Lineare Algebra 2 — Übungsblatt 11

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: Do 16.07.2020 um 9:15 Uhr

---

40. Aufgabe: *(1,5+1,5+1,5+1,5 Punkte, Quotientenkörper)* In dieser Aufgabe sollen Teile der Beweise von Satz 11.1 und Satz 11.3 ausgearbeitet werden. Seien dazu R ein nullteilerfreier Ring und M ein R-Modul.

(a) Man zeige, dass auf der Menge $R \times (R \setminus \{0\})$ durch $(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) :\Leftrightarrow r_1 s_2 = r_2 s_1$ eine Äquivalenzrelation definiert wird.

(b) Sei $Q(R) := (R \times (R \setminus \{0\}))/\sim$ mit der Äquivalenzrelation $\sim$ aus (a). Wir schreiben $\frac{r}{s}$ für die Äquivalenzklasse von (r, s) in $Q(R)$. Man zeige, dass die Operationen

$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} := \frac{r_1 s_2 + r_1 s_1}{s_1 s_2} \quad \text{und} \quad \frac{r_1}{s_1} \cdot \frac{r_2}{s_2} := \frac{r_1 r_2}{s_1 s_2}$$

auf $Q(R)$ wohldefiniert sind.

(c) Man zeige, dass auf der Menge $M \times (R \setminus \{0\})$ durch

$$(x_1, r_1) \sim (x_2, r_2) :\Leftrightarrow \text{es existiert } s \in R \setminus \{0\} \text{ mit } s r_1 x_2 = s r_2 x_1$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird.

(d) Man zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass auf der Menge $M \times (R \setminus \{0\})$ durch

$$(x_1, r_1) \sim (x_2, r_2) :\Leftrightarrow r_1 x_2 = r_2 x_1$$

im Allgemeinen *keine* Äquivalenzrelation definiert wird.

41. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Torsionsmoduln und der Annulator)*

(a) Seien R ein nullteilerfreier Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) M ist ein Torsions-R-Modul.

(ii) Es gilt $\operatorname{Ann}(M) \neq (0)$.

(b) Seien nun $R = \mathbb{Z}$ und $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Man zeige, dass M ein Torsions-R-Modul ist, und dass $\operatorname{Ann}(M) = (0)$ gilt.

42. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Länge, Rang und Torsion)* Sei M der $\mathbb{R}[t]$-Modul $\mathbb{R}[t]/(t^2)$.

(a) Man bestimme alle Torsionselemente in M sowie den Rang von M.

(b) Via der natürlichen Inklusion $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}[t]$ (als konstante Polynome) betrachten wir M als $\mathbb{R}$-Modul. Man bestimme alle Torsionselemente von M als $\mathbb{R}$-Modul sowie den Rang von M als $\mathbb{R}$-Modul.

(c) Man bestimme die Länge $\ell(M)$ von M sowie alle Kompositionsfaktoren von M.

Hinweis: Man erinnere sich an Bemerkung 6.7.

43. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Länge von Moduln)* Seien R ein Ring, M und N zwei R-Moduln und $\varphi\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Man zeige:

(a) Es gilt $\ell(\ker(\varphi)) + \ell(\operatorname{im}(\varphi)) = \ell(M)$.

Hinweis: Man verwende Folgerung 12.15.

(b) Ist $\ell(M) < \infty$, so gilt $\ell(L) < \ell(M)$ für jeden echten R-Untermodul $L \subsetneq M$.

(c) Ist $\ell(M) < \infty$ und $N = M$, so gilt

$$\varphi \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow \varphi \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow \varphi \text{ ist bijektiv}.$$

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.