AOR Dr. Hendrik Kasten
Mathematisches Institut

FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

17. Dezember 2021

Modulformen 1 – Übungsblatt 9

Wintersemester 2021/22

Hinweis: Neben 18 regulären Punkten sind auf diesem Zettel 12 weitere Bonuspunkte zu erreichen.

Aufgabe 1 (12 Punkte)

In dieser Aufgabe können Sie einige bisherige Vorlesungsinhalte wiederholen. Seien hierzu $f \in M_k$ und $g \in V_l$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Funktion $\tilde{f}(z) := f(2z) \cdot f\left(\frac{z}{2}\right) \cdot f\left(\frac{z+1}{2}\right)$ ist eine Modulform vom Gewicht $3k$.

(b) Für die Fourier-Koeffizienten von f gilt die Abschätzung $|a_n(f)| \leq Cn^{k-1}$ (nach E. Hecke).

(c) f ist genau dann eine Spitzenform, wenn es zu jedem $y_0 > 0$ positive Konstanten α und β gibt, sodass $|f(z)| \leq \alpha \cdot e^{-\beta y}$ für alle $z = x + iy \in \mathbb{H}$ mit $y \geq y_0$.

(d) Es gilt $j(i) = 1728$.

(e) Zu jedem g gibt es ein $\varphi \in \mathbb{C}(j)$, sodass das Produkt holomorph auf $\mathbb{H}$ ist.

(f) Für gerades l gilt $V_l = \mathbb{C}(j')^{l/2}$.

(g) Falls n eine gerade ganze Zahl ist, so ist $\tau(n)$ durch 8 teilbar.

(h) Es gilt $E_4E_6 = E_{10}$ sowie $11\sigma_9(n) = 21\sigma_5(n) - 10\sigma_3(n) + 5.040\sum_{m=1}^{n-1}\sigma_3(n)\sigma_5(n-m)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten der Spitzenform

$$(E_6 \cdot \Delta)(z) = q - 528q^2 - 4.284q^3 + \mathcal{O}(q^4) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S_{18}$$

die (schwache) Multiplikativitätseigenschaft $a_n a_m = a_{nm}$ für teilerfremde $n, m \in \mathbb{N}$ erfüllen.

(b) Zeigen Sie, dass durch die Spitzenformen

$$f(z) := (E_6^2 \cdot \Delta)(z) = q - 1.032q^2 + 245.196q^3 - 22.072.640q^4 + \mathcal{O}(q^5)\ ,$$
$$\tilde{f}(z) := \Delta^2(z) = q^2 - 48q^3 + 1.080q^4 + \mathcal{O}(q^5)$$

eine Basis $\mathfrak{B}$ des $\mathbb{C}$-Vektorraums S_{24} gegeben ist.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix des Hecke-Operators T_2 auf S_{24} bezüglich $\mathfrak{B}$.

Bonusaufgabe 3 (12 Bonuspunkte)

Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) q^n \in S_k$ eine normierte Hecke-Eigenform. Wir geben in dieser Aufgabe eine geometrische Beschreibung für die Folge von (reellen) Fourier-Koeffizienten $(a_{p^r}(f))_{r \in \mathbb{N}}$ mit p prim an und leiten daraus her, dass diese Folge unendlich viele positive wie negative Glieder enthält. Zeigen Sie also für eine fest gegebene Primzahl p die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $\theta_p \in [0, \pi]$ mit

$$a_p(f) = 2p^{\frac{k-1}{2}} \cos \theta_p \quad \text{und} \quad a_p(f) \neq 2p^{\frac{k-1}{2}} \text{ für alle } \theta_p \notin \{0, \pi\}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die (nichttriviale) Abschätzung $|a_p(f)|^2 \leq 4p^{k-1}$ benutzen, die P. DELIGNE 1974 als Nebenprodukt seines Beweises der WEIL-Vermutungen herleitete.

