Aufgabe 1

(a) Gilt $\mathrm{ggT}(d, \frac{n}{d}) = 1$, so erhalten wir nach dem chinesischen Restsatz $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\frac{n}{d}\mathbb{Z}$. Damit ist $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ direkter Summand in einem freien Modul ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul offensichtlich frei). Sei nun $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ projektiv. Die Folge

$$0 \to \mathbb{Z}/\frac{n}{d}\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to 0$$

ist exakt, da Multiplikation mit d injektiv ist, die kanonische Projektion $\pi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ trivialerweise surjektiv ist und $\mathrm{im}(\cdot d) = \ker \pi$ gilt. Ist nun $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ projektiv, so zerfällt diese Folge und es gilt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\frac{n}{d}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Nach dem chinesischen Restsatz ist das äquivalent zu $\mathrm{ggT}(d, \frac{n}{d}) = 1$. Ist n keine Primpotenz, so gilt $n = p^k \cdot d$ mit $\mathrm{ggT}(p^k, d) = 1$ für geeignete p, k, d. $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ist als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul nicht frei. Ein beliebiges einelementiges System (x) in $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ist linear abhängig wegen $d \cdot x = 0$. Somit existiert kein nichtleeres linear unabhängiges System und insbesondere keine Basis. Da (1) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist, handelt es sich bei $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ wegen $\mathrm{ggT}(d, p^k) = 1$ um einen endlich erzeugten und projektiven, aber nicht freien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul.

Sei $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$. Sei M ein endlich erzeugter, projektiver $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul. Via der kanonischen Projektion $\pi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ können wir M als $\mathbb{Z}$-Modul auffassen. M besitzt endlich viele Elemente, ist also als $\mathbb{Z}$-Modul endlich erzeugt und nach dem Hauptsatz über endlich erzeugt $\mathbb{Z}$-Moduln gilt

$$M \cong \mathbb{Z}^m \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$$

für Primpotenzen d_i. Da M nur endlich viele Elemente enthält, ist $m = 0$. Aus der Anzahl der Elemente können wir $d_1 \cdots d_k = n$ folgern, woraus $d_i = p_{\phi(i)}^{g_i}$ folgt für geeignet gewählte ϕ, g_i. Nach VL ist $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}/(p_{\phi(i)}^{g_i})\mathbb{Z}$ genau dann projektiv, wenn $\mathbb{Z}/p_{\phi(i)}^{g_i}\mathbb{Z}$ projektiv ist $\forall i$. Daraus folgt mit dem ersten Teil $\mathrm{ggT}(p_{\phi(i)}^{g_i}, \frac{n}{p_{\phi(i)}^{g_i}}) = 1$. Wegen $\frac{n}{p_{\phi(i)}^{g_i}} = p_1^{e_1} \cdots p_{\phi(i)}^{e_{\phi(i)} - g_i} \cdots p_r^{e_r}$ muss $g_i = e_{\phi(i)}$ gelten, da sonst $p_{\phi(i)} \,|\, \mathrm{ggT}(p_{\phi(i)}^{g_i}, \frac{n}{p_{\phi(i)}^{g_i}})$. Es gilt also

$$M = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/p_{\phi(i)}^{e_{\phi(i)}}\mathbb{Z}.$$

Identische Werte für $\phi(i)$ können wir zusammenfassen und erhalten

$$M = \bigoplus_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/p_i^{e_i})^{f_i}.$$

(b) Z.Z.: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Beweis. Wir betrachten die Abbildungen

$$\Phi\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),\ a \mapsto \phi_a := (\overline{x} \mapsto \frac{ax}{n})$$

und

$$\Psi\colon \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \phi \mapsto n \cdot \phi(1)$$

