Aufgabe 7

(a) Sei $B \coloneqq \max_{z\in K} |z|$. Es gilt dann $\forall \gamma \in \Gamma$ mit $|\gamma| > 2B$ die folgende Ungleichung:

$$|\gamma - z| > |\gamma| - |z| > |\gamma| - B \geq \frac{1}{2}|\gamma|$$

Für $|\gamma| < 2B$ erhalten wir eine ähnliche Ungleichung. Dafür sei zunächst $b = \min_{z\in K, \gamma\in\Gamma} |z-\gamma|$. Dann gilt nämlich

$$|\gamma - z| \geq b = \frac{b}{2B}2B > \frac{b}{2B}|\gamma|$$

Insgesamt erhalten wir also $|\gamma - z| > \underbrace{\min\left(\frac{1}{2}, \frac{b}{2B}\right)}_{=:c} \cdot |\gamma|$. Damit können wir den gesamten Ausdruck abschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right| &= \left|\frac{\gamma^2 - (z-\gamma)^2}{(z-\gamma)^2\gamma^2}\right| \\
&= \left|\frac{-z^2 + 2z\gamma}{(z-\gamma)^2\gamma^2}\right| \\
&\leq \frac{|z^2|}{|(z-\gamma)^2\gamma^2|} + \frac{|2z|}{|(z-\gamma)^2\gamma|} \\
&\leq \frac{B^2}{c|z-\gamma||\gamma|^3} + \frac{2B}{c^2|\gamma|^3} \\
&\leq \frac{B^2}{cb|\gamma|^3} + \frac{2B}{c^2|\gamma|^3} \\
&= \left(\frac{B^2}{bc} + \frac{2B}{c^2}\right) \cdot |\gamma|^{-3}
\end{aligned}$$

(b) Um absolute, kompakte Konvergenz nachzuweisen, wählen wir ein beliebiges Kompaktum $K \subset \mathbb{C} \setminus \Gamma$ und betrachten die Reihe

$$|\left|\frac{1}{z^2}\right| + \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma} \left|\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right| \overset{(a)}{\leq} |\left|\frac{1}{z^2}\right| + C \cdot \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma} |\gamma|^{-3}$$

Die linke Reihe konvergiert absolut nach Aufgabe 1. Daher ist $p(z)$ meromorph auf $\mathbb{C}$ (analog zum Beweis von Mittag-Leffler).

(c) Nach dem Haupsatz von Weierstraß dürfen wir gliedweise ableiten. Daher erhalten wir

$$p'(z) = -2\frac{1}{z^3} - 2\sum_{0\neq\gamma\in\Gamma} \frac{1}{(z-\gamma)^3} = -2\sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{(z-\gamma)^3}.$$

Diese Reihe hat offensichtlich genau für alle $\gamma \in \Gamma$ eine dreifache Polstelle. Es gilt

$$p'(z+\gamma_0) = -2\sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{(z+\gamma_0-\gamma)^3}.$$

Da $\varphi\colon \Gamma \to \Gamma,\ \gamma_0 - \gamma \mapsto \gamma$ eine Bijektion ist, erhalten wir einfach nur eine Umsummation und es gilt $p'(z) = p'(z+\gamma_0) = p'(z)$ für ein beliebiges $\gamma_0 \in \Gamma$.

(d) Die Polstellenordnung von p' und $\wp'$ ist in jedem Punkt gleich, da beide genau eine dreifache Polstelle im Punkt 0 besitzen und sonst keine weiteren Polstellen (modulo Γ) besitzen. Die Differenz $p' - \wp'$ der beiden Funktionen ist also holomorph und, da es sich auch bei der Differenz wieder um eine elliptische Funktion handelt, nach Liouville konstant. Da $\wp'$ und p' beide als Ableitung von geraden Funktionen ungerade sind, handelt es sich auch bei der Differenz um eine ungerade Funktion. Jede ungerade konstante Funktion ist 0, also ist $p' = \wp'$. Daher können sich $\wp$ und p nur um einen konstanten Term unterscheiden. Betrachten wir nun $\wp - z^{-2}$, so erkennen wir, dass $\lim\limits_{z\to 0} \wp(z) - z^{-2} = 0$ nach VL und $\lim\limits_{z\to 0} p(z) - z^{-2} = \sum 0 \neq \gamma \in \Gamma \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma^2} = 0$. Also muss die konstante Differenz von $\wp$ und p sofort gleich 0 sein.

Aufgabe 8

(a) $f(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma} \left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right]$. Diese Reihe ist in einer Umgebung von 0 holomorph. Daher ist auch $f(z)$ auf 0 holomorph fortsetzbar.

(b) Nach dem Haupsatz von Weierstraß dürfen wir gliedweise ableiten. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\gamma^2}}_{=:0\forall k\geq 1}\right] \\ &= \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma} (-1)^k(k+1)!\frac{1}{(z-\gamma)^{(k+2)}} \\ &= (-1)^k(k+1)! \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma} \frac{1}{(z-\gamma)^{(k+2)}} \end{aligned}$$

(c) Da es sich bei f in einer Umgebung von 0 um eine holomorphe Funktion handelt, können wir den Satz von Taylor anwenden und erhalten die folgende Taylor-Reihe um 0. Der Konvergenzbereich ist $|z| < \min_{0\neq\gamma\in\Gamma} |\gamma|$, da f in diesem Gebiet holomorph ist.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k(k+1) \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma} \frac{1}{(-\gamma)^{(k+2)}} \cdot z^k \end{aligned}$$

Wegen $\Gamma = -\Gamma$ gilt

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) \sum_{0 \neq \gamma \in \Gamma} \frac{1}{(\gamma)^{(k+2)}} \cdot z^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) G_{k+2} \cdot z^k$$

Wie in Aufgabe 1f gezeigt, ist $G_k = 0$ für ungerade k.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^(2k)(2k+1) G_{2k+2} \cdot z^{2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2} \cdot z^{2k}$$

Damit erhalten wir für $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + f(z)$ die Laurententwicklung um 0 durch

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_{2k+2} \cdot z^{2k}.$$

Diese hat den Konvergenzbereich $0 < |z| < \min_{0 \neq \gamma \in \Gamma} |\gamma|$, der sich aus dem Konvergenzbereich der Taylorreihe von f ergibt, indem die 0 weggelassen wird, da $\wp(z)$ bei 0 eine Polstelle hat.