Korollar 8.59. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein vollständiger, lokaler Ring, so dass der Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$ endlich ist. Sei $q = \#k$. Dann existieren in A genau $q-1$ viele $(q-1)$te Einheitswurzeln.*

Beweis. Da $k^\times$ zyklisch ist, zerfällt das Polynom $f(X) = X^{q-1} - 1$ über k in $(q-1)$ paarweise verschiedene Linearfaktoren. Das henselsche Lemma gibt das Ergebnis. $\square$

Beispiel 8.60. $\mathbb{Z}_p$ enthält $p-1$ viele $(p-1)$te Einheitswurzeln.

Satz 8.61. *Sei K ein lokaler Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei $k = \mathbb{F}_q$, $q = p^f$, sein Restklassenkörper. Dann existiert ein Isomorphismus*

$$K \cong \mathbb{F}_q((T)).$$

Beweis. Nach dem henselschen Lemma existiert $\zeta_{q-1} \in \mathcal{O} \subset K$, also enthält K den Körper $\mathbb{F}_p(\zeta_{q-1}) = \mathbb{F}_q$. Sei nun $\pi \in K$ ein Element mit $(\pi) = \mathfrak{p}$. Dann liegen die Elemente der Form

$$\sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i \pi^i,\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z},\ \alpha < \beta,\ a_i \in \mathbb{F}_q$$

dicht in K. Die Zuordnung $T \mapsto \pi$ definiert eine Körpereinbettung $\mathbb{F}_q(T) \hookrightarrow K$ die sich, wie im Beweis von Satz 8.56 zu einer Einbettung $\mathbb{F}_q((T)) \hookrightarrow K$ fortsetzt. Nun ist $\mathbb{F}_q((T))$ und damit auch sein Bild in K vollständig. Außerdem enthält das Bild eine in K dichte Teilmenge. $\rightsquigarrow$ $\mathbb{F}_q((T)) \xrightarrow{\sim} K$. $\square$

Ist K ein Körper mit einer diskreten Bewertung v, so ist das Maximalideal $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ ein Hauptideal. Ein $\pi \in \mathcal{O}$ mit $(\pi) = \mathfrak{p}$ nennt man *Uniformisierende* von K. Die Uniformisierende ist bis auf Multiplikation mit einer Einheit eindeutig.

Lemma 8.62. *Sei $L|K$ eine endliche Erweiterung nicht-archimedischer lokaler Körper, und seien e, f ihr Verzweigungsindex bzw. ihr Trägheitsgrad. Dann gilt*

$$ef = [L : K].$$

Beweis. Wegen der Multiplikativität aller auftretenden Größen können wir uns auf die Fälle $L|K$ separabel und $L|K$ rein inseparabel beschränken.

Im Fall $L|K$ separabel folgt dies aus Korollar 8.33 und der Tatsache, dass es nur eine Fortsetzung der Bewertung von K auf L gibt (Korollar 8.52).

Im Fall $L|K$ rein inseparabel können wir uns weiter einschränken und annehmen, dass $[L : K] = p = \mathrm{char}(K)$. Nach Satz 8.61 können wir k als Unterkörper von K auffassen, so dass $k \subset \mathcal{O}_K$ gilt und die Komposition $k \to \mathcal{O}_K \to k$ die Identität ist.

Wir betrachten die Restklassenkörpererweiterung $\ell|k$: Zu $\alpha \in \ell$ existiert ein Urbild $a \in \mathcal{O}_L$ und es gilt $a^p \in \mathcal{O}_K$, also $\alpha^p \in k$. Somit ist auch $\ell|k$ rein inseparabel. Da k als endlicher Körper aber perfekt ist, gilt $\ell = k$ und $f = 1$. Sei v die

