Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

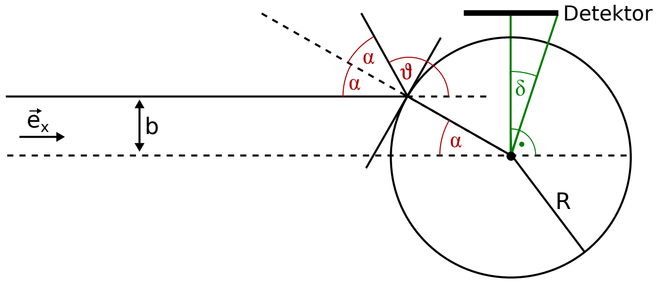
Übungsblatt 9

Besprechung in den Übungsgruppen am 16. Dezember 2019

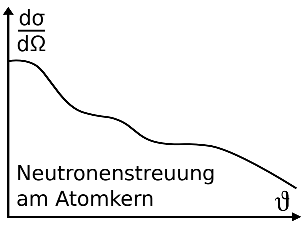
1. Hausaufgabe: Streuung an einer harten Kugel

Betrachten Sie eine große, schwere Kugel mit Radius R, auf die kleinere und sehr viel leichtere Kügelchen geworfen werden. Dabei werden die kleinen Kugeln an der großen Kugel gemäß des Gesetzes „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“ reflektiert (siehe Skizze 1).

1)



2)



a) Drücken Sie den Stoßparameter b über den Radius der Kugel und den Ablenkwinkel ϑ aus und berechnen Sie daraus den differentiellen Streuquerschnitt der Kugel.

Um die Anzahl der gestreuten Teilchen zu messen, wird ein Detektor (anders als in der Skizze dargestellt) in einer Entfernung d mit $d \gg R$ genau oberhalb der Kugel platziert. Der Detektor soll den vom Kugelmittelpunkt aus gemessenen Winkelbereich $\vartheta \in [\pi/2 - \delta, \pi/2 + \delta]$ und $\varphi \in [-\delta, +\delta]$ abdecken.

b) Wie viele Kügelchen treffen in einem Zeitintervall Δt auf den Detektor, wenn die Kugel in einen Teilchenstrom mit Teilchendichte n und Teilchengeschwindigkeit $v_\infty \vec{e}_x$ platziert wird?*

Der differentielle Streuquerschnitt gibt an, welcher Anteil der pro Fläche und Zeiteinheit einfallenden Teilchen in einen bestimmten Raumwinkel gestreut wird. Zusätzlich kann auch der totale Streuquerschnitt definiert werden, der beschreibt, welcher Anteil der pro Fläche und Zeiteinheit einfallenden Teilchen überhaupt abgelenkt wird. Er kann durch eine Integration über den gesamten Raumwinkel aus dem differentiellen Streuquerschnitt berechnet werden,

$$\sigma = \int \mathrm{d}\Omega \, \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}.$$

c) Zeigen Sie, dass der totale Wirkungsquerschnitt der Kugel gerade der Kugelquerschnitt ist.

In Büchern wird ein Atomkern oft als Kugel dargestellt. Um zu überprüfen, ob diese Darstellung stimmt, kann man den Kern mit ungeladenen Neutronen beschießen. Wäre der Kern nur eine geladene harte Kugel, dann würden die Neutronen gemäß des in a) gefundenen Gesetzes gestreut.

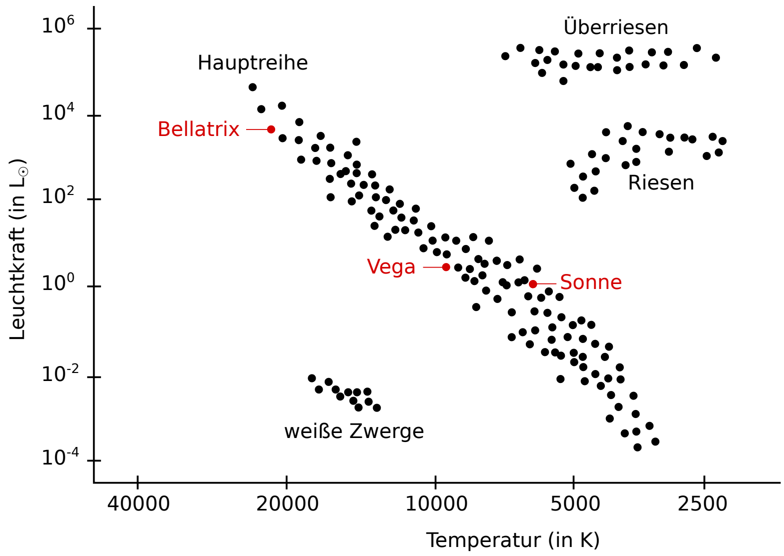
Messungen zeigen den in Skizze 2 abgebildeten differentiellen Streuquerschnitt.

d) Ist der Atomkern eine harte Kugel?

