Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

11. Übungsblatt

Aufgabe 40 (Anwendung des SGGZ, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Ein Spieler startet mit dem Anfangskapital $K_0 = 1$. Bei jeder Runde setzt er sein gesamtes Kapital ein. Es wird eine faire Münze geworfen, bei *Kopf* erhält er den anderthalbfachen Einsatz zurück, bei *Zahl* nur den halben.

(a) Stellen Sie das Kapital nach der n-ten Runde als $K_n = \prod_{i=1}^{n} R_i$ mit geeigneten unabhängigen Zufallsvariablen R_i dar.

(b) Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist in dem Sinne, dass $\mathbb{E}(K_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass trotzdem $\lim_{n\to\infty} K_n = 0$ fast sicher gilt.
Hinweis*: Betrachten Sie* $\log(K_n)$.

Aufgabe 41 (Konvergenz in Verteilung, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen.

(a) Zeigen Sie: Das schwache Gesetz der großen Zahlen folgt aus dem Zentralen Grenzwertsatz!

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ besitze X_n die Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathbb{f}_n(x) = \frac{n+1}{2}|x|^n \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Existiert eine Zufallsvariable Z mit $X_n \xrightarrow{D} Z$?

(c) Entscheiden Sie jeweils, ob eine Zufallsvariable Z existiert mit $X_n \xrightarrow{D} Z$, indem Sie die Verteilungsfunktionen berechnen und deren Grenzwerte bestimmen:

- $X_n \sim \mathrm{U}_{[0,1+\frac{1}{n}]}$,
- $X_n \sim \mathrm{Exp}_n$,
- $X_n \sim \mathrm{Exp}_{1/n}$.

Aufgabe 42 (Charakteristische Funktionen, 4 = 1 + 2 + 1 Punkte).

(a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion φ_X einer auf dem Intervall $[a, b]$, $a < b$, gleichverteilten Zufallsvariable $X \sim \mathrm{U}_{[a,b]}$.

(b) Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Funktionen φ_Y, φ_Z zweier unabhängiger Zufallsvariablen Y, Z

$$\varphi_{Y+Z}(t) = \varphi_Y(t) \cdot \varphi_Z(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad \varphi_{-Y}(t) = \overline{\varphi_Y(t)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

gilt und folgern Sie:
Die Differenz zweier unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen kann **nicht** $U_{[-1,1]}$-verteilt sein.
Hinweis: *Es gilt* $\sin(t) = \frac{1}{2i}(\exp(it) - \exp(-it))$.

(c) Seien X_1, X_2 unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen. Es gelte: $X_1 + X_2$ hat dieselbe Verteilung wie X_1. Zeigen Sie, dass dann schon $X_1 = 0 = X_2$ fast sicher gilt.

Aufgabe 43 (ZGWS und empirische Vtlgsfunktion, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, ..., X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = \sigma^2$ und Verteilungsfunktion $\mathbb{F}$. Seien für $x \in \mathbb{R}$

$$\hat{\mathbb{F}}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$$

die empirische Verteilungsfunktion.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $n \cdot \hat{\mathbb{F}}_n(x)$ und geben Sie dann $\mathbb{E}(\hat{\mathbb{F}}_n(x))$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\hat{\mathbb{F}}_n(x))$ in Termen von n und $\mathbb{F}(x)$ an.

(b) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbb{F}}_n(x) \overset{\mathbb{P}-\text{f.s.}}{\longrightarrow} \mathbb{F}(x)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sqrt{n}\left(\hat{\mathbb{F}}_n(x) - \mathbb{F}(x)\right) \overset{D}{\to} N_{(0, \mathbb{F}(x)(1-\mathbb{F}(x))}$ gilt.

Aufgabe 44 (Asymptotische Konfidenzintervalle und Tests, 4 = 4 × 1 Punkte).

Sie haben eine Maschine, die bei Betätigung eines Knopfes eine (reelle) Zufallszahl X_i zwischen 0 und b ausgibt. Die Generierung der Zufallszahlen ist unabhängig voneinander und jede Zahl zwischen 0 und b ist *gleichwahrscheinlich*, d.h. $X_i \sim \mathrm{U}[0, b]$. Sie beobachten n Ergebnisse der Maschine, $X_1, \ldots, X_n$.

(a) Weisen Sie nach, dass $\hat{b}_n := 2\overline{X}_n$ für $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter b ist. Zeigen Sie, dass $\hat{b}_n$ folgendes erfüllt:

$$\sqrt{n}(\hat{b}_n - b) \overset{d}{\to} \mathrm{N}_{(0, b^2/3)}$$

(b) Leiten Sie ein asymptotisches $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall $C_n^{(b)}$ für b für die richtigen Parameter $\mathcal{R}_b = [b, \infty)$ her.

(c) Sie wollen testen:

$$H_0 : b = b_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : b > b_0$$

Zeigen Sie, dass ein Test zum asymptotischen Niveau α durch

$$\phi_n^{(b)}(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \hat{b}_n - \frac{\hat{b}_n}{\sqrt{3n}} q_{1-\alpha} > b_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

(d) Sie haben nun konkret $n = 10$ Realisierungen der Maschine in folgender Tabelle gegeben:

Beobachtung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Wert	42.09	64.91	24.61	42.38	42.08	46.67	31.92	54.96	59.16	99.98

Sie vermuten, dass $b_0 = 100$, sind sich aber nicht sicher, ob nicht $b > b_0$ ist. Berechnen Sie das Intervall aus (b) und das Testergebnis aus (c). Wie lautet schließlich Ihre Testentscheidung basierend auf den angegebenen Daten?

Hinweis: *Das 95%-Quantil der Standardnormalverteilung ist gegeben durch* $q_{0.95} = 1.64$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **15. Februar 2021, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`