Bewertung von K und w ihre eindeutige Fortsetzung auf L. Nach dem Beweis von Lemma 8.36 gilt für $x \in L^\times$: $|x|_w = \sqrt[p]{|x^p|_v}$, bzw. $w(x) = \frac{1}{p}v(x^p)$. Wir erhalten Inklusionen von Gittern in $\mathbb{R}$:

$$p \cdot w(L^\times) \subset v(K^\times) \subset w(L^\times).$$

Für den Verzweigungsindex $e = (w(L^\times) : v(K^\times))$ gilt daher $e \mid p$. Wäre $e = 1$, so wäre eine Uniformisierende π von K zugleich auch Uniformisierende von L. Daher lägen die Elemente der Form $\sum_{i=\alpha}^{\beta} a_i\pi^i$, $a_i \in k = \ell$ sowohl in K als auch in L dicht und es folgte $K = L$ – Widerspruch.

Folglich gilt $e = p$ und daher auch in diesem Fall $ef = p = [L : K]$. □

Wir wählen nun für einen lokalen Körper K aus jeder Äquivalenzklasse von Bewertungen eine aus und nennen diese die **normalisierte** Bewertung:

- $K = \mathbb{R}$: $|x|_{\text{norm}} = |x|_\infty$, der gewöhnliche Absolutbetrag.
- $K = \mathbb{C}$: $|z|_{\text{norm}} = |z\overline{z}|_\infty$, das Quadrat des gewöhnlichen Absolutbetrags.
- K nicht-archimedisch: Sei $\mathcal{O} \subset K$ der Bewertungsring, $k = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ der Restklassenkörper und $\pi \in \mathcal{O}$ eine Uniformisierende. Sei $q = \#k$. Wir normalisieren die Bewertung durch

$$|\pi|_{\text{norm}} = q^{-1},$$

d.h. für ein $x \in K^\times$ mit $x = \pi^n u$, $u \in \mathcal{O}^\times$, gilt

$$|x|_{\text{norm}} = q^{-n}.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl der Uniformisierenden π. Die assoziierte Exponentialbewertung $v : K \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ wird in hierzu in konsistenter Weise durch $v(\pi) = 1$ normalisiert, d.h. $v : K \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. Es gilt dann $|x| = q^{-v(x)}$.

Warnung: Ist $L|K$ eine endliche Erweiterung lokaler Körper, so setzt die normalisierte Bewertung von L i.A. *nicht* die normalisierte Bewertung von K fort.

Lemma 8.63. *Ist $L|K$ eine endliche Erweiterung lokaler Körper und sind $|\ |_L$ und $|\ |_K$ die normalisierten Bewertungen, so gilt*

$$|x|_L = |x|_K^n \quad \textit{mit} \quad n = [L : K]$$

für alle $x \in K$.

Beweis. Im archimedischen Fall ist dies gerade so definiert. Seien $L|K$ nicht-archimedisch und seien e, f der Verzweigungsindex bzw. der Trägheitsgrad. Nach Lemma 8.62 gilt $ef = n$. Sei $\pi \in K$ eine Uniformisierende. Dann gilt $v_K(\pi) = 1$, $v_L(\pi) = e$. Sind l und k die Restklassenkörper, so gilt $f = [l : k]$. Mit $q = \#k$ gilt somit $\#l = q^f$. Zusammen folgt für $x \in K$:

$$\begin{aligned} |x|_L &= (q^f)^{-v_L(x)} = (q^f)^{-ev_K(x)} \\ &= (q^{-v_K(x)})^{ef} \\ &= |x|_K^n. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 8.64. Die normalisierte Bewertung auf $\mathbb{C}$ erfüllt nicht die Dreiecksungleichung, ist also keine Bewertung im Sinne der meisten Lehrbücher. Das Problem wird meistens ignoriert (z.B. in Neukirch).

Bemerkung 8.65. So wie das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ existiert auch auf jedem nicht-archimedischen lokalen Körper ein bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmtes translationsinvariantes Maß μ („Haarsches Maß"). Man normalisiert dies durch $\mu(\mathcal{O}) = 1$.

