Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2022

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. K. Hübner
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 6
Abgabe: *Freitag, 03.06.2022, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Diskrete Moduln). **(4 Punkte)**
Sei G eine proendliche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist A ein *endlich erzeugter* diskreter G-Modul und B ein beliebiger diskreter G-Modul, so ist auch $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)$ ein diskreter G-Modul.

(b) Der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ ist genau dann ein diskreter G-Modul, wenn G endlich ist.

Aufgabe 2 (Limites kohomologisch trivialer Moduln). **(4 Punkte)**
Sei G eine endliche Gruppe und sei $(A_0 \leftarrow A_1 \leftarrow \dots)$ ein inverses System von G-Moduln. Zeigen Sie:

(a) Der inverse Limes $A := \varprojlim_i A_i$ abelscher Gruppen hat eine kanonische Struktur als G-Modul.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Untergruppe H von G ist die kanonische Abbildung

$$C^n(H,A) \longrightarrow \varprojlim_i C^n(H,A_i)$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

(c) Sind alle A_i kohomologisch trivial, so ist A kohomologisch trivial.

(d) Im Allgemeinen ist die kanonische Abbildung

$$\mathrm{H}^*(G,A) \longrightarrow \varprojlim_i \mathrm{H}^*(G,A_i)$$

kein Isomorphismus.

Aufgabe 3 (Cup-Produkt und Verbindungshomomorphismus). **(4 Punkte)**
Sei G eine Gruppe und sei $A \times B \to C$ eine Paarung von G-Moduln (d.h. eine G-bilinieare Abbildung). Dann existiert eine G-lineare Abbildung $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to C$ und wir erhalten das *Cup-Produkt*

$$- \cup - :\ \mathrm{H}^p(G,A) \times \mathrm{H}^q(G,B) \xrightarrow{\cup} \mathrm{H}^{p+q}(G,A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(G,C).$$

für alle $p,q \in \mathbb{N}$. Seien nun

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$
$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

exakte Folgen von G-Moduln, B ein G-Modul und $A \times B \to C$ eine bilineare Paarung, die Paarungen $A' \times B \to C'$ und $A'' \times B \to C''$ induziert. Zeigen Sie: Das Diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^p(G,A'') \times \mathrm{H}^q(G,B) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "(\delta_A,\mathrm{id})"] & \mathrm{H}^{p+q}(G,C'') \arrow[d, "\delta_C"] \\
\mathrm{H}^{p+1}(G,A') \times \mathrm{H}^q(G,B) \arrow[r, "\cup"] & \mathrm{H}^{p+q+1}(G,C')
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei δ die jeweiligen Verbindungshomomorphismen der langen exakten Kohomologiefolgen bezeichne. In anderen Worten: für alle $\alpha \in \mathrm{H}^p(G,A'')$ und alle $\beta \in \mathrm{H}^q(G,B)$ ist $\delta_C(\alpha \cup \beta) = \delta_A(\alpha) \cup \beta$.
Hinweis: Betrachten Sie Kozykel, die α und β darstellen, benutzen Sie eine explizite Beschreibung der Verbindungshomomorphismen (Schlangenlemma) und stellen Sie mittels einer Diagrammjagd die Differenz der jeweiligen Bilder als Korand dar.

Aufgabe 4 ((Ko-)Induktion für endlichen Index). **(4 Punkte)**
Sei G eine abstrakte Gruppe. Für eine Untergruppe H von G von endlichem Index sei S ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von H in G.

(a) Zeigen Sie, dass für jeden H-Modul A die Abbildung

$$\mathrm{Koind}_H^G(A) \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G(A), \quad f \mapsto \sum_{s \in S} s^{-1} \otimes f(s),$$

ein Isomorphismus von G-Moduln ist.

Sei nun G endlich. Für einen G-Modul A betrachten wir die G-Moduln $(A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, definiert durch $A_0 := A$, $A_i := \mathrm{coker}(A_{i-1} \to \mathrm{Koind}_G A_{i-1})$ für $i \geq 1$ und $A_i := \ker(\mathrm{Ind}_G A_{i+1} \to A_{i+1})$ für $i < 1$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)_n = A_n \otimes_{\mathbb{Z}} B = A \otimes_{\mathbb{Z}} B_n.$$

für alle G-Moduln A, B und $n \in \mathbb{Z}$.