Ψ ist offensichtlich wohldefiniert. Wir müssen zeigen, dass $\phi_a \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ liegt. $\phi_a(\overline{x})$ ist unabhängig von der Wahl des Vertreters $x \in \mathbb{Z}$. Sei nämlich $\overline{x} = \overline{y}$, also $x - y \in n\mathbb{Z}$, so gilt

$$\phi_a(x) - \phi_a(y) = \frac{ax}{n} - \frac{ay}{n} = \frac{a(x-y)}{n}.$$

Da $x - y$ in $n\mathbb{Z}$ liegen, ist dies eine ganze Zahl und somit gleich 0 in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Weiter gilt

$$r\phi_a(\overline{x}) = r \cdot \frac{ax}{n} = \frac{a(rx)}{n} = \phi_a(\overline{rx}) = \phi_a(r\overline{x})$$

und

$$\phi_a(\overline{x}) + \phi_a(\overline{y}) = \frac{ax}{n} + \frac{ay}{n} = \frac{a(x+y)}{n} = \phi_a(\overline{x+y}) = \phi_a(\overline{x} + \overline{y}).$$

Es gilt $\forall x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \phi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$$[(\Phi \circ \Psi)(\phi)](x) = \Phi(n \cdot \phi(1))(x) = \phi_{n \cdot \phi(1)}(x) = \frac{n \cdot \phi(1)x}{n} = \phi(1) \cdot x = \phi(x)$$

und

$$(\Psi \circ \Phi)(x) = \Psi(\phi_x) = n \cdot \phi_x(1) = n \cdot \frac{x \cdot 1}{n} = x.$$

Es gilt für einen endlich erzeugten projektiven $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Modul

$$\begin{aligned} M &= (\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z})^{f_1} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/p_r^{e_r}\mathbb{Z})^{f_r} \oplus (\mathbb{Z}/\frac{n}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z})^{f_1} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/\frac{n}{p_r^{e_r}}\mathbb{Z})^{f_r} \\ &= (\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\frac{n}{p_1^{e_1}}\mathbb{Z})^{f_1} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/p_r^{e_r}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\frac{n}{p_r^{e_r}}\mathbb{Z})^{f_r} \end{aligned}$$

Nach dem chinesischen Restsatz folgt

$$\begin{aligned} &= (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{f_1} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{f_r} \\ &= (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\sum_{i=1}^r f_i} \end{aligned}$$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m$ ist kofrei, da $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ kofrei ist. Insbesondere ist also M direkter Faktor in einem kofreien Modul und damit injektiv. $\square$

Aufgabe 4

(a) Sei

$$\mathfrak{p} \in (\phi^*)^{-1}(D(f)).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \phi^*(\mathfrak{p}) \in D(f) \\
&\Longrightarrow \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \notin V(f) \\
&\Longrightarrow f \notin \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \\
&\Longrightarrow \phi(f) \notin \mathfrak{p} \\
&\Longrightarrow \mathfrak{p} \in D(\phi(f)).
\end{aligned}$$

Sei andererseits

$$\mathfrak{p} \in D(\phi(f)).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \phi(f) \notin \mathfrak{p} \\
&\Longrightarrow f \notin \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \\
&\Longrightarrow \phi^*(\mathfrak{p}) \notin V(f) \\
&\Longrightarrow \mathfrak{p} \in (\phi^*)^{-1}(D(f)).
\end{aligned}$$

(b) Sei

$$\mathfrak{p} \in (\phi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \phi^*(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a}) \\
&\Longrightarrow \mathfrak{a} \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \\
&\Longrightarrow \phi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p} \\
&\Longrightarrow B \cdot \phi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p} \\
&\Longrightarrow \mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{p} \\
&\Longrightarrow \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}^e).
\end{aligned}$$

Sei andererseits

$$\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}^e).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \mathfrak{a}^e \subset \mathfrak{p} \\
&\Longrightarrow B\phi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p} \\
&\Longrightarrow \phi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{p} \\
&\Longrightarrow \mathfrak{a} \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \\
&\Longrightarrow \phi^*(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a}) \\
&\Longrightarrow \mathfrak{p} \in (\phi^*)^{-1}(V(\mathfrak{a})).
\end{aligned}$$

