Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 5

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 11. Dezember

Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Darauf operiert die Modulgruppe $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ durch Möbius-Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \langle \tau \rangle = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \ .$$

Der abgeschlossene Fundamentalbereich ist $\overline{\mathcal{F}} = \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1 \ , \ |\mathrm{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2}\}$. Die besten vier Aufgaben werden gewertet.

19. Aufgabe: (2+4 = 6 Punkte) Sei $f \in [\Gamma, k]$ eine holomorphe elliptische Modulform vom Gewicht k. Wir nehmen an, dass f keine Nullstelle hat in $S^1 \cap \overline{\mathcal{F}}$ außer eventuell in $\rho = \exp(\pi i/3)$ und $\rho^2 = \rho - 1$. Sei $\epsilon > 0$ klein genug, sodass f auf der Kreisscheibe $D_{0,\epsilon}(\rho)$ um ρ keine Nullstelle hat. Wir definieren eine nicht-geschlossene Kurve γ wie folgt:
Sei $B = \rho^2 + i\epsilon \in \mathbb{H}$ und $B' = B + 1 = \rho + i\epsilon \in \mathbb{H}$. Sei $C \in \mathbb{H}$ der eindeutige Punkt mit $|C| = 1$ und $|C - \rho^2| = \epsilon$ auf dem Rand des Fundamentalbereichs und sei $C' = -\overline{C'}$. Sei γ ein stückweise glatter Weg von B nach B' wie folgt: Zunächst von B im Uhrzeigersinn entlang des Kreisbogens um ρ^2 vom Radius ϵ nach C, dann von C im Uhrzeigersinn entlang des Einheitskreises nach C' und dann von C' im Uhrzeigersinn entlang des Kreisbogen um ρ vom Radius ϵ nach B'. [Vergleiche Abbildung 1, wobei wir $D = D' = i$ setzen.] Zeigen Sie:

(a) Das Integral $I_\epsilon = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z) \mathrm{d}\, z}{f(z)}$ ist unabhängig von ϵ für hinreichend kleine ϵ.

(b) Das Integral ist gleich $I_\epsilon = \frac{k}{12} - \frac{1}{3} \mathrm{ord}_\rho(f)$.

Hinweis zu (b): Finden Sie eine Matrix $M \in \Gamma$ mit $M \langle \rho^2 \rangle = \rho^2$ und $M \langle C \rangle = C' - 1$. Zerlegen Sie das Pol- und Nullstellenzählende Integral um ρ^2 in drei Teile entlang C, $C' - 1$ und $M^2 \langle C \rangle$. Betrachten Sie $\epsilon \to 0$ für das Integral von C nach C'.

20. Aufgabe: (4 Punkte) Seien $f \in [\Gamma, k_1]$ und $g \in [\Gamma, k_2]$ Modulformen vom Gewicht k_1 bzw. k_2. Zeigen Sie: $h = f'g - fg'$ ist eine Modulform vom Gewicht $k_1 + k_2 + 2$.

21. Aufgabe: (4 Punkte) Für natürliche Zahlen $k \in \mathbb{N}_0$ seien $F_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ meromorphe Funktionen mit $F_k(M \langle \tau \rangle) = (c\tau + d)^k F_k(\tau)$ für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Zeigen Sie für $N \in \mathbb{N}_0$ die Aussage:

Wenn $\sum_{k=0}^N F_k \equiv 0$ dann $F_k \equiv 0$ für alle $0 \leq k \leq N$.

Hinweis: Betrachten Sie $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & n \end{smallmatrix}\right)$ für $n \in \mathbb{Z}$.

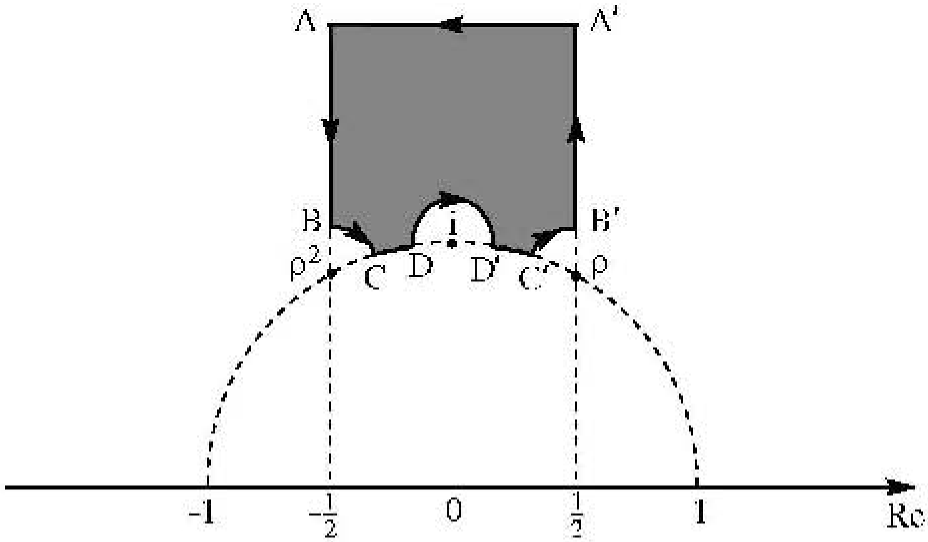

Abbildung 1: Entnommen aus Busam und Freitag: *Funktionentheorie*, Springer (1993).

22. Aufgabe: (1+3 = 4 Punkte) Sei $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ ein Polynom in zwei Variablen sodass gilt $P(G_4, G_6) \equiv 0$ für die Eisensteinreihen $G_k : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$. Wir bezeichnen die Koeffizienten von P mit $c_{a,b}$, also $P(X,Y) = \sum_{a,b\in\mathbb{N}_0} c_{a,b} X^a Y^b$. Zeigen Sie:

(a) $\sum_{4a+6b=2k} c_{a,b} G_4^a G_6^b \equiv 0$ für alle ganzen k. Hinweis: Aufgabe 21.

(b) Folgern Sie $c_{a,b} = 0$ für alle a, b indem Sie die bekannten Nullstellen von G_4 und G_6 ausnutzen. Hinweis: Aufgabe 12.

23. Aufgabe: (2+1+1=4 Punkte) Seien a und b ganze Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine ganze Zahl $g \in \mathbb{Z}$ mit $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = g\mathbb{Z}$ und diese ist eindeutig bis auf das Vorzeichen.

Wir schreiben dann $\mathrm{ggT}(a,b) := g$ für positives g. Entsprechend definieren wir für ganzzahlige a, b, c den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a,b,c)$ als die positive ganze Zahl g mit $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} + c\mathbb{Z} = g\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(b) $\mathrm{ggT}(a,b,c) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a,b),c)$,

(c) Für gegebene ganze Zahlen a, b gibt es genau dann ganze c, d mit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ wenn $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$.

Hinweis zu (a): Euklidischer Algorithmus.