Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 06 8. Juni 2020

Abgabe bis Fr. 05.06.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei: *Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf*. Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf*. Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.
- Die Aufgaben 6.1 und 6.3 sind wieder aus dem Buch von Prof. Rannacher entnommen, in dem Ihr auch die Lösungen findet. Damit wollen wir für diejenigen, die die Nachklausur in Analysis 1 schreiben müssen, den Zeitaufwand für das Übungsblatt reduzieren. Wir raten Euch allen, insbesondere wenn Ihr gerade keine Nachklausur habt, die Aufgaben erst so zu probieren. Die Aufgabe 6.2 (b) stammt ebenfalls aus dem Buch von Prof. Rannacher, aber Achtung, die Lösung dort enthält, Tippfehler, eine unzureichend begründete Abschätzung und lässt dabei einen wichtige Tatsache aus. Bei dieser Aufgabe ist also dennoch Eigenarbeit gefragt.
- Da es leider keine koordinierte Study-Week gibt, die Zeit für die Vorbereitung für die Nachklausur in Analysis 1 geben würde, werden wir nächste Woche nur eine Vorlesung hochladen und vor allem habt Ihr für dieses Übungsblatt 2 Wochen Zeit, wie Ihr am Abgabedatum seht. Nächste Woche wird dementsprechend auch kein Übungsblatt veröffentlicht und die Gesamtanzahl der Übungsblätter somit reduziert. (Die Zentralübung findet sowohl am 04.06. als auch am 11.06. statt, die Tutorien entfallen in der Woche vom 08.06 - 12.06.!)

Themen:

- Zusammenhang
- Stetige Funktionen
- Gleichmäßige Stetigkeit
- Eigenschaften stetiger Funktionen

Aufgabe 6.1 (4 Punkte): Zusammenhang

Man untersuche, ob die folgenden Mengen im normierten Raum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ zusammenhängend sind.

(a) $M := \partial\left(K_1(0)\backslash\{0\}\right),$ $\boxed{1}$

(b) $M := \overline{K_1(0) \cap K_1((2,0)^{\mathrm{T}})},$ $\boxed{1}$

(c) $M := \bigcup\limits_{a\in\mathbb{Z}^2\subset\mathbb{R}^2} \overline{K_{\frac{1}{2}}(a)},$ $\boxed{1}$

(d) $M := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle| x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 = \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)\right\} \cup \{(0,0)^{\mathrm{T}}\}.$ $\boxed{1}$

Lösungsvorschlag:

(a) Wir haben $\partial M = S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$. Diese Randmenge ist nicht zusammenhängend, da $\{(0,0)\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < \frac{1}{2}\} \cap \partial M$ und $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < \|x\|_2 < \frac{3}{2}\}$ jeweils offen in ∂M sind (d.h. bezüglich der relativen Topologie dieser Teilmenge des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^2$).

(b) Es ist $M = \bar{\emptyset} = \emptyset$ (die leere Menge ist bezüglich jeder Topologie offen und abgeschlossen, man kann auch abgeschloffen sagen (wirklich)), damit ist M nach Definition zusammenhängend.

(c) Je zwei benachbarte Punkte a, b des Gitters $\mathbb{Z}^2$ haben Abstand 1 und die abgeschlossenen Kreisscheiben von Radius $\frac{1}{2}$ um diese Punkte schneiden sich damit in genau einem Punkt. Dann kann es keine offene disjunkte Zerlegung in nichtleere Mengen geben, denn jeder dieser Schnittpunkte müsste in genau einer offenen Menge liegen, die dann aber auch Punkte in einer kleinen Umgebung um diesen Punkt enthält die wiederum nicht in M enthalten sind.

(d) Das ist der sogenannte *topologist's sine* (s. auch Wikipedia), ein Beispiel für eine zusammenhängende Menge, die nicht wegzusammenhängend ist. Die linke Menge ist als Graph der stetigen Funktion $f(x) = sin(\frac{1}{x})$ auf der zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}_+$ zusammenhängend und bleibt zusammenhängend beim Hinzufügen des Ursprungs, weil dieser ein Häufungspunkt der linken Menge ist (Grenzwert für $x \mapsto \infty$).