8.7 Fortsetzung vollständiger Bewertungen

Lemma 8.66. *Sei (K, v) ein vollständig bewerteter Körper und $L|K$ eine algebraische Erweiterung. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung w von v auf L.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, dass K lokal-kompakt, d.h. ein lokaler Körper ist. Der allgemeine Fall wird z.B. in Neukirchs Buch behandelt.

Es genügt, den Fall $[L : K] = n < \infty$ zu betrachten. Nach Lemma 8.30 können wir v durch eine äquivalente Bewertung ersetzen, also gilt ohne Einschränkung die Dreiecksungleichung.

Die Eindeutigkeit wurde bereits in Korollar 8.52 behandelt. Auch die Existenz ist leicht gezeigt: Ist v archimedisch, so ist K nach Satz 8.56 isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und die Aussage ist wohlbekannt. Ist v nicht-archimedisch, so ist v nach Satz 8.45 diskret und die Existenz der Fortsetzung wurde bereits in Korollar 8.37 gezeigt. □

Korollar 8.67. *Jede endliche Erweiterung eines lokalen (bzw. vollständig bewerteten) Körpers ist in natürlicher Weise ein lokaler (bzw. vollständig bewerteter) Körper.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 8.49 und Korollar 8.51. □

Korollar 8.68. *Seien L und L' algebraische Erweiterungen eines vollständig bewerteten Körpers (K, v), w und w' die Fortsetzungen von v auf L bzw. L', und sei $\sigma \in \mathrm{Hom}_K(L, L')$. Dann gilt für jedes $x \in L$:*

$$|\sigma x|_{w'} = |x|_w,$$

also ist σ eine Isometrie und daher stetig.

Insbesondere gilt obige Aussage im Fall, dass $L = L'$ eine Galoiserweiterung von K und $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)$ ist.

Beweis. Die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \longmapsto |\sigma x|_{w'},$$

ist eine Bewertung auf L, die auf K mit $|\ |_v$ übereinstimmt. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt $|\sigma x|_{w'} = |x|_w \quad \forall\, x \in L$. □

Satz 8.69. *Sei (K,v) ein vollständig bewerteter Körper und $L|K$ eine endliche Erweiterung vom Grad n. Dann ist die eindeutig bestimmte Fortsetzung w von v auf L durch*

$$|x|_w = \sqrt[n]{|N_{L/K}(x)|_v} \quad \forall\, x \in L$$

gegeben.

Beweis. Es sei $\bar{K}$ ein algebraischer Abschluss von K, $\bar{v}$ die eindeutige Fortsetzung von v auf $\bar{K}$, $[L:K]_i$ der Inseparabilitätsgrad von $L|K$ und $\mathrm{Hom}_K(L,\bar{K}) = \{\sigma_1,\dots,\sigma_r\}$. Dann gilt $n = r[L:K]_i$, $\bar{v}|_L = w$ und

$$|N_{L/K}(x)|_v = \left|\left(\prod\nolimits_{j=1}^{r} \sigma_j(x)\right)^{[L:K]_i}\right|_{\bar{v}} = \left(\prod_{j=1}^{r} |\sigma_j(x)|_{\bar{v}}\right)^{n/r} \overset{8.68}{=} |x|_w^n. \qquad \square$$

Bemerkung 8.70. Sei $L|K$ eine *unendliche* algebraische Erweiterung des lokalen Körpers (K,v) (z.B. $L = \overline{K}$) und sei w die eindeutig bestimmte Fortsetzung von v auf L. Nach Satz 8.54 ist (L,w) *kein* lokaler Körper. Man kann sogar zeigen, dass (L,w) niemals vollständig ist.

8.8 Fortsetzung von Bewertungen II

Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung und w eine Fortsetzung der Bewertung v auf K.

