe r ,

$$r - r_0 = \int_{t_0}^t v(t') dt'. \quad (1.51)$$

Zur Vereinfachung definieren wir

$$a := \frac{v_E + v_0}{v_E - v_0} \quad ; \quad x := \frac{2gt}{v_E} \quad (1.52)$$

und erhalten

$$r - r_0 = -\frac{v_E^2}{2g} \int \frac{1 - ae^{-x}}{1 + ae^{-x}} dx. \quad (1.53)$$

?

Schlagen Sie den Wert der Konstante K für Luft nach und bestimmen Sie daraus die Endgeschwindigkeit v_E .

Die Integration führt auf

$$r - r_0 = -\frac{v_E^2}{2g} [x + 2 \ln(1 + ae^{-x})] . \quad (1.54)$$

Freier Fall mit Luftwiderstand

Setzen wir in (1.54) die Definitionen von a und x wieder ein, erhalten wir

$$r = r_0 - v_E t - \frac{v_E^2}{g} \ln \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{v_0}{v_E} + \left(1 + \frac{v_0}{v_E} \right) e^{-2gt/v_E} \right] \right\} \quad (1.55)$$

für die Höhe eines Körpers als Funktion der Zeit, der durch Luftwiderstand am freien Fall gehindert wird.

Bei $v_0 = 0$ erhält man nach genügend langer Zeit, $t \gg v_E/g$, den asymptotischen Verlauf

$$r \rightarrow r_0 - v_E t + \frac{v_E^2}{g} \ln 2 , \quad (1.56)$$

während im selben Fall für Stokes'sche Reibung

$$r \rightarrow r_0 - v_E t + \frac{v_E^2}{g} \quad (1.57)$$

gilt. Wegen $\ln 2 < 1$ ist die mit Luftwiderstand *durchfallene* Höhe *größer* als die mit Stokes'scher Reibung, d.h. Stokes'sche Reibung ist effektiver (bremst stärker ab).

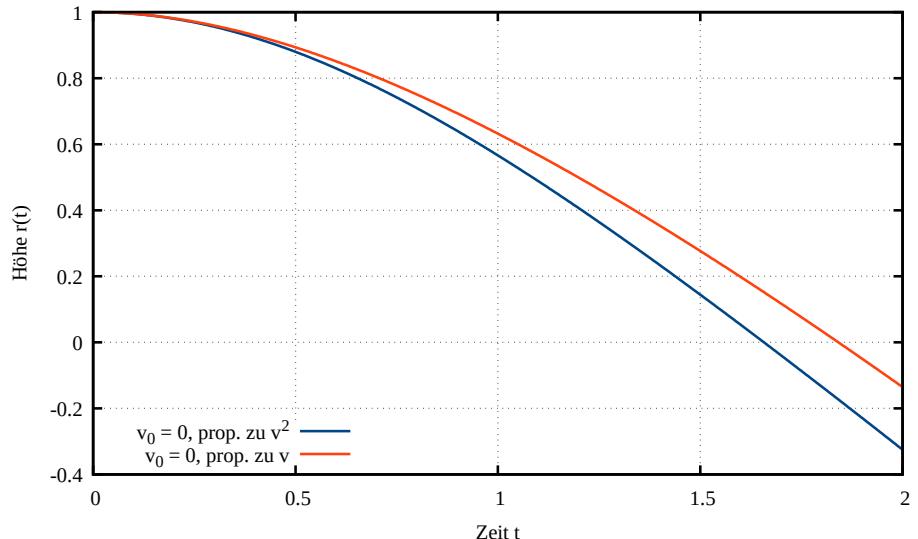


Abb. 1.8 Vergleich der durchfallenen Höhen für gebremsten Fall mit Stokes'scher Reibung (rot) und Luftwiderstand (blau).

1.4.4 Freier Fall aus großer Höhe

Bei freiem Fall aus großer Höhe, $h \gtrsim R_{\text{Erde}}$, muss berücksichtigt werden, dass sich die Erdbeschleunigung mit der Höhe ändert. Die Gravitationskraft im Abstand r vom Erdmittelpunkt ist

$$F_G = -\frac{GMm}{r^2}, \quad (1.58)$$

und die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (1.59)$$

Diese lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung wandeln wir durch einen *integrierenden Faktor* in eine Differentialgleichung erster Ordnung um. Nach Multiplikation mit \dot{r} erhalten wir zunächst

$$m\dot{r}\ddot{r} = -\frac{GMm\dot{r}}{r^2}, \quad (1.60)$$

woraus folgt

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{r}^2)}{dt} = GM \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (1.61)$$

Indem wir die beiden Zeitableitungen auf der linken Seite versammeln, sehen wir, dass offenbar

$$m \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{GM}{r} \right) = \text{konst.} =: E \quad (1.62)$$

konstant ist, d.h. die *Energie* E darf sich nicht ändern. Der erste Ausdruck auf der linken Seite heißt *kinetische*, der zweite *potentielle* Energie.

Energiesatz

Dies führt uns zur ersten Verwendung des Energiesatzes bei der Lösung eines mechanischen Problems. Die Energie $E = E_0 = \text{konst.}$, wobei E_0 durch die Anfangsbedingungen gegeben ist,

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0}. \quad (1.63)$$

Wenn der Massenpunkt im Unendlichen ruht, $r_0 = \infty$ und $v_0 = 0$, ist $E_0 = 0$ und

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{r} = \frac{gR_{\text{Erde}}^2 m}{r}. \quad (1.64)$$

?

Ein integrierender Faktor sorgt dafür, dass beide Seiten einer Differentialgleichung als vollständige Differentiale geschrieben werden können. Können Sie eine allgemeine Bedingung für seine Existenz angeben?

Die Endgeschwindigkeit eines freien Falls aus dem Unendlichen auf die Erdoberfläche ist

$$v_\infty = \sqrt{2gR_{\text{Erde}}} = 11.2 \text{ km s}^{-1}, \quad (1.65)$$

und das ist natürlich zugleich die Fluchtgeschwindigkeit von der Erde.

Setzt man für v_∞ die Lichtgeschwindigkeit c ein, erhält man den *Schwarzschild-Radius*

$$r =: R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.66)$$

einer Masse M . Er ist für viele Aspekte der relativistischen Astrophysik als „Radius eines schwarzen Lochs“ sehr wichtig.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

2.1 Differentialgleichungen II

2.1.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Bei der Behandlung von Differentialgleichungen ist zunächst die Frage wichtig, unter welchen allgemeinen Bedingungen wir damit rechnen können, Differentialgleichungen überhaupt lösen zu können. Dazu bemerken wir zunächst, dass wir Differentialgleichungen n -ter Ordnung als Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen können, indem wir die Ableitungen $y^{(i-1)}(x)$ der gesuchten Funktion $y(x)$ als eigene Funktionen $y_i(x)$ auffassen, also $y(x) = y_1(x)$, $y'(x) = y_2(x)$, $y''(x) = y_3(x)$ usw. Damit wird z.B. die Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.4) zu dem System

$$\begin{aligned} y'_1(x) &= y_2(x) , \\ y'_2(x) + p(x)y_2(x) + q(x)y_1(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung.

Für Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$y'(x) = f(x, y) , \tag{2.2}$$

lautet nun die *Lipschitz-Bedingung*:

Lipschitz-Bedingung

Für eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung existiert genau dann eine eindeutige Lösung in einem Intervall I , wenn für ein $x_0 \in I$ ein Anfangswert $y_0 = y(x_0)$ vorgegeben ist, sowie für jedes $x \in I$ und jedes betrachtete Paar von Funktionswerten y, \bar{y} die *Sekantensteigung* durch eine endliche Konstante $k \in \mathbb{R}$ beschränkt ist,

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta y} \right| = \left| \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq k . \tag{2.3}$$

Anschaulich bedeutet das, dass man durch endliche Schritte entlang des Richtungsfeldes der Differentialgleichung immer nur endlich weit kommt, also keine unendlichen Sprünge machen kann. Entsprechend wird eine Differentialgleichung n -ter Ordnung erst durch n Anfangsbedingungen eindeutig festgelegt.

Beispiel: Zerfallsgesetz

Betrachten wir als einfaches Beispiel die Differentialgleichung (1.5), das Zerfallsgesetz. Offenbar ist in diesem Fall $f(x, y)$ aus (2.2) durch $-\lambda N(t)$ zu ersetzen, und die Sekantensteigung, deren Beschränktheit überprüft werden muss, ist

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta y} \right| = \left| \frac{-\lambda N + \lambda \bar{N}}{N - \bar{N}} \right| = \lambda. \quad (2.4)$$

Die Lipschitz-Bedingung ist also erfüllt, wenn $\lambda \in \mathbb{R} < \infty$ ist. ◀

Für physikalische Vorgänge, die fast immer durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit beschrieben werden, bedeutet das, dass eine eindeutige Lösung der Bewegungsgleichung in der Nähe einer Zeit t_0 immer angegeben werden kann, wenn die Bewegung im Endlichen und mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt und die auftretenden Kräfte stetig sind und sich nicht beliebig schnell ändern. Die Lösung wird durch zwei Anfangsbedingungen an den Ort und die Geschwindigkeit eindeutig bestimmt.

2.1.2 Vollständige Lösung linearer Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Linear heißen Differentialgleichungen, deren Koeffizientenfunktionen nicht von y abhängen,

$$p_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = r(x). \quad (2.5)$$

Sie spielen in der Physik eine herausragende Rolle. Die linke Seite wird oft kurz als *linearer Differentialoperator* $L[y]$ bezeichnet, also $L[y] = r(x)$.

Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der linearen Differentialgleichung (2.5), so ist auch eine beliebige Linearkombination der beiden eine Lösung, also

$$L[a_1 y_1 + a_2 y_2] = (a_1 + a_2)r(x) \quad \text{mit} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Wenn die rechte Seite $r(x)$ verschwindet, $r(x) = 0$, heißt die Gleichung (2.5) *homogen*, anderenfalls *inhomogen*. Für die allgemeine Lösung einer *homogenen* Differentialgleichung n -ter Ordnung braucht man ein

sogenanntes *Fundamentalsystem* aus n linear unabhängigen Funktionen $y_i(x)$, $1 \leq i \leq n$. Linear unabhängig ist eine Menge von Funktionen $y_i(x)$ genau dann, wenn jede beliebige Linearkombination aus ihnen nur dann verschwinden kann, wenn alle ihre Koeffizienten verschwinden,

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq n. \quad (2.7)$$

Lineare Unabhängigkeit von Lösungen

Es gibt ein einfaches Verfahren, um festzustellen, ob eine Menge von n Lösungen $y_i(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung linear abhängig ist. Spezialisiert auf $n = 2$ besteht es darin zu prüfen, ob der Ausdruck

$$W(x) = y_1(x)y'_2(x) - y_2(x)y'_1(x) \quad (2.8)$$

identisch verschwindet, also $W(x) = 0$ für alle betrachteten $x \in I$. Wenn das der Fall ist, sind die Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$ linear abhängig.

Achtung Die Funktion $W(x)$ in (2.8) ist ein Spezialfall der so genannten *Wronski-Determinante*. ◀

Die allgemeine Lösung einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung erhält man, indem man zur allgemeinen Lösung der dazugehörigen *homogenen* Gleichung eine spezielle oder *partikuläre* Lösung der inhomogenen Gleichung addiert.

Vollständige Lösung

Lineare inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben Lösungen der allgemeinen Form

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + y_{\text{in}}(x), \quad (2.9)$$

wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem bilden und $y_{\text{in}}(x)$ die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Die beiden reellen Zahlen a_1 , a_2 werden dann durch die beiden Anfangsbedingungen bestimmt, die zur Eindeutigkeit der Lösung notwendig sind.

Wenn man eine Lösung $y_1(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung kennt, kann man sich eine zweite durch *d'Alembert-Reduktion* verschaffen, indem man den Ansatz $y_2(x) = y_1(x)f(x)$ in die Gleichung einsetzt, wobei $f(x)$ eine noch unbekannte Funktion ist, und dann berücksichtigt, dass $y_1(x)$ schon eine Lösung ist. Wir werden später von diesem Verfahren Gebrauch machen.

2.1.3 Ausführliches Beispiel

Betrachten wir als Beispiel die lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) - y(x) = 1. \quad (2.10)$$

Die dazugehörige homogene Gleichung, $y''(x) - y(x) = 0$, kann zunächst durch den integrierenden Faktor $2y'$ einmal integriert werden. Aus

$$2y'y'' = 2yy' \Rightarrow (y'^2)' = (y^2)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = \pm 1 \quad (2.11)$$

folgt zunächst, dass $y_1(x) = e^x$ eine Lösung der homogenen Gleichung sein muss, was man durch Einsetzen direkt verifiziert.

Indem wir den Reduktionsansatz $y_2(x) = y_1(x)f(x) = e^x f(x)$ in die homogene Gleichung $y'' - y = 0$ einsetzen, erhalten wir

$$y_1'' f + 2y_1' f' + f'' - y_1 f = (y_1'' - y_1) f + 2y_1' f' + y_1 f'' = 0. \quad (2.12)$$

Der erste Term verschwindet, weil y_1 eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Aus dem Rest folgt

$$\frac{f''}{f'} = (\ln f')' = -2 \frac{y_1'}{y_1} = -2, \quad (2.13)$$

woraus man direkt durch Integration erhält, dass wegen $f(x) = e^{-2x}$ die Funktion $y_2 = y_1 f = e^{-x}$ eine weitere Lösung sein muss.

Eingesetzt in das Kriterium (2.8) folgt

$$W(x) = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2 \neq 0, \quad (2.14)$$

was belegt, dass die beiden Funktionen $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{-x}$ linear unabhängig sind.

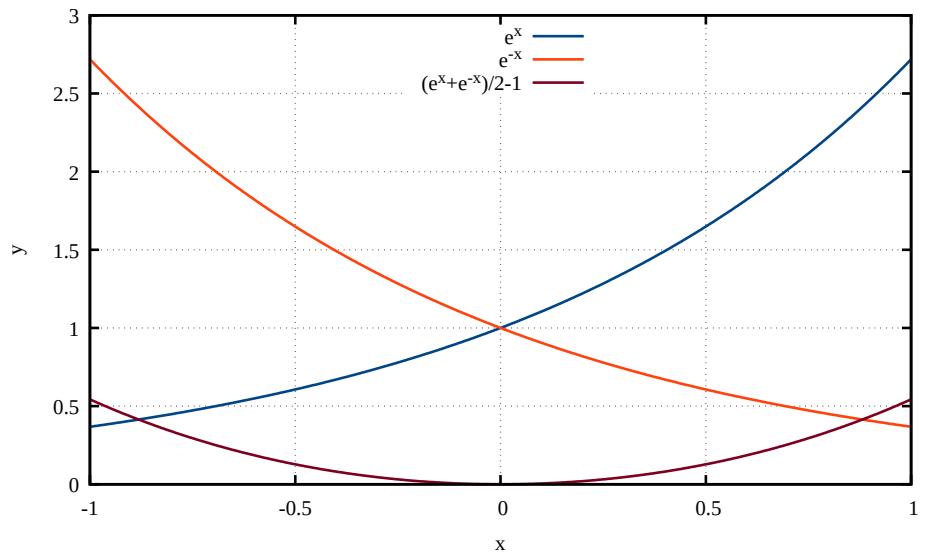


Abb. 2.1 Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $y'' - y = 0$ und vollständige Lösung der inhomogenen Gleichung $y'' - y = 1$ mit den Anfangsbedingungen $y(x = 0) = 0$ und $y'(x = 0) = 0$.

Die vollständige Lösung der homogenen Gleichung (2.10) lautet also

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}. \quad (2.15)$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung könnte man sich nun auf Umwegen durch Variation der Konstanten verschaffen. Einfacher ist es, wenn man bemerkt, dass $y_{\text{in}} = -1$ bereits eine solche Lösung ist. Damit erhält man die vollständige Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 1. \quad (2.16)$$

Als Anfangsbedingungen wählen wir $y(x = 0) = 0$ und $y'(x = 0) = 0$. Wegen

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} \quad (2.17)$$

erfordert $y'(0) = 0$ die Bedingung $c_1 = c_2$. Demnach ist $y(x) = c_1 e^x + c_1 e^{-x} - 1$, so dass die Bedingung $y(0) = 0$ bedeutet $2c_1 = 1$ oder $c_1 = 1/2$. Also lautet die vollständige Lösung der inhomogenen Gleichung (2.10) mit den gegebenen Anfangsbedingungen

$$y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1. \quad (2.18)$$

Schlagen Sie die Definition der hyperbolischen Cosinusfunktion $\cosh(x)$ nach und vergleichen Sie sie mit dem Ergebnis (2.18).

2.2 Taylor-Reihen

2.2.1 Der Taylor'sche Satz

Wir beginnen zunächst mit einer allgemeinen mathematischen Betrachtung, die auf alle Funktionen anwendbar ist, die „genügend glatt“, also genügend oft stetig differenzierbar sind. Sei zunächst ein Intervall der reellen Zahlen $I \subset \mathbb{R}$ vorgegeben und darauf eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die mindestens $n + 1$ -mal stetig differenzierbar sei. Seien ferner $a, x \in I$ zwei beliebige reelle Zahlen aus diesem Intervall. Dann besagt der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad (2.19)$$

wobei $f'(x)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x bezeichnet. Wir setzen diesen Satz hier als bekannt voraus.

Wir bezeichnen jetzt mit $f^{(n)}(x)$ die n -te Ableitung von $f(x)$ nach x und behaupten, dass sich $f(x)$ in der folgenden Weise darstellen lasse:

Taylor'scher Satz

Für $n + 1$ -mal stetig differenzierbare Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf $I \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei $R_{n+1}(x)$ das *Lagrange'sche Restglied*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (2.21)$$

ist.

Dies ist die Aussage des *Taylor'schen Satzes*, und (2.20) ist die *Taylor'sche Formel*.

Der Taylor'sche Satz lässt sich am besten durch *vollständige Induktion* beweisen. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt bereits, dass die Aussage (2.20) für $n = 0$ wahr ist, denn es gilt offenbar nach (2.19)

$$f(x) = f(a) + R_1(x) \quad (2.22)$$

mit

$$R_1(x) = \int_a^x f'(t) dt = \frac{1}{1!} \int_a^x (x - t)^0 f^{(1)}(t) dt. \quad (2.23)$$

Damit ist die Induktion bei $n = 0$ verankert.

Nun nehmen wir an, die Taylor'sche Formel gelte für beliebiges $n - 1$ und zeigen, dass sie dann auch für n gilt. Wir setzen also voraus, dass

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x - a)^i + R_n(x) \quad (2.24)$$

gilt und stellen das Restglied $R_n(x)$ durch partielle Integration anders dar. Wir erhalten

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \\ &= - \int_a^x \frac{d}{dt} \left[\frac{(x-t)^n}{n!} \right] f^{(n)}(t) dt \\ &= - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_{n+1}(x). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Setzt man dieses Ergebnis in (2.24) ein, folgt damit die Gültigkeit des Taylor'schen Satzes auch für n . Damit ist die Induktion vollständig und der Taylor'sche Satz bewiesen.

Der Taylor'sche Satz ist für die gesamte Physik extrem wichtig. Wie eingangs schon erwähnt, ist theoretische Physik überhaupt nur möglich, weil reale Prozesse genähert als isoliert betrachtet werden können. Näherungsmethoden sind daher die Grundlage aller theoretischen Physik. Mit dem Taylor'schen Satz haben wir ein Werkzeug in der Hand, um Näherungen mathematisch kontrolliert durchzuführen.

2.3 Einfache Anwendungen des Taylor'schen Satzes

Meistens wird der Taylor'sche Satz dazu verwendet, um das Verhalten von Funktionen in einer Umgebung bestimmter Punkte zu nähern. Man wählt dann einen Punkt a und betrachtet Punkte x in einer kleinen Umgebung von a , für die gewöhnlich $|x - a| \ll 1$ gilt. Auch komplizierte Funktionen lassen sich dann auf einfache Weise darstellen. Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel: Funktionen der Form $(1 \pm x)^{-b}$

Sei

$$f(x) = \frac{1}{(1 \pm x)^b} \quad (2.26)$$

die Funktion, die in der Nähe von $x = 0$ betrachtet werden soll. Für $x \ll 1$ können wir den Taylor'schen Satz bis zur ersten Ordnung verwenden und erhalten

$$f(x) \approx f(0) \mp \frac{b}{(1 \pm a)^{(b+1)}} x = 1 \mp bx. \quad (2.27)$$

Insbesondere ist also zum Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{x}{2}, \quad (2.28)$$

was sehr häufig gebraucht wird. Mithilfe des Restglieds lässt sich im Einzelfall abschätzen, wie genau diese Näherung ist. ◀

Beispiel: Logarithmus

Ein weiteres häufig verwendetes Beispiel ist $f(x) = \ln(1 \pm x)$ für $x \ll 1$. Dann ist $a = 0$ und damit

$$\ln(1 \pm x) \approx \ln(1 \pm a) \pm \frac{x - a}{1 \pm a} \Big|_{a=0} = \pm x. \quad (2.29)$$

Offenbar ist die Taylor-Entwicklung einer Funktion bis zur ersten Ordnung genau dann exakt, wenn $f(x)$ eine lineare Funktion ist, d.h. wenn

sie eine Gerade darstellt. Dann ist $f(x) = \alpha + \beta x$ mit zwei beliebigen Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, und

$$f(x) = f(a) + \beta(x - a) = \alpha + \beta a + \beta x - \beta a = \alpha + \beta x . \quad (2.30)$$

Deshalb nennt man eine Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung auch *Linearisierung* der Funktion in der Umgebung von a . Wie ausgedehnt diese Umgebung sein kann, hängt natürlich davon ab, bis wohin der Verlauf von $f(x)$ in der Nähe von a durch eine Gerade angenähert werden kann.

Suchen Sie sich selbst Funktionen aus und linearisieren Sie sie in der Nähe beliebiger Punkte, beispielsweise die Exponentialfunktion.

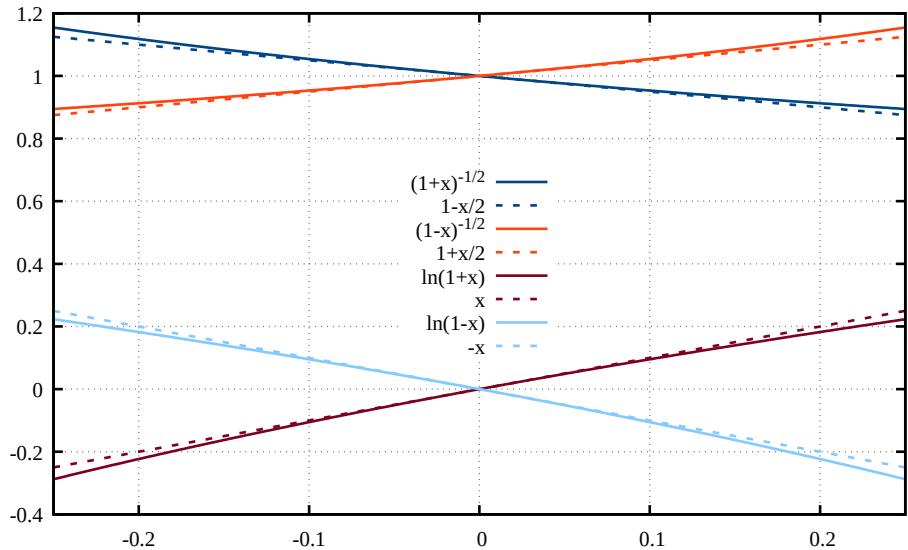


Abb. 2.2 Einige Taylornäherungen erster Ordnung um $x = 0$.

Beispiel: Lineare und quadratische Näherung

Manchmal reicht eine Linearisierung nicht, um zu physikalisch brauchbaren Aussagen zu kommen. Während die Linearisierung der Sinusfunktion in der Nähe von $x = 0$

$$\sin(x) \approx \sin(0) + \cos(0)x = x \quad (2.31)$$

ergibt, erhält man durch Linearisierung des Cosinus

$$\cos(x) = \cos(0) - \sin(0)x = 1 , \quad (2.32)$$

also eine Konstante, die den Verlauf der Cosinusfunktion in der Nähe von $x = 0$ nicht erkennen lässt. In diesem Fall muss man bis zur zweiten Ordnung Taylor-entwickeln:

$$\cos(x) \approx \cos(0) - \sin(0)x - \frac{\cos(0)}{2}x^2 = 1 - \frac{x^2}{2} . \quad (2.33)$$

Auch die beiden Näherungen (2.31) und (2.33) werden sehr oft verwendet. Mit der Taylor-Entwicklungen niedriger Ordnung steht uns nun ein

extrem nützliches, wirksames und kräftiges mathematisches Hilfsmittel zur Verfügung.

2.4 Vektoren I

2.4.1 Vektorräume

Bisher haben wir uns auf die Analyse von Bewegungen in einer Dimension beschränkt. Wir kommen nun zur Darstellung von Bewegungen in drei Dimensionen. Da Positionen im dreidimensionalen Raum durch Vektoren \vec{x} angegeben werden, besteht die Lösung mechanischer Probleme meistens darin, eine Bahnkurve anzugeben, d.h. eine vektorwertige Funktion $\vec{x}(t)$ der Zeit t , die zeigt, an welchem Ort sich der Massenpunkt zur Zeit t befindet.

Natürlich ist Ihnen zumindest intuitiv bekannt, was ein Vektor im dreidimensionalen Raum ist. Er hat einen Betrag und eine Richtung und wird z.B. durch drei Komponenten angegeben, bei denen es sich um reelle Zahlen handelt. In der Mathematik und in vielen Bereichen der theoretischen Physik ist ein Vektor aber ein sehr viel allgemeiner definiertes Objekt. Da Vektoren in verschiedensten Bedeutungen und Darstellungen in der Physik vorkommen, lohnt es sich hier, diese allgemeine Definition zu Grunde zu legen.

In der Mathematik sind Vektoren Objekte, die man addieren, strecken oder stauchen kann, ohne dass sie ihre Vektoreigenschaft verlieren. Präzise definiert wird dies durch die Eigenschaften eines Vektorraums.

Vektorraum

Ein *Vektorraum* V ist eine Menge von Objekten, für die eine Addition definiert ist, die zwei Vektoren v_1, v_2 zu einem neuen Vektor verknüpft,

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2, \quad (2.34)$$

und für die eine Multiplikation mit den Elementen eines *Körpers* K definiert ist, die wiederum einen Vektor ergibt,

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v = \lambda v. \quad (2.35)$$

Zudem erfüllen die Addition und die Multiplikation die linearen Rechenregeln

$$\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2, \quad (\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v. \quad (2.36)$$

In diesen beiden Eigenschaften liegt die große Bedeutung von Vektorräumen in der Physik begründet. Offenbar kann alles durch Vektoren

dargestellt werden, was überlagert werden kann, um dabei einen neuen Vektor zu ergeben.

Beispiel: Zustände als Vektoren

So z.B. werden Zustände quantenmechanischer Systeme durch Vektoren beschrieben, weil man experimentell fand, dass zwei Zustände ψ_1 und ψ_2 zu einem neuen Zustand ψ überlagert werden können,

$$\psi = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 . \quad (2.37)$$

Der Quantenmechanik liegt demnach auch die mathematische Struktur eines Vektorraums zu Grunde. Alles, was nun über Vektorräume gesagt wird, gilt also gleichermaßen für so verschiedene Dinge wie Orte im Raum oder quantenmechanische Zustände. ◀

Oben wurde der Begriff eines Körpers eingeführt, ohne ihn genau zu definieren. Dazu müssen wir zunächst daran erinnern, was eine Gruppe ist.

Gruppen

Gruppen G sind Mengen mathematischer Objekte, zwischen denen eine Verknüpfung \circ definiert ist, die assoziativ ist,

$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = (a_1 \circ a_2) \circ a_3 , \quad (2.38)$$

für die es ein neutrales Element e gibt,

$$a \circ e = a , \quad (2.39)$$

und die zu jedem Gruppenelement a ein inverses Element a^{-1} enthält,

$$a \circ a^{-1} = e . \quad (2.40)$$

In einer kommutativen oder *Abel'schen Gruppe* gilt

$$a_1 \circ a_2 = a_2 \circ a_1 . \quad (2.41)$$

Beispiel: Ganze Zahlen

Ein einfaches Beispiel sind die ganzen Zahlen \mathbb{Z} bezüglich der Addition als Verknüpfung. Die Summe zweier ganzer Zahlen ist wieder eine, das neutrale Element ist die Null und das inverse Element zu einer ganzen Zahl z ist $-z$. ◀

Ausgestattet mit dem Begriff der Gruppe können wir nun definieren, was ein Körper ist:

Körper

Ein *Körper* K ist nun eine Menge, die bezüglich einer Addition $+$ eine abelsche Gruppe ist und die außerdem bezüglich einer Multiplikation \cdot eine abelsche Gruppe ist, wenn man das neutrale Element der Addition (in der Regel die Null) ausschließt. Außerdem gilt das Distributivgesetz in der Form

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \quad (2.42)$$

Im Unterschied zu den Vektoren heißen die Elemente des Körpers, auf dem ein Vektorraum definiert wird, *Skalare*. In der Regel unterliegt physikalischen Vektorräumen entweder der Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} oder der der komplexen Zahlen \mathbb{C} .

2.4.2 Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension

Mengen von Vektoren v_i mit $1 \leq i \leq n$ aus einem Vektorraum V können zu *Linearkombinationen* v verknüpft werden,

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n. \quad (2.43)$$

Die Menge aller Vektoren v , die auf diese Weise durch die Menge der v_i dargestellt werden können, bildet einen Untervektorraum U von V , $U \subseteq V$. Er wird auch als der von den v_i *aufgespannte* Untervektorraum bezeichnet,

$$U = \text{span}(v_i). \quad (2.44)$$

Lineare Unabhängigkeit

Eine Menge von Vektoren v_i heißt *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad (2.45)$$

nur dann erfüllt werden kann, wenn alle Skalare verschwinden, $\lambda_i = 0$.

Insbesondere bedeutet das, dass eine Menge von Vektoren v_i genau dann linear unabhängig ist, wenn sich jeder Vektor $v \in \text{span}(v_i)$ eindeutig aus den Elementen v_i linear kombinieren lässt.

Basis und Dimension

Eine Menge von Vektoren v_i heißt *Erzeugendensystem* eines Vektorraums V , wenn $V = \text{span}(v_i)$ ist. Ein Erzeugendensystem ist eine *Basis*, wenn seine Elemente linear unabhängig sind. Die Anzahl der Elemente einer Basis ist die *Dimension* N des Vektorraums.

Da sich jeder Vektor v aus V als Linearkombination der Basisvektoren e_i schreiben lässt,

$$v = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i, \quad (2.46)$$

kann jeder Vektor durch das N -Tupel der Zahlen λ_i eindeutig angegeben werden, sobald die Basis bekannt ist.

2.4.3 Beispiele

Beispiel: Der dreidimensionale Raum \mathbb{R}^3

Die Menge \mathbb{R}^3 der 3-Tupel (x_1, x_2, x_3) bekommt die Struktur eines Vektorraums über dem Körper der reellen Zahlen, indem man eine Addition von Vektoren und deren Multiplikation mit Skalaren komponentenweise definiert,

$$v + w = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \quad (2.47)$$

bzw.

$$\lambda(v_1, v_2, v_3) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3). \quad (2.48)$$

Eine geeignete Basis wird durch die Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ und $e_3 = (0, 0, 1)$ dargestellt. Irgend zwei der Basisvektoren spannen einen Unterraum von \mathbb{R}^3 auf, so z.B. lässt sich die x_1 - x_2 -Ebene durch die e_1 und e_2 aufspannen. ◀

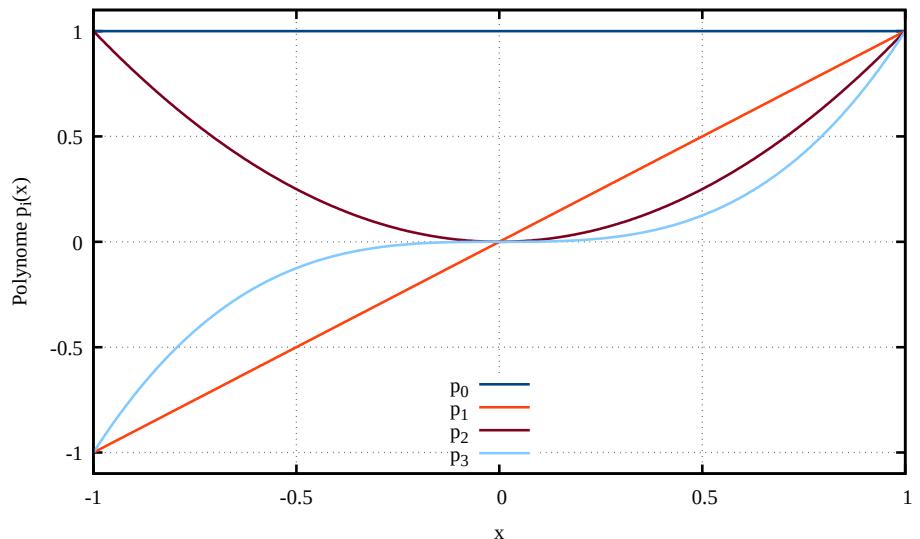


Abb. 2.3 Die ersten vier Basisvektoren für Polynome auf dem Intervall $[-1, 1]$, d. h. die Polynome $p_n = x^n$ mit $n = 0, 1, 2, 3$. Aus ihnen entstehen durch Orthonormalisierung die häufig verwendeten Legendre-Polynome.

Beispiel: Polynome vom Grad $\leq N$

Ein vielleicht weniger nahe liegendes Beispiel sind die Polynome vom Grad $\leq N$ auf dem Intervall $[-1, 1]$,

$$p(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (2.49)$$

Sie bilden einen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen, da durch die gewöhnliche Addition zweier solcher Polynome wieder eines entsteht, und weil auch die Multiplikation mit reellen Zahlen offensichtlich definiert ist.

Offenbar bilden verschiedene Potenzen x^i mit $0 \leq i \leq N$ Systeme linear unabhängiger Vektoren aus diesem Vektorraum, da die Gleichung

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n = 0 \quad (2.50)$$

nur dann für alle $x \in [-1, 1]$ erfüllt werden kann, wenn alle λ_i verschwinden. Zudem spannen die x^i mit $0 \leq i \leq N$ den gesamten Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq N$ auf, weil jedes Polynom vom Grad $\leq N$ durch Linearkombination der x^i dargestellt werden kann. Also bilden die x^i eine Basis dieses Vektorraums. ◀

Kapitel 3

Impuls, Drehimpuls und Energie

3.1 Vektoren II

3.1.1 Das Skalarprodukt

Skalarprodukt

Ein *Skalarprodukt* oder *inneres Produkt* ist eine Abbildung, die zwei Vektoren aus einem Vektorraum eine Zahl aus dem zugrunde liegenden Körper K zuordnet,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle, \quad (3.1)$$

und zwar so, dass sie in beiden ihrer Argumente linear ist,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle &= \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle, \\ \langle v, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \rangle &= \mu_1 \langle v, w_1 \rangle + \mu_2 \langle v, w_2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Eine solche Abbildung heißt *bilinear*. Skalarprodukte sind positiv semidefinit, d.h. das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist nicht negativ, $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$. Mithilfe des Skalarprodukts kann einem Vektor $v \in V$ sein Betrag $|v|$ zugeordnet werden,

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (3.3)$$

Ist $|v| = 1$, heißt v *Einheitsvektor*.

Orthogonalität

Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, $\langle v, w \rangle = 0$.

Achtung In den Relativitätstheorien wird es notwendig, ein Skalarprodukt zu definieren, das auch negative Werte annehmen kann, also nicht mehr positiv semidefinit ist. ◀

Besonders bequem sind Basen, deren Elemente e_i paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \quad (3.4)$$

Hat man eine solche *Orthonormalbasis*, nimmt das Skalarprodukt eine sehr einfache Form an,

$$\langle a, b \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^N \beta_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \beta_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i. \quad (3.5)$$

Im dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 gibt das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren a, b gerade den Cosinus des Winkels φ an, den die beiden Vektoren einschließen,

$$\langle a, b \rangle = |a| |b| \cos \varphi. \quad (3.6)$$

Aus der Erweiterung dieser Beziehung auf beliebige Vektorräume leitet sich die Definition orthogonaler Vektoren ab, die oben eingeführt wurde.

Beispiel: Skalarprodukt zwischen Polynomen

Im obigen Beispiel des Vektorraums der Polynome vom Grad N auf dem Intervall $[-1, 1]$ kann ein Skalarprodukt zwischen zwei Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ durch die Definition

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx \quad (3.7)$$

eingeführt werden. Demnach wären z.B. die beiden Polynome $p(x) = x$ und $q(x) = x^2$ zueinander orthogonal, denn

$$\langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0. \quad (3.8)$$

Entsprechend lässt sich auf diesem Vektorraum eine orthonormale Basis einführen. Die Darstellung von Polynomen oder allgemein von genügend gutwilligen Funktionen durch Orthonormalbasen hat eine immense Bedeutung in der Physik. Ein Beispiel dafür ist die Fouriertransformation. ◀

3.1.2 Einstein'sche Summenkonvention, Kronecker- und Levi-Civita-Symbole

Oft ist es lästig und unnötig, Summen wie etwa in (3.5) auszuschreiben. Zur Abkürzung verabreden wir die *Einstein'sche Summenkonvention*, nach der über doppelt auftretende Indizes summiert wird,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i =: \alpha_i \beta_i . \quad (3.9)$$

Ebenso nützlich ist das *Kronecker-Symbol* δ_{ij} , das durch

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (3.10)$$

definiert wird.

Beispiel: Skalarprodukt

Die Vereinfachung, die aufgrund der Summenkonvention und mithilfe des Kronecker-Symbols erreicht wird, ist offensichtlich, wenn wir (3.4) und (3.5) entsprechend schreiben. (3.4) wird zu

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} , \quad (3.11)$$

und aus (3.5) wird

$$\langle \alpha_i e_i, \beta_j e_j \rangle = \alpha_i \beta_j \delta_{ij} = \alpha_i \beta_i . \quad (3.12)$$

Weiterhin führen wir für dreidimensionale Vektorräume das vollkommen antisymmetrische *Levi-Civita-Symbol* ε_{ijk} ein, das wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1 \\ \varepsilon_{ijk} &= 0 \quad \text{sonst ,} \end{aligned} \quad (3.13)$$

d.h. $\varepsilon_{ijk} = 1$ für alle geraden Permutationen von $\{1, 2, 3\}$, $\varepsilon_{ijk} = -1$ für alle ungeraden Permutationen davon, und $\varepsilon_{ijk} = 0$, wenn mindestens zwei der Indizes i, j, k gleich sind.

Zwischen dem Levi-Civita- und dem Kronecker-Symbol besteht der sehr nützliche Zusammenhang

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} , \quad (3.14)$$

mit dem sich viele Rechnungen erheblich abkürzen lassen.

3.1.3 Das Vektorprodukt

Vektorprodukt

Das *Vektorprodukt* oder äußere Produkt ordnet zwei Vektoren v, w aus V einen Vektor aus V zu,

$$\times : V \times V \rightarrow V, \quad (v, w) \mapsto v \times w, \quad (3.15)$$

und zwar wieder auf bilineare Weise,

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \times w = \lambda_1 v_1 \times w + \lambda_2 v_2 \times w \quad (3.16)$$

und ebenso für das zweite Argument.

Wegen der Bilinearität reicht es zur Festlegung des Vektorprodukts wieder, die Vektorprodukte der Basisvektoren festzulegen. Mithilfe des Levi-Civita-Symbols definieren wir in drei Dimensionen

$$e_i \times e_j = \varepsilon_{ijk} e_k. \quad (3.17)$$

Demzufolge ist das Vektorprodukt antisymmetrisch, z.B. $e_1 \times e_2 = e_3$ und $e_2 \times e_1 = -e_3$, und das Vektorprodukt zweier gleicher Basisvektoren verschwindet, $e_i \times e_i = 0$.

Beispiel: Vektoren im \mathbb{R}^3

Mit dieser Festlegung lautet das Vektorprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren a, b

$$a \times b = (\alpha_i e_i) \times (\beta_j e_j) = \alpha_i \beta_j (e_i \times e_j) = \varepsilon_{ijk} \alpha_i \beta_j e_k, \quad (3.18)$$

oder, in Komponenten ausgeschrieben,

$$a \times b = \begin{pmatrix} \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 \\ \alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3 \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Aufgrund seiner Definition ist das Vektorprodukt zweier Vektoren a, b orthogonal zu beiden Vektoren,

$$\langle a, a \times b \rangle = \langle \alpha_i e_i, \varepsilon_{jkl} \alpha_j \beta_k e_l \rangle = \alpha_i \alpha_j \beta_k \varepsilon_{jkl} \delta_{il} = \varepsilon_{ijk} \alpha_i \alpha_j \beta_k. \quad (3.20)$$

Nun verwenden wir ein wichtiges und häufig verwendetes Argument: Da das Produkt $\alpha_i \alpha_j \beta_k$ symmetrisch gegen Vertauschung von i und j ist, ε_{ijk} aber antisymmetrisch, verschwindet das Ergebnis, ebenso wie für das Skalarprodukt $\langle b, a \times b \rangle$.

Um dies an einem Beispiel zu verdeutlichen, setzen wir $k = 3$ fest und berechnen $\alpha_i \alpha_j \beta_3 \varepsilon_{ijk}$. Wegen der Eigenschaften des Levi-Civita-Symbols

können i und j dann nur noch die Werte 1 und 2 annehmen. Deshalb erhalten wir

$$\alpha_i \alpha_j \beta_3 \varepsilon_{ij3} = \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 \varepsilon_{123} + \alpha_2 \alpha_1 \beta_3 \varepsilon_{213} = \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 (\varepsilon_{123} + \varepsilon_{213}) = 0, \quad (3.21)$$

da $\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{213}$ ist.

Ebenso verschwindet das Vektorprodukt zwischen parallelen oder anti-parallelen Vektoren a, b , denn dann ist $b = \lambda a$ mit $\lambda \in K$, und

$$a \times b = \lambda \alpha_i \alpha_j \varepsilon_{ijk} e_k = 0. \quad (3.22)$$

Entsprechend kann man dem Vektorprodukt zweier Vektoren den Sinus ihres Zwischenwinkels φ zuordnen,

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \varphi. \quad (3.23)$$

3.2 Koordinaten und Bezugssysteme

3.2.1 Koordinaten und Koordinatentransformationen

Die abstrakte Definition von Vektoren und Vektorräumen im dritten Kapitel hat unter Anderem den Vorteil, dass völlig klar wird, dass Vektoren unabhängig von bestimmten Koordinatensystemen existieren. Zwar werden Vektoren im dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 in der Regel durch reelle Zahlentripel (x_1, x_2, x_3) dargestellt, aber diese Zahlentripel dürfen keinesfalls mit den Vektoren selbst verwechselt werden.

Beispiel: Darstellung einer Flugbahn

Betrachten wir z.B. ein Flugzeug auf dem Weg von einem Flughafen zum anderen. Ganz unabhängig von jedem Koordinatensystem kann ihm zu jeder Zeit ein Ort \vec{x} im Raum zugeordnet werden und damit auch eine Bahnkurve $\vec{x}(t)$. Erst die konkrete Darstellung dieses Ortes durch Koordinaten hängt von der Wahl eines Bezugspunkts und von geeigneten Bezugsrichtungen im Raum ab. ◀

Die Wahl eines Koordinatensystems besteht darin, dass man eine geeignete Basis e_i für einen Vektorraum V festlegt. Dadurch werden Vektoren $v \in V$ eindeutig durch N -Tupel v_i von Zahlen aus K darstellbar, $v = v_i e_i$. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass die Basis ein linear unabhängiges Erzeugendensystem des gesamten Vektorraums V ist. Hat man eine Orthonormalbasis gewählt, sind die Koordinaten v_i durch die Skalarprodukte $\langle v, e_i \rangle$ gegeben,

$$\langle v, e_i \rangle = \langle v_j e_j, e_i \rangle = v_j \langle e_j, e_i \rangle = v_j \delta_{ij} = v_i. \quad (3.24)$$

Ebensogut können wir durch eine andere Basis e'_i ein anderes Koordinatensystem einführen, in dem derselbe Vektor v nun durch andere Koordinaten v'_i dargestellt wird,

$$v = v_i e_i = v'_j e'_j . \quad (3.25)$$

Die Frage ist nun zunächst, wie sich die neuen Koordinaten v'_i durch die alten v_j ausdrücken lassen. Dazu genügt es zu wissen, wie die neuen Basisvektoren e'_i durch die alten ausgedrückt werden können, d.h. die Beziehungen

$$e'_i = a_{ij} e_j \quad (3.26)$$

müssen durch die Angabe der $N \times N$ Zahlen a_{ij} vollständig festgelegt sein. Indem wir (3.26) skalar mit e_k multiplizieren, finden wir

$$\langle e'_i, e_k \rangle = a_{ij} \langle e_j, e_k \rangle = a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik} , \quad (3.27)$$

d.h. die Zahlen a_{ij} sind die Skalarprodukte der neuen mit den alten Basisvektoren.

Koordinatentransformationen

Damit können wir aus (3.25) die neuen Koordinaten v'_i erhalten, denn indem wir (3.25) skalar mit e'_k multiplizieren, folgt

$$\langle v, e'_k \rangle = v'_k = v_i \langle e_i, e'_k \rangle = a_{ki} v_i . \quad (3.28)$$

Umgekehrt können wir die Koordinaten v_i im alten Bezugssystem durch die neuen v'_j ausdrücken, indem wir (3.25) skalar mit e_k multiplizieren,

$$\langle v, e_k \rangle = v_k = v'_j \langle e'_j, e_k \rangle = v'_j a_{jk} . \quad (3.29)$$

Beachten Sie den Unterschied zwischen (3.28) und (3.29): In (3.28) wird über den zweiten Index von a_{ij} summiert, in (3.29) über den ersten.

3.2.2 Inertialsysteme

Wenn Koordinatensysteme aus *mathematischer* Sicht beliebig gewählt werden können, stellt sich die Frage, ob bestimmte Koordinatensysteme gegenüber anderen *physikalisch* ausgezeichnet sind. Offenbar macht es physikalisch einen Unterschied, ob die Bahnkurve eines Körpers in einem Bezugssystem betrachtet wird, das sich mit ihm bewegt, oder in einem Bezugssystem, das sich relativ zu irgendeiner Achse dreht. Dies führt uns auf den Begriff der *Inertialsysteme*.

Inertialsystem

Ein Inertialsystem ist ein solches Bezugssystem, in dem das erste Newton'sche Axiom gilt, in dem sich also ein kräftefreier Körper geradlinig-gleichförmig bewegt.

Eine sich drehende Scheibe ist ein Beispiel für ein Bezugssystem, in dem das erste Newton'sche Axiom nicht gilt, denn auf ihr kann ein Körper nur dann in Ruhe bleiben, wenn er durch eine Kraft festgehalten wird.

Der Begriff des Inertialsystems verdeutlicht, dass die Definitionen der Kraft und des Inertialsystems in einer Weise *zyklisch* sind, die schon Newton als problematisch empfunden hat: Erst wenn man ein Inertialsystem eingeführt hat, kann man Kräfte sinnvoll definieren, weil vorher nicht klar ist, ob eine nicht geradlinig-gleichförmige Bewegung auf eine Kraft oder darauf zurückzuführen ist, dass das Bezugssystem kein Inertialsystem ist. Andererseits kann man Inertialsysteme nicht definieren, ohne auf Kräfte Bezug zu nehmen, weil sie als Bezugssysteme definiert sind, in denen sich kräftefreie Körper geradlinig-gleichförmig bewegen. Newton konnte seine Gesetze ohne eine strenge Definition des Inertialsystems formulieren, weil er von der Existenz eines unveränderlichen, absoluten Raums ausging.

Dieses Problem wird oft übergangen, aber man sollte es sich in aller Schärfe verdeutlichen:

Inertialsysteme und Kräfte

Inertialsysteme sind nicht ohne Klarheit über Kräfte, Kräfte nicht ohne Klarheit über Inertialsysteme eindeutig definierbar.

Eine Definition des Inertialsystems, die den Begriff des absoluten Raums vermeidet, geht auf Ludwig Lange zurück, der sie 1886 in seiner Dissertation formuliert hat. Sie besagt (zitiert aus N. Straumann, Klassische Mechanik):

„Jedes Bezugssystem, gegen welches die Bahnen von drei vom gleichen Punkt nach verschiedenen (nicht in einer Ebene liegenden) Richtungen fortgeschleuderten, dann aber sich selbst überlassenen Massenpunkten geradlinig sind, heißt Inertialsystem.“

Inertialsysteme sind Idealisierungen. Beispielsweise ist die Erde keineswegs ein Inertialsystem, weil sie etwa in Bezug auf ferne Fixsterne rotiert. Trotzdem spielen Effekte, die deshalb auftreten, in irdischen Laboren kaum eine Rolle, weil die dort untersuchten Kräfte groß gegenüber den Kräften sind, die daher kommen, dass ein fest mit der Erde verbundenes Labor kein Inertialsystem darstellen kann. In seiner Allgemeinen Relativitätstheorie ist es Einstein gelungen, Inertialsysteme durch eine sehr viel befriedigendere Klasse von Bezugssystemen zu ersetzen.

3.3 Impuls und Drehimpuls

3.3.1 Impuls

Den Impuls \vec{p} haben wir schon als Produkt von Masse m und Geschwindigkeit \vec{v} definiert, als wir das erste Newton'sche Axiom (1.2) eingeführt haben. Es besagt, dass sich der Impuls eines Körpers dann nicht ändert, wenn keine Kräfte auf ihn wirken,

$$\vec{p} = \text{const.} \quad \text{in Abwesenheit von Kräften.} \quad (3.30)$$

Nach den Bemerkungen über allgemeine Bezugs- und Inertialsysteme im vorigen Abschnitt müssen wir hier präzisieren, dass die Aussage des Trägheitsgesetzes *in Inertialsystemen* gilt.

Das zweite Newton'sche Axiom (1.3) lautete

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}, \quad (3.31)$$

d.h. für zeitliche Veränderungen von Impulsen sind Kräfte verantwortlich. Umgekehrt muss der Impuls also erhalten sein, wenn keine Kräfte wirken.

Die letzte Aussage gilt wiederum in Inertialsystemen. Aus der Sicht von jemandem, der im Karussell fährt, bewegt sich die gesamte Umgebung, ohne dass Kräfte auf sie wirken!

3.3.2 Drehmoment und Drehimpuls

Drehmoment

Das *Drehmoment* einer Kraft \vec{F} bezüglich des Koordinatenursprungs wird durch

$$\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.32)$$

definiert.

Wenn φ der Winkel zwischen \vec{r} und \vec{F} ist, hat es den Betrag $|\vec{M}| = rF \sin \varphi$. Das Drehmoment einer Kraft verschwindet, wenn sie in dieselbe Richtung zeigt wie der Ortsvektor \vec{r} ihres Angriffspunkts.

Das Drehmoment um eine Achse, deren Richtung durch den Einheitsvektor \vec{e} beschrieben wird, ist durch

$$M_e = \vec{e} \cdot \vec{M} = \vec{e} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (3.33)$$

definiert. Es ist offenbar ein Skalar.

Veranschaulichen Sie sich z.B. an einem Hebel, wohin das Drehmoment zeigt.

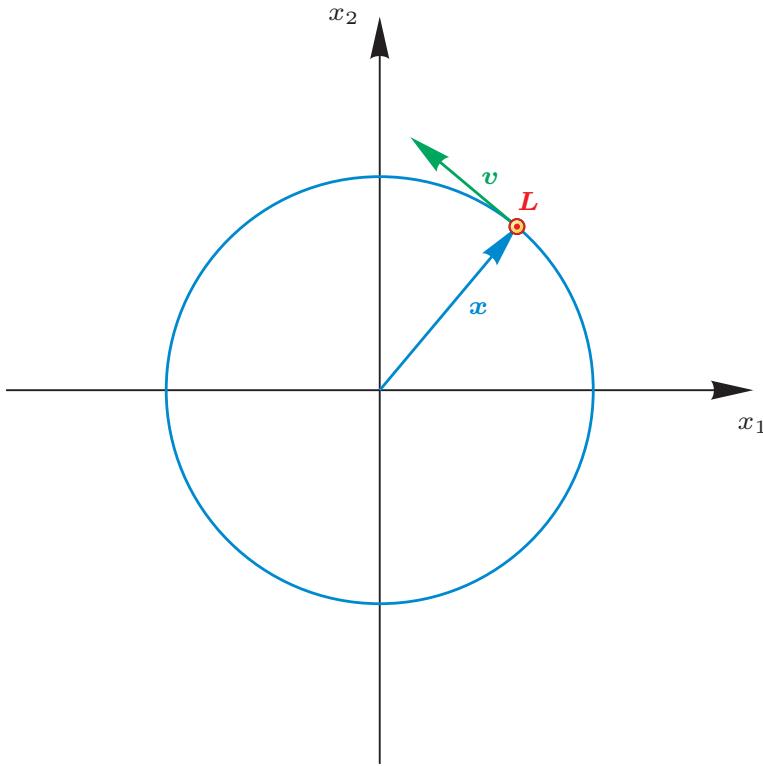


Abb. 3.1 Zur Definition des Drehimpulses. Quelle: TP

Drehimpuls

Ähnlich wird der *Drehimpuls* um den Koordinatenursprung durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (3.34)$$

definiert.

Seine Zeitableitung ist offenbar durch

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (3.35)$$

gegeben, denn da $\dot{\vec{r}} = \vec{v} \parallel \vec{p}$ ist, verschwindet der Term $\dot{\vec{r}} \times \vec{p}$.

Drehimpulssatz

Demnach gilt der *Drehimpulssatz*

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} . \quad (3.36)$$

In Abwesenheit von Drehmomenten, $\vec{M} = 0$, bleibt der Drehimpuls erhalten, $\dot{\vec{L}} = 0$.

3.4 Energie

3.4.1 Energiesatz in einer Dimension

Bei der Diskussion der Energie beschränken wir uns zunächst auf eine Dimension. Wie vorher (Abschnitt 1.4.4) bei der Diskussion des freien Falls aus großer Höhe verwenden wir \dot{x} als integrierenden Faktor der Bewegungsgleichung,

$$m\ddot{x} = F(x) \quad \Rightarrow \quad m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}F(x) \quad (3.37)$$

und erhalten daraus zunächst

$$\frac{m}{2} \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} = -\frac{d}{dt}V(x), \quad (3.38)$$

wobei die Funktion

$$V(x) := - \int_{x_0}^x F(x') dx' \quad (3.39)$$

definiert wurde, in der x_0 frei gewählt werden kann. Damit ist

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}; \quad -\frac{d}{dt}V(x) = -\frac{dV}{dx}\dot{x} = -F(x)\dot{x} \quad (3.40)$$

und die Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right] = 0 \quad (3.41)$$

verschwindet.

Energie und Energieerhaltung

Demnach ist die *Energie*

$$E := \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \quad (3.42)$$

konstant. Dies ist der *Energiesatz* in einer Dimension. Die Größe $V(x)$ wird als *potentielle Energie* bezeichnet; ihr Wert pro Masse $V(x)/m$ heißt *Potential*.

In einer Dimension kann zu einer Kraft $F(x)$, die nicht von \dot{x} abhängt, immer ein Potential angegeben werden. Wegen der freien Wahl von x_0 ist $V(x)$ nur bis auf eine Konstante bestimmt.

