Aufgabe 1

(a) **Behauptung:** $B = ((1,1))$ ist eine Basis von $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2 | x_1 - x_2 = 0\}$.
Z.Z.: B ist linear unabhängig

$$\alpha \cdot (1,1) = (0,0) \implies \alpha \cdot 1 = 0 \implies \alpha = 0$$

Z.Z.: B ist ein Erzeugendensystem von S Sei $(x_1, x_2) \in S$. Dann ist $x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$

$$(x_1, x_2) = (x_1, x_1) = x_1 \cdot (1,1)$$

(b) Wir bezeichnen mit e_i^n einen Vektor $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ der aus $n-1$ Nullen und einer Eins besteht, wobei die Eins an i-ter Stelle steht.
Behauptung: $B = ((1, -2, 0, \ldots, 0), e_3^n, e_4^n, \ldots, e_n^n)$ ist eine Basis von $S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n | 2x_1 + x_2 = 0\}$.
Z.Z.: B ist linear unabhängig
Beweis:

$$\alpha_1 \cdot (1, -2, 0, \ldots, 0) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \cdot e_{i+1}^n = (0, 0, \ldots, 0)$$

Da die i-te Komponente des resultierenden Vektors mit Ausnahme von $i = 1, 2$ nur vom i-ten Vektor e_i^n und α_i abhängt, gilt:

$$\alpha_i \cdot 1 = 0 \forall i \in \{2, 3, \ldots, n\} \implies \forall i \in \{2, 3, \ldots, n\} : \alpha_i = 0$$

Aus der ersten Komponente des resultierenden Vektors folgt außerdem $\alpha_1 \cdot 1 = 0 \implies \alpha_1 = 0$. Insgesamt erhalten wir $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \alpha_i = 0$.
Z.Z.: B ist ein Erzeugendensystem von S
Beweis: Sei $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$. Mit $2x_1 + x_2 = 0$ folgt: $x_2 = -2x_1$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{x_2 = -2x_1}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ -2 \cdot x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=3}^{n} x_i e_i^n$$

(c) Beachte: 0 teilt nur 0.

$$\ker \partial = \{f \in V | f(0) \in K \text{ beliebig}, f(i) = 0 \ \forall i \in \{1, \ldots, n+1\} \text{ mit } \operatorname{char} K \nmid i, f(i) \in K \text{ sonst}\}$$

Wir wählen unsere Basis $B = (f_0, f_1, f_2, \ldots, f_k)$, wobei $k = \lfloor \frac{n+1}{\operatorname{char} K} \rfloor$ für $\operatorname{char} K \neq 0$ und $k = 0$ sonst. Dabei sei $\forall i \in \{0, 1, \ldots k\}$

$$\begin{aligned} f_i : \{0, 1, \ldots, n+1\} &\to K \\ i \cdot \operatorname{char} K &\mapsto 1 \\ j &\mapsto 0 \quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, n+1\} \text{ mit } j \neq i \cdot \operatorname{char} K \end{aligned}$$

Z.Z.: B ist linear unabhängig.
Beweis:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_i = 0_v$$

Für alle $j \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$ muss also der Funktionswert der Nullabbildung 0 sein

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_i(j) = 0 \qquad \forall j \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$$

Insbesondere muss der Funktionswert von $j \cdot \operatorname{char} K \quad \forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ 0 sein.

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_i(j \cdot \operatorname{char} K) = 0 \qquad \forall j \in \{0, 1, \ldots, k\}$$

$f_i(j \cdot \operatorname{char} K) = 0 \forall i \neq j$ und $f_i(j \cdot \operatorname{char} K) = 1$ für $i = j$.

$$\begin{aligned} \alpha_i f_i(j \cdot \operatorname{char} K) &= 0 \qquad && \forall j \in \{0, 1, \ldots, k\} \\ \alpha_j &= 0 && \forall j \in \{0, 1, \ldots, k\} \end{aligned}$$

Z.Z.: B ist ein Erzeugendensystem von $\ker \partial$.
Beweis: Sei $g \in \ker \partial$. Dann ist

$$\begin{aligned} g : \{0, 1, \ldots, n+1\} &\to K \\ 0 \cdot \operatorname{char} K &\mapsto l_0 \in K \\ 1 \cdot \operatorname{char} K &\mapsto l_1 \in K \\ &\vdots \\ k \cdot \operatorname{char} K &\mapsto l_k \in K \\ i &\mapsto 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n+1\} \text{ mit } \operatorname{char} K \nmid i \end{aligned}$$

Daher ist $g = \sum_{i=0}^{k} l_i f_i$.