(b) Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_{p^r}(f) \\ da_{p^{r-1}}(f) \end{pmatrix} = A^{r-1} \cdot \begin{pmatrix} a_p(f) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } A := \begin{pmatrix} a_p(f) & -p^{k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

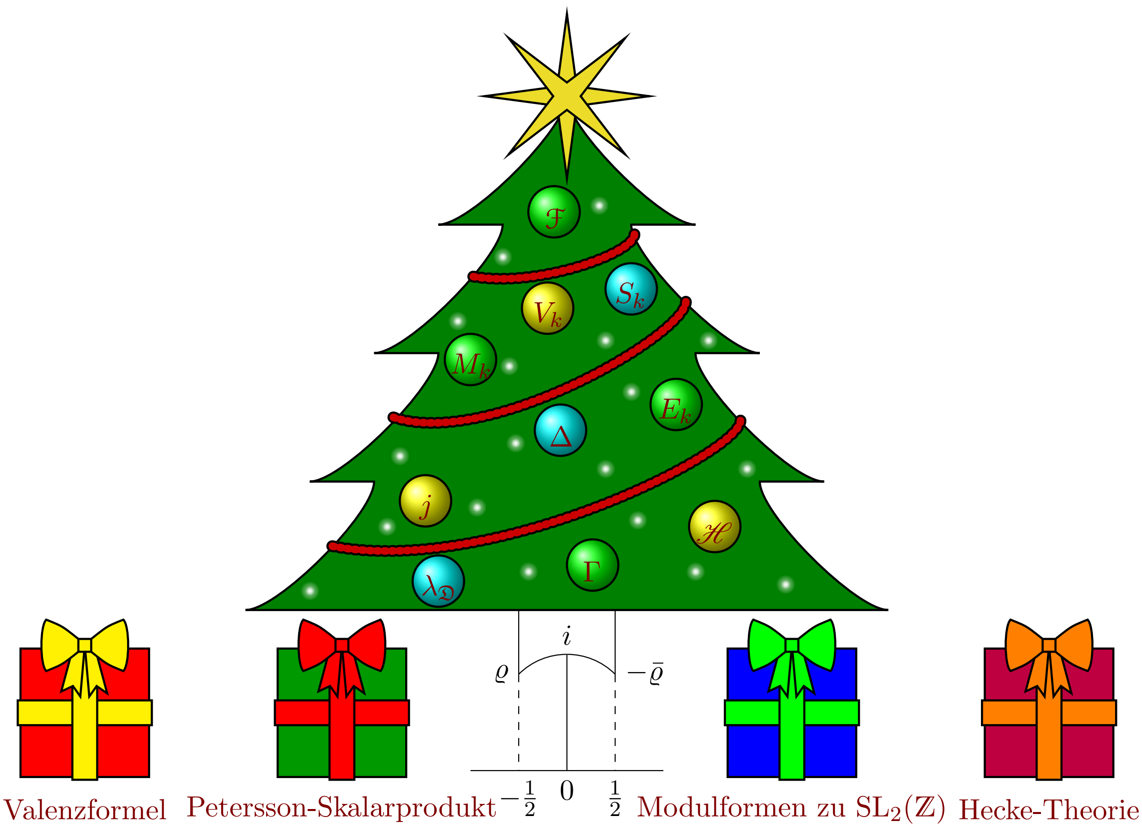
(c) Bringen Sie die Matrix A in Diagonalgestalt, um A^{r-1} auszurechnen. Für $\theta_p \notin \{0, \pi\}$ gilt dann

$$\begin{pmatrix} a_{p^r}(f) \\ a_{p^{r-1}}(f) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{r+1} - \lambda_2^{r+1} \\ \lambda_1^r - \lambda_2^r \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda_{1/2} := \frac{a_p(f) \pm \sqrt{a_p(f)^2 - 4p^{k-1}}}{2}.$$

(d) Drücken Sie $\lambda_{1/2}$ in Termen von θ_p aus. Dann gilt

$$a_{p^r}(f) = p^{r \cdot \frac{k-1}{2}} \frac{\sin\big((r+1) \cdot \theta_p\big)}{\sin \theta_p} \quad \text{für } \theta_p \notin \{0, \pi\} \text{ und alle } r \in \mathbb{N}.$$

(e) Für $\theta_p \notin 2\pi \cdot \mathbb{Q}$ enthält die Folge $(a_{p^r}(f))_{r \in \mathbb{N}}$ unendlich viele positive wie negative Glieder.



Abgabe: online über MaMpf bis Freitag, den 14. Januar 2022, spätestens um 12 Uhr s. t.