Aufgabe 5.1

Da $\sup_k \|g_k\|_{L^\infty(X,\mu)}$ beschränkt ist, muss auch $\|g\|_{L^\infty(X,\mu)}$ beschränkt sein. Insbesondere ist also $C := \operatorname{ess\,sup}_{x\in E_\epsilon} |g_k - g| < \infty$ und es existiert eine integrable Funktion $h_k \geq |f||g_k - g|$. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\int_X |f_k g_k - fg|\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{k\to\infty}\int_X |f_k g_k - fg_k + fg_k - fg|\,\mathrm{d}\mu\\ &\leq \lim_{k\to\infty}\int_X |f_k - f||g_k|\,\mathrm{d}\mu + \lim_{k\to\infty}\int_X |f||g_k - g|\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Wir nutzen die Hölderungleichung

$$\leq \lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_{L^1(X,\mu)}\cdot\|g_k\|_{L^\infty(X,\mu)} + \int_X |f|\lim_{k\to\infty}|g_k - g|\,\mathrm{d}\mu$$

Da $f_k \to f$ in $L^1(X,\mu)$ erhalten wir $\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_{L^1(X,\mu)} = 0$

$$= 0 + \int_X |f|\lim_{k\to\infty}|g_k - g|\,\mathrm{d}\mu$$

Sei $E_\epsilon := \{x \in X : |f(x)| < \frac{1}{\epsilon}\}$. Dann gilt nach der Ungleichung von Chebychev $\mu(x \setminus E_\epsilon) \leq \epsilon \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \epsilon \cdot C$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

$$= \lim_{k\to\infty}\int_{E_\epsilon} |f||g_k - g|\,\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus E_\epsilon} |f||g_k - g|\,\mathrm{d}\mu$$

Der zweite Term geht gegen 0 für $k\to\infty$ nach Lemma 3.34, da $\mu(X \setminus E_\epsilon) < \infty$ ist.

$$= \lim_{k\to\infty}\int_{E_\epsilon} |f||g_k - g|\,\mathrm{d}\mu$$

Wir benutzen den Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned}&= \int_{E_\epsilon} |f|\lim_{k\to\infty}|g_k - g|\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_{E_\epsilon\cap\operatorname{spt}(\lim_{k\to\infty}|g_k - g|)} |f|\lim_{k\to\infty}|g_k - g|\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Wir benutzen die Hölderungleichung

$$\begin{aligned}&\leq \int_{E_\epsilon\cap\operatorname{spt}(\lim_{k\to\infty}|g_k - g|)} |f|\cdot\|\lim_{k\to\infty}|g_k - g|\|_{L_\infty(\operatorname{spt}(\lim_{k\to\infty}|g_k-g|),\mu)}\\ &\leq \mu(E_\epsilon\cap\operatorname{spt}(\lim_{k\to\infty}|g_k - g|))\cdot\sup_{x\in E_\epsilon\cap\operatorname{spt}(\lim_{k\to\infty}|g_k-g|)}|f|\cdot\|\lim_{k\to\infty}|g_k - g|\|_{L_\infty(\operatorname{spt}(\lim_{k\to\infty}|g_k-g|),\mu)}\\ &\leq \mu(\operatorname{spt}(\lim_{k\to\infty}|g_k - g|))\cdot\epsilon\cdot\|\lim_{k\to\infty}|g_k - g|\|_{L_\infty(\operatorname{spt}(\lim_{k\to\infty}|g_k-g|),\mu)}\end{aligned}$$

Da $g_k \to g$ punktweise fast überall, ist $\mu(\operatorname{spt}(\lim_{k\to\infty}|g_k - g|)) = 0$

$$= 0$$

Aufgabe 5.2

(a) Es gilt für $f \in L^1(X,\mu) \cap L^\infty(X,\mu)$ $f_{L^p(X,\mu)}$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(X,\mu)} &= \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_X |f||f|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\|f\|_{L^1(X,\mu)}\|f^{p-1}\|_{L^\infty(X,\mu)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{L^1(X,\mu)}^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_{L^1(X,\mu)}^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\|f\|_{L^p(X,\mu)} < \infty$ und damit $f \in L^p(X,\mu)$. Da f beliebig gewählt war, folgt damit die Aussage.