3.4.2 Umkehrpunkte

Aus dem Energiesatz in einer Dimension folgt

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = E \Rightarrow \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}, \quad (3.43)$$

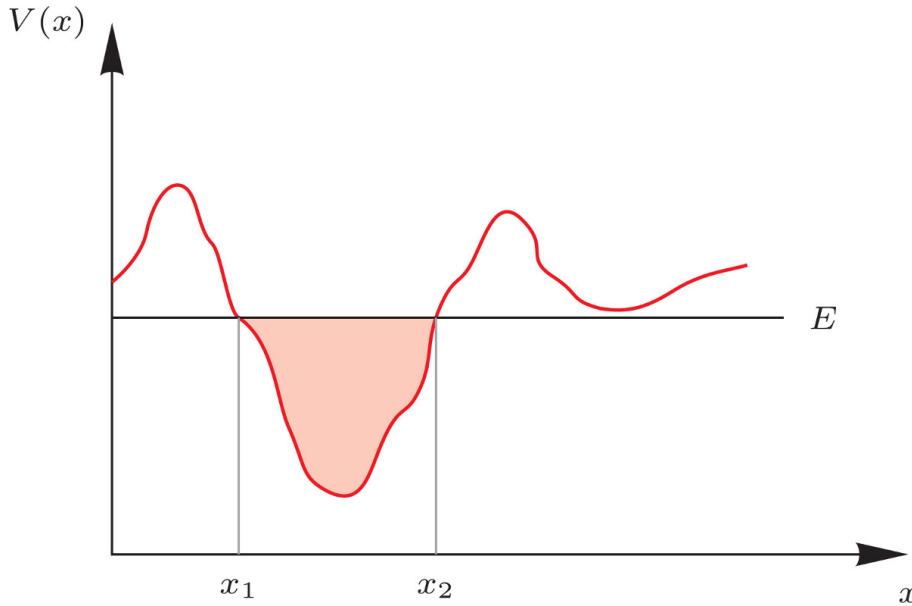


Abb. 3.2 Einschränkung der Bewegung und Umkehrpunkte. Quelle: TP

und damit lässt sich $x(t)$ implizit angeben,

$$\pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}} = t - t_0 . \quad (3.44)$$

Offenbar ist Bewegung nur dort möglich, wo $E - V \geq 0$ ist, denn die *kinetische Energie* $T = (m/2)\dot{x}^2$ ist positiv-semidefinit, $T \geq 0$.

Dadurch werden *Umkehrpunkte* $x_{1,2}$ definiert, die die Bewegung begrenzen. Bei $x = x_1$ und $x = x_2$ ist $V = E$ und $T = 0$. Das ist die Bedeutung des \pm -Zeichens oben: Zwischen den Umkehrpunkten ist Bewegung in beiden Richtungen möglich. Dann tritt eine (möglicherweise nicht harmonische) Schwingung zwischen x_1 und x_2 auf. Sie hat die Schwingungsperiode

$$\Delta t = 2(t_2 - t_1) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}} = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V}} \quad (3.45)$$

Setzen wir dieses Ergebnis in die allgemeinen Formel (3.45) für die Schwingungsperiode ein, erhalten wir

$$\Delta t = 2 \int_{-A_0}^{A_0} \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}A_0(1 - x^2/A_0^2)}} = 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-A_0}^{A_0} \frac{dx/A_0}{\sqrt{1 - x^2/A_0^2}} . \quad (3.49)$$

Ein beispielsweise durch Reibung *gedämpfter harmonischer Oszillator* verliert Energie, etwa auf die Weise

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right] = -b \dot{x}^2 \quad (3.53)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillatior: Energie und Amplitude

Als Beispiel kann uns der *harmonische Oszillatior* dienen, für den die Kraft linear von der Auslenkung abhängt,

$$F = -kx \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{k}{2}x^2, \quad (3.46)$$

wenn man den Nullpunkt x_0 des Potentials so wählt, dass bei $x = 0$ auch $V = 0$ gilt.

Also ist die Energie

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2. \quad (3.47)$$

Die Umkehrpunkte werden bei $\dot{x} = 0$ erreicht. Bezeichnen wir ihren Abstand vom Ursprung als *Amplitude* A_0 , folgt aus (3.47), dass die Energie

$$E = \frac{k}{2}A_0^2 \quad (3.48)$$

sein muss. ◀

Beispiel: Harmonischer Oszillatior: Schwingungsdauer und Frequenz

Nun liegt es nahe, unter dem Integral die dimensionslose Koordinate $y := x/A_0$ einzuführen, die die Auslenkung des harmonischen Oszillatior mit seiner Amplitude skaliert. Dann ist die Schwingungsperiode

$$\Delta t = 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.50)$$

und die Schwingungsfrequenz entsprechend

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\Delta t} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.51)$$

Ausgedrückt durch die Frequenz lässt sich die Energie (3.47) in die einprägsame Form

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) \quad (3.52)$$

bringen. ◀

mit $V(x) = (k/2)x^2$. Solche physikalische Systeme heißen *dissipativ*.

Bevor wir zur Energieerhaltung in drei Dimensionen kommen können, müssen wir uns mit Differentialoperatoren vertraut machen.

Führen Sie die Integration in (3.50) selbst durch.

Kapitel 4

Bewegung in drei Dimensionen

4.1 Kinematik in drei Dimensionen

4.1.1 Bahnkurven, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Nach dieser allgemeinen Einführung in die Grundlagen der Vektorräume verabreden wir, Vektoren im dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 mit Pfeilen zu kennzeichnen. In der Regel stellen wir Vektoren als *Spaltenvektoren* dar,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

und kennzeichnen die entsprechenden *Zeilenvektoren* als *transponiert*, $\vec{x}^\top = (x_1, x_2, x_3)$. Weiterhin notieren wir das Skalarprodukt durch einen Punkt, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle =: \vec{v} \cdot \vec{w}$. Wir führen nun zunächst die Begriffe Bahnkurve, Geschwindigkeit und Beschleunigung ein und geben einfache Beispiele dafür an.

Bahnkurve

Der Ortsvektor \vec{x} eines Massenpunkts ändert sich im Allgemeinen mit der Zeit t , $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Die zwischen zwei Zeiten t_1 und $t_2 > t_1$ durchlaufenen Punkte $\vec{x}(t)$ bilden die *Bahnkurve* des Massenpunkts. In drei Dimensionen wird sie dargestellt durch die drei zeitabhängigen Komponenten

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Beispiel: Kreis- und Schraubenbahn

Beispiele sind eine Kreisbahn in der x_1 - x_2 -Ebene mit Radius R ,

$$\vec{x}_K(t) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

oder eine Schraubenbahn längs der x_3 -Achse mit Radius R ,

$$\vec{x}_S(t) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi(t) \\ R \sin \varphi(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

?

Bestimmen Sie die erste und die zweite Zeitableitung der Kreis- und der Schraubenbahn selbst, bevor Sie weiterlesen.

Geschwindigkeit

Die *Geschwindigkeit* ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit,

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}. \quad (4.5)$$

Dabei werden vektorwertige Funktionen komponentenweise differenziert.

Beispiel: Geschwindigkeiten entlang der Kreis- und Schraubenbahn

Die Geschwindigkeiten in den obigen Beispielen sind

$$\vec{v}_K(t) = R \begin{pmatrix} -\dot{\varphi} \sin \varphi(t) \\ \dot{\varphi} \cos \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_S(t) = \begin{pmatrix} -R\dot{\varphi} \sin \varphi(t) \\ R\dot{\varphi} \cos \varphi(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Beschleunigung

Die *Beschleunigung* ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit,

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{\vec{x}}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}. \quad (4.7)$$

4.1.2 Bogenlänge, Tangential- und Normalvektoren

Ein beliebig kleines, aber endlich großes (infinitesimales) Element der *Bogenlänge* längs der Bahnkurve ist durch

$$ds = |\vec{d}\vec{x}(t)| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| dt = |\vec{v}(t)| dt \quad (4.9)$$

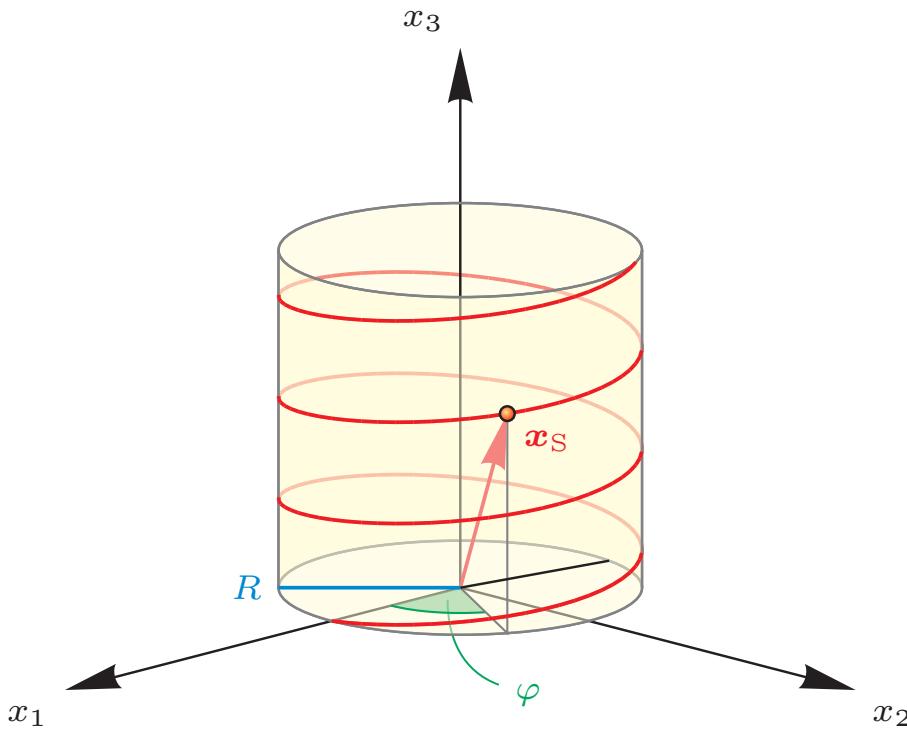


Abb. 4.1 Schraubenbahn. Quelle: TP

Beispiel: Beschleunigungen entlang der Kreis- und Schraubenbahn

Die Beschleunigungen in den obigen Beispielen sind also

$$\vec{a}_K(t) = R \begin{pmatrix} -\ddot{\varphi} \sin \varphi(t) - \dot{\varphi}^2 \cos \varphi(t) \\ \dot{\varphi} \cos \varphi(t) - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\vec{a}_S(t) = \begin{pmatrix} -R\ddot{\varphi} \sin \varphi(t) - R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi(t) \\ R\dot{\varphi} \cos \varphi(t) - R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

gegeben und die Bogenlänge daher durch

$$s = \int_0^t |\vec{v}(t')| dt'. \quad (4.10)$$

Sie entspricht der zwischen den Zeiten 0 und t zurückgelegten Strecke.

Für viele Zwecke ist eine Umparametrisierung günstig, die statt der Zeit t die Bogenlänge s verwendet. Das ist möglich, weil s mit der Zeit monoton wächst; $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}(s)$.

Tangentialvektor

Der *Tangentialvektor* an die Bahnkurve ist die Ableitung der Bahnkurve nach der Bogenlänge,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{x}}{ds} . \quad (4.11)$$

Aufgrund der Definition der Bogenlänge s ist $\vec{\tau}$ ein Einheitsvektor, $|\vec{\tau}| = 1$.

Der Vektor

$$\vec{n}_H = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|^{-1} \quad (4.12)$$

heißt *Hauptnormalenvektor*. Er steht senkrecht auf $\vec{\tau}$,

$$\vec{\tau}^2 = 1 \Rightarrow \frac{d(\vec{\tau}^2)}{ds} = 2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 , \quad (4.13)$$

also $\vec{n}_H \perp \vec{\tau}$.

Es gibt einen weiteren, von \vec{n}_H linear unabhängigen Normalenvektor zu $\vec{\tau}$, den *Binormalenvektor*

$$\vec{n}_B = \vec{\tau} \times \vec{n}_H . \quad (4.14)$$

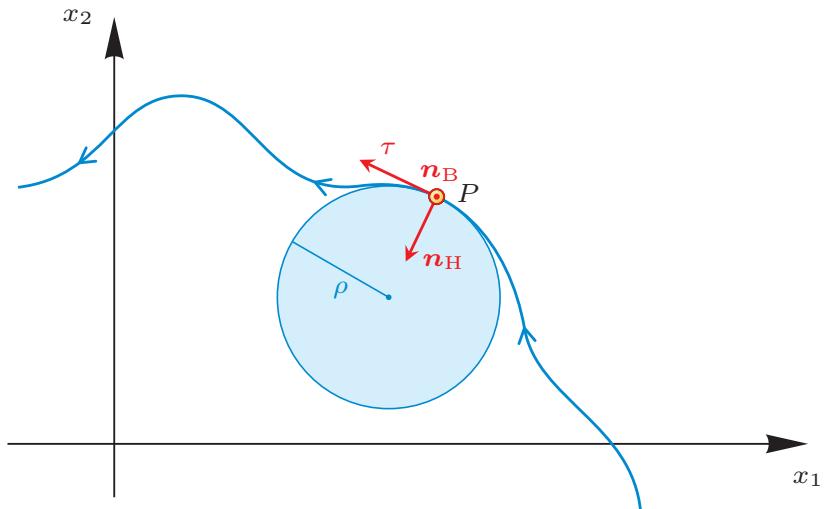


Abb. 4.2 Tangential- und Hauptnormalenvektor an eine Bahnkurve. Quelle: TP

Im Fall der Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit ist wegen $|\vec{v}(t)| = R\dot{\varphi}$ auch die *Winkelgeschwindigkeit* $\dot{\varphi} = \omega$ konstant. Daraus ergibt sich die Bogenlänge

$$s = \int_0^t R\omega dt' = R\omega t . \quad (4.15)$$

Die Umparametrisierung $t \rightarrow s/(R\omega)$ ergibt die Bahnkurve ausgedrückt durch s ,

$$\vec{x}(s) = R \begin{pmatrix} \cos s/R \\ \sin s/R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Der Tangentialvektor ist

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{x}(s)}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin s/R \\ \cos s/R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

und mit

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sin s/R \\ \cos s/R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right| = \frac{1}{R} \quad (4.18)$$

finden wir den Hauptnormalenvektor

$$\vec{n}_H = - \begin{pmatrix} \cos s/R \\ \sin s/R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

und den Binormalenvektor

$$\vec{n}_B = \begin{pmatrix} -\sin s/R \\ \cos s/R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos s/R \\ -\sin s/R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

der also senkrecht zur Kreisebene steht.

_____ ? _____
Können Sie die Tangential-, Haupt- und Binormalenvektoren auch für die Schraubenbahn bestimmen?

4.1.3 Tangential- und Normalkomponenten

Allgemein definiert man den lokalen *Krümmungsradius* in Analogie zum Kreis als

$$\rho := \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|^{-1} \quad (4.21)$$

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung können in ihre tangentia- len und normalen Komponenten zerlegt werden,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = |\vec{v}(t)| \cdot \vec{\tau}, \quad (4.22)$$

die Geschwindigkeit ist also tangential zur Bahnkurve. Für die Beschleu- nigung ergibt sich

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = v\vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v\vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = v\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}_H. \quad (4.23)$$

Sie hat also eine tangentiale Komponente und eine Komponente in Richtung der Hauptnormalen, die mit zunehmendem Krümmungsradius abnimmt.

4.2 Kurvenintegrale

Die Diskussion des Energiesatzes in einer Dimension hat ergeben, dass die Energie erhalten ist, wenn die Kraft als negative Ableitung eines Potentials nach dem Ort dargestellt werden kann,

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad V(x) = - \int_{x_0}^x F(x') dx', \quad (4.24)$$

wobei der Anfangspunkt x_0 der Integration beliebig war. Wenn wir dieses Ergebnis auf drei Dimensionen verallgemeinern wollen, müssen wir nicht nur den Anfangspunkt, sondern auch den *Integrationsweg* festlegen und fragen, unter welchen Voraussetzungen ein Potential $V(\vec{x})$ eingeführt werden kann, das vom Integrationsweg unabhängig wird. Für diese Betrachtung lohnt sich ein Umweg über eine Diskussion der *Kurvenintegrale*.

Betrachten wir eine vektorwertige Funktion $\vec{A}(\vec{x})$ im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 . Einer kleinen Verschiebung vom Punkt \vec{r} zum Punkt $\vec{r} + \delta\vec{r}$ können wir den Skalar

$$\delta\Phi = \vec{A}(\vec{r}) \cdot \delta\vec{r} \quad (4.25)$$

zuordnen. Physikalisch kann er z.B. der Arbeit entsprechen, die verrichtet werden muss, wenn ein Massenpunkt gegen eine Kraft um ein kleines Wegstück verschoben werden muss.

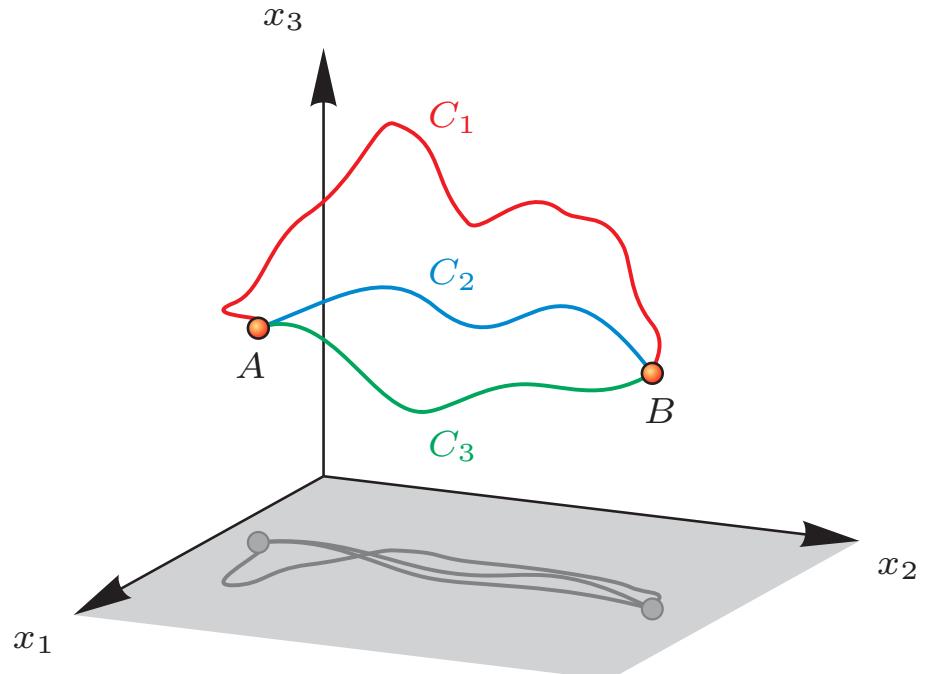


Abb. 4.3 Drei verschiedene Kurven $C_{1,2,3}$ zwischen zwei Punkten A und B. Quelle: TP

Nun betrachten wir endlich lange Wege entlang beliebig geformter Kurven im Raum. Eine solche Kurve C lässt sich durch eine Funktion darstellen, die einem Kurvenparameter t einen Punkt $\vec{r}(t)$ im Raum zuordnet,

wobei der Kurvenparameter einem bestimmten endlichen oder unendlichen Intervall $I = [t_a, t_b]$ entnommen ist,

$$C : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{r}(t). \quad (4.26)$$

Die Endpunkte der Kurve sind $\vec{r}_a = \vec{r}(t_a)$ und $\vec{r}_b = \vec{r}(t_b)$.

Um nun das *Kurvenintegral* über die vektorwertige Funktion $\vec{A}(\vec{x})$ zu berechnen, beginnen wir am Ort \vec{r}_a und gehen in beliebig kleinen Schritten $d\vec{r}$ längs der Kurve nach \vec{r}_b . In jedem Schritt berechnen wir den Skalar $\vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ und summieren alle Ergebnisse auf.

Kurvenintegral

Damit erhalten wir das Kurvenintegral

$$\Phi = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}. \quad (4.27)$$

Das Kurvenintegral heißt geschlossen, wenn Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, $\vec{r}_a = \vec{r}_b$. Es wird dann durch

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (4.28)$$

gekennzeichnet.

Bei der praktischen Berechnung geht man folgendermaßen vor. Man stellt das gerichtete Wegelement $d\vec{r}$ mithilfe des Kurvenparameters t dar,

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt, \quad (4.29)$$

sodass das Kurvenintegral in das gewöhnliche, eindimensionale Integral

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \quad (4.30)$$

übergeht, das dann wie gewohnt ausgeführt werden kann.

4.3 Differentialoperatoren

4.3.1 Felder, Partielle Ableitungen und der Gradient

Ein *Feld* f ist eine Funktion des Raumes, d.h. eine Funktion, die jedem Raumtpunkt \vec{x} einen Wert $f(\vec{x})$ zuordnet. Wenn das Feld jedem Raumtpunkt einen Vektor zuordnet $\vec{f}(\vec{x})$, also vektorwertig ist, heißt es *Vektorfeld*.

Für Funktionen $f(x)$ einer Variablen x ist die Ableitung nach x eindeutig als der Grenzwert

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \quad (4.31)$$

definiert. Für Funktionen mehrerer Variabler definiert man eine *partielle Ableitung*, bei der nur die Änderung längs einer Koordinatenrichtung untersucht wird,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} &= \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

während jeweils alle anderen Koordinaten konstant gehalten werden. Die partielle Ableitung nach der Koordinate x_i wird oft durch andere Schreibweisen abgekürzt, von denen

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} = \partial_i f(x_1, \dots, x_N) = f_{,i}(x_1, \dots, x_N) \quad (4.33)$$

die gebräuchlichsten sind.

Beispiel: Partielle Ableitungen

Zum Beispiel hat die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sin(x_1) \cos(x_2)}{x_3} \quad (4.34)$$

die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\cos(x_1) \cos(x_2)}{x_3}, \\ \partial_2 f(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{\sin(x_1) \sin(x_2)}{x_3}, \\ \partial_3 f(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{\sin(x_1) \cos(x_2)}{x_3^2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Für die partielle Ableitung gelten dieselben Regeln wie für die gewöhnliche Ableitung, nämlich die Produktregel

$$\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g) \quad (4.36)$$

und die Kettenregel

$$\partial_i(f(g)) = \frac{df}{dg} \partial_i g, \quad (4.37)$$

wobei f eine Funktion einer skalaren Größe und g eine Funktion der Koordinaten \vec{x}_i ist.

Längs einer Kurve $\vec{x}(t)$ beträgt die *totale Ableitung* einer Feldfunktion $f(\vec{x})$

$$\frac{df(\vec{x}(t))}{dt} = \frac{\partial f(\vec{x}(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} = \partial_i f(\vec{x}(t)) v_i(t) , \quad (4.38)$$

d.h. alle partiellen Änderungen der Funktion werden mit der jeweiligen Komponente der Bahngeschwindigkeit multipliziert und summiert.

Beispiel: Totale Ableitung

Beispielsweise ist die totale Ableitung der Funktion $f(\vec{x})$ aus (4.34) längs der Kurve $\vec{x}(t) = (v_1 t, v_2 t, 1)$ durch

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= v_1 \partial_1 f + v_2 \partial_2 f \\ &= v_1 \cos(v_1 t) \cos(v_2 t) - v_2 \sin(v_1 t) \sin(v_2 t) \end{aligned} \quad (4.39)$$

gegeben. ◀

Der *Gradient* $\vec{\nabla} f$ einer skalaren Funktion $f(\vec{x})$ ist als der N -dimensionale Vektor definiert, dessen Komponenten

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_N f \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{\nabla} f)_i = \partial_i f \quad (4.40)$$

betrugen. Das Zeichen ∇ wird „Nabla“ ausgesprochen.

Nabla-Operator

Der Vektor

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \vec{e}_N \frac{\partial}{\partial x_N} = \vec{e}_i \partial_i \quad (4.41)$$

heißt *Nabla-Operator*. Ausgedrückt durch den Nabla-Operator lautet die totale Ableitung (4.38) einer Funktion $f(\vec{x})$

$$\frac{df(\vec{x}(t))}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}(t)) . \quad (4.42)$$

Die *Richtungsableitung* eines skalaren Feldes längs einer Richtung, die durch den Einheitsvektor \vec{e} gegeben ist, ist das Skalarprodukt aus dem Gradienten des Feldes und dem Vektor \vec{e} ,

$$\nabla_e f(\vec{x}) = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) . \quad (4.43)$$

Liegt \vec{e} in einer Fläche, in der die Funktion f konstant ist, muss die Richtungsableitung $\nabla_e f$ verschwinden. Wegen $\vec{\nabla} f \cdot \vec{e} = 0$ steht der Gradient also senkrecht auf Flächen konstanter Funktionswerte. Der Gradient zeigt die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f(\vec{x})$ an.

Einem stetig differenzierbaren, skalaren Feld $f(\vec{x})$ ordnet der Gradient in jedem Punkt einen Vektor $\vec{\nabla}f$ zu. Der Gradient eines skalaren Feldes ist also ein Vektorfeld

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{\nabla}f(\vec{x}) . \quad (4.44)$$

4.3.2 Divergenz und Rotation

Divergenz

Die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x})$ eines Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{x})$ ist durch die Summe der partiellen Ableitungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \sum_{i=0}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \partial_i f_i \quad (4.45)$$

definiert.

Sie kann als das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x})$ aufgefasst werden. Wenn \vec{f} überall differenzierbar ist, ordnet die Divergenz jedem Punkt des Raumes einen Skalar zu. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist also ein Skalarfeld.

Rotation

Die Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x})$ eines Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{x})$ kann als Vektorprodukt zwischen dem Nabla-Operator und dem Vektor \vec{f} aufgefasst werden,

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \varepsilon_{ijk} \partial_i f_j(\vec{x}) \vec{e}_k . \quad (4.46)$$

Sie ordnet einem differenzierbaren Vektorfeld ein Vektorfeld zu.

Beispiel: Divergenz und Rotation

Ein ganz einfaches Beispiel bietet das Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$. Seine Divergenz beträgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{x} = \partial_i x_i = 3 \quad (4.47)$$

in drei Dimensionen, während seine Rotation verschwindet,

$$\vec{\nabla} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} \partial_2 x_3 - \partial_3 x_2 \\ \partial_3 x_1 - \partial_1 x_3 \\ \partial_1 x_2 - \partial_2 x_1 \end{pmatrix} = \vec{0} . \quad (4.48)$$

Bestimmen Sie Divergenz und Rotation selbst gewählter Funktionen, z.B. der Funktion

$$\vec{f}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{r^2}$$

mit $r := |\vec{x}|$ in drei Dimensionen. Wie könnte die Rotation in zwei Dimensionen definiert werden?

4.3.3 Rechenregeln

Zahlreiche wichtige Rechenregeln für den Umgang mit dem Nabla-Operator lassen sich mithilfe der Produkt- und der Kettenregel sowie

der Beziehung (3.14) zwischen dem Levi-Civita- und dem Kronecker-Symbol herleiten. Wir geben hier einige Beispiele an.

Seien f und g skalare Felder sowie \vec{v} und \vec{w} Vektorfelder, dann gelten die Formeln:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(fg) &= f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f \\ \vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) &= \vec{\nabla}f \cdot \vec{v} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ \vec{\nabla} \times (f\vec{v}) &= \vec{\nabla}f \times \vec{v} + f\vec{\nabla} \times \vec{v} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} + \vec{w}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}.\end{aligned}\quad (4.49)$$

Laplace-Operator

Der Operator

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \partial_i \partial_i =: \Delta \quad (4.50)$$

heißt auch *Laplace-Operator* und spielt eine herausragende Rolle in vielen Zweigen der Physik.

Wenden Sie den Laplace-Operator auf selbst gewählte Funktionen an, z.B. auf die Funktion

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{r}$$

mit $r := |\vec{x}|$.

4.4 Energiesatz in drei Dimensionen

4.4.1 Energieerhaltung bei Potentialkräften

Aus der Bewegungsgleichung folgt nach Multiplikation mit $\dot{\vec{x}}$

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 \right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (4.51)$$

Analog zum eindimensionalen Fall ist

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (4.52)$$

die *kinetische Energie*. Die infinitesimale Änderung der kinetischen Energie ist die von der Kraft \vec{F} längs des Wegelementes $d\vec{x}$ verrichtete *Arbeit* dA ,

$$d \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 \right) = \vec{F} \cdot d\vec{x} = dA. \quad (4.53)$$

Die *Leistung* ist die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit,

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeiteinheit}} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (4.54)$$

Um aus der Bewegungsgleichung auf eine Erhaltungsgröße zu schließen, müsste sich

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (4.55)$$

als Zeitableitung einer anderen Funktion schreiben lassen, es müsste also eine Funktion A geben, für die

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dA}{dt} \quad (4.56)$$

gilt. Das ist zwar im Allgemeinen nicht der Fall, gilt aber für die wichtige Klasse der *Potentialkräfte*, die durch

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{x}) \quad (4.57)$$

gegeben sind.

Energiesatz in drei Dimensionen

Für solche Potentialkräfte gilt offenbar

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = -\vec{\nabla}V \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = -\frac{dV(\vec{x})}{dt}. \quad (4.58)$$

Damit ist dann wieder

$$\frac{m}{2}\vec{v}^2 + V(\vec{x}) = T + V = E = \text{konst.}, \quad (4.59)$$

und die Energie ist erhalten. Dies ist der Energiesatz in drei Dimensionen. Potentialkräfte $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ heißen daher *konservativ*, andere *dissipativ*.

4.4.2 Beispiele für Potentialkräfte

Beispiel: Harmonischer Oszillatior

Ein einfaches Beispiel liefert der harmonische Oszillatior in drei Dimensionen mit dem quadratischen Potential

$$V = \frac{k}{2}\vec{x}^2, \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}V = -k\vec{x}. \quad (4.60)$$

Beispiel: Zentralkräfte

Ein zweites Beispiel sind *Zentralkräfte*, die zu einem festen Zentrum hin oder davon weg zeigen. Der Betrag der Kraft hängt dann nur vom Abstand von diesem Zentrum ab. Wenn man das Zentrum in den Ursprung legt, ist

$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r = F(r) \frac{\vec{x}}{r} . \quad (4.61)$$

Solche Kräfte haben immer ein Potential, nämlich

$$V(r) = - \int_{r_0}^r F(r') dr' , \quad (4.62)$$

denn dann ist für $1 \leq i \leq 3$

$$F_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{r_0}^r F(r') dr' = \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{d}{dr} \int_{r_0}^r F(r') dr' = F(r) \frac{x_i}{r} . \quad (4.63)$$



Kapitel 5

Koordinatentransformationen

5.1 Darstellung durch Matrizen

5.1.1 Vorbemerkungen

Wir hatten Koordinatentransformationen schon in Kapitel 3 dadurch beschrieben, dass wir die neuen Basisvektoren \vec{e}'_i nach der Transformation durch die alten Basisvektoren \vec{e}_j ausgedrückt hatten. In Gleichung (3.27) hatten wir gesehen, dass die Projektionen der neuen auf die alten Basisvektoren die $N \times N$ Zahlen a_{ij} ergeben, die wir brauchen, um die Komponenten v'_i eines gegebenen Vektors \vec{v} bezüglich der neuen Basis aus seinen Komponenten v_j bezüglich der alten Basis zu bestimmen,

$$v'_i = a_{ij}v_j \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \langle \vec{e}'_i, \vec{e}_j \rangle. \quad (5.1)$$

Quadratische Matrizen

Die $N \times N$ Zahlen bilden eine *quadratische Matrix* $A = (a_{ij})$; die Zahlen a_{ij} selbst heißen *Matrixelemente*. Die Matrixelemente sind allgemein einem Zahlenkörper K entnommen, beispielsweise den reellen oder den komplexen Zahlen.

?

Konstruieren Sie die Matrizen $A = (a_{ij})$, die zwischen verschiedenen, von Ihnen frei gewählten Basen transformieren.

Wir werden solche quadratischen, $N \times N$ -dimensionalen Matrizen $\mathcal{M}_{N \times N}$ hier allgemeiner untersuchen, weil sie für viele wichtige Betrachtungen in der Physik eine fundamentale Bedeutung haben. Diese Bedeutung leitet sich insbesondere daraus ab, dass die regulären quadratischen Matrizen gegebener Dimension $N \times N$ eine Gruppe bilden, die *allgemeine lineare Gruppe* $GL(N)$, durch die sich die meisten Symmetrietransformationen darstellen lassen, die für die Physik wichtig sind. Welche Matrizen regulär sind und wie sich die Gruppeneigenschaften der regulären quadratischen Matrizen begründen lassen, werden wir nun zuerst diskutieren.

5.1.2 Einfache Matrixoperationen

Zunächst bilden die $N \times N$ -Matrizen selbst einen Vektorraum $\mathcal{M}_{N \times N}$ über dem Zahlenkörper K , wenn man die Addition und die Multiplikation mit den Skalaren aus K elementweise definiert,

$$\begin{aligned} + : \mathcal{M}_{N \times N} \times \mathcal{M}_{N \times N} &\rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}, \quad (A, B) \mapsto (a_{ij} + b_{ij}), \\ \cdot : K \times \mathcal{M}_{N \times N} &\rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}, \quad (\lambda, A) \mapsto (\lambda a_{ij}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Außerdem führt man eine *Matrixmultiplikation* ein, durch die $N \times N$ -Matrizen mit $N \times N$ -Matrizen multipliziert werden, um wieder $N \times N$ -Matrizen zu ergeben,

$$\mathcal{M}_{N \times N} \times \mathcal{M}_{N \times N} \rightarrow \mathcal{M}_{N \times N}, \quad (A, B) \mapsto AB = (a_{ij}b_{jk}) \quad (5.3)$$

mit $1 \leq i, j, k \leq N$.

Indem man die Koordinatendarstellungen von *Spaltenvektoren* aus N -dimensionalen Vektorräumen V_N als $N \times 1$ -Matrizen auffasst, ist damit auch eine Multiplikation von $N \times N$ -Matrizen mit N -dimensionalen Spaltenvektoren definiert, deren Ergebnis wieder ein Vektor aus dem N -dimensionalen Vektorraum V_N ist,

$$\mathcal{M}_{N \times N} \times V_N \rightarrow V_N, \quad (A, v) \mapsto (a_{ij}v_j), \quad (5.4)$$

wobei $1 \leq i \leq N$ und $1 \leq j \leq N$ sind. Ebenso kann man *Zeilenvektoren* aus V_N als $1 \times N$ -Matrizen auffassen und sie mit $N \times N$ -Matrizen multiplizieren, um N -dimensionale Zeilenvektoren zu erhalten,

$$V_N \times \mathcal{M}_{N \times N} \rightarrow V_N, \quad (v, A) \mapsto (v_i a_{ij}). \quad (5.5)$$

Man schreibt die Multiplikationen (5.4) und (5.5) auch kurz in der Form

$$A \cdot v \quad \text{und} \quad v^\top \cdot A. \quad (5.6)$$

Ebenso kann man in (5.5) zuerst die Zeilen und Spalten der Matrix A vertauschen, wodurch die Matrix in ihre *Transponierte* A^\top übergeht und die Indizes vertauscht werden,

$$A = (a_{ij}), \quad A^\top = (a_{ij}^\top) = (a_{ji}). \quad (5.7)$$

Offensichtlich gilt dann

$$v^\top \cdot A = v_i a_{ij} = (a_{ji}^\top) v_i = A^\top \cdot v. \quad (5.8)$$

Ganz allgemein gilt offenbar für beliebige Matrizen $A \in \mathcal{M}_{N \times N}$ und $B \in \mathcal{M}_{N \times N}$

$$(A \cdot B)^\top = (a_{ij}b_{jk})^\top = (a_{kj}b_{ji}) = (a_{jk}^\top b_{ij}^\top) = B^\top \cdot A^\top. \quad (5.9)$$

Das neutrale Element bezüglich der Matrixmultiplikation ist die N -dimensionale Einheitsmatrix $\mathbb{1}_N$, deren Elemente durch das Kronecker-Symbol gegeben sind,

$$\mathbb{1}_N = (\delta_{ij}) . \quad (5.10)$$

Demnach ist die Einheitsmatrix eine *Diagonalmatrix*, d.h. sie hat nur auf der Diagonalen (also für $i = j$) nichtverschwindende Elemente, und diese Diagonalelemente sind alle gleich eins. Man schreibt dafür auch

$$\mathbb{1}_N = \text{diag}(1, \dots, 1) . \quad (5.11)$$

5.2 Determinanten und Matrixinversion

5.2.1 Determinanten

Quadratischen Matrizen können Zahlen zugeordnet werden, die als ihre *Determinanten* bezeichnet werden und die für viele auch physikalische Betrachtungen unverzichtbar sind,

$$\det : \mathcal{M}_{N \times N} \rightarrow K , \quad A \mapsto \det A . \quad (5.12)$$

In ihrer Definition tauchen *Permutationen* von Indizes auf. Permutationen waren uns schon kurz bei der Einführung des Levi-Civita-Symbols begegnet. Eine Permutation π bringt eine Menge von Indizes $\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ in eine andere Reihenfolge $\{i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, \dots, i_{\pi(N)}\}$, indem sie ein Paar oder mehrere Paare von Indizes vertauscht. Sie heißt *gerade* oder *ungerade*, wenn eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen durchgeführt wird. Geraden Permutationen wird ein positives, ungeraden ein negatives Vorzeichen $\text{sign}(\pi)$ zugeordnet.

Die Permutationen von N Objekten bilden selbst wieder eine Gruppe, die *symmetrische Gruppe* S_N , wobei als Verknüpfung zweier Permutationen ihre Hintereinanderausführung definiert wird.

Die N Indizes können auf $N! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot N$ Weisen angeordnet werden, also gibt es für N Zahlen $N!$ Permutationen. Zum Beispiel können die drei Zahlen (1, 2, 3) auf $3! = 6$ Weisen permutiert werden, von denen

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) , \quad (2, 3, 1) , \quad (3, 1, 2) & \quad \text{gerade und} \\ (2, 1, 3) , \quad (1, 3, 2) , \quad (3, 2, 1) & \quad \text{ungerade} \end{aligned} \quad (5.13)$$

sind.

Determinante

Die Determinante einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{N \times N}$ ist nun durch

$$\det A = \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{N\pi(N)} \quad (5.14)$$

definiert.

In zwei Dimensionen gibt es für die beiden Indizes (1, 2) nur die beiden Permutationen (1, 2) und (2, 1), von denen die erste ein positives, die zweite ein negatives Vorzeichen bekommt. Demnach lautet die Determinante einer 2×2 -Matrix

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \quad (5.15)$$

In drei Dimensionen verwenden wir die sechs Permutationen aus (5.13) und (5.14) und erhalten

$$\begin{aligned} \det A &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) . \end{aligned} \quad (5.16)$$

?

Überzeugen Sie sich davon, dass die Ausdrücke (5.16) und (5.17) für $\det A$ identisch sind. Was erhalten Sie, wenn Sie den Ausdruck

$$\frac{1}{6} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} a_{li} a_{mj} a_{nk}$$

auswerten?

Ebenfalls in drei Dimensionen kann die Determinante mithilfe des Levi-Civita-Symbols durch

$$\det A = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \quad (5.17)$$

dargestellt werden.

Determinanten haben eine Reihe interessanter Eigenschaften, von denen hier einige ohne Begründung zusammengestellt werden. Zunächst gelten recht offensichtlich

$$\det(\lambda A) = \lambda^N \det A \quad \text{und} \quad \det(A^\top) = \det A . \quad (5.18)$$

Weitere wichtige Aussagen sind das *Multiplikationstheorem*

$$\det(A \cdot B) = \det A \det B \quad (5.19)$$

für $A, B \in \mathcal{M}_{N \times N}$ und die Aussage, dass die Determinante einer Matrix verschwindet, in der die Zeilen- oder Spaltenvektoren linear abhängig sind.

Insbesondere ist die Determinante der Einheitsmatrix

$$\det \mathbb{1}_N = 1 , \quad (5.20)$$

denn für die Einheitsmatrix gibt es nur eine einzige Permutation π , die zu der Summe in der Definition (5.14) beitragen kann, nämlich die Anordnung der Indizes $1, \dots, N$ in ihrer natürlichen Reihenfolge, und diese Permutation hat das Vorzeichen $\text{sign}(\pi) = +1$.

Determinanten werden oft auch durch Betragsstriche gekennzeichnet, $\det A \equiv |A|$.

Singuläre und reguläre Matrizen

Quadratische Matrizen heißen *singulär*, wenn ihre Determinante verschwindet, anderenfalls heißen sie *regulär*.

Die allgemeine lineare Gruppe $GL(N)$ besteht also aus denjenigen quadratischen Matrizen, deren Determinante nicht verschwindet.

5.2.2 Matrixinversion

Für eine reguläre Matrix lässt sich eine *inverse Matrix* angeben. Eine Matrix A^{-1} heißt *invers* zu einer $N \times N$ -Matrix A , wenn sie die Bedingung

$$A^{-1}A = \mathbb{1}_N \quad (5.21)$$

erfüllt, d.h. das Produkt aus einer Matrix A mit ihrer Inversen ergibt die Einheitsmatrix. Wenn A^{-1} überhaupt existiert, lassen sich ihre Elemente x_{ij} aus der Bedingung (5.21) eindeutig bestimmen. Sie müssen offenbar die $N \times N$ Gleichungen

$$x_{ij}a_{jk} = \delta_{ik} \quad (5.22)$$

erfüllen.

Cramer'sche Regel

Die *Cramer'sche Regel* besagt, dass die x_{ij} durch

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{\det A} \quad (5.23)$$

gegeben sind, wobei die A_{ji} die *Unterdeterminanten* von A sind. Das sind die Determinanten derjenigen $(N-1) \times (N-1)$ -Matrizen, die man erhält, indem man aus A die j -te Zeile und die i -te Spalte streicht.

Insbesondere zeigt die Cramer'sche Regel, dass die Inverse einer Matrix nur dann existiert, wenn $\det A \neq 0$ ist, wenn die Matrix A also regulär ist.

Für praktische Rechnungen ist die Cramer'sche Regel schwierig zu handhaben, weil sie enormen Rechenaufwand erfordert. Wir geben hier die Formeln für reguläre 2×2 - und 3×3 -Matrizen an:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}.$$

?

Wenden wir die Multiplikationsregel für Determinanten auf (5.21) an, folgt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}, \quad (5.25)$$

was zeigt, dass auch die Inverse A^{-1} eine Inverse $(A^{-1})^{-1}$ haben muss, wenn sie überhaupt existiert. Multiplikation der Gleichung

$$A^{-1}(AA^{-1}) = A^{-1} \quad (5.26)$$

Überzeugen Sie sich, dass die Formeln (5.24) stimmen!

mit $(A^{-1})^{-1}$ von links ergibt

$$\mathbb{1}_N = (A^{-1})^{-1} A^{-1} (A A^{-1}) = A A^{-1} , \quad (5.27)$$

d.h. *Rechts- und Linksinverse* sind gleich und $(A^{-1})^{-1} = A$.

Die Inverse $(AB)^{-1}$ eines Produkts AB lässt sich ähnlich einfach bestimmen. Multiplizieren wir die Bestimmungsgleichung

$$(AB)^{-1} (AB) = \mathbb{1}_N \quad (5.28)$$

von rechts zuerst mit B^{-1} und dann mit A^{-1} , folgt

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} . \quad (5.29)$$

Außerdem folgt direkt aus der Cramer'schen Regel, dass Transposition und Inversion vertauscht werden können,

$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top . \quad (5.30)$$

5.3 Orthonormale Transformationen

5.3.1 Gruppeneigenschaften der $GL(N)$

Wir sind nun in der Lage, die Gruppeneigenschaften der regulären, quadratischen Matrizen zu überprüfen, wobei die Matrixmultiplikation als Verknüpfung dient. Die Assoziativität rechnet man leicht nach,

$$A(BC) = a_{ij}(b_{jk}c_{kl}) = a_{ij}b_{jk}c_{kl} = (a_{ij}b_{jk})c_{kl} = (AB)C . \quad (5.31)$$

Das neutrale Element bezüglich der Matrixmultiplikation ist die Einheitsmatrix,

$$A \mathbb{1}_N = (a_{ik}\delta_{kj}) = (a_{ij}) = A = \mathbb{1}_N A . \quad (5.32)$$

Das inverse Element zu jeder regulären quadratischen Matrix A ist ihre Inverse A^{-1} ,

$$A A^{-1} = \mathbb{1}_N = A^{-1} A . \quad (5.33)$$

Jedoch ist die $GL(N)$ keine Abel'sche (oder kommutative) Gruppe, denn in der Regel kommutiert die Matrixmultiplikation nicht,

$$AB \neq BA . \quad (5.34)$$

5.3.2 Orthonormalität

Kehren wir noch einmal zu der Matrix mit den Elementen a_{ij} zurück, die in (5.1) eingeführt wurden, um die Transformation von alten Basisvektoren \vec{e}_j auf neue Basisvektoren \vec{e}'_i zu beschreiben, $\vec{e}'_i = a_{ij}\vec{e}_j$.

Wegen der großen Vorteile, die Orthonormalbasen bieten, sind solche Transformationen ausgezeichnet, die Orthonormalbasen in Orthonormalbasen überführen. Für sie muss offenbar

$$\langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle = \delta_{ij} \quad (5.35)$$

gelten oder, ausgedrückt durch die alte Orthonormalbasis \vec{e}_j und die Matrixelemente a_{ij} ,

$$\langle a_{ik}\vec{e}_k, a_{jl}\vec{e}_l \rangle = a_{ik}a_{jl} \delta_{kl} = a_{ik}a_{jk} = a_{ik}a_{kj}^\top = \delta_{ij} . \quad (5.36)$$

Mit anderen Worten, die Transformationsmatrix A muss dann die *Orthonormalitätsrelation*

$$AA^\top = \mathbb{1}_N = A^\top A \quad (5.37)$$

erfüllen, wobei $\mathbb{1}_N$ wieder die Einheitsmatrix ist.

Orthonormale Matrizen

Quadratische Matrizen $A \in \mathcal{M}_{N \times N}$ heißen orthonormal, wenn sie die Orthonormalitätsrelation

$$AA^\top = \mathbb{1}_N = A^\top A \quad (5.38)$$

erfüllen.

Die zweite Gleichung in (5.38) gilt wegen der Transpositionsregel (5.9). Eine solche Transformation heißt selbst orthonormal.

Da $\det \mathbb{1}_N = 1$ ist, gilt wegen (5.18) und (5.19)

$$1 = \det(AA^\top) = \det A \det A^\top = (\det A)^2 , \quad (5.39)$$

woraus folgt, dass die Determinante einer orthonormalen Transformation $\det A = \pm 1$ ist. Eine orthogonale Transformation heißt *eigentlich*, wenn $\det A = 1$ ist, anderenfalls *uneigentlich*.

Die Bedeutung uneigentlicher orthonormaler Transformationen sieht man an folgendem Beispiel. Eine *Spiegelung* im dreidimensionalen Raum an der y - z -Ebene kann durch die Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

dargestellt werden. Offensichtlich ist $\det A = -1$, weshalb diese Spiegelung eine uneigentliche orthonormale Transformation ist. Sie bildet die Einheitsvektoren \vec{e}_i entsprechend

$$\vec{e}_1 \rightarrow -\vec{e}_1 , \quad \vec{e}_2 \rightarrow \vec{e}_2 , \quad \vec{e}_3 \rightarrow \vec{e}_3 \quad (5.41)$$

ab. Wenn vor der Spiegelung die Beziehung $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$ zwischen den Basisvektoren galt, wie sie in (3.17) eingeführt wurde, dann gilt nach der Spiegelung

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\varepsilon_{ijk} \vec{e}_k . \quad (5.42)$$

Man sagt, das Koordinatensystem wurde von einem *Rechts-* in ein *Links-*system transformiert und hat damit seine *Orientierung* oder *Helizität* vertauscht. Eigentliche orthonormale Transformationen überführen also Rechts- in Rechtssysteme, während uneigentliche Transformationen die Helizität vertauschen.

Transposition und Inversion

Für orthonormale Matrizen gilt offenbar schon aufgrund ihrer Definition, dass Inversion und Transposition identisch sind,

$$A^\top = A^{-1} . \quad (5.43)$$

5.3.3 Beispiel: Drehungen in drei Dimensionen

Ein wichtiges Beispiel für die orthonormale Transformationen stellen die Drehungen im dreidimensionalen Raum dar. Wir betrachten zwei solcher Drehungen, von denen die eine um einen Winkel φ um die z -Achse dreht, die andere dann um einen Winkel ψ um die y -Achse. Die kombinierte Drehung wird durch das Produkt der beiden Drehmatrizen

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

dargestellt. Das Produkt lautet nach der Multiplikationsregel (5.3)

$$R_2 R_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} . \quad (5.45)$$

Indem man die Reihenfolge der Faktoren vertauscht, sieht man, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist,

$$R_1 R_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi & \cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \varphi \cos \varphi & \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} , \quad (5.46)$$

was die alltägliche Erfahrung bekräftigt, dass das Ergebnis zweier nacheinander ausgeführter räumlicher Drehungen im Allgemeinen von der Reihenfolge der Drehungen abhängt.

Der Vektor \vec{x} mit den alten Koordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

vor der ersten Drehung hat im neuen Koordinatensystem nach der ersten Drehung R_1 die Koordinaten

$$\vec{x}' = R_1 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi + \sin \varphi \\ \cos \varphi - \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

Nach der zweiten Drehung um R_2 wird \vec{x} zu

$$\vec{x}'' = R_2 R_1 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \psi (\sin \varphi + \cos \varphi) + \sin \psi \\ \cos \varphi - \sin \varphi \\ -\sin \psi (\cos \varphi + \sin \varphi) + \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

Das Ergebnis (5.43), demzufolge Transposition und Inversion für orthonormale Matrizen identisch sind, wird ebenfalls durch Drehmatrizen veranschaulicht. Die Inverse einer Drehmatrix, die eine Koordinatendrehung um eine beliebige Achse um einen Winkel φ beschreibt, muss eine Drehmatrix sein, die um dieselbe Achse, aber um den Winkel $-\varphi$ dreht. Der Vergleich mit den Drehmatrizen R_1 und R_2 aus (5.44) zeigt, dass der Vorzeichenwechsel in φ identisch mit der Transposition der Matrizen ist.

5.4 Physikalische Bedeutung

5.4.1 Ausblick

Für die Physik ist es oft entscheidend wichtig, die Auswirkungen von Koordinatentransformationen auf physikalische Systeme zu kennen. Wenn ein physikalisches System nach einer Koordinatentransformation durch dieselbe Gleichung beschrieben wird wie vorher, heißt es symmetrisch unter dieser Transformation. Symmetrieverlegungen spielen in der Physik eine herausragende, fundamentale Rolle, insbesondere deswegen, weil kontinuierliche Symmetrien physikalischer Systeme zur Folge haben, dass bestimmte physikalische Größen erhalten sind.

Dementsprechend besteht ein enger Zusammenhang zwischen Symmetrien, Erhaltungsgrößen und bestimmten Transformationen aus der allgemeinen linearen Gruppe $GL(N)$. Die orthonormalen Transformationen bilden selbst wieder eine Gruppe, $O(N)$ genannt. Die eigentlichen orthonormalen Transformationen, also diejenigen mit positiver Determinante, bilden die Gruppe $SO(N)$. Die Drehungen im dreidimensionalen Raum werden demnach durch die Gruppe $SO(3)$ dargestellt, während $O(3)$ auch als Gruppe der dreidimensionalen *Drehspiegelungen* bezeichnet wird.

5.4.2 Transformation des Drehimpulses

Wir untersuchen nun, wie sich die Bewegungsgleichungen ändern, wenn wir zu neuen Koordinaten übergehen. Das Ausgangssystem K mit dem Ursprung O habe die Basis \vec{e}_i , und das neue System K' liege am Ursprung O' und habe die Basis \vec{e}'_i .

Durch die Verschiebung des Ursprungs um einen konstanten Vektor \vec{a} gehen Ortsvektoren \vec{x} , Geschwindigkeiten und Beschleunigungen im alten System in

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}, \quad \dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{x}}, \quad \ddot{\vec{x}}' = \ddot{\vec{x}} \quad (5.50)$$

über. Damit ändert sich die Bewegungsgleichung zu

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} &= \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \rightarrow m\ddot{\vec{x}}' = \vec{F}'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t); \\ \vec{F}'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) &= \vec{F}(\vec{x}' + \vec{a}, \dot{\vec{x}}', t) \end{aligned} \quad (5.51)$$

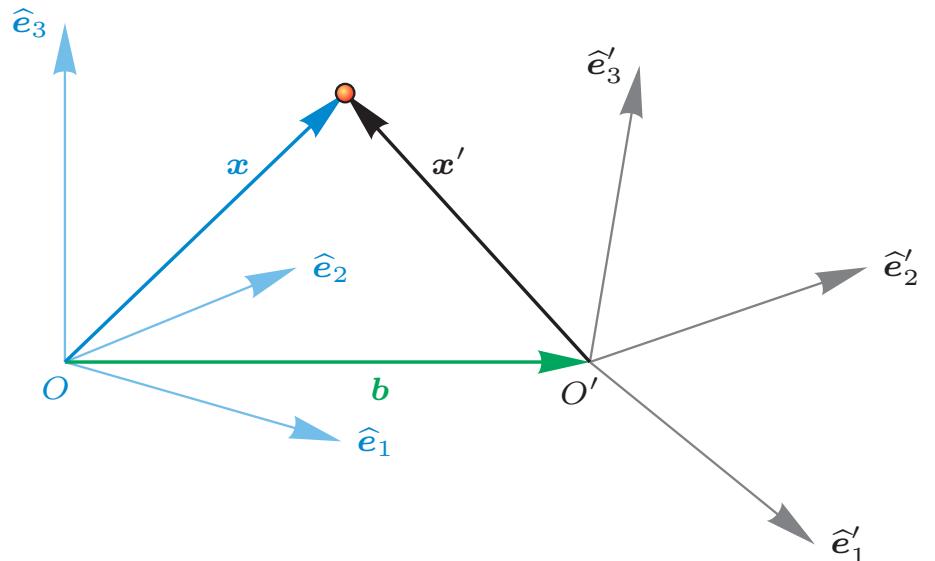


Abb. 5.1 Übergang zu neuem Bezugssystem. Quelle: TP

Wenn die Bezugssysteme K und K' denselben Ursprung haben ($\vec{a} = 0$), aber beliebig gegeneinander verdreht sind, gilt

$$x'_i = R_{ij} x_j \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}' = R \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} = R^{-1} \cdot \vec{x}', \quad (5.52)$$

wobei die R_{ij} die Elemente einer *orthogonalen* Drehmatrix R sind, für die nach (5.37)

$$R_{ij} R_{kj} = \delta_{ik} \quad \text{bzw.} \quad R R^T = \mathbb{1}_N \Rightarrow |\det R| = 1 \quad (5.53)$$

gilt. Wie dort besprochen, haben eigentliche Drehungen $\det R = 1$, uneigentliche $\det R = -1$.