Lemma 8.71. *Die durch die natürlichen Einbettungen $L \hookrightarrow \hat{L}_w$, $\hat{K}_v \hookrightarrow \hat{L}_w$, induzierte Abbildung*

$$\varphi : L \otimes_K \hat{K}_v \longrightarrow \hat{L}_w$$

ist stetig und surjektiv. Hierbei ist $L \otimes_K \hat{K}_v$ mit der Topologie eines endlich-dimensionalen $\hat{K}_v$-Vektorraums ausgestattet.

Beweis. Ohne Einschränkung erfülle w die Δ-Ungleichung. Sei $x_1,\dots,x_n$ eine K-Basis von L und $a = \max(|x_1|_w,\dots,|x_n|_w)$. Für $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \hat{K}_v$ gilt daher

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right|_w \le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i x_i|_w \le n \cdot \max_i |\alpha_i x_i|_w$$

$$\le n \cdot a \cdot \max_i(|\alpha_1|_v,\dots,|\alpha_n|_v).$$

Daher ist die Abbildung

$$\hat{K}_v^n \longrightarrow \hat{L}_w, \quad \alpha_1,\dots,\alpha_1 \longmapsto \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

stetig. Nach Satz 8.49 erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
\hat{K}_v^n \arrow[dr, "\text{stetig}"] \arrow[dd, "\wr"] & \\
& \hat{L}_w. \\
L \otimes_K \hat{K}_v \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Daher ist φ stetig. Das Bild von φ ist ein endlich-dimensionaler $\hat{K}_v$-Vektorraum, also vollständig und daher abgeschlossen. L liegt dicht in $\hat{L}_w$ und ist in $\mathrm{im}(\varphi)$ enthalten $\Longrightarrow \mathrm{im}(\varphi) = \hat{L}_w \Longrightarrow \varphi$ surjektiv. □

Korollar 8.72. *$\hat{L}_w|\hat{K}_v$ ist eine endliche Erweiterung.*

Korollar 8.73. *Ist K ein Zahlkörper und v eine Bewertung auf K, so ist $\hat{K}_v$ ein lokaler Körper.*

Beweis. Setze $v_0 = v|_{\mathbb{Q}}$. Nach Korollar 8.72 ist $K_v|\mathbb{Q}_{v_0}$ eine endliche Erweiterung. Nach dem Satz von Ostrowski 8.18 ist $\mathbb{Q}_{v_0}$ ein lokaler Körper und daher nach Korollar 8.67 auch K_v. □

Sei $L|K$ eine algebraische Erweiterung, v eine Bewertung auf K und w eine Bewertung auf L, die v fortsetzt. Sei $L = \bigcup L_i$, wobei die L_i endlich über K sind, und sei $w_i = w|_{L_i}$. Dann sind die $(\hat{L}_i)_{w_i}$ endliche Erweiterungen von $\hat{K}_v$ und für $L_i \subset L_j$ ist kanonisch $(\hat{L}_i)_{w_i} \hookrightarrow (\hat{L}_j)_{w_j}$. Die Vereinigung (d.h. der direkte Limes) der $(\hat{L}_i)_{w_i}$ heißt die **Lokalisierung** von L bei w und wird mit L_w bezeichnet. Für $L|K$ endlich gilt $L_w = \hat{L}_w$, im Allgemeinen ist $L_w \subsetneqq \hat{L}_w$. L_w ist eine algebraische Erweiterung von $K_v = \hat{K}_v$.

Sei nun $\overline{K}_v$ ein algebraischer Abschluss von K_v, zusammen mit der eindeutig bestimmten Bewertung $\overline{v}$, die v fortsetzt. Jede K-Einbettung $\tau : L \longrightarrow \overline{K}_v$ gibt uns mittels $\overline{v} \circ \tau$ eine Fortsetzung von v auf L. Jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}_{K_v}(\overline{K}_v)$ (automatisch stetig nach Korollar 8.68) liefert eine weitere Einbettung:

$$\sigma \circ \tau : L \longrightarrow \overline{K}_v.$$

Wir nennen $\sigma \circ \tau$ zu τ über K_v **konjugiert**.