(b) Sei $f \in L^q(X,\mu)$. Dann gilt

$$\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |1||f|^p \,\mathrm{d}\mu$$

Wegen $1 \leq \frac{q}{p}$ erhalten wir mit der Hölderungleichung

$$\begin{aligned}
&\leq \|1\|_{L^{\frac{q}{q-p}}(X,\mu)} \cdot \|f^p\|_{L^{\frac{q}{p}}(X,\mu)} \\
&= \left(\int_X |1|^{\frac{q}{q-p}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_X |f^p|^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}} \\
&= \mu(X)^{1-\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_X |f|^q\right)^{\frac{p}{q}} \\
\left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} &= \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_X |f|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
\|f\|_{L^p(X,\mu)} &\leq C(\mu(X),p,q) \cdot \|f\|_{L^q(X,\mu)}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\|f\|_{L^p(X,\mu)} < \infty$ und damit $f \in L^p(X,\mu)$. Da f beliebig gewählt war, folgt damit die Aussage.

Aufgabe 3

(a) Es gilt

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_X |f_k - f| \,\mathrm{d}\mu \geq \lim_{k\to\infty} \int_X f_k - f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu - \int_X f \,\mathrm{d}mu\,,$$

also erhalten wir die Ungleichung $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq \lim\limits_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu$ und

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_X |f_k - f| \,\mathrm{d}\mu \geq \lim_{k\to\infty} \int_X f - f_k \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}mu - \lim_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu\,,$$

also erhalten wir die Ungleichung $\lim\limits_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \;\geq\; \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Beide Ungleichungen zusammen ergeben $\lim\limits_{k\to\infty} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Nun verwenden wir die Dreiecksungleichung in der Form $|x-y| \geq ||x|-|y||$ Es gilt daher

$$\lim_{k\to\infty} \int_X |f_k - f| \,\mathrm{d}\mu \geq \lim_{k\to\infty} \int_X ||f_k| - |f|| \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Nun können wir die eben bewiesene Aussage anwenden und erhalten $\lim\limits_{k\to\infty} \int_X |f_k| \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.

(b) f_k sind messbare Funktionen mit $f_k \to f$ μ-f.ü. und $\forall k\colon |f_k| \leq g$ μ-f.ü., wobei g integrabel, also Insbesondere $g \in L^1(X,\mu)$ ist. Mit Bemerkung 3.27(i) (oder 3.26(i) je nach Version des Skriptes) folgt $f_k \to f$ in $L^1(X,\mu)$

(c) Sei $E_\epsilon = \{x \in X\colon |f(x) - f_k(x)| \leq \epsilon\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_X |f_k - f| \,\mathrm{d}\mu &= \int_{X\setminus E_\epsilon} |f_k - f| \,\mathrm{d}\mu + \int_{E_\epsilon} |f_k - f| \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \mu(X \setminus E_\epsilon) \cdot \sup_{x\in X\setminus E_\epsilon} |f_k - f| + \mu(E_\epsilon) \cdot \sup_{x\in E_\epsilon} |f_k - f|\end{aligned}$$

Da $\sup_k \|f_k\|_{L^\infty(X,\mu)}$ beschränkt ist, muss auch $\|f\|_{L^\infty(X,\mu)}$ beschränkt sein. Insbesondere ist also $C := \sup_{x\in E_\epsilon} |f_k - f| < \infty$.

$$= \mu(\{x \in X\colon |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}) \cdot C + \mu(X) \cdot \epsilon$$

Es gilt $\mu(X) < \infty$, da μ ein endliches Maß ist. Nun betrachten wir den Grenzwert und erhalten per Definition der Maßkonvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{x \in X\colon |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}) \cdot C + \mu(X) \cdot \epsilon = 0 + \mu(X) \cdot \epsilon.$$

Im Limes $\epsilon \to 0$ folgt die Behauptung

$$\lim_{k\to\infty} \int_X |f_k - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$$