Übungsgruppe zum 9. Übungsblatt

Übung 1: Newton Interpolation

a) Interpolieren sie die Funktion $f(t) = \sqrt{t}$ mit Hilfe des Newtonschen Interpolationspolynoms vom Grad 2 zwischen den Stützstellen $t_0 = \frac{1}{4}$, $t_1 = 1$ und $t_2 = 4$

Allgemein gilt: $N_i(t) = \prod_{j=0}^{i-1} (t - t_i)$

Dividierte Differenzen: $p(t) = y[t_0] + y[t_0, t_1]\, N_1(t) + y[t_0, t_1, t_2]\, N_2(t)$

$$y[t_i, \dots, t_k] = \frac{y[t_{i+1}, \dots, t_k] - y[t_i, \dots, t_{k-1}]}{t_k - t_i} \qquad y[t_i] = y_i = f(t_i)$$

$y[t_0] = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $y[t_1] = 1$ $\qquad$ $y[t_2] = 2$

$y[t_0, t_1] = \frac{2}{3}$ $\left(\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}}\right)$ $\qquad$ $y[t_1, t_2] = \frac{1}{3}$ $\left(\frac{2 - 1}{4 - 1}\right)$

$y[t_0, t_1, t_2] = -\frac{4}{45}$ $\left(\frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{4 - \frac{1}{4}}\right)$

Somit gilt

$$p(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}(t - t_0) - \frac{4}{45}(t - t_0)(t - t_1)$$

$\vdots$

$$= -\frac{4}{45} t^2 + \frac{7}{9} t + \frac{14}{45} \in P_2$$

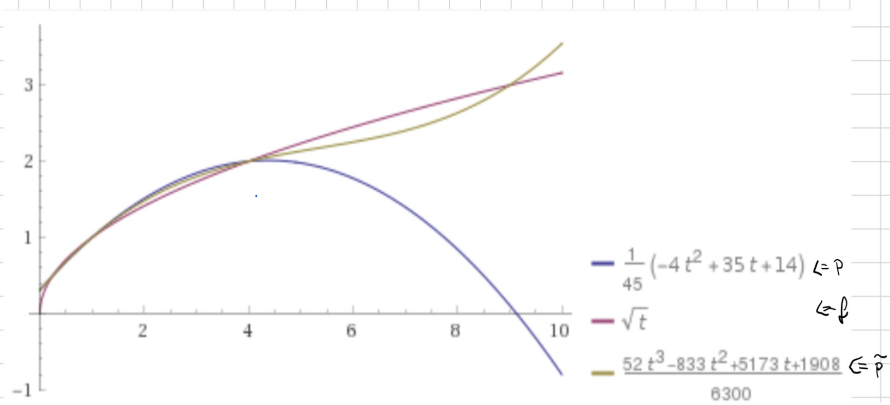
b) Zusätzliche Stützstelle $t_3 = 9$ $\Rightarrow$ gesucht $\tilde{p} \in P_3$

Zusätzliche Berechnung der finiten Differenzen:

$y[t_3] = 3$ $\quad$ $y[t_2, t_3] = \frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5}$ $\quad$ $y[t_1, t_2, t_3] = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{9 - 1} = -\frac{1}{60}$ $\quad$ $y[t_0, t_1, t_2, t_3] = \frac{-\frac{1}{60} + \frac{4}{45}}{9 - \frac{1}{4}} = \frac{13}{1575}$

$$\Rightarrow \tilde{p}(t) = p(t) + \frac{13}{1575}(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) = \dots = \frac{13}{1575} t^3 - \frac{119}{900} t^2 + \frac{739}{900} t + \frac{53}{175}$$

c) Skizzen von f, p und $\tilde{p}$:



Übung 2 *Schema von Neville-Aitken*

Seien $n+1$ Wertepaare $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ gegeben. Es bezeichne $p_{i,k} \in P_k$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom vom Grad k, $k \in \mathbb{N}_0$, zu den Wertepaaren $(x_i, y_i), \ldots, (x_{i+k}, y_{i+k})$.

