Aufgabe 1

(a) Es gilt für eine Kugel mit Radius R

$$V_n = \int_V \mathrm{d}V_n = \int \int_0^R r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Omega_n = \int \frac{R^n}{n}\,\mathrm{d}\Omega_n = \frac{\Omega_n R^n}{n}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Omega_n \int_0^\infty \mathrm{d}r\; e^{-r^2} r^{n-1} &= \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\Omega_n \\
&= \int_0^\infty e^{-r^2}\,\mathrm{d}V_n \\
&= \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} \prod_{i=1}^n \mathrm{d}x_i \\
&= \prod_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-x_i^2}\,\mathrm{d}x_i \\
&= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^n
\end{aligned}$$

Aus dieser Identität erhalten wir für $n = 2$

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \Omega_2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\,\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_0^\infty \\
&= 2\pi \frac{1}{2} = \pi
\end{aligned}$$

Wurzelziehen ergibt nun

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Damit ist die Identität insgesamt bewiesen.

(c) Wir substituieren $t = r^2$. Dann gilt

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \Omega_n \frac{1}{2} \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-2} \cdot 2 \cdot r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\Omega_n \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n}{2}-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Omega_n \Gamma(\frac{n}{2})$$

(d) Wir formen um

$$V_n = \frac{\Omega_n r^n}{n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{r^n}{n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma(n/2+1)}$$

(e) Wir setzen zunächst $n = 2$. Dann gilt

$$V_2 = \frac{\pi r^2}{\Gamma(1+1)} = \frac{\pi r^2}{1!} = \pi r^2.$$

Für $n = 3$ erhalten wir

$$V_3 = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} r^3}{\Gamma(2 + 1/2)} = \pi r^3 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\frac{4!}{2!4^2}\sqrt{\pi}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Aufgabe 2

(a) (i) $x_i,\ y_i \rightsquigarrow \rho_i, \varphi_i$ mit $\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2$.

(ii) $p_{x,i} \rightsquigarrow \sqrt{2m}\xi_{4i-3},\ p_{y,i} \rightsquigarrow \sqrt{2m}\xi_{4i-2},\ p_{z,i} \rightsquigarrow \sqrt{2m}\xi_{4i-1},\ z_i \rightsquigarrow \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}}\xi_{4i}$. Dann gilt nämlich

$$\overline{H} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\vec{p_i}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} z_i^2 \right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\xi_{4i-3}^2 + \xi_{4i-2}^2 + \xi_{4i-1}^2 + \xi_{4i}^2 \right] = \sum_{j=1}^{4N} \xi_j^2.$$

Außerdem gilt auch $\mathrm{d}z_i\ \mathrm{d}p_{x,i}\ \mathrm{d}p_{y,i}\ \mathrm{d}p_{z,i} = \sqrt{(2m)^3 \frac{2}{m\omega^2}}\ \mathrm{d}\xi_{4i-3}\ \mathrm{d}\xi_{4i-2}\ \mathrm{d}\xi_{4i-1}\ \mathrm{d}\xi_{4i} = 4\frac{m}{\omega}\ \mathrm{d}\xi_{4i-3}\ \mathrm{d}\xi_{4i-2}\ \mathrm{d}\xi_{4i-1}\ \mathrm{d}\xi_{4i}$.

(iii) Wir formen zunächst die Bedingung unter dem Integral um. Es gilt

$$0 \le H \le E \Longleftrightarrow 0 \le \overline{H} + V(x_i, y_i) \le E \Longleftrightarrow 0 \le \overline{H} \le E \wedge \rho_i = x_i^2 + y_i^2 \le R$$