Da R zeitlich konstant ist, folgt

$$\ddot{x}'_i = \frac{d}{dt} (R_{ij}x_j) = R_{ij}\ddot{x}_j, \quad \ddot{x}'_i = R_{ij}\ddot{x}_j, \quad (5.54)$$

und die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x}'_i = R_{ij}F_j(R^{-1}\vec{x}', R^{-1}\dot{\vec{x}}', t) = F'_i(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t). \quad (5.55)$$

Auf diese Weise ist der Übergang zu neuen kartesischen Koordinatensystemen möglich. Die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen bleibt dabei erhalten.

Die Komponenten des Drehimpulses \vec{L} sind $L_i = \epsilon_{ijk}x_jp_k$, im neuen Koordinatensystem also

$$L'_i = \epsilon_{ijk}x'_jp'_k = \epsilon_{ijk}(R_{jl}x_l)(R_{km}p_m) = (\epsilon_{ijk}R_{jl}R_{km})x_kp_m \quad (5.56)$$

Da R orthogonal ist,

$$R_{pq}R_{iq} = \delta_{pi}, \quad (5.57)$$

lässt sich der Ausdruck $\epsilon_{ijk}R_{jl}R_{km}$ zu folgender Form umschreiben

$$\epsilon_{ijk}R_{jl}R_{km} = \epsilon_{pjk}\delta_{pi}R_{jl}R_{km} = \epsilon_{pjk}(R_{iq}R_{pq})R_{jl}R_{km}. \quad (5.58)$$

Nun ist außerdem wegen (5.17)

$$\epsilon_{pjk}R_{pq}R_{jl}R_{km} = (\det R)\epsilon_{qlm}, \quad (5.59)$$

und damit folgt

$$\epsilon_{pjk}R_{iq}R_{pq}R_{jl}R_{km} = (\epsilon_{pjk}R_{pq}R_{jl}R_{km})R_{iq} = (\det R)\epsilon_{qlm}R_{iq}. \quad (5.60)$$

Daraus ergibt sich für den transformierten Drehimpuls

$$L'_i = (\det R)R_{iq}(\epsilon_{qlm}x_lp_m) = (\det R)R_{iq}L_q. \quad (5.61)$$

_____ ? _____
Sind Sie mit der Rechnung (5.58) und den bis (5.60) folgenden Schritten einverstanden?

Über die mathematische Definition hinaus wird einer physikalischen Größe Vektorcharakter zugeschrieben, wenn sie sich bei Koordinatentransformationen wie eine Geschwindigkeit transformiert, also entsprechend

$$v'_i = R_{ij}v_j \quad \text{für} \quad \det R = 1. \quad (5.62)$$

Polare und axiale Vektoren

Man unterscheidet

- *polare Vektoren*, für die

$$v'_i = R_{ij}v_j \quad \text{für} \quad \det R = \pm 1 \quad (5.63)$$

gilt, und

- *axiale Vektoren*, die bei uneigentlichen Transformationen gespiegelt werden,

$$a'_i = (\det R)R_{ij}a_j. \quad (5.64)$$

Also ist der Drehimpuls ist ein *axialer* Vektor.

Eine Drehung heißt *passiv*, wenn das physikalische System unverändert bleibt, aber das Koordinatensystem gedreht wird. Sie heißt *aktiv*, wenn das Koordinatensystem bleibt, aber das physikalische System gedreht wird. Mathematisch sind beide äquivalent, physikalisch aber streng verschieden.

5.4.3 Transformation des Ortsvektors

Sei \vec{a}' der Ursprung des alten, ungestrichenen Systems im neuen, gestrichenen. Dann hängt der Ortsvektor im gestrichenen System mit dem im ungestrichenen nach

$$\vec{x}' = \vec{a}' + x_j \vec{e}_j, \quad x'_i = a'_i + x_j R_{ij} \quad (5.65)$$

zusammen. Für einen weiteren Punkt mit Ortsvektor \vec{y} ist $y'_i = a'_i + y_j R_{ij}$, d.h. der Verbindungsvektor der beiden Punkte transformiert sich wie

$$x'_i - y'_i = R_{ij}(x_i - y_i). \quad (5.66)$$

Als Vektoren werden in der Physik allgemein solche Größen definiert, die sich wie Koordinatendifferenzen transformieren. Der Ortsvektor ist demnach in diesem Sinne kein Vektor und wird als *gebundener Vektor* bezeichnet.

Kapitel 6

Systeme von Massenpunkten

6.1 Konservative Kraftfelder

6.1.1 Beispiel: Kurvenintegral im Zentralfeld

Betrachten wir als Beispiel das *Zentralfeld*

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad (6.1)$$

das in der Physik häufig auftaucht, und eine Bahnkurve, die im Abstand y parallel zur x -Achse verläuft,

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} vt \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

wobei $t \in [0, 1]$ variiert. Offenbar ist

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

und daher wird das Kurvenintegral des Vektorfeldes \vec{A} längs $\vec{r}(t)$ zu

$$\Phi = \int_0^1 \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_0^1 \frac{v^2 t dt}{[(vt)^2 + y^2]^{3/2}}. \quad (6.4)$$

Um das verbleibende Integral zu lösen, bietet sich die Variablensubstitution

$$\xi := (vt)^2 + y^2, \quad d\xi = 2vt dt \quad (6.5)$$

an. Wegen $t \in [0, 1]$ ist $\xi \in [y^2, v^2 + y^2]$. Damit lässt sich das Integral leicht auswerten, denn

$$\Phi = \int_{y^2}^{v^2+y^2} \frac{d\xi}{2\xi^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{\xi}} \Big|_{y^2}^{v^2+y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{\sqrt{v^2 + y^2}}. \quad (6.6)$$

_____ ? _____
Führen Sie die Integration selbst durch, die auf das Ergebnis (6.4) führt.

6.1.2 Unabhängigkeit vom Weg

Wann ist ein solches Kurvenintegral unabhängig vom Weg? Diese Frage ist auch physikalisch sehr wichtig, weil die physikalische Beschreibung solcher Systeme wesentlich einfacher zu werden verspricht, in denen Kurvenintegrale nicht davon abhängen, entlang welchen Wegs sie ausgeführt werden.

Nehmen wir zunächst an, das Kurvenintegral

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \quad (6.7)$$

sei unabhängig vom Weg. Wir betrachten es hier als Funktion des Endpunkts \vec{r} der Kurve. Wir verlängern die Kurve um ein kleines Stück $d\vec{r}$ und betrachten die Differenz

$$\Phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \Phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + d\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' . \quad (6.8)$$

Wenn $d\vec{r}$ beliebig klein wird, $d\vec{r} \rightarrow d\vec{r}$, kann wie folgt genähert werden,

$$\Phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \Phi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} , \quad (6.9)$$

woraus man sieht, dass \vec{A} dann der *Gradient* des skalaren Feldes Φ sein muss, $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$.

Wenn umgekehrt $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$ ist, ist das Kurvenintegral über \vec{A} vom Weg unabhängig, denn

$$\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{r} = \int_{\Phi(\vec{r}_a)}^{\Phi(\vec{r}_b)} d\Phi = \Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a) , \quad (6.10)$$

was nur von den Endpunkten der Kurve abhängt, aber nicht von ihrem Verlauf.

Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

Wir haben damit also gezeigt, dass ein Kurvenintegral über ein Vektorfeld \vec{A} dann und nur dann vom Weg unabhängig ist, wenn es ein Skalarfeld Φ gibt, dessen Gradient \vec{A} ist, $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$.

Nach welchem Kriterium können wir entscheiden, ob \vec{A} ein Gradientenfeld ist? Da die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = (\varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j\Phi)\vec{e}_k \equiv 0 , \quad (6.11)$$

gilt offenbar, dass $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ ein notwendiges Kriterium ist, d.h. wenn $\vec{\nabla} \times \vec{A} \neq 0$ ist, kann \vec{A} kein Gradientenfeld sein.

_____ ?
Sind Sie von der kurzen Rechnung (6.11) überzeugt? Wenn ja, warum?

Dass es auch hinreichend ist, sieht man an folgender Überlegung. Sei \vec{A} ein Vektorfeld mit $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ und

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{x_a}^x A_x(x', y_a, z_a) dx' + \int_{y_a}^y A_y(x, y', z_a) dy' + \int_{z_a}^z A_z(x, y, z') dz' \quad (6.12)$$

das Kurvenintegral über \vec{A} längs eines Weges, der stückweise parallel zu den drei Koordinatenachsen führt. Offenbar ist nun

$$\partial_z \Phi = A_z(x, y, z), \quad \partial_y \Phi = A_y(x, y, z_a) + \int_{z_a}^z \partial_y A_z(x, y, z') dz' \quad (6.13)$$

und

$$\partial_x \Phi = A_x(x, y_a, z_a) + \int_{y_a}^y \partial_x A_y(x, y', z_a) dy' + \int_{z_a}^z \partial_x A_z(x, y, z') dz'. \quad (6.14)$$

Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ sind $\partial_y A_z = \partial_z A_y$, $\partial_x A_y = \partial_y A_x$ und $\partial_x A_z = \partial_z A_x$. Damit folgt

$$\partial_y \Phi = A_y(x, y, z) \quad \text{und} \quad \partial_z \Phi = A_z(x, y, z), \quad (6.15)$$

also $\vec{\nabla} \Phi = \vec{A}$. Dann ist also \vec{A} der Gradient eines anderen Feldes, und damit ist das Kurvenintegral auch unabhängig von der speziellen Wahl des Weges.

Rotation und Gradientenfeld

Damit haben wir gezeigt, dass die Bedingung $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ notwendig und hinreichend dafür ist, dass \vec{A} ein Gradientenfeld ist.

Diese Schlussfolgerung gilt aber nur dann, wenn \vec{A} überall längs des Integrationsweges definiert ist. Deswegen muss man die Einschränkung anbringen, dass die obige Aussage nur in einem Raumbereich gilt, der „keine Löcher hat“, so dass kein möglicher Integrationsweg durch einen Bereich läuft, in dem \vec{A} nicht definiert ist. Dies wird präzise durch die Definition eines *einfach zusammenhängenden Gebiets* formuliert:

Einfach zusammenhängendes Gebiet

Ein Gebiet G heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in G stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, ohne das Gebiet zu verlassen.

Potential bei Wirbelfreiheit

Kraftfelder \vec{F} , die auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G definiert sind, haben dann und nur dann ein Potential, wenn sie in G *wirbelfrei* sind, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

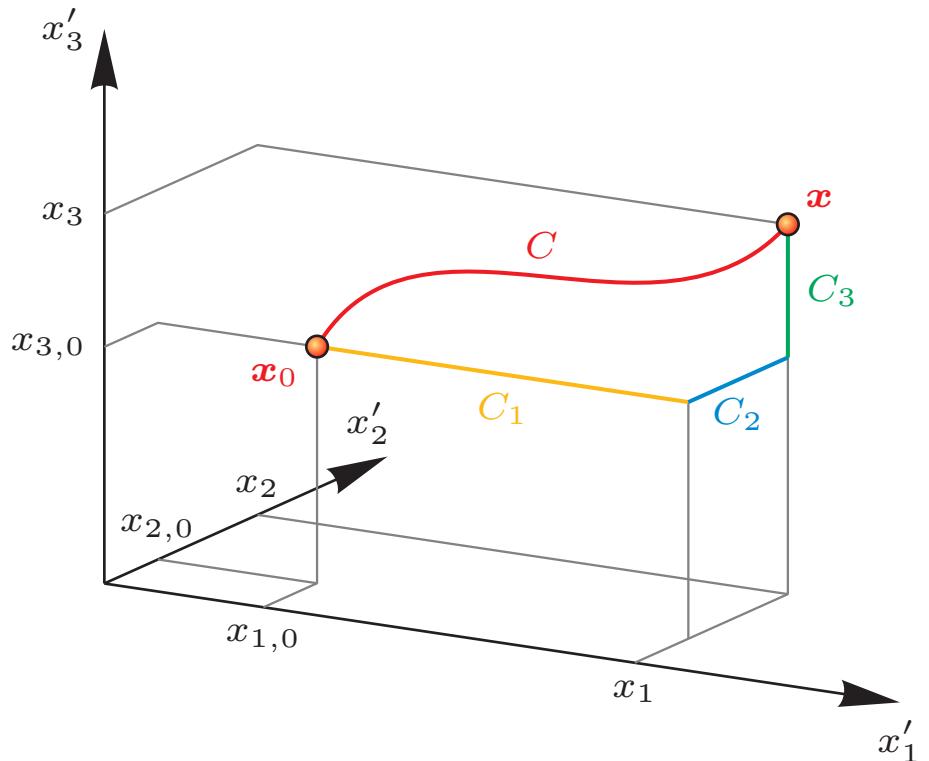


Abb. 6.1 Stückweise Integration in drei Dimensionen. Quelle: TP

6.2 Der Satz von Stokes

Es bietet sich an dieser Stelle an, einen der beiden Integralsätze zu besprechen, die in der Physik sehr wichtig sind, um Integrale über Vektorfelder durch Integrale zu ersetzen, die über *Differentialoperatoren* dieser Vektorfelder ausgeführt werden. Wir werden hier den *Satz von Stokes* behandeln.

Dazu betrachten wir zunächst ein Vektorfeld \vec{A} und ein geschlossenes Kurvenintegral über \vec{A} längs eines infinitesimal kleinen Weges in der x - y -Ebene. Ausgehend vom Punkt (x_0, y_0) gehen wir jeweils parallel zu den Achsen zu den Punkten $(x_0 + dx, y_0)$, $(x_0 + dx, y_0 + dy)$, $(x_0, y_0 + dy)$ und zurück zu (x_0, y_0) .

Dieses spezielle Kurvenintegral lässt sich dann in der Form

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\lambda} = \int_1 A_x(x_0, y_0) dx + \int_2 A_y(x_0 + dx, y_0) dy - \int_3 A_x(x_0 + dx, y_0 + dy) dx - \int_4 A_y(x_0, y_0 + dy) dy \quad (6.16)$$

schreiben, worin die Minuszeichen daher kommen, dass man längs des 3. und des 4. Wegstücks gegen die Achsenrichtung läuft.

Zusätzlich verwenden wir Taylor-Näherungen der Art

$$A_y(x_0 + dx, y_0) = A_y(x_0, y_0) + \partial_x A_y(x_0, y_0) dx, \quad (6.17)$$

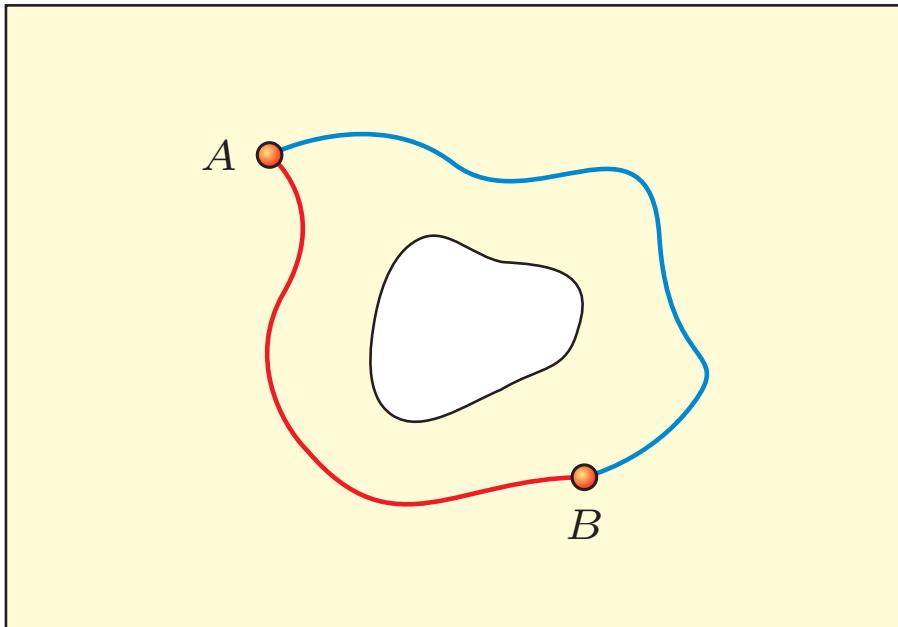


Abb. 6.2 Integration in einem nicht einfach zusammenhängenden Gebiet.
Quelle: TP

um die Komponenten des Feldes \vec{A} an den Eckpunkten des Weges zu bestimmen, und nähern die Integrale durch die Flächeninhalte von Rechtecken an. Dadurch wird (6.16) zu

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\lambda} &= A_x(x_0, y_0)dx \\
 &\quad + [A_y(x_0, y_0) + \partial_x A_y(x_0, y_0)dx]dy \\
 &\quad - [A_x(x_0, y_0) + \partial_y A_x(x_0, y_0)dy]dx \\
 &\quad - A_y(x_0, y_0)dy \\
 &= (\partial_x A_y - \partial_y A_x)dx dy = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_z dx dy. \tag{6.18}
 \end{aligned}$$

Die *Zirkulation* über die infinitesimal kleine, geschlossene Kurve erweist sich also identisch zur Rotation des Feldes \vec{A} in Richtung der Senkrechten zur Fläche, multipliziert mit dem Flächeninhalt.

Wir können dieses Ergebnis auf beliebige Flächen S und ihre (geschlossenen) Randkurven ∂S erweitern, indem wir Flächen in infinitesimale, benachbarte Zellen ds zerlegen und die Zirkulation um ihre Randkurven aufsummieren. Dabei fallen die Beiträge aller Wege heraus, die nicht Teile der Randkurve sind, und wir müssen berücksichtigen, dass wir jeder Zelle eine Richtung geben müssen, die auf ihr senkrecht steht und so orientiert ist, dass sie mit der Orientierung ihrer Randkurve ein Rechtssystem bildet. Das Ergebnis ist der *Stokes'sche Satz*:

Bestätigen Sie das Ergebnis (6.18), indem Sie (6.16) mit (6.17) kombinieren.

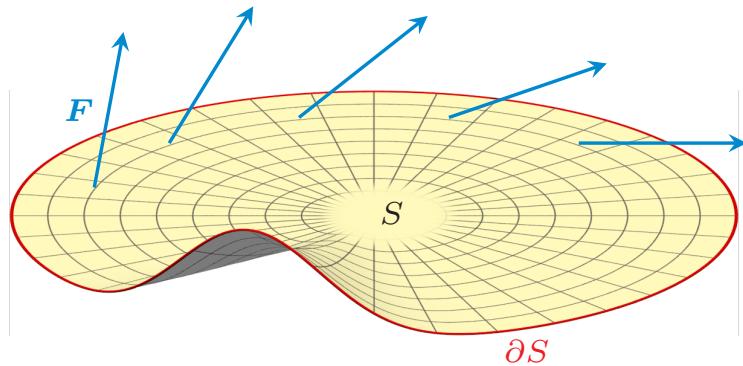


Abb. 6.3 Zur Begründung des Satzes von Stokes. Quelle: TP

Stokes'scher Satz

Das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes ist gleich seiner Zirkulation längs der Randkurve der Fläche,

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{\lambda} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}, \quad (6.19)$$

Wieder gilt die Einschränkung, dass die Fläche S ein einfach zusammenhängendes Gebiet darstellt, weil sich anderenfalls nicht alle Beiträge der Wegelemente im Inneren der Fläche herausheben können.

Der Stokes'sche Satz zeigt, dass das Kurvenintegral eines Vektorfeldes längs eines geschlossenen Weges genau dann verschwindet, wenn das Integral über seine Rotation innerhalb der eingeschlossenen Fläche verschwindet.

Dass die Einschränkung auf zusammenhängende Gebiete sehr wesentlich ist, zeigt das Beispiel eines rotationsfreien, aber nicht konservativen Kraftfeldes.

Dass dieses Kraftfeld nicht konservativ ist, liegt daran, dass wegen der Unstetigkeit des Kraftfeldes für $x_1 = 0 = x_2$ das von der Kurve eingeschlossene Gebiet nicht einfach zusammenhängend ist!

6.3 Systeme von N Massenpunkten

6.3.1 Bewegung des Schwerpunkts

Gegeben seien N Massenpunkte mit den Massen m_i an den Orten \vec{x}_i , $1 \leq i \leq N$. Die Kraft des i -ten Massenpunkts auf den j -ten sei \vec{F}_{ij} , und zusätzlich wirke auf den i -ten Massenpunkt die äußere Kraft $\vec{F}_i^{(e)}$.

Das 3. Newtonsche Axiom verlangt

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}, \quad \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0, \quad (6.27)$$

Beispiel: Rotationsfreies, nicht konservatives Kraftfeld

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

dessen Rotation verschwindet,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} = 0. \quad (6.21)$$

Das Integral über \vec{F} längs der geschlossenen Kurve

$$\vec{x}(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (6.22)$$

beträgt aber

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = 2\pi \neq 0, \quad (6.23)$$

d.h. die Kraft ist *nicht* konservativ! ◀

Beispiel: Physikalisches Beispiel für den Energiesatz

Um ein physikalisches Beispiel zu geben, wenden wir den Energiesatz auf die Bewegung eines Massenpunkts m in einem konstanten Schwerkraftfeld an, das gegen die x_3 -Richtung orientiert sei,

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Seine Rotation verschwindet, und sein Potential ist $V(\vec{x}) = mgx_3$. Also ist die Energie

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + mgx_3 = \text{const.} \quad (6.25)$$

erhalten. Bei einer Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\vec{x}}_0 = v_0 \vec{e}_3$ bei $x_3 = 0$ ist $E = mv_0^2/2$, und der Massenpunkt erreicht die maximale Höhe

$$h = \frac{E}{mg} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (6.26)$$

d.h. die *inneren Kräfte* müssen sich paarweise aufheben. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)} . \quad (6.28)$$

Mithilfe der Gesamtmasse $M = \sum_{i=1}^N m_i$ definieren wir den *Schwerpunkt*

$$\vec{X} := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i . \quad (6.29)$$

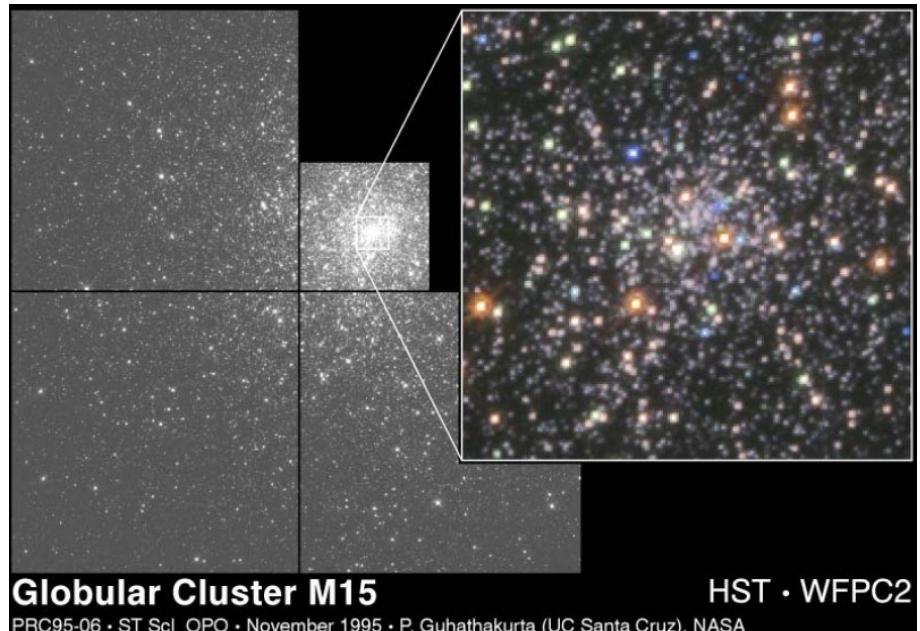


Abb. 6.4 Beispiel für ein System von Massenpunkten: der Kugelsternhaufen M 15. Quelle: Hubblesite, NASA/ESA

Summiert man die Bewegungsgleichungen, erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{x}}_i &= \sum_{i,j \neq i} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} . \end{aligned} \quad (6.30)$$

_____ ? _____
Begründen Sie den Faktor $1/2$ im zweiten Schritt der Gleichung (6.30).

Bewegung des Schwerpunkts

Die inneren Kräfte können zur Dynamik des gesamten Systems nichts beitragen, da sie sich paarweise aufheben. Das Gesamtsystem bewegt sich also so, als wäre seine gesamte Masse in seinem Schwerpunkt vereinigt und als stünde es allein unter dem Einfluss der Resultierenden aller äußeren Kräfte,

$$M \ddot{\vec{X}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(e)} . \quad (6.31)$$

Wenn keine äußeren Kräfte wirken, ist offenbar

$$M\ddot{\vec{X}} = 0 \Rightarrow M\dot{\vec{X}} = \text{konst.} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i =: \vec{P}, \quad (6.32)$$

d.h. der Gesamtimpuls bleibt erhalten. Der Schwerpunkt bewegt sich dann nach

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_0 + \frac{\vec{P}}{M}(t - t_0). \quad (6.33)$$

6.3.2 Drehimpuls

Wir nehmen nun an, dass die inneren Kräfte zwischen zwei Massenpunkten längs der Verbindungsgeraden zwischen diesen Punkten wirken,

$$\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{x}_i - \vec{x}_j), \quad \vec{F}_{ij} \times (\vec{x}_i - \vec{x}_j) = 0. \quad (6.34)$$

Der Drehimpuls des i -ten Massenpunkts bezüglich des Koordinatenursprungs ist

$$\vec{L}_i = \vec{x}_i \times \vec{p}_i = m_i (\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i), \quad (6.35)$$

und der *Gesamtdrehimpuls* des Systems von Massenpunkten ist

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i). \quad (6.36)$$

Er hat die Zeitableitung

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}_i \times \ddot{\vec{x}}_i) = \sum_{i=1}^N \left(\vec{x}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right) + \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} (\vec{x}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{x}_j \times \vec{F}_{ij}) + \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} [(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \times \vec{F}_{ji}] + \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

da die inneren Kräfte sich paarweise aufheben müssen. Innere Kräfte tragen also zu einer Änderung des Gesamtdrehimpulses eines Systems von Massenpunkten *nicht* bei.

_____ ? _____
Können Sie Beispiele für Kräfte zwischen zwei Massenpunkten angeben, die *nicht* längs deren Verbindungsgeraden wirken?

_____ ? _____
Führen Sie die Rechnung selbst durch, die in (6.37) gezeigt wird.

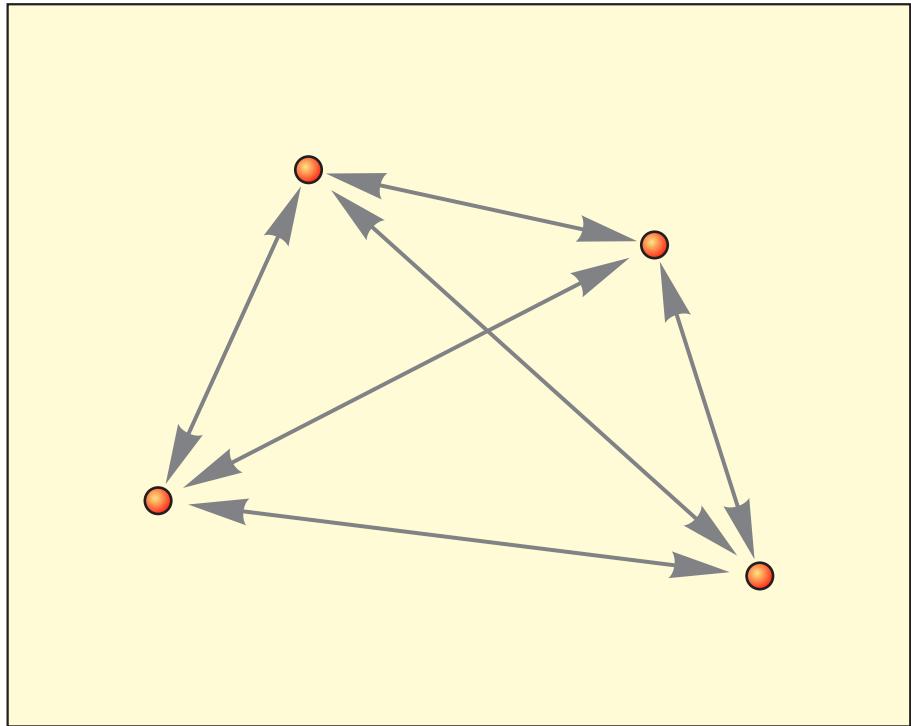


Abb. 6.5 Innere Kräfte zwischen den Teilchen eines Vielteilchensystems heben sich paarweise auf. Quelle: TP

Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

Da das *Gesamtdrehmoment* der äußeren Kräfte bezüglich des Koordinatenursprungs

$$\vec{M} := \sum_{i=1}^N \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \quad (6.38)$$

ist, lautet der Drehimpulssatz für ein System von Massenpunkten demnach

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \quad (6.39)$$

Durch Transformation ins *Schwerpunktsystem* lässt sich der Gesamtdrehimpuls aufteilen. Wenn wir neue Koordinaten \vec{x}' durch

$$\vec{x}'_i = \vec{x}_i - \vec{X} \quad (6.40)$$

einführen, dann ist aufgrund der Definition des Schwerpunkts

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{x}'_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i - M \vec{X} = 0 , \quad (6.41)$$

und damit verschwindet auch der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem, denn

$$\dot{\vec{x}}'_i = \dot{\vec{x}}_i - \dot{\vec{X}} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}'_i = 0 . \quad (6.42)$$

Der Gesamtdrehimpuls lässt sich in die Form

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \sum_{i=1}^N (\vec{x}_i \times m_i \dot{\vec{x}}_i) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{X} + \vec{x}'_i) \times (\dot{\vec{X}} + \dot{\vec{x}}'_i) \\
 &= \vec{X} \times M \dot{\vec{X}} + \left(\vec{X} \times \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}'_i \right) + \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{x}'_i \times \dot{\vec{X}} \right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N (\vec{x}'_i \times m_i \dot{\vec{x}}'_i)
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

bringen, in der der zweite und dritte Term verschwinden.

Aufteilung des Gesamtdrehimpulses

Der Gesamtdrehimpuls lässt sich also aufteilen in den Drehimpuls der Bewegung des Schwerpunkts um den Ursprung, und den gesamten inneren Drehimpuls,

$$\vec{L} = \vec{X} \times M \dot{\vec{X}} + \sum_{i=1}^N (\vec{x}'_i \times m_i \dot{\vec{x}}'_i) . \tag{6.44}$$

6.3.3 Energie

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass die Kräfte zwischen den Massenpunkten *Potentialkräfte* seien, d.h. es sollen Potentiale V_{ji} zwischen den Massenpunkten i und j existieren, so dass

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) . \tag{6.45}$$

Offenbar erfüllen die Potentiale $V_{ij} = V_{ji}$ und $V_{ii} = 0$. Dabei ist

$$\vec{\nabla}_i := \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} \tag{6.46}$$

der Gradient bezüglich der Position \vec{x}_i . Ebenso sollen die äußeren Kräfte Potentialkräfte sein,

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{x}_i) . \tag{6.47}$$

Solche Kräfte erfüllen das 3. Newtonsche Axiom, und sie wirken längs der Verbindungsgeraden der Massenpunkte.

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = - \sum_{j \neq i} \vec{\nabla}_i V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) - \vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{x}_i) . \tag{6.48}$$

Nach Multiplikation mit $\dot{\vec{x}}_i$ ergibt eine Summation über alle i

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i + \sum_{i,j \neq i} \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) + \sum_{i=1}^N \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{x}_i) = 0 . \tag{6.49}$$

Dies kann offenbar als Zeitableitung geschrieben werden,

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq i} V_{ji} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) + \sum_{i=1}^N V_i^{(e)} (\vec{x}_i) \right] = 0 , \quad (6.50)$$

wobei der Faktor $1/2$ vor dem zweiten Term in eckigen Klammern daher kommt, dass $V_{ij} = V_{ji}$ ist. Er sorgt dafür, dass die potentielle Energie des Teilchens i bezüglich des Teilchens j nur einmal gezählt wird, weil sie identisch mit der potentiellen Energie des Teilchens j bezüglich des Teilchens i ist.

Energiesatz

Das ist der *Energiesatz* eines Systems von N Massenpunkten. Die gesamte *kinetische Energie* ist

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 , \quad (6.51)$$

die gesamte *potentielle Energie* ist

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) + \sum_{i=1}^N V_i^{(e)} (\vec{x}_i) , \quad (6.52)$$

und die gesamte Energie bleibt erhalten,

$$E = T + V = \text{const} . \quad (6.53)$$

6.4 Das Zweikörperproblem

Wir spezialisieren hier einige Aussagen, die vorher über Systeme von N Massenpunkten gemacht wurden, auf Situationen, in denen zwei Massenpunkte miteinander wechselwirken. Seien also $N = 2$ Massenpunkte mit den Massen m_1 und m_2 gegeben. Die Wechselwirkungspotentiale

$$V_{12} (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) = V_{21} (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) =: V (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \quad (6.54)$$

müssen identisch sein, d.h. wir können von einem Wechselwirkungspotential sprechen. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_1 \ddot{\vec{x}}_1 = -\vec{\nabla}_1 V (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) , \quad m_2 \ddot{\vec{x}}_2 = -\vec{\nabla}_2 V (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) , \quad (6.55)$$

wobei $\vec{\nabla}_i := \partial_{\vec{x}_i}$ abkürzt. Der Ortsvektor des Schwerpunkts ist

$$\vec{X} = \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2} , \quad (6.56)$$

und wegen der Abwesenheit äußerer Kräfte bewegt er sich geradlinig-
gleichförmig, $\ddot{M}\vec{X} = 0$.

Zur Abkürzung führen wir den Verbindungsvektor $\vec{z} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ein. Ausgedrückt durch ihn lautet die Differenz der beiden Bewegungsgleichungen

$$m_1 m_2 \ddot{\vec{z}} = -m_2 \vec{\nabla}_1 V(|\vec{z}|) + m_1 \vec{\nabla}_2 V(|\vec{z}|) = -(m_1 + m_2) \vec{\nabla} V(|\vec{z}|) , \quad (6.57)$$

denn wegen $r := |\vec{z}|$ sind

$$\vec{\nabla}_1 V = \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial \vec{x}_1} = \frac{dV}{dr} \frac{\vec{z}}{r} \quad (6.58)$$

und

$$\vec{\nabla}_2 V = \frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial \vec{x}_2} = -\frac{dV}{dr} \frac{\vec{z}}{r} = -\nabla V(|\vec{z}|) . \quad (6.59)$$

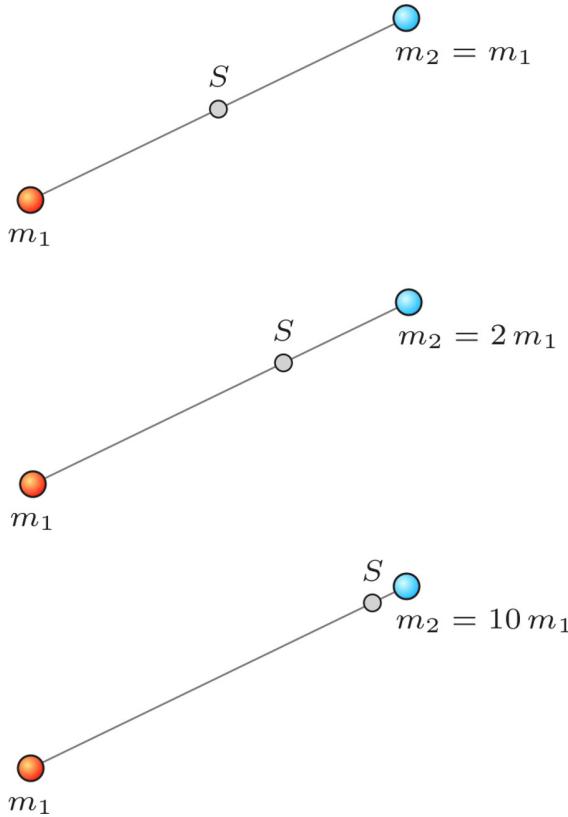


Abb. 6.6 Schwerpunkt zweier Massenpunkte bei drei verschiedenen Massenverhältnissen. Quelle: TP

Das ist die Bewegungsgleichung eines Massenpunkts mit der *reduzierten Masse* μ in einem äußeren Potential V ,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} , \quad \mu \ddot{\vec{z}} = -\vec{\nabla} V(|\vec{z}|) . \quad (6.60)$$

Bei $m_1 = m_2 =: m$ ist die reduzierte Masse $\mu = m/2$, und der Schwerpunkt liegt in der Mitte zwischen den beiden Massen. Bei $m_1 \gg m_2$ ist die reduzierte Masse $\mu \approx m_2$. Das entspricht der Bewegung von m_2 um den „festen“ Massenpunkt m_1 . Der Schwerpunkt liegt annähernd am Ort von m_1 , $\vec{X} \approx \vec{x}_1$, was die nachträgliche Rechtfertigung dafür liefert, die Bewegung eines Planeten um die Sonne durch die Bewegung eines Massenpunktes um die ortsfeste Sonne anzunähern.

Kapitel 7

Bewegung im Zentralfeld

7.1 Krummlinig-orthogonale Koordinaten

7.1.1 Allgemeines

Wir haben bisher vor allem *kartesische Koordinaten* verwendet. Man kann sie dadurch kennzeichnen, dass man drei raumfeste Koordinatenebenen einführt, in denen jeweils eine Koordinate konstant ist, nämlich x_1 in der x_2 - x_3 -, x_2 in der x_1 - x_3 - und x_3 in der x_1 - x_2 -Ebene. In vielen Fällen sind solche Koordinaten für die Beschreibung physikalischer Systeme ungeschickt, weil physikalische Größen auf Flächen konstant sind, die nicht mit den Koordinatenflächen zusammenfallen. Ein Beispiel sind kugelsymmetrische Systeme, deren physikalische Eigenschaften auf Flächen mit konstantem Radius, also Kugeln, konstant sind.

Zur Verallgemeinerung denken wir uns im dreidimensionalen Raum drei Scharen von zunächst beliebigen Koordinatenflächen, die der Symmetrie des Systems angepasst und dadurch definiert sind, dass auf ihnen jeweils ein Parameter q_i konstant ist. Orte im Raum \vec{x} werden dann dadurch angegeben, dass man drei Koordinatenflächen so wählt, dass sie sich in \vec{x} schneiden, und die zu ihnen gehörenden Parameter (q_1, q_2, q_3) als Koordinaten verwendet. Die Einheits-Normalenvektoren der Koordinatenflächen werden als neue Basisvektoren \vec{e}_i verwendet.

Krummlinig-orthogonale Koordinaten

Die neuen Koordinatenflächen sind in der Regel keine Ebenen mehr. Daher spricht man von krummlinigen Koordinaten und, wenn die neuen Basisvektoren orthogonal zueinander sind, von *krummlinig-orthogonalen Koordinaten*.

Abstände im Raum dürfen nicht von den Koordinaten abhängen, die vor ihrer Messung eingeführt wurden. Wegen des Satzes des Pythagoras ist der Abstand ds zweier infinitesimal benachbarter Punkte (im

?

Überlegen Sie sich geeignete Koordinatenflächen, die an verschiedene physikalische Systeme angepasst sind.

euklidischen Raum) durch die Summe der quadratischen Abstände dx_i^2 gegeben,

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \quad (7.1)$$

aber die x_i müssen jetzt als Funktionen der neuen Parameter q_j aufgefasst werden, $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$. Wenn die neue Koordinatenbasis orthonormal ist, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, lässt sich der quadratische Abstand ds^2 in der Form

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \quad (7.2)$$

schreiben, wobei die h_i durch

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right)^2 \quad (7.3)$$

_____ ? _____
Schließen Sie, ausgehend von (7.1), auf die Transformation (7.2) mit den Funktionen (7.3).

gegeben sind. Die Funktionen h_i übersetzen Abstände in den neuen Koordinaten q_i in physikalische Längen.

Gradient in krummlinig-orthogonalen Koordinaten

Die Abstände längs der neuen Koordinatenrichtungen sind $ds_i = h_i dq_i$. Dementsprechend nimmt der Gradient einer Funktion $f(q_1, q_2, q_3)$ in den neuen Koordinaten die Form

$$\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \frac{\vec{e}_i}{h_i} \quad (7.4)$$

an.

7.1.2 Zylinderkoordinaten

Betrachten wir zunächst ein System mit Zylindersymmetrie. Offenbar ist zu seiner Beschreibung eine erste Schar zylindrischer Koordinatenflächen gut geeignet, deren Achsen mit der Symmetrieachse des Systems zusammenfallen. Die einzelnen Koordinatenflächen dieser Schar sind dann durch ihren Abstand ρ von der Zylinderachse gekennzeichnet, die wir willkürlich als \vec{e}_3 bezeichnen. Eine zweite Schar von Koordinatenflächen erhalten wir, indem wir die x_1 - x_3 -Ebene um den Winkel φ um die \vec{e}_3 -Achse drehen. Als dritte Schar von Koordinatenflächen führen wir Flächen ein, die den Zylinder senkrecht im Abstand z von der x_1 - x_2 -Ebene schneiden. Diese drei Koordinatenflächen sind jeweils durch die Konstanz der drei Parameter $\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $z \in (-\infty, \infty)$ definiert.

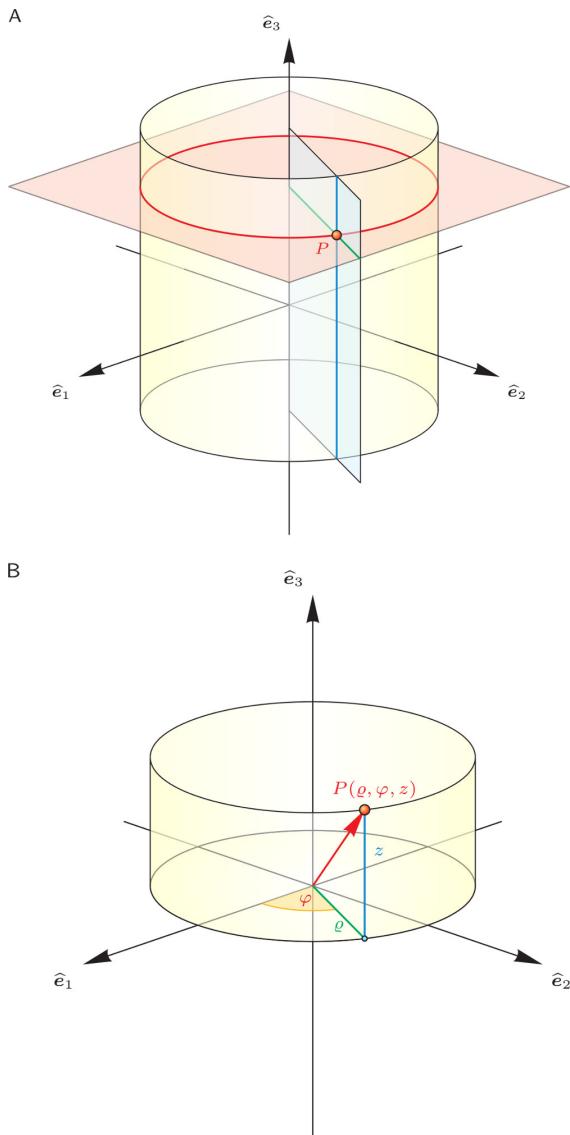


Abb. 7.1 Zylinderkoordinaten. Quelle: TP

Ihre Einheits-Normalenvektoren bilden die Basis \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ und \vec{e}_z . Aufgrund ihrer Konstruktion hängen sie mit den kartesischen Einheitsvektoren durch

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

$$\vec{e}_\varphi = \cos \varphi \vec{e}_2 - \sin \varphi \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zusammen. Wegen $x_1 = \rho \cos \varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$ und $x_3 = z$ gilt aufgrund von (7.3)

$$h_\rho^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1, \quad h_\varphi^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2, \quad (7.6)$$

$$h_z^2 = 1.$$

Demnach ist der infinitesimale quadratische Abstand

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 . \quad (7.7)$$

Gradient in Zylinderkoordinaten

Deswegen und mit (7.4) lautet der Gradient einer Funktion $f(\rho, \varphi, z)$ in Zylinderkoordinaten

$$\vec{\nabla}f = \vec{e}_\rho \partial_\rho f + \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho} \partial_\varphi f + \vec{e}_z \partial_z f . \quad (7.8)$$

7.1.3 Sphärische Polarkoordinaten

Sphärische Polarkoordinaten sind dann angemessen, wenn das betrachtete System Kugelsymmetrie hat. Entsprechend führt man zunächst Kugelflächen als eine Schar von Koordinatenflächen ein. Dann wählt man \vec{e}_3 als (beliebige) Polachse und führt als zweite Schar von Koordinatenflächen solche ein, die durch Drehung der x_1 - x_3 -Ebene um den Winkel φ um die \vec{e}_3 -Achse entstehen. Als dritte Schar von Koordinatenflächen wählt man Kegelflächen um die \vec{e}_3 -Achse mit Öffnungswinkel θ . Auf diesen drei Koordinatenflächen sind also jeweils $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\theta \in [0, \pi]$ konstant.

Entsprechend dieser Konstruktion sind die Einheits-Normalenvektoren in sphärischen Polarkoordinaten durch

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \vec{e}_\theta &= \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.9)$$

gegeben.

Wegen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (7.10)$$

ergeben sich die Funktionen $h_1 = h_r$, $h_2 = h_\varphi$ und $h_3 = h_\theta$

$$\begin{aligned} h_r^2 &= \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 , \\ h_\varphi^2 &= r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \theta , \\ h_\theta^2 &= r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \sin^2 \theta = r^2 . \end{aligned} \quad (7.11)$$

Aus dem infinitesimalen quadratischen Wegelement wird

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2 . \quad (7.12)$$

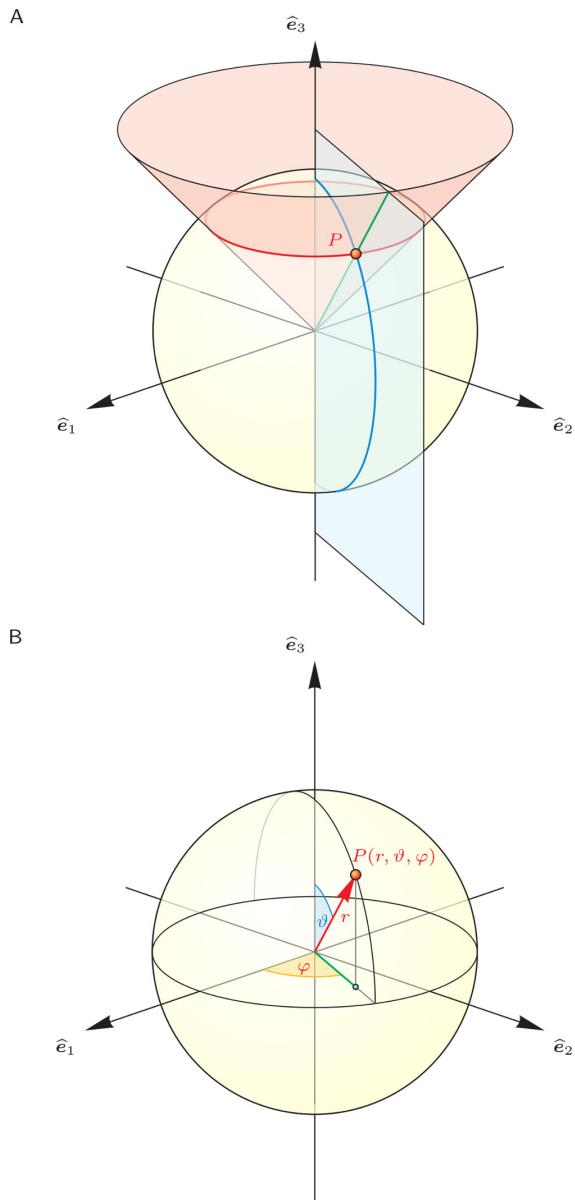


Abb. 7.2 Sphärische Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten). Quelle: TP

Gradient in sphärischen Polarkoordinaten

Damit lässt sich der Gradient in sphärischen Polarkoordinaten in der Form

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_r \partial_r f + \frac{\vec{e}_\vartheta}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta f + \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \partial_\varphi f \quad (7.13)$$

darstellen.

Für eine radialsymmetrische Funktion $f(r)$, die also nur vom Radius r abhängt, aber nicht von den Winkeln θ und φ , erhalten wir daraus das bekannte Ergebnis

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{df(r)}{dr} \vec{e}_r = f'(r) \vec{e}_r \quad (7.14)$$

auf sehr einfache Weise.

_____ ? _____
Überprüfen Sie auch die Ergebnisse (7.12) und (7.13) selbst.

7.2 Keplerproblem: Bewegung im Zentralfeld

7.2.1 Drehimpuls

Wie in (4.61) erwähnt, haben Zentralkräfte die Form

$$\vec{F}(\vec{x}) = F(r) \frac{\vec{x}}{r} = F(r) \vec{e}_r . \quad (7.15)$$

Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in das Kraftzentrum. In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass Zentralkräfte immer ein Potential haben, das wir in (4.62) explizit konstruieren konnten.

Unter dem Einfluss einer Zentralkraft bleibt der Drehimpuls erhalten, denn das Drehmoment

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} = 0 \quad (7.16)$$

verschwindet wegen der radialen Orientierung der Kraft, $\vec{F} \parallel \vec{x}$. Außerdem ist

$$\vec{x} \cdot \vec{L} = \vec{x} \cdot (\vec{x} \times \vec{p}) = \vec{p} \cdot (\vec{x} \times \vec{x}) = 0 , \quad (7.17)$$

d.h. die Bewegung verläuft vollständig in einer Ebene senkrecht zu \vec{L} , der *Bahnebene*. Wir wählen als Bahnebene die x_1 - x_2 -Ebene, dann sind $L_3 = |\vec{L}|$ und $\vec{L} = L_3 \vec{e}_3$.

Im infinitesimalen Zeitintervall dt überstreicht der Ortsvektor \vec{x} das Flächenelement

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{x} \times (\dot{\vec{x}} dt)] , \quad (7.18)$$

also ist

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m} = \text{const} . \quad (7.19)$$

Zweites Kepler'sches Gesetz

Demnach besagt der Drehimpulssatz im Zentralfeld, dass die Flächen geschwindigkeit konstant ist:

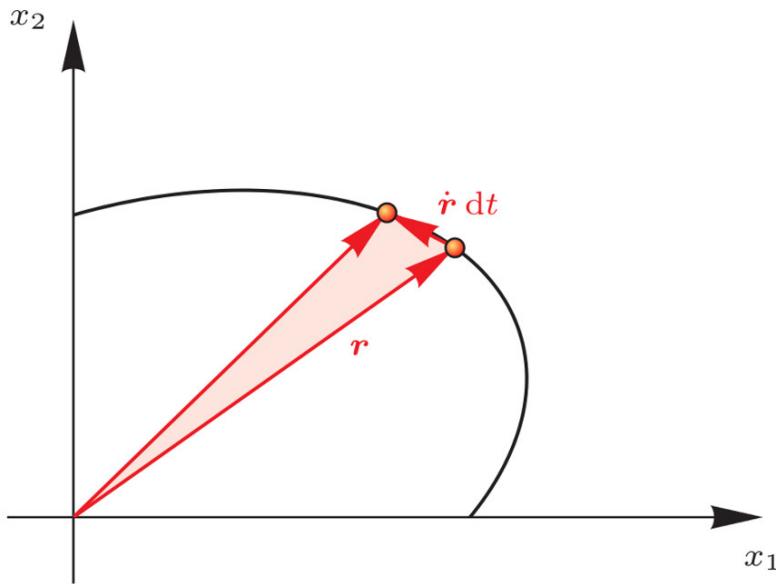
Der *Fahrstrahl* vom Zentrum zum umlaufenden Körper überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Das ist bereits das 2. Kepler'sche Gesetz.

Entsprechend der Drehsymmetrie des Systems um die Drehimpulsachse \vec{e}_3 führen wir nun *Zylinderkoordinaten* ein, mit denen ebene Polarkoordinaten in der Bahnebene verbunden sind. Abweichend von (7.5) nennen wir den Zylinderradius r statt ρ und den Einheits-Normalenvektor in radialer Richtung entsprechend \vec{e}_r statt \vec{e}_ρ . Dann sind Orts- und Geschwindigkeitsvektor durch

$$\vec{x}(t) = r \vec{e}_r , \quad \dot{\vec{x}}(t) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \quad (7.20)$$

A



B

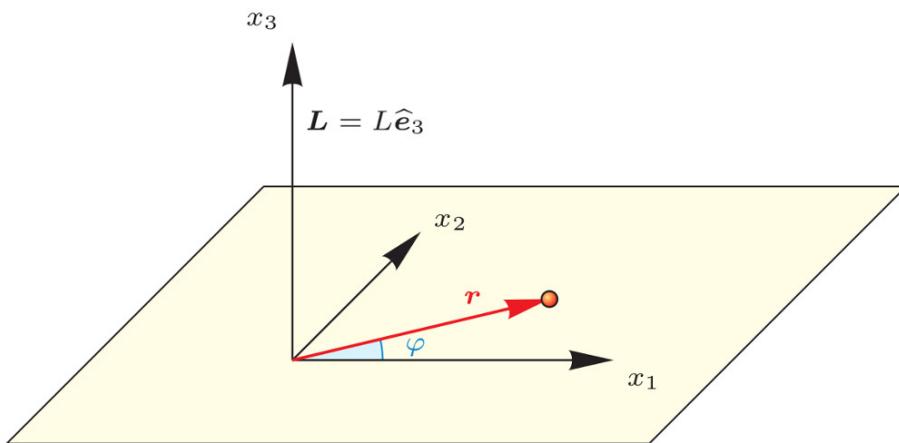


Abb. 7.3 Zum Flächensatz. Quelle: TP

gegeben.

