Zentrum für Astronomie der Universität Heidelberg & Institut für Theoretische Physik
Björn Malte Schäfer | Anja Butter
Theoretische Physik III: Elektrodynamik | Wintersemester 2020/2021

9. Übungsblatt

Ausgabe 19.01.2020 – Besprechung 25.01-28.01.2021

Verständnisfragen

- Wir betrachten einen Zug der Länge 200 m und einen Tunnel der Länge 100 m. Der Zug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf den Tunnel zu. Bei ausreichend hoher Geschwindigkeit erscheint der Zug im Ruhesystem des Tunnel auf 100m verkürzt, passt also gänzlich in den Tunnel. Aus dem Ruhesystem der Zugs heraus betracht ist der Tunnel jedoch verkürzt, sodass der erste Wagon den Tunnel schon passiert haben sollte, wenn das Ende noch nicht im Tunnel ist. Wie ist das möglich?
- Warum wiederspricht das Konzept eines starren Körpers der Relativitätstheorie?

1. Aufgabe:

Mit welcher Geschwindigkeit $\beta = v/c$ fliegt ein Raumschiff, dass einen Stern in einem Lichtjahr Entfernung in einem Jahr Reisezeit erreicht, wie sie von einer Uhr im Raumschiff angezeigt wird? Wieviel Zeit ist dann auf einer Uhr auf der Erde vergangen?
Hinweis: Überlegen Sie in welchem Bezugssystem Distanz und Zeit gemessen werden!

2. Aufgabe:

Zwei Raketen mit Länge L_0 fliegen jeweils mit halber Lichtgeschwindigkeit aufeinander zu. Wie lange erscheint eine Rakete im Bezugssystem der anderen?

3. Aufgabe:

Eine Rakete vervierfacht ihren Impuls $\hat{\boldsymbol{e}}_k p_f = 4\hat{\boldsymbol{e}}_k p_i$ wenn sie ihre Geschwindigkeit verdoppelt $\hat{\boldsymbol{e}}_k v_f = 2\hat{\boldsymbol{e}}_k v_i$. Was war ihre ursprüngliche Geschwindigkeit?

4. Aufgabe:

Nehmen Sie an die Erde ist ein Inertialsystem. Ein Raumschiff verlässt die Erde zur Zeit $t = 0$. Das Raumschiff ist so konstruiert, dass es eine konstante Beschleunigung von $g = 9.81$ m/s^2 hat um die Bedingungen auf der Erde zu simulieren. In der Zeit wie sie im Raumschiff gemessen wird, beschleunigt das Raumschiff auf einem geraden Kurs von der Erde weg für 1 Jahr, bremst dann für ein Jahr ab mit, wendet, beschleunigt wieder für ein Jahr und bremst schließ lich für ein Jahr ab bevor es wieder auf der Erde landet.

a) Wieviel Zeit ist auf der Erde seit dem Start des Raumschiffs vergangen, wenn das Raumschiff wieder auf der Erde landet?
Hinweis: Berechnen Sie zuerst die Rapidität $\psi(\tau)$, wobei τ die Eigenzeit im System des Raumschiffs ist.

b) Was ist die maximale Distanz, die das Raumschiff von der Erde entfernt ist?

5. Aufgabe:

Ein Lorentz Boost entlang der x-Achse kann geschrieben werden als

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Bilden Boosts entlang einer Achse eine Untergruppe der Lorentzgruppe?
Hinweis: Drücken Sie die Matrix (1) durch die Rapidität aus.

b) Der Feldstärketensor ist gegeben durch

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Zeigen Sie durch Anwendung eines Boosts entlang der x-Achse auf den Feldstärketensor (2), dass die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes transformieren wie

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x\,, & B'_x &= B_x\,, \\ E'_y &= \gamma(E_y - vB_z)\,, & B'_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z)\,, \\ E'_z &= \gamma(E_z + vB_y)\,, & B'_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y)\,. \end{aligned}$$

c) Eine Punktladung q sei in Ruhe in einem Inertialsystem S_1. Die zugehörigen elektrischen und magnetischen Felder sind dann gegeben durch

$$\hat{\boldsymbol{e}}_k E = \frac{q}{4\pi r^2}\,\hat{\boldsymbol{e}}_k \hat{e}_r = \frac{q}{4\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_k B = 0.$$

Bestimmen Sie das elektrische Feld $\hat{\boldsymbol{e}}_k E'$ und das magnetische Feld $\hat{\boldsymbol{e}}_k B'$ in einem Inertialsystem S_2, dass sich mit $\hat{\boldsymbol{e}}_k v = (v, 0, 0)$ gegenüber S_1 bewegt. Drücken Sie das Resultat in den Koordinaten des Systems S_2 aus.

d) Zeigen Sie, dass sich das Resultat für das elektrische Feld in Teilaufgabe c) für $t' = 0$ schreiben lässt als

$$\hat{\boldsymbol{e}}_k E' = \frac{1}{\gamma^2(1 - v^2 \sin^2\theta/c^2)^{3/2}}\,\frac{q}{4\pi r'^2}\hat{\boldsymbol{e}}_k \hat{e}_{r'}\,,$$

wobei θ den Winkel zwischen $\hat{\boldsymbol{e}}_k \hat{e}_{r'}$ und der x'-Achse bezeichnet und zeichnen Sie die Feldlinien für das elektrische Feld in S_1 uns S_2.

6. Aufgabe:

Für nichtrelativistische Systeme bilden Boosts $\hat{\boldsymbol{e}}_k x \to x + \hat{\boldsymbol{e}}_k vt$ eine Untergruppe aller Koordinatentransformationen (der Galilei-Gruppe). Zeigen Sie, dass Lorentz-Boosts entlang verschiedener Achsen keine Untergruppe der Lorentzgruppe bilden. Können Sie zeigen, dass sie im nicht-relativistische Limit $c \to \infty$ eine Gruppe bilden?
Hinweis: Eine Möglichkeit dies zu tun ist eine Rundreise zu betrachten, indem Sie das Ergebnis von vier Boosts betrachten: Entlang der x-Achse mit Rapidität ψ, entlang der y-Achse mit Rapidität ψ, entlang der x-Achse mit Rapidität $-\psi$, und schließlich entlang der y-Achse mit Rapidität $-\psi$, und dann betrachten, ob das Resultat durch einen Boost ausgedrückt werden kann.