

## Aufgabe 1

- (a) Zunächst benötigen wir eine projektive Auflösung von  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ . Als  $\mathbb{Z}$ -Modul ist  $\mathbb{Z}$  frei und damit projektiv. Insbesondere ist  $P_\bullet := 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \rightarrow 0$  eine projektive Folge. Es gilt  $H_0(P_\bullet) = \ker(\mathbb{Z} \rightarrow 0)/\operatorname{im}(\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ,  $H_1(P_\bullet) = \ker(\mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z})/\operatorname{im}(0 \rightarrow \mathbb{Z}) = 0/0 = 0$  und  $H_{\geq 2}(P_\bullet) = 0/0 = 0$ . Folglich handelt es sich um eine projektive Auflösung von  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

Es gilt  $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = L_i(\bar{\otimes}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = H_n(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Es gilt

$$\begin{aligned} P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &= 0 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m \otimes 1_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0 \\ &\cong 0 \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

wobei die zweite Zeile kanonisch isomorph zur ersten ist, insbesondere also die selben Homologiegruppen besitzt. Es folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &= H_0(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\operatorname{im}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= \mathbb{Z}/((n) + (m)) \\ &= \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(n, m)\mathbb{Z} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &= H_1(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= \ker(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= (n) : (m)/(n) \\ &= \frac{n}{\operatorname{ggT}(n, m)}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Für alle weiteren Homologiegruppen gilt,  $i \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &= H_i(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \\ &= \ker(0)/\operatorname{im}(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (b) Wir konstruieren zunächst wieder eine projektive Auflösung von  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . Fallunterscheidung:

- 1)  $\operatorname{ggT}(d, n/d) = 1$  oder  $\operatorname{ggT}(e, n/e) = 1$  (vertausche dann OE  $e$  und  $d$ ).

**Behauptung:**  $\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(e, d)\mathbb{Z}$  und  $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) = 0 \forall i \geq 1$ .

*Beweis.*  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  ist in diesem Fall ein projektiver  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Modul und durch  $0 \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \rightarrow 0$  ist eine projektive Auflösung gegeben, da  $H_0 = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  und  $H_i = 0/0 = 0 \forall i \geq 1$ . Durch tensorieren mit  $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$  erhalten wir die Folge  $0 \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Dabei ist  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$  kanonisch isomorph zu  $\mathbb{Z}/((d) + (e)) = \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(e, d)\mathbb{Z}$ . Insbesondere gilt  $\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} = \ker(\mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(e, d)\mathbb{Z} \rightarrow 0)/\operatorname{im} 0 = \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(e, d)\mathbb{Z}$  und  $\operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) = 0/0 = 0 \forall i \geq 1$ .  $\square$

- 2)  $\text{ggT}(d, n/d) \neq 1$  und  $\text{ggT}(e, n/e) \neq 1$ . Behauptung: Der folgende Komplex ist eine projektive Auflösung für  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  als  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Modul.

$$\dots \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (1)$$

*Beweis.* Wir berechnen die Homologiegruppen. Es gilt

$$H_0 = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/d(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z},$$

sowie

$$H_1 = (\ker \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(n/d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (n/d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(n/d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$$

und

$$H_2 = (\ker \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(d\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0.$$

Aufgrund der Periodizität der Auflösung sind auch alle weiteren Homologiegruppen 0.  $\square$

Wir tensorieren den Komplex ?? mit  $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$  und erhalten

$$\dots \xrightarrow{\cdot d \otimes 1_{\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d \otimes 1_{\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d \otimes 1_{\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (2)$$