Aufgabe 6.2 (7 Punkte + 2 Bonuspunkt(e)): Stetigkeitsuntersuchungen

(a) Man untersuche jeweils, ob die folgenden Funktionen $f_k : \mathbb{R}^3 \backslash M \to \mathbb{R}$ wobei $M := \left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \middle| x = y = 0,\ z \in \mathbb{R}\right\}$ im Ursprung $(x,y,z)^{\mathrm{T}} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ stetig fortsetzbar sind, d. h. man untersuche, ob man einen Wert $f_k(0,0,0) \in \mathbb{R}$ so wählen kann, dass die dadurch fortgesetzte Funktion $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ stetig ist.

(i) $f_1(x,y,z) := \dfrac{xz^2 + y^3}{x^2 + y^2}$, 2

(ii) $f_2(x,y,z) := \dfrac{xyz + xy^2}{x^2 + y^2}$. 2

Bonusaufgabe: Ursprünglich war in der Aufgabenstellung fälschlicherweise angegeben, dass $f_k : \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)^{\mathrm{T}}\} \to \mathbb{R}$ wäre. Die Frage ist, ob f_k tatsächlich für $(x,y,z)^{\mathrm{T}} \in M \backslash \{(0,0,0)^{\mathrm{T}}\}$ nicht stetig fortgesetzt werden kann. Man untersuche als Bonusaufgabe daher, ob f_k sich jeweils in $(0,0,z)^{\mathrm{T}},\ z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig fortsetzen lässt.

2

(b) Der Produktraum $P := \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ sei mit der Norm

$$\|\{x,y\}\|_{\mathrm{P}} := \left(\|x\|_{\mathrm{K}}^2 + \|y\|_{\mathrm{K}}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

versehen, wobei $\|\cdot\|_{\mathrm{K}}$ wiederum eine Norm auf $\mathbb{K}^n$ ist. Man zeige, dass jedes Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{K}}$ auf $\mathbb{K}^n$, das

$$(x,x)_{\mathrm{K}} = \|x\|_{\mathrm{K}}^2$$

erfüllt, durch

$$f(x,y) := (x,y)_{\mathrm{K}}$$

eine stetige Funktion $f : P \to \mathbb{R}$ darstellt. $\boxed{3}$

Bemerkung: Man kann sich gut die euklidische Norm und das euklidische Skalarprodukt vorstellen, führe den Beweis aber für beliebige Normen und Skalarprodukte, die die angegebenen Eigenschaften erfüllen.

Lösungsvorschlag:

(a) (i) Wähle eine Folge mit $y_k = 0$, $z_k = x_k^{\frac{1}{3}}$ mit $x_k \to 0$ und $x_k \neq 0$, dann haben wir $f_1(x_k, y_k, z_k) \to \infty$ für $k \mapsto \infty$, d.h. die Funktion ist nicht stetig fortsetzbar.

(ii) Wegem $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ gilt die Abschätzung

$$|f_2(x,y,z)| = |\frac{xyz + xy^2}{x^2+y^2}| \leq \frac{|z|}{2} + |x|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |z| + |x|$$

und letzteres geht offenbar gegen 0, wenn $(x_k, y_k, z_k) \to (0,0,0)$. Damit ist durch $f_2(0,0,0) = 0$ eine stetige Fortsetzung gegeben.

Bonus (i) Sei nun $z \in \mathbb{R} - \{0\}$ beliebig, wähle $y_k = 0$ und $x_k \neq 0$ für alle k, so dass $x_k \to 0$, dann ist $f_1(x_k, y_k, z_k = z) = \frac{x_k z_k^2}{x_k^2} = z^2 \frac{1}{x_k^2} \to \infty$, also lässt f_1 sich auch nicht stetig auf M fortsetzen.

Bonus (ii) Wähle hier wieder $z \in \mathbb{R} - \{0\}$, $z_k = z$ für alle k und $x_k = y_k \neq 0$ mit $x_k \to 0$, dann sehen wir $f_2(x_k, y_k, z_k) = \frac{z}{2}$.
Setzen wir andererseits $y_k = \sqrt[2]{x_k}$ mit $x_k > 0$ für alle k, x_k wieder Nullfolge, dann haben wir $f_2(x_k, y_k, z_k) \to 0$. Weil $z \neq 0$ zeigt das, dass f_2 keine stetige Fortsetzung haben kann.