Für den Drehimpuls erhalten wir

$$\vec{L} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}} = mr\vec{e}_r \times (r\dot{\vec{e}}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z . \quad (7.21)$$

Er zeigt aufgrund unserer Konstruktion der Bahnebene in \vec{e}_z -Richtung und hat den Betrag

$$L = mr^2\dot{\varphi} . \quad (7.22)$$

7.2.2 Energie

Wir wissen bereits aus Kapitel 4, dass zu einem Zentraffeld immer eine potentielle Energie $V(r)$ existiert. Wegen

$$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (7.23)$$

lautet der *Energiesatz*

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.} \quad (7.24)$$

Mithilfe des Drehimpulssatzes können wir $\dot{\varphi}$ aufgrund von (7.22) eliminieren,

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}, \quad (7.25)$$

wobei L konstant ist. Damit folgt:

Energiesatz im Zentraffeld

Die Gesamtenergie eines Körpers unter dem Einfluss einer Zentralkraft ist

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \right]. \quad (7.26)$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern hängt nur von r ab. Er heißt *effektives Potential*

$$V_L(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (7.27)$$

Der Beitrag des Drehimpulses heißt *Zentrifugalpotential*. Es ist offenbar abstoßend, denn

$$\frac{d}{dr} \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{L^2}{mr^3} \leq 0. \quad (7.28)$$

7.3 Keplerproblem: Arten der Bewegung

7.3.1 Bewegung im effektiven Potential

Die Bewegung im effektiven Potential sieht aus wie eine eindimensionale Bewegung. Sie hat also die implizite Lösung (3.44),

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V_L(r')]}}. \quad (7.29)$$

Daraus erhält man $r(t)$ durch Umkehrung, und schließlich $\varphi(t)$ aus dem Drehimpulssatz, $\dot{\varphi} = L/(mr^2)$,

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')}. \quad (7.30)$$

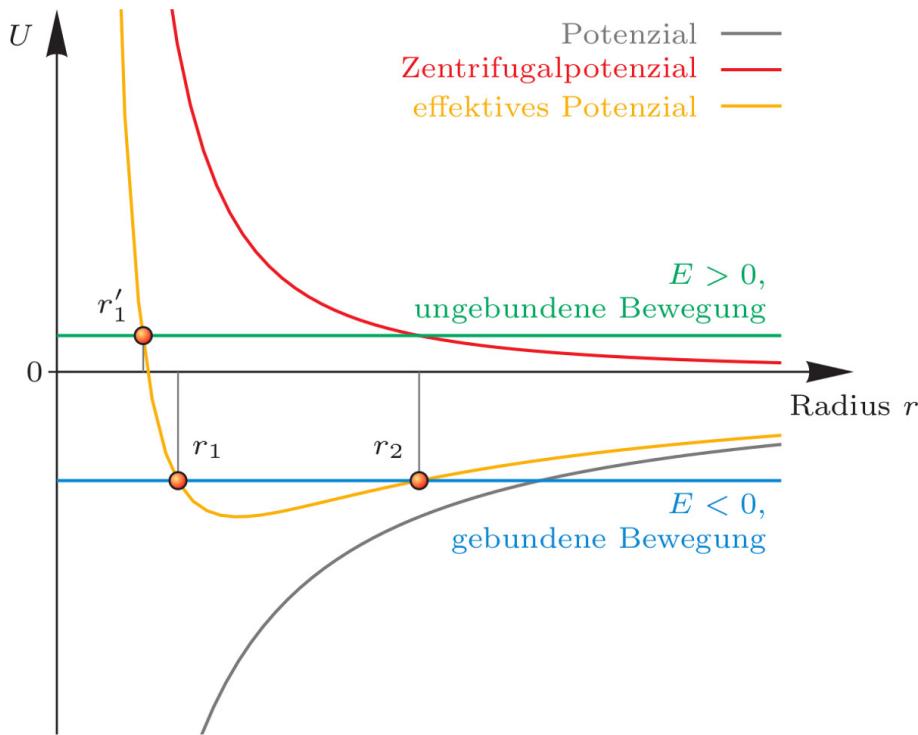


Abb. 7.4 Zentral-, Zentrifugal- und effektives Potential. Quelle: TP

Zur Berechnung der Bahnkurve, also $r(\varphi)$, kehren wir zum Energiesatz in der Form

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E - V_L(r)) \quad (7.31)$$

zurück, verwenden die Drehimpulserhaltung ausgedrückt durch (7.25) und schreiben

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 =: r'^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\varphi}^2} = \frac{2mr^4}{L^2} [E - V_L(r)] . \quad (7.32)$$

Nun lohnt es sich, anstelle von r den reziproken Radius $u := r^{-1}$ einzuführen und

$$r' = -\frac{u'}{u^2} \quad (7.33)$$

in (7.32) zu verwenden. Dadurch erhalten wir die einfache Bewegungsgleichung

$$u'^2 = \frac{2m}{L^2} [E - V_L(u^{-1})] \quad (7.34)$$

für den reziproken Radius.

Zu ihrer vollständigen Lösung brauchen wir sechs Integrationskonstanten (je drei Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit). Diese sechs Konstanten können beispielsweise durch die Komponenten des Drehimpulses \vec{L} , die Energie E und die ebenen Polarkoordinaten (r_0, φ_0) des Anfangspunkts angegeben werden.

_____ ? _____
Können Sie die Gleichung (7.34) für den reziproken Radius bestätigen?

Finite Bahnen sind *geschlossen*, wenn sich $\varphi - \varphi_0$ bei jedem Umlauf um einen rationalen Bruchteil von 2π ändert, denn dann kehrt der Massenpunkt nach einer ganzen Zahl von Umläufen wieder in den Ausgangspunkt zurück. Im Allgemeinen sind finite Bahnen *nicht geschlossen*, außer wenn die potentielle Energie wie $V(r) \propto r^{-1}$ oder $V(r) \propto r^2$ skaliert.

Die Bahnen sind symmetrisch zwischen den Umkehrpunkten $r_{\min} = u_+^{-1}$ und $r_{\max} = u_-^{-1}$, an denen die radiale Geschwindigkeit $\dot{r} = 0$ bzw. $u' = 0$ wird.

7.3.2 Geschlossene und offene Bahnen



Abb. 7.5 Tycho Brahe (1546–1601, links), und Johannes Kepler (1571–1630). Quelle: Wikipedia

Wie gut ist die Näherung begründet, dass die Sonne bei der Behandlung der Planetenbewegung als ortsfest angesehen werden kann?

Zur Behandlung des *Keplerproblems* nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die Sonne ortsfest sei, d.h. die Planeten laufen um eine unbewegte Zentralmasse.

Wir schreiben die *Gravitationskraft* in der Form

$$\vec{F}_G = -\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r, \quad \alpha := GMm, \quad (7.35)$$

wobei M die Masse der Sonne und $m \ll M$ die Masse eines umlaufenden Körpers sei.

Die potentielle Energie im Gravitationsfeld ist

$$V(r) = \int^r \frac{\alpha}{r'^2} dr' = -\frac{\alpha}{r} + \text{const.} \quad (7.36)$$

Die Integrationskonstante wählen wir so, dass $V(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$. Das effektive Potential (mit Zentrifugalpotential), bereits durch den reziproken Radius u ausgedrückt, ist also

$$V_L(u^{-1}) = \frac{L^2 u^2}{2m} - \alpha u . \quad (7.37)$$

Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$u'^2 = \frac{2mE}{L^2} - u^2 + \frac{2m\alpha}{L^2} u . \quad (7.38)$$

Wegen der Konstanz des Drehimpulses und der Energie führt eine weitere Ableitung nach φ auf

$$2u'u'' + 2uu' = \frac{2u'}{p} , \quad p := \frac{L^2}{m\alpha} . \quad (7.39)$$

Die Größe p , die wir hier abkürzend eingeführt haben, hat die Dimension einer Länge. Sie gibt die räumliche Ausdehnung der Bahn vor. Nun ist entweder $u' = 0$, was einer (eher langweiligen) Kreisbahn entspricht, oder wir können durch u' teilen.

Bewegungsgleichung im Zentralfeld

Die Bewegungsgleichung für den reziproken Radius u einer Bahn im Zentralfeld ist die einfache inhomogene Oszillatorgleichung

$$u'' + u = \frac{1}{p} . \quad (7.40)$$

Finite Bahnen sind möglich, wenn $E - V_L$ zwei Nullstellen im Endlichen hat, also bei endlichen Radien r . Da V_L für $r \rightarrow \infty$ gegen Null geht, ist dafür eine negative Gesamtenergie E nötig. Man spricht dann auch von einer *gebundenen Bewegung*. Ist $E \geq 0$, wird die Bahn ungebunden, weil der umlaufende Körper dann ins Unendliche verschwindet.

Die (reziproken) Umkehrpunkte u_{\pm} einer finiten Bewegung sind durch den Energiesatz bestimmt,

$$u'^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_L(u_{\pm}^{-1}) = E . \quad (7.41)$$

Daraus erhält man zunächst mit (7.38) die gemischt-quadratische Gleichung

$$u^2 - \frac{2u}{p} - \frac{2mE}{L^2} = 0 , \quad (7.42)$$

die durch

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{p} \pm \sqrt{\frac{4}{p^2} + \frac{8mE}{L^2}} \right] = \frac{1}{p} (1 \pm \varepsilon) \quad (7.43)$$

gelöst wird, wobei die dimensionslose Größe

$$\varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2mEp^2}{L^2}} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \quad (7.44)$$

eingeführt wurde. Entsprechend (7.43) gibt sie an, wie stark die Bahn von einem Kreis abweicht und wird daher *numerische Exzentrizität* genannt. Für gebundene Bahnen muss $E < 0$ vorausgesetzt werden, im Einklang mit unserer früheren Diskussion, weil die Bahn anderenfalls ins Unendliche reichen würde.

Der sonnennächste Punkt der Bahn, *Perihel* genannt, wird beim reziproken Abstand $u_+ = p^{-1}(1 + \varepsilon)$ bzw. dem Perihelradius $r_{\min} = p(1 + \varepsilon)^{-1}$ durchlaufen. Dort ist die potentielle Energie minimal, die Umlaufgeschwindigkeit also maximal.

7.4 Keplerproblem: Form der Bahnen

7.4.1 Lösung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung (7.40) hat die allgemeine Lösung

$$u = A \cos \varphi + B \sin \varphi + \frac{1}{p} \quad (7.45)$$

mit zunächst beliebigen Konstanten A und B . Wir wählen sie so, dass der Perihelabstand u_+ bei $\varphi = 0$ durchlaufen wird. Dort muss dann auch $u' = 0$ sein. Daraus folgen mit (7.45) die beiden Bedingungen

$$A + \frac{1}{p} = \frac{1 + \varepsilon}{p} \quad \text{und} \quad B = 0. \quad (7.46)$$

Vollständige Lösung der Bewegungsgleichung

Die so spezifizierte, vollständige Lösung der Bewegungsgleichung lautet also

$$u = \frac{1 + \varepsilon \cos \varphi}{p} \quad \text{bzw.} \quad r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (7.47)$$

Das ist die allgemeine Form der Bahnkurve im Keplerproblem. Das Perihel liegt bei $\varphi = 0$, denn dann ist $r(\varphi)$ minimal.

7.4.2 Kegelschnitte

Bei den Bahnkurven, die durch (7.47) beschrieben werden, handelt es sich um *Kegelschnitte*. Das kann man leicht einsehen, indem man einen Kegel konstruiert, dessen Symmetriearchse zunächst mit der z -Achse zusammenfällt. Sein Mantel wird durch den Ortsvektor

$$\vec{x}_K = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.48)$$

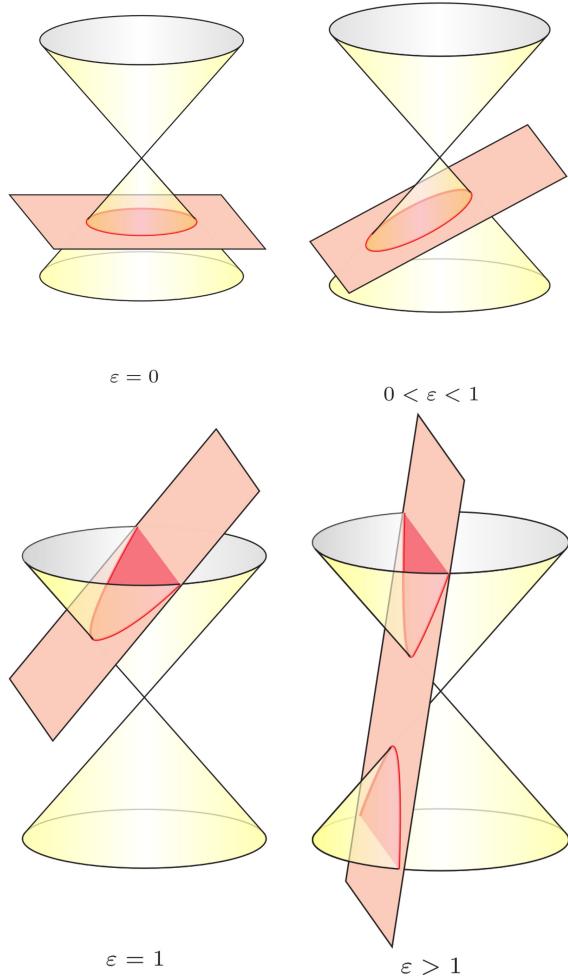


Abb. 7.6 Kegelschnitte. Quelle: TP

beschrieben, wenn wir der Einfachheit halber annehmen, dass der Kegel einen Öffnungswinkel von 45° hat.

Diesen Kegel kippen wir um einen Winkel β um die y -Achse, indem wir die Drehmatrix

$$R = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (7.49)$$

auf den Ortsvektor \vec{x}_K des Kegelmantels aus (7.48) anwenden. Das ergibt den Ortsvektor

$$\vec{x}'_K = R \vec{x}_K = r \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \varphi - \sin \beta \\ \sin \varphi \\ \sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \end{pmatrix} \quad (7.50)$$

des gekippten Kegelmantels.

Diesen schneiden wir nun mit einer Ebene parallel zur x - y -Ebene in der Höhe h . Diese Ebene schneidet der gekippte Kegelmantel entlang einer Kurve, die durch

$$h = x'_{K,3} = r(\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta) \quad (7.51)$$

oder

$$r = \frac{h}{\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta} \quad (7.52)$$

gegeben ist.

Bahnkurven im Zentralfeld sind Kegelschnitte

Setzen wir

$$p = \frac{h}{\cos \beta}, \quad \varepsilon = \tan \beta, \quad (7.53)$$

sind diese Kurven, die Kegelschnitte, identisch mit den Bahnkurven $r(\varphi)$ aus (7.47).

7.4.3 Kreis- und Ellipsenbahnen

Für $\varepsilon = 0$ oder $\beta = 0$ ist

$$E = -\frac{ma^2}{2L^2} = -\frac{\alpha}{2p}. \quad (7.54)$$

Da p per Definition konstant ist, ist nach (7.47) $r = p = \text{konst}$, d.h. der Körper bewegt sich auf einer *Kreisbahn*.

Für $\varepsilon < 1$ oder $\beta < \pi/4$ muss $E < 0$ sein. Damit verläuft die Bahn vollständig im Endlichen, denn $1 + \varepsilon \cos \varphi > 0$ für alle φ .

Die Bahn ist dann ein endlicher Kegelschnitt, d.h. ein Kegelschnitt unter einem Winkel, der kleiner als der Öffnungswinkel des Kegels ist. Solche Kegelschnitte sind *Ellipsen*: Nach Definition ist eine Ellipse die Menge aller Punkte, für die die Summe der Abstände r und r' von zwei festen Punkten, den Brennpunkten, konstant ist, $r + r' = 2a$, wobei a die große Halbachse ist. Die kleine Halbachse ist $b = \sqrt{a^2 - f^2}$, wenn f der Abstand zwischen Brenn- und Mittelpunkt der Ellipse ist. Die *numerische Exzentrizität* der Ellipse ist definiert als

$$\varepsilon := \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (7.55)$$

Für den Vektor \vec{r}' gilt

$$\vec{r}' = 2f\vec{e}_1 + \vec{r}. \quad (7.56)$$

Sein Betragsquadrat ist also

$$r'^2 = r^2 + 4f^2 + 4fr \cos \varphi. \quad (7.57)$$

Nach Definition der Ellipse ist außerdem

$$\begin{aligned} r'^2 &= (2a - r)^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar \\ \Rightarrow 4r(f \cos \varphi + a) &= 4(a^2 - f^2) \\ \Rightarrow r &= \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \end{aligned} \quad (7.58)$$

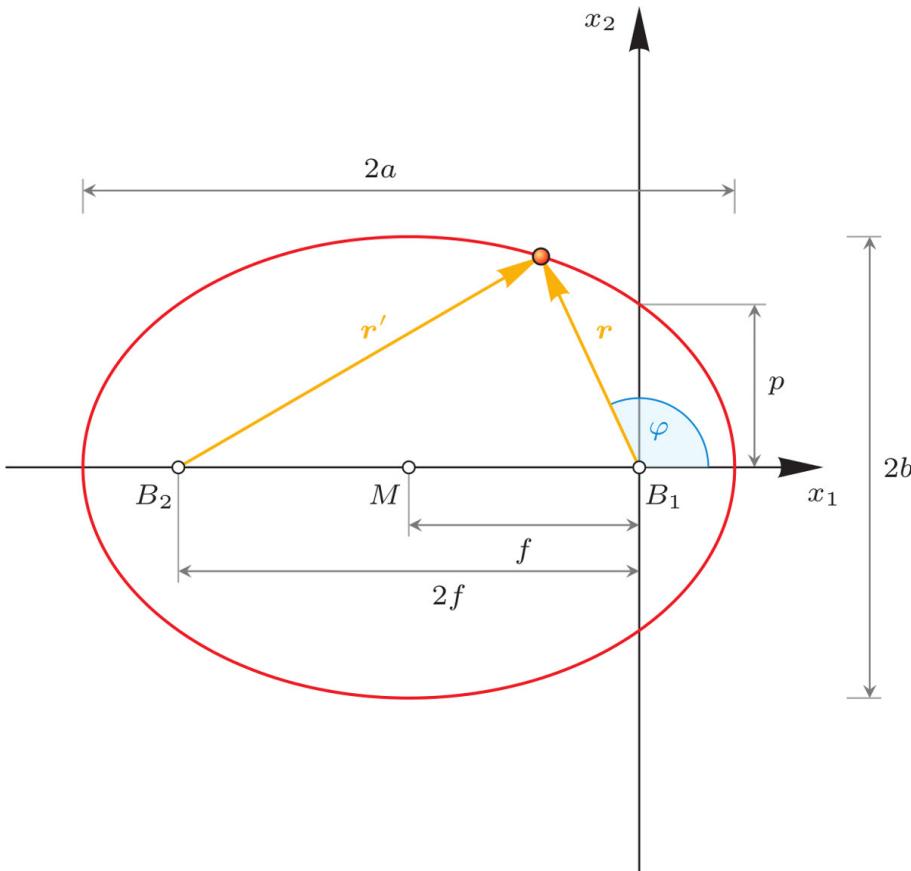


Abb. 7.7 Zur Definition der Ellipse: eine Ellipse ist die Menge aller Punkte einer Ebene, deren Abstandssumme zu zwei vorgegebenen Punkten, den Brennpunkten, konstant = $2a$ ist. Quelle: TP

mit $f = \varepsilon a$. Das ist identisch mit der Gleichung für die Bahnkurve, falls $p = a(1 - \varepsilon^2)$ gesetzt wird. Damit folgt das 1. Kepler'sche Gesetz:

Erstes Kepler'sches Gesetz

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Die Energie ist

$$E = -\frac{\alpha^2 m}{2L^2} (1 - \varepsilon^2) . \quad (7.59)$$

Wegen der Definition von p folgt

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{p}{a} = \frac{L^2}{\alpha m a} \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{\alpha}{2a} . \quad (7.60)$$

Die Energie hängt offenbar nur von der großen Bahnhalbachse a ab, während ε zusätzlich durch den Drehimpuls bestimmt wird.

Aus dem Flächensatz

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{konst.} \quad (7.61)$$

folgt

$$A = \text{Fläche der Ellipse} = \frac{L}{2m}\tau, \quad (7.62)$$

wobei τ die Umlaufzeit ist.

Andererseits ist die Fläche einer Ellipse $A = \pi ab$. Wegen

$$b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{ap} = \sqrt{\frac{L^2 a}{am}} \quad (7.63)$$

folgt insgesamt

$$A = \pi L \sqrt{\frac{a^3}{am}} = \frac{L}{2m}\tau \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\pi^2 m a^3}{\alpha}. \quad (7.64)$$

Das ist das 3. Kepler'sche Gesetz:

Drittes Kepler'sches Gesetz

Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Bahnhalbachsen.

7.4.4 Parabel- und Hyperbelbahnen

Für $\varepsilon = 1$ oder $\beta = \pi/4$ ist $E = 0$, d.h.

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \varphi \rightarrow \pm\pi. \quad (7.65)$$

Die Bahn ist eine Parabel, denn nach Definition der Parabel (vgl. Abb. 7.8) ist

$$r' = f - r \cos \varphi = r, \quad \text{also} \quad r = \frac{f}{1 + \cos \varphi}. \quad (7.66)$$

Der umlaufende Körper entweicht damit ins Unendliche.

Für $\varepsilon > 1$ oder $\beta > \pi/4$ ist $E > 0$, d.h. $r \rightarrow \infty$ für $1 + \varepsilon \cos \varphi \rightarrow 0$. Das ist der Fall für

$$\bar{\varphi} = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) > \frac{\pi}{2}. \quad (7.67)$$

Wegen $r \geq 0$ muss $1 + \varepsilon \cos \varphi \geq 0$ sein, wodurch $|\varphi| \leq \bar{\varphi}$ eingeschränkt wird. Die Bahnkurve ist ein Hyperbelast.

7.4.5 Der Laplace-Lenz-Runge-Vektor

Der folgende Vektor heißt *Laplace-Lenz-Runge-Vektor*:

$$\vec{Q} = \frac{1}{\alpha} (\dot{\vec{x}} \times \vec{L}) - \vec{e}_r. \quad (7.68)$$

Um seine Zeitableitung zu berechnen, verwenden wir

$$\dot{\vec{L}} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{L}{mr^2} \vec{e}_\varphi . \quad (7.69)$$

und ersetzen

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{F(r)}{m} \vec{e}_r = -\frac{\alpha}{mr^2} \vec{e}_r . \quad (7.70)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{1}{\alpha} (\ddot{\vec{x}} \times \vec{L}) - \dot{\vec{e}}_r = -\frac{L}{mr^2} \vec{e}_r \times \vec{e}_z - \frac{L}{mr^2} \vec{e}_\varphi = 0 , \quad (7.71)$$

denn $\vec{e}_r \times \vec{e}_z = -\vec{e}_\varphi$.

Also ist auch \vec{Q} eine Invariante der Bewegung. Außerdem ist offenbar $\vec{L} \cdot \vec{Q} = 0$, d.h. \vec{Q} liegt in der Bahnebene. Nun ist

$$\vec{x} \cdot \vec{Q} = \frac{1}{\alpha} [\vec{x} \cdot (\dot{\vec{x}} \times \vec{L})] - r = \frac{L^2}{am} - r = rQ \cos \varphi , \quad (7.72)$$

und daraus ergibt sich

$$r = \frac{L^2/(\alpha m)}{1 + Q \cos \varphi} = \frac{p}{1 + Q \cos \varphi} . \quad (7.73)$$

Ortsfestes Perihel

Der Betrag des Laplace-Lenz-Runge-Vektors \vec{Q} ist also die numerische Exzentrizität ε , und \vec{Q} zeigt zum Perihel. Die Konstanz von \vec{Q} besagt also, dass die numerische Exzentrizität unverändert bleibt, ebenso wie die Lage des Perihels.

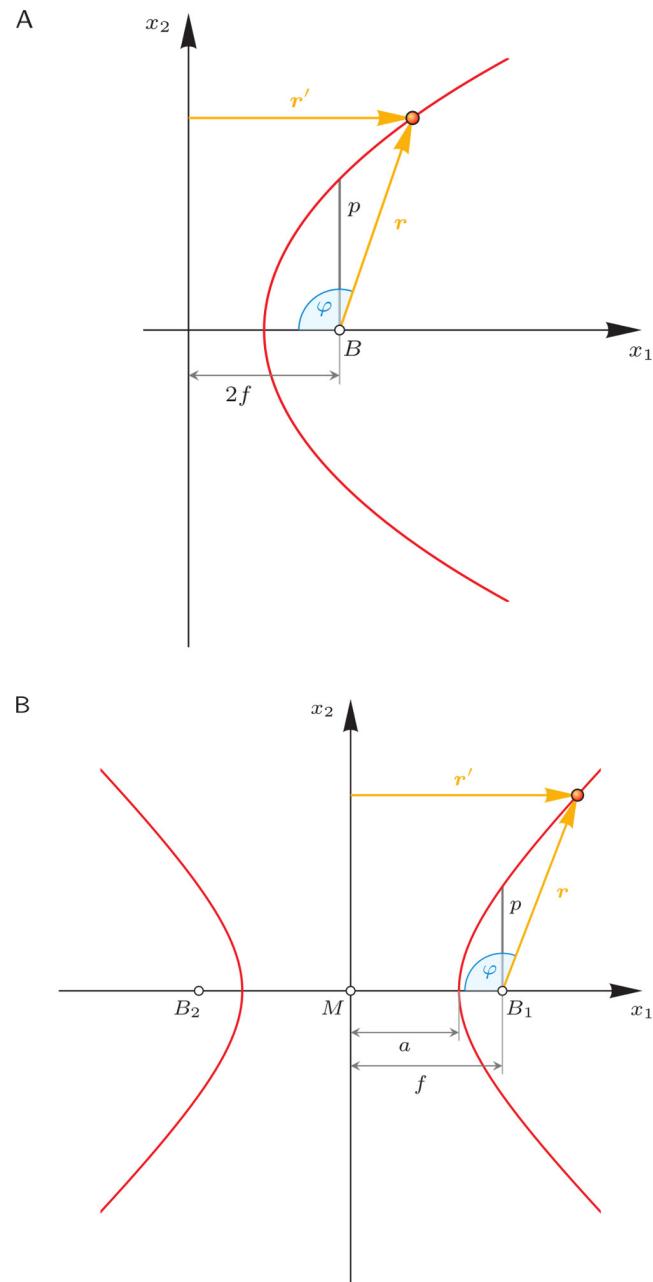


Abb. 7.8 Zur Definition der Parabel (oben) und der Hyperbel (unten): Eine Parabel ist die Menge aller Punkte einer Ebene, deren Abstand von einer Linie (der Leitlinie) und einem Punkt (dem Brennpunkt) gleich ist, $r' = r$. Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte einer Ebene, deren Abstände von einer Leitlinie und einem Punkt in einem festen Verhältnis stehen, $r/r' = \varepsilon$.
Quelle: TP

Kapitel 8

Stöße und Streuung

8.1 Stöße und Streuung

8.1.1 Elastischer Stoß zwischen zwei Teilchen

Elastisch heißt ein Stoß zwischen zwei Teilchen, wenn in seinem Verlauf keine mechanische Energie in andere Energieformen (z.B. durch Verformung oder innere Anregung) umgewandelt wird. Wir können also bei der Beschreibung eines elastischen Stoßes von den Erhaltungssätzen des Impulses und der Energie Gebrauch machen.

Gegeben seien wieder zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 . Ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoß seien $\vec{v}_{i,1}$ und $\vec{v}_{i,2}$, nach dem Stoß $\vec{v}_{f,1}$ und $\vec{v}_{f,2}$ („i“ und „f“ für „initial“ und „final“).

Die Impulserhaltung fordert

$$m_1 \vec{v}_{i,1} + m_2 \vec{v}_{i,2} = m_1 \vec{v}_{f,1} + m_2 \vec{v}_{f,2} , \quad (8.1)$$

während die Energieerhaltung

$$\frac{m_1}{2} \vec{v}_{i,1}^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_{i,2}^2 = \frac{m_1}{2} \vec{v}_{f,1}^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_{f,2}^2 \quad (8.2)$$

verlangt. Welche Aussagen sind allein aufgrund der Erhaltungssätze möglich?

Nach Transformation ins Schwerpunktsystem werden die Massenpunkte durch die Schwerpunktkoordinaten

$$\vec{x}'_i = \vec{x}_i - \vec{X} , \quad \vec{X} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2) \quad (8.3)$$

beschrieben. Um die Notation übersichtlicher zu halten, kennzeichnen wir hier die Schwerpunktkoordinaten mit einem Strich wie in Kap. 6. Der

_____ ? _____
Gelten Impuls- und Energieerhaltung in diesem Zusammenhang überhaupt? Wenn ja, warum?

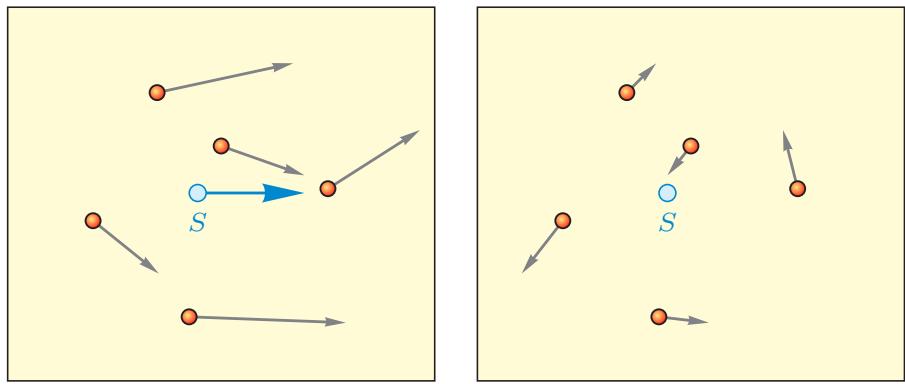


Abb. 8.1 Transformation auf Schwerpunktkoordinaten. Quelle: TP

Abstand der Teilchen bleibt bei der Transformation natürlich erhalten, während sich Geschwindigkeiten und Beschleunigungen wie

$$\dot{\vec{x}}_i = \dot{\vec{x}}'_i + \dot{\vec{X}}, \quad \ddot{\vec{x}}_i = \ddot{\vec{x}}'_i = -\vec{\nabla}'_i V(|\vec{x}'_1 - \vec{x}'_2|) \quad (8.4)$$

transformieren.

Im Schwerpunktsystem lauten die Erhaltungssätze

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{2} \vec{v}'_{i,1}^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}'_{i,2}^2 &= \frac{m_1}{2} \vec{v}'_{f,1}^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}'_{f,2}^2 \\ m_1 \vec{v}'_{i,1} + m_2 \vec{v}'_{i,2} &= m_1 \vec{v}'_{f,1} + m_2 \vec{v}'_{f,2} = 0, \end{aligned} \quad (8.5)$$

denn der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem verschwindet nach Definition, vgl. (6.42). Damit ist offenbar

$$m_1 \vec{v}'_{i,1} = -m_2 \vec{v}'_{i,2}, \quad m_1 \vec{v}'_{f,1} = -m_2 \vec{v}'_{f,2}. \quad (8.6)$$

Streuwinkel

Der Winkel zwischen der Einfalls- und der Ausfallsrichtung heißt Streuwinkel ϑ' . Im Schwerpunktsystem ist er für beide Teilchen gleich.

Setzt man (8.6) in den Energiesatz (8.2) ein, um $\vec{v}'_{i,2}$ bzw. $\vec{v}'_{f,2}$ zu eliminieren, folgt

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}'_{i,1}^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \vec{v}'_{i,1} \right)^2 &= m_1 \vec{v}'_{f,1}^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \vec{v}'_{f,1} \right)^2 \\ \Rightarrow \quad |\vec{v}'_{i,1}| &= |\vec{v}'_{f,1}|, \quad |\vec{v}'_{i,2}| = |\vec{v}'_{f,2}|. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß

Die Beträge der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß sind also für beide Massenpunkte gleich!

Damit sind die Erhaltungssätze ausgeschöpft; sie erlauben also insbesondere keine Aussage über den Streuwinkel. Er hängt vom wirksamen Kraftgesetz ab (z.B. bei der Coulombstreuung). Wir wissen bisher nur, dass $0 \leq \vartheta' \leq \pi$ ist.

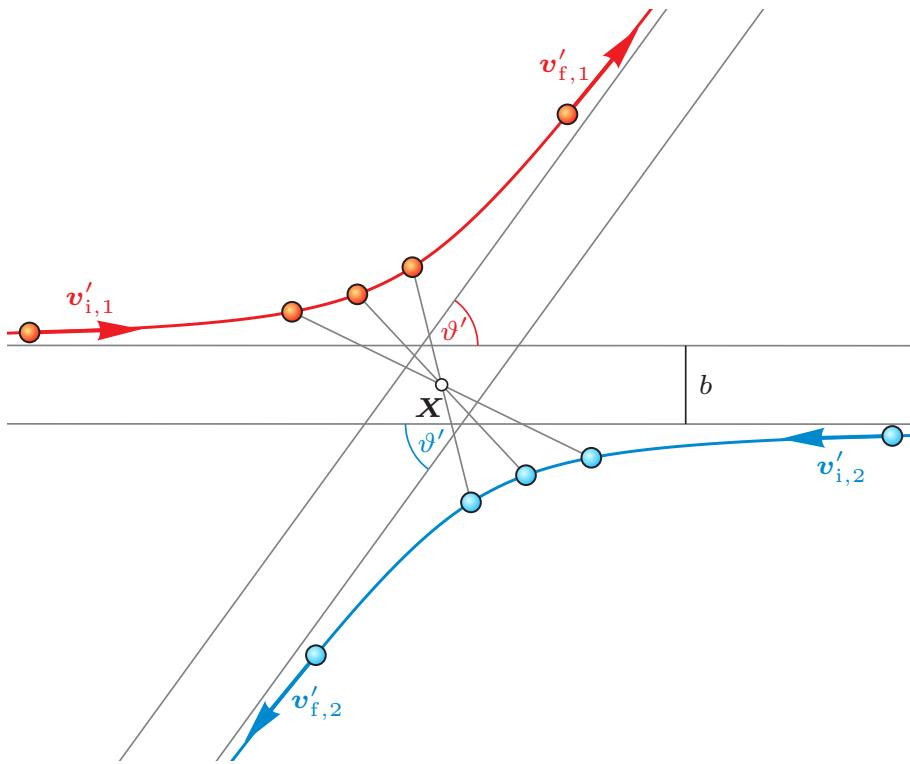


Abb. 8.2 Streuung im Schwerpunktsystem. Quelle: TP

8.1.2 Transformation der Streuwinkel

Wenn der Massenpunkt 2 anfänglich im *Laborsystem* ruht, $\vec{v}_{i,2} = 0$, dann ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts

$$\dot{\vec{X}} = \frac{m_1}{M} \vec{v}_{i,1} , \quad (8.8)$$

also ist

$$\dot{\vec{x}}_{i,1} = \vec{v}_{i,1} = \vec{v}'_{i,1} + \dot{\vec{X}} = \vec{v}'_{i,1} + \frac{m_1}{M} \vec{v}_{i,1} \Rightarrow \vec{v}'_{i,1} = \frac{m_2}{M} \vec{v}_{i,1} . \quad (8.9)$$

Entsprechend gilt für die Rücktransformation nach dem Stoß

$$\vec{v}_{f,1} = \vec{v}'_{f,1} + \frac{m_1}{M} \vec{v}_{i,1} . \quad (8.10)$$

Nun sind offenbar

$$v_{f,1} \sin \vartheta_1 = v'_{f,1} \sin \vartheta' , \quad v_{f,1} \cos \vartheta_1 = v'_{f,1} \cos \vartheta' + \frac{m_1}{M} v_{i,1} , \quad (8.11)$$

wobei ϑ_1 der Streuwinkel im Laborsystem ist. Das ist der Winkel, um den $\vec{v}_{f,1}$ von $\vec{v}_{i,1}$ abweicht.

_____ ? _____
Können Sie die Beziehungen (8.11) bestätigen?

Streuwinkel im Laborsystem

Daraus folgt für den Tangens des Streuwinkels ϑ_1 im Laborsystem

$$\tan \vartheta_1 = \frac{v'_{f,1} \sin \vartheta'}{v'_{f,1} \cos \vartheta' + (m_1/M)v_{i,1}} = \frac{\sin \vartheta'}{\cos \vartheta' + m_1/m_2}, \quad (8.12)$$

denn $v_{i,1} = (M/m_2)v'_{i,1} = (M/m_2)v'_{f,1}$ nach (8.9) und (8.7).

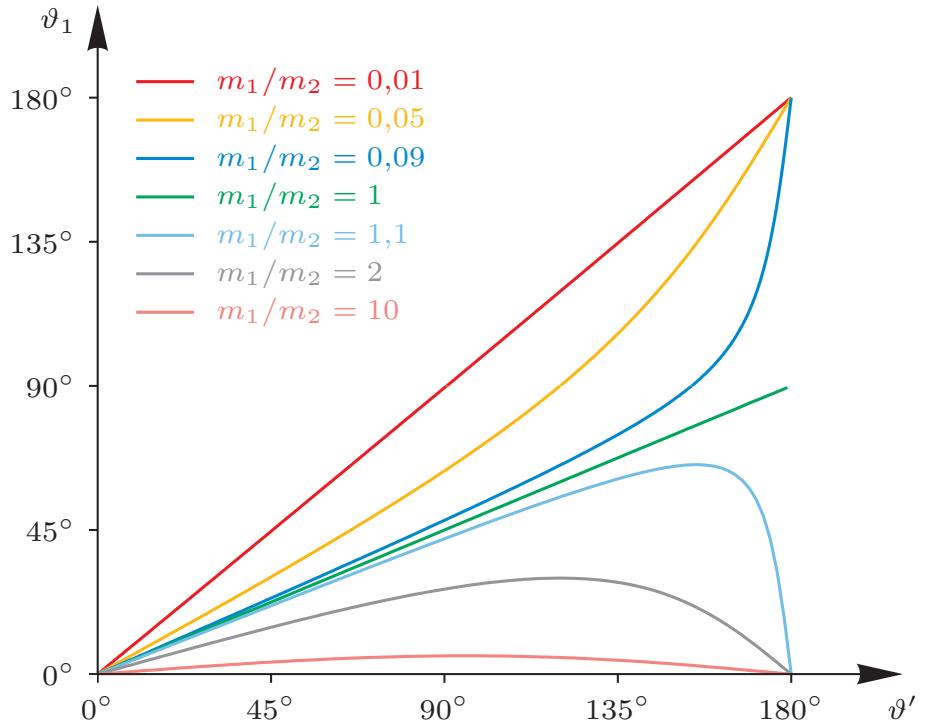


Abb. 8.3 Streuwinkel ϑ_1 im Laborsystem als Funktion des Streuwinkels ϑ' im Schwerpunktsystem für verschiedene Massenverhältnisse. Quelle: TP

Aus dem Ergebnis (8.12) lassen sich einige interessante Spezialfälle ablesen:

1. $m_1 \ll m_2$: In diesem Fall eines im Vergleich zum Target sehr leichten Projektils ist $\vartheta_1 \approx \vartheta'$, d.h. die Streuwinkel im Schwerpunkt- und im Laborsystem sind annähernd gleich.
2. $m_1 < m_2$: Im Laborsystem sind alle Streuwinkel $0 < \vartheta < \pi$ möglich, also Vorwärts- ebenso wie Rückwärtsstreuung.
3. $m_1 = m_2$: Wir verwenden die Identität

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \gamma}{1 + \cos \gamma} \quad (8.13)$$

für beliebige Winkel γ um zu schließen, dass in diesem Fall $\vartheta_1 = \vartheta'/2$ ist.

4. $m_1 > m_2$: Wegen $\cos \vartheta' > -1$ wird nun der Nenner in (8.12) strikt positiv. Damit wird $\tan \vartheta_1 > 0$ eingeschränkt, woraus $\vartheta_1 < \pi/2$ folgt: Rückwärtsstreuung ist nun nicht mehr möglich. Nun gibt es einen maximalen Streuwinkel ϑ_1^{\max} , den wir aus der Bedingung

$$0 = \frac{d \tan \vartheta_1}{d \vartheta'} = \frac{1 + (m_1/m_2) \cos \vartheta'}{(\cos \vartheta' + m_1/m_2)^2} \quad (8.14)$$

erhalten. Dann ist

$$\cos \vartheta' = -\frac{m_2}{m_1} \quad (8.15)$$

woraus mit (8.12)

$$\tan^2 \vartheta_1 = \frac{m_2^2/m_1^2}{1 - (m_2/m_1)^2} \quad (8.16)$$

folgt, was

$$\sin \vartheta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1} \quad (8.17)$$

bedeutet.

Wegen $\vec{v}_{i,2} = 0$ ist schließlich

$$\vec{v}'_{i,2} = -\dot{\vec{X}} = -\frac{m_1}{M} \vec{v}_{i,1} . \quad (8.18)$$

Da außerdem noch $|\vec{v}'_{f,2}| = |\vec{v}'_{i,2}|$ ist, muss das Dreieck, das aus $\dot{\vec{X}}$, $\vec{v}_{f,2}$ und $\vec{v}'_{f,2}$ gebildet wird (vgl. Abb. 8.4 zur Transformation des Streuwinkels) gleichschenklig sein. Die Winkel zwischen $\vec{v}_{f,2}$ und $\vec{v}'_{f,2}$ sowie zwischen $\vec{v}_{f,2}$ und $\dot{\vec{X}}$ müssen daher beide gleich ϑ_2 sein, und weil der gegenüberliegende Winkel gleich ϑ' ist, folgt

$$\vartheta_2 = \frac{\pi - \vartheta'}{2} . \quad (8.19)$$

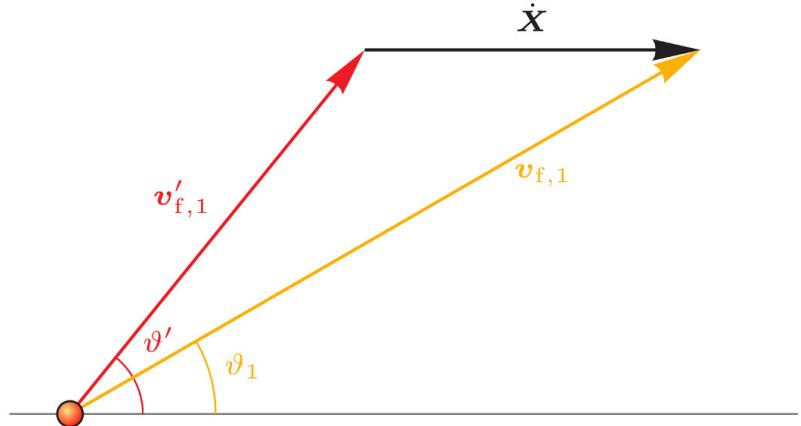
8.2 Energieübertrag bei elastischer Streuung

Betrachten wir als Beispiel ein Neutron der Masse m , das an einem Kern der Masse Am streut, der im Laborsystem im Ursprung ruhend angenommen wird ($\vec{v}_{i,2} = 0$). Seine kinetischen Energien vor und nach dem Stoß sind $T_{i,1} = m\vec{v}_{i,1}^2/2$ bzw. $T_{f,1} = m\vec{v}_{f,1}^2/2$.

Nach (8.4) und (8.8) ist

$$\begin{aligned} \vec{v}_{f,1}^2 &= \left(\vec{v}'_{f,1} + \dot{\vec{X}} \right)^2 = \left(\vec{v}'_{f,1} + \frac{\vec{v}_{i,1}}{1+A} \right)^2 \\ &= \vec{v}'_{f,1}^2 + \frac{2}{1+A} |\vec{v}'_{f,1}| |\vec{v}_{i,1}| \cos \vartheta' + \frac{\vec{v}_{i,1}^2}{(1+A)^2} . \end{aligned} \quad (8.20)$$

A



B

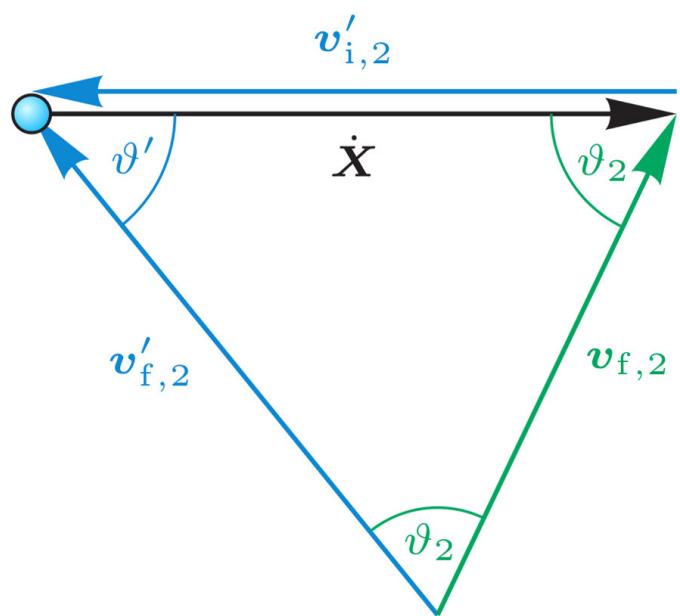


Abb. 8.4 Zur Transformation des Streuwinkels. Quelle: TP

Ferner gilt wegen der Energieerhaltung, vgl. (8.7) und (8.8),

$$\vec{v}'_{f,1}^2 = \vec{v}'_{i,1}^2 = \left(\vec{v}_{i,1} - \dot{\vec{X}} \right)^2 = \left(\vec{v}_{i,1} - \frac{\vec{v}_{i,1}}{1+A} \right)^2 = \vec{v}_{i,1}^2 \left(\frac{A}{1+A} \right)^2. \quad (8.21)$$

Eingesetzt in (8.20) bedeutet dies

$$\vec{v}_{f,1}^2 = \vec{v}_{i,1}^2 \left[1 + \frac{2A}{(1+A)^2} (\cos \vartheta' - 1) \right]. \quad (8.22)$$

Relative Änderung der kinetischen Energie

Für die *relative* Änderung der kinetischen Energie ergibt sich damit

$$\frac{T_{i,1} - T_{f,1}}{T_{i,1}} = 1 - \frac{\vec{v}_{f,1}^2}{\vec{v}_{i,1}^2} = \frac{2A}{(1+A)^2} (1 - \cos \vartheta'). \quad (8.23)$$

Eine Mittelung über ϑ' ergibt unter der Annahme, dass die Streuwinkel im Schwerpunktsystem gleichverteilt sind

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{T_{i,1} - T_{f,1}}{T_{i,1}} \right\rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{2A}{(1+A)^2} (1 - \cos \vartheta') \sin \vartheta' d\vartheta' \\ &= \frac{A}{(1+A)^2} \int_{-1}^1 (1-\mu) d\mu = \frac{2A}{(1+A)^2}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Das ist der mittlere, relative Energieverlust des Neutrons. Er wird maximal, wenn $A = 1$ gilt, d.h. die Streuung von Neutronen an Atomkernen bremst die Neutronen dann am effektivsten ab, wenn die Atomkerne möglichst leicht sind. Ein Beispiel dafür ist die Neutronenmoderation in Kernreaktoren z.B. mit Wasser.

Überprüfen Sie die Aussage, dass der Energieverlust des Neutrons bei $A = 1$ maximal wird.

8.3 Streuquerschnitt

8.3.1 Streuwinkel

Ein Strahl aus Teilchen der Masse m falle auf ein Target, wodurch die Teilchen abgelenkt (gestreut) werden. Wir stellen uns die Frage, wie die gestreuten Teilchen verteilt sind, wenn die Wechselwirkung durch die Kraft $\vec{F} = -\alpha/r^2$ beschrieben werden kann.

Energie und Drehimpuls sind beide konstant,

$$E = \frac{m}{2} v_\infty^2, \quad L = b m v_\infty, \quad (8.25)$$

wobei b der *Stoßparameter* ist, der in Abb. 8.5 eingezeichnet ist. Die Energie ist positiv, die Bahn also eine Hyperbel, und wir nehmen weiter an, dass das Target in Ruhe bleibt.

Aus der Behandlung des Keplerproblems (7.67) wissen wir, dass die Asymptote an einen Hyperbelast mit der Symmetriearchse den Winkel

$$\bar{\varphi} = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (8.26)$$

einschließt. Damit ist der Streuwinkel $\vartheta = 2\bar{\varphi} - \pi$, also

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin\left(\bar{\varphi} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \bar{\varphi} = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (8.27)$$

Die numerische Exzentrizität war (7.44, Seite 95)

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{2L^2 E}{m\alpha^2} \right]^{1/2} \quad (8.28)$$

für eine Zentralkraft der Form $F(r) = -\alpha/r^2$. Mit (8.25) folgt daraus

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{(bm v_\infty^2)^2}{\alpha^2} \right]^{1/2}. \quad (8.29)$$

Stoßparameter und Streuwinkel

Mit (8.27) erhalten wir den Zusammenhang

$$b^2 = \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta/2} - 1 \right) \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \quad (8.30)$$

zwischen dem Stoßparameter b und dem Streuwinkel.

8.3.2 Streuquerschnitt

Der differentielle *Wirkungsquerschnitt* für die Streuung ist durch das Verhältnis

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega = \frac{\text{pro Sek. nach } [\vartheta + d\vartheta] \text{ ausfallende Teilchen}}{\text{pro Sek. und Fläche einfallende Teilchen}} \quad (8.31)$$

definiert. Die Anzahl der pro Sekunde gestreuten Teilchen, die innerhalb

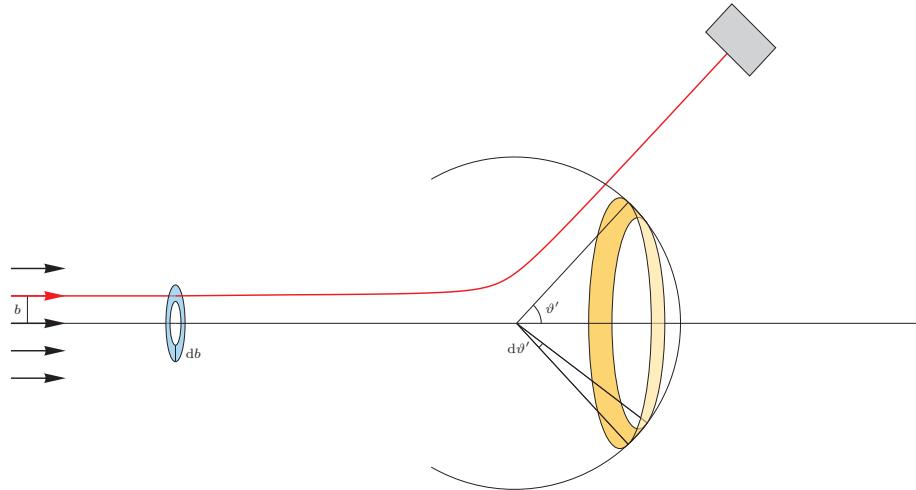


Abb. 8.5 Zur Definition des Streuquerschnitts. Quelle: TP

von $[b, b + db]$ einfallen, ist

$$nv dt b db d\psi = nv dt b(\vartheta, v_\infty) \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta}(\vartheta, v_\infty) \right| d\vartheta d\psi, \quad (8.32)$$

wobei ψ der Drehwinkel um die Einfallsrichtung ist. Die Anzahl der pro Sekunde und Fläche einfallenden Teilchen ist $nv dt$. Daraus ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung bzw. der *Streuquerschnitt* als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = b(\vartheta, v_\infty) \left| \frac{\partial b(\vartheta, v_\infty)}{\partial \vartheta} \right| \frac{1}{\sin \vartheta} = \left| \frac{\partial b^2(\vartheta, v_\infty)}{\partial \vartheta} \right| \frac{1}{2 \sin \vartheta}. \quad (8.33)$$

denn das Raumwinkelement ist $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi$. Mit (8.30) erhält man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2 v_\infty^4} \frac{\cos(\vartheta/2)}{\sin^3(\vartheta/2) \sin \vartheta} = \frac{\alpha^2}{4(2E)^2} \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}, \quad (8.34)$$

wobei $\sin \vartheta = 2 \cos(\vartheta/2) \sin(\vartheta/2)$ und $2E = mv_\infty^2$ verwendet wurden.

Rutherford'sche Streuformel

Für Streuung von Elektronen an Kernen der Ladungszahl Z ist $\alpha = Ze^2$ (im Gaußschen Einheitensystem, in dem $\alpha = 2.3 Z \times 10^{-19} \text{ g cm}^3 \text{ s}^{-2}$ ist), woraus man die *Rutherford'sche Streuformel* erhält,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{4(2E)^2} \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}. \quad (8.35)$$

?

Können Sie die Rutherford'sche Streuformel (8.35) über den gesamten Raumwinkel integrieren?

8.3.3 Streuung unter kleinen Winkeln

Wenn die Ablenkung durch die Streuung klein ist, etwa weil der Stoßparameter groß ist, vereinfacht sich die Berechnung des Streuquerschnitts wesentlich. Man kann dann direkt im Laborsystem rechnen, weil die Rückwirkung von m_1 auf m_2 vernachlässigt und daher $m_2 \rightarrow \infty$ angenommen werden kann.

Demnach liege m_2 fest im Ursprung, und m_1 falle längs der x -Achse ein. Für die y -Komponente seiner Geschwindigkeit nach dem Stoß gilt

$$v_{f,1y} = v_{f,1} \sin \vartheta_1 = v_\infty \sin \vartheta_1 \approx v_\infty \vartheta_1, \quad (8.36)$$

und die y -Komponente der Geschwindigkeit ist

$$m_1 v_{f,1y} = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt, \quad (8.37)$$

wobei

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dV}{dr} \frac{y}{r} \quad (8.38)$$

die y -Komponente der Kraft ist. Das Integral über die Kraft kann nun längs der *ungestörten* Bahn ausgeführt werden, weil F_y bereits eine kleine Größe ist. Dann bleiben $v_x = v_\infty$ und $y = b$ näherungsweise konstant. Daher ist $dt = dx/v_\infty$ und

$$m_1 v_{f,1y} = -\frac{2b}{v_\infty} \int_0^{\infty} \frac{dV}{dr} \frac{dx}{r}. \quad (8.39)$$

Der Stoßparameter b bleibt hier konstant.

Die Integration über dx kann durch eine Integration über dr ersetzt werden. Aus $r^2 = b^2 + x^2$ folgt $rdr = xdx$ bei konstantem b und daher

$$dx = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - b^2}}, \quad (8.40)$$

woraus sich mit (8.36) und (8.39)

$$\vartheta_1 = -\frac{2b}{m_1 v_\infty^2} \int_b^\infty \frac{dV}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} \quad (8.41)$$

ergibt.

Querschnitt bei Streuung unter kleinen Winkeln

Auch in der Gleichung (8.33) kann statt $\sin \vartheta \approx \vartheta$ eingesetzt werden. Damit ergibt sich die Näherungsformel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| \frac{b}{\vartheta} \quad (8.42)$$

für den differentiellen Streuquerschnitt bei Streuung unter kleinen Winkeln.

Beispiel: Lichtablenkung durch die Sonne

Ein interessantes Beispiel ist die Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld. Wenn man Licht als einen Strom von Teilchen auffasst, auf die die Gravitationskraft wirkt, folgt, dass Lichtstrahlen von Massen abgelenkt werden, an denen sie vorübergehen.

Mit $V = (Gm_1 m_2)/r$ ergibt (8.41)

$$\vartheta_1 = \frac{2Gm_2 b}{c^2} \int_b^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{r^2 - b^2}} = \frac{2Gm_2 b}{c^2} \left. \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{b^2 r} \right|_b^\infty = \frac{2Gm_2}{c^2 b} \quad (8.43)$$

Führt man hier den *Schwarzschild-Radius*

$$R_S = \frac{2Gm_2}{c^2} \quad (8.44)$$

ein, folgt

$$\vartheta_1 = \frac{R_S}{b} \quad (8.45)$$

Das ist eine heuristische Betrachtung, die erst in der Allgemeinen Relativitätstheorie korrekt durchgeführt werden kann. Dort ergibt sich als Ablenkungswinkel das Doppelte des aufgrund der Newton'schen Gravitation erwarteten Winkels,

$$\vartheta_1 = \frac{2R_S}{b} \quad (8.46)$$

Die Masse der Sonne ist $M = 2 \cdot 10^{33}$ g, ihr Schwarzschild-Radius ist also $R_{S,\odot} = 3$ km. Ein Lichtstrahl, der genau den Sonnenrand bei $b = 696000$ km passiert, wird demnach um den Winkel $\vartheta = 1.7''$ abgelenkt. Dieser Wert wurde 1919 während einer Sonnenfinsternis nachgewiesen. ◀

8.4 Mechanische Ähnlichkeit und der Virialsatz

8.4.1 Mechanische Ähnlichkeit

Wichtige Aussagen über mechanische Systeme können oft schon aufgrund sehr allgemeiner Eigenschaften getroffen werden. Für die folgende Diskussion brauchen wir zunächst eine Definition: Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_N)$ heißt *homogen vom Grad k*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat:

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_N). \quad (8.47)$$

Sei nun die potentielle Energie $V(\vec{x})$ homogen vom Grad k in \vec{x} ,

$$V(a\vec{x}) = a^k V(\vec{x}). \quad (8.48)$$

Skalieren wir dann \vec{x} und t durch $\vec{x} \rightarrow a\vec{x}$ und $t \rightarrow bt$, wobei a, b dimensionslose Zahlen sind, gilt zunächst

$$\dot{\vec{x}} \rightarrow \frac{a}{b} \dot{\vec{x}}, \quad \ddot{\vec{x}} \rightarrow \frac{a}{b^2} \ddot{\vec{x}}, \quad (8.49)$$

und die Bewegungsgleichungen transformieren sich entsprechend

$$m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V(\vec{x}) \rightarrow m \frac{a}{b^2} \ddot{\vec{x}} = -\frac{1}{a} a^k \vec{\nabla}V(\vec{x}). \quad (8.50)$$

Sie bleiben offenbar unverändert, wenn

$$\frac{a^2}{b^2} = a^k, \quad \text{also} \quad b = a^{1-k/2} \quad (8.51)$$

gewählt wird. Das bedeutet:

Ähnlichkeitstransformationen

Wenn $V(\vec{x})$ homogen vom Grad k in \vec{x} ist, dann lassen die Bewegungsgleichungen *Ähnlichkeitstransformationen* zu, wobei sich die Zeitdifferenzen (z.B. zwischen entsprechenden Bahnpunkten) wie

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2} \quad (8.52)$$

verhalten, wenn l'/l das Verhältnis der Bahnabmessungen ist.

