Einführung in die
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Prof. Dr. Jan Johannes
Sergio Brenner Miguel
Wintersemester 2020/21

UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

4. Übungsblatt - Lösungsskizzen

Aufgabe 13 (Das Bildmaß, 4 = 1.5 + 1 + 1.5 Punkte).
Seien $(\Omega, \mathscr{A})$, $(\mathcal{X}, \mathscr{B})$, $(\mathcal{Y}, \mathscr{C})$ Messräume, $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{X}$ eine $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-messbare Abbildung und $Y : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ eine $(\mathscr{B}, \mathscr{C})$-messbare Abbildung. Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{A})$.

(a) Das **Bildmaß** bzw. **induzierte Maß** von $\mathbb{P}$ unter X auf $(\mathcal{X}, \mathscr{B})$ ist definiert durch

$$\mathbb{P}^X : \mathscr{B} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathbb{P}^X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Zeigen Sie: $\mathbb{P}^X$ ist tatsächlich ein Maß auf $(\mathcal{X}, \mathscr{B})$.

(b) Zeigen Sie die Verträglichkeit des Bildmaßes mit der Komposition von Abbildungen, d.h. zeigen Sie

$$\left(\mathbb{P}^X\right)^Y = \mathbb{P}^{(Y \circ X)}.$$

(c) Es sei nun $\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ und $\mathbb{P}$ als Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, 2^\Omega)$ definiert durch

$$\mathbb{P}(\{n\}) := 2^{-n-1}.$$

Weiter sei eine (messbare) Abbildung definiert durch

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad X(n) := n \mod 3.$$

Bestimmen Sie das induzierte Maß $\mathbb{P}^X$ auf $(\mathcal{X}, \mathscr{B}) := (\mathrm{Bild}(X), 2^{\mathrm{Bild}(X)})$, das durch

$$\mathbb{P}^X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

gegeben ist.

Lösung 13.

(a) Da X messbar ist, gilt $\forall A \in \mathscr{B} : X^{-1}(A) \in \mathscr{A}$ und somit das Maß $\mathbb{P}(X^{-1}(A))$ überhaupt erst berechenbar. Daher ist $\mathbb{P}^X$ wohldefiniert.
Wir zeigen für $\mathbb{P}^X$ die drei Eigenschaften eines Maßes, die im Wesentlichen von $\mathbb{P}$ vererbt werden:

- Es gilt $\mathbb{P}^X(\emptyset) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}(\emptyset) \overset{\mathbb{P}\text{ Maß}}{=} 0$.
- Sei $A \in \mathscr{B}$ beliebig. Dann gilt $\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) \overset{\mathbb{P}\text{ Maß}}{\geq} 0$.

► Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^X\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) \overset{\text{Urbild-Eig.}}{=} \mathbb{P}\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n)\right)\\ &\overset{\mathbb{P}\text{ Maß}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X^{-1}(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}^X(A_n).\end{aligned}$$

(b) Sei $A \in \mathscr{C}$, dann gilt

$$\left(\mathbb{P}^X\right)^Y(A) = \mathbb{P}^X(Y^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X^{-1}(Y^{-1}(A))) = \mathbb{P}((Y\circ X)^{-1}(A) = \mathbb{P}^{Y\circ X}(A).$$

(c) Es ist $\mathcal{X} = \text{Bild}(X) = \{0,1,2\}$ und $\mathscr{B} = 2^{\mathcal{X}}$. Ein Maß können wir auf dem Raum $\mathcal{X}$ (da er abzählbar ist) durch Angabe auf den einelementigen Mengen $\{x\}$, $x \in \mathcal{X}$ eindeutig angeben. Das heißt, wir müssen folgende Terme bestimmen:

$$\mathbb{P}^X(\{x\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\})), \qquad x \in \{0,1,2\}.$$

Es gilt $X^{-1}(\{x\}) = 3\mathbb{N}_0 + x = \{3n + x : n \in \mathbb{N}_0\}$. Daher folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^X(\{x\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\})) = \mathbb{P}(\{3n+x : n\in\mathbb{N}_0\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{3n+x\}) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(3n+x)-1}\\ &= 2^{-x-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n = 2^{-x-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}\cdot 2^{-x-1},\end{aligned}$$

konkret

$$\mathbb{P}^X(\{0\}) = \frac{4}{7}, \quad \mathbb{P}^X(\{1\}) = \frac{2}{7}, \quad \mathbb{P}^X(\{2\}) = \frac{1}{7}.$$

Aufgabe 14 (Transformation von Zufallsvariablen, 4 = 1.5 + 1 + 1.5 Punkte).

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetig-verteilte Zufallsvariable.