(c) Es gilt nach vorhergegangen Aufgaben und VL

$$\begin{aligned}
\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} &= V(I(\phi^*(V(\mathfrak{b})))) \\
&= V\left(\bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{b})} \phi^*(\mathfrak{p})\right) \\
&= V\left(\bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} B\\ \mathfrak{b}\in\mathfrak{p}}} \phi^{-1}(\mathfrak{p})\right) \\
&= V\left(\phi^{-1}\left(\bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spec} B\\ \mathfrak{b}\in\mathfrak{p}}} \mathfrak{p}\right)\right) \\
&= V\left(\phi^{-1}(r(\mathfrak{b}))\right) \\
&= V\left(r(\mathfrak{b})^c\right) \\
&= V\left(r(\mathfrak{b}^c)\right) \\
&= V\left(\mathfrak{b}^c\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Projektive Moduln über einem Hauptidealring sind frei. Jeder freie A-Modul ist isomorph zu A^n für geeignetes n. Insbesondere ist durch $\{A, A^2, \dots\}$ ein Vertretersystem für $\operatorname{Proj}(A)^{\cong}$ gegeben,

$$\bigoplus_{[P]\in\operatorname{Proj}(A)^{\cong}} \mathbb{Z}\cdot[P] \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\cdot[A^i].$$

Die Rangabbildung $\operatorname{rg}\colon \operatorname{Proj}(A)^{\cong} \to \mathbb{Z},\ [P] \mapsto \operatorname{rg} P$ ist wohldefiniert, da isomorphe freie Moduln denselben Rang haben. Betrachte nun

$$f_i\colon \mathbb{Z}\cdot[A^i] \to \mathbb{Z},\ n\cdot[A^i] \mapsto n\cdot\operatorname{rg}[A^i] = n\cdot i.$$

Nach der universellen Eigenschaft der direkten Summe erhalten wir eine eindeutig bestimmte und offensichtlich surjektive Abbildung

$$f\colon K(A) \to \mathbb{Z}.$$

Sei $0 \to P' \to P \to P'' \to 0$ eine exakte Folge. Da P'' projektiv ist, können wir äquivalent fordern $P = P'\oplus P''$ oder weil alle drei Moduln frei sind $\operatorname{rg} P = \operatorname{rg} P' + \operatorname{rg} P''$. Für jeden Erzeuger $[P]-[P']-[P''] \in$ Exakt gilt daher $rgP - \operatorname{rg} P' - \operatorname{rg} P'' = 0$ und insbesondere $f([P]-[P']-[P'']) = F([P]) - f([P']) - f([P'']) = \operatorname{rg} P - \operatorname{rg} P' - \operatorname{rg} P'' = 0$, also Exakt $\subset \ker f$. Es gilt weiter $[A^i] + [A^j] - [A^{i+j}] \in$ Exakt wegen $\operatorname{rg} A^i + \operatorname{rg} A^j = i + j = \operatorname{rg} A^{i+j}$ und per vollständiger Induktion $n[A^i] - [A^{n\cdot i}] \in$ Exakt. Daraus erhalten wir auch

$$(n_1[A], n_2[A^2], \dots) - A^{\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot n_i} = \sum_{i=1}^{\infty} n_i[A^i] - A^{\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot n_i} \in \text{Exakt}\,.$$

Sei $(n_1[A], n_2[A^2], \dots) \in \ker f$. Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(n_i[A^i]) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot n_i.$$

Es gilt

$$(n_1[A], n_2[A^2], \dots) - A^{\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot n_i} = (n_1[A], n_2[A^2], \dots) - A^0 = (n_1[A], n_2[A^2], \dots) \in \text{Exakt}\,.$$

Wir haben also gezeigt, dass $\ker f = \text{Exakt}$. Mit dem Homomorphiesatz folgt

$$K(A) \cong \mathbb{Z}.$$