8.4.2 Der Virialsatz

Wenn $f(\vec{x})$ eine homogene Funktion vom Grad k in \vec{x} ist, dann gilt

$$\frac{df(a\vec{x})}{d(a\vec{x})} \cdot \vec{x} = \frac{\partial}{\partial a} [f(a\vec{x})] = \frac{\partial[a^k f(\vec{x})]}{\partial a} = k a^{k-1} f(\vec{x}). \quad (8.55)$$

Beispiel: Harmonischer Oszillator

Beim harmonischen Oszillator ist $V \propto x^2$, also $k = 2$. Seine Schwingungsdauer muss deshalb nach (8.52) unabhängig von seiner Amplitude sein. ◀

Beispiel: Freier Fall im konstanten Schwerkraftsfeld

Beim freien Fall im konstanten Schwerkraftsfeld ist $V \propto x$, also $k = 1$. Daher gilt

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/2}, \quad (8.53)$$

d.h. die Quadrate der Fallzeiten verhalten sich wie die Anfangshöhen. ◀

Beispiel: Freier Fall im Gravitationsfeld

Bei der Bewegung im Gravitationsfeld ist $V \propto r^{-1}$, also $k = -1$, und daraus folgt wegen (8.52)

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}. \quad (8.54)$$

Das ist bereits das 3. Kepler'sche Gesetz. ◀

Achtung Der Euler'sche Satz in einer Dimension lautet

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{k}{x}$$

für homogene Funktionen vom Grad k . Dieses Ergebnis erleichtert praktische Rechnungen oft erheblich. Suchen Sie Beispiele! ◀

Dies muss insbesondere auch für $a = 1$ gelten, woraus bereits der *Euler'sche Satz über homogene Funktionen* folgt,

$$\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) = k f(\vec{x}). \quad (8.56)$$

Da die kinetische Energie T homogen vom Grad 2 in \vec{v} ist, gilt

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{v}} = 2T \quad (8.57)$$

und weiter

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{v}} = \vec{p} \quad \Rightarrow \quad 2T = \vec{v} \cdot \vec{p} = \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \vec{x}) - \dot{\vec{p}} \cdot \vec{x}. \quad (8.58)$$

Eine Mittelung des ersten Terms über die Zeit, ausgedrückt durch

$$\langle \dots \rangle_t = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (\dots) dt, \quad (8.59)$$

führt im Grenzfall beliebig langer Zeiten, $\Delta t \rightarrow \infty$, auf

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \vec{x}) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{x})(\Delta t) - (\vec{p} \cdot \vec{x})(0)}{\Delta t} = 0 \quad (8.60)$$

falls die Bewegung vollständig im Endlichen verläuft (z.B. auf einer gebundenen Bahn).

Virialsatz

Wegen $\dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$ folgt daraus der *Virialsatz* für eine Bewegung unter dem Einfluss eines Potentials, das eine homogene Funktion vom Grad k in \vec{x} ist:

$$2\langle T \rangle_t = -\langle \dot{\vec{p}} \cdot \vec{x} \rangle_t = \langle \vec{x} \cdot \vec{\nabla}V(\vec{x}) \rangle_t = k \langle V(\vec{x}) \rangle_t . \quad (8.61)$$

Die mittlere kinetische Energie ist demnach gleich dem $k/2$ -fachen der mittleren potentiellen Energie.

Beispiel: Virialsatz im Gravitationsfeld

Im Fall des Newton'schen Gravitationsgesetzes, $V \propto r^{-1}$, ist $k = -1$ und daher

$$\langle T \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle V \rangle_t . \quad (8.62)$$



Der Virialsatz hat in der Astrophysik eine sehr große Bedeutung, z.B. für die Thermodynamik selbstgravitierender Systeme, für die er zu einer negativen Wärmekapazität führt.

Kapitel 9

Kräfte in beschleunigten Bezugssystemen

9.1 Zeitabhängige Transformationen

9.1.1 Winkelgeschwindigkeit

Wenn sich zwei Koordinatensysteme, ein gestrichenes und ein ungestrichenes, relativ zueinander beliebig bewegen, sind Ortsvektoren in ihnen durch

$$\vec{x}' = \vec{a}'(t) + R(t) \cdot \vec{x}(t) \quad (9.1)$$

miteinander verknüpft. Der Vektor \vec{a}' transformiert zum Ursprung des gestrichenen Systems im ungestrichenen, und die Drehmatrix R dreht die Koordinatenachsen relativ zueinander. Dabei sind $\vec{a}'(t)$ und $R(t)$ vorgegebene Funktionen der Zeit. Daraus erhalten wir die Zeitableitung

$$\dot{\vec{x}'} = \dot{\vec{a}'} + R \cdot \dot{\vec{x}} + \dot{R} \cdot \vec{x} = \dot{\vec{a}'} + R \left(\dot{\vec{x}} + R^T \dot{R} \cdot \vec{x} \right). \quad (9.2)$$

Da die Drehmatrix orthonormal ist und daher $R^T R = \mathbb{1}_3$ gilt, folgt

$$\dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0 \Rightarrow R^T \dot{R} + (R^T \dot{R})^T = 0. \quad (9.3)$$

Die Matrix $R^T \dot{R}$ muss also, wenn man sie transponiert, ihr Vorzeichen wechseln. Solche Matrizen heißen *schief*- oder *antisymmetrisch*. In drei Dimensionen gilt für sie

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

daher

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0, \quad a_{21} = -a_{12}, \quad a_{31} = -a_{13}, \quad a_{32} = -a_{23}, \quad (9.5)$$

und sie kann nur drei unabhängige Elemente enthalten.

Schiefsymmetrische Matrizen in drei Dimensionen

Es muss demnach möglich sein, die schiefsymmetrische Matrix $R^\top \dot{R}$ in der Form

$$R^\top \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & +\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & +\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

zu schreiben, wobei die ω_i zunächst beliebig numeriert sind und willkürliche Vorzeichen tragen.

Mithilfe des Levi-Civita-Symbols kann (9.6) in der Form

$$(R^\top \dot{R})_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega_k \quad (9.7)$$

dargestellt werden, die sich gleich als sehr nützlich erweisen wird.

Um die Bedeutung der ω_i zu klären, betrachten wir das ungestrichene System mit den Basisvektoren \vec{e}_i aus einem dritten System mit den Basisvektoren \vec{e}_i^* , das durch

$$\vec{x} = \vec{c} + S \vec{x}^* \quad (9.8)$$

mit dem ungestrichenen System verknüpft ist. Dabei seien die Verschiebung \vec{c} und die Drehung S konstant. Für gestrichene Vektoren \vec{x}' gilt

$$\vec{x}' = \vec{d}' + R(\vec{c} + S \vec{x}^*) = (\vec{d}' + R\vec{c}) + (RS) \vec{x}^* = \vec{d}'^* + R^* \vec{x}^* \quad (9.9)$$

also ist $R^* = RS$, und damit

$$(R^{*\top} \dot{R}^*)_{ij} = (S^\top R^\top \dot{R} S)_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \omega_k^*. \quad (9.10)$$

Außerdem gilt wegen (9.7)

$$(S^\top R^\top \dot{R} S)_{ij} = S_{ai} R_{ba} \dot{R}_{bc} S_{cj} = -S_{ai} \varepsilon_{acl} \omega_l S_{cj}, \quad (9.11)$$

so dass der Vergleich von (9.10) und (9.11)

$$S_{ai} \varepsilon_{acl} \omega_l S_{cj} = \varepsilon_{ijk} \omega_k^* \quad (9.12)$$

ergibt. Wegen $SS^\top = \mathbb{1}_3$ folgt $S_{lk} S_{nk} \omega_n = \omega_l$, also gilt

$$\varepsilon_{acl} S_{ai} S_{cj} S_{lk} S_{nk} \omega_n = \det S \varepsilon_{ijk} S_{nk} \omega_n = \varepsilon_{ijk} \omega_k^*. \quad (9.13)$$

Transformation von $\vec{\omega}$

Fassen wir ω_1, ω_2 und ω_3 als Komponenten eines Vektors $\vec{\omega}$ auf, transformiert sich $\vec{\omega}$ unter Koordinatendrehungen wie

$$\det S S^\top \vec{\omega} = \vec{\omega}^* \quad \text{oder} \quad \vec{\omega} = \det S S \vec{\omega}^* \quad (9.14)$$

was zeigt, dass der Vektor $\vec{\omega}$ ein *axialer* Vektor ist.

Vollziehen Sie die Rechnungen im Detail nach, die auf das Ergebnis (9.13) führen.

Setzen wir (9.7) in (9.2) ein, folgt

$$\dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{a}}' + R(\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times \vec{x}) . \quad (9.15)$$

Analog gilt für einen beliebigen Vektor \vec{v} mit $\vec{v}' = R\vec{v}$

$$\dot{\vec{v}}' = R(\dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{v}) . \quad (9.16)$$

Beispiel: Drehung um die z -Achse

Als Beispiel betrachten wir eine Drehung um die z -Achse um den Winkel ωt , die die kartesischen Einheitsvektoren auf

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9.17)$$

abbildet. Die Drehmatrix R ergibt sich aus (5.15),

$$R = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.18)$$

und damit ist

$$R^T \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad (9.19)$$

wie zu erwarten war. \blacktriangleleft

9.2 Infinitesimale Transformationen

9.2.1 Bedeutung von $\vec{\omega}$

Nun betrachten wir eine Drehung zwischen einem Zeitpunkt t und einem infinitesimal späteren Zeitpunkt $t + dt$, die durch die Drehmatrix

$$R(t + dt) = R(t) + \dot{R}(t)dt = R(t) \left(\mathbb{1}_3 + R^T(t) \dot{R}(t)dt \right) \quad (9.20)$$

ausgedrückt wird. Also ist mit (9.7)

$$R_{ik}(t + dt) = R_{ij}(t) \left(\delta_{jk} - \varepsilon_{jkl} \omega_l(t)dt \right) . \quad (9.21)$$

Seien die Koordinatenachsen zunächst so orientiert, dass $\vec{\omega}$ zur Zeit t in \vec{e}_3 -Richtung zeigt. Weiterhin sollen die gestrichenen Achsen bei t mit den ungestrichenen übereinstimmen, so dass

$$R(t) = I, \quad (R^T \dot{R})(t) = \begin{pmatrix} 0 & -|\omega| & 0 \\ |\omega| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.22)$$

und zum infinitesimal späteren Zeitpunkt

$$R(t + dt) = \begin{pmatrix} 1 & -|\omega|dt & 0 \\ |\omega|dt & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.23)$$

gelten. Dies entspricht einer infinitesimalen Drehung um die \vec{e}_3 -Achse um den Winkel $d\varphi = |\omega|dt$.

Momentane Winkelgeschwindigkeit

Deswegen wird $\vec{\omega}$ als der Vektor der *momentanen* Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Seine Richtung gibt die momentane Lage der Drehachse an. Im Zeitintervall dt findet eine Drehung um den Winkel $d\varphi = |\omega|dt$ im positiven Drehsinn um $\vec{\omega}$ statt.

9.2.2 Infinitesimale Drehungen

Der Begriff der infinitesimalen Transformationen ist in sehr vielen Bereichen der Physik sehr wichtig, z.B. in der Quantenmechanik oder der Feldtheorie. Deshalb betrachten wir sie noch etwas näher. Seien bei der Transformation

$$\vec{x}' = \vec{a}' + R\vec{x} \quad (9.24)$$

die Verschiebung \vec{a}' und die Drehung R beide infinitesimal, d.h. $\vec{a}' \rightarrow d\vec{a}'$ und $R \rightarrow \mathbb{1}_3 + dR$.

Wegen der Orthonormalität ist $R^T R = \mathbb{1}_3$, und daher

$$(\mathbb{1}_3 + dR)^T (\mathbb{1}_3 + dR) = \mathbb{1}_3 \quad \Rightarrow \quad dR^T + dR = 0. \quad (9.25)$$

Also ist dR abermals schiefsymmetrisch und kann analog zu (9.7) durch

$$dR_{ij} = -\varepsilon_{ijk} d\varphi_k \quad (9.26)$$

dargestellt werden, wobei die $d\varphi_k$ infinitesimale Drehwinkel sind.

Für infinitesimale Koordinatentransformationen gilt demnach allgemein

$$\vec{x}' = \vec{x} + d\vec{a}' + d\vec{\varphi} \times \vec{x}. \quad (9.27)$$

Aktive und passive Transformationen

Wie erwähnt, heißt eine Transformation *aktiv*, bei der das physikalische System sich in einem festen Koordinatensystem bewegt, und *passiv*, wenn das physikalische System fest bleibt, aber das Koordinatensystem bewegt wird. Mathematisch sind diese Arten der Transformation äquivalent, aber sie müssen physikalisch streng unterschieden werden.

9.3 Bewegung auf der rotierenden Erde

9.3.1 Scheinkräfte

Als ein Beispiel für Bewegung in einem nichtinertialen System betrachten wir nun Kräfte, die auf der rotierenden Erde auftreten. Wir führen dazu zwei Koordinatensysteme ein, nämlich eines, das fest mit einem Punkt auf der Erdoberfläche verbunden ist (und damit natürlich kein Inertialsystem ist), und ein Inertialsystem, in das wir die rotierende Erde einbetten. Gegeben seien also ein (gestrichenes) Inertialsystem mit dem Ursprung im Erdmittelpunkt und ein (ungestrichenes) System, das mit der Erdoberfläche verbunden ist und seinen Ursprung in \vec{a}' auf der Erdoberfläche hat. Die \vec{e}_3 -Achse zeige in \vec{a}' senkrecht von der Erdoberfläche weg.

Zwischen dem ungestrichenen und dem gestrichenen System vermittelt die Transformation

$$\vec{x}' = \vec{a}' + R\vec{x} = R(\vec{a} + \vec{x}), \quad (9.28)$$

wobei \vec{a} der (zeitlich konstante) Ortsvektor des Ursprungs des gestrichenen im ungestrichenen System ist, also der Ortsvektor des Erdmittelpunkts im ungestrichenen System.

Die Geschwindigkeit im gestrichenen System ist deswegen nach (9.16) durch

$$\dot{\vec{x}}' = R \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right] \quad (9.29)$$

gegeben, und die Beschleunigung im gestrichenen System ist

$$\ddot{\vec{x}}' = \dot{R} \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right] + R \left[\ddot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \right]. \quad (9.30)$$

Um in das ungestrichene, mit der Erde bewegte Bezugssystem zu transformieren, multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $R^T = R^{-1}$ und erhalten damit die Beschleunigung im erdfesten System,

$$R^T \ddot{\vec{x}}' = R^T \dot{R} \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right] + \left[\ddot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \right]. \quad (9.31)$$

Im zweiten Term haben wir verwendet, dass $R^T R = \mathbb{1}_3$ die Einheitsmatrix ist. Den ersten Term schreiben wir in Komponenten, verwenden dabei das Ergebnis (9.7) und erhalten

$$\begin{aligned} (R^T \dot{R})_{ij} \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right]_j &= -\varepsilon_{ijk} \omega_k \left\{ \dot{x}_j + [\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})]_j \right\} \\ &= (\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}})_i + [\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})]_i. \end{aligned} \quad (9.32)$$

Indem wir dieses Ergebnis in (9.31) einsetzen, folgt

$$R^T \ddot{\vec{x}}' = \ddot{\vec{x}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}). \quad (9.33)$$

Dies ist die Beschleunigung eines Massenpunkts, betrachtet im ungestrichenen, erdfesten System.

Kräfte auf der rotierenden Erde

Setzen wir diese Beschleunigung im Sinne des zweiten Newtonschen Axioms einer externen Kraft $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{\nabla}V$ gleich, erhalten wir für den Massenpunkt eine Bewegungsgleichung, die eine Reihe weiterer Kraftterme enthält:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} + m[\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x})] + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \\ + m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})] + m[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a})] + \\ + \vec{\nabla}V(\vec{x}) = 0. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Zusätzlich zu der externen Kraft $\vec{F}_{\text{ext}}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$ tritt also eine effektive Kraft $\vec{F}_{\text{eff}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ auf, die vier zusätzliche Terme enthält, die als *Scheinkräfte* bezeichnet werden.

Im einzelnen haben diese Scheinkräfte die folgende Bedeutung:

1. Die Kraft $-m[\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x})]$ tritt nur auf, wenn sich die Drehachse ändert. Für die Erde ist $\vec{\omega} \approx \text{const.}$ und damit $\dot{\vec{\omega}} \approx 0$, abgesehen von Präzession und Polschwankungen.
2. Der Term $-2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}) = 2m(\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}) =: \vec{F}_C$ heißt *Corioliskraft* und beschreibt eine Ablenkung von Massenpunkten, die sich im erdfesten System bewegen. Sie steht senkrecht auf $\vec{\omega}$ und $\dot{\vec{x}}$ und verschwindet für Bewegungen längs der Drehachse $\vec{\omega}$.
3. Die *Zentrifugalkraft* $m[(\vec{\omega} \times \vec{x}) \times \vec{\omega}] =: \vec{F}_Z$ kann durch Umformung vereinfacht werden. Dabei benutzen wir

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) &= \varepsilon_{ijk}\omega_j(\varepsilon_{klm}\omega_l x_m) \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\omega_j\omega_l x_m \\ &= \omega_i\omega_j x_j - x_i\omega_j\omega_j, \end{aligned} \quad (9.35)$$

woraus sich unter Beachtung der Einstein'schen Summenkonvention der Ausdruck

$$\vec{F}_Z = m[\vec{\omega}^2 \vec{x} - \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{x})] = m\omega^2 \left[\vec{x} - \frac{\vec{\omega}(\vec{x} \cdot \vec{\omega})}{\omega^2} \right] = m\omega^2 \vec{y} \quad (9.36)$$

für die Zentrifugalkraft ergibt, in dem \vec{y} der senkrechte Abstand des Massenpunkts von der Drehachse ist.

4. Der Term $m[(\vec{\omega} \times \vec{a}) \times \vec{\omega}]$ ist schließlich unabhängig von \vec{x} , aber proportional zu m . Er entspricht der Zentrifugalkraft auf den Ursprung und liefert einen Beitrag zur Erdbeschleunigung, $\vec{g} \rightarrow \vec{g} + (\vec{\omega} \times \vec{a}) \times \vec{\omega}$.

_____ ?
Können Sie durch eigene Rechnung den Ausdruck (9.34) bestätigen?

Achtung Das Ergebnis (9.35) ist ein Spezialfall der Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},$$

die auch als *Graßmann-Identität* bezeichnet wird. ◀

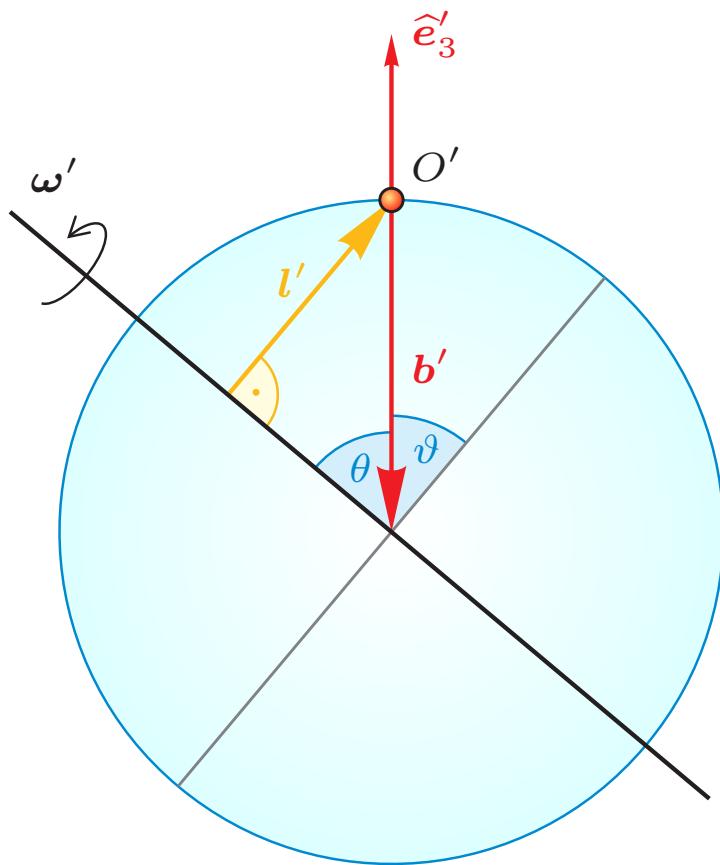


Abb. 9.1 Zur Umformung der Zentrifugalkraft. Quelle: TP

Allen Scheinkräften ist gemein, dass sie proportional zu m sind und ihren Ursprung in der Trägheitskraft $-m\ddot{x}$ haben. Darüber hinaus haben sie die Proportionalität zu m mit der Schwerkraft gemein, was die Allgemeine Relativitätstheorie im Äquivalenzprinzip benutzt. Scheinkräfte zeigen an, dass das Bezugssystem kein Inertialsystem ist.

_____ ? _____
Schätzen Sie die Größenordnung der vier Scheinkräfte aus (9.34) auf der Erdoberfläche ab.

9.3.2 Zur Corioliskraft

Seien \vec{e}_1 und \vec{e}_2 nun nach Süden bzw. nach Osten orientiert, und \vec{e}_3 zeige weiterhin senkrecht nach oben. Der Ursprung des erdfesten Systems befindet sich bei der geografischen Breite ϑ . Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist dann

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (9.37)$$

und die Drehung findet „in östlicher Richtung“ statt.

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ kann in Komponenten senkrecht bzw. tangential zur Erdoberfläche zerlegt werden,

$$\vec{\omega}_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}_{\parallel} = \begin{pmatrix} -\omega \cos \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.38)$$

Komponenten der Corioliskraft

Dementsprechend hat die Corioliskraft zwei Komponenten,

$$\vec{F}_C = 2m(\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}_{\perp}) + 2m(\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}_{\parallel}). \quad (9.39)$$

Bewegung tangential zur Erdoberfläche hat $\dot{\vec{x}} \perp \vec{e}_3$, dann ist der zweite Term normal zur Erdoberfläche. $\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}_{\perp}$ zeigt auf der Nordhalbkugel nach rechts, auf der Südhalbkugel nach links relativ zur Richtung von $\dot{\vec{x}}$; dies ist von großer Bedeutung für Stürme, Meeresströmungen, Flussläufe, Ballistik usw.



Abb. 9.2 Die Schwingungsebene des Foucault-Pendels wird durch die Corioliskraft gedreht. Quelle: Wikipedia

9.4 Das reduzierte Dreikörperproblem

Wir betrachten nun eine Testmasse m_3 , die sich in der Nähe von zwei erheblich größeren Massen $m_1, m_2 \gg m_3$ bewegt. Die Massen m_1 und m_2 mögen sich auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bewegen, und m_3 laufe in der Bahnebene von m_1 und m_2 um. Dieses

Problem ist in der Astrophysik sehr wichtig und beschreibt z.B. die Bewegung eines Asteroiden unter dem Einfluss von Sonne und Jupiter.

Wir führen ein Koordinatensystem \vec{e} ein, dessen Ursprung der Schwerpunkt von m_1 und m_2 ist und das mit dem Umlauf der beiden Massen corotiert. Die x -Achse zeige entlang der Verbindungsgeraden der beiden Massen. Weiterhin definieren wir

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} =: \mu, \quad \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1 - \mu. \quad (9.40)$$

Damit sind die Koordinaten der beiden Massen m_1 und m_2

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} (\mu - 1)d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \mu d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.41)$$

wenn d ihr gegenseitiger Abstand ist.

Die Umlaufzeit von m_1 und m_2 um den gemeinsamen Schwerpunkt ist durch (7.64) gegeben,

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(m_1 + m_2)}, \quad (9.42)$$

der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ist also

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}}, \quad (9.43)$$

und ω zeigt senkrecht zur Bahnebene. Wir wählen den Umlaufsinn so, dass $\vec{\omega}$ in \vec{e}_z -Richtung zeigt,

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (9.44)$$

Die Koordinaten von m_3 seien $(x, y, 0)$. Da $\vec{\omega}$ konstant ist, fallen die Terme in (9.34) weg, die $\dot{\vec{\omega}}$ enthalten. Da auch $\vec{a} = 0$ ist, lautet die Bewegungsgleichung für m_3

$$m_3 \ddot{\vec{x}}_3 + 2m_3 \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_3 + m_3 [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_3)] + m_3 \vec{\nabla} V(\vec{x}_3) = 0 \quad (9.45)$$

mit dem Potential

$$V(\vec{x}_3) = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} \quad (9.46)$$

und den Abständen

$$r_1 = \{[x - (\mu - 1)d]^2 + y^2\}^{1/2}, \quad r_2 = [(x - \mu d)^2 + y^2]^{1/2}. \quad (9.47)$$

Die Kreuzprodukte sind

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_3 = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_3) = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9.48)$$

so dass die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2y + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (9.49)$$

lauten.

Bewegungsgleichungen im Dreikörperproblem

Mit dem effektiven Potential

$$U := V - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (9.50)$$

lassen sich die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (9.51)$$

schreiben.

Multiplikation der ersten Gleichung mit \dot{x} , der zweiten Gleichung mit \dot{y} und Addition der beiden Gleichungen führt auf

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U \right] = 0, \quad (9.52)$$

d.h. der Ausdruck

$$C := -2U - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \omega^2(x^2 + y^2) - 2V - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (9.53)$$

erweist sich als konstant. Dies ist die *Jacobi-Konstante*, das einzige bekannte Integral des reduzierten Dreikörperproblems.

Wegen $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ muss die Bewegung auf solche Bereiche eingeschränkt sein, in denen $C + 2U < 0$ ist, die also durch die so genannte *Hill-Kurve* begrenzt werden, die durch

$$U = -\frac{C}{2} \quad (9.54)$$

definiert wird.

Wenn die Testmasse m_3 ruht, kann sie dort in Ruhe bleiben, wo $\vec{\nabla}U = 0$ gilt. Um solche Punkte zu suchen, nehmen wir zunächst $r_1 = r_2 =: r$ an. Dann sind nach (9.47)

$$x = \frac{2\mu - 1}{2}d \quad \text{und} \quad r = \sqrt{\frac{d^2}{4} + y^2} \quad (9.55)$$

und wegen (9.46)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{Gm_1}{r^2} \frac{\partial r_1}{x} + \frac{Gm_1}{r^2} \frac{\partial r_2}{x} - \omega^2x \\ &= \frac{GM}{r^3} \{ \mu [x - (\mu - 1)d] + (1 - \mu)(x - \mu d) \} - \omega^2x \\ &= \left(\frac{GM}{r^3} - \omega^2 \right) x = \left(\frac{GM}{r^3} - \frac{GM}{d^3} \right) x, \end{aligned} \quad (9.56)$$

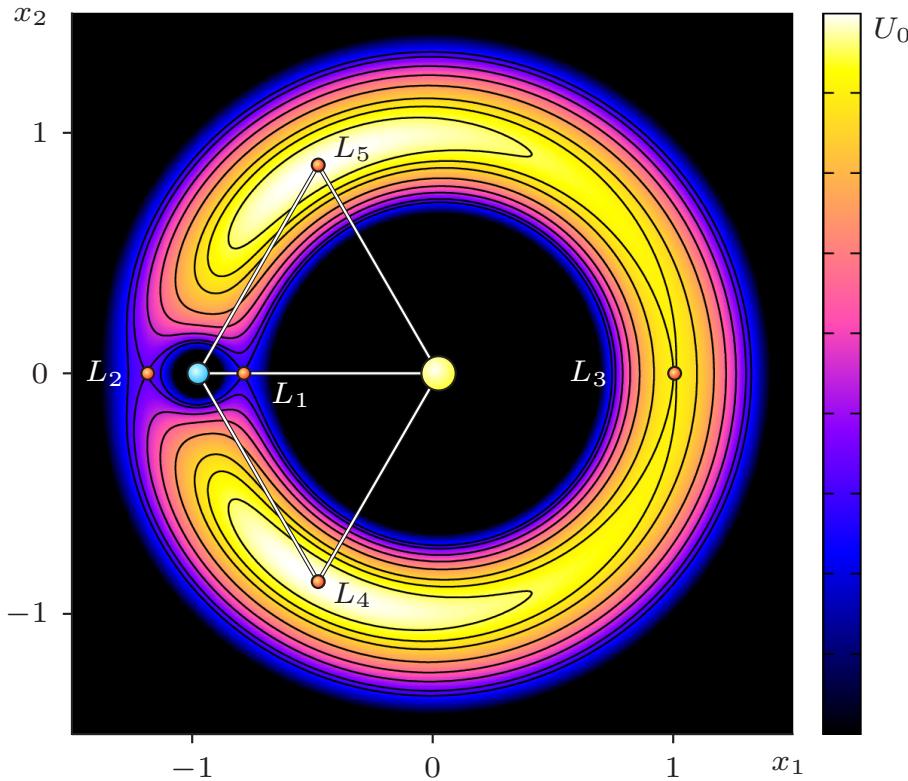


Abb. 9.3 Das effektive Potential des reduzierten Dreikörperproblems.
Quelle: TP

wobei im zweiten Schritt (9.40) und (9.47) verwendet wurden. Dies verschwindet dann und nur dann, wenn

$$r = d \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}d}{2} \quad (9.57)$$

sind. An diesen Orten ist auch

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{GM}{r^3} - \omega^2 \right) y = 0 , \quad (9.58)$$

und daher ist m_3 kräftefrei an den beiden Punkten

$$\vec{L}_{4,5} = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 2\mu - 1 \\ \pm \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (9.59)$$

die mit m_1 und m_2 gleichseitige Dreiecke bilden. Drei weitere Lösungen liegen auf der x -Achse. Diese insgesamt fünf Punkte heißen *Lagrange-Punkte*.

Die drei Lagrange-Punkte auf der Verbindungsachse der beiden Massen, üblicherweise als $L_{1,2,3}$ bezeichnet, sind instabil im folgenden Sinn: Zwar ist die Testmasse an diesen Punkten selbst im Kräftegleichgewicht, aber jede kleine Störung ihrer Position führt dazu, dass sie sich von den Lagrange-Punkten entfernt. Die beiden Lagrange-Punkte abseits der

?

Können Sie die Ortsvektoren der beiden Lagrange-Punkte $L_{4,5}$ aus (9.59) bestätigen?

Verbindungsline, $L_{4,5}$ genannt, sind dagegen stabil, wenn das Verhältnis μ der beiden Massen klein genug ist. Eine Stabilitätsanalyse, die zu diesem Ergebnis führt, finden Sie in Anhang A.

Diejenige Hill-Kurve, die die x -Achse zwischen m_1 und m_2 berührt, heißt *Roche-Grenze*. Sie definiert die Grenze der beiden Einzelsterne in einem Doppelsternsystem und ist für die Entwicklung von Doppelsternsystemen sehr wichtig.

Kapitel 10

Bewegung starrer Körper

10.1 Die Euler-Winkel

Ein *starrer Körper* ist ein ausgedehntes Objekt, dessen Teile in fester räumlicher Beziehung zueinander stehen. Man kann sich starre Körper als aus vielen Massenpunkten aufgebaut denken, deren Abstände untereinander zeitlich konstant bleiben.

Nehmen wir an, wir bräuchten eine große Zahl N von Massenpunkten, um einen starren Körper aufzubauen. Jeder dieser N Massenpunkte konnte sich vorher frei in jeder Richtung des Raums bewegen, weshalb wir drei Zahlen brauchten, um seine Lage im Raum festzulegen. Allgemein bezeichnet man die Anzahl unabhängiger Parameter, die zur vollständigen Charakterisierung der Lage des Systems notwendig sind, als die Anzahl der *Freiheitsgrade*.

Beispiel: System von N Massenpunkten

Ein System von N Massenpunkten ohne weitere Nebenbedingungen hat $f = 3N$ Freiheitsgrade, nämlich die N Ortsvektoren \vec{x}_i mit ihren jeweils drei Komponenten.

Beispiel: Zwei verbundene Massenpunkte

Zwei Massenpunkte an einer gemeinsamen Stange haben $f = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ Freiheitsgrade, weil die Stange eine Nebenbedingung stellt.

Ein starrer Körper hat nun $f = 6$ Freiheitsgrade, nämlich die Lage seines Schwerpunkts und drei Winkel, die seine Orientierung im Raum angeben. Wir beginnen unsere Untersuchung der Bewegung starrer Körper damit, diese drei Winkel eindeutig festzulegen.

Gegeben seien dazu ein Inertialsystem \vec{e}'_i und ein körperfestes System \vec{e}_i , deren Ursprünge zusammen fallen. Zwischen den Koordinaten \vec{x}' im

Überlegen Sie sich anhand möglichst vieler Beispiele, wie viele Freiheitsgrade Objekte Ihres Alltags haben.

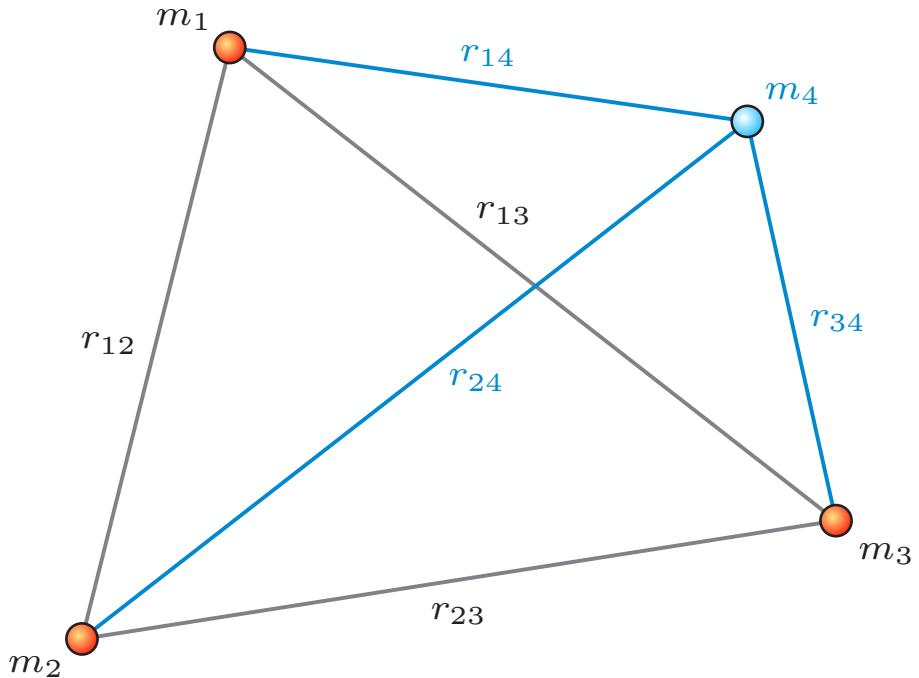


Abb. 10.1 Zur Bestimmung der Freiheitsgrade eines starren Körpers. Quelle: TP

Inertialsystem und den Koordinaten \vec{x} im körperfesten System besteht die Verbindung

$$\vec{x}' = R \cdot \vec{x}, \quad (10.1)$$

wobei R eine (zeitabhängige) Drehmatrix ist. Für diese dreidimensionale Drehmatrix mit ihren neun Elementen stellt die Orthonormalitätsrelation $R^\top R = \mathbb{1}_3$ sechs Bedingungen auf, je drei für die Diagonal- und die Nebendiagonalelemente. Daher können nur drei Elemente von R unabhängig sein. Diese werden durch die drei *Euler-Winkel* (φ, ϑ, ψ) parametrisiert, die den Intervallen

$$0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (10.2)$$

entnommen werden. Wir geben nun eine Konstruktion der Euler-Winkel an.

Nach der Drehung R schneidet die \vec{e}_1 - \vec{e}_2 -Ebene die \vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 -Ebene in der *Knotenlinie*, deren Richtung durch $\vec{e}'_3 \times \vec{e}'_3$ gegeben ist. Die Drehmatrix R , ausgedrückt durch die Euler-Winkel, wird nun wie folgt konstruiert:

1. Zunächst wird um \vec{e}'_3 um den Winkel φ gedreht. Dadurch entsteht ein Koordinatensystem \vec{e}'_i mit

$$\vec{x}' = D_3(\varphi) \cdot \vec{x}^*, \quad D_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

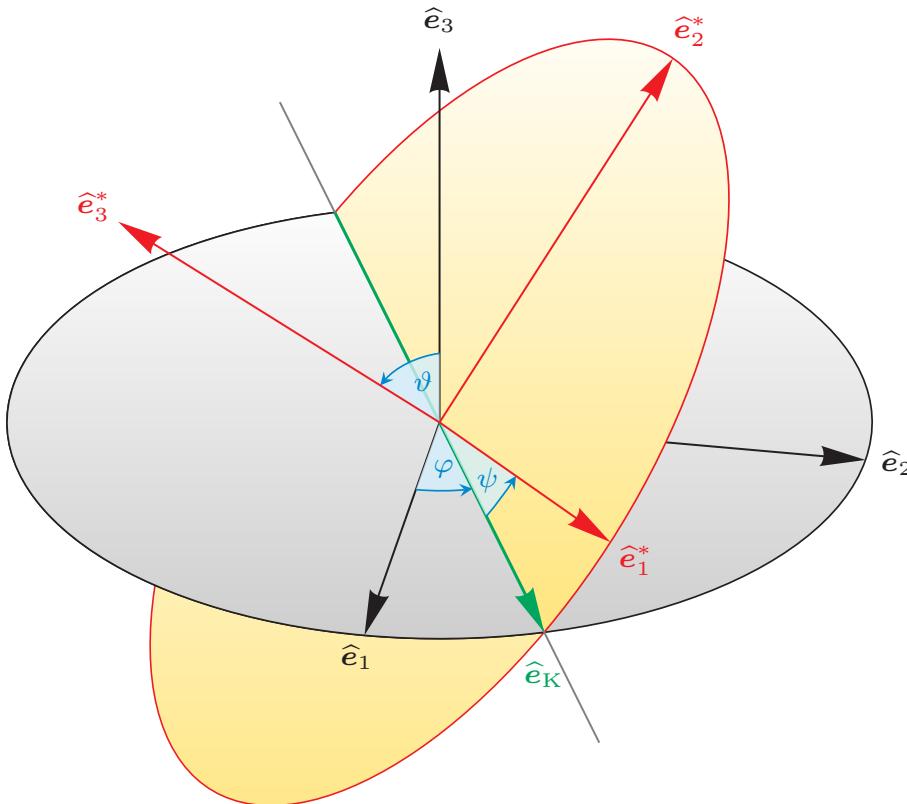


Abb. 10.2 Zur Konstruktion der Euler-Winkel. Quelle: TP

2. Nun wird um \vec{e}_1^* um den Winkel ϑ gedreht. Dadurch entsteht ein Koordinatensystem \vec{e}_i^{**} mit

$$\vec{x}^* = D_1(\vartheta) \cdot \vec{x}^{**}, \quad D_1(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (10.4)$$

3. Schließlich wird um \vec{e}_3^{**} um den Winkel ψ gedreht. Dadurch gelangt man in das körperfeste Koordinatensystem \vec{e}_i , und

$$\vec{x}^{**} = D_3(\psi) \cdot \vec{x}, \quad D_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

Insgesamt ergibt sich daraus die Drehung

$$\vec{x}' = D_3(\varphi) \{ D_1(\vartheta) [D_3(\psi) \cdot \vec{x}] \} =: R(\varphi, \vartheta, \psi) \cdot \vec{x} \quad (10.6)$$

mit der dazugehörigen gesamten Drehmatrix

$$R(\varphi, \vartheta, \psi) = D_3(\varphi) D_1(\vartheta) D_3(\psi). \quad (10.7)$$

Die Drehmatrix $D_1(\vartheta) D_3(\psi)$ lautet zunächst

$$D_1(\vartheta) D_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (10.8)$$

und die volle Drehmatrix $R(\varphi, \vartheta, \psi)$ ist schließlich durch

$$R(\varphi, \vartheta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi & \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi \\ -\sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (10.9)$$

?

Konstruieren Sie Drehmatrizen für bestimmte, einfache Kombinationen von Euler-Winkeln.

gegeben.

Manchmal werden andere Konventionen für die Euler-Winkel benutzt, etwa indem man im zweiten Schritt nicht um die \vec{e}_1^* -, sondern um die \vec{e}_2^* -Achse dreht. Die Drehmatrix $R(\varphi, \vartheta, \psi)$ lautet dann natürlich anders, aber das Konstruktionsprinzip bleibt dasselbe.

Der Konstruktion der Drehmatrix entsprechend kann der Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit wie folgt durch die drei Euler-Winkel ausgedrückt werden:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_3^* + \dot{\vartheta} \vec{e}_1^{**} + \dot{\psi} \vec{e}_3. \quad (10.10)$$

Dabei sind die Einheitsvektoren längs der Koordinatenachsen bestimmt durch $\vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j = R_{ij}$, also

$$\vec{e}_1^{**} \cdot \vec{e}_j = [D_3(\psi)]_{1j} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10.11)$$

sowie

$$\vec{e}_3^* \cdot \vec{e}_j = [D_1(\vartheta)D_3(\psi)]_{3j} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (10.12)$$

Der Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System lässt sich demnach auf folgende Weise schreiben:

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10.13)$$

Verallgemeinerte Koordinaten des starren Körpers

Damit haben wir sechs *verallgemeinerte Koordinaten* gefunden, in denen sich die Bewegung eines starren Körpers ausdrücken lässt, nämlich die drei Koordinaten des Schwerpunkts und die drei Euler-Winkel.

Ergänzend stellen wir noch fest, dass die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ *nicht* die zeitliche Ableitung eines Vektors \vec{c} ist,

$$\vec{\omega} \neq \frac{d\vec{c}}{dt}. \quad (10.14)$$

Wenn das so wäre, folgte nämlich aus

$$\dot{\vec{c}} = \frac{\partial \vec{c}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \vec{c}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \vec{c}}{\partial \psi} \dot{\psi} \quad (10.15)$$

zusammen mit (10.10), dass

$$\frac{\partial c_1}{\partial \vartheta} = \cos \psi, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 c_1}{\partial \psi \partial \vartheta} \neq \frac{\partial^2 c_1}{\partial \vartheta \partial \psi}, \quad (10.16)$$

gelten müsste, was auf einen Widerspruch führt.

10.2 Tensoren

10.2.1 Tensoren als lineare Abbildungen

Wir haben oben das Skalarprodukt als eine Abbildung eingeführt, die zwei Vektoren (v_1, v_2) aus einem Vektorraum V eine Zahl aus dem Körper K zuordnet,

$$(v_1, v_2) \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle \in K. \quad (10.17)$$

Weiterhin hatten wir vom Skalarprodukt verlangt, dass es bilinear sei, d.h. linear in jedem seiner beiden Argumente.

Völlig äquivalent dazu können wir sagen, dass das Skalarprodukt die Möglichkeit eröffnet, durch Vektoren v_1 andere Vektoren v_2 auf lineare Weise in den Körper K abzubilden. Dadurch wird jeder Vektor $v_1 \in V$ zu einer linearen Abbildung des Vektorraums in den Körper K ,

$$V : V \rightarrow K, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1(v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle. \quad (10.18)$$

Beachten Sie, dass sich dadurch lediglich die Sichtweise auf das Skalarprodukt verändert hat!

Dualvektoren

Lineare Abbildungen von Vektoren aus einem Vektorraum V in den zugrundeliegenden Zahlenkörper K heißen *Dualvektoren*.

Anmerkung: Nur in Ausnahmefällen kann man die Vektoren aus V selbst als lineare Abbildungen von V in K auffassen. Zu diesen Ausnahmefällen gehört der euklidische Vektorraum \mathbb{R}^3 , in dem wir uns in der klassischen Mechanik aufhalten. Allgemein definiert man den *Dualraum* V^* eines Vektorraums als die Menge der linearen Abbildungen von V nach K ,

$$V^* : V \rightarrow K, \quad (w, v) \mapsto w(v) = \langle w, v \rangle, \quad (10.19)$$

und braucht dann Dualvektoren $w \in V^*$, um Vektoren $v \in V$ in den Körper K abzubilden. Wir verzichten hier auf die Unterscheidung zwischen dem

Vektorraum und seinem Dualraum, die aber in der Relativitätstheorie entscheidend wichtig wird, weil man es dort nicht mehr mit einem euklidischen Raum zu tun hat.

Tensoren

Entsprechend führen wir nun *Tensoren* als *multilineare* Abbildungen von V nach K ein, d.h. als Abbildungen, die einer beliebigen Menge von n Vektoren $v_i \in V$ eine Zahl aus dem Körper K zuordnen,

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ mal}} \rightarrow K, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto T(v_1, \dots, v_n). \quad (10.20)$$

Die Anzahl n der Vektoren, die der Tensor nach K abbilden kann, heißt sein *Rang* bzw. seine *Stufe*, und man nennt ihn einen Tensor n -ter *Stufe*. Die Multilinearität bedeutet, dass der Tensor in jedem seiner Argumente linear ist,

$$T(\dots, v_i + \lambda w_i, \dots) = T(\dots, v_i, \dots) + \lambda T(\dots, w_i, \dots). \quad (10.21)$$

Dualvektoren sind nach dieser Definition Tensoren erster Stufe, während das Skalarprodukt ein Tensor zweiter Stufe ist.

Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf Tensoren zweiter Stufe, aber die folgenden Aussagen gelten entsprechend auch für Tensoren beliebiger Stufe.

10.2.2 Einfache Tensoroperationen, Darstellung durch Komponenten

Zunächst stellen wir fest, dass Tensoren (vom selben Rang) einen K -Vektorraum \mathcal{T} bilden, wenn wir die offensichtliche Addition und Multiplikation mit Skalaren definieren,

$$(T_1 + \lambda T_2)(v_1, v_2) = T_1(v_1, v_2) + \lambda T_2(v_1, v_2). \quad (10.22)$$

Insbesondere zeigt dies, dass auch der Dualraum V^* ein Vektorraum ist.

Wegen der Multilinearität der Tensoren reicht es zur eindeutigen Festlegung eines Tensors T zu wissen, welche Zahlen aus K er den Basisvektoren e_i von V zuordnet. Wir bezeichnen sie als *Komponenten* T_{ij} des Tensors,

$$T(e_i, e_j) = T_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N. \quad (10.23)$$

Die Abbildung irgend zweier beliebiger Vektoren v, w lässt sich dann auf die folgende Weise ausdrücken:

$$T(v, w) = T(v_i e_i, w_j e_j) = v_i w_j T(e_i, e_j) = v_i w_j T_{ij}, \quad (10.24)$$

wobei wieder die Einstein'sche Summenkonvention anzuwenden ist, d.h. über die wiederholten Indizes i und j muss summiert werden. Anhand

Achtung In der speziellen Relativitätstheorie werden Zeit und Ort, Energie und Impuls usw. zu Vektoren mit vier Komponenten zusammengefasst, so genannten *Vierervektoren*. Diese Vierervektoren unterscheiden sich von ihren Dualvektoren durch Vorzeichen ihrer Komponenten. ◀

dieses Ergebnisses wird offensichtlich, dass sich Tensoren zweiter Stufe durch Matrizen darstellen lassen, die ihre Komponenten enthalten, sobald man eine Basis für den Vektorraum festgelegt hat. Trotzdem dürfen Tensoren nicht mit Matrizen verwechselt werden! Matrizen stellen Tensoren zweiter Stufe dar, sobald eine Basis gewählt wurde, aber Tensoren existieren unabhängig von der Wahl einer Basis.

Tensorprodukt

Aus zwei Vektoren (v_1, v_2) lässt sich ein Tensor zweiter Stufe aufbauen, indem man das sogenannte *Tensorprodukt* oder *äußere Produkt* der beiden bildet,

$$\otimes : V \times V \rightarrow \mathcal{T}, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2. \quad (10.25)$$

Der so entstandene Tensor ordnet einem Paar von Vektoren w_1, w_2 das Produkt der Abbildungen $\langle v_1, w_1 \rangle$ und $\langle v_2, w_2 \rangle$ zu,

$$(v_1 \otimes v_2)(w_1, w_2) = \langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle. \quad (10.26)$$

Insbesondere kann man durch das Tensorprodukt der Basisvektoren e_i eine Basis für \mathcal{T} konstruieren, weil jeder Tensor zweiter Stufe durch

$$T = T_{ij} (e_i \otimes e_j) \quad (10.27)$$

dargestellt werden kann. Das sieht man unmittelbar, indem man (10.24) mit (10.26) verbindet:

$$\begin{aligned} T(v, w) &= T_{ij} (e_i \otimes e_j) (v_k e_k, w_l e_l) = T_{ij} v_k w_l e_i(e_k) e_j(e_l) \\ &= T_{ij} v_k w_l \delta_{ik} \delta_{jl} = v_i w_j T_{ij}. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Daran sieht man, dass der Vektorraum der Tensoren zweiter Stufe im N -dimensionalen Raum die Dimension N^2 hat, weil er durch die N^2 Basistensoren $e_i \otimes e_j$ aufgespannt wird.

Spur eines Tensors

Wendet man einen Tensor T auf je zwei gleiche Basisvektoren an und summiert darüber, erhält man seine *Spur*

$$T(e_k, e_k) = T_{ij} (e_i \otimes e_j) (e_k, e_k) = T_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = T_{kk} =: \text{Sp } T, \quad (10.29)$$

wobei wieder die Einstein'sche Summenkonvention angewendet wird.

Die Spur ist demnach einfach die Summe der Diagonalkomponenten Matrix, die den Tensor in einer Basis darstellt. Insbesondere ist die Spur unabhängig von der Basis.

Oft werden Tensoren anhand ihres Verhaltens bei Koordinatentransformationen definiert. Die Darstellung (10.27) zeigt, dass eine orthonormale Koordinatentransformation $e'_i = R_{ij} e_j$ die Tensorkomponenten T_{ij} wie folgt transformiert:

$$T = T_{ij} (e_i \otimes e_j) = T'_{kl} (e'_k \otimes e'_l) = T'_{kl} R_{ki} R_{lj} (e_i \otimes e_j). \quad (10.30)$$

?

Das Skalarprodukt (10.17) kann durch einen Tensor 2. Stufe ausgedrückt werden. Wie lautet dieser Tensor in \mathbb{R}^3 und wie seine Komponenten? Es handelt sich um einen einfachen Fall eines *metrischen Tensors*.

?

Wie lautet die Spur eines Tensors 2. Stufe, der das Tensorprodukt zweier Vektoren ist?

Durch Multiplikation mit $R_{ai}R_{bj}$ und Anwendung der Orthonormalitätsrelation $R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk}$ folgt daraus das Transformationsgesetz

$$T'_{ab} = R_{ai}R_{bj} T_{ij} . \quad (10.31)$$

Ein Tensor zweiter Stufe wird also bezüglich *jeder* seiner beiden Stufen wie ein Vektor transformiert.

10.3 Lineare Abbildungen und ihre Diagonalisierung

10.3.1 Lineare Abbildungen

Abbildungen A eines Vektorraums V auf sich, so genannte *Endomorphismen*, ordnen Vektoren $v \in V$ andere Vektoren $v' \in V$ zu,

$$A : V \rightarrow V , \quad v \mapsto v' = Av . \quad (10.32)$$

Linear heißen solche Abbildungen, wenn sie Linearkombinationen von Vektoren auf Linearkombinationen ihrer Bilder abbilden,

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mapsto \lambda_1 v'_1 + \lambda_2 v'_2 = \lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 . \quad (10.33)$$

Lineare Abbildungen von Vektoren spielen in der Physik eine sehr große Rolle, weil sich sehr verschiedene Arten physikalischer Vorgänge durch sie beschreiben lassen. Drehungen von Körpern fallen ebenso darunter wie Messungsvorgänge in der Quantenmechanik.

Da sich jeder Vektor aus $v \in V$ als Linearkombination von Basisvektoren darstellen lässt, reicht es zur Definition einer linearen Abbildung offenbar aus, die Bilder e'_i der Basisvektoren e_i zu kennen, $e'_i = Ae_i$. Für beliebige Vektoren $v \in V$ gilt dann

$$v' = Av = A(v_i e_i) = v_i A e_i = v_i e'_i . \quad (10.34)$$

Darstellung von Endomorphismen

Ebenso wie Koordinatentransformationen lassen sich lineare Abbildungen daher durch Matrizen darstellen. Da Endomorphismen die Dimension N der abgebildeten Vektoren nicht ändern können, müssen die zugehörigen Matrizen quadratisch sein.

Da sich Systeme aus N linearen Gleichungen für die N Unbekannten (x_1, \dots, x_N) ,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = y_1$$

$\vdots = \vdots$

$$a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N = y_N \quad (10.35)$$

mittels quadratischer Matrizen in der Form $Ax = y$ schreiben lassen, besteht ein enger Zusammenhang zwischen den Eigenschaften linearer Abbildungen und der Theorie der linearen Gleichungssysteme, der *linearen Algebra*.

Zunächst stellen wir fest, dass ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = 0$ nur dann eine Lösung haben kann, die von $x = 0$ verschieden ist, wenn $\det A = 0$ ist. Wäre das nicht so, dann hätte die Matrix A eine Inverse A^{-1} , deren Anwendung von links auf das Gleichungssystem $x = 0$ ergäbe, und damit hätte es nur die so genannte triviale Lösung. Wir werden diese wichtige Aussage gleich brauchen.

10.3.2 Diagonalisierung von Matrizen

Wir hatten in (10.31) gesehen, dass sich Tensorkomponenten T_{ij} bei orthonormalen Koordinatendrehungen R wie $T'_{ab} = R_{ai}R_{bj}T_{ij}$ verhalten. Dies gilt allgemein auch für Matrizen A , wenn wir verlangen, dass Gleichungen der Form $y = Ax$ durch Koordinatentransformationen R ihre Form nicht verändern, so dass nach einer Transformation $y' = A'x'$ gilt. Dann muss sich die Matrix A entsprechend

$$y' = Ry = R(Ax) = R(AR^\top x') = (RAR^\top)x' \Rightarrow A' = RAR^\top \quad (10.36)$$

transformieren. Können wir das benutzen, um die Matrix A' in die besonders einfache *Diagonalform*

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad (10.37)$$

zu bringen?