Aufgabe 2

(a) Da V_2 ein Untervektorraum von $V_1 + V_2$ ist, wird nach Skript S.38 2.3 Abschnitt 3) $(V_1 + V_2)/V_2$ zum Vektorraum.
Seien $v_1, v_1' \in V_1$. Dann ist

$$\varphi(v_1 + v_1') = (v_1 + v_1') + V_2 = v_1 + V_2 + v_1' + V_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_1')$$

Sei nun außerdem $a \in K$ und $v_1 \in V_1$. Die Operation, die V_1/V_2 zum Vektorraum über K macht, ist gerade $a \cdot (v_1 + V_2) = (a \cdot v_1) + V_2$. Daher ist

$$\varphi(a \cdot v_1) = (a \cdot v_1) + V_2 = a \cdot (v_1 + V_2) = a \cdot \varphi(v_1)$$

(b) Sei $v \in (V_1 + V_2)/V_2$. Dann $\exists v_1 \in V_1$ und $\exists v_2 \in V_2$ mit $v = v_1 + v_2 + V_2$. Nun ist $\varphi(v_1) = v_1 + V_2$. Da $v_2 \in V_2$, können wir das schreiben als $v_1 + v_2 + V_2$. Es existiert also $\varphi(v_1) = v_1 + V_2 = v$. Daher ist φ surjektiv.

(c) $\ker\varphi = \{v_1 \in V_1 : v_1 + V_2 = 0_v + V_2\}$. Gemäß 2.3 Abschnitt 3 folgt aus $v_1 + V_2 = 0_v + V_2$ sofort $v_1 - 0_v \in V_2 \iff v_1 \in V_2$. Daher ist $\ker\varphi = \{v_1 \in V_1 : v_1 \in V_2\} = V_1 \cap V_2$.

(d) $\varphi : V_1 \to V_1/(V_1 + V_2)$ ist eine lineare Abbildung. Nach Satz 2.28 gibt es einen natürlichen Vektorraumisomorphismus

$$F : V_1/\ker\varphi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im}\varphi$$

Da φ surjektiv ist, gilt $\operatorname{im}\varphi = (V_1 + V_2)/V_2$. Außerdem ist $\ker\varphi = V_1 \cap V_2$. Eingesetzt erhalten wir also

$$F : V_1/(V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\sim} (V_1 + V_2)/V_2$$

Daher gilt $V_1/(V_1 \cap V_2) \cong (V_1 + V_2)/V_2$.

Aufgabe 3

Bemerkung: $(v_i)_{i\in I}$ muss ein endliches Erzeugendensystem sein, damit sämtliche Summen im Beweis wohldefiniert sind.

(a)
- Z.Z.: $U + W \subset V$.
  Beweis: Sei $u \in U$ und $w \in W$. Dann existieren $\alpha_i \in K^{(J)}$ mit $i \in J$ und $\alpha_i \in K^{(I\setminus J)}$ mit $i \in I \setminus J$.
  $$u + w = \sum_{i\in J} \alpha_i v_i + \sum_{i\in I\setminus J} \alpha_i v_i = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i \in V$$
- Z.Z.: $V \subset U + W$.
  Beweis: Sei $v \in V$. Dann ist
  $$v = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i = \sum_{i\in I\setminus J} \alpha_i v_i + \sum_{i\in J} \alpha_i v_i$$
  Es gilt $\sum_{i\in I\setminus J} \alpha_i v_i \in W$ und $\sum_{i\in J} \alpha_i v_i \in U$. Also ist $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.

(b)
- Z.Z.: $0 \in U$
  Beweis: $\sum_{i\in J} \alpha_i v_i \in U$. Wähle nun $\alpha_i = 0 \forall i \in J$. Dann ist $\sum_{i\in J} \alpha_i v_i = \sum_{i\in J} 0 \cdot v_i = 0 \in U$.
- Z.Z.: $0 \in W$
  Beweis: $\sum_{i\in I\setminus J} \alpha_i v_i \in W$. Wähle nun $\alpha_i = 0 \forall i \in I \setminus J$. Dann ist $\sum_{i\in I\setminus J} \alpha_i v_i = \sum_{i\in I\setminus J} 0 \cdot v_i = 0 \in W$.
- Sei $v \in V$ mit $v \in U \cap W$. Z.Z.: $v = 0$.
  Beweis: Dann ist $v = \sum_{i\in J} \alpha_i v_i$ und $v = \sum_{i\in I\setminus J} \alpha_i v_i$.
  $$\sum_{i\in J} \alpha_i v_i - \sum_{i\in I\setminus J} \alpha_i v_i = 0$$

Wähle $\beta_i = \begin{cases} \alpha_i & |i \in J \\ -\alpha_i & |i \in I \setminus J \end{cases}$. Dann ist

$$\sum_{i \in J} \beta_i v_i - \sum_{i \in I \setminus J} -\beta_i v_i = 0$$

$$\implies \sum_{i \in I} \beta_i v_i = 0$$

Da $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis ist, folgt daraus $\beta_i = 0 \forall i \in I$. Nach unserer Definition von β_i folgt daraus $\alpha_i = 0 \forall i \in I$.