Satz 8.74. *Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung und v eine Bewertung auf K.*

(i) *Jede Fortsetzung w von v auf L entsteht durch eine K-Einbettung*

$$\tau : L \longrightarrow \overline{K}_v.$$

(ii) *Zwei Fortsetzungen $\overline{v} \circ \tau$ und $\overline{v} \circ \tau'$ sind genau dann gleich, wenn τ und τ' über K_v konjugiert sind.*

Beweis. (i) Ist w eine Fortsetzung von K auf L, dann ist $L_w|K_v$ algebraisch. Ist $\tau : L_w \to \overline{K}_v$ eine K_v-Einbettung, so gilt nach dem Eindeutigkeitssatz

$$w = \overline{v} \circ \tau.$$

Die Einschränkung von τ auf L ist daher die gesuchte Einbettung.
(ii) Seien $\tau, \tau' : L \to \overline{K}_v$ gegeben, so dass $\overline{v} \circ \tau = \overline{v} \circ \tau'$.
Sei zunächst $L|K$ endlich. Der Abschluss $\overline{\tau L}$ des Unterkörpers $\tau L \subset \overline{K}_v$ ist ein Unterkörper von $\overline{K}_v$. Er enthält τL und K_v, also auch das Kompositum $(\tau L)K_v$. Dies ist ein endlich-dimensionaler K_v-Vektorraum, also nach Korollar 8.50 abgeschlossen, also gilt $\overline{\tau L} = (\tau L) \cdot K_v$. Die Abbildung $L \to \tau L$ setzt sich daher zu einem stetigen Isomorphismus $L_{\overline{v} \circ \tau} \xrightarrow{\sim} (\tau L)K_v$ fort. Für $L|K$ von unendlichem Grad erhalten wir dies durch Übergang zu $\varinjlim$.
Damit erhalten wir Isomorphismen

$$\sigma : (\tau L) \cdot K_v \xrightarrow{\sim} L_{\overline{v} \circ \tau} = L_{\overline{v} \circ \tau'} \xrightarrow{\sim} (\tau' L) \cdot K_v.$$

Wir setzen σ zu einem Isomorphismus

$$\sigma : \overline{K}_v \xrightarrow{\sim} \overline{K}_v$$

fort. Dann gilt $\tau' = \sigma \circ \tau$, also sind τ' und τ konjugiert über K_v. Sind umgekehrt τ', τ konjugiert über K_v, also $\tau' = \sigma \circ \tau$, so stimmen wegen $\overline{v} \circ \sigma = \overline{v}$ die Bewertungen $\overline{v} \circ \tau'$ und $\overline{v} \circ \tau$ auf L überein. □

Korollar 8.75. *Sei $L = K(\alpha)$ und $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von α. Sei*

$$f = f_1^{m_1} \cdots f_r^{m_r}$$

die Primzerlegung von f in K_v. Dann existieren genau r Fortsetzungen $w_1, \dots, w_r$ von v auf L. Man erhält w_i durch die Einbettung

$$L \longrightarrow \overline{K}_v,\ \alpha \longmapsto \alpha_i,$$

wobei α_i eine Nullstelle von f_i in $\overline{K}_v$ ist.

Beweis. Nach Galoistheorie entsprechen die K-Einbettungen $L \to \overline{K}_v$ genau den Nullstellen von f in $\overline{K}_v$. Die durch zwei Nullstellen β, β' von f in $\overline{K}_v$ gegebenen Einbettungen sind genau dann über K_v konjugiert, wenn β und β' Nullstellen des gleichen irreduziblen Faktors von f über K_v sind. □

Bemerkung 8.76. Ist f ein separables Polynom, so sind die m_i alle $= 1$.