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zunächst lineare Gleichungssysteme der Form

$$Av = \lambda v, \quad (10.38)$$

die solche Vektoren v zu bestimmen suchen, die durch die lineare Abbildung auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet werden. Solche Vektoren v heißen *Eigenvektoren*, die zugehörigen Zahlen λ heißen *Eigenwerte*. Wir schreiben (10.38) mithilfe der Einheitsmatrix $\mathbb{1}_N$ um, erhalten das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda \mathbb{1}_N)v = 0 \quad (10.39)$$

und sehen, dass Eigenwerte der Gleichung

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_N) = 0 \quad (10.40)$$

genügen müssen, damit es nicht-triviale Eigenvektoren v geben kann. Diese Gleichung heißt auch *charakteristisches Polynom* der Matrix A , da sie ein Polynom N -ten Grades in λ darstellt.

Die Eigenwerte sind also die Lösungen des charakteristischen Polynoms. Davon gibt es nach dem Fundamentalsatz der Algebra immer N Stück, die aber nicht reell sein müssen, sondern komplex sein können. Da wir komplexe Zahlen erst später systematisch besprechen, behaupten wir hier ohne Beweis, dass die Eigenwerte dann reell sind, wenn die Matrix symmetrisch ist, $A^\top = A$. Der Beweis wird später nachgeholt.

Wir multiplizieren nun zuerst (10.36) von links mit R^\top und erhalten

$$R^\top A' = A R^\top \quad (10.41)$$

wegen $R^\top R = \mathbb{1}_N$. Schreiben wir die Matrix R in Komponenten (r_{ij}) aus und verlangen, dass sie A' in die Diagonalform (10.37) bringt, folgt aus (10.41) die *Eigenwertgleichung*

$$A \vec{r}_i = A_i \vec{r}_i \quad (10.42)$$

für die *Zeilenvektoren* $\vec{r}_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3})$ der Matrix R . Daran sehen wir, dass die Diagonalelemente A_i der Matrix A ihre Eigenwerte sind, also die Lösungen ihres charakteristischen Polynoms. Die Eigenvektoren \vec{r}_i stellen dann ein ausgezeichnetes Koordinatensystem dar, in dem die Matrix A Diagonalform annimmt. Es heißt *Hauptachsensystem* von A .

Betrachten wir als Beispiel die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.43)$$

Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \quad (10.44)$$

und hat die offensichtlichen Lösungen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Die Matrix A hat also die Diagonalform

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \text{diag}(-1, 0, 1). \quad (10.45)$$

Die zugehörigen Eigenvektoren \vec{x} sind die Lösungen der Gleichung

$$(A - \lambda \mathbb{1}_3) \vec{x} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (10.46)$$

Für $\lambda = -1$ folgt

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 = 0. \quad (10.47)$$

Bezüglich x_1 und x_2 wissen wir also nur, dass $x_2 = -x_1$ sein muss und können daher eine der beiden Komponenten frei wählen, z.B. $x_1 = 1$. Dann ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.48)$$

Völlig analoge Rechnungen führen auf die beiden anderen Eigenvektoren

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.49)$$

10.4 Der Trägheitstensor

10.4.1 Definition

Nach diesen mathematischen Vorbereitungen kehren wir zur Beschreibung des starren Körpers zurück. Seine kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \langle \dot{\vec{x}}'_i, \dot{\vec{x}}'_i \rangle, \quad (10.50)$$

denn man stellt sich den starren Körper in Massenpunkte der Massen m_i an den körperfesten Orten \vec{x}_i zerlegt vor, die im Inertialsystem an den Orten \vec{x}'_i liegen. Dabei haben wir das Skalarprodukt zwischen den Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\vec{x}}'_i$ durch die spitzen Klammern betont.

Mit $\dot{\vec{x}}'_i = R(t)(\dot{\vec{x}}_i + \vec{\omega} \times \vec{x}_i)$ aus (9.16) und $\dot{\vec{x}}_i = 0$ folgt daraus

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{x}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\vec{\omega}^2 \vec{x}_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{x}_i)^2] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\omega_j \omega_k \delta_{jk} \vec{x}_i^2 - \omega_j \omega_k x_{i,j} x_{i,k}] \\ &= \frac{1}{2} \omega_j \left\{ \sum_{i=1}^N m_i [\vec{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k}] \right\} \omega_k \\ &=: \frac{1}{2} \omega_j \Theta_{jk} \omega_k = \frac{1}{2} \vec{\omega}^\top \Theta \vec{\omega}, \end{aligned} \quad (10.51)$$

indem man die auftretenden Skalarprodukte in Komponenten schreibt. Dabei wurde bereits im ersten Schritt benutzt, dass $R^\top = R$ sein muss.

Um festzustellen, welcher Art mathematischen Objekts Θ ist, untersuchen wir sein Transformationsverhalten. Ausgedrückt durch ein neues

orthonormales Koordinatensystem \vec{e}_i^* mit gleichem Ursprung lauten die $x_j = S_{jk}x_k^*$. Wegen der Orthonormalität von S ist

$$S_{jl}S_{km}\delta_{lm} = \delta_{jk} . \quad (10.52)$$

Das Skalarprodukt ist natürlich invariant,

$$\vec{x}^2 = S_{jl}x_l^*S_{jm}x_m^* = \delta_{lm}x_l^*x_m^* = \vec{x}^{*2} \quad (10.53)$$

so dass

$$\begin{aligned} \Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[\vec{x}_i^{*2} S_{jl}S_{km}\delta_{lm} - S_{jl}S_{km}x_{i,l}^*x_{i,m}^* \right] \\ &= S_{jl}S_{km}\Theta_{lm}^* \end{aligned} \quad (10.54)$$

gilt.

Trägheitstensor

Damit erweist sich Θ als ein *Tensor zweiter Stufe*. Er wird *Trägheitstensor* des starren Körpers genannt.

10.4.2 Diagonalisierung

Der Trägheitstensor Θ ist offenbar symmetrisch, $\Theta^\top = \Theta$, und lässt sich daher durch eine reelle, symmetrische Matrix (Θ_{jk}) darstellen. Diese Matrix hat drei reelle Eigenwerte Θ_1 , Θ_2 und Θ_3 und lässt sich nach geeigneter Koordinatendrehung in die Form

$$(\Theta_{jk}) = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \quad (10.55)$$

bringen.

Hauptträgheitsmomente und -achsen

Die Eigenwerte des Trägheitstensors heißen *Hauptträgheitsmomente*, die dazugehörigen Eigenvektoren *Hauptträgheitsachsen* oder *Hauptachsen*.

Die Bedeutung dieser Größen wird im nächsten Kapitel eingehender diskutiert.

?

Führen Sie die Rechnungen aus dem Beispielkasten „Trägheitstensor zweier Massenpunkte“ selbst durch.

Beispiel: Trägheitstensor zweier Massenpunkte

Betrachten wir als Beispiel zwei Massenpunkte m_A und m_B , die durch eine masselose Stange miteinander verbunden sind. m_B befindet sich im Ursprung, m_A laufe in der x_1 - x_2 -Ebene um. Dann sind $x_1 = l \cos \varphi$, $x_2 = l \sin \varphi$, $x_3 = 0$, und

$$\begin{aligned} (\Theta_{jk}) &= m_A \begin{pmatrix} l^2 - l^2 \cos^2 \varphi & -l^2 \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ -l^2 \sin \varphi \cos \varphi & l^2 - l^2 \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & l^2 \end{pmatrix} \\ &= m_A l^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10.56)$$

Seine Eigenwerte sind durch das charakteristische Polynom

$$\det(\Theta - \lambda) = (m_A l^2 - \lambda) \quad (10.57)$$

$$\begin{aligned} &\cdot [(m_A l^2 \cos^2 \varphi - \lambda)(m_A l^2 \sin^2 \varphi - \lambda) - m_A^2 l^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi] \\ &= (m_A l^2 - \lambda) [\lambda^2 - \lambda m_A l^2] \end{aligned} \quad (10.58)$$

bestimmt. Die erste Lösung $\lambda_1 = m_A l^2$ ist offensichtlich, die anderen beiden ergeben sich, wenn man den Ausdruck in eckigen Klammern gleich Null setzt,

$$\lambda^2 - \lambda m_A l^2 = 0 \quad (10.59)$$

also $\lambda_2 = m_A l^2 = \lambda_1$, $\lambda_3 = 0$. Die Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten sind

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.60)$$



Kapitel 11

Trägheitstensor und Trägheitsmomente

11.1 Volumenintegrale

11.1.1 Vorbemerkung

Wir hatten im letzten Kapitel gesehen, dass der Trägheitstensor für einen aus N Massenpunkten zusammengesetzten starren Körper durch die Summe

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k}) \quad (11.1)$$

gegeben ist.

Wenn der Körper kontinuierlich ist, hat eine Aufteilung in Massenpunkte keine natürliche Grenze. Deswegen führt man dann einen Grenzübergang zu beliebig kleinen Massenpunkten durch, die sich an den kontinuierlichen Orten \vec{x} innerhalb des Körpers befinden, das infinitesimal kleine Volumen $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ einnehmen und die Masse

$$dm = \rho(\vec{x}) dV \quad (11.2)$$

besitzen, wobei $\rho(\vec{x})$ die Dichte am Ort \vec{x} ist.

Dann geht die Summe in (11.1) in das *Volumenintegral*

$$\int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 \rho(\vec{x}) (\vec{x}^2 \delta_{jk} - x_j x_k) \quad (11.3)$$

über, in dem über die drei Raumkoordinaten x_i nacheinander integriert wird, wobei die Integrationsgrenzen durch den Rand des Körpers vorgegeben sind. Wir werden uns nun zunächst allgemein mit Volumenintegralen beschäftigen, uns der Einfachheit halber aber auf den dreidimensionalen Raum beschränken.

11.1.2 Ausführung

Allgemein haben dreidimensionale Volumenintegrale die Form

$$I = \int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 f(x_1, x_2, x_3), \quad (11.4)$$

wobei die Funktion f von den drei Raumkoordinaten abhängt. Hier ist eine skalare Funktion eingesetzt, aber vektorwertige Funktionen würden einfach komponentenweise integriert werden.

Üblicherweise ist die größte Schwierigkeit bei Volumenintegralen die Festlegung der Integrationsgrenzen in den drei Variablen. Um das zu illustrieren, berechnen wir das Volumen einer Kugel mit Radius R aus dem Volumenintegral über die Funktion

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (11.5)$$

Wenn x_1 und x_2 gegeben sind, kann x_3 nur innerhalb von

$$\left[-\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}, \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} \right] \quad (11.6)$$

variieren. Wenn x_1 vorgegeben ist, muss x_2 aus dem Intervall

$$\left[-\sqrt{R^2 - x_1^2}, \sqrt{R^2 - x_1^2} \right] \quad (11.7)$$

stammen. Wenn wir zunächst das x_3 -Integral bei gegebenem x_1 und x_2 ausführen, erhalten wir

$$\int_{-\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}}^{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_3 = 2 \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}. \quad (11.8)$$

Das folgende Integral über x_2 ist dann

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\sqrt{R^2 - x_1^2}}^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} dx_2 &= \\ \left[x_2 \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} + (R^2 - x_1^2) \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right]_{-\sqrt{R^2 - x_1^2}}^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} &= \\ \pi (R^2 - x_1^2). \end{aligned} \quad (11.9)$$

Wie oder wodurch könnte der \arcsin in das Ergebnis aus (11.9) gelangen?

Schließlich ist das verbleibende Integral über x_1

$$\pi \int_{-R}^R (R^2 - x_1^2) dx_1 = \pi \left(R^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3} \right)_{-R}^R = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (11.10)$$

Natürlich ergibt sich am Ende das vertraute Ergebnis, aber die Rechnung ist unbefriedigend aufwändig. Das liegt in diesem Fall wie meistens daran, dass die kartesischen Koordinaten der Symmetrie der Kugel überhaupt nicht angepasst sind. Deswegen behandeln wir zunächst die Frage, wie Volumenintegrale in anderen, der Situation besser angepassten Koordinaten ausgeführt werden können.

11.2 Koordinatentransformationen

11.2.1 Jacobideterminante

Volumenintegrale werden erheblich vereinfacht, wenn man Koordinaten verwendet, die der Symmetrie des Integrationsvolumens angepasst sind, z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten. Nehmen wir an, solche Koordinaten seien durch $u_i(x_j)$ gegeben, dann sind ihre Differentiale durch die totalen Ableitungen

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\partial_{x_j} u_i) dx_j \quad (11.11)$$

gegeben, wobei wieder über alle Werte von j zu summieren ist. In Matrixschreibweise lautet diese Gleichung

$$d\vec{u} = \bar{J} d\vec{x}, \quad \bar{J}_{ij} = \partial_{x_j} u_i. \quad (11.12)$$

Wenn die Matrix \bar{J} invertierbar ist, d.h. wenn $\det \bar{J} \neq 0$ ist, folgt daraus

$$d\vec{x} = J d\vec{u}, \quad J_{ij} = \partial_{u_j} x_i, \quad (11.13)$$

und damit sind die dx_i durch die du_j gegeben. Die Matrix $J = \bar{J}^{-1}$ heißt *Jacobimatrix* der Koordinatentransformation.

Für das Volumenintegral brauchen wir das dreidimensionale Volumenelement $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Um es durch das Produkt $du_1 du_2 du_3$ auszudrücken, drehen wir die Koordinatenachsen durch eine orthogonale Transformation R so, dass J diagonal wird,

$$d\vec{x}' = R d\vec{x} = (R J R^\top) R d\vec{u} = J' d\vec{u}', \quad J' = \text{diag}(J_1, J_2, J_3). \quad (11.14)$$

Daraus folgen

$$dx'_i = J_i du'_i \quad \text{und} \quad dx'_1 dx'_2 dx'_3 = (J_1 J_2 J_3) du'_1 du'_2 du'_3 \quad (11.15)$$

und, da $J_1 J_2 J_3 = \det J' = \det(R J R^\top) = \det J$ ist und das Volumenintegral durch eine reine Koordinatendrehung nicht verändert wird, erhalten wir

$$dx_1 dx_2 dx_3 = |\det J| du_1 du_2 du_3, \quad (11.16)$$

wobei die Betragsstriche gewährleisten, dass das Volumenelement positiv bleibt.

Jacobideterminante

Der Ausdruck $\det J$ heißt *Jacobideterminante* oder *Funktionaldeterminante*. Sie wird oft in der Form

$$\det J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \quad (11.17)$$

geschrieben.

Demnach transformieren sich Volumenintegrale bei Koordinatentransformation nach

$$\int f(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \int f[\vec{x}(\vec{u})] |\det J| du_1 du_2 du_3 , \quad (11.18)$$

wobei das Dreifachintegral durch ein einzelnes Integralzeichen angedeutet wurde.

Beispiel: Kugelvolumen in Kugelkoordinaten

Als Beispiel berechnen wir wieder das Volumen der Kugel, aber diesmal in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) . Zunächst gilt

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi , \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi , \quad x_3 = r \cos \theta , \quad (11.19)$$

und daher ist die Jacobimatrix

$$J = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} . \quad (11.20)$$

Ihre Determinante ist einfach

$$\det J = r^2 \sin \theta . \quad (11.21)$$

Das Volumenintegral über die Kugel lautet daher

$$\int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta = \frac{2\pi}{3} R^3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} R^3 . \quad (11.22)$$

Bestimmen Sie, bevor Sie weiterlesen, die Jacobideterminante der Transformation von kartesischen auf Zylinderkoordinaten.

?

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die Jacobideterminante für die Transformation von kartesischen in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) an. Hier ist

$$x_1 = \rho \cos \varphi , \quad x_2 = \rho \sin \varphi , \quad x_3 = z , \quad (11.23)$$

daher sind die Jacobimatrix und ihre Determinante

$$J = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \det J = \rho . \quad (11.24)$$

11.2.2 Trägheitstensor einer Kugel

Als Beispiel wenden wir nun die Regeln der Volumenintegration zur Berechnung des Trägheitstensors einer homogenen Kugel mit Radius R und Gesamtmasse M an. Ihre Dichte sei ρ . Nach (11.3) und mit (11.21) ist

$$\Theta_{ij} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) r^2 \sin \theta. \quad (11.25)$$

Wir können uns durch eine physikalische Überlegung viel Rechenarbeit sparen. Zunächst müssen die Nebendiagonalelemente von Θ_{ij} alle verschwinden, weil gegenüber einer Kugel keine Orientierung der drei Koordinatenachsen bevorzugt sein kann. Die drei Koordinatenachsen müssen deshalb bei beliebiger Orientierung Hauptachsen von Θ sein. Weiterhin müssen alle Diagonalelemente gleich sein, weil die Kugel keine der drei Koordinatenrichtungen auszeichnet. Wir schließen also, dass aus Symmetriegründen

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33} \quad \text{und} \quad \Theta_{12} = \Theta_{13} = \Theta_{23} = 0 \quad (11.26)$$

gelten müssen.

Also beschränken wir uns auf die Berechnung von Θ_{11} , was wir am einfachsten durch $\Theta_{11} + \Theta_{22} + \Theta_{33} = 3\Theta_{11}$ erhalten:

$$\begin{aligned} 3\Theta_{11} &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho (3r^2 - r^2) r^2 \sin \theta \\ &= 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 8\pi\rho \frac{R^5}{5}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Hauptträgheitsmomente einer Kugel

Wegen $M = 4\pi R^3 \rho / 3$ folgt daraus für die Hauptträgheitsmomente einer Kugel

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33} = \frac{2}{5}MR^2. \quad (11.28)$$

Zu welchem Ergebnis würden die hier auf die Kugel angewandten Argumente bei einem Zylinder führen?

11.3 Drehimpuls und Trägheitsmomente starrer Körper

11.3.1 Drehimpuls

Um den Drehimpuls des starren Körpers zu bekommen, setzen wir den Körper in ein Inertialsystem, das momentan mit dem körperfesten System zusammenfällt. Dann ist die Drehmatrix zwischen beiden die

Einheitsmatrix, $R = I$, die Ortsvektoren im körperfesten System und im Inertialsystem sind gleich, $\vec{x}_i = \vec{x}'_i$, und die Geschwindigkeit der Massenpunkte des starren Körpers im Inertialsystem ist wegen (9.16) $\dot{\vec{x}}'_i = \vec{\omega} \times \vec{x}_i$. Also ist der Drehimpuls im Inertialsystem

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}'_i \times \dot{\vec{x}}'_i) = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{x}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_i)] . \quad (11.29)$$

Drehimpuls eines starren Körpers

Indem wir das doppelte Kreuzprodukt in (11.29) auf Skalarprodukte zurückführen, erhalten wir für den Drehimpuls eines starren Körpers den Ausdruck

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{x}_i^2 \vec{\omega} - \vec{x}_i (\vec{x}_i \cdot \vec{\omega})] = \Theta \vec{\omega} . \quad (11.30)$$

Im allgemeinen Fall beliebiger Drehungen zwischen dem körper- und dem raumfesten System muss berücksichtigt werden, dass der Trägheitstensor Θ dann auch aus dem körper- in das raumfeste System gedreht werden muss, $\Theta' = R \Theta R^\top$, und damit im Allgemeinen zeitabhängig wird.

11.3.2 Trägheitsmomente

Trägheitsmoment bezüglich einer Achse

Sei \vec{n} ein beliebiger Einheitsvektor, $\vec{n}^2 = 1$, dann ist das *Trägheitsmoment* um die Achse \vec{n} durch

$$\vec{n}^\top \Theta \vec{n} = n_j n_k \Theta_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{x}_i^2 - (\vec{x}_i \cdot \vec{n})^2] = \sum_{i=1}^N m_i l_i^2 \quad (11.31)$$

definiert, wobei l_i der senkrechte Abstand des Massenpunktes i von der Drehachse ist.

Demnach sind die Diagonalelemente Θ_{ii} von Θ die Trägheitsmomente um die Koordinatenachsen. Die Θ_{jk} mit $j \neq k$ heißen *Deviationsmomente*. Wie bereits im vorigen Kapitel erwähnt, heißen die Eigenwerte von Θ *Hauptträgheitsmomente* und ihre Eigenvektoren *Hauptträgheitsachsen*.

Durch die Bedingung $\vec{y}^\top \Theta \vec{y} = y_j y_k \Theta_{jk} = 1$ wird das *Trägheitsellipsoid* definiert. Im System der Hauptträgheitsachsen ist offensichtlich, dass es sich um ein Ellipsoid handelt, denn

$$\Theta_1 y_1^2 + \Theta_2 y_2^2 + \Theta_3 y_3^2 = 1 . \quad (11.32)$$

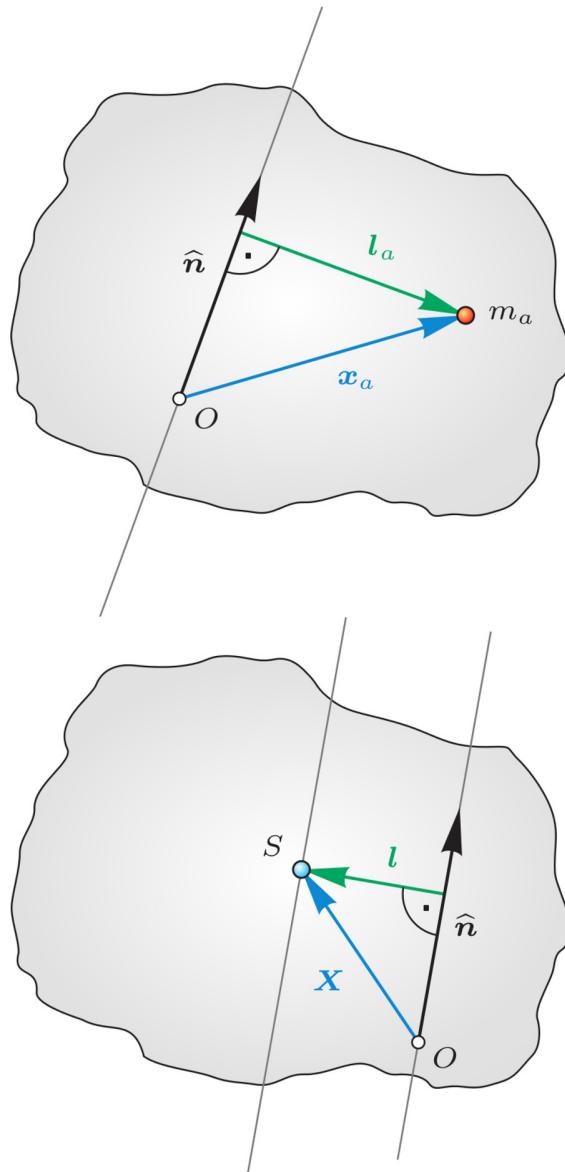


Abb. 11.1 Zur Bedeutung des Steiner'schen Satzes. Quelle: TP

Satz von Steiner

Der *Satz von Steiner* besagt, dass das Trägheitsmoment eines starren Körpers der Masse M um eine Achse durch einen beliebigen Punkt im Abstand l von seinem Schwerpunkt gleich seinem Trägheitsmoment im Schwerpunktsystem, vermehrt um Ml^2 ist.

Das sieht man auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
 \Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k}) & (11.33) \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{x}_i^* + \vec{X})^2 \delta_{jk} - (x_{i,j}^* + X_j)(x_{i,k}^* + X_k)] ,
 \end{aligned}$$

wobei \vec{x}_i^* die Schwerpunktkoordinaten und \vec{X} der Ortsvektor des Schwerpunkts sind. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[(\vec{x}_i^*)^2 \delta_{jk} - x_{i,j}^* x_{i,k}^* \right] + M \left(\vec{X}^2 \delta_{jk} - X_j X_k \right) \\ &+ 2\delta_{jk} \vec{X} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i^* - X_j \sum_{i=1}^N m_i x_{i,k}^* - X_k \sum_{i=1}^N m_i x_{i,j}^*,\end{aligned}\quad (11.34)$$

wobei die Gesamtmasse $M = \sum m_i$ verwendet wurde. Die drei Terme in der zweiten Zeile verschwinden aufgrund der Definition des Schwerpunkts. Sei nun \vec{n} die Drehachse im Abstand l vom Schwerpunkt, dann gilt

$$l^2 = \vec{X}^2 - (\vec{X} \cdot \vec{n})^2, \quad (11.35)$$

und damit folgt

$$\vec{n}^\top \Theta \vec{n} = \vec{n}^\top \Theta^* \vec{n} + Ml^2, \quad (11.36)$$

wie behauptet.

11.3.3 Homogenes Rotationsellipsoid

Als etwas anspruchsvollereres Beispiel berechnen wir jetzt den Trägheitstensor und einige Trägheitsmomente eines homogenen Rotationsellipsoids der Masse M und der Dichte ρ , d.h. eines Körpers, dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{\varepsilon^2 a^2} = 1 \quad (11.37)$$

beschrieben wird, wobei die Zahl ε angibt, wie stark das Ellipsoid längs der x_3 -Achse gestreckt ist. Für $\varepsilon > 1$ heißt das Ellipsoid *prolat*, andernfalls *oblat*.

Wir führen nun die elliptischen Koordinaten (r, θ, φ)

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = \varepsilon r \cos \theta \quad (11.38)$$

ein, die für $r = a$ und beliebige Winkel (θ, φ) die Bedingung (11.37) erfüllen. Die Jacobideterminante der Transformation von kartesischen auf diese Koordinaten ist

$$\det J = \varepsilon r^2 \sin \theta. \quad (11.39)$$

Zunächst erhalten wir die Masse

$$M = \varepsilon \rho \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{3} \varepsilon \rho a^3. \quad (11.40)$$

Was würde sich an den nachfolgenden Rechnungen ändern, wenn die Dichte des Ellipsoids vom Radius r abhinge?

Wieder müssen aus Symmetriegründen die Deviationsmomente Θ_{12} , Θ_{13} und Θ_{23} verschwinden und die beiden Hauptträgheitsmomente Θ_{11} und Θ_{22} gleich sein. Wegen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2(\sin^2 \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta) \quad (11.41)$$

ist das Hauptträgheitsmoment

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= \rho \varepsilon \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &\quad \cdot r^2 (\sin^2 \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) \\ &= \frac{\rho \varepsilon a^5}{5} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \theta) \\ &= \frac{\rho \varepsilon a^5}{5} \int_0^\pi \sin \theta d\theta (\pi \sin^2 \theta + 2\pi \varepsilon^2 \cos^2 \theta) \\ &= \frac{\rho \varepsilon a^5}{5} \frac{4\pi}{3} (1 + \varepsilon^2) = \frac{1 + \varepsilon^2}{5} Ma^2, \end{aligned} \quad (11.42)$$

was für $\varepsilon = 1$ in das Ergebnis für die Kugel übergeht, wie es sein muss. Für Θ_{33} erhalten wir den einfacheren Ausdruck

$$\begin{aligned} \Theta_{33} &= \rho \varepsilon \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho \varepsilon \frac{2a^5}{5} = \frac{2}{5} Ma^2. \end{aligned} \quad (11.43)$$

Das Trägheitsmoment dieses Rotationsellipsoids um die schräge Achse

$$\vec{n} = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_3}{\sqrt{2}} \quad (11.44)$$

ist

$$\begin{aligned} \vec{n}^\top \Theta \vec{n} &= \frac{1}{2} (\vec{e}_1^\top + \vec{e}_3^\top) \Theta (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = \frac{\Theta_{11} + \Theta_{33}}{2} \\ &= \frac{1 + \varepsilon^2 + 2}{10} Ma^2 = \frac{3 + \varepsilon^2}{10} Ma^2. \end{aligned} \quad (11.45)$$

11.4 Der Gauß'sche Satz

11.4.1 Begründung

Nachdem wir nun Volumenintegrale zur Verfügung haben, können wir einen weiteren Integralsatz ähnlich dem Satz von Stokes herleiten, der in der Physik ebenfalls häufig gebraucht wird.

Gauß'scher Satz

Dieser Integralsatz ist der *Gauß'sche Satz*, der besagt, dass Flächenintegrale über Vektorfelder \vec{A} durch Volumenintegrale über deren Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ersetzt werden können,

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV, \quad (11.46)$$

wobei ∂V der Rand des Volumens V ist, also seine gesamte Oberfläche, und die Flächenelemente $d\vec{\sigma}$ entlang der Flächennormalen nach außen gerichtet sind.

Um das einzusehen, betrachten wir ein kleines, würfelförmiges Volumen mit den Abmessungen dx_1 , dx_2 und dx_3 längs der Koordinatenachsen. Seine Oberfläche besteht offenbar aus sechs Quadranten, die sich paarweise gegenüberliegen und parallel zu einer der drei Koordinatenachsen sind. Die äußeren Flächennormalen sind also entweder parallel oder antiparallel zu den Koordinatenachsen gerichtet. Der Beitrag der beiden zur x_2 - x_3 -Ebene parallelen Quadrate zum Flächenintegral in (11.46) ist

$$-A_1(x_1, x_2, x_3)dx_2dx_3 + A_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3)dx_2dx_3, \quad (11.47)$$

wobei das negative Vorzeichen durch die Ausrichtung der Flächennormalen bedingt wird. Wegen

$$A_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) = A_1(x_1, x_2, x_3) + \partial_{x_1}A_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 \quad (11.48)$$

können wir (11.47) in die Form

$$\partial_{x_1}A_1(\vec{x})dx_1dx_2dx_3 = \partial_{x_1}A_1 dV \quad (11.49)$$

bringen. Entsprechende Beiträge kommen von den beiden anderen Flächenpaaren, woraus wir für das infinitesimal kleine Volumen dV erhalten

$$\lim_{dV \rightarrow 0} \int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = (\partial_{x_1}A_1 + \partial_{x_2}A_2 + \partial_{x_3}A_3) dV = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV. \quad (11.50)$$

Nun denken wir uns ein endlich großes Volumen aus infinitesimal kleinen Würfeln aufgebaut. Dadurch heben sich die inneren Flächenintegrale genau heraus, weil an der Trennfläche zwischen zwei benachbarten Würfeln die Beiträge betragsgleich sind, aber wegen der antiparallelen Orientierung ihrer Flächennormalen entgegengesetzte Vorzeichen haben. Es bleibt also nur das Flächenintegral über den Rand des Volumens übrig, während die Divergenz über das gesamte Volumen integriert wird. Dies begründet den Gauß'schen Satz.

?

Wie lautet die Divergenz von \vec{r} ? Können Sie daraus und mit dem Gauß'schen Satz (11.46) die Oberfläche einer Kugel bestimmen?

11.4.2 Transformation von Divergenz und Rotation

Die Integralsätze von Gauß und Stokes geben uns eine einfache Methode an die Hand, die Differentialoperatoren Divergenz und Rotation in

krummlinig-orthogonale Koordinatensysteme zu übersetzen. Wir hatten in (7.2) gesehen, dass nach einer Transformation in solche Koordinaten das Längenelement ds durch

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \quad (11.51)$$

ausgedrückt werden kann, wobei die h_i durch (7.3) gegeben sind.

Führen wir dieselbe Betrachtung nun in krummlinig-orthogonalen Koordinaten durch, die wir zur Herleitung des Gauß'schen Satzes in kartesischen Koordinaten benutzt haben, erhalten wir zunächst für die Beiträge zweier längs der q_1 -Achse gegenüberliegender Begrenzungsflächen eines infinitesimalen Volumenelements zum Flächenintegral

$$- (A_{q_1} h_2 h_3)(q_1, q_2, q_3) dq_2 dq_3 + (A_{q_1} h_2 h_3)(q_1 + dq_1, q_2, q_3) dq_2 dq_3 , \quad (11.52)$$

wobei berücksichtigt werden muss, dass jetzt auch die h_i von den Koordinaten q_j abhängen. Also ist der Beitrag (11.52)

$$\frac{\partial(A_{q_1} h_2 h_3)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3 , \quad (11.53)$$

und das gesamte Flächenintegral wird

$$\left(\frac{\partial(A_{q_1} h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_{q_2} h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_{q_3} h_1 h_2)}{\partial q_3} \right) dq_1 dq_2 dq_3 . \quad (11.54)$$

Nach dem Gauß'schen Satz muss dies nun gleich

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (11.55)$$

sein, woraus für die Divergenz die Darstellung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(A_{q_1} h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_{q_2} h_1 h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_{q_3} h_1 h_2)}{\partial q_3} \right) \quad (11.56)$$

folgt.

Durch eine völlig analoge Betrachtung, ausgehend von (6.18) für die dritte Komponente der Rotation, erhält man die Darstellung der Rotation in krummlinig-orthogonalen Koordinaten,

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_{q_1} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial(A_{q_3} h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_{q_2} h_2)}{\partial q_3} \right) , \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_{q_2} &= \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial(A_{q_1} h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_{q_3} h_3)}{\partial q_1} \right) , \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_{q_3} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial(A_{q_2} h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_{q_1} h_1)}{\partial q_2} \right) . \end{aligned} \quad (11.57)$$

Für Kugelkoordinaten hatten wir $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$ und

$$h_r = 1 , \quad h_\theta = r , \quad h_\varphi = r \sin \theta . \quad (11.58)$$

Daher ist $h_r h_\theta h_\varphi = r^2 \sin \theta$. Wir erhalten daraus:

Divergenz und Rotation in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten lautet die Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (11.59)$$

Für die Komponenten der Rotation erhalten wir

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}, \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}, \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (11.60)$$

11.4.3 Beispiel

Beispiel: Radialfeld

Betrachten wir als Beispiel das Radialfeld

$$\vec{F} = e^{-r} \vec{e}_r \quad (11.61)$$

und integrieren es über eine Kugelfläche mit Radius R um den Ursprung. Das gerichtete Flächenelement ist

$$d\vec{\sigma} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r, \quad (11.62)$$

sodass das Flächenintegral der Kraft über die Kugelfläche bei $r = R$

$$R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \vec{F}(r, \theta, \varphi) \cdot \vec{e}_r = 4\pi R^2 e^{-R} \quad (11.63)$$

ist.

Andererseits ist die Divergenz von \vec{F} wegen (11.59) durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} (2r - r^2) e^{-r} \quad (11.64)$$

gegeben, sodass das Volumenintegral darüber

$$\begin{aligned} 4\pi \int_0^R r^2 dr \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= 4\pi \int_0^R (2r - r^2) e^{-r} dr \\ &= 4\pi r^2 e^{-r} \Big|_0^R = 4\pi R^2 e^{-R} \end{aligned} \quad (11.65)$$

ist, wie es nach dem Gauß'schen Satz sein muss. ◀

Kapitel 12

Harmonische Schwingungen

12.1 Der Harmonische Oszillator I

12.1.1 Bewegungsgleichung bei linearisierter Kraft

Auf einen Körper im mechanischen *Gleichgewicht* wirkt insgesamt keine Kraft, $F = 0$, er wird also nicht beschleunigt, $\ddot{x} = 0$.

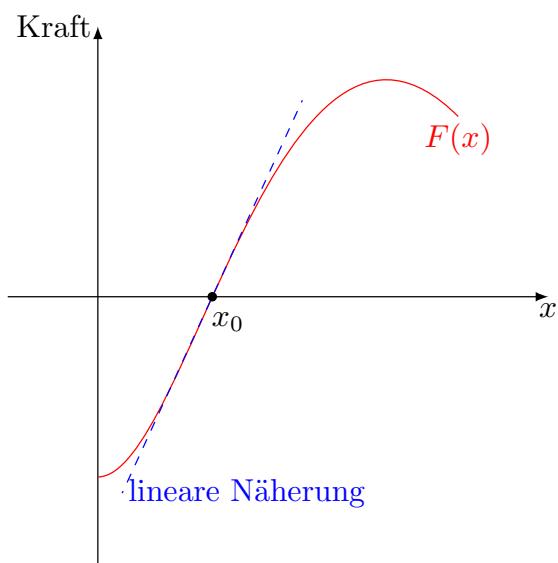


Abb. 12.1 Entwicklung der Kraft um eine Gleichgewichtslage

Bei genügend kleiner Auslenkung aus der Gleichgewichtslage x_0 kann die Kraft in eine Taylorreihe entwickelt werden:

$$F = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots . \quad (12.1)$$

Nach Voraussetzung verschwindet $F(x_0)$, weil x_0 die Gleichgewichtslage ist. Der Einfachheit halber verschieben wir das Koordinatensystem so, dass der Ursprung in x_0 zu liegen kommt, also $x_0 = 0$ wird. Weiter nehmen wir an, dass

$$F'(x_0) \neq 0 \quad (12.2)$$

ist und vernachlässigen Terme höherer Ordnung in der Taylor-Reihe, d.h. wir *linearisieren* die Kraft um die Gleichgewichtslage.

Wenn nun

$$F'(x_0) > 0 \quad (12.3)$$

ist, entfernt sich das System aus der Gleichgewichtslage, und das Gleichgewicht ist *labil*. Das Gleichgewicht ist *stabil*, wenn das System in die Ausgangslage zurückkehrt, d.h. wenn

$$F'(x_0) < 0 \quad (12.4)$$

ist. Entsprechend schreiben wir

$$F'(x_0) := -k, \quad k > 0. \quad (12.5)$$

Bewegungsgleichung bei linearisierter Kraft

Damit lautet die *linearisierte* Kraft in einer genügend kleinen Umgebung von x_0

$$F(x) = -kx. \quad (12.6)$$

Die Bewegungsgleichung ist dann

$$m\ddot{x} = -kx \quad (12.7)$$

oder

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (12.8)$$

wobei wir zur Abkürzung

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (12.9)$$

eingeführt haben.

12.1.2 Freie Schwingungen

Die Bewegungsgleichung (12.8) ist offenbar eine gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zu ihrer Lösung brauchen wir also ein Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

Nun lässt sich eine Lösung sehr schnell erraten. Setzen wir $x_1(t) = \sin \omega_0 t$ probeweise in (12.8) ein, sehen wir sofort, dass $x_1(t)$ die Gleichung löst. Ebenso führt $x_2(t) = \cos \omega_0 t$ zum Erfolg. Dass diese beiden

Identifizieren Sie Beispiele mehr oder weniger harmonischer Schwingungen, die Ihnen in Ihrem Alltag begegnen. Überlegen Sie jeweils, welche Kraft dabei linear genähert werden könnte.

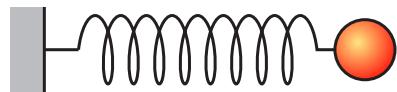


Abb. 12.2 Masse an einer Feder als Beispiel für harmonischen Oszillator.
Quelle: TP

Funktionen linear unabhängig voneinander sind, stellt sich durch Anwendung von (2.8) heraus, denn

$$W(x) = -\omega_0 \sin^2 \omega_0 t - \omega_0 \cos^2 \omega_0 t = -\omega_0 \neq 0. \quad (12.10)$$

Allgemeine Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung

Die allgemeine Lösung unserer Gleichung (12.8) lautet also

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t. \quad (12.11)$$

Die bisherigen Überlegungen zeigen, dass die Linearisierung *jeder* Kraft in genügend kleinen Umgebungen einer stabilen Gleichgewichtslage zu einer Schwingungsgleichung der Form (12.8) mit der allgemeinen Lösung (12.11) führt.

Die Konstanten C_1, C_2 müssen durch die beiden Anfangsbedingungen bestimmt werden. Wenn wir den Anfangsort x_0 und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 festlegen, folgt

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \Rightarrow C_2 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 \Rightarrow C_1 = \frac{v_0}{\omega_0}. \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung mit Anfangsbedingungen

Damit

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t. \quad (12.12)$$

Wegen der trigonometrischen Beziehung $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ lässt sich die allgemeine Lösung auch in die Form

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \delta_0) \quad (12.13)$$

bringen.

Um auf die Form (12.13) zu kommen, setzt man $a = \omega_0$ sowie $A_0 \cos b = x_0$ und $A_0 \sin b = v_0/\omega_0$ und erhält

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad (12.14)$$

und

$$\tan \delta_0 = \frac{v_0}{x_0 \omega_0}. \quad (12.15)$$

$A_0 \geq 0$ heißt *Amplitude*, $\omega_0 t - \delta_0$ *Phase* der Schwingung. Dabei ist $0 \leq \delta_0 < 2\pi$.

Die durch (12.13) bzw. (12.14) beschriebene Bewegung heißt *harmonische Schwingung*. Sie hat die *Kreisfrequenz* ω_0 , die *Frequenz*

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (12.16)$$

und die *Schwingungsperiode*

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (12.17)$$

Es lohnt sich jetzt, zur Beschreibung des harmonischen Oszillators komplexe Zahlen einzuführen, weil sich durch sie vieles enorm vereinfacht. Also folgt zunächst ein Umweg durch elementare Rechenregeln und Beziehungen komplexer Zahlen.

12.2 Komplexe Zahlen

12.2.1 Elementare Rechenregeln

Komplexe Zahlen sind in der klassischen Physik oft bequem und in der Quantenphysik notwendig. Sie kommen zustande, indem man sich zunächst überlegt, dass dem quadratischen Ausdruck

$$x^2 + 1 = 0 \quad (12.18)$$

ebenso Lösungen zugeordnet werden sollen wie dem Ausdruck $x^2 - 1 = 0$, der die offensichtlichen Lösungen $x = \pm 1$ hat. Man definiert als Lösung von (12.18) die *imaginäre Einheit* i , so dass $i^2 = -1$ ist.

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ sind geordnete Paare (a, b) reeller Zahlen, die in der Form

$$z = a + ib \quad (12.19)$$

geschrieben werden.

Man kann sie als Punkte in der zweidimensionalen komplexen Ebene auffassen, deren eine Koordinatenachse *reell* und deren andere Koordinatenachse *imaginär* heißt. Entsprechend heißen

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad \text{und} \quad b = \operatorname{Im}(z) \quad (12.20)$$

Realteil bzw. *Imaginärteil* der komplexen Zahl z .

Komplexe Zahlen z_1, z_2 werden addiert oder subtrahiert, indem man ihre Real- und Imaginärteile addiert oder subtrahiert,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) , \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) . \end{aligned} \quad (12.21)$$

Zur Multiplikation fasst man komplexe Zahlen als Summen auf und multipliziert gliedweise, indem man die Rechenregel $i^2 = -1$ benutzt,

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) . \quad (12.22)$$

Durch Änderung des Vorzeichens des Imaginärteils einer komplexen Zahl erhält man ihre *komplex konjugierte Zahl*,

$$z = a + ib , \quad z^* = a - ib . \quad (12.23)$$

Multipliziert man eine komplexe Zahl z mit ihrer komplex-Konjugierten z^* , erhält man das Betragsquadrat von z ,

$$z z^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 , \quad (12.24)$$

das offenbar reell ist.

Divisionen durch komplexe Zahlen kann man durch Erweiterung mit ihren konjugiert-komplexen Zahlen in reelle Divisionen verwandeln,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} . \quad (12.25)$$

12.2.2 Komplexe Exponentialfunktion

Wenn man komplexe Zahlen als Punkte in der komplexen Ebene auffasst, ist der *Betrag* einer komplexen Zahl der Abstand dieses Punktes vom Ursprung. Entsprechend ordnet man komplexen Zahlen durch

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a} \quad (12.26)$$

eine *Phase* zu.

Darstellungen komplexer Zahlen

Damit kann man komplexe Zahlen auf die beiden Weisen

$$z = a + i b = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (12.27)$$

darstellen.

Entwickelt man die Exponentialfunktion e^x entsprechend dem Taylor-schen Satz (2.20) um $x = 0$, so erhält man wegen $(e^x)' = e^x$ die Taylor-Reihe

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} . \quad (12.28)$$

Ersetzt man in dieser Reihe die reelle Zahl x durch die imaginäre Zahl ix , folgt zuerst

$$e^{ix} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ix)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} , \quad (12.29)$$

wenn man die Summe in einen reellen und einen imaginären Teil aufspaltet. Die beiden ersten Terme auf der rechten Seite von (12.29) entsprechen gerade der Reihenentwicklung des Cosinus um $x = 0$,

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ix)^{2j}}{(2j)!} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^j}{(2j)!} = \cos x , \quad (12.30)$$

während der dritte Term die Reihenentwicklung des Sinus um $x = 0$ ergibt,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = ix \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{(2k+1)!} = i \sin x . \quad (12.31)$$

Exponentialdarstellung komplexer Zahlen

Dies erlaubt die extrem nützliche Gleichsetzung

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (12.32)$$

die häufig sehr bequem eingesetzt werden kann. Insbesondere lässt sich damit (12.27) in die Form

$$z = |z|e^{i\varphi} \quad (12.33)$$

bringen.

?

Die Darstellung (12.32) der Exponentialfunktion mit imaginärem Argument führt leicht auf die Euler'sche Identität

$$e^{i\pi} = -1.$$

Können Sie daraus \sqrt{i} bestimmen?

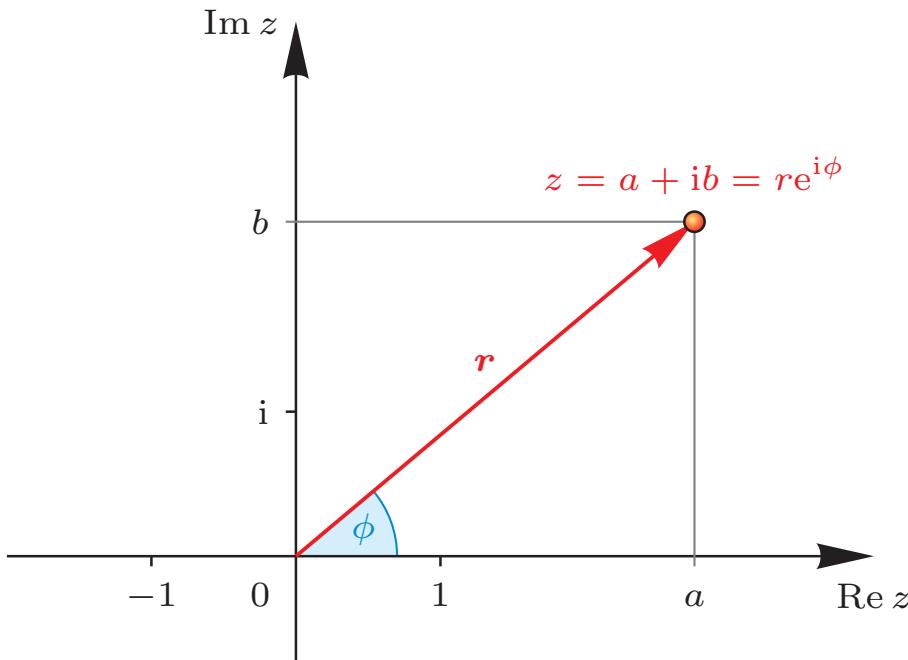


Abb. 12.3 Ein Blick auf die komplexe Ebene. Quelle: TP

Die Sinus- und Cosinusfunktionen können wegen (12.32) durch die komplexe Exponentialfunktion in der Weise

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (12.34)$$

dargestellt werden. Diese Darstellungen erlauben bequeme Herleitungen trigonometrischer Beziehungen. Als Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= \frac{(e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy})}{4} \\ &= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{4} + \frac{e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{4} \\ &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]. \end{aligned} \quad (12.35)$$

12.3 Komplexe Darstellung harmonischer Schwingungen

12.3.1 Lösungen der Bewegungsgleichung

Wir kehren nun zur Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators (12.8) zurück und multiplizieren sie zunächst mit $2\dot{x}$ als integrierendem Faktor. Die Gleichung

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega_0^2\dot{x}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} + \omega_0^2 \frac{d(x^2)}{dt} = 0 \quad (12.36)$$

kann nun direkt integriert werden und ergibt

$$\dot{x}^2 = -\omega_0^2 x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{x}}{x} = \pm i\omega_0, \quad (12.37)$$

wobei uns die imaginäre Einheit sehr gelegen kommt. Nach einer weiteren Integration folgt

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{d \ln x}{dt} = \pm i\omega_0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{\pm i\omega_0 t}. \quad (12.38)$$

Die beiden Funktionen, die wir als Lösungen erhalten haben, sind linear unabhängig, denn

$$W = \left| -i\omega_0 e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 t} - i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0 t} \right| = 2\omega_0 \neq 0. \quad (12.39)$$

Warum bzw. unter welchen Voraussetzungen können Sie aus einer komplexen Lösung eines physikalischen Problems deren Real- oder Imaginärteil frei als reelle Lösung wählen?

Natürlich hat eine komplexe Lösung an sich noch keinen physikalischen Sinn, sodass man den Real- oder Imaginärteil der komplexen Lösung wählt, sobald man eine physikalische Aussage treffen will.

12.3.2 Hermitesche Matrizen

Zum Abschluss dieser einführenden Diskussion komplexer Zahlen beschäftigen wir uns noch kurz mit einer komplexen Erweiterung der quadratischen Matrizen. Sei A eine Matrix mit Elementen $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Wenn man alle ihre Elemente komplex konjugiert, heißt die Matrix selbst komplex konjugiert, $A^* = (a_{ij}^*)$. Wenn man sie zusätzlich transponiert, heißt sie *adjungiert*,

$$A^\dagger = (A^*)^\top = (a_{ji}^*). \quad (12.40)$$

Aus Gründen, die gleich offensichtlich werden, spielen solche Matrizen vor allem in der Quantenmechanik eine tragende Rolle, die gleich ihren Adjungierten sind,

$$A = A^\dagger. \quad (12.41)$$

Sie heißen *selbstadjungiert* oder *hermitesch*.

Seien nun A eine hermitesche Matrix, λ_i und λ_j irgend zwei ihrer Eigenwerte und v_i und v_j die zugehörigen Eigenvektoren. Dann gilt nach Definition

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad Av_j = \lambda_j v_j. \quad (12.42)$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit v_j^\dagger und der zweiten mit v_i^\dagger erhalten wir

$$v_j^\dagger A v_i = \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle, \quad v_i^\dagger A v_j = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle, \quad (12.43)$$

denn das Skalarprodukt zweier komplexwertiger Vektoren v und w muss $\langle v, w \rangle = v^\dagger w$ lauten, um zu garantieren, dass $\langle v, v \rangle \geq 0$ ist. Die adjungierte der letzten Gleichung ist

$$v_j^\dagger A^\dagger v_i = v_j^\dagger A v_i = \lambda_j^* \langle v_i, v_j \rangle, \quad (12.44)$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass nach Voraussetzung $A^\dagger = A$ ist. Subtrahieren wir dieses Ergebnis von der ersten Gleichung (12.43), folgt

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j^*) \langle v_i, v_j \rangle. \quad (12.45)$$

Für $i = j$ folgt daraus wegen $\langle v_i, v_i \rangle > 0$, dass $\lambda_i = \lambda_i^*$ sein muss, was nur möglich ist, wenn die Eigenwerte λ_i *reell* sind.

Eigenwerte und Eigenvektoren hermitescher Matrizen

Die Eigenwerte hermitescher Matrizen sind reell. Darüber hinaus sieht man anhand von (12.45), dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten hermitescher Matrizen *orthogonal* sein müssen.

Schließlich sei noch erwähnt, dass solche Matrizen U als *unitär* bezeichnet werden, deren Adjungierte gleich ihren Inversen sind,

$$U^\dagger = U^{-1}. \quad (12.46)$$

Sie verallgemeinern die Beziehung $R^\top = R^{-1}$ orthogonaler Matrizen und treten ebenfalls in der Quantenmechanik häufig auf.

12.4 Der harmonische Oszillator II

12.4.1 Gedämpfte Schwingungen

Wir erweitern nun schrittweise die Behandlung des harmonischen Oszillators, indem wir die Schwingungsgleichung (12.8) um physikalisch motivierte Terme ergänzen und ihre Lösungen entsprechend erweitern.

Zunächst führen wir eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft $F_R = -b\dot{x}$ ($b > 0$) in die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators ein,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (12.47)$$

Das ist wieder eine gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, d.h. wir brauchen wieder zwei linear unabhängige Lösungen, aus denen wir die vollständige Lösung durch Linearkombination gewinnen.

Wie schon am Ende des vorigen Kapitels vereinfacht sich die Lösung sehr, wenn wir sie im Komplexen suchen, d.h. wir suchen Lösungen $z(t) \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0 , \quad (12.48)$$

so dass die Real- und Imaginärteile $x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$ und $y(t) = \operatorname{Im}[z(t)]$ jeweils Lösungen der Ausgangsgleichung (12.47) sind.

Für $z(t)$ versuchen wir den Ansatz

$$z(t) = e^{i\omega t} , \quad (12.49)$$

also

$$\dot{z}(t) = i\omega z(t) , \quad \ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t) . \quad (12.50)$$

Damit lautet die komplexe Bewegungsgleichung

$$(-m\omega^2 + i\omega b + k)e^{i\omega t} = 0 . \quad (12.51)$$

Diese Gleichung muss für beliebige Zeiten t erfüllt sein, was nur möglich ist, wenn der Ausdruck in Klammern separat verschwindet:

$$-m\omega^2 + i\omega b + m\omega_0^2 = 0 , \quad (12.52)$$

wobei wir wieder $k = m\omega_0^2$ gesetzt haben.

Eigenfrequenzen des linear gedämpften harmonischen Oszillators

Die gemischt-quadratische Gleichung (12.52) für ω zeigt, dass unser Ansatz dann erfolgreich ist, wenn ω die Bedingung

$$\omega_{1,2} = -\frac{-ib \pm \sqrt{4m^2\omega_0^2 - b^2}}{2m} = i\lambda \pm \bar{\omega} \quad (12.53)$$

erfüllt, wobei wir die Definitionen

$$\lambda := \frac{b}{2m} , \quad \bar{\omega} := \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (12.54)$$

eingeführt haben.

Der Wurzelausdruck zeigt, dass eine Fallunterscheidung in λ nötig wird, je nachdem, ob λ größer oder kleiner als ω_0 ist.

12.4.2 Schwache, starke und kritische Dämpfung

Schwache Dämpfung

Schwach gedämpft ist die Schwingung dann, wenn der Reibungsterm klein gegenüber den anderen Termen der Gleichung (12.48) ist. Das ist dann der Fall, wenn $\lambda < \omega_0$ gilt. In diesem Fall ist $\bar{\omega} \in \mathbb{R}$, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\bar{\omega} > 0$ annehmen.