(b) Wir betrachten $\{x', y'\} \to \{x, y\} \in P$ und zeigen, dass dann $(x', y')_K \to (x, y)_K$.
$\{x', y'\} \to \{x, y\} \in P$ bedeutet, dass $\|\{x', y'\} - \{x, y\}\|_P = \|\{x' - x, y' - y\}\|_P = \|x - x'\|_K + \|y - y'\|_K \to 0$, d.h. $\|y - y'\|_K \to 0$ und $\|x - x'\|_K \to 0$.
Nun gilt

$$\begin{aligned} |(x,y)_K - (x',y')_K| &= |(x - x', y)_K + (x' - x, y - y')_K + (x, y - y')_K| \\ &\leq |(x - x', y)_K| + |(x' - x, y - y')_K| + |(x, y - y')_K| \\ &\overset{\text{CSU}}{\leq} \|x - x'\|_K \|y\|_K + \|x - x'\|_K \|y - y'\|_K + \|x\|_K \|y - y'\|_K \end{aligned}$$

Für $\|x - x'\|_K, \|y - y'\|_K \to 0$ folgt also $|(x,y)_K - (x',y')_K| \to 0$ und das war gerade zu zeigen!

Aufgabe 6.3 (6 Punkte): Anwendung stetiger Funktionen

(a) Die Oberfläche der Erdkugel sei als Kugelsphäre

$$\partial K_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \|x\|_2 = R\}$$

angenommen und die momentane Oberflächentemperatur $T(x)$ als stetige Funktion

$$T : \partial K_R(0) \to \mathbb{R}.$$

Man zeige, dass es dann zwei gegenüberliegende Punkte $x,\ -x \in \partial K_R(0)$ gibt mit der Eigenschaft

$$T(x) = T(-x).$$

4

(b) Seien $f, g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Für $x \in \mathbb{K}^n$ werde

$$\varphi(x) := \max\left(f(x), g(x)\right)$$

definiert. Man zeige, dass die so definierte Funktion $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist. 2

Tipp: Man überlege sich zunächst, wie man das Maximum zweier Skalare ohne den max-*Operator darstellen bzw. auch berechnen kann.*

Lösungsvorschlag:

(a) Die Menge $\partial K_R(0)$ ist zusammenhängend. Mit $x \in \partial K_R(0)$ ist wegen $\|-x\|_2 = \|x\|_2 = R$ auch $-x \in \partial K_R(0)$, also ist die Funktion $f(x) = T(x) - T(-x)$ wohldefiniert auf dieser Menge. f ist zudem stetig und nimmt Maximum und Minimum an, da die Kugeloberfläche kompakt ist.
Weil wir $f(x) = -f(-x)$ gilt ,ist dann entweder

$$\max_{x \in \partial K_R(0)} f(x) = \min_{x \in \partial K_R(0)} f(x) = 0$$

oder

$$\min_{x \in \partial K_R(0)} f(x) < 0 < \max_{x \in \partial K_R(0)} f(x)$$

Im ersten Fall gilt die Behauptung trivialerweise und im zweiten folt sie dann aus dem Zwischenwertsatz, der hier die Existenz einer Nullstelle von f garantiert.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Ist $x \geq y$, dann ist $\max(x, y) = x = y + |x - y|$, analog ist $\max(x, y) = y = x + |y - x|$ für $y \geq x$. Wegen $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ folgt daraus

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

Dann ist φ als Kompositum stetiger Funtionen stetig denn sowohl die Summe, als auch der Betrag und f und g sind stetig.

Aufgabe 6.4 (3 Punkte): Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen

Sei $f : \mathbb{K}^n \to D \subset \mathbb{K}^n$ beliebig und $g : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ stetig und injektiv, wobei D kompakt ist. Man zeige, dass f stetig ist, falls $g \circ f$ stetig ist und dass f sogar gleichmäßig stetig ist, falls $g \circ f$ gleichmäßig stetig ist.

Tipp: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Komposition gleichmäßig stetiger Funktionen gleichmäßig stetig ist.

Lösungsvorschlag:
Nach de Lemma von Tikhonov (3.2.2) ist die Funktion $g^{-1} : g(D) \to D$ stetig. Ferner ist $g(D)$ als stetiges Bild eines Kompaktum selbst kompakt und somit g^{-1} auf $g(D)$ gleichmäßig stetig. Dann folgt

(a) $g \circ f$ stetig $\implies$ $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ stetig.

(b) $g \circ f$ gleichmäßig stetig $\implies$ $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ gleichmäßig stetig.
