Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. Ekaterina A. Kostina
Ihno Schrot

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

Analysis II

Sommersemester 2020

Blatt 1 - Update-Nr. 2 — 27. April 2020

Abgabe bis Fr. 01.05.20, 09:00Uhr, online in Moodle!

Informationen:

- Gebt auf Eurer Lösung klar erkennbar an mit wem Ihr ggf. gemeinsam abgebt!
- Obwohl die Abgabegruppen noch nicht eingerichtet sind, lädt auch in dieser Woche bitte nur **eine** Person im Moodle eine Abgabe hoch, die andere Person nicht! Wir übertragen die Punkte dann.
- Bitte gebt Eure Lösungen in **einer PDF-Datei** ab und nennt die Datei: *Ana2_<Vorname1Nachname1>_<Vorname2Nachname2>_Blatt<Blattnr (zweistellig!)>.pdf*. Also bspw. *Ana2_IhnoSchrot_EkaterinaKostina_Blatt01.pdf* oder im Falle einer Einzelabgabe: *Ana2_IhnoSchrot_Blatt01.pdf*. Nichtbeachten des Benennungsschemas kann zu Punktabzug führen.

Themen:

- Integration
- Uneigentliche Integrale
- Funktionenfolgen
- Gleichmäßige Konvergenz

Aufgabe 1.1 (6 Punkte): Integralberechnung

Man bestimme die folgenden Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$ $\boxed{1}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 e^x\left(1-x+x^2\right)\mathrm{d}x$ $\boxed{1}$

(c) $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}x^3\mathrm{d}x$ $\boxed{2}$

(d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\mathrm{d}x$ $\boxed{2}$

Bemerkung: Bei (c) und (d) hilft geschicktes Substituieren ggf. weiter.

Aufgabe 1.2 (6 Punkte): Weitere Eigenschaften von Integralen

(a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi, \psi : [c,d] \to [a,b]$ differenzierbar. Man zeige, dass dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f\left(\psi(x)\right)\psi'(x) - f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x), \quad x \in [c,d].$$ $\boxed{3}$

Tipp: Hauptsatz d. Differential- und Integralrechnung (Analysis 1, Satz 6.10) und Kettenregel.

(b) Eine wichtige Ungleichungen in der Mathematik ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU)[1]. Diese besagt im eindimensionalen Fall:
Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt

$$\text{(CSU)} \quad \left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x \right|^2 \leq \int_a^b f(x)^2 \mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)^2 \mathrm{d}x.$$

<u>Aufgabe</u>: Sei nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(a) = 0$. Man zeige mithilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int_a^b |f(x) f'(x)| \, \mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b f'(x)^2 \mathrm{d}x.$$ 3

Tipp: Man nutze $(f^2)' = 2f'f$ und überlege sich, welche Eigenschaften $G(x) := \int_a^x |f'(t)| \, dt, \; x \in [a, b]$ hat und wie man $G(x)$ hier nutzen kann.

Aufgabe 1.3 (4 Punkte): Funktionenfolgen und Integration

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{n^2 x}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

Man zeige, dass

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x) \mathrm{d}x.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Satz 1.3.1 (Analysis 2)? Beweisen Sie Ihre Antwort.
Tipp: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass f_n an der Stelle $x^* = 1/\left(\sqrt{3}n\right)$ maximal wird mit $f_n(x^*) = \frac{\sqrt{27}n}{16}$. (Ihr solltet allerdings in der Lage sein, dies selbst herzuleiten, und es ggf. wiederholen, falls Ihr es nicht mehr wisst.)

Aufgabe 1.4 (4 Punkte): Uneigentliche Integrale und Funktionenfolgen

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}}, \quad x \geq 0.$$

Man zeige, dass die Funktionfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert, aber

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x) \mathrm{d}x \neq \int_0^\infty \lim_{n \to \infty} f_n(x) \mathrm{d}x.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Satz 1.3.1 (Analysis 2)?

Bonusaufgabe 1.5 (2 Bonuspunkte): Stammfunktionen

Man berechne die Stammfunktionen

$$\int \cos(x) \sin(x) \mathrm{d}x.$$

[1] Keine Sorge, natürlich darf diese schöne Ungleichung mit dieser einprägsamen Abkürzung auch bei uns noch eine größere Rolle als nur diese Gastrolle auf dem Übungsblatt spielen. Sie wird uns in Kapitel 2 in diesem Semester in ihrer verallgemeinerten Form wieder begegnen.