Namen: ______________________

____

Aufgabe	0.1	0.2	0.3	0.4	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 0

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 0.1 Sei X eine Menge, J eine Indexmenge, und sei $A_j \subset X$ für alle $j \in J$. Zeigen Sie, dass

$$\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big)^c = \bigcap_{j\in J} A_j^c, \qquad \Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big)^c = \bigcup_{j\in J} A_j^c. \tag{1.1}$$

Aufgabe 0.2 Seien X, Y nicht-leere Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$. Wir definieren die Urbild–Abbildung $f^{-1}\colon \mathscr{P}(Y) \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ durch

$$f^{-1}(A) \coloneqq \{x \in X : f(x) \in A\} \qquad \text{für alle } A \subset Y. \tag{2.1}$$

a) Seien $A, B \subset Y$. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

b) Sei J eine Indexmenge und seien $A_j \subset Y$ für alle $j \in J$. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{j\in J} A_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(A_j), \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(A_j). \tag{2.2}$$

Aufgabe 0.3 Sei $\rho\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\rho(z) \coloneqq \frac{z}{1+|z|}$. Wir definieren $d, d^*\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) \coloneqq |x-y|, \qquad d^*(x,y) \coloneqq |\rho(x) - \rho(y)| \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

a) Zeigen Sie, dass d^* eine Metrik ist.

b) Sei $x_n \in \mathbb{R}$ eine Folge. Zeigen Sie, dass x_n genau dann konvergent bezüglich d ist, wenn x_n konvergent bezüglich d^* ist.

c) Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(\mathbb{R}, d^*)$ nicht vollständig ist.

Sei $\bar{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Mit der Konvention $\rho(\pm\infty) \coloneqq \pm 1$ lässt sich d^* fortsetzen auf $\bar{\mathbb{R}} \times \bar{\mathbb{R}}$.

d) Zeigen Sie, dass d^* eine Metrik auf $\bar{\mathbb{R}}$ ist.

e) Sei $x_n \in \mathbb{R}$ eine monoton steigende Folge. Zeigen Sie, dass x_n bezüglich (der fortgesetzten Metrik) d^* konvergiert.

f) Ist $(\bar{\mathbb{R}}, d^*)$ nun ein vollständiger metrischer Raum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Die Menge $\bar{\mathbb{R}}$ ist mit der Ordnung $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine totalgeordnete Menge.

Aufgabe 0.4 Sei A eine Menge. Wir definieren die charakteristische Funktion (oder Indikatorfunktion)

$$\chi_A(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.1}$$

a) Zeigen Sie, dass kein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ existiert, so dass $\chi_{\mathbb{Q}}$ eingeschränkt auf I Riemann-integrierbar ist.

b) Sei $q_k \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in $[0,1]$. Wir definieren die Folge von Funktionen $f_k \coloneqq \chi_{\{q_1,\dots,q_k\}}$. Zeigen Sie, dass $f_k \to \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ punktweise für $k \to \infty$, dass f_k Riemann-integrierbar ist für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Keine Abgabe.