a) Zeigen Sie, dass folgende Rekursionsformel gilt:

$$(i) \quad p_{i,0}(x) = y_i \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n,$$

$$(ii) \quad p_{i,k}(x) = \frac{(x - x_i)p_{i+1,k-1}(x) - (x - x_{i+k})p_{i,k-1}(x)}{x_{i+k} - x_i} \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n-k.$$

(i) ist klar, da $p_{i,0}(x)$ konstant.

(ii) Wir sehen, dass die rechte Seite ein Polynom vom Grad k beschreibt.

Idee: $p \in P_k$ ist über $k+1$ Punkte eindeutig bestimmt.

$\Rightarrow$ Vergleich durch Auswerten an den Stützstellen, denn wir wissen

$$p_{i,k}(x_{i+j}) = y_{i+j} \quad \forall j = 0, \ldots, k.$$

Betrachten wir also die rechte Seite an den Stützstellen:

Beh:

$$\frac{(x_{i+j} - x_i)\, p_{i+1,k-1}(x_{i+j}) - (x_{i+j} - x_{i+k})\, p_{i,k-1}(x_{i+j})}{x_{i+k} - x_i} = y_{i+1} \qquad \forall j = 0, \ldots, k$$

1. Fall $j=0$: $\quad p_{i,k-1}(x_{i+j}) = y_i = y_{i+j}$

2. Fall $1 \leq j \leq k-1$: $\quad \dfrac{(x_{i+j} - x_i)\, y_{i+j} - (x_{i+j} - x_{i+k})\, y_{i+j}}{x_{i+k} - x_i} = \dfrac{x_{i+k} - x_i}{x_{i+k} - x_i}\, y_{i+j}$ ✓

3. Fall $j=k$: $\quad p_{i+1,k-1}(x_{i+k}) = y_{i+k}$, da (x_{i+k}, y_{i+k}) Stützstelle für $p_{i+1,k-1}$

Wegen der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms gilt Gleichheit für $k = 1, \ldots, n$.

b) Bestimmen Sie die Tageslänge am Ort E bei 61,7° durch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolynoms mit Hilfe von a)

Ort	Tageslänge	Lage
A	17h 28m	55,7°
B	18h 00m	57,7°
C	18h 31m	59,3°
D	19h 56m	62,6°

Neville-Schema:

x_i	$p_{i,i}$	$p_{i,i+1}$	$p_{i,i+2}$	$p_{i,i+3}$
55,7	17,47	19,06	19,46	19,49
57,7	18,00	19,30	19,50	
59,3	18,52	19,55		
62,6	19.93			

Interpolationspolynom $p_n(\xi) = p_{0,n}(\xi)$

$\Rightarrow$ am Ort E 19 h 29,4 m

Übung 3: Komplexität der Interpolation

Sei $p \in P_n$ das Interpolationspolynom zu den $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen $t_0, \ldots, t_n$ mit den zugehörigen Werten $y_0, \ldots, y_n$. Bestimmen Sie die Anzahl der benötigten Operationen

- zur Berechnung der Koeffizienten von p (i)
- und zur Auswertung von p an einer beliebigen Stelle $t = \xi$ (ii)

Bestimmen Sie zum Vergleich auch die Anzahl der benötigten Operationen zur Auswertung von $p(t)$ an einer beliebigen Stelle $t = \xi$ mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas.

