Namen: ______________________

____

Aufgabe	1.1	1.2	1.3	Z1.1	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 1

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 1.1 (Maßerweiterung) **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir definieren

$$\mathcal{A}_\mu := \{A \subset X : \text{Es existiert } B \in \mathcal{A} \text{ und eine } \mu-\text{Nullmenge } C \in \mathcal{A} : A \triangle B \subset C\}. \tag{1.1}$$

Weiterhin definieren wir $\bar{\mu}\colon \mathcal{A}_\mu \longrightarrow [0, \infty]$ durch

$$\bar{\mu}(A) = \mu(B), \qquad \text{mit } A \triangle B \subset C \text{ aus (1.1).} \tag{1.2}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_\mu$ eine σ–Algebra auf X ist, und dass $\bar{\mu}$ ein Maß ist.

Tipp: Um die Wohldefiniertheit von $\bar{\mu}$ zu zeigen, betrachten Sie zu zwei Zerlegungen $A \triangle B \subset C$ und $A \triangle B' \subset C'$ die Menge $B \triangle B'$ und nutzen Sie die algebraischen Eigenschaften der symmetrischen Differenz.

Aufgabe 1.2 (Maßproblem) **5 Punkte**

Sei $X := [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass kein Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu\colon \mathscr{P}(X) \longrightarrow \{0, 1\}$ existiert, so dass $\nu(A) = 0$ für alle endlichen Mengen $A \subset X$.

b) Wir definieren

$$\mathcal{A} := \{A \subset X : A \text{ ist höchstens abzählbar, oder } A^c \text{ ist höchstens abzählbar}\}. \tag{2.1}$$

Weiterhin definieren wir die Abbildung $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ höchstens abzählbar ist,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ–Algebra ist, und dass μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.

c) Wieso widerspricht b) nicht a)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Tipp: Zu a): Nutzen Sie die Intervallschachtelung.

Aufgabe 1.3 (π- und Dynkinsystem) **5 Punkte**

Sei X eine Menge und sei $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(X)$ ein Dynkinsystem, d.h.

- $\emptyset, X \in \mathscr{D}$,
- $A \in \mathscr{D} \Longrightarrow A^c \in \mathscr{D}$,
- $A_i \in \mathscr{D}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathscr{D}$.

Sei weiterhin $\mathscr{K} \subset \mathscr{D}$ ein π-System, d.h. $\mathscr{K} \neq \emptyset$ und $A \cap B \in \mathscr{K}$ für alle $A, B \in \mathscr{K}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{D}$ eine σ–Algebra ist, falls $\mathscr{D}$ zusätzlich ein π–System ist.

Abgabe bis spätestens 12.11.2020, 14:00 Uhr in Moodle.

b) Sei $\mathscr{D}_0 \subset \mathscr{P}(X)$ das kleinste Dynkin–System, welches $\mathscr{K}$ enthält, d.h.

$$\mathscr{D}_0 := \bigcap \{\mathscr{F} : \mathscr{K} \subset \mathscr{F},\ \mathscr{F} \text{ ist ein Dynkin–System.}\} \tag{3.1}$$

Zu $D \in \mathscr{D}_0$ definieren wir die Menge

$$\mathscr{H}(D) := \{F \in \mathscr{D}_0 : F \cap D \in \mathscr{D}_0\}. \tag{3.2}$$

Zeigen Sie, dass $\mathscr{H}(D)$ ein Dynkin–System ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathscr{H}(D) = \mathscr{D}_0$ für alle $D \in \mathscr{D}_0$.

d) Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathscr{K}) \subset \mathscr{D}$.

Tipp: Zu c): Betrachten Sie zuerst $\mathscr{H}(K)$ für $K \in \mathscr{K}$ und schließen Sie daraus, dass $\mathscr{K} \subset \mathscr{H}(D)$ für alle $D \in \mathscr{D}_0$.

Zusatzufgabe 1.1 (Liminf und Limsup für Mengen) **3 Punkte**

Sei X eine Menge und sei $A_k \subset X$ eine Folge.

a) Zeigen Sie, dass

$$A_* := \liminf_{k\to\infty} A_k = \{x \in X : x \in A_k \text{ für alle bis auf endlich viele } k \in \mathbb{N}\}, \tag{4.1}$$

$$A^* := \limsup_{k\to\infty} A_k = \{x \in X : x \in A_k \text{ für unendlich viele } k \in \mathbb{N}\}. \tag{4.2}$$

b) Sei $A \subset X$ eine Menge. Wir definieren die charakteristische Funktion (oder Indikatorfunktion)

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.3}$$

Zeigen Sie, dass

$$\chi_{A_*} = \liminf_{k\to\infty} \chi_{A_k}, \qquad \chi_{A^*} = \limsup_{k\to\infty} \chi_{A_k}. \tag{4.4}$$

c) Sei $X = [0,1)$. Zerlegen Sie das Intervall $[0,1)$ nacheinander in $m = 1,2,3\ldots$ gleich lange Intervalle $[\frac{n-1}{m}, \frac{n}{m})$ für $1 \le n \le m$ und nummerieren Sie die enstandenden Intervalle A_k fortlaufend durch, so dass

$$A_1 = [0,1), \qquad A_2 = [0,\tfrac{1}{2}), \qquad A_3 = [\tfrac{1}{2},1), \tag{4.5}$$

$$A_4 = [0,\tfrac{1}{3}), \qquad A_5 = [\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}), \qquad \ldots \tag{4.6}$$

Bestimmen Sie A_* und A^*. Begründen Sie Ihre Antwort.