Es existiert ein kanonischer Komplexisomorphismus zu folgendem Komplex

$$\dots \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (3)$$

Daraus berechnen wir nun die gesuchten Werte des Tor-Funktors. Es gilt

$$\text{Tor}_0^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})/d(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/((d) + (e)) = \mathbb{Z}/\text{ggT}(e, d)\mathbb{Z},$$

für alle weiteren  $i$  ist der Komplex periodisch, also auch die Homologiegruppen. Es gilt  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Tor}_{2k-1}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) &= \ker(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) / \text{im}(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) \\ &= \frac{((e) : (d)) / (e)}{(n/d) \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})} \\ &= \frac{\left( \frac{e}{\text{ggT}(e, d)} \right) / (e)}{((n/d) + (e)) / (e)} \\ &= \frac{\left( \frac{e}{\text{ggT}(e, d)} \right)}{(\text{ggT}(n/d, e))} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Tor}_{2k}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) &= \ker(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n/d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) / \text{im}(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}) \\ &= \frac{((e) : (n/d)) / (e)}{(d) \cdot (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})} \\ &= \frac{\left( \frac{e}{\text{ggT}(e, n/d)} \right) / (e)}{((d) + (e)) / (e)} \\ &= \frac{\left( \frac{e}{\text{ggT}(e, n/d)} \right)}{(\text{ggT}(d, e))}. \end{aligned}$$

## Aufgabe 2

(a)  $\mathbb{C}[X, Y]$  und  $\mathbb{C}[X, Y]^2$  sind frei als  $\mathbb{C}[X, Y]$ -Moduln, also insbesondere projektiv.

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[X, Y] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}[X, Y]^2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}[X, Y] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \rightarrow 0 \quad (4)$$

Daher genügt es Exaktheit der Folge ?? nachzuweisen. Es gilt  $\alpha(x) = 0 \implies x(X, -Y) = 0 \implies Xx = 0 \implies x = 0$ . Insbesondere ist  $\ker \alpha = 0$ . Weiter gilt  $\beta \circ \alpha(x) = \beta(x \cdot (X, -Y)) = xYX - xXY = 0$ . Sei  $(f, g) \in \ker \beta$ . Dann ist  $Yf = -gX$ . Insbesondere ist  $f \in (X)$  und  $g \in (Y)$ , also  $f = \tilde{f}X, g = \tilde{g}Y$  und wir erhalten

$$\tilde{f}XY = -\tilde{g}YX \implies \tilde{f} = -\tilde{g} \implies (f, g) = \tilde{f}(X, -Y) = \alpha(\tilde{f}) \in \operatorname{im} \alpha.$$

Desweiteren ist  $\operatorname{im} \beta = (X, Y)$ , da  $\beta(0, 1) = Y$  und  $\beta(1, 0) = X$  gilt. Wegen  $\varepsilon(X) = \varepsilon(Y) = 0$  und  $\varepsilon|_{\mathbb{C}} = \operatorname{id}_{\mathbb{C}}$  ist  $\ker \varepsilon = (X, Y) = \operatorname{im} \beta$ . Schließlich ist  $\operatorname{im} \varepsilon = \mathbb{C} = \ker(\mathbb{C} \rightarrow 0)$ . Damit ist die Exaktheit von ?? gezeigt und es handelt sich bei

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[X, Y] \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}[X, Y]^2 \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}[X, Y] \rightarrow 0 \quad (5)$$

wegen  $H_0(??) = \mathbb{C}[X, Y]/(X, Y) = \mathbb{C}$  um eine projektive Auflösung von  $\mathbb{C}$ .

(b) Wir tensorieren ?? mit  $\mathbb{C}$  und erhalten

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[X, Y] \otimes_{\mathbb{C}[X, Y]} \mathbb{C} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C}[X, Y]^2 \otimes_{\mathbb{C}[X, Y]} \mathbb{C} \xrightarrow{\beta} \mathbb{C}[X, Y] \otimes_{\mathbb{C}[X, Y]} \mathbb{C} \rightarrow 0 \quad (6)$$

