Aufgabe 2

(a) Für das Linienintegral erhalten wir durch Parametrisierung $r = r(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ folgendes Ergebnis

$$\oint_{\mathcal{C}} v(r)\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} v(r(\varphi)) \cdot r'(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

Unter Ausnutzung von $\cos^2 + \sin^2 = 1$ in $v(r(\varphi))$ erhalten wir folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Daraufhin berechnen wir die Rotation von v.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} v(r) &= \nabla \times v(r) \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y(xz) - \partial_z(x^2 + y^2 x) \\ \partial_z(-(x^2+y^2)y) - \partial_y(xz) \\ \partial_x((x^2+y^2)x) + \partial_y((x^2+y^2)y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 + y^2 + 3y^2 + x^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4(x^2+y^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4r^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir das Integral über $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}A \operatorname{rot} v(r) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4r^2 \end{pmatrix} \cdot r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \\ &= 2\pi \int_0^1 4r^2 \cdot r\mathrm{d}r \\ &= 2\pi r^4 \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Dies bestätigt den Satz von Stokes.

(b) Wir berechnen zunächst den Fluss von v durch die einzelnen Oberflächen des Würfels. Das sind insgesamt 6 Integrale.

(i) $\oint_{\partial V, x=0} \begin{pmatrix} -(x^2+y^2)y \\ (x^2+y^2)x \\ xz \end{pmatrix} \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} -(y^2)y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 y^3 \mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$

(ii) $\oint_{\partial V, x=1} \begin{pmatrix} -(x^2+y^2)y \\ (x^2+y^2)x \\ xz \end{pmatrix} \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} -(1+y^2)y \\ 1+y^2 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 -y - y^3 \mathrm{d}y = -\frac{3}{4}.$

(iii) $\oint_{\partial V, y=0} \begin{pmatrix} -(x^2+y^2)y \\ (x^2+y^2)x \\ xz \end{pmatrix} \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ x^3 \\ xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^1 -x^3 \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}.$

(iv) $\oint_{\partial V, y=1} \begin{pmatrix} -(x^2+y^2)y \\ (x^2+y^2)x \\ xz \end{pmatrix} \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} -(x^2+1) \\ x^3+x \\ xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^1 x^3 + x \mathrm{d}x = \frac{3}{4}.$

(v) $\oint_{\partial V, z=0} \begin{pmatrix} -(x^2+y^2)y \\ (x^2+y^2)x \\ xz \end{pmatrix} \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} -(x^2+y^2)y \\ (x^2+y^2)x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^1 0 \mathrm{d}x = 0.$

(vi) $\oint_{\partial V, z=1} \begin{pmatrix} -(x^2+y^2)y \\ (x^2+y^2)x \\ xz \end{pmatrix} \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} -(x^2+y^2)y \\ (x^2+y^2)x \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_0^1 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$

Die Summe dieser 6 Integrale ist $\frac{1}{2}$. Nun berechnen wir die Divergenz von v.

$$\operatorname{div} v(r) = -2xy + 2xy + x = x.$$

Das Integral über die Divergenz ist also

$$\int_{\partial V} \mathrm{d}V x = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}.$$

Damit ist auch in diesem Beispiel der Gauss'sche Satz wahr.

(c) Siehe Abbildung 1, 2 und 3.