Die zwei linear unabhängigen, speziellen Lösungen der Bewegungsgleichung lauten dann

$$z_{1,2}(t) = e^{-\lambda t} e^{\pm i \bar{\omega} t}. \quad (12.55)$$

Aus ihrem Real- und Imaginärteil ergeben sich zwei linear unabhängige, reelle Lösungen der Ausgangsgleichung,

$$x_{1,2}(t) = e^{-\lambda t} \cdot \begin{cases} \cos \bar{\omega} t \\ \sin \bar{\omega} t \end{cases}. \quad (12.56)$$

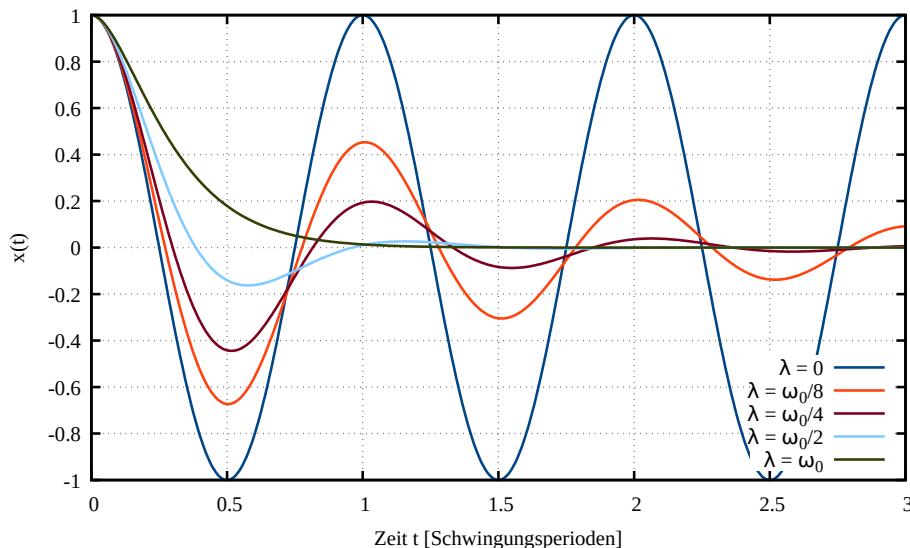


Abb. 12.4 Freie Schwingung und schwach gedämpfte Schwingungen mit verschiedenen starker Dämpfung

Allgemeine Lösung bei schwacher Dämpfung

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination aus beiden mit bisher beliebigen Koeffizienten $C_{1,2}$,

$$x(t) = e^{-\lambda t} (C_1 \sin \bar{\omega} t + C_2 \cos \bar{\omega} t). \quad (12.57)$$

Ähnlich wie im ungedämpften Fall kann sie in die Form

$$x(t) = \bar{A} e^{-\lambda t} \cos(\bar{\omega} t - \bar{\delta}_0) \quad (12.58)$$

gebracht werden.

Sie zeigt, dass die Amplitude der Schwingung exponentiell abklingt und dass die Frequenz $\bar{\omega} \leq \omega_0$ und die Phase $\bar{\delta}_0$ durch die Dämpfung verändert werden.

Starke Dämpfung

Umgekehrt zum vorherigen Fall ist hier die Reibung *stark*, also $\lambda > \omega_0$. In diesem Fall ist $\bar{\omega} = i\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ imaginär.

Allgemeine Lösung bei starker Dämpfung

Die allgemeine Lösung lautet nun

$$x(t) = C_1 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}, \quad (12.59)$$

das heißt, die Bewegung klingt exponentiell ab und hat den Schwingungscharakter verloren.

Kritische Dämpfung

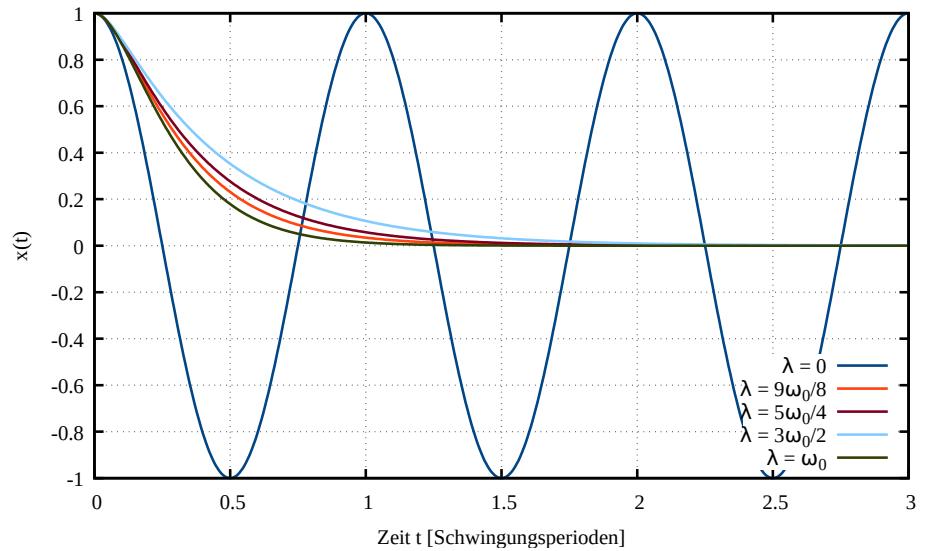


Abb. 12.5 Stark gedämpfte Schwingungen und aperiodischer Grenzfall

Dieser Fall trennt die beiden vorherigen voneinander: $\lambda = \omega_0$: $\bar{\omega} = 0$. Dann liefert $x_1(t) = e^{-\lambda t}$ nur noch eine Lösung. Die zweite notwendige, davon linear unabhängige Lösung können wir uns wieder durch d'Alembert-Reduktion verschaffen, indem wir den Ansatz

$$x_2(t) = f(t) x_1(t) \quad (12.60)$$

in die Gleichung (12.48) einsetzen und berücksichtigen, dass $x_1(t)$ bereits eine Lösung ist. Wir erhalten zunächst

$$(\ddot{f}x_1 + 2\dot{f}\dot{x}_1 + f\ddot{x}_1) + 2\lambda(\dot{f}x_1 + f\dot{x}_1) + \omega_0^2 f x_1 = 0, \quad (12.61)$$

und daraus, da $\ddot{x}_1 + 2\lambda\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 0$ ist,

$$\ddot{f} = -2\dot{f} \frac{\dot{x}_1 + \lambda x_1}{x_1} = 0 , \quad (12.62)$$

da $\dot{x}_1 + \lambda x_1 = 0$ ist. Demnach muss \dot{f} eine Konstante sein, und $f = t$ ist die einfachste Lösung der Gleichung (12.62). Daraus erhalten wir $x_2 = te^{-\lambda t}$.

Die lineare Unabhängigkeit der beiden Lösungen kann man wieder anhand von (2.8) feststellen, denn

$$W = x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2 = x_1(x_1 - \lambda t x_1) + \lambda t x_1^2 = x_1^2 = e^{-2\lambda t} \neq 0 . \quad (12.63)$$

Alternativ dazu kann man sich die zweite Lösung durch einen Grenzübergang aus dem Fall schwacher Dämpfung verschaffen, indem man den Grenzübergang $\bar{\omega} \rightarrow 0$ durchführt. In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung für $x(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = v_0$

$$x(t) = e^{-\lambda t} \frac{v_0}{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega} t . \quad (12.64)$$

Der Grenzübergang für $\bar{\omega} \rightarrow 0$ liefert

$$\lim_{\bar{\omega} \rightarrow 0} x(t) = e^{-\lambda t} v_0 t \lim_{\bar{\omega} \rightarrow 0} \frac{\sin \bar{\omega} t}{\bar{\omega} t} = e^{-\lambda t} v_0 t . \quad (12.65)$$

Damit erhalten wir wieder als zweite, von $x_1(t)$ linear unabhängige Lösung

$$x_2(t) = te^{-\lambda t} , \quad (12.66)$$

wie zuvor.

Aperiodischer Grenzfall

Die allgemeine Lösung lautet also

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\lambda t} . \quad (12.67)$$

Sie stellt den so genannten *aperiodischen Grenzfall* dar.

Kapitel 13

Pendelschwingung und Resonanz

13.1 Mathematisches und physikalisches Pendel

13.1.1 Mathematisches Pendel

Ein Massenpunkt der Masse M sei im homogenen Gravitationsfeld an einem masselosen Faden der Länge l aufgehängt. In seiner Ruhelage zeigt dieses mathematische (idealisierte) Pendel natürlich senkrecht nach unten, und wir betrachten, wie es sich bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage bewegt.

Das Pendel bewege sich in der x - y -Ebene. Die Gravitationskraft ist $\vec{F} = -Mg\vec{e}_y$, wobei g die Schwerebeschleunigung ist und \vec{e}_y nach oben zeigt. Bei einem Auslenkwinkel φ aus der Ruhelage zeigt der Faden in die Richtung

$$\vec{e} = \sin \varphi \vec{e}_x - \cos \varphi \vec{e}_y, \quad (13.1)$$

sodass senkrecht zum Pendel die Rückstellkraft

$$\begin{aligned} \vec{F}_r &= \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{e})\vec{e} \\ &= -Mg\vec{e}_y - (Mg \cos \varphi)(\sin \varphi \vec{e}_x - \cos \varphi \vec{e}_y) \\ &= -\sin^2 \varphi Mg\vec{e}_y - Mg \cos \varphi \sin \varphi \vec{e}_x \end{aligned} \quad (13.2)$$

wirkt.

Für kleine Auslenkwinkel φ nähern wir nun

$$\sin \varphi \approx \varphi, \quad \cos \varphi \approx 1 \quad (13.3)$$

Die Komponenten eines beliebigen Vektors \vec{a} parallel bzw. senkrecht zu einem Einheitsvektor \vec{e} lauten

$$\begin{aligned} \vec{a}^{\parallel} &= (\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e}, \\ \vec{a}^{\perp} &= \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e}. \end{aligned}$$

Können Sie diese Ausdrücke und damit die *Projektoren*

$$\pi^{\parallel} = \vec{e} \otimes \vec{e}, \quad \pi^{\perp} = \mathbb{1}_3 - \vec{e} \otimes \vec{e}$$

begründen?

und linearisieren die Kraft, lassen also alle Terme weg, die von quadratischer oder höherer Ordnung in φ sind. Dann vereinfacht sich die Rückstellkraft zu

$$\vec{F}_r = -Mg\varphi\vec{e}_x. \quad (13.4)$$

Aus (13.1) folgt wegen $\vec{x} = l\vec{e}$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= l\dot{\varphi}(\cos \varphi\vec{e}_x + \sin \varphi\vec{e}_y), \\ \ddot{\vec{x}} &= l\ddot{\varphi}(\cos \varphi\vec{e}_x + \sin \varphi\vec{e}_y) - l\dot{\varphi}^2(\sin \varphi\vec{e}_x - \cos \varphi\vec{e}_y) \\ &\approx l\ddot{\varphi}\vec{e}_x. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels

Damit wird die Bewegungsgleichung eindimensional, weil die Bewegung in y -Richtung vernachlässigbar wird, und die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \quad (13.6)$$

Das ist offensichtlich eine harmonische Oszillatorgleichung für den Auslenkwinkel φ , die die üblichen Lösungen hat. Die Schwingungsfrequenz ist

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (13.7)$$

unabhängig von der Masse M des Pendelkörpers.

13.1.2 Physikalisches Pendel

Nun ersetzen wir den Massenpunkt M durch eine homogene Scheibe derselben Masse, der Dicke d und mit Radius R , die in ihrem Schwerpunkt an der Pendelstange fixiert wird. Ändert sich dadurch das Verhalten des Pendels?

Offenbar müssen wir berücksichtigen, dass sich der Pendelkörper dreht und wegen seines Trägheitsmoments einen Drehimpuls bekommt, der sich während der Pendelschwingung fortwährend ändert. Die Gravitationskraft muss also das Drehmoment zur Änderung des Drehimpulses aufbringen.

Bestimmen wir zunächst den Trägheitstensor. Dazu führen wir Zylinderkoordinaten so ein, dass die z -Richtung senkrecht zur Scheibe steht und der Ursprung im Scheibenmittelpunkt liegt. Wieder müssen die Deviationsmomente aus Symmetriegründen verschwinden und die beiden Hauptträgheitsmomente Θ_{11} und Θ_{22} gleich sein. Wir werden aber nur das dritte Hauptträgheitsmoment Θ_{33} brauchen, da um die z -Achse der Scheibe gedreht werden wird.

Also berechnen wir

$$\begin{aligned}\Theta_{33} &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-d/2}^{d/2} dz \rho [(r^2 + z^2) - z^2] \\ &= \frac{\pi}{2} \rho R^4 d.\end{aligned}\quad (13.8)$$

Außerdem ist die Masse der Scheibe

$$M = \pi \rho R^2 d, \quad (13.9)$$

sodass wir

$$\Theta_{33} = \frac{MR^2}{2} \quad (13.10)$$

erhalten. Dies ist schon das Trägheitsmoment um die z -Achse der Scheibe, aber da die Drehachse um die Pendellänge l entfernt ist, müssen wir den Satz von Steiner verwenden, um das gesamte Trägheitsmoment

$$\Theta = \frac{MR^2}{2} + Ml^2 \quad (13.11)$$

zu bekommen.

Das Drehmoment der Gravitationskraft,

$$\vec{M} = l \vec{e} \times \vec{F} = -Mgl \sin \varphi \vec{e}_x \times \vec{e}_y \approx -Mgl \varphi \vec{e}_z, \quad (13.12)$$

bewirkt die Drehimpulsänderung

$$\dot{\vec{L}} = \Theta \dot{\vec{\omega}} = M \left(\frac{R^2}{2} + l^2 \right) \dot{\varphi} \vec{e}_z. \quad (13.13)$$

Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels

Daraus folgt die Bewegungsgleichung

$$\left(\frac{R^2}{2} + l^2 \right) \ddot{\varphi} + gl\varphi = 0 \quad (13.14)$$

für das physikalische Pendel. Demnach ist jetzt die Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{2gl}{R^2 + 2l^2}}. \quad (13.15)$$

Sie hängt nach wie vor nicht von der Pendelmasse ab, wird aber mit zunehmendem Scheibenradius immer kleiner. Für $R \rightarrow 0$ bekommen wir das Ergebnis (13.7) für das mathematische Pendel zurück.

13.1.3 Das Foucault'sche Pendel

Auf ein Pendel, das auf der Erde schwingt, wirkt die Corioliskraft $\vec{F}_C = 2m\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}$. Es folgt also aus der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{x}} - 2\dot{\vec{x}} \times \vec{\Omega} + \omega^2 \vec{x} = 0, \quad (13.16)$$

wobei $\omega = \sqrt{l/g}$ die übliche Pendelfrequenz und $\vec{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde sind. Die Corioliskraft ist klein gegenüber der Rückstellkraft, sodass wir die Pendelbewegung als Schwingung in einer Ebene nähern können. Wir wählen dafür die x - y -Ebene und führen die z -Achse als lokale Senkrechte ein. Für kleine Auslenkungen ist \dot{z} vernachlässigbar klein, und

$$\vec{x} \times \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{y}\Omega_z \\ -\dot{x}\Omega_z \\ \dot{x}\Omega_y - \dot{y}\Omega_x \end{pmatrix}. \quad (13.17)$$

Die Bewegungsgleichungen in der x - y -Ebene lauten daher

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\dot{y}\Omega_z, \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -2\dot{x}\Omega_z. \quad (13.18)$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung mit i und addieren sie zur ersten, erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \xi + \omega^2 \xi = 0 \quad (13.19)$$

für die komplexe Größe $\xi := x + iy$. Sie hat die Form (12.46) einer gedämpften Schwingung mit imaginärer Dämpfung $\lambda = i\Omega_z$. Da die Rotationsperiode der Erde typischerweise sehr viel größer als die Schwingungsperiode des Pendels ist, gilt $\Omega_z \ll \omega$, und daher ist die Dämpfung schwach. Die Lösung der Gleichung (13.19) ist dann durch (12.54) gegeben,

$$\xi_{1,2}(t) = e^{-i\Omega_z t} e^{\pm i\omega t} = e^{-i\Omega_z t} (x_0(t) + iy_0(t)), \quad (13.20)$$

wobei $x_0(t)$ und $y_0(t)$ die Pendelbewegung bei $\Omega_z = 0$ angeben.

Drehung der Schwingungsebene des Foucault-Pendels

Schreiben wir dieses Ergebnis in der äquivalenten Form

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega_z t & \sin \Omega_z t \\ -\sin \Omega_z t & \cos \Omega_z t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix}, \quad (13.21)$$

wird offensichtlich, dass sich die Schwingungsebene des Foucault-Pendels mit der Frequenz Ω_z dreht.

Bei einer geographischen Breite φ ist $\Omega_z = \Omega \sin \varphi$.

13.2 Erzwungene Schwingungen

13.2.1 Allgemeine Lösung bei periodischem Antrieb

Auf den Massenpunkt wirke nun von außen eine periodische Kraft,

$$F_e = c \cos \omega t, \quad (13.22)$$

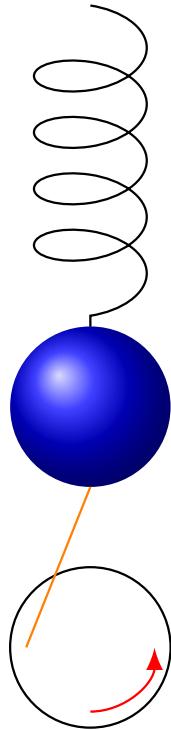


Abb. 13.1 Beispiel einer erzwungenen Schwingung: Federpendel mit periodischem Antrieb

sodass die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = c \cos \omega t . \quad (13.23)$$

lautet.

Wir beschreiten wieder den Lösungsweg in der komplexen Ebene, d.h. wir suchen die Lösung der Gleichung

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = c e^{i\omega t} \quad (13.24)$$

mit $z(t) \in \mathbb{C}$, aus der wir später die reelle Lösung $x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$ erhalten.

Zur allgemeinen Lösung dieser inhomogenen, gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung 2. Ordnung benötigen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung plus die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Letztere ist uns schon von vorher bekannt,

$$z_h(t) = e^{-\lambda t} e^{\pm i\bar{\omega}t} , \quad (13.25)$$

mit

$$\lambda = \frac{b}{2m} \quad \text{und} \quad \bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} , \quad (13.26)$$

falls $\lambda < \omega_0$ ist.

Die partikuläre Lösung gewinnen wir über den Ansatz

$$z_p(t) = z_0 e^{i\omega t} , \quad (13.27)$$

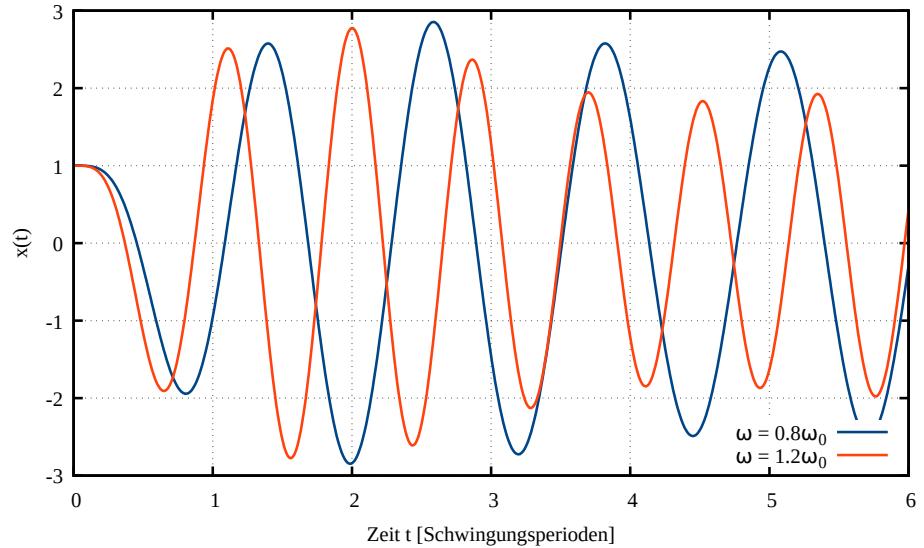


Abb. 13.2 Erzwungene Schwingungen mit schwacher Dämpfung

der auf die Gleichung

$$(-m\omega^2 + i\omega b + k)z_0 = c \quad (13.28)$$

führt.

Partikuläre Lösung

Aus dieser Gleichung erhalten wir die partikuläre Lösung

$$z_0 = \frac{c/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\lambda} = \frac{c/m [(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\lambda]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}. \quad (13.29)$$

13.2.2 Amplitude und Phase

Die Zerlegung

$$z_0 = A e^{-i\delta} = |z_0| e^{-i\delta} \quad (13.30)$$

führt unter der Annahme $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ auf die Amplitude

$$A = \frac{c/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}, \quad (13.31)$$

und die Phase δ ist durch

$$\tan \delta = \frac{2\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (13.32)$$

gegeben. $A \geq 0$ und $0 \leq \delta < \pi$ wegen $\lambda \geq 0$.

_____ ? _____
Führen Sie die Umformung in
(13.29) selbst durch.

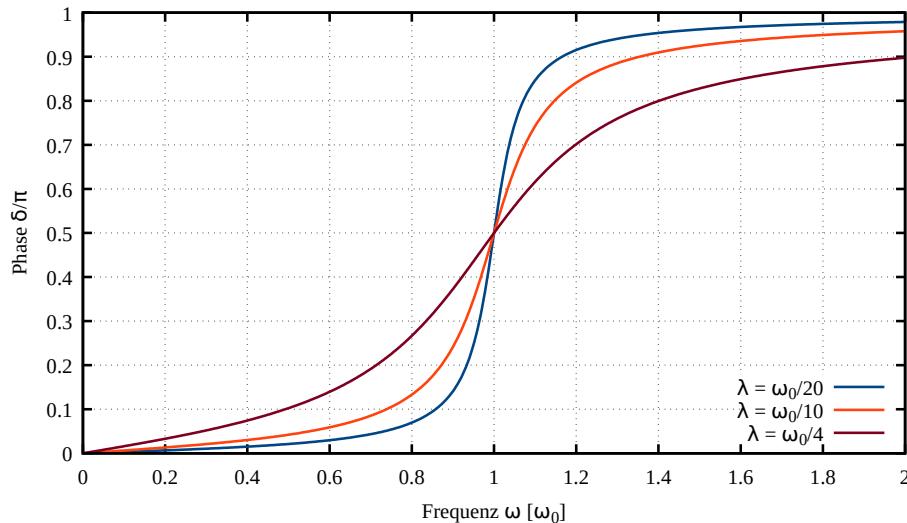


Abb. 13.3 Phase δ der erzwungenen Schwingung nach dem Einschwingen für verschiedene Werte der Dämpfung λ

Allgemeine Lösung: Schwingung mit periodischem Antrieb

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist demnach

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \delta), \quad (13.33)$$

was auf die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) + \bar{A} e^{-\lambda t} \cos(\bar{\omega} t - \bar{\delta}) \quad (13.34)$$

führt. A und δ sind bereits festgelegt, wogegen \bar{A} und $\bar{\delta}$ noch zur Erfüllung der Anfangsbedingungen zur Verfügung stehen.

Für $t \gg 1/\lambda$ entfällt der zweite Term wegen der exponentiellen Dämpfung. Nach einer *Einschwingung* schwingt der Oszillatator dann mit derselben Frequenz wie die äußere Kraft, aber um die Phase δ verschoben. Für $\omega = \omega_0$ ist $\delta = \pi/2$.

13.3 Resonanz

13.3.1 Resonanz und Halbwertsbreite

Resonanzverhalten

Die Amplitude A aus (13.31) zeigt das typische *Resonanzverhalten*. Sie erreicht ein Maximum bei der Frequenz

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}, \quad (13.35)$$

das die Höhe

$$A_{\max} = \frac{c/m}{2\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad (13.36)$$

erreicht.

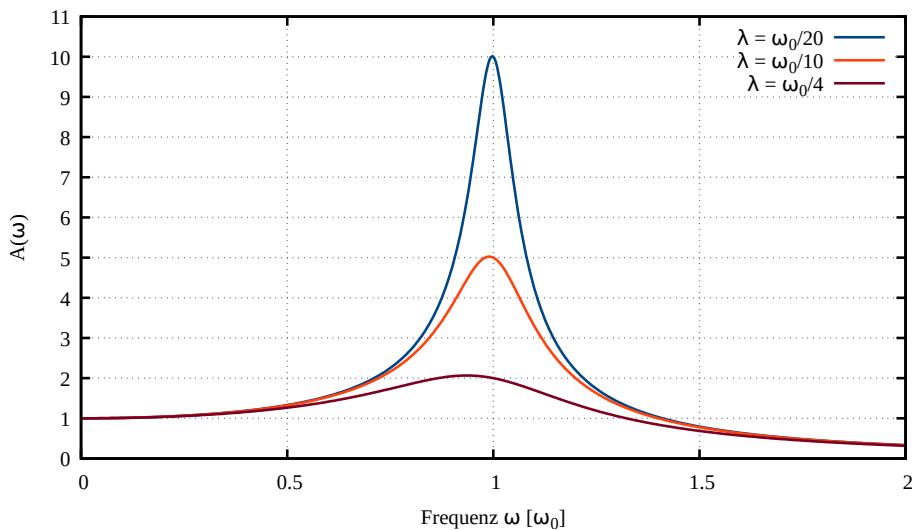


Abb. 13.4 Resonanzverhalten der Amplitude erzwungener Schwingungen

Die *Halbwertsbreite* der Resonanz ist durch die Bedingung

$$A^2(\omega) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} A_{\max}^2 \quad (13.37)$$

bestimmt, die für

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_{\max}^2 \pm 2\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (13.38)$$

erfüllt ist. Im Fall schwacher Dämpfung, $\lambda \ll \omega_0$, ist

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &\approx \omega_0^2 - 2\lambda^2 \pm 2\lambda\omega_0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\omega_0^2}\right) \\ &\approx \omega_0^2 \left(1 \pm 2\frac{\lambda}{\omega_0}\right). \end{aligned} \quad (13.39)$$

_____ ? _____
Können Sie die Näherung in (13.39) begründen?

Zieht man daraus die Wurzel wiederum in erster Taylor-Ordnung, folgt

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \pm \lambda, \quad (13.40)$$

d.h. die Halbwertsbreite ist

$$\Gamma = 2\lambda \quad (13.41)$$

im Grenzfall schwacher Dämpfung.

13.3.2 Grenzfall schwacher Dämpfung

In diesem Fall kann die allgemeine Lösung in der Form

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) + e^{-\lambda t} (C_1 \cos \bar{\omega} t + C_2 \sin \bar{\omega} t) \quad (13.42)$$

geschrieben werden.

Die Anfangsbedingungen legen die verbleibenden Konstanten fest,

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A \cos \delta + C_1 = x_0 \\ \Rightarrow C_1 &= x_0 - A \cos \delta \\ \dot{x}(t=0) &= A\omega \sin \delta - \lambda C_1 + C_2 \bar{\omega} = v_0 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{1}{\bar{\omega}} (v_0 + \lambda x_0 - A\lambda \cos \delta - A\omega \sin \delta). \end{aligned}$$

Im Grenzfall $\lambda \rightarrow 0$ gilt $\delta \rightarrow 0$, und

$$C_1 \rightarrow x_0 - A, \quad C_2 \rightarrow \frac{v_0}{\omega_0}, \quad A \rightarrow \frac{c/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (13.43)$$

Die allgemeine Lösung nimmt dann die Gestalt

$$x(t) = \frac{c/m}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) + x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (13.44)$$

an.

Für $\omega \rightarrow \omega_0$ geht der erste Term gegen den Grenzwert

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{t \sin \omega t}{2\omega} = \frac{t}{2} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0}, \quad (13.45)$$

was sich anhand der Regeln von l'Hospital feststellen lässt.

Säkulare Anwachsen

Im Spezialfall $x_0 = 0$, d.h. für einen anfänglichen ruhenden Oszillator, erhält man dann die Lösung

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{ct}{2m\omega_0} \right) \sin \omega_0 t. \quad (13.46)$$

Der zweite Term in Klammern wächst linear mit der Zeit, und man spricht von einem *säkularen Anwachsen* der Amplitude.

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} ?$$

Wenn ja, wie lautet er und warum?

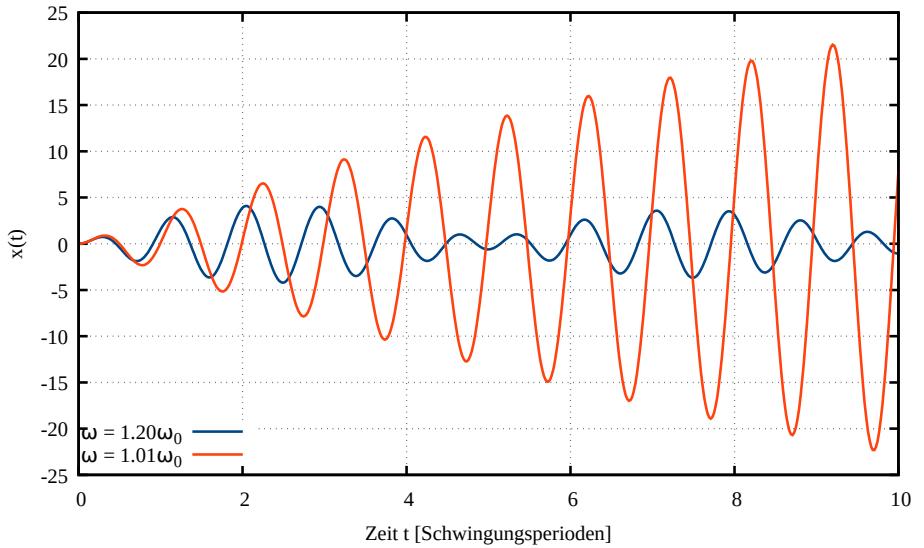


Abb. 13.5 Säkulares Anwachsen der Amplitude im Grenzfall schwacher Dämpfung nahe der Resonanz

13.3.3 Beispiel: Die natürliche Breite von Spektrallinien

Ein Beispiel für eine erzwungene Schwingung ist ein Elektron in einer Atomhülle, das durch einfallende elektromagnetische Strahlung angeregt wird.

Näherungsweise beschreiben wir das Atom als Dipol, d.h. das Elektron bewegt sich längs der x -Achse um den Atomkern. Das elektrische Feld der einfallenden Strahlung kann dann in der Form

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \quad (13.47)$$

geschrieben werden.

Der Atomkern übt eine Rückstellkraft auf das Elektron aus, die näherungsweise linear ist; das Elektron schwingt also harmonisch um den Atomkern. Die Kreisfrequenz der Schwingung sei ω_0 .

Das elektrische Feld übt eine Kraft auf das Elektron aus, die *Lorentzkraft*

$$F_e(t) = -eE(t) = -eE_0 \cos \omega t, \quad (13.48)$$

wobei die Elementarladung e in den so genannten *cgs*-Einheiten angegeben wird,

$$e = 4.8 \cdot 10^{-10} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}. \quad (13.49)$$

Die Lorentzkraft beschleunigt das Elektron. Da beschleunigte Ladungen strahlen, verliert das bestrahlte Atom Energie, wodurch die Schwin-

gung gedämpft wird. In der klassischen Elektrodynamik beträgt diese Dämpfung

$$b = \frac{2e^2}{3c^3} \omega_0^2 \quad (13.50)$$

(Einheiten beachten!), wobei $c = 3.0 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum¹ ist. Die Dämpfungskonstante ist also

$$\lambda = \frac{b}{2m_e} = \frac{e^2}{3m_e c^3} \omega_0^2 = \frac{r_e \omega_0^2}{3c} \quad (13.51)$$

wobei der sogenannte *klassische Elektronenradius*

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (13.52)$$

auftritt.

Wenn das Atom durch ein kontinuierliches Spektrum elektromagnetischer Strahlung beleuchtet wird, erzeugt es eine *Absorptionslinie*, deren Profil durch das Quadrat der Resonanzkurve (13.31) gegeben ist, das auch als *Lorentzprofil* bezeichnet wird.

Die Breite dieser Linie ist also $\Gamma = 2\lambda$, oder

$$\Gamma = \frac{2r_e \omega_0^2}{3c} \quad (13.53)$$

Sie heißt *natürliche Linienbreite*.

Der Kreisfrequenz ω entspricht eine Lichtwellenlänge von $\ell = 2\pi c/\omega$, d.h. die natürliche Linienbreite ist

$$\Gamma = \frac{2r_e}{3c} \left(\frac{2\pi c}{\ell_0} \right)^2 = \frac{8\pi r_e c}{3 \ell_0^2} \quad (13.54)$$

Für Wellenlängen im Bereich des sichtbaren Lichts ist $\ell_0 \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$, also $\Gamma \approx 10^8 \text{ s}^{-1}$.

Umgerechnet in Wellenlängen entspricht dem eine Linienbreite von

$$\delta\ell = \left| \frac{d\ell}{d\omega} \right|_{\ell_0} \Gamma = \frac{2\pi c \Gamma}{\omega_0^2} = \frac{\ell_0^2 \Gamma}{2\pi c} = \frac{4r_e}{3} \approx 3.7 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \quad (13.55)$$

unabhängig von der Wellenlänge der Linie!

¹Die Lichtgeschwindigkeit ist heute so *definiert*, dass sie exakt gleich $2.99792458 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ ist.

13.4 Allgemeine Lösung für erzwungene Schwingungen

13.4.1 Beliebige äußere Kräfte

Für harmonisch getriebene Schwingungen konnten wir die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung durch den Ansatz (13.27) erraten. Es gibt aber ein allgemeines Konstruktionsverfahren, das bei beliebigen äußeren Kräften anwendbar ist.

Wir gehen von der ungedämpften Gleichung

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (13.56)$$

aus und schreiben sie in der Form

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{F(t)}{m}. \quad (13.57)$$

Dies legt nahe, die neue Funktion

$$\xi(t) = \dot{x}(t) + i\omega x(t) \quad (13.58)$$

einzuführen, durch die sich die Ausgangsgleichung auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung reduziert,

$$\dot{\xi} - i\omega\xi = \frac{F(t)}{m}. \quad (13.59)$$

Die dazugehörige homogene Gleichung, $\dot{\xi} - i\omega\xi = 0$, hat offenbar die Lösung $\xi = Ae^{i\omega t}$. Die Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir, indem wir die Konstante A variieren, also anstelle von A eine Funktion der Zeit erlauben, $\xi(t) = A(t)e^{i\omega t}$. Eingesetzt in (13.59) ergibt dies

$$(\dot{A} + iA\omega)e^{i\omega t} - i\omega A e^{i\omega t} = \dot{A}e^{i\omega t} = \frac{F(t)}{m}, \quad (13.60)$$

oder, durch einfache Integration, die Amplitude

$$A(t) = \int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{-i\omega t'} dt'. \quad (13.61)$$

Gesamte Lösung mit beliebiger äußerer Kraft

Die gesamte Lösung der Bewegungsgleichung (13.59) mit beliebiger äußerer Kraft lautet dann

$$\xi(t) = \xi_0 + e^{i\omega t} \left(\int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{-i\omega t'} dt' \right). \quad (13.62)$$

Daraus kann schließlich die Lösung $x(t)$ gewonnen werden. Da $x(t)$ reell sein muss, folgt aus (13.58), dass $x(t)$ einfach gleich dem Imaginärteil von ξ geteilt durch ω sein muss.

Achtung Der Ausdruck (13.61) ist ein Spezialfall einer Fourier-Transformation. ◀

13.4.2 Beispiel: Schwingung nach einem Kraftstoß

Als Beispiel betrachten wir eine Kraft, die zwischen den Zeiten $t = 0$ und $t = \tau$ den konstanten Betrag F_0 hat und sonst verschwindet. Nach (13.62) ist dann

$$\xi(t) = \xi_0 + e^{i\omega t} \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{iF_0}{m\omega} (e^{-i\omega t} - 1) & (0 \leq t \leq \tau) \\ \frac{iF_0}{m\omega} (e^{-i\omega\tau} - 1) & (t > \tau) \end{cases}. \quad (13.63)$$

Wenn wir verlangen, dass der Oszillator anfangs in Ruhe ist, also $\dot{x} = 0 = x$ bis $t = 0$, muss $\xi_0 = 0$ sein. Dann ist

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{iF_0}{m\omega} (1 - e^{i\omega t}) & (0 \leq t \leq \tau) \\ \frac{iF_0}{m\omega} [e^{i\omega(t-\tau)} - e^{i\omega t}] & (t \geq \tau) \end{cases}, \quad (13.64)$$

woraus wir

$$x(t) = \frac{\text{Im}\xi(t)}{\omega} = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) & (0 \leq t \leq \tau) \\ \frac{F_0}{m\omega^2} [\cos \omega(t - \tau) - \cos \omega t] & (t > \tau) \end{cases} \quad (13.65)$$

erhalten.

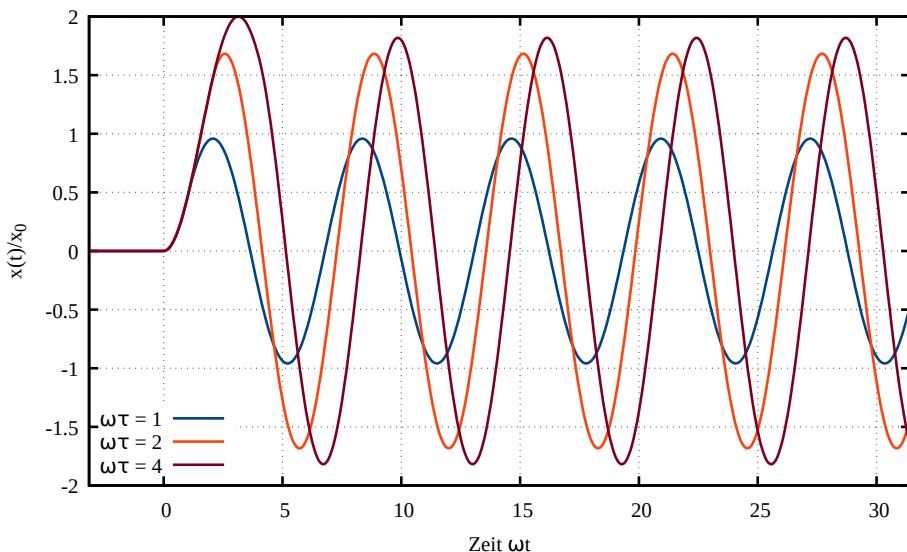


Abb. 13.6 Schwingungsamplitude in Einheiten von $x_0 := F_0/(m\omega^2)$ nach Kraftstößen verschiedener Dauer für einen anfänglich ruhenden Oszillatator.

Anhang A

Stabilität der Lagrange-Punkte $L_{4,5}$

A.1 Effektives Potential in der Umgebung von $L_{4,5}$

- Die Stabilitätsanalyse der beiden Lagrange-Punkte $L_{4,5}$ führt etwas über den Stoff der Vorlesung hinaus, sei aber hier nachgeholt, weil sie methodisch und in ihrem Ergebnis interessant und vielleicht unerwartet ist.
- Das effektive Potential des reduzierten Dreikörperproblems ist durch (9.50) gegeben,

$$U = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} - \frac{\omega^2}{2} \vec{x}^2, \quad (\text{A.1})$$

wobei $r_{1,2}$ die Abstände der Testmasse von den beiden Massen $m_{1,2}$ und \vec{x} der Ortsvektor der Testmasse bezüglich des Schwerpunkts ist. Die Ableitungen des Potentials sind

$$\begin{aligned} \partial_x U &= \frac{Gm_1(x - x_1)}{r_1^3} + \frac{Gm_2(x - x_2)}{r_2^3} - \omega^2 x, \\ \partial_y U &= \frac{Gm_1y}{r_1^3} + \frac{Gm_2y}{r_2^3} - \omega^2 y, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

und die zweiten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} \partial_x^2 U &= \frac{Gm_1}{r_1^3} + \frac{Gm_2}{r_2^3} - \frac{3Gm_1(x - x_1)^2}{r_1^5} - \frac{3Gm_2(x - x_2)^2}{r_2^5} - \omega^2, \\ \partial_y^2 U &= \frac{Gm_1}{r_1^3} + \frac{Gm_2}{r_2^3} - \frac{3Gm_1y^2}{r_1^5} - \frac{3Gm_2y^2}{r_2^5} - \omega^2, \\ \partial_x \partial_y U &= -\frac{3Gm_1(x - x_1)y}{r_1^5} - \frac{3Gm_2(x - x_2)y}{r_2^5}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

- An den beiden Lagrange-Punkten $L_{4,5}$ gelten

$$r_1 = d = r_2, \quad x - x_1 = \frac{d}{2} = x_2 - x, \quad y = \frac{\sqrt{3}d}{2}; \quad (\text{A.4})$$

zudem ist das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit durch

$$\omega^2 = \frac{GM}{d^3} \quad (\text{A.5})$$

bestimmt. Ausgewertet an diesen beiden Lagrange-Punkten sind die zweiten Potentialableitungen daher

$$\begin{aligned} \partial_x^2 U &= -\frac{3GM}{4d^3} = -\frac{3\omega^2}{4}, \\ \partial_y^2 U &= -\frac{9GM}{4d^3} = -\frac{9\omega^2}{4}, \\ \partial_x \partial_y U &= -\frac{3\sqrt{3}\omega^2}{4}(2\mu - 1). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

- Die *Hesse-Matrix* (d.h. die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen) des effektiven Potentials an diesen Lagrange-Punkten kann demnach in die Form

$$\left. (D^2 U) \right|_L = -\frac{3\omega^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}(2\mu - 1) \\ \sqrt{3}(2\mu - 1) & 3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

gebracht werden. Ihre Spur und ihre Determinante sind

$$\text{Tr} \left. (D^2 U) \right|_L = -3\omega^2, \quad \det \left. (D^2 U) \right|_L = \frac{27\omega^4}{4}\mu(1 - \mu). \quad (\text{A.8})$$

- Die Hesse-Matrix wäre positiv definit, wenn das effektive Potential U an den Lagrange-Punkten $L_{4,5}$ Minima hätte, aber sie ist es nicht, weil zwar die Determinante von $D^2 U$ bei $L_{4,5}$ positiv ist, nicht aber ihre einzige Unterdeterminante. Die Lagrange-Punkte $L_{4,5}$ sind daher keine Potentialminima. Stabilität können sie nur aus dem Beitrag der Corioliskraft gewinnen.
- In der Nähe der beiden Lagrange-Punkte kann das effektive Potential durch die Taylor-Näherung zweiter Ordnung

$$U \approx U_L + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_L)^\top \left. (D^2 U) \right|_L (\vec{x} - \vec{x}_L) \quad (\text{A.9})$$

genähert werden, denn an den Lagrange-Punkten selbst verschwindet definitionsgemäß der Gradient des effektiven Potentials.

- Wir führen nun die Koordinaten

$$\xi := x - x_L, \quad \eta := y - y_L \quad (\text{A.10})$$

relativ zu den Lagrange-Punkten ein. Die Ableitungen des Potentials sind dann näherungsweise

$$\begin{aligned}\partial_x U &= U_{xx}\xi + U_{xy}\eta, \\ \partial_y U &= U_{yy}\eta + U_{xy}\xi,\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

wobei die Abkürzung

$$U_{ij} := \left. \left(\partial_{x_i} \partial_{x_j} U \right) \right|_{\text{L}} \quad (\text{A.12})$$

für $(i, j) = (x, y)$ definiert wurde.

- Die Bewegungsgleichungen nahe der Lagrange-Punkte $L_{4,5}$ lauten daher

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} + U_{xx}\xi + U_{xy}\eta &= 0, \\ \ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} + U_{xy}\xi + U_{yy}\eta &= 0.\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

Mit dem Ziel einer Stabilitätsanalyse setzen wir den Ansatz

$$(\xi, \eta) = (\xi_0, \eta_0) e^{\lambda t} \quad (\text{A.14})$$

in die Bewegungsgleichungen (A.13) ein und erhalten die algebraische Gleichung

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + U_{xx} & -2\omega\lambda + U_{xy} \\ 2\omega\lambda + U_{xy} & \lambda^2 + U_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.15})$$

- Diese Vorgehensweise ist für Stabilitätsanalysen üblich. Der Ansatz (A.14) bedeutet, dass es vom Vorzeichen von λ abhängt bzw. davon, ob λ reell oder komplex ist, ob die Lösungen (ξ, η) mit der Zeit beschränkt sind oder nicht. Ist $\lambda > 0$, sind sie unbeschränkt, d.h. die Testmasse kann ins Unendliche entkommen. Ist λ negativ, konvergieren die Lösungen zu null, d.h. die Testmasse kommt schließlich in einem der Lagrange-Punkte zur Ruhe. Rein imaginäres λ führt dagegen auf periodische Funktionen.
- Damit die Gleichung (A.15) nichttriviale Lösungen haben kann, muss die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden,

$$\lambda^4 + (U_{xx} + U_{yy} + 4\omega^2)\lambda^2 + (U_{xx}U_{yy} - U_{xy}^2) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Wenn λ eine Lösung dieser gemischt-quadratischen Gleichung in λ^2 ist, dann ist auch $-\lambda$ eine Lösung. Stabil können die Lösungen der Form (A.14) daher nur sein, wenn λ rein imaginär ist. Das bedeutet, dass λ^2 reell und negativ sein muss.

- Eine gemischt-quadratische Gleichung der Form

$$\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0 \quad (\text{A.17})$$

hat die Lösungen

$$\lambda_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \right) . \quad (\text{A.18})$$

Die Stabilitätsbedingungen an λ^2 erfordern

$$\lambda^2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad b \geq 2\sqrt{c}, \quad \lambda^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad c > 0 . \quad (\text{A.19})$$

- Übertragen auf die Bewegungsgleichungen (A.16) bedeuten sie

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(D^2 U \right)_{\text{L}} + 4\omega^2 &\geq 2\sqrt{\det(D^2 U)_{\text{L}}}, \\ \det(D^2 U)_{\text{L}} &> 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Setzen wir die Ausdrücke (A.8) für die Spur und die Determinante der Hesse-Matrix des effektiven Potentials an den Lagrange-Punkten $L_{4,5}$ in (A.20) ein, sehen wir, dass die zweite Bedingung identisch erfüllt ist und die erste

$$1 \geq \sqrt{27\mu(1-\mu)} \quad (\text{A.21})$$

verlangt. Sie führt auf die gemischt-quadratische Ungleichung

$$\mu^2 - \mu + \frac{1}{27} \geq 0 , \quad (\text{A.22})$$

die entweder $\mu \leq \mu_-$ oder $\mu \geq \mu_+$ mit

$$\mu_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{27}} \right) \quad (\text{A.23})$$

erfordert. Da nur $\mu \leq 1/2$ physikalisch relevant ist, lautet die einzige verbleibende Bedingung für Stabilität

$$\mu \leq \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{23}{27}} \right) \approx 0.0385 \approx \frac{1}{25.96} . \quad (\text{A.24})$$

- Dies zeigt, dass die Lagrange-Punkte $L_{4,5}$ nur dann stabil sind, wenn eine der beiden Massen $m_{1,2}$ höchstens etwa ein 26. der Gesamtmasse hat.

Anhang B

Eigenschwingungen eines gekoppelten Pendels (Kurzfassung)

B.1 Kinetische und potentielle Energie

- Zwei identische mathematische Pendel mit der Länge l und der Masse m seien im Abstand x_0 voneinander aufgehängt und durch eine Spiralfeder mit der Federkonstante k so verbunden, dass die Feder ihre Ruhelänge gerade dann einnimmt, wenn auch die Pendel in ihrer Ruhelage sind. Die Auslenkung der beiden Pendel aus der Senkrechten werden durch die Winkel $\varphi_{1,2}$ angegeben.
- Da die Geschwindigkeiten der beiden Pendelkörper $l\dot{\varphi}_1$ und $l\dot{\varphi}_2$ sind, ist die kinetische Energie der beiden Pendelkörper

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) . \quad (\text{B.1})$$

- Die potentielle Energie setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen, nämlich aus der potentiellen Energie der beiden Pendelkörper im Schwerefeld,

$$V_g = -mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) , \quad (\text{B.2})$$

und der potentiellen Energie der Federspannung,

$$V_k = \frac{k}{2} (x_2 - x_1)^2 = \frac{kl^2}{2} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)^2 . \quad (\text{B.3})$$

- In der Näherung kleiner Winkel sind

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} \quad \text{und} \quad \sin \varphi \approx \varphi . \quad (\text{B.4})$$

Dementsprechend gilt in dieser Näherung

$$V_g \approx \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - 2mgl , \quad (\text{B.5})$$

wobei aber der konstante Term $2mgl$ weggelassen werden kann, weil der Nullpunkt der potentiellen Energie physikalisch keine Bedeutung hat. Die potentielle Energie der Feder ist

$$V_k \approx \frac{kl^2}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 , \quad (\text{B.6})$$

sodass die gesamte potentielle Energie der gekoppelten Pendel

$$V \approx \frac{mgl}{2} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{kl^2}{2} (\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) \quad (\text{B.7})$$

lautet.

- Fassen wir die beiden Winkel φ_1, φ_2 zu einem zweikomponentigen Vektor $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$ zusammen, können wir die kinetische und die potentielle Energie in der Form

$$T = \frac{ml^2}{2} \dot{\vec{\varphi}}^\top \mathcal{I} \dot{\vec{\varphi}} , \quad V = \frac{mgl}{2} \vec{\varphi}^\top \mathcal{I} \vec{\varphi} + \frac{kl^2}{2} \vec{\varphi}^\top \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{\varphi} \quad (\text{B.8})$$

geschrieben werden, wobei \mathcal{I} die Einheitsmatrix in zwei Dimensionen ist.

- Die Gesamtenergie $E = T + V$ ist erhalten, weshalb ihre Ableitung nach der Zeit verschwindet. Daraus folgt

$$\ddot{\vec{\varphi}} + \omega_p^2 \vec{\varphi} + \omega_f^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{\varphi} = 0 , \quad (\text{B.9})$$

wobei $\omega_p = \sqrt{g/l}$ die freie Pendelfrequenz und $\omega_f = \sqrt{k/m}$ die Frequenz der freien Federschwingung sind. Mit

$$\mathcal{V} := \begin{pmatrix} \omega_p^2 + \omega_f^2 & -\omega_f^2 \\ -\omega_f^2 & \omega_p^2 + \omega_f^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

lässt sich (B.9) in die Form

$$\ddot{\vec{\varphi}} + \mathcal{V} \vec{\varphi} = 0 \quad (\text{B.11})$$

bringen. Durch die beiden Nebendiagonalelemente von \mathcal{V} werden die Bewegungsgleichungen für die beiden Winkel φ_1 und φ_2 aneinander gekoppelt: Die Bewegungsgleichung für φ_1 hängt von φ_2 ab und umgekehrt.

B.2 Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen

- Entscheidend ist nun, dass die Matrix \mathcal{V} diagonalisiert werden kann. Dazu muss das Koordinatensystem geeignet gedreht werden, das den Raum (φ_1, φ_2) aufspannt. Sei also

$$\vec{\xi} = R\vec{\varphi} \quad (\text{B.12})$$

ein mit der orthogonalen Matrix R gedrehter Vektor $\vec{\varphi}$. Dann lautet (B.11)

$$\ddot{\vec{\xi}} + \mathcal{V}'\vec{\xi} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{V}' = R\mathcal{V}R^\top. \quad (\text{B.13})$$

Die Drehung R kann nun so gewählt werden, dass \mathcal{V}' diagonal wird, wodurch die beiden Koordinaten ξ_1 und ξ_2 der Schwingung entkoppelt werden. Die Eigenwerte von \mathcal{V} sind durch

$$0 = \det(\mathcal{V} - \lambda I) = (\omega_p^2 + \omega_f^2 - \lambda)^2 - \omega_f^4 \quad (\text{B.14})$$

gegeben, woraus

$$\lambda_{\pm} = \omega_p^2 + \omega_f^2 \pm \omega_f^2 = \begin{cases} \omega_p^2 & \text{und} \\ \omega_p^2 + 2\omega_f^2 & \end{cases} \quad (\text{B.15})$$

folgt.

- Die beiden gekoppelten Pendel haben demnach die beiden Eigenfrequenzen

$$\omega_1 = \omega_p \quad \text{und} \quad \omega_2 = (\omega_p^2 + 2\omega_f^2)^{1/2}. \quad (\text{B.16})$$

Die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{\xi}$ ergeben sich aus

$$\mathcal{V}\vec{\xi} = \lambda_{\pm}\vec{\xi}. \quad (\text{B.17})$$

Setzt man für beide Eigenvektoren zunächst willkürlich $\xi_1 = 1$, bestimmt aus (B.17) die zugehörige Komponente ξ_2 und normiert die Eigenvektoren anschließend, folgt

$$\vec{\xi}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\xi}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

- Der Eigenvektor $\vec{\xi}_-$, zu dem die Frequenz $\omega_1 = \omega_p$ gehört, entspricht einer Schwingung, bei der die beiden Pendel stets gleich ausgelenkt sind und daher genau in Phase schwingen. Die Feder bleibt dabei entspannt, und die Frequenz des Doppelpendels entspricht derjenigen der beiden freien Pendel.
- Zum Eigenvektor $\vec{\xi}_+$ gehört die Frequenz $\omega_2 = (\omega_p^2 + 2\omega_f^2)^{1/2}$. Hier hat das zweite Pendel immer gerade die negative Auslenkung des ersten, sodass die beiden Pendel mit genau entgegengesetzter Phase schwingen. Die Feder zwischen den beiden Pendeln wird abwechselnd gedehnt und gestaucht, und ihre rücktreibende Kraft erhöht die Frequenz der beiden Pendel entsprechend.

Anhang C

Schwingungen gekoppelter Systeme

C.1 Bewegungsgleichungen

C.1.1 Parametrisierte Koordinaten

Bei der Diskussion des Pendels war uns bereits ein Fall begegnet, in dem die Koordinaten \vec{x} durch einen Parameter φ ausgedrückt wurden. Das lag daran, dass die beiden Koordinaten in der Pendelebene nicht unabhängig voneinander waren, weil sich der Massenpunkt des Pendels nur auf einer Kreislinie bewegen kann. Durch die Pendelstange wird die Anzahl der Freiheitsgrade des Pendels von zwei auf einen reduziert. Diese Situation tritt häufig auf und wird im folgenden Semester systematisch untersucht.

Hier betrachten wir den Fall, in dem N Massenpunkte in irgendeiner Weise aneinander gekoppelt sind, so dass ihnen f Freiheitsgrade bleiben. Ein Beispiel dafür sind zwei Pendel, die durch eine Stange zwischen ihren beiden Massen verbunden sind. Jedes einzelne Pendel reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade seines Massenpunkts von drei auf einen, und die Kopplung zwischen den Pendeln reduziert diese beiden Freiheitsgrade schließlich auf einen. Zur Beschreibung der Bewegung werden dann f Parameter $q_j(t)$ gebraucht, von denen die Koordinaten

$$x_i = x_i[q_j(t)] \quad (C.1)$$

abhangen.

Ebenso muss es dann möglich sein, die kinetische und die potentielle Energie durch die Parameter q_j auszudrücken. Die kinetische Energie eines einzelnen Massenpunkts m_i ist

$$T_i = \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 = \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k , \quad (C.2)$$

und die gesamte kinetische Energie ergibt sich durch die Summe über alle Massenpunkte,

$$T = \sum_{j=1}^f \sum_{k=1}^f \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (\text{C.3})$$

wobei die Summe über alle j und k der Deutlichkeit halber ausgeschrieben wurde.

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom lautet die Bewegungsgleichung für die Koordinate x_l des Massenpunkts m_i

$$m_i \ddot{x}_l = F_l = -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_l}, \quad (\text{C.4})$$

wenn wir von einem konservativen Kraftfeld ausgehen. Mithilfe der kinetischen Energie des Massenpunkts lässt sich diese Bewegungsgleichung durch

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{x}_l} = -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_l} \quad (\text{C.5})$$

ausdrücken.

Indem wir hier die Parameter q_j anstelle der Koordinaten x_l einführen, erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_l} = -\frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_l}. \quad (\text{C.6})$$

Stellen wir die Parameter q_j durch die Koordinaten x_l dar,

$$q_j = q_j[x_l(t)], \quad (\text{C.7})$$

sehen wir, dass

$$\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial x_l} \dot{x}_l \quad (\text{C.8})$$

gilt, und somit auch

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{x}_l} = \frac{\partial q_j}{\partial x_l}. \quad (\text{C.9})$$

Wir setzen nun voraus, dass die Ableitungen $\partial q_j / \partial x_l$ zeitunabhängig sind,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial q_j}{\partial x_l} = 0. \quad (\text{C.10})$$

Eingesetzt in (C.6) ergibt (C.9) dann

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial q_j}{\partial x_l} = -\frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_l}, \quad (\text{C.11})$$

was im Allgemeinen nur möglich ist, wenn

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial V(\vec{q})}{\partial q_j} \quad (\text{C.12})$$

ist. Wir erhalten also die Bewegungsgleichungen für die Parameter q_j auf dieselbe Weise wie aus (C.5) für die Koordinaten x_l .