$$
\begin{aligned}
\Phi(E) &= \frac{1}{h_0^{3N}} \int_{0\leq H\leq E} \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}x_i\ \mathrm{d}y_i\ \mathrm{d}z_i\ \mathrm{d}p_{x,i}\ \mathrm{d}p_{y,i}\ \mathrm{d}p_{z,i} \\
&= \frac{1}{h_0^{3N}} \int_{0\leq H\leq E} \prod_{i=1}^{N} \rho_i 4\frac{m}{\omega}\ \mathrm{d}\rho_i\ \mathrm{d}\varphi_i\ \mathrm{d}\xi_{4i-3}\ \mathrm{d}\xi_{4i-2}\ \mathrm{d}\xi_{4i-1}\ \mathrm{d}\xi_{4i} \\
&= \frac{1}{h_0^{3N}} \int_{0\leq H\leq E} \left(4\frac{m}{\omega}\right)^N \prod_{i=1}^{N} \rho_i\ \mathrm{d}\rho_i\ \mathrm{d}\varphi_i\ \mathrm{d}\xi_{4i-3}\ \mathrm{d}\xi_{4i-2}\ \mathrm{d}\xi_{4i-1}\ \mathrm{d}\xi_{4i} \\
&= \frac{1}{h_0^{3N}} \int_{0\leq H\leq E} \left(4\frac{m}{\omega}\right)^N \prod_{j=1}^{4N} \mathrm{d}\xi_j \prod_{i=1}^{N} \rho_i\ \mathrm{d}\rho_i\ \mathrm{d}\varphi_i \\
&= \left(\frac{4m}{\omega h_0^3}\right)^N \int_{0\leq \overline{H}\leq \sqrt{E}\wedge\rho_i\leq R} \prod_{j=1}^{4N} \mathrm{d}\xi_j \prod_{i=1}^{N} \rho_i\ \mathrm{d}\rho_i\ \mathrm{d}\varphi_i \\
&= \left(\frac{4m}{\omega h_0^3}\right)^N \underbrace{\int_{0\leq \overline{H}\leq \sqrt{E}} \prod_{j=1}^{4N} \mathrm{d}\xi_j}_{V_{4N}} \cdot \prod_{i=1}^{N} \int_{0\leq\rho_i\leq R} \rho_i\ \mathrm{d}\rho_i\ \mathrm{d}\varphi_i \\
&= \left(\frac{4m}{\omega h_0^3}\right)^N \cdot \frac{\pi^{2N}E^{2N}}{\Gamma(2N+1)} \cdot \left(\pi R^2\right)^N \\
&= \frac{1}{(2N)!}\left(\frac{4m}{\omega h_0^3 \pi^2 E^2 \cdot \pi R^2}\right)^N \\
&= \frac{1}{(2N)!}\left(\frac{4m\pi^3 E^2 R^2}{\omega h_0^3}\right)^N
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\Omega(E) = \frac{\partial\Phi(E)}{\partial E} = \frac{N}{(2N)!}\left(\frac{4m\pi^3R^2}{\omega h_0^3}\right)^{N-1} \cdot E^{2(N-1)} \cdot 2\left(\frac{4m\pi^3R^2}{\omega h_0^3}\right) \cdot E = \left(\frac{4m\pi^3R^2}{\omega h_0^3}\right)^N \frac{E^{2N-1}}{(2N-1)!}
$$

Aufgabe 3

(a) Es gilt

$$
\mathrm{d}(PV - Pb) + \left(\frac{a}{V} - \frac{ab}{V^2} - RT\right) = (V-b)\ \mathrm{d}P + \left(P - \frac{a}{V^2} + \frac{2ab}{V^3}\right)\ \mathrm{d}V - R\ \mathrm{d}T,
$$

also liegt hier ein vollständiges Differential vor.

(b) Hier liegt kein vollständiges Differential vor. Betrachtet man den $\mathrm{d}P$-Term, so erkennt man, dass gilt $F(P,V,T) = PV + g(V,T)$. Analog ergibt sich aus dem $\mathrm{d}T$-Term $F(P,V,T) = \frac{cP}{T} + RT + h(P,V)$. Diese Gleichungen sind offenbar widersprüchlich, da $\frac{cP}{T}$ nicht in g vorkommen kann.