(c)
- **Z.Z.:** $(v_i + U)_{i \in I \setminus J}$ ist linear unabhängig.
  Beweis:

$$\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i (v_i + U) = 0_{V/U}$$

$$\iff \sum_{i \in I \setminus j} (\alpha_i v_i + U) = 0_{V/U}$$

$$\iff \left(\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i v_i \right) + U = 0_{V/U}$$

  Das neutrale Element von V/U ist einfach $0_v + U = U$

$$\iff \left(\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_n v_n \right) + U = U$$

  Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\left(\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i v_i\right) \in U$. Wir wissen: $\left(\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i v_i\right) \in W$. In Teilaufgabe (b) haben wir aber gezeigt, dass $W \cap U = \{0\}$. Daher muss $\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i v_i = 0$ gelten. Da $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis ist, folgt daraus sofort: $\alpha_i = 0 \quad \forall i \in I \setminus J$.
- **Z.Z.:** $(v_i + U)_{i \in I \setminus J}$ ist ein Erzeugendensystem.
  Beweis: Sei $v + U \in V/U$. Dann ist $v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i = \sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i v_i + \sum_{i \in J} \alpha_i v_i$. Da $\sum_{i \in J} \alpha_i v_i \in U$ ist, lässt sich $v+U = \sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i v_i + \sum_{i \in J} \alpha_i v_i + U$ umformen zu $\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i v_i + U$. Das ist äquivalent zu

$$v + U = \sum_{i \in I \setminus J} (\alpha_i v_i + U).$$

  Mit der im Vektorraum V/U definierte Multiplikation können wir dies umformen zu

$$\sum_{i \in I \setminus J} \alpha_i (v_i + U).$$

  $v + U$ lässt sich also darstellen als Linearkombination von $(v_i + U)_{i \in I \setminus J}$ und daher ist $(v_i + U)_{i \in I \setminus J}$ ein Erzeugendensystem.

$(v_i + U)_{i \in I \setminus J}$ ist also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem und daher eine Basis.

Aufgabe 4

(a) **Z.Z.:** $\forall i \in I : \exists v_i^*$ mit

$$\begin{aligned} v_i^* : V &\to K \\ v_j &\mapsto 1 \text{ falls } j = i \\ v_j &\mapsto 0 \text{ sonst} \end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen, dass die obenstehende Abbildung wohldefiniert ist. Sei dafür $v \in V$. Mithilfe der Basis lässt sich v schreiben als $v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$. Nun ist

$$v_i^* \left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i \right) \overset{v_i^* \text{ linear}}{=} \sum_{i \in I} \alpha_i v_i^*(v_j) = \alpha_i$$

Jedem Element aus v wird also genau ein Element aus K zugeordnet. Daher ist v_i^* wohldefiniert und eindeutig.

(b) **Z.Z.:** $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig.
Beweis:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i v_i^* = 0_v$$

Für alle $j \in I$ muss also der Funktionswert der Nullabbildung 0 sein

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i^* \right) (v_j) &= 0 & \forall j \in I \\ \sum_{i \in I} \alpha_i v_i^*(v_j) &= 0 & \forall j \in I \end{aligned}$$

$v_i^*(v_j)$ ist 0 für alle j, außer für $i = j$.

$$\alpha_j v_j^*(v_j) = 0 \qquad \forall j \in I$$

$v_j^*(v_j) = 1$.

$$\alpha_j = 0 \qquad \forall j \in I$$

(c) **Z.Z.:** Ist I nicht endlich, so ist $(v_i^*)_{i \in I}$ keine Basis von V^*.
Beweis: Annahme: I ist nicht endlich und $(v_i^*)_{i \in I}$ eine Basis. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} f : V &\to K \\ v_i &\mapsto 1 & \forall i \in I \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist linear und geht von V nach K. Daher ist $f \in V^*$. Da $(v_i^*)_{i \in I}$ eine Basis ist, muss sich f als Linearkombination darstellen lassen:

$$f = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i \qquad \alpha_i \in K^{(I)}$$

Damit die Summe wohldefiniert ist, muss für fast alle $i \in I$ $\alpha_i = 0$ sein. Sei $i_0 \in I$ mit $\alpha_{i_0} = 0$. Dann ist

$$f(v_{i_0}) = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i^*(v_{i_0})$$

$v_i(v_j)$ ist stets 0, außer für $i = j$.

$$f(v_{i_0}) = \alpha_{i_0} \cdot v_{i_0}^*(v_{i_0})$$

$\alpha_{i_0} = 0$

$$f(v_{i_0}) = 0$$

Das steht allerdings im Widerspruch zur Definition von f. Daher ist die Annahme ad absurdum geführt und $(v_i^*)_{i \in I}$ kann keine Basis sein, wenn I nicht endlich ist.