Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Elementare Eigenschaften von σ-Algebren, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ Punkte).
Seien Ω und $\mathcal{X}$ nichtleere Mengen.

(a) Seien $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, (beliebig viele) σ-Algebren über Ω. Zeigen Sie, dass der Schnitt $\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$ wieder eine σ-Algebra über Ω ist.
*Bemerkung: Damit ist gezeigt, dass es sich bei der in Lemma 01.06. definierten **erzeugten σ-Algebra** tatsächlich um eine σ-Algebra handelt.*

(b) Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei σ-Algebren über Ω. Ist im Allgemeinen auch $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

(c) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $f : \mathcal{X} \longrightarrow \Omega$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$ wieder eine σ-Algebra (die sogenannte **Urbild-σ-Algebra**) über $\mathcal{X}$ ist.
Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das Urbild bzgl. Vereinigung und Komplement stabil ist, d.h. dass $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ und $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i)$ für Mengen $A, A_i \subseteq \Omega$, $i \in I$, gilt.

(d) Sei $T \subseteq \Omega$ eine nichtleere Teilmenge und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}\big|_T := \{A \cap T : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra (die sogenannte **Spur-σ-Algebra**, vgl. 01.23.) über T ist.
Hinweis: Anstelle eines direkten Beweises kann auch Aufgabenteil (c) mit geeignet gewähltem f verwendet werden.

Aufgabe 2 (Eigenschaften von W'maßen, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass für $A, B, A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt:

(a) **Monotonie:** $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(b) **Bonferroni-Ungleichung:** $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$ mit $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

(c) **Subadditivität:** $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

(d) **Stetigkeit des Maßes von unten:**
Gilt $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Hinweis für (c) und (d): Definieren Sie $B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)$, und drücken Sie $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ mittels der B_n aus. Nutzen Sie dann Eigenschaft (iii) eines Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Aufgabe 3 (Siebformel von Poincaré und Sylvester, 4 = 2 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. In dieser Aufgabe wollen wir eine Verallgemeinerung der Formel $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ $(*)$ beweisen und anwenden.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j-1} \cdot \sum_{\{k_1,...,k_j\} \subset \{1,...,n\}} \mathbb{P}(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_j}) \right).$$

Hierbei wird in der inneren Summe über alle möglichen, paarweise verschiedene, Indizes $k_1, ..., k_j$ summiert, sodass $\{k_1, ..., k_j\} \subseteq \{1, ..., n\}$.
Hinweis: Nutzen Sie vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ und $(*)$ im Induktionsschritt.

(b) Zu einer Tanzveranstaltung erscheinen n Paare bestehend aus je einem roten und grünen Marsmenschen. Zufällig wird jedem roten Marsmensch ein grüner Marsmensch zugelost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein ursprüngliches Paar miteinander tanzen wird? Berechnen Sie den Grenzwert dieser Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$!
Hinweis: Nutzen Sie (a) (definieren Sie also einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum) und wählen Sie für $i = 1, ..., n$: A_i = "Roter Marsmensch i tanzt mit der ursprünglichen Begleitung zusammen".

Aufgabe 4 (Eigenschaften von Verteilungsfunktionen, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).
Sei $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die zugehörige Verteilungsfunktion $\mathbb{F} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ ist durch $\mathbb{F}(x) := \mathbb{P}((-\infty, x])$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}$ folgende Eigenschaften besitzt:

(a) F ist monoton wachsend, d.h. für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow \mathbb{F}(x_1) \leq \mathbb{F}(x_2)$.

(b) $\lim_{x\to-\infty} \mathbb{F}(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} \mathbb{F}(x) = 1$.

(c) F ist rechtsseitig stetig, d.h. für jede monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n \downarrow x$ gilt $\mathbb{F}(x_n) \longrightarrow \mathbb{F}(x)$.

Es kann außerdem gezeigt werden, dass F linksseitig existierende Grenzwerte besitzt, d.h. für eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x_n \uparrow x$ gilt $\mathbb{F}(x_n) \longrightarrow \mathbb{P}(X < x)$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}$ höchstens abzählbar unendlich viele Sprungstellen besitzt.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **16. November 2020, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`