C.1.2 Harmonische Näherung

In der Gleichgewichtslage des Systems dürfen sich die Parameter q_j nicht ändern, $\dot{q}_i = 0$ ($1 \leq i \leq f$). Da T eine quadratische Form in den \dot{q}_i ist, ist dort auch $\partial T / \partial \dot{q}_i = 0$. Damit gilt

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{C.13})$$

d.h. die *verallgemeinerten Kraftkomponenten*

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (\text{C.14})$$

verschwinden im Gleichgewicht.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir jetzt $q_i = 0$ in der Gleichgewichtslage und entwickeln die potentielle Energie bis zur 2. Ordnung in den kleinen Auslenkungen q_i ,

$$V(q_i) = V|_{q=0} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial V}{\partial q_i} \Big|_{q=0} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q=0} q_i q_j. \quad (\text{C.15})$$

Wegen (C.13) verschwindet der zweite Term, und der konstante erste Term kann o.B.d.A. gleich Null gesetzt werden. Damit ist dann

$$V(q_i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{q=0} q_i q_j =: \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f V_{ij} q_i q_j \quad (\text{C.16})$$

Analog kann die kinetische Energie in der Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^f T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad T_{ij} := \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial q_j} \right) \Big|_{q=0} \quad (\text{C.17})$$

geschrieben werden.

Die *quadratischen Formen* T und V können nun durch Matrizen ausgedrückt werden. Dazu definieren wir

$$\vec{q} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} := \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{f1} & \cdots & T_{ff} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} := \begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1f} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{f1} & \cdots & V_{ff} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.18})$$

Offenbar sind \mathcal{T} und \mathcal{V} schon aufgrund ihrer Definition symmetrisch, $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\top$ und $\mathcal{V} = \mathcal{V}^\top$.

Für beliebige $\dot{\vec{q}}$ ist $\dot{\vec{q}}^\top \mathcal{T} \dot{\vec{q}} \geq 0$, denn

$$\dot{\vec{q}}^\top \mathcal{T} \dot{\vec{q}} = \sum_{i=1}^N m_i \left(\sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right)^2 \geq 0 ; \quad (\text{C.19})$$

natürlich kann die kinetische Energie nicht negativ werden! Also ist \mathcal{T} eine *positiv-semidefinite* Matrix. Wir nehmen im folgenden an, dass \mathcal{T} *positiv definit* ist. Wäre \mathcal{T} positiv *semi*-definit, müssten Terme höherer als zweiter Ordnung berücksichtigt werden.

Aus (C.12) folgen dann die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T} \dot{\vec{q}} + \mathcal{V} \vec{q} = 0 \Rightarrow \mathcal{T} \ddot{\vec{q}} + \mathcal{V} \vec{q} = 0 , \quad (\text{C.20})$$

die offensichtlich eine Verallgemeinerung der harmonischen Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{C.21})$$

darstellen.

C.2 Normalkoordinaten

C.2.1 Transformation auf Normalkoordinaten

Da \mathcal{T} positiv definit ist, gibt es eine Matrix \mathcal{B} so, dass

$$\mathcal{T} = \mathcal{B}^\top \mathcal{B} \quad (\text{C.22})$$

gilt. Zum Beweis benutzen wir, dass sich \mathcal{T} diagonalisieren lässt. Seien t_1, \dots, t_f die Diagonalelemente nach der Diagonalisierung, dann gibt es eine orthogonale Koordinatentransformation \mathcal{R} so, dass

$$\mathcal{T} = \mathcal{R}^\top \text{diag}(t_1, \dots, t_f) \mathcal{R} \quad (\text{C.23})$$

gilt. Da \mathcal{T} positiv definit ist, sind die $t_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq f$).

Sei nun $\mathcal{B}' = \text{diag}(\sqrt{t_1}, \dots, \sqrt{t_f}) \mathcal{R}$, dann gilt offenbar

$$\mathcal{T} = (\mathcal{B}')^\top \mathcal{B}' , \quad (\text{C.24})$$

und außerdem ist

$$\det \mathcal{B}' = \prod_{i=1}^f \sqrt{t_i} . \quad (\text{C.25})$$

Die Matrix \mathcal{B}' ist selbst nur bis auf eine orthogonale Transformation \mathcal{S} festgelegt, denn

$$\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{S} \mathcal{B}' =: \mathcal{B} \quad (\text{C.26})$$

liefert ebenso

$$\mathcal{B}^\top \mathcal{B} = (\mathcal{B}')^\top (\mathcal{S}^\top \mathcal{S}) \mathcal{B}' = (\mathcal{B}')^\top \mathcal{B}' = \mathcal{T} . \quad (\text{C.27})$$

Wir transformieren jetzt die Parameter $q_i \rightarrow \xi_i$, wobei

$$\vec{\xi} = \mathcal{B} \vec{q} , \quad \vec{\xi} := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_f \end{pmatrix} . \quad (\text{C.28})$$

Da $\det \mathcal{B} > 0$ ist, lässt \mathcal{B} sich invertieren und

$$\vec{q} = \mathcal{B}^{-1} \vec{\xi} =: \mathcal{A} \vec{\xi} . \quad (\text{C.29})$$

Damit nimmt die kinetische Energie die Form

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^\top \mathcal{T} \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^\top \mathcal{B}^\top \mathcal{B} \dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\xi}}^\top \dot{\vec{\xi}} \quad (\text{C.30})$$

an, und die potentielle Energie wird zu

$$V = \frac{1}{2} \vec{q}^\top \mathcal{V} \vec{q} = \frac{1}{2} \vec{\xi}^\top \mathcal{A}^\top \mathcal{V} \mathcal{A} \vec{\xi} . \quad (\text{C.31})$$

Wir können nun noch von der Freiheit Gebrauch machen, \mathcal{B} von links mit einer orthogonalen Matrix \mathcal{S} zu multiplizieren,

$$\mathcal{B} = \mathcal{S} \mathcal{B}' ; \quad \mathcal{A} = \mathcal{B}^{-1} = (\mathcal{B}')^{-1} \mathcal{S}^{-1} =: \mathcal{A}' \mathcal{S}^\top . \quad (\text{C.32})$$

Damit erhalten wir

$$\mathcal{A}^\top \mathcal{V} \mathcal{A} = \mathcal{S} [(\mathcal{A}')^\top \mathcal{V} \mathcal{A}'] \mathcal{S}^\top . \quad (\text{C.33})$$

Die Transformation \mathcal{S} kann nun so gewählt werden, dass der Ausdruck in eckigen Klammern in (C.33) diagonalisiert wird. Dann ist

$$\mathcal{A}^\top \mathcal{V} \mathcal{A} = \mathcal{S} [(\mathcal{A}')^\top \mathcal{V} \mathcal{A}'] \mathcal{S}^\top = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_f) . \quad (\text{C.34})$$

Ausgedrückt durch die Parameter ξ_i lassen sich die kinetische und die potentielle Energie daher in die einfache Form

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \dot{\xi}_i^2 , \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^f \lambda_i \xi_i^2 \quad (\text{C.35})$$

bringen, und die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i} + \frac{\partial V}{\partial \xi_i} = \frac{d}{dt} \dot{\xi}_i + \lambda_i \xi_i = \ddot{\xi}_i + \lambda_i \xi_i = 0 \quad (\text{C.36})$$

für alle $1 \leq i \leq f$.

Durch die Einführung der Parameter ξ_i entkoppeln also die Bewegungsgleichungen und beschreiben f unabhängige harmonische Oszillatoren. Die ξ_i heißen *Normalkoordinaten*.

C.2.2 Bestimmung der Normalkoordinaten

Zunächst lassen sich die Eigenwerte der Matrix $\mathcal{A}^\top \mathcal{V} \mathcal{A}$ wie folgt bestimmen: Die charakteristische Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{A}^\top \mathcal{V} \mathcal{A} - \lambda \mathbb{1}_3) &= 0 \Leftrightarrow \\ \det[\mathcal{B}^\top (\mathcal{A}^\top \mathcal{V} \mathcal{A} - \lambda \mathbb{1}_3) \mathcal{B}] &= 0 \Leftrightarrow \\ \det(\mathcal{V} - \lambda \mathcal{T}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

d.h. die λ_i sind auch die Eigenwerte von \mathcal{V} bezüglich \mathcal{T} . Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\top \mathcal{V} \mathcal{A} &= \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_f) \Rightarrow \\ \mathcal{V} \mathcal{A} &= \mathcal{B}^\top \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_f) \\ &= \mathcal{T} \mathcal{A} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_f) \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

wegen $\mathcal{B}^\top = \mathcal{B}^\top \mathcal{B} \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{T} \mathcal{A}$.

Wir zerlegen \mathcal{A} in Spaltenvektoren \vec{a}_j ,

$$\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_f), \quad \vec{a}_j = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{fj} \end{pmatrix} \quad (\text{C.39})$$

und erhalten damit aus (C.38) die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{V} \vec{a}_j = \mathcal{T} \vec{a}_j \lambda_j \quad (\text{C.40})$$

in der \mathcal{T} an die Stelle der Einheitsmatrix tritt.

Die \vec{a}_j sind orthonormal bezüglich \mathcal{T} , denn

$$\mathcal{A}^\top \mathcal{T} \mathcal{A} = \mathcal{A}^\top \mathcal{B}^\top \mathcal{B} \mathcal{A} = 1 \Rightarrow \vec{a}_j^\top \mathcal{T} \vec{a}_k = \delta_{jk}. \quad (\text{C.41})$$

Daraus ergibt sich folgende Vorschrift für die Konstruktion der Matrix \mathcal{A} und für die Transformation auf Normalkoordinaten ξ_i :

1. Zunächst das Eigenwertproblem $(\mathcal{V} - \lambda \mathcal{T}) \vec{a} = 0$ lösen und ein vollständiges, bezüglich \mathcal{T} orthonormales System von Eigenvektoren \vec{a}_i bestimmen,
2. danach mittels

$$\vec{q} = \sum_{j=1}^f \vec{a}_j \xi_j = \mathcal{A} \vec{\xi} \quad (\text{C.42})$$

auf Normalkoordinaten transformieren.

Die Sätze über das gewöhnliche Eigenwertproblem sind vollständig auf das Eigenwertproblem übertragbar, in dem \mathcal{T} die Rolle der Einheitsmatrix übernimmt (\mathcal{T} ist der metrische Tensor des Eigenwertproblems).

C.3 Stabilität

C.3.1 Stabilitätsbedingungen

Die Lösungen der Bewegungsgleichungen nehmen die Form

$$\begin{aligned}\xi_j &\propto e^{\pm i \sqrt{\lambda_j} t} \quad (\lambda_j \neq 0) \\ \xi_j &\propto t \quad (\lambda_j = 0)\end{aligned}\quad (C.43)$$

an. Bezuglich ihres Verhaltens können zwei wesentliche Fälle unterscheiden werden:

1. Mindestens ein $\lambda_j \leq 0$, dann kann ξ_j unbegrenzt wachsen (im Rahmen der betrachteten Näherung!).
2. Alle $\lambda_j > 0$, $\lambda_j =: \omega_j^2$; dann sind die Lösungen harmonische Schwingungen,

$$\xi_j(t) = C_j \cos(\omega_j t - \delta_j) \quad (C.44)$$

mit konstanten C_j und δ_j .

Stabilität ist sicher, wenn alle $\lambda_j > 0$ sind. Das ist genau dann der Fall, wenn \mathcal{V} strikt positiv ist, d.h. wenn die Potentialfunktion in der Ruhelage ein striktes Minimum hat. Das System ist instabil, wenn mindestens ein $\lambda_j < 0$ ist. Wenn mindestens ein Eigenwert $\lambda_j = 0$ und die anderen $\lambda_k \geq 0$ sind, müssen für die Stabilitätsanalyse Terme höherer Ordnung herangezogen werden.

Wenn alle $\lambda_j > 0$ sind, liegt ein stabiles Gleichgewicht vor, und die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem lautet

$$\vec{q}(t) = \sum_{j=1}^f \vec{a}_j \xi_j(t) = \sum_{j=1}^f \vec{a}_j C_j \cos(\omega_j t - \delta_j) . \quad (C.45)$$

Die ω_j sind die Eigenfrequenzen und werden auch *Normalfrequenzen* genannt.

Bei Normalschwingungen ist nur eine Normalkoordinate angeregt, z.B. ξ_j , und die anderen sind in Ruhe. Dann ist

$$\vec{q}(t) = \vec{a}_j C_j \cos(\omega_j t - \delta_j) \quad (C.46)$$

ohne Summation über j .

Die Konstanten C_j und δ_j werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt, $\vec{q}(t=0) = \vec{q}_0$, $\dot{\vec{q}}(t=0) = \dot{\vec{q}}_0$. Damit folgt

$$\vec{q}_0 = \sum_{j=1}^f \vec{a}_j C_j \cos \delta_j , \quad \dot{\vec{q}}_0 = \sum_{j=1}^f \vec{a}_j C_j \omega_j \sin \delta_j . \quad (C.47)$$

Wegen der Orthonormalität der \vec{a}_j bezüglich \mathcal{T} ist

$$\vec{a}_j^\top \mathcal{T} \vec{q}_0 = C_j \cos \delta_j, \quad \vec{a}_j^\top \mathcal{T} \dot{\vec{q}}_0 = C_j \omega_j \sin \delta_j, \quad (\text{C.48})$$

woraus C_j und δ_j bestimmt werden können.

Bemerkung: Das System kehrt nie in seine Anfangslage zurück, wenn die ω_j nicht in rationalen Verhältnissen zueinander stehen.

C.3.2 Beispiel: Gekoppelte Pendel

Gegeben seien zwei gleiche ebene Pendel der Länge l , an denen Massenpunkte der Masse m hängen. Der Abstand der Aufhängungspunkte sei x_0 , und die Pendel seien durch eine Feder mit der Federkonstanten k und der Ruhelänge x_0 aneinander gekoppelt.

Geeignete Parameter zur Beschreibung dieses Systems sind die beiden Auslenkwinkel φ_1 und φ_2 . Damit lautet die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2} \left(l^2 \dot{\varphi}_1^2 + l^2 \dot{\varphi}_2^2 \right). \quad (\text{C.49})$$

Die potentielle Energie setzt sich aus den Beiträgen des Schwerfelds und der Feder zusammen,

$$V = -mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) + \frac{k}{2} \left[\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - x_0 \right]^2. \quad (\text{C.50})$$

Für kleine Auslenkungen können die $y_{1,2}$ gegenüber den $x_{1,2}$ vernachlässigt werden. Außerdem können $x_1 = l \sin \varphi_1 \approx l\varphi_1$, $x_2 = x_0 + l\varphi_2$ und $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$ genähert werden. Damit lautet die potentielle Energie

$$V = mgl \left(\frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{\varphi_2^2}{2} \right) + \frac{k}{2} l^2 (\varphi_1 - \varphi_2)^2, \quad (\text{C.51})$$

wobei die Konstante $-2mgl$ weggelassen wurde. Die Matrizen \mathcal{T} und \mathcal{V} lauten demnach

$$\mathcal{T} = ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = mgl \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + kl^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.52})$$

Aus der Gleichung $\det(\mathcal{V} - \lambda \mathcal{T}) = 0$ erhält man das charakteristische Polynom

$$l^2 \left[(mg + kl - ml\lambda)^2 - k^2 l^2 \right] = 0, \quad (\text{C.53})$$

woraus man die Lösungen

$$\lambda_1 = \frac{g}{l}, \quad \lambda_2 = \frac{g}{l} + 2 \frac{k}{m} \quad (\text{C.54})$$

erhält. Die beiden entsprechend (C.41) normierten Eigenvektoren sind

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2ml}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.55})$$

d.h. die Normalschwingungen entsprechen solchen Schwingungen, bei denen die beiden Pendel entweder gleichphasig oder gegenphasig schwingen.

C.4 Schwingungen eines linearen, dreiatomigen Moleküls

C.4.1 Kinetische und potentielle Energie

Wir betrachten ein lineares, dreiatomiges, symmetrisches Molekül mit Atomen der Masse m rechts und links im Abstand l von einem zentralen Atom der Masse M . Die Wechselwirkung zwischen den Atomen werde beschrieben durch „Federn“ mit der Federkonstante $k > 0$ (Beispiel: CO_2). Wir beschränken uns auf Bewegungen längs der Molekülachse.

Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2} \dot{x}_2^2, \quad (\text{C.56})$$

und die potentielle Energie ist

$$V = \frac{k}{2} [(x_2 - x_1 - l)^2 + (x_3 - x_2 - l)^2]. \quad (\text{C.57})$$

Die Ruhelage stellt sich im Minimum von V ein, also bei

$$x_2 - x_1 = l = x_3 - x_2. \quad (\text{C.58})$$

Diese Beschreibung ist eindeutig bis auf eine Verschiebung längs der x -Achse (Translation des Moleküls ohne innere Bewegung). Wir wählen den Ursprung so, dass in der Ruhelage $x_2 = 0$ ist und bezeichnen mit q_i die Auslenkungen der Atome aus ihren Ruhelagen,

$$q_1 := x_1 + l, \quad q_3 = x_3 - l, \quad x_2 = q_2. \quad (\text{C.59})$$

Damit lauten die kinetische und die potentielle Energie des Moleküls

$$T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \frac{M}{m} \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2), \quad V = \frac{k}{2} [(q_2 - q_1)^2 + (q_3 - q_2)^2]. \quad (\text{C.60})$$

C.4.2 Normalkoordinaten

Aus (C.60) lassen sich die Matrizen \mathcal{T} und \mathcal{V} ablesen:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}. \quad (\text{C.61})$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{V} - \lambda\mathcal{T}) &= 0 \Rightarrow \\ \det \begin{pmatrix} k - \lambda m & -k & 0 \\ -k & 2k - \lambda M & -k \\ 0 & -k & k - \lambda m \end{pmatrix} &= 0 \Rightarrow \\ (k - \lambda m) \left[(2k - \lambda M)(k - \lambda m) - k^2 \right] - k^2(k - \lambda m) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

Eine Lösung ist offenbar $\lambda_1 = k/m$; die anderen beiden ergeben sich aus

$$Mm\lambda^2 - k(M + 2m)\lambda = 0 \quad (\text{C.63})$$

zu $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = k(M + 2m)/(Mm)$.

Die Eigenfrequenzen sind $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$, also

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \sqrt{k \frac{M + 2m}{Mm}}. \quad (\text{C.64})$$

Das orthonormale Eigensystem \vec{a}_i muss nun aus (C.40) bestimmt werden. Für $i = 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k \left(2 - \frac{M}{m}\right) & -k \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.65})$$

woraus unmittelbar $a_{21} = 0$ und $a_{11} + a_{31} = 0$ folgen. Die Orthonormalitätsbedingung $\vec{a}_1^\top \mathcal{T} \vec{a}_1 = 1$ verlangt

$$(a_{11}, a_{21}, a_{31}) \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = 1, \quad (\text{C.66})$$

woraus insgesamt $a_{11} = 1/\sqrt{2m}$ folgt, also

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.67})$$

Für $i = 2$ ist

$$\begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.68})$$

also $a_{12} = a_{22} = a_{32}$, und die Orthonormalitätsbedingung fordert $(2m + M)a_{12}^2 = 1$. Daher folgt

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m + M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.69})$$

Für $i = 3$ ist schließlich

$$\begin{pmatrix} -k\frac{2m}{M} & -k & 0 \\ -k & -k\frac{M}{m} & -k \\ 0 & -k & -k\frac{2m}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{C.70})$$

woraus man $a_{13} = a_{33}$ und $a_{13} = -a_{23}M/(2m)$ erhält. Die Orthonormalitätsbedingung ergibt dann

$$a_{12} = \frac{1}{\sqrt{2m\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}}, \quad (\text{C.71})$$

so dass der dritte Eigenvektor

$$\vec{d}_3 = \sqrt{\frac{M}{2m(M+2m)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.72})$$

lautet. Die allgemeine Lösung bekommt man dann aus (C.45).

Den drei Eigenschwingungen entsprechen folgende Bewegungen:

1. Für $i = 1$ ruht M und die beiden äußeren Atome schwingen gegeneinander,
2. $i = 2$ entspricht einer Translation des gesamten Moleküls längs der x -Achse, und
3. für $i = 3$ schwingt M gegenphasig gegen die beiden gleichphasig schwingenden äußeren Atome.

Anhang D

Grundlagen der Gruppentheorie und Galilei-Invarianz

D.1 Grundlagen der Gruppentheorie

D.1.1 Gruppen

Gruppen sind uns bereits kurz im Abschnitt 2.3.1 begegnet, als von Vektorräumen die Rede war. Von ihnen soll hier ausführlicher die Rede sein, weil sie für die moderne Physik außerordentlich wichtig geworden sind. Die Gruppentheorie stellt die mathematischen Hilfsmittel zur Verfügung, mit denen Symmetrien untersucht werden können. Ein physikalisches System heißt *symmetrisch* bezüglich einer Transformation, wenn es sich durch die Anwendung der Transformation nicht ändert. Ein Beispiel dafür ist die Bewegung eines Massenpunkts im Zentralfeld, deren Beschreibung von Koordinatendrehungen um den Ursprung unbeeinflusst bleibt.

Symmetrien haben eine so große Bedeutung, weil sie Invarianzen zur Folge haben und damit Erhaltungsgrößen. So führt die genannte Drehsymmetrie zur Erhaltung des Drehimpulses. Eine räumliche Translationssymmetrie, d.h. die Unveränderlichkeit eines physikalischen Systems unter räumlichen Verschiebungen, führt dagegen zur Erhaltung der Impulskomponente in Richtung der Translation.

Seit der Entdeckung dieses Zusammenhangs zwischen räumlichen und zeitlichen Transformationen und Erhaltungssätzen in der klassischen Mechanik haben sich Symmetriebetrachtungen für die theoretische Physik als fundamental erwiesen. Weitere Beispiele dafür sind die Isospin-Symmetrie der Nukleonen oder die Eichsymmetrien von Quantenfeldtheorien.

Fassen wir zunächst noch einmal die Gruppenaxiome zusammen. Eine Gruppe G ist eine Menge mathematischer Objekte, zwischen denen eine Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$ definiert ist, die folgende Eigenschaften hat:

Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. für irgend drei Elemente a, b und c aus G gilt

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c . \quad (\text{D.1})$$

Es existiert ein *neutrales Element* oder *Einselement* e so, dass für alle $g \in G$

$$e \circ g = g \circ e = g \quad (\text{D.2})$$

gilt.

Zu jedem $g \in G$ gibt es ein *inverses Element* g^{-1} so, dass

$$g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = e \quad (\text{D.3})$$

gilt.

Die Gruppe heißt *kommutativ* oder *abelsch*, wenn für alle a, b aus G

$$a \circ b = b \circ a \quad (\text{D.4})$$

gilt. Diese letzte Bedingung ist für eine Gruppe nicht notwendig!

Man unterscheidet *kontinuierliche* und *diskrete* Gruppen. Diskrete Gruppen bestehen aus einer endlichen Anzahl von Elementen, während die Elemente kontinuierlicher Gruppen von einem oder mehreren Parametern abhängen, die sich kontinuierlich ändern können. Ein Beispiel für eine diskrete Gruppe ist die Gruppe der Spiegelungen an den Koordinatenachsen, während die Drehungen im zweidimensionalen Raum eine kontinuierliche Gruppe sind, die von einem kontinuierlichen Parameter, dem Drehwinkel, abhängen.

Wie unter 8.3.2 erwähnt wurde, kann die Gruppe der Drehungen im N -dimensionalen Raum durch orthogonale $N \times N$ -Matrizen dargestellt werden. Sie wird als $O(N)$ bezeichnet. Haben diese Matrizen zusätzlich die Eigenschaft, dass ihre Determinante gleich +1 ist, stellen sie die spezielle orthogonale Gruppe in N Dimensionen dar, genannt $SO(N)$. Unitäre Matrizen wurden in (12.45) als Verallgemeinerung orthogonaler Matrizen eingeführt. Sie bilden die Gruppe $U(N)$ oder, wenn ihre Determinante gleich +1 ist, die Gruppe $SU(N)$ der speziellen unitären Transformationen.

Zwischen Gruppen können Beziehungen bestehen, wie wir später am Beispiel der Gruppen $SU(2)$ und $SO(3)$ sehen werden. Das bedeutet, dass Elemente aus einer Gruppe G_1 denen einer anderen Gruppe G_2 zugeordnet werden können,

$$f : G_1 \rightarrow G_2 , \quad g \mapsto f(g) . \quad (\text{D.5})$$

Wenn dabei die Verknüpfung erhalten bleibt, d.h. wenn

$$f(g_1 \circ g_2) = f(g_1) \circ f(g_2) \quad (\text{D.6})$$

gilt, wird die Beziehung *Homomorphismus* genannt; wenn sie eins-zu-eins ist, heißt sie *Isomorphismus*.

D.1.2 Darstellungen

Man sollte streng unterscheiden zwischen einer Gruppe und ihrer *Darstellung*, wie sie z.B. anhand der Drehungen offensichtlich wird. Zum Beispiel existieren Drehungen in zwei Dimensionen, d.h. Elemente der orthogonalen Gruppe $O(2)$, vor jeder konkreten Darstellung. Nach der Einführung eines Koordinatensystems können sie durch orthogonale 2×2 -Matrizen dargestellt werden. Überhaupt ist es in allen relevanten Fällen möglich, Gruppen durch Matrizen darzustellen. Eine Darstellung ist demnach ein Homomorphismus zwischen der dargestellten Gruppe und der Gruppe der $N \times N$ -Matrizen.

Eine Darstellung G einer Gruppe durch Matrizen R erlaubt es, die Gruppenoperationen durch die Matrixmultiplikation von Vektoren $v \in V$ zu beschreiben, $v \rightarrow v' = Rv$. Eine Darstellung heißt *irreduzibel*, wenn ein beliebiges $v \in V$ durch Anwendung aller $R \in G$ in alle $w \in V$ überführt werden kann. Andernfalls heißt sie *reduzibel*. Dann ist eine Aufspaltung des Vektorraums V in Untervektorräume möglich, deren Elemente durch Anwendung beliebiger $R \in G$ erreichbar sind oder nicht.

Die spezielle unitäre Gruppe in zwei Dimensionen $SU(2)$ kann durch die Gruppe der unitären 2×2 -Matrizen U mit $\det U = 1$ dargestellt werden. Wegen der Bedingung

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (\text{D.7})$$

für unitäre Matrizen bestehen zwischen den Elementen von U die fünf Beziehungen

$$u_{22} = u_{11}^* , \quad u_{21} = -u_{12}^* , \quad |\det U| = 1 . \quad (\text{D.8})$$

Von den ursprünglich acht reellen Zahlen (je vier Real- und Imaginärteile), die die Elemente von U festlegen, sind also nur drei unabhängig.

Jede Matrix $U \in SU(2)$ kann durch Linearkombination der zweidimensionalen Einheitsmatrix \mathcal{I}_2 und der drei Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.9})$$

dargestellt werden. Sie heißen *Pauli-Matrizen* und wurden zur Beschreibung des Spins in die Quantenmechanik eingeführt.

D.2 Lie-Gruppen und Generatoren

D.2.1 Lie-Gruppen

Eine sehr wichtige Klasse kontinuierlicher Gruppen sind die *Lie-Gruppen*, bei denen die Parameter von Produktgruppen analytische Funktionen¹ der Parameter der Faktoren sind. Seien also zwei Elemente $g_1(\phi_1)$ und $g_2(\phi_2)$ einer Lie-Gruppe G gegeben, dann ist das Produkt $g_1(\phi_1) \circ g_2(\phi_2) = g(\phi)$ nach Voraussetzung wieder ein Element von G , und sein Parameter ϕ ist eine analytische Funktion von ϕ_1 und ϕ_2 . Unter dieser Voraussetzung können die Gruppenelemente nach ihren Parametern differenziert werden.

Dadurch wird es möglich, Gruppenelemente zu betrachten, die infinitesimal benachbart sind,

$$g(\phi + d\phi) = g(\phi) + \frac{dg}{d\phi} d\phi. \quad (\text{D.10})$$

Insbesondere kann man Gruppenelemente einführen, die sich vom Eins- element nur infinitesimal unterscheiden, und damit das Konzept der *Generatoren* entwickeln.

Zunächst definieren wir die Exponentialfunktion von Matrizen analog zur Exponentialfunktion von Zahlen über die Exponentialreihe und die Matrixmultiplikation. Demnach ist

$$\exp(A) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \quad (\text{D.11})$$

Nun sehen wir uns als Beispiel die Gruppe $SO(2)$ an, die durch reelle, orthogonale 2×2 -Matrizen

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

dargestellt werden kann, die von einem einzigen Parameter ϕ abhängen. Mithilfe der Pauli-Matrix σ_2 kann R in die Form

$$R = I_2 \cos \phi + i\sigma_2 \sin \phi = \exp(i\sigma_2 \phi) \quad (\text{D.13})$$

¹Analytisch heißen Funktionen, die lokal durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar sind. Sie sind insbesondere beliebig oft differenzierbar.

gebracht werden. Um das zu sehen, benutzen wir zunächst, dass $\sigma_2^2 = I_2$ ist, wie sich durch Einsetzen unmittelbar zeigen lässt. Also gilt

$$\begin{aligned}\exp(i\sigma_2\phi) &= I_2 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2j} A^{2j}}{(2j)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2k+1} A^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= I_2 \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2j}}{(2j)!} \right) + \sigma_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\phi)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= I_2 \cos \phi + i\sigma_2 \sin \phi ,\end{aligned}\quad (\text{D.14})$$

wobei die Reihendarstellungen (12.30) und (12.31) der Cosinus- und der Sinusfunktion verwendet wurden.

Das Produkt zweier Matrizen $R(\phi_1)$ und $R(\phi_2)$ aus $SO(2)$ lässt sich dann einfach als

$$R(\phi_1)R(\phi_2) = \exp(i\sigma_2(\phi_1 + \phi_2)) =: R(\phi) \quad (\text{D.15})$$

schreiben, so dass $\phi = \phi_1 + \phi_2$ eine denkbar schlichte analytische Funktion der Parameter ϕ_1 und ϕ_2 ist.

D.2.2 Generatoren

Diese Überlegung legt es nahe, nach einer exponentiellen Darstellung

$$R = \exp(i\varepsilon S) \quad (\text{D.16})$$

der Elemente $R \in G$ zu suchen, so dass R für $\varepsilon \rightarrow 0$ in das Einselement übergeht. Für kleine ε ist dann $R = 1 + i\varepsilon S$, d.h. S stellt eine infinitesimale Transformation dar. Sie heißt *Generator* der Gruppe.

Zu jedem kontinuierlichen Gruppenparameter gehört offenbar ein Generator. Die Generatoren bilden selbst wieder einen linearen Vektorraum, durch den die Gruppe dargestellt werden kann, weil jede Linearkombination der Generatoren zu einer entsprechenden Multiplikation der Gruppenelemente gehört,

$$S = \lambda_i S_i \quad \Rightarrow \quad R = \exp(i\varepsilon \lambda_i S_i) = \prod_i R(\varepsilon_i) \quad (\text{D.17})$$

mit $\varepsilon_i := \varepsilon \lambda_i$.

Wir untersuchen nun zwei beliebige infinitesimale Transformationen R_1 und R_2 aus G , die jeweils bis zur zweiten Ordnung durch ihre Generatoren dargestellt seien, und ihre Inversen R_1^{-1} und R_2^{-1} . Für beide gilt

$$\begin{aligned}R_j &= I + i\varepsilon_j S_j - \frac{\varepsilon_j^2}{2} S_j^2 + \dots , \\ R_j^{-1} &= I - i\varepsilon_j S_j - \frac{\varepsilon_j^2}{2} S_j^2 + \dots ,\end{aligned}\quad (\text{D.18})$$

denn $R_j^{-1} = \exp(-i\varepsilon_j S_j)$. In dem Produkt aus vier Faktoren

$$\begin{aligned} R_1^{-1} R_2^{-1} R_1 R_2 &= I + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (S_2 S_1 - S_1 S_2) + \dots \\ &= I + \varepsilon_1 \varepsilon_2 [S_2, S_1] + \dots \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

fallen alle Terme heraus, die linear in den $\varepsilon_{1,2}$ sind oder die Form $\varepsilon_j^2 S_j^2 / 2$ haben, und der *Kommutator*

$$[S_2, S_1] := S_2 S_1 - S_1 S_2 \quad (\text{D.20})$$

tritt auf. Nun muss aber das Produkt aus (D.19) selbst wieder ein Element von G sein, das nahe am Einselement liegt. Daher muss es möglich sein, es ebenfalls durch Linearkombinationen der Generatoren darzustellen, weshalb

$$I + \varepsilon_1 \varepsilon_2 [S_2, S_1] = I + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_k c_{21k} S_k \quad (\text{D.21})$$

oder allgemein

$$[S_i, S_j] = \sum_k c_{ijk} S_k \quad (\text{D.22})$$

gelten muss. Dieser Zusammenhang zwischen den Generatoren einer Lie-Gruppe G definiert deren *Strukturkonstanten* c_{ijk} . Wegen der Antisymmetrie des Kommutators in seinen beiden Argumenten müssen die Strukturkonstanten ebenfalls antisymmetrisch in ihrem ersten Indexpaar sein,

$$c_{ijk} = -c_{jik} . \quad (\text{D.23})$$

Fasst man den Kommutator als (antisymmetrisches) Produkt der Generatoren auf, wird durch (D.22) eine Verknüpfung aus dem Vektorraum der Generatoren in sich selbst definiert, die diesem Vektorraum die zusätzliche Struktur einer Algebra gibt. Sie heißt *Lie-Algebra*.

Aufgrund der Definition (D.16) erhalten wir die Generatoren einer Gruppe zu einem Parameter ϕ_i durch

$$S_i = -i \left. \frac{\partial R}{\partial \varepsilon_i} \right|_{\varepsilon_i=0} . \quad (\text{D.24})$$

Demnach hat die Gruppe $SO(2)$ den einzigen Generator

$$-i \frac{d}{d\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi & \cos \phi \\ -\cos \phi & -\sin \phi \end{pmatrix} \Big|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2 . \quad (\text{D.25})$$

Um eine weitere Eigenschaft der Generatoren näher zu untersuchen, brauchen wir die Beziehung

$$\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A)) , \quad (\text{D.26})$$

die für hermitesche Matrizen A gilt. In ihrem Beweis verwenden wir, dass mit unitären Matrizen U

$$U A^i U^\dagger = (U A U^\dagger)^i \quad (\text{D.27})$$

gilt. Für $i = 1$ ist dies offensichtlich. Nehmen wir an, die Aussage gelte für i , dann gilt sie wegen

$$\begin{aligned} UA^{i+1}U^\dagger &= UA^iAU^\dagger = UA^iU^\dagger UAU^\dagger \\ &= (UAU^\dagger)^i(UAU^\dagger) = (UAU^\dagger)^{i+1} \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

auch für $i + 1$, und damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen. Nun können wir (D.27) benutzen, um

$$U \exp(A)U^\dagger = \exp(UAU^\dagger) \quad (\text{D.29})$$

zu schreiben, indem wir die Potenzreihe

$$\exp(UAU^\dagger) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(UAU^\dagger)^n}{n!} \quad (\text{D.30})$$

verwenden und darin auf jedes Glied das Ergebnis (D.27) anwenden. Nun benutzen wir nur noch, dass sich jede Matrix A durch unitäre Matrizen U in Diagonalform bringen lässt,

$$UAU^\dagger = \text{diag}(a_1, \dots, a_N), \quad (\text{D.31})$$

um (D.26) zu sehen, denn

$$\begin{aligned} \det(\exp(A)) &= \det(U \exp(A)U^\dagger) = \det(\exp(UAU^\dagger)) \\ &= \det(\exp(\text{diag}(a_1, \dots, a_N))) = \\ &= \prod_{i=1}^N \exp(a_i) = \exp \sum_{i=1}^N a_i = \exp(\text{tr}(A)). \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Mit (D.26) sehen wir, dass für Matrizen R mit $\det R = 1$

$$1 = \det R = \det(\exp(i\varepsilon S)) = \exp(i\varepsilon \text{tr}(S)) \quad (\text{D.33})$$

gelten muss, so dass ihre Generatoren *spurfrei* sein müssen, $\text{tr}(S) = 0$.

D.3 Galilei-Invarianz

D.3.1 Galilei-Transformation

Wir hatten im Kapitel 9 gesehen, dass zeitabhängige Drehungen des Bezugssystems zu Scheinkräften führen, die anzeigen, dass das Bezugssystem kein Inertialsystem ist. Ebenso führt eine lineare Beschleunigung eines Bezugssystems relativ zu einem Inertialsystem zu einer Scheinkraft. Dies zeigt, dass nur eine sehr eingeschränkte Klasse von Transformationen dazu geeignet ist, ein Inertialsystem in ein anderes zu überführen.

Erlaubt sind nur konstante Drehungen, Verschiebungen des Koordinatenursprungs mit konstanter Geschwindigkeit, und Verschiebungen des Zeitnullpunkts, insgesamt also Transformationen der Art

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{x}_0, \quad t \rightarrow t' = t + t_0, \quad (\text{D.34})$$

wobei R eine (eigentliche oder uneigentliche) orthogonale Matrix ist. Legt man fest, dass die Transformationen (D.34) die Orientierung des Ausgangssystems nicht ändern dürfen, also Rechts- in Rechtssysteme überführen müssen, dann ist $\det R = +1$ und $R \in SO(3)$. Die Drehung R , die Geschwindigkeit \vec{v} und die Nullpunktsverschiebungen \vec{x}_0 und t_0 müssen konstant sein.

D.3.2 Die Galilei-Gruppe

Die Transformationen (D.34) bilden eine Gruppe. Als Verknüpfung zweier Gruppenelemente dient die Hintereinanderausführung der beiden Transformationen,

$$\begin{aligned} \vec{x}'' &= R_2\vec{x}' + \vec{v}_2t + \vec{x}_2 \\ &= R_2(R_1\vec{x} + \vec{v}_1t + \vec{x}_1) + \vec{v}_2t + \vec{x}_2 \\ &= (R_2R_1)\vec{x} + (R_2\vec{v}_1 + \vec{v}_2)t + (R_2\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \\ &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{x}_0 \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

mit $R := R_2R_1$, $\vec{v} := R_2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ und $\vec{x}_0 := R_2\vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Man rechnet leicht nach, dass diese Verknüpfung assoziativ ist. Das neutrale Element wird durch

$$R = I, \quad \vec{v} = 0, \quad \vec{x}_0 = 0, \quad t_0 = 0 \quad (\text{D.36})$$

dargestellt, und das inverse Element zu einer durch $(R, \vec{v}, \vec{x}_0, t_0)$ gegebenen Transformation ist durch $(R^{-1}, -R^{-1}\vec{v}_0, -R^{-1}\vec{x}_0, -t_0)$ gegeben. Die Gruppe ist nicht kommutativ, weil die räumlichen Drehungen $R \in SO(3)$ nicht kommutativ sind.

Diese Gruppe, genannt *Galilei-Gruppe*, hat insgesamt zehn Parameter: vier für die beiden Nullpunktsverschiebungen \vec{x}_0 und t , drei für die Translationsgeschwindigkeit \vec{v} und die drei Eulerwinkel, durch die R parametrisiert werden kann. Es wird sich in der analytischen Mechanik herausstellen, dass zu diesen zehn Parametern zehn Erhaltungsgrößen gehören, nämlich die Energie zur Zeittranslation t_0 , der Impuls zur räumlichen Translation \vec{x}_0 , der Drehimpuls zur Drehung R und die Translationsbewegung des Schwerpunkts zu den verbleibenden drei Parametern \vec{v} .

D.4 Räumliche Translation und Impuls

Wir stellen uns eine Funktion $\psi(x, y, z)$ der drei Ortskoordinaten vor und betrachten an ihrem Beispiel die Gruppe der Koordinatenverschiebungen, die so genannte *Translationsgruppe*, die offenbar eine Untergruppe der Galileigruppe ist. Wenn unser physikalisches System unveränderlich gegenüber Verschiebungen ist, anders ausgedrückt, wenn es symmetrisch unter der Translationsgruppe ist, bleibt sein Impuls erhalten, was im nächsten Semester gezeigt wird. Translationsinvarianz erzeugt in diesem Sinne die Impulserhaltung.

Offenbar ist die Translationsgruppe eine Lie-Gruppe, weil sie auf analytische Weise von drei kontinuierlichen Parametern abhängt, nämlich den Verschiebungskomponenten entlang der drei Koordinatenrichtungen.

Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst nur eine Verschiebung längs der x -Achse um einen kleinen Betrag δx an. Wir definieren zu diesem Zweck einen *Translationsoperator* $T_x(\delta x)$, durch die sich die Funktion entsprechend

$$T_x(\delta x)\psi(x, y, z) = \psi'(x, y, z) = \psi(x + \delta x, y, z) \quad (\text{D.37})$$

ändert. Der Operator $T_x(\delta x)$ stellt die Untergruppe der Translationen längs der x -Achse dar.

Wenn δx klein genug ist, können wir die rechte Seite durch ihre Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung nähern, also

$$T_x(\delta x)\psi(x, y, z) = \psi(x, y, z) + \frac{\partial\psi(x, y, z)}{\partial x}\delta x + \mathcal{O}(\delta x^2). \quad (\text{D.38})$$

Gleich wird δx infinitesimal klein werden, so dass wir Terme höherer als erster Ordnung in δx vernachlässigen können.

Wir schreiben nun zunächst (D.38) in etwas anderer Form,

$$T_x(\delta x)\psi(x, y, z) = \left(1 + \delta x \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, y, z), \quad (\text{D.39})$$

so dass wir den *Translationsoperator*

$$T_x(\delta x) = 1 + \delta x \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{D.40})$$

für kleine Verschiebungen δx identifizieren können. Wichtig ist hier, dass die partielle Ableitung nach x nur auf Funktionen wirkt, auf die der Operator angewandt wird. Um Unklarheiten zu vermeiden, führen wir die Abkürzung

$$p_x := -i \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{D.41})$$

ein, durch die sich der Translationsoperator in die Form

$$T_x(\delta x) = 1 + i\delta x p_x \quad (\text{D.42})$$

bringen lässt.

Wenn eine infinitesimale Translation $T_x(dx)$ auf eine endliche Translation $T_x(x)$ folgt, muss das Ergebnis eine Translation $T_x(x + dx)$ sein, also

$$\begin{aligned} T_x(x + dx) &= T_x(dx)T_x(x) = (1 + i\delta x p_x)T_x(x) \\ &= T_x(x) + i\delta x p_x T_x(x) . \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

Dieses Ergebnis lässt sich als eine Differentialgleichung für den Translationsoperator auffassen, weil im Grenzfall $dx \rightarrow 0$

$$\frac{T_x(x + dx) - T_x(x)}{dx} \rightarrow \frac{dT_x(x)}{dx} = i p_x T_x(x) \quad (\text{D.44})$$

gilt. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist der Translationsoperator für endliche Translationen,

$$T_x(x) = \exp(ix p_x) , \quad (\text{D.45})$$

wenn wir voraussetzen, dass $T_x(0) = 1$ sein muss.

Aus dieser Darstellung der Gruppe der Translationen längs der x -Achse lässt sich deren Generator entsprechend (D.24) ablesen,

$$S_x = -i \frac{dT_x(x)}{dx} = p_x = -i \frac{\partial}{\partial x} . \quad (\text{D.46})$$

Der Operator p_x aus (D.41) erweist sich also als Generator der Translationen entlang der x -Achse. Entsprechende Überlegungen für Translationen längs der y - und z -Achsen zeigen, dass die beiden anderen Generatoren der vollen Translationsgruppe die jeweiligen partiellen Ableitungen nach y und z sind, also

$$p_y = -i \frac{\partial}{\partial y} , \quad p_z = -i \frac{\partial}{\partial z} . \quad (\text{D.47})$$

Wegen des Zusammenhangs zwischen räumlichen Translationen und dem Impuls treten die drei Generatoren p_x , p_y und p_z als Impulsoperatoren in der Quantenmechanik auf.

Index

- Ähnlichkeitstransformation, 113
- Äquivalenzprinzip, 123
- Abbildung
 - bilineare, 31
 - lineare, 136
- Ableitung
 - partielle, 52
 - totale, 53
- Absorptionslinie, 179
- allgemeine lineare Gruppe, 59
- Anfangsbedingung, 6
- Arbeit, 55
- Bahnebene, 90
- Bahnkurve, 3, 45
 - geschlossene, 94
 - im Zentralfeld, 93
- Bahnkurven
 - finite, 95
- Basis, 27
 - in sphärischen Polarkoordinaten, 88
 - in Zylinderkoordinaten, 87
 - orthonormale, 32
- Beschleunigung, 46
- Bewegungsgesetz, 4
- Bewegungsgleichung
 - für den reziproken Radius, 93
- Bezugssystem, 3
- Binormalenvektor, 48
- Bogenlänge, 46
- Corioliskraft, 122
 - Ablenkung, 124
- Cramer'sche Regel, 63
- d'Alembert-Reduktion, 19
- Darstellung, 35
- Derhimpuls
 - im Zentralfeld, 91
- Determinante, 61
 - Multiplikationstheorem, 62
- Deviationsmomente, 148
- Diagonalform, 137
- Diagonalisierung
 - der potentiellen Energie, 189
- Diagonalmatrix, 61
- Differentialgleichung, 5
 - allgemeine Lösung, 19
 - Anfangsbedingung, 10
 - eindeutige Lösung, 17
 - Fundamentalsystem, 19
 - gewöhnliche, 5
 - homogene und inhomogene, 18
 - inhomogene, 7
 - lineare, 6, 18
 - Ordnung, 5
 - partielle, 5
 - Richtungsfeld, 6, 18
 - Trennung der Variablen, 6
 - Variation der Konstanten, 8
- Divergenz, 54
- Drehimpuls, 39
 - und Trägheitstensor, 148
- Drehimpulserhaltung
 - im Zentralfeld, 90
- Drehmoment, 38
- Drehspiegelungen, 67
- Drehung
 - passive und aktive, 70
- Dreikörperproblem
 - reduziertes, 125
- Dualraum, 133
- Dualvektor, 133
- ebene Polarkoordinaten, 90
- Eigenvektor, 137
 - einer hermiteschen Matrix, 163
- Eigenwert, 137
 - einer hermiteschen Matrix, 163

- Eigenwertgleichung, 138
- Ellipse, 98
- Endomorphismus, 136
- Energie, 15, 40
 - kinetische, 15, 41, 55, 82
 - potentielle, 15, 40, 82
- Energiesatz
 - eines Systems aus Massenpunkten, 82
 - in drei Dimensionen, 56
 - in einer Dimension, 40
- Energieverlust bei Streuung, 109
- Erzeugendensystem, 27, 35
- erzwungene Schwingung, 174
- Euler'scher Satz über homogene Funktionen, 114
- Euler-Winkel, 130
- Fahrstrahl, 90
- Feld, 51
- Fluchtgeschwindigkeit, 16
- Foucault'sches Pendel
 - Bewegungsgleichung, 172
 - Drehfrequenz, 172
- Fouriertransformation, 32
- Freiheitsgrade, 129
- Frequenz, 158
 - des mathematischen Pendels, 170
 - des physikalischen Pendels, 171
- Funktionaldeterminante, 146
- Gauß'scher Satz, 152
- Gebiet
 - einfach zusammenhängendes, 73
 - gebundene Bewegung, 95
- Gesamtdrehimpuls, 79
- Gesamtdrehmoment, 80
- Gesamtmasse, 78
- Geschwindigkeit, 3, 46
- Gleichgewicht, 155
 - labiles und stabiles, 156
- Graßmann-Identität, 122
- Gradient, 53
 - in krummlinig-orthogonalen Koordinaten, 86
 - in sphärischen Polarkoordinaten, 89
 - in Zylinderkoordinaten, 88
- Gradientenfeld, 72
- Gravitationskraft, 94
- Gruppe, 26
 - Abel'sche, 26
- harmonische Schwingung
 - aperiodischer Grenzfall, 167
 - schwach gedämpfte, 165
- harmonischer Oszillator, 42, 56
 - gedämpfter, 41
 - mit Reibung, 163
- Hauptachsen, 140
- Hauptachsensystem, 138
- Hauptnormalenvektor, 48
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 21
- Hauptträgheitsachsen, 148
- Hauptträgheitsmomente, 140, 148
- Helizität, 66
- Hesse-Matrix, 184
- Hill-Kurve, 126
- homogene Funktionen, 113
- Homogenität, 3
 - der Zeit, 3
- Hyperbel, 100
- imaginäre Einheit, 159
- Impuls, 4, 38
- Inertialsystem, 36
- infinitesimales Wegelement, 46
- Integralsatz, 74
- Integrationskonstante, 6
- Integrationsweg, 50
- integrierender Faktor, 15
- Isokline, 6
- Isotropie, 3
- Jacobi-Konstante, 126
- Jacobideterminante, 146
 - in Kugelkoordinaten, 146
 - in Zylinderkoordinaten, 146
- Jacobimatrix, 145
- Körper, 2, 25
- Kegelschnitt, 96

- Kepler'sches Gesetz
drittes, 100, 114
erstes, 99
zweites, 90
- Keplerproblem, 94
- klassischer Elektronenradius, 179
- Knotenlinie, 130
- komplexe Zahlen, 158
 Betrag und Phase, 160
 konjugierte, 159
 Real- und Imaginärteil, 159
- Koordinaten
 kartesische, 85
 krummlinig-orthogonale, 85
 verallgemeinerte, 132
- Koordinatenflächen, 85
- Koordinatensystem, 35
- Koordinatentransformation, 59
- Kräfte, 2
 Superposition, 4
- Kräfte auf rotierender Erde, 121
- Krümmungsradius, 49
- Kraft
 dissipative, 56
 konservative, 56
 Linearisierung, 156, 170
- Kraftstoß, 181
- Kreisbahn, 46
- Kreisfrequenz, 158
- Kronecker-Symbol, 33
- Kurve, 50
- Kurvenintegral, 50, 51, 72
 geschlossenes, 51
- Kurvenparameter, 50
- Lösung
 triviale, 137
- Laborsystem, 105
- Lagrange-Punkte, 127
- Laplace-Lenz-Runge-Vektor, 100
- Laplace-Operator, 55
- Leistung, 55
- Levi-Civita-Symbol, 33
- Lichtablenkung
 am Sonnenrand, 112
 im Gravitationsfeld, 112
- lineare Abhängigkeit, 19
- lineare Algebra, 137
- Linearisierung, 24
- Linearkombination, 27
- Linienbreite
 natürliche, 179
- Linkssystem, 66
- Lipschitz-Bedingung, 17
- Lorentzkraft, 178
- Lorentzprofil, 179
- Masse
 träge und schwere, 4
- mathematisches Pendel
 gekoppelt, 187
- Matrix
 adjungierte, 162
 antisymmetrische, 117
 inverse, 63
 quadratische, 59, 61
 rechts- und linksinverse, 64
 reguläre und singuläre, 62
 selbstadjungierte oder hermitische, 162
 Transformation, 137
 transponierte, 60
 unitäre, 163
- Matrixelement, 59
- Matrixmultiplikation, 60
- Multilinearität, 134
- Nabla, 53
- Nabla-Operator, 53
- Neutronenmoderation, 109
- Newton'sche Axiome, 4
 drittes, 4
 erstes, 4
 zweites, 4
- numerische Exzentrizität, 96
- orthogonale Transformation
 eigentliche und uneigentliche, 65
- Orthogonalität, 31
- Orthonormalbasis, 65
- orthonormale Transformation, 65
- Orthonormalitätsrelation, 65
- Ortsvektor, 3
- Parabel, 100

- Partialbruchzerlegung, 13
- Pendel
 - mathematisches, 169
 - physikalisches, 170
- Perihel, 96
- Permutation, 61
 - gerade und ungerade, 61
 - Vorzeichen, 61
- Polynom
 - charakteristisches, 137
- Potential, 40
 - effektives, 92
- Potentialkräfte, 56
- potentielle Energie
 - im Gravitationsfeld, 94
- Produkt
 - äußeres, 34
 - inneres, 31
- Projektor, 169
- radioaktiver Zerfall, 6
- Reaktionsgesetz, 4
- Rechtssystem, 66
- Reibung
 - Luftwiderstand, 12
 - Stokes'sche, 10
- Resonanz, 176
 - Halbwertsbreite, 176
 - säkulares Anwachsen, 177
- Restglied, 22
- Richtungsableitung, 53
- Roche-Grenze, 128
- Rotation, 54
- Rotationsellipsoid, 150
 - prolat und oblat, 150
- Rutherford'sche Streuformel, 111
- Satz des Pythagoras, 85
- Satz von Steiner, 149, 171
- Scheinkräfte, 122
- Schraubenbahn, 46
- Schwarzschild-Radius, 16, 112
- Schwerpunkt, 78
- Schwerpunktkoordinaten, 103
- Schwerpunktsystem, 80, 103
- Schwingung
 - Amplitude und Phase, 158
 - harmonische, 158
- Schwingungsperiode, 41, 158
- Skalare, 27
- Skalarprodukt, 31
 - als Tensor, 133
- Spaltenvektoren, 60
- sphärische Polarkoordinaten, 88
- Spiegelung, 65
- Stabilitätsanalyse, 183
- starrer Körper, 129
- Stoß
 - elastischer, 103
- Stoßparameter, 109
- Stokes'scher Satz, 74, 75
- Streuquerschnitt, 110
- Streuwinkel, 104
- Summenkonvention
 - Einstein'sche, 33
- Symmetrie
 - und Erhaltungssätze, 67
 - unter Transformationen, 67
- symmetrische Gruppe, 61
- System
 - dissipatives, 43
- Tangentialvektor, 48
- Taylor'scher Satz, 22
- Taylor-Entwicklung, 23
- Tensor, 134
 - Komponenten, 134
 - Rang oder Stufe, 134
 - Spur, 135
 - Transformation, 136
- Tensorprodukt, 135
- Trägheit, 4
- Trägheitsellipsoid, 148
- Trägheitsgesetz, 4
- Trägheitskraft, 123
- Trägheitsmoment
 - um eine Achse, 148
- Trägheitstensor, 140
 - einer homogenen Kugel, 147
- Transformation
 - aktive und passive, 120
 - infinitesimale, 120
- Transponierte, 60
- transponierter Vektor, 45
- Umkehrpunkte, 41

- Unterdeterminante, 63
- Untervektorraum, 27
- Vektor
 - gebundener, 70
 - polarer und axiale, 69
- Vektorfeld, 51
- Vektorprodukt, 34
- Vektorraum, 3, 25
- Vierervektor, 134
- Virialsatz, 115
- Volumenintegral, 143
- Winkelgeschwindigkeit, 48
 - als axialer Vektor, 118
 - momentane, 120, 132
- wirbelfrei, 73
- Wirkungsquerschnitt, 110
- Zeilenvektoren, 60
- Zeit, 3
- Zentraffeld, 71, 90
- Zentralkraft, 57, 90
- Zentrifugalkraft, 122
- Zentrifugalpotential, 92
- Zirkulation, 75
- Zylinderkoordinaten, 86