Es gilt  $\mathbb{C} = \mathbb{C}[X, Y]/(X, Y)$ . Behauptung: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{C}[X, Y] \otimes_{\mathbb{C}[X, Y]} \mathbb{C} & \xrightarrow{\alpha \otimes 1_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C}[X, Y]^2 \otimes_{\mathbb{C}[X, Y]} \mathbb{C} & \xrightarrow{\beta \otimes 1_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C}[X, Y] \otimes_{\mathbb{C}[X, Y]} \mathbb{C} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \downarrow \phi \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{0} & \mathbb{C} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (7)$$

kommutiert, wobei  $\phi$  jeweils den kanonischen Isomorphismus aus Satz 3.9 bezeichne und  $\psi$  den Isomorphismus aus Korollar 3.8.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst  $\psi \circ (\alpha \otimes 1_{\mathbb{C}}) = 0$ . Sei  $x = \sum_{i=1}^n f_i \otimes c_i \in \mathbb{C}[X, Y] \otimes_{\mathbb{C}[X, Y]} \mathbb{C}$ . Dann gilt

$$\psi((\alpha \otimes 1_{\mathbb{C}})(x)) = \psi\left(\sum_{i=1}^n f_i(X, Y) \otimes c_i\right) = \sum_{i=1}^n (f_i c_i X, f_i c_i Y) = \sum_{i=1}^n (0, 0) = 0,$$

da die  $\mathbb{C}[X, Y]$ -Modulstruktur gegeben ist durch  $X \cdot c = \varepsilon(X) \cdot c = 0, Y \cdot c = \varepsilon(Y) \cdot c = 0$ . Außerdem gilt  $\phi \circ (\beta \otimes 1_{\mathbb{C}}) = 0$ . Sei nämlich  $x = \sum_{i=1}^n (f_i, g_i) \otimes c_i$ . Dann gilt

$$\phi((\beta \otimes 1_{\mathbb{C}})(x)) = \phi\left(\sum_{i=1}^n (Y f_i + X g_i) \otimes c_i\right) = \sum_{i=1}^n (Y f_i c_i + X g_i c_i) = 0,$$

da die  $\mathbb{C}[X, Y]$ -Modulstruktur gegeben ist durch  $X \cdot c = \varepsilon(X) \cdot c = 0, Y \cdot c = \varepsilon(Y) \cdot c = 0$ .  $\square$

Insgesamt erhalten wir also einen Isomorphismus von Komplexen, die demnach insbesondere dieselben Homologiegruppen besitzen. Daraus folgern wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) &= \ker(\mathbb{C} \rightarrow 0) / \mathrm{im}(\mathbb{C}^2 \xrightarrow{0} \mathbb{C}) = \mathbb{C}/0 = \mathbb{C} \\ \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) &= \ker(\mathbb{C}^2 \rightarrow 0) / \mathrm{im}(\mathbb{C} \xrightarrow{0} \mathbb{C}^2) = \mathbb{C}^2/0 = \mathbb{C}^2 \\ \mathrm{Tor}_2^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) &= \ker(\mathbb{C} \rightarrow 0) / \mathrm{im}(0 \rightarrow \mathbb{C}) = \mathbb{C}/0 = \mathbb{C} \\ \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) &= \ker(0 \rightarrow 0) / \mathrm{im}(0 \rightarrow 0) = 0/0 = 0 \forall i \geq 3\end{aligned}$$

- (c) Da es sich bei  $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{C}[X,Y]}$  um einen Funktor handelt, sind die Werte  $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  unabhängig von der Wahl der Auflösung. Gäbe es eine kürzere projektive Auflösung  $P_\bullet$  von  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{C}[X, Y]$ -Modul, so wäre für diese Auflösung  $H_2(P_\bullet \otimes \mathbb{C}) = \ker(0 \rightarrow P_1) / \mathrm{im}(0 \rightarrow 0) = 0$ , Widerspruch. Daher gibt es keine kürzere projektive Auflösung von  $\mathbb{C}$  als  $\mathbb{C}[X, Y]$ -Modul.