AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

28. Januar 2022

Modulformen 1 – Übungsblatt 12

Wintersemester 2021/22

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Im Hinblick auf die spätere Untersuchung der Wirkung von Hecke-Operatoren auf Perioden haben Sie **Kettenbrüche** kennengelernt. Unter Verwendung der Notationen aus dem Kettenbruchalgorithmus möchten wir hier ein Resultat aus der Vorlesung nachweisen. Sei also $x \in \mathbb{R}$ beliebig und $m \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie per Induktion über m: Gilt $t_m \neq 0$, so ist $x = [a_0, \cdots, a_m, \xi_m]$.

(b) Folgern Sie: Gilt $t_m = 0$, so ist $x = [a_0, \cdots, a_m]$ (insbesondere ist $a_m > 1$ für $m \neq 0$).

(c) Nutzen Sie Ihre Erkenntnisse und beweisen Sie Satz 6.9(b).

Aufgabe 2 (6 Punkte)

In dieser Aufgabe untersuchen wir eine alternative Herangehensweise an den Beweis von Lemma 6.11 aus der Vorlesung. Diese nutzt keine Aussagen über Kettenbrüche und basiert stattdessen auf **benachbarten Elementen**, die wir wie folgt definieren:

Definition: [benachbarte Elemente]:
Zwei irreduzible Elemente $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ heißen benachbart, kurz $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$, wenn $ad - bc = \pm 1$ gilt.

In diesem Zusammenhang setzt man $\frac{1}{0} =: \infty$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $\frac{a_1}{b_1} \sim \frac{a_2}{b_2} \sim \cdots \sim \frac{a_n}{b_n} \sim \frac{a_1}{b_1}$ eine Schleife paarweise verschiedener, jeweils benachbarter Spitzen mit $n \in \mathbb{N}$, so gibt es stets noch eine weitere Nachbarschaftsbeziehung $\frac{a_i}{b_i} \sim \frac{a_j}{b_j}$ für $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ mit $i - j \not\equiv \pm 1 \bmod (n)$.

(b) Zu je zwei Spitzen $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gibt es endlich viele Spitzen q_i, sodass

$$\frac{a}{b} \sim q_1 \sim \cdots \sim q_j \sim \frac{c}{d}\,.$$

Hinweis zu (a): Nehmen Sie Œ an, dass $\frac{a_1}{b_1} = \infty$ ist.
Hinweis zu (b): Es reicht zu zeigen, dass man jedes $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ über benachbarte Spitzen mit ∞ verbinden kann. Unterscheiden Sie dann zwischen $a = 0$ und $a \neq 0$.

Als Querverbindung zwischen Modulformen und der analytischen Zahlentheorie dienen L-Funktionen und **Dirichlet-Reihen** (nach Johann Peter Gustav Lejeune DIRICHLET), deren Stellenwert wir in der bisherigen Vorlesung unberücksichtigt ließen. Im Rahmen einer Aufgabenserie wird beginnend mit dem zehnten Übungszettel jeweils eine Aufgabe, die weiterhin regulär in die Punktevergabe eingeht und somit nicht als Bonusaufgabe deklariert ist, diese Materie studieren.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie eine der folgenden beiden Identitäten für $\mathrm{Re}(s) > k+1$:

$$\zeta(2s+2-2k) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2}(f) n^{-s} = \prod_{p \text{ prim}} \left(1 - a_{p^2}(f) p^{-s} + a_{p^2}(f) p^{k-1-2s} - p^{3k-3-3s}\right)^{-1} .$$

$$\zeta(s+1-k) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2}(f) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f))^2 \, n^{-s} .$$

(b) Bestimmen Sie für gerades $k \geq 4$ die zur Eisensteinreihe E_k zugeordnete Dirichlet-Reihe.

Abgabe: online über MaMpf bis Freitag, den 4. Februar 2022, spätestens um 12 Uhr s. t.