Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 4

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 4. Dezember

Die obere Halbebene ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Darauf operiert $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und insbesondere auch die Modulgruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ durch Möbius-Transformationen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \langle \tau \rangle = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \ .$$

Die besten vier Aufgaben werden gewertet.

14. Aufgabe: (2+2=4 Punkte, 2 Bonuspunkte) Für eine natürliche Zahl $N \geq 1$ definieren wir $\Gamma(N) = \{M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \mid M \equiv E_2 \pmod N\}$. Zeigen Sie:

(a) $\Gamma(N)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

(b) $\Gamma(N)$ ist ein Normalteiler in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

(c) (Bonusaufgabe) Der Quotient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Gamma(N)$ ist isomorph zur Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

15. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ der Fundamentalbereich wie in der Vorlesung definiert. Seien $\tau \in \mathcal{F}$ und $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in der Modulgruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sodass

$$\mathrm{Im}(M\langle \tau \rangle) \geq \mathrm{Im}(\tau) \ .$$

Zeigen Sie für die folgenden beiden Fälle

(a) $|c| = |d| = 1$,

(b) $|c| = 1$ und $d = 0$.

die Aussage: Falls $\tau' := M\langle \tau \rangle \in \mathcal{F}$, dann gilt $\tau' = \tau$. Bestimmen Sie jeweils M und τ.

16. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Zeigen Sie: Es gilt $M\langle z \rangle = z$ für exakt ein $z \in \mathbb{H}$ genau dann, wenn $|\mathrm{Spur}(M)| < 2$.

17. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl und $(\tau_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{H}$, deren Imaginärteil gegen Unendlich konvergiert. Dann gibt es ein $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ mit

$$\lim_{n\to\infty} M\tau_n = q \ .$$

Hinweis: Aus der elementaren Zahlentheorie können Sie benutzen: "Zwei ganze Zahlen a, b sind teilerfremd genau dann wenn es ganze Zahlen r, s gibt mit $ra + sb = 1$."

18. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $\wp_\Gamma$ die Weierstraß-$\wp$-Funktion zum Gitter $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$. Seien $e_1(\tau) = \wp_\Gamma(1/2)$ und $e_2(\tau) = \wp_\Gamma(\tau/2)$. Zeigen Sie:

$$\lim_{\tau\to\, i\infty} e_1(\tau) \neq \lim_{\tau\to\, i\infty} e_2(\tau)$$

.