***Hinweis:* Da $d \gg R$ ist, kann die Kugel als nahezu punktförmig angenommen werden. Dann ist der Winkelbereich, unter dem der Detektor erscheint, vom Kugelmittelpunkt und vom jeweiligen Abprallpunkt der Kügelchen aus gleich.

2. ***Hausaufgabe:*** **Hauptreihe der Sterne und der Virialsatz**

Misst man die Oberflächentemperatur und die Leuchtkraft vieler Sterne und zeichnet diese in ein entsprechendes Diagramm ein (auch *Hertzsprung-Russell-Diagramm* genannt), erhält man die nachfolgende Verteilung der Sterne.



Um Riesen, Überriesen und weiße Zwerge erklären zu können, muss man sich genauer mit dem Leben und vor allem Sterben eines Sterns beschäftigen. Die Form der Hauptreihe, auf der sich Sterne die meiste Zeit ihres Lebens befindet, ist jedoch deutlich leichter zu erklären.

a) Die Temperatur T des Sternenplasmas ist proportional zur kinetischen Energie der ungeordneten Teilchenbewegung. Bestimmen Sie mit Hilfe des Virialsatzes einen Zusammenhang zwischen der Masse, der Oberflächentemperatur und dem Radius eines Sterns.

Das Stefan-Boltzmann-Gesetz besagt, dass die Leuchtkraft L eines Körpers proportional zu seiner Oberfläche und der vierten Potenz seiner Temperatur ist. Eine weitere Relation erhält man aus dem Energietransport durch Strahlung aus dem Inneren des Sterns an seine Oberfläche. Energietransport und -abstrahlung können nur dann konsistent formuliert werden, wenn der Radius R des Sterns proportional zur Wurzel seiner Masse M ist.

b) Zeigen Sie mit Hilfe dieser beiden Relationen sowie des Ergebnisses aus a), dass die Leuchtkraft eines Sterns proportional zur sechsten Potenz seiner Temperatur ist. Vergleichen Sie mit dem obigen Diagramm.

3. ***Präsenzaufgabe:*** **Mechanische Ähnlichkeit**

Eine Astronomin beobachtet einen weit entfernten Stern, der von drei Planeten umkreist wird. Sie misst, dass der mittlere Planet genau doppelt so weit und der äußere Planet genau dreimal so weit vom Stern entfernt ist wie der innere Planet. Was für eine Aussage kann sie über das Potential treffen, in dem sich die Planeten bewegen, wenn…

a) …die Umlaufdauer des mittleren Planeten vier mal so groß und die des äußeren Planeten neun mal so groß ist wie die des inneren Planeten?

b) …die Umlaufdauer des mittleren Planeten acht mal so groß und die des äußeren Planeten 27 mal so groß ist wie die des inneren Planeten?

c) …die Umlaufdauer des mittleren Planeten vier mal so groß und die des äußeren Planeten 27 mal so groß ist wie die des inneren Planeten?

_4._ Verständnisfragen

a) Welche Erhaltungssätze gelten bei elastischen, welche bei inelastischen Stößen?

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Keplerproblem und der Rutherford'schen Streuformel?

c) Definieren und begründen Sie den Begriff „mechanische Ähnlichkeit“.

Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 9: Lösungen

1. Hausaufgabe: Streuung an einer harten Kugel

a) Aus der Skizze kann man direkt den Zusammenhang $2\alpha + \vartheta = \pi$ ablesen. Da außerdem $\sin\alpha = b/R$ gilt, kann der Stoßparameter somit als

$$b = R\sin\alpha = R\sin\frac{\pi-\vartheta}{2} = R\cos\left(-\frac{\vartheta}{2}\right) = R\cos\frac{\vartheta}{2}$$

geschrieben werden. Aus der Vorlesung kann der Ausdruck für den differentiellen Streuquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = b\left|\frac{\partial b}{\partial\vartheta}\right|\frac{1}{\sin\vartheta} = R\cos\frac{\vartheta}{2}\left|-\frac{R}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\right|\frac{1}{\sin\vartheta} = \frac{R^2}{2\sin\vartheta}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{R^2}{4} \tag{I}$$

übernommen werden, wobei im letzten Schritt die in der Vorlesung gezeigte Relation

$$\sin\vartheta = 2\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}$$

verwendet wurde. Der Betrag des Sinus in (I) kann weggelassen werden, da dieser auf dem Intervall $[0,\pi]$ nicht-negativ ist.

b) Die Anzahl der Teilchen N_D, die im Zeitintervall Δt auf den Detektor treffen, ist gerade die Anzahl der pro Fläche einfallenden Teilchen multipliziert mit dem Integral des differentiellen Wirkungsquerschnitts über das Winkelelement des Detektors $\mathrm{d}\Omega_\mathrm{D}$. Die Anzahl der pro Fläche einfallenden Teilchen ist gerade $nv_\infty\,\Delta t$, wobei n die Anzahldichte und v_∞ die Geschwindigkeit der Teilchen ist. Insgesamt ergibt sich somit für die Zahl der detektierten Teilchen

$$N_\mathrm{D} = nv_\infty\,\Delta t\int\mathrm{d}\Omega_\mathrm{D}\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}.$$

Der Detektor soll die Winkelbereiche $\vartheta\in[\pi/2-\delta,\pi/2+\delta]$ und $\varphi\in[-\delta,+\delta]$ abdecken. Daraus folgt für das Integral über den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}\int\mathrm{d}\Omega_D\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{R^2}{4}\int_{-\delta}^{\delta}\mathrm{d}\varphi\int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta = \frac{R^2\delta}{2}\int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta = -\frac{R^2\delta}{2}\cos\vartheta\Big|_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta}\\ &= -\frac{R^2\delta}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right] = -\frac{R^2\delta}{2}\left[-\sin\delta+\sin(-\delta)\right] = R^2\delta\sin\delta.\end{aligned}$$

Der Detektor misst somit

$$N_\mathrm{D} = R^2nv_\infty\,\Delta t\,\delta\sin\delta$$

Teilchen im Zeitintervall Δt.

c) Der totale Streuquerschnitt ergibt sich durch das Integral über den vollen Raumwinkel aus dem differentiellen Streuquerschnitt,

$$\begin{aligned}\sigma &= \int\mathrm{d}\Omega\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\,\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{R^2}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta = \frac{\pi R^2}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\\ &= -\frac{\pi R^2}{2}\cos\vartheta\Big|_0^{\pi} = \pi R^2.\end{aligned}$$

Dies ist gerade der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius R, also der Querschnitt der großen Kugel.

d) Wie in Teil a) gezeigt wurde, ist der differentielle Streuquerschnitt einer harten Kugel unabhängig vom Streuwinkel ϑ. Der in Abbildung 2 gezeigte differentielle Streuquerschnitt ist jedoch von ϑ abhängig. Ein Atomkern kann somit nicht einfach durch eine geladene harte Kugel beschrieben werden.

2. ***Hausaufgabe:*** **Hauptreihe der Sterne und der Virialsatz**

a) Der Virialsatz besagt im Fall der Gravitation, das für das zeitliche Mittel der potentiellen Energie $\langle V\rangle_t$ und das zeitliche Mittel der kinetischen Energie $\langle T\rangle_t$ eines gebundenen Systems

$$\langle T\rangle_t = -\frac{1}{2}\langle V\rangle_t$$

gelten muss. Die kinetische Energie an der Oberfläche ist proportional zur Oberflächentemperatur T. Die potentielle Energie bei einem Stern ist proportional zu seinem Gravitationspotential, welches wiederum an seiner Oberfläche proportional zu M/R ist. Insgesamt ergibt sich also

$$T \propto \frac{M}{R}.$$

b) Die Oberfläche A des Sterns ist proportional zum Quadrat seines Radius R, also $A \propto R^2$. Für seine Leuchtkraft ergibt sich mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$L \propto AT^4 \propto R^2T^4.$$