(a) Sei $X \sim U_{[0,1]}$, d.h. X ist gleichverteilt auf $[0,1]$ mit Dichte $\mathbb{f}^X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x), x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Dichte $\mathbb{f}^Y$ von $Y := -2\log(X)$. Welche (bekannte) Verteilung besitzt Y?

(b) Sei $X \sim \text{Exp}_\lambda$, d.h. X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ und Dichte $\mathbb{f}^X(x) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)\lambda\exp(-\lambda x), x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Dichte $\mathbb{f}^Y$ von $Y := \alpha X$, wobei $\alpha > 0$. Welche (bekannte) Verteilung besitzt Y?

(c) Sei $X \sim U_{[-1,1]}$, d.h. X ist gleichverteilt auf $[-1,1]$ mit Dichte $\mathbb{f}^X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x), x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Dichte $\mathbb{f}^Y$ von $Y := X^2$.

Lösung 14.

(a) Wir benutzen Satz 10.08. (Dichtetransformation). Wir haben $Y = g(X)$ mit $g(x) = -2\log(x)$. g ist stetig differenzierbar und streng monoton fallend. Damit gilt für die Dichte von Y:

$$\mathbb{f}^Y(y) = \mathbb{f}^X(g^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)\right|.$$

Hier ist $\mathbb{f}^X(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ und $g^{-1}(y) = \exp(-y/2)$, $\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y) = -\frac{1}{2}\exp(-y/2)$. Damit

$$\mathbb{f}^Y(y) = \mathbb{1}_{\{0\le \exp(-y/2)\le 1\}} \cdot \frac{1}{2}\exp(-y/2) = \frac{1}{2}\exp(-y/2)\cdot \mathbb{1}_{\{y\ge 0\}},$$

das ist die Dichte einer $\mathrm{Exp}_{1/2}$-Verteilung, d.h. $Y \sim \mathrm{Exp}_{1/2}$.
(b) Wir können hier direkt Korollar 10.10 aus der Vorlesung über die linearen Transformation von Zufallsvariablen benutzen. Es gilt für die Dichte von Y:

$$\mathbb{f}^Y(y) = \frac{1}{\alpha}\mathbb{f}^X(\frac{y}{\alpha}) = \frac{\lambda}{\alpha}\exp(-\frac{\lambda}{\alpha}y)\mathbb{1}_{\{y/\alpha\ge 0\}} = \frac{\lambda}{\alpha}\exp(-\frac{\lambda}{\alpha}y)\mathbb{1}_{\{y\ge 0\}},$$

das ist die Dichte einer $\mathrm{Exp}_{\lambda/\alpha}$-Verteilung.
(c) Hier kann kein Satz der Vorlesung benutzt werden, da die Funktion $x \mapsto x^2$ auf $[-1,1]$ nicht bijektiv ist. Wir müssen die Verteilung elementar berechnen. Die Dichte von X lautet $\mathbb{f}^X(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, die Verteilungsfunktion entsprechend für $x \in [-1,1]$: $\mathbb{F}^X(x) = \frac{x+1}{2}$. Wir erhalten für die Verteilungsfunktion von Y für $y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^Y(y) &= \mathbb{P}(Y\le y) = \mathbb{P}(X^2 \le y) = \mathbb{P}(X^2\le y, X\ge 0) + \mathbb{P}(X^2 \le y, X<0)\\
&= \mathbb{P}(0\le X\le \sqrt{y}) + \mathbb{P}(-\sqrt{y}\le X<0) \overset{\text{Symmetrie}}{=} 2\mathbb{P}(0\le X\le\sqrt{y})\\
&= 2\Big(\mathbb{F}^X(\sqrt{y}) - \mathbb{F}^X(0)\Big) = 2\Big(\frac{\sqrt{y}+1}{2} - \frac{1}{2}\Big) = \sqrt{y}.
\end{aligned}$$

Für die Dichte erhalten wir durch Ableiten:

$$\mathbb{f}^Y(y) = (\mathbb{F}^Y)'(y) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}.$$

Da $X \in [-1,1]$, ist $Y = X^2 \in [0,1]$. Für $y \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ gilt daher $\mathbb{f}^Y(y) = 0$.

Aufgabe 15 (Inversionsmethode, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Um Realisierungen von stetig verteilten Zufallsvariablen auf dem Computer zu erzeugen, wird häufig auf die Inversionsmethode zurückgegriffen. Damit beschäftigt sich diese Aufgabe.
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine stetig verteilte Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $\mathscr{F} : \mathbb{R} \to [0,1]$.

(a) Definiere $\mathbb{F}^*(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{F}(x) \ge y\}$. Zeigen Sie, dass für alle $y \in [0,1], z \in \mathbb{R}$ gilt: $\mathbb{F}^*(y) \le z \Leftrightarrow y \le \mathbb{F}(z)$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst mittels der rechtsseitigen Stetigkeit von F, dass $F(F^*(y)) \ge y$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Ist $Y \sim U[0,1]$, dann hat $\mathbb{F}^*(Y)$ dieselbe Verteilung wie X.