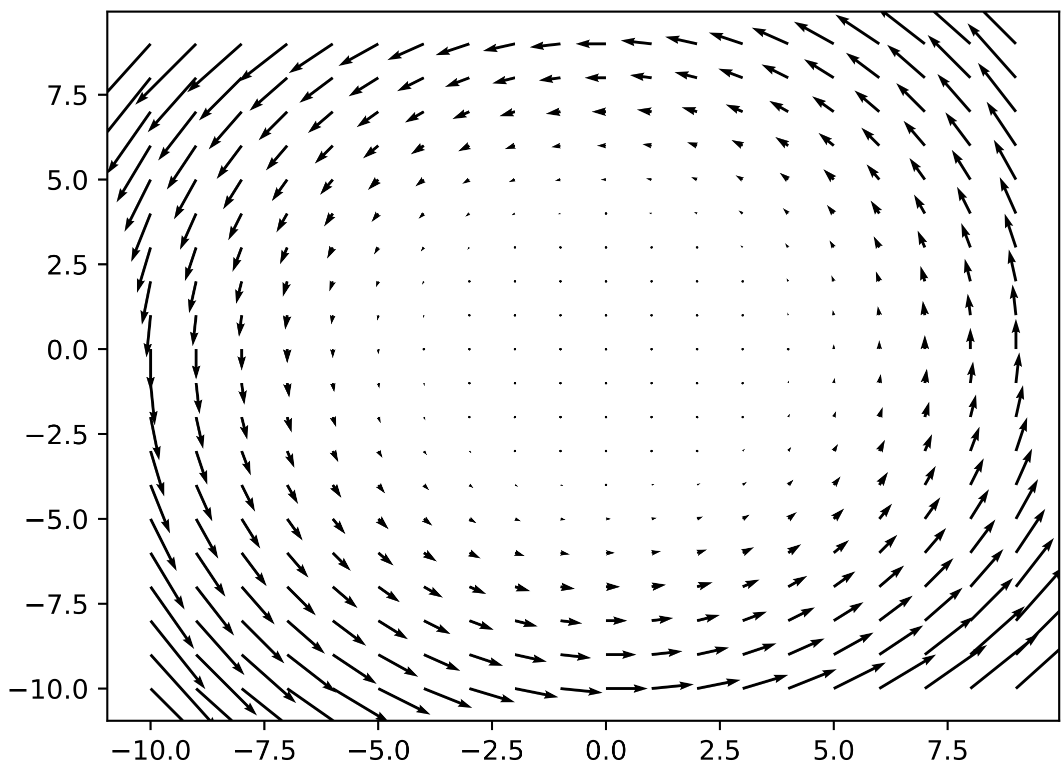

Abbildung 1: xy-Ebene

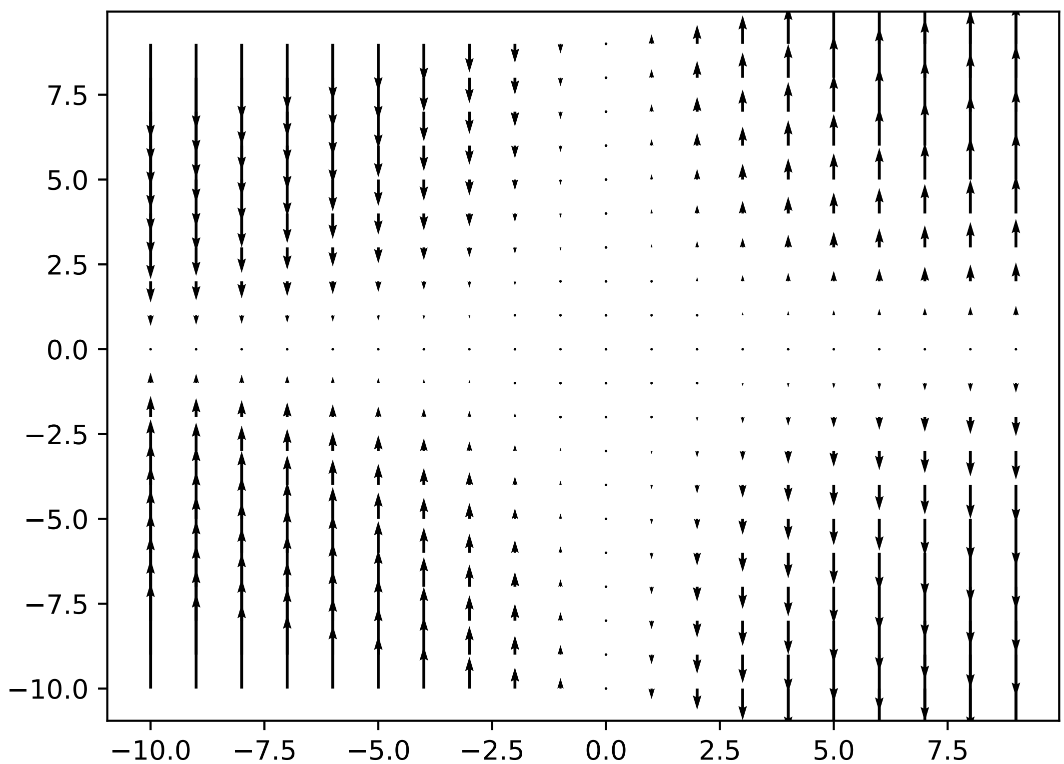

Abbildung 2: xz-Ebene

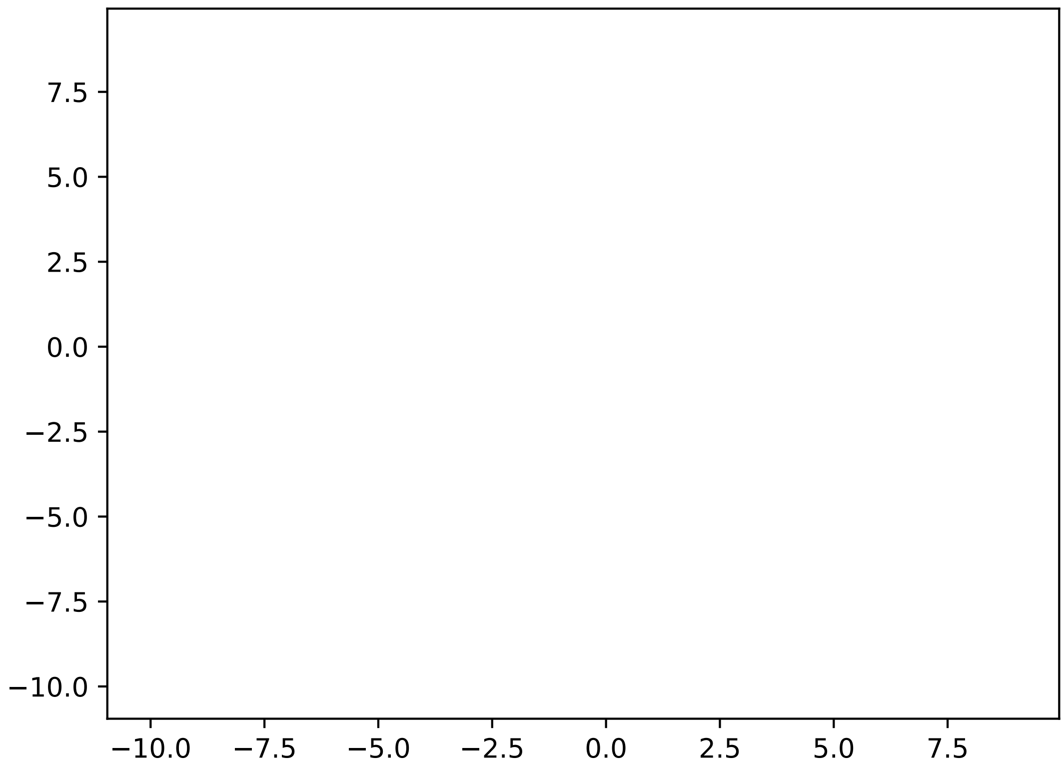

Abbildung 3: yz-Ebene