Korollar 8.77. *Sei $K|\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper. Dann gibt es genau $r_1 + r_2$ inäquivalente archimedische Bewertungen auf K, und zwar r_1 viele mit Vervollständigung isomorph zu $\mathbb{R}$ und r_2 viele mit Vervollständigung isomorph zu $\mathbb{C}$.*

Beweis. Jede archimedische Bewertung von K ist eine Fortsetzung der eindeutigen archimedischen Bewertung auf $\mathbb{Q}$. Die archimedischen Bewertungen auf K stehen daher nach Satz 8.74 in Bijektion zu den Einbettungen $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ modulo Konjugation über $\mathbb{R}$. □

Satz 8.78. *Sei $L|K$ eine endliche separable Erweiterung. Dann gibt es einen kanonischen topologischen Isomorphismus*

$$\varphi : L \otimes_K K_v \xrightarrow{\sim} \prod_{w|v} L_w.$$

Beweis. Für jedes w haben wir nach Lemma 8.71 einen stetigen Homomorphismus

$$L \otimes_K K_v \to L_w.$$

Durch Aufsummieren erhalten wir φ. Nach dem Satz vom primitiven Element finden wir ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$. Sei $f \in K[X]$ das (separable) Minimalpolynom von α und $f = f_1 \cdots f_r$ seine Primzerlegung in $K_v[X]$. Dann entsprechen die Fortsetzung von v auf L nach Korollar 8.75 bijektiv den f_i. Nennen wir sie $w_1, \dots, w_r$. Wir erhalten die Isomorphismen $K[X]/(f) \cong L$ und $K_v[X]/(f_i) \cong L_{w_i}$ für $i = 1, \dots, r$. Tensorieren des ersten Isomorphismus mit K_v liefert den Isomorphismus $K_v[X]/(f) \cong L \otimes_K K_v$ und der Chinesische Restsatz gibt uns den Isomorphismus $K_v[X]/(f) \cong \prod_{i=1}^r K_v[X]/(f_i)$. Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_v[X]/(f) & \xrightarrow{\sim} & \prod\limits_{i=1}^{r} K_v[X]/(f_i) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ L \otimes_K K_v & \xrightarrow{\varphi} & \prod\limits_{i=1}^{r} L_{w_i}, \end{array}$$

zeigt daher, dass φ ein algebraischer Isomorphismus ist. Zudem ist φ ein Homöomorphismus, da Quelle und Ziel endlich-dimensionale normierte Vektorräume über K_v sind. □

Korollar 8.79. *Ist $L|K$ endlich separabel, so gilt*

$$[L : K] = \sum_{w|v} [L_w : K_v].$$

Bemerkung 8.80. Ist K ein Zahlkörper und $v = v_{\mathfrak{p}}$ für ein Primideal in $\mathcal{O}_K$, so wussten wir das schon: Für $w \mid v$ gilt

$$e_{w|v}(L_w|K_v) = e_{w|v}(L|K), \ f_{w|v}(L_w|K_v) = f_{w|v}(L|K)$$

Also gilt nach Korollar 8.33:

$$[L:K]=\sum_{w|v}e_{w|v}(L|K)f_{w|v}(L|K)=\sum_{w|v}[L_w:K_v].$$

Es sei $K|\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper und $P(K)$ die Menge der Äquivalenzklassen von Bewertungen auf K. Wir wählen für jede Klasse in $P(K)$ den Vertreter v, der auf der Vervollständigung K_v die normalisierte Bewertung des lokalen Körpers K_v induziert. Dann gilt

Satz 8.81 (Geschlossenheitsrelation)**.** *Für $x \in K^\times$ gilt $|x|_v = 1$ für fast alle v und*

$$\prod_{v\in P(K)}|x|_v=1.$$

Beweis. Es ist $v_\mathfrak{p}(x)=0$ für alle Primideale $\mathfrak{p}\subset\mathcal{O}_K$, die nicht in der Primzerlegung des gebrochenen Hauptideals (x) vorkommen. Das sind fast alle und es gibt nur endlich viele archimedische Bewertungen auf K. Daher gilt $|x|_v=1$ für fast alle v.