Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

# Analysis I

WS 19/20

Blatt 03 - Update-Nr.: 1 08.11.2019

ARSnova-Code: 67 52 65 62

**Abgabe bis Fr. 15.11.19, 11Uhr, in die Zettelkästen (INF 205, 1.Stock)**

## Informationen:

- Beachten Sie die allgemeinen Informationen zum Abgeben und Aufschreiben Ihrer Lösungen, die bereits auf den letzten Übungsblättern genannt waren.
- Wir werden dieses Mal probehalber (ausgewählte) Fragen, die über das ARS gestellt werden, dort auch beantworten. Den Zugangsschlüssel für `https://arsnova.eu/` finden Sie oben links unter der Nummer des aktuellen Übungsblattes.

## Themen:

- Folgen
- Cauchy-Folgen
- Reelle Zahlen
- Archimedisches Axiom

## Hinweise zur Bearbeitung:

- Sie können die Wurzelfunktion so verwenden, wie Sie sie in der Schule kennengelernt haben. Sie brauchen sich bei der Aufgabe 3.1 keine Gedanken um die Wohldefiniertheit, Injektivität o. ä. der Wurzelfunktion machen. Durch den Einsatz des Betrags um die Wurzel, ist die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ n \to |\sqrt{n}|$ eindeutig definiert.
- Wie Sie sehen, nutzen wir bereits die reellen Zahlen auf diesem Übungsblatt. Auch wenn wir noch nicht alle Rechenregeln für die reellen Zahlen bewiesen haben, dürfen Sie auf diesem Übungsblatt bereits verwenden, dass die reellen Zahlen ein Körper sind! Rechnen Sie einfach so, wie Sie es aus der Schule gewohnt sind.
- Der Ausdruck „fast alle" bedeutet, dass es nur *endlich viele* Ausnahmen gibt, für die die Aussage nicht gilt. Beispielsweise gilt für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$, dass $n > 5$, da es nur endlich viele Ausnahmen, nämlich $n = 1, 2, 3, 4, 5$ gibt. Die Aussage, dass fast alle $n \in \mathbb{N}$ gerade sind, ist falsch, da die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht endlich, sondern (abzählbar) unendlich ist.

## Aufgabe 3.1 (8 Punkte): Zahlenfolgen in $\mathbb{R}$

(a) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion (siehe auch Hinweise zur Bearbeitung) streng monoton steigend in den natürlichen Zahlen ist. D. h. zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\left|\sqrt{n}\right| < \left|\sqrt{n+1}\right| \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(|\sqrt{n}|)_{n\in\mathbb{N}}$ strikt divergiert.
*Tipp: Sie dürfen hier verwenden, dass* $|\sqrt{x}| \leq \left|\sqrt{y}\right|$ *für alle reellen* $y \geq x \geq 0$.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Elementen

$$a_n := \left|\sqrt{n+1}\right| - \left|\sqrt{n}\right|, \quad n \in \mathbb{N},$$

eine Cauchy-Folge ist, und bestimmen ihren Limes in $\mathbb{R}$.

(d) Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Elementen

$$a_n := \left|\sqrt{n}\right| \left(\left|\sqrt{n+1}\right| - \left|\sqrt{n}\right|\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergiert und bestimmen Sie ggf. ihren Limes in $\mathbb{R}$.
*Tipp: Schreiben Sie die Folge geschickt um, sodass Sie diese als Summe/Produkt/Quotient von einfacheren Folgen ansehen können. Untersuchen Sie dann diese Folgen einzeln auf Ihre Konvergenz. Aus deren Konvergenzeigenschaften können Sie schließlich folgern, ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bedenken Sie dabei Lemma 2.5.*

**Aufgabe 3.2 (3 Punkte):** Rechenregeln für Zahlenfolgen in $\mathbb{R}$

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten $a,\ b,\ c$, und $d$. Zeigen Sie, dass dann für beliebige Zahlen $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$ im Falle $\gamma c + \delta d \neq 0$ auch $\gamma c_n + \delta d_n \neq 0$ für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ (siehe Hinweise zur Bearbeitung) ist, und dass

$$\frac{\alpha a_n + \beta b_n}{\gamma c_n + \delta d_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\alpha a + \beta b}{\gamma c + \delta d}.$$

**Aufgabe 3.3 (4 Punkte):** Reelle Ungleichung und Implikationen

(a) Zeigen Sie für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$$

mit $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$.
*Tipp: Binomische Formel*

(b) Zeigen Sie, dass für reelle Zahlen die folgenden Implikationen richtig sind:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = y = 0, \\ x^3 + y^3 = 0 \quad &\Rightarrow \quad x + y = 0. \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.4 (5 Punkte):** Anordnungsaxiome

(a) Zeigen Sie mithilfe der Binomischen Formel, dass für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gilt

$$(1+x)^n \geq \frac{n^2}{4}x^2.$$

(b) Zeigen Sie somit weiter, dass zu jeder reellen Zahl $b > 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$$b^n > n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

*Tipp: Nutzen Sie das Archimedische Axiom*