Nehmen Sie nun an, dass $\mathbb{F}$ stetig und streng monoton wachsend auf $D_{\mathbb{F}} := \mathbb{F}^{-1}((0,1))$ ist. In diesem Fall ist $\mathbb{F} : D_{\mathbb{F}} \to (0,1)$ offenbar invertierbar und es gilt $\mathbb{F}^* = \mathbb{F}^{-1}$ auf dem offenen Intervall $(0,1)$, wobei $\mathbb{F}^{-1} : (0,1) \to D_{\mathbb{F}}$ die Umkehrfunktion von $\mathbb{F} : D_{\mathbb{F}} \to (0,1)$ bezeichnet.

(c) Sei $\lambda > 0$. Auf ihrem Computer können Sie nur Realisierungen einer $U[0,1]$-verteilten Zufallsvariable Y erzeugen. Geben Sie eine Funktion $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ an, so dass Sie durch $G(Y)$ Realisierungen einer Exp_λ-verteilten Zufallsvariable erhalten.

Lösung 15.

(a) Sei $y \in [0,1]$ beliebig. Sei $w := \mathbb{F}^*(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{F}(x) \geq y\}$. Nach Definition des Infimums gibt es eine monoton fallende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \downarrow \mathbb{F}^*(y)$ und $\mathbb{F}(x_n) \geq y$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Rechtsstetigkeit von $\mathbb{F}$ gilt

$$y \leq \mathbb{F}(x_n) \to \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y)),$$

also

$$y \leq \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y)). \tag{1}$$

Sei nun $z \in \mathbb{R}$ beliebig.

- Gelte $\mathbb{F}^*(y) \leq z$. Da $\mathbb{F}$ monoton wachsend ist, folgt $y \overset{(1)}{\leq} \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y)) \leq \mathbb{F}(z)$.
- Gelte $y \leq \mathbb{F}(z)$. Dann ist z in der Menge $\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{F}(x) \geq y\}$, über die bei $\mathbb{F}^*$ das Infimum gebildet wird. Also gilt sicher $\mathbb{F}^*(y) \leq z$.

(b) Für die Verteilungsfunktion von $\mathbb{F}^*(Y)$ erhalten wir:

$$\mathbb{P}(\mathbb{F}^*(Y) \leq z) \overset{(a)}{=} \mathbb{P}(Y \leq \mathbb{F}(z)) \overset{Y\sim U[0,1]}{=} \int_0^{\mathbb{F}(z)} \mathrm{d}x = \mathbb{F}(z),$$

das heißt, $\mathbb{F}^*(Y)$ und X haben die gleiche Verteilungsfunktion. Damit haben diese beiden Zufallsvariablen dieselbe Verteilung.

(c) *Anmerkung: Da $\mathbb{F}$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{F}^{-1}((0,1))$ ist, ist die Funktion $\mathbb{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{F}(\mathbb{R})$ bijektiv und besitzt eine Umkehrfunktion $\mathbb{F}^{-1}$. Weil $\mathbb{F}$ eine Verteilungsfunktion ist, gilt $\lim_{x\to-\infty} \mathbb{F}(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} \mathbb{F}(x) = 1$, weswegen zusammen mit der angenommenen Stetigkeit sicher $(0,1) \subseteq \mathbb{F}(\mathbb{R})$ gilt. Ob $\mathbb{F}$ die Werte 0 oder 1 tatsächlich annimmt, ist nicht klar und bei dieser Aufgabe auch nicht von Belang.*
Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ lautet die Verteilungsfunktion

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Hier ist $D_\mathbb{F} = \mathbb{F}^{-1}((0,1)) = (0,\infty)$. Wegen $y = 1 - e^{-\lambda x} \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - y \Leftrightarrow -\lambda x = \ln(1-y) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$ lautet die Umkehrfunktion von $\mathbb{F} : D_\mathbb{F} \to (0,1)$:

$$\mathbb{F}^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y).$$

Dies motiviert uns in Hinsicht auf (b) zu folgender Definition:

$$G(y) := \begin{cases} -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y), & y \in (0,1) \\ 0, & y \in \{0,1\} \end{cases}.$$

Laut (b) und dem Hinweis $\mathbb{F}^* = \mathbb{F}^{-1}$ auf $(0,1)$ gilt damit: $\mathbb{F}^*(Y) = \mathbb{F}^{-1}(Y) = G(Y)$ hat dieselbe Verteilung wie X.
Beachte hierbei, dass das Verhalten von $\mathbb{F}^*$ bzw. $\mathbb{F}^{-1}$ bzw. G an den Werten 0 und 1 nicht von Belang ist, da Y stetig verteilt ist (gleichverteilt) und damit die Werte $Y = 0$ oder

