INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

Analysis I

WS 19/20

Blatt 08 - Vollständig - Update-Nr.1 13.12.2019

ARSnova-Code: 67 52 65 62

Abgabe bis Fr. 20.12.19, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)

Themen:

- Potenzreihen
- Stetige Funktionen
- Zwischenwertsatz
- Monotone Funktionen

Hinweise zur Bearbeitung:

- Es gibt verschiedene Arten von Unstetigkeiten, die wie folgt definiert werden:

Definition: *Arten von Unstetigkeiten*
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in D$ eine

(a) ***hebbare Unstetigkeit*** *(Unstetigkeitsstelle 0-ter Art), falls*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$$

existiert, aber $y_0 \neq f(x_0)$ gilt.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ *hat in $x_0 = 0$ eine hebbare Unstetigkeit.*

(b) ***Sprungunstetigkeit*** *(Unstetigkeitsstelle 1-ter Art), falls die einseitigen Grenzwerte*

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) \quad \textit{und} \quad \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$$

existieren, aber verschieden sind.

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$ *hat in $x_0 = 2$ eine Sprungunstetigkeit.*

(c) ***wesentliche Unstetigkeit*** *(Unstetigkeitsstelle 2-ter Art), falls einer der beiden einseitigen Grenzwerte nicht existiert.*

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1/x$ *hat in $x_0 = 0$ eine wesentliche Unstetigkeit, bzw. ist dort auch nicht wohldefiniert.*

Bei Aufgabe 8.4 ist zu zeigen, dass ausschließlich Sprungunstetigkeiten existieren und die Anzahl derer abzählbar ist. Zeigen Sie also zunächst, dass es keine hebbaren oder wesentlichen Unstetigkeiten geben kann. Beachten Sie, dass bei Sprungunstetigkeiten der Unterschied zwischen den beiden einseitigen Grenzwerten endlich ist.

- Für Aufgabe 8.4 brauchen Sie zudem die Definition von monotonen Funktionen, die Sie auch in der Vorlesung am 18.12.19 kennenlernen werden. Da die Aufgabe thematisch aber am besten auf das aktuelle Übungsblatt passt, haben wir beschlossen die Aufgabe diese Woche zu stellen und die Definition hier zu geben:

  Definition: *Monotone Funktion*
  Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt

$$\begin{Bmatrix} \textit{monoton wachsend} \\ \textit{streng monoton wachsend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{streng monoton fallend} \end{Bmatrix} \textit{ falls } \begin{Bmatrix} f(x) \le f(x') \\ f(x) < f(x') \\ f(x) \ge f(x') \\ f(x) > f(x') \end{Bmatrix} \textit{ für alle } x, x' \in D \textit{ mit } x < x'.$$

Aufgabe 8.1 (3 Punkte): Konvergenz von Potenzreihen

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und geben Sie an für welche $x \in \mathbb{R}$ daher die Potenzreihen auf jeden Fall (d. h. Sie müssen die Fälle $|x - x_0| = \rho$ nicht untersuchen) konvergieren.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}},$ 1

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n!}}{ne^n}(x+1)^n,$ 1

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{nx_0}(x - x_0)^{2n}$ mit $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. 1

Aufgabe 8.2 (10 Punkte): Stetigkeit von Funktionen

(a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := \min\{x, 1\}$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist. 2

(b) Bestimmen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^2 - 5x + 4}, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N} \\ 2x - 5, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist und für welche $x \in \mathbb{R}$ sie unstetig ist. 3

(c) Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) := \begin{cases} 1/s, & \text{für } x = r/s,\ r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},\ s \in \mathbb{N} \text{ (teilerfremd)} \\ 1, & \text{für } x = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ stetig und in allen Punkten $x \in \mathbb{Q}$ unstetig ist. 3

(d) Zeigen Sie: Gilt für zwei auf $\mathbb{R}$ stetige Funktionen f und g, dass $f(a) = g(a)$ für alle $a \in \mathbb{Q}$, so folgt bereits $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{2}$

Aufgabe 8.3 (2 Punkte): Zwischenwertsatz

Zeigen Sie, dass für $a < b$ besitzt die Gleichung

$$\frac{x^{42} + 42}{x - a} = -\frac{x^6 + 42}{x - b}$$

im Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mindestens eine Lösung hat.

Aufgabe 8.4 (5 Punkte): Monotone Funktionen

Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion. Beweisen Sie, dass f stetig ist bis auf abzählbar viele Sprungunstetigkeiten.

Tipp 1: Beachten Sie die Hinweise zur Bearbeitung.

Tipp 2: Um zu beweisen, dass es nur abzählbar viele Sprungunstetigkeiten gibt, zeigen Sie zunächst, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele $a \in]0, 1[$ geben kann mit

$$\left|f(a^+) - f(a^-)\right| := \left|\lim_{x \searrow a} f(x) - \lim_{x \nearrow a} f(x)\right| > 1/n.$$

und zeigen Sie anschließend, dass es eine Bijektion zwischen der Menge der Sprungunstetigkeiten und den natürlichen Zahlen gibt.