Hinweis: Die sehr naive Auswertung des Polynoms $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ (in der Monom-Basis) erfordert $O(n^2)$ Multiplikationen und n Additionen. Dagegen wird beim **Hornerschema**

$$p(t) = a_0 + (t \cdot (a_1 + t \cdot (\ldots (a_{n-1} + t \cdot a_n) \ldots)))$$

von innen nach außen ausgewertet. Wie viele Additionen und Multiplikationen sind dafür notwendig?

a) Lagrange Basis: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i^{(n)}(x)$ mit $L_i^{(n)}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

(i) 0 Operationen

(ii) $4n-1$ Operationen ($2n$ Substr, n Div. und $n-1$ Mult.) $4n^2 + 5n$ Operationen $\underbrace{((4n-1) + 1)}_{\text{Mult. mit Koeff.}} \underbrace{(n+1)}_{\text{Summanden}} + \underbrace{n}_{\text{add}}$

b) Newton-Basis: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i N_i(x)$ mit $N_i(x) = \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k)$ und $a_i = y[x_0, \ldots, x_i]$

$$y[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \begin{cases} y_i & \text{falls } k = 0 \\ \frac{y[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - y[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} & \text{sonst} \end{cases}$$

(i) "Dreiecksschema": Ab der zweiten Zeile 2 Substr. 1 Div. ins. müssen $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ Einträge so berechnet werden

$\Rightarrow \frac{3n(n+1)}{2}$ Operationen

(ii) Ohne H.S.: Zwei Op. für $N_{j+1}(x) = N_j(x)(x - x_{j+1})$ und eine für $N_0 = (x - x_0)$

$\Rightarrow 2n+1$ Op. für die Berechnung aller $N_i(x)$ $\Rightarrow \underbrace{2n+1}_{N_i} + \underbrace{n+1}_{\text{mult}} + \underbrace{n}_{\text{add.}} = 4n+1$

mit H.S.: $p(x) = a_0 + (x - x_0)(a_1 + \ldots + (x - x_{n-2})(a_{n-1} + a_n(x - x_n)) \ldots)$ $\Rightarrow$ $3n$ Operationen

c) Monombasis: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

(i) über LGS: $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Matrix aufstellen: $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$ Op. Lösen mit LR: $\frac{2}{3} n^3 + O(n^2)$ $\Rightarrow \frac{2}{3} n^3 + O(n^2)$ Operationen

(ii) ohne H.S.: (wir berechnen nur t^n und merken uns t^j) $\Rightarrow \underbrace{n-1}_{x, \ldots, x^n} \underbrace{+ n+1}_{\text{mult}} \underbrace{+ n}_{\text{add}} = 3n$

mit H.S.: $2n$ Operationen

d) Neville-Aitken:

Dreiecksschema: $\frac{n(n+1)}{2}$ Einträge pro Eintrag: 2 Mult, 2 Substr., 1 Div,

$(x - x_0), \ldots, (x - x_n) \rightarrow n+1$ Op $\Rightarrow \frac{5n(n+1)}{2} + n + 1$ Operationen

- **Aufgabe 2:** (14 Punkte)

  In der folgenden Tabelle sind Funktionswerte y_i einer Funktion $f(x)$ an den Stützstellen x_i gegeben.

x_i	0	3	6
y_i	7	15	45

  a) Stellen Sie die Lagrange-Polynome für die einzelnen Stützstellen dieses Datensatzes auf. (6 Punkte)

  b) Berechnen Sie den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 2$. (4 Punkte)

  c) Berechnen Sie mit Hilfe der Lagrange-Polynome einen Näherungswert für die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 6$. (4 Punkte)

a) $p(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i L_i^{(2)}(x) = 7 \cdot \frac{x-3}{0-3} \cdot \frac{x-6}{0-6} + 15 \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-6}{3-6} + 45 \frac{x-0}{6-0} \cdot \frac{x-3}{6-3}$