$Y = 1$ nur mit Wahrscheinlichkeit 0 auftreten.
Formal exakt könnte man argumentieren, dass für die Verteilungsfunktion von $G(Y)$ gilt:

$$\mathbb{P}(G(Y) \le z) = \mathbb{P}(G(Y) \le z, Y \in (0,1)) = \mathbb{P}(\mathbb{F}^*(Y) \le z, Y \in (0,1)) = \mathbb{P}(\mathbb{F}^*(Y) \le z) = \mathbb{F}(z),$$

womit $G(Y)$ und X dieselbe Verteilungsfunktion besitzen, also dieselbe Verteilung.

Aufgabe 16 (Gemeinsame Verteilungen, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\lambda > 0$ und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei stetige Zufallsvariablen mit gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\mathbb{f}^{X,Y}(x, y) = C_\lambda \cdot \exp(-\lambda y) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}}.$$

(a) Bestimmen Sie $C_\lambda > 0$, sodass $\mathbb{f}^{X,Y}$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie die Randdichten $\mathbb{f}^X$ und $\mathbb{f}^Y$ von X bzw. Y.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X \ge Y)$ und $\mathbb{P}(2X \le Y)$.

Lösung 16.

(a) $\mathbb{f}^{X,Y} \ge 0$ ist offensichtlich und muss nicht nachgerechnet werden. Damit $\mathbb{f}^{X,Y}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muss gelten:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{f}^{X,Y} d(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_\lambda \cdot \exp(-\lambda y) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= C_\lambda \int_0^\infty \int_x^\infty \cdot \exp(-\lambda y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{C_\lambda}{\lambda} \int_0^\infty \Big[-\exp(-\lambda y) \Big]_x^\infty \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{C_\lambda}{\lambda} \int_0^\infty \exp(-\lambda x) \, \mathrm{d}x = \frac{C_\lambda}{\lambda^2} \Big[-\exp(-\lambda x) \Big]_0^\infty = \frac{C_\lambda}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Damit muss $C_\lambda = \lambda^2$ sein.

(b) Um die Randdichten zu bestimmen, müssen die überflüssigen Variablen aus der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichte von X, Y herausintegriert werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{f}^X(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{f}^{X,Y}(x, y) \, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \exp(-\lambda y) \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}}}_{=\mathbb{1}_{\{0 \le x\}} \cdot \mathbb{1}_{\{x \le y\}}} \, \mathrm{d}y \\ &= \int_x^\infty \lambda^2 \exp(-\lambda y) \, \mathrm{d}y \cdot \mathbb{1}_{\{0 \le x\}} = \Big[-\lambda \exp(-\lambda y) \Big]_x^\infty \cdot \mathbb{1}_{\{0 \le x\}} = \lambda \exp(-\lambda x) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \le x\}}, \\ \mathbb{f}^Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{f}^{X,Y}(x, y) \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \exp(-\lambda y) \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}}}_{=\mathbb{1}_{\{0 \le x \le y\}} \cdot \mathbb{1}_{\{0 \le y\}}} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^y \lambda^2 \exp(-\lambda y) \, \mathrm{d}x \cdot \mathbb{1}_{\{0 \le y\}} = \Big[\lambda^2 \exp(-\lambda y) \cdot x \Big]_0^y = \lambda^2 \cdot y \exp(-\lambda y) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \le y\}}. \end{aligned}$$

(c) Es ist

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq Y) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y\}) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq y\}} \mathbb{f}^{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} \lambda^2 \exp(-\lambda y) \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y\}}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{\infty} \int_{x}^{x} \lambda^2 \exp(-\lambda y) \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y\}}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = \int_0^\infty 0\ \mathrm{d}x = 0.
\end{aligned}
$$

Weiter haben wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(2X \leq Y) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x \leq y\}) = \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x \leq y\}} \mathbb{f}^{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{2x}^{\infty} \lambda^2 \exp(-\lambda y) \cdot \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq y\}}\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x \\
&\overset{x \leq 2x}{=} \int_{0}^{\infty} \int_{2x}^{\infty} \lambda^2 \exp(-\lambda y)\ \mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}x = \int_0^\infty \Big[-\lambda \exp(-\lambda y) \Big]_{2x}^{\infty}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \lambda \exp(-2\lambda x)\ \mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{2} \exp(-2\lambda x) \Big]_0^\infty = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Montag, den **07. Dezember 2020, 09:00 Uhr**.

Homepage der Vorlesung:
`https://sip.math.uni-heidelberg.de/vl/ews-ws20/`