$\frac{7}{18}(x-3)(x-6) - \frac{5}{3}x(x-6) + \frac{5}{2}x(x-3)$

$= \frac{7}{18}x^2 - 3{,}5x + 7 - \frac{5}{3}x^2 + 10x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{15}{2}x = \frac{11}{9}x^2 - x + 7$

b) $p(2) = 9\frac{8}{9}$

c) $p'(x) = \frac{22}{9}x - 1$ $\quad p'(6) = \frac{41}{3}$

- **Aufgabe 3:** (8 Punkte)

  a) Wie verändert sich die Übereinstimmung zwischer einer Funktion und ihrer Lagrange-Interpolation mit n Stützstellen gleichen Abstands, wenn man die Zahl der Stützstellen erhöht? Geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antwort. (2 Punkte)

  b) Gegeben seien Stützstellen $(x_i, y_i),\ i = 0, \ldots, n,\ x_i \neq x_j\ \forall i \neq j$. Wieviele Polynome vom Grad n gibt es die diese Stützstellen exakt interpolieren? Geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antwort. (2 Punkte)

  c) Wann verwendet man zum Lösen linearer Gleichungssysteme besser iterative Verfahren? (2 Punkte)

  d) Was ist der Unterschied zwischen globaler und lokaler Konvergenz beim Lösen nichtlinearer Gleichungen? Geben Sie je ein Beispiel für Algorithmen mit globaler und lokaler Konvergenz. (2 Punkte)

a) Die Übereinstimmung wird für $n = 2, \ldots, k$ Stützstellen nur dann besser, falls die n-te Ableitung beschränkt bleibt. Sonst kommt es zu immer stärkeren Oszillationen.
$\rightarrow$ Interpolationsfehler

b) Die Lagrange Polynome bilden eine Basis von P_n, damit gibt es für jedes Polynom eine eindeutige Darstellung in dieser Basis. $\Rightarrow$ Es gibt genau ein Polynom vom Grad n, das $n+1$ Stützstellen exakt interpoliert.

c) Wenn die Matrizen groß und dünn besetzt sind.

d) Global: Verfahren konvergiert von jedem Startpunkt aus.
Lokal: Verfahren konvergiert nur, wenn der Startpunkt nahe genug an der Lösung ist (Newton)

Wer noch nicht genug Zusatzaufgaben hat: :)

Aufgabe 3 (2 Punkte) Für $i = 0, \dots, n$ seien $L_i(x) := \prod_{j \neq i} \frac{x - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$ die Lagrange-Polynome zu den paarweise verschiedenen Stützstellen $\xi_0, \dots, \xi_n$. Man zeige:

a) $\forall x : \sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1$.

b) $\forall k = 1, \dots, n : \sum_{i=0}^{n} \xi_i^k L_i(0) = 0$.

AUFGABE 6 POLYNOMINTERPOLATION

Lesen Sie diese Aufgabe komplett durch, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen!

a) Gegeben seien die drei paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ sowie die zugehörigen Werte $y_0 = 5$, $y_1 = 6$, $y_2 = 20$. Stellen Sie das zugehörige Interpolationspolynom $p(x)$ auf und stellen sie es andschließend in der Monomdarstellung $p(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ dar. Es soll also gelten: $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1, 2$.

6 Punkte

b) Gegeben sei nun eine weitere Stützstelle $x_3 = 5$ mit dem zugehörigen Wert $y_3 = 45$ (*Klingeling!*). Stellen Sie nun das Interpolationspolynom $q(x) = c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$ auf, welches $q(x_i) = y_i$ für $i = 0, 1, 2, 3$ erfüllt.

4 Punkte

Aufgabe 8 (4 Punkte) Zur Berechnung der Lösung $x^* \in [0.5, 0.6]$ der Gleichung $x + \ln x = 0$ werden folgende Fixpunkt-Iterationen vorgeschlagen:

a) $x^{(n+1)} = -\ln x^{(n)}$,

b) $x^{(n+1)} = e^{-x^{(n)}}$,

c) $x^{(n+1)} = \frac{1}{2}(x^{(n)} + e^{-x^{(n)}})$,

mit $x^{(0)} \in [0.5, 0.6]$. Welche dieser Iterationen kann man verwenden? Welche ist die beste und warum?