Aus der Relation $R \propto \sqrt{M}$ zusammen mit dem Ergebnis aus a) ergibt sich

$$T \propto \frac{M}{R} \propto \frac{R^2}{R} = R$$

und somit

$$L \propto R^2T^4 \propto T^2T^4 = T^6.$$

Vergleicht man die Leuchtkraft bei 5 000 K mit der Leuchtkraft bei 20 000 K, so müsste sich die Leuchtkraft um den Faktor

$$\frac{L_{20\,000}}{L_{5\,000}} = \left(\frac{20\,000\,\mathrm{K}}{5\,000\,\mathrm{K}}\right)^6 = 4^6 = 4096$$

unterscheiden. Dies ist mit $L_{5\,000} \sim 10^{-1}\,L_\odot$ und $L_{20\,000} \sim 10^3\,L_\odot$ grob der Fall.

3. ***Präsenzaufgabe:*** **Mechanische Ähnlichkeit**

Mechanische Ähnlichkeit besagt, dass für die Bewegung in einem Potential, das homogen von Grad k ist, eine Änderung der Längenskala $\vec{x} \to a\vec{x}$ mit einer Änderung der Zeitskala $t \to bt$ einhergeht, für die

$$b = a^{1-k/2}$$

gilt. Für die Planetensysteme hat das die folgenden Implikationen.

a) Der mittlere Planet ist doppelt so weit entfernt ($a = 2$) und seine Umlaufdauer ist vier mal so groß ($b = 4$), sodass

$$2^{1-k/2} \overset{!}{=} 4 \qquad \Rightarrow \qquad 2^{-k/2} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad k = -2$$

gelten muss. Analog gilt für den äußeren Planeten ($a = 3$ und $b = 9$)

$$3^{1-k/2} \stackrel{!}{=} 9 \qquad \Rightarrow \qquad 3^{-k/2} = 3 \qquad \Rightarrow \qquad k = -2.$$

Diese beiden Beobachtungen passen zu einem Potential, das homogen vom Grad -2 ist und somit die Form

$$\Phi(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

hat.

b) Für den mittleren Planeten ($a = 2$ und $b = 8$) gilt

$$2^{1-k/2} \stackrel{!}{=} 8 \qquad \Rightarrow \qquad 2^{-k/2} = 4 \qquad \Rightarrow \qquad k = -4.$$

Für den äußeren Planeten ($a = 3$ und $b = 27$) gilt

$$3^{1-k/2} \stackrel{!}{=} 27 \qquad \Rightarrow \qquad 3^{-k/2} = 9 \qquad \Rightarrow \qquad k = -4.$$

Die Beobachungen passen also zu einem Potential, das homogen vom Grad -4 ist und somit die Form

$$\Phi(r) \propto \frac{1}{r^4}$$

hat.

c) Aus der Umlaufbahn des mittleren Planet ($a = 2$ und $b = 4$) folgt, wie in a) gezeigt, $k = -2$. Aus der Umlaufbahn des äußeren Planeten ($a = 3$, $b = 27$) folgt jedoch, wie in b) gezeigt, $k = -4$. Die Beobachtungen können somit nicht durch ein homogenes Potential beschrieben werden.

4. Verständnisfragen

a) Bei elastischen Stößen gelten Energie- und Impulserhaltung. Bei inelastischen Stößen gilt nur Impulserhaltung, denn ein Teil der mechanischen Energie wird in andere Energieformen durch z.B. Verformung oder innere Anregung umgewandelt.

b) Die Rutherford'sche Streuformel gibt an, wie Teilchen verteilt sind, die an einem im Vergleich zu ihrer eigenen Masse viel schwereren Target gestreut werden (das Target ist also im Laborsystem ortsfest), wenn die Wechselwirkung zusätzlich durch eine Kraft der Form $\vec{F} = -\alpha/r^2\,\vec{e}_r$ mit $\alpha > 0$ gegeben ist. Die Bahn eines ungebundenen Teilchens in genau solch einem Kraftfeld wird durch die Lösung des Keplerproblems für eine positive Teilchengesamtenergie beschrieben; es handelt sich um einen Hyperbelast. Der Winkel $\bar{\varphi}$, den die Asymptote der Hyperbel für unendliche Entfernungen mit der Symmetrieachse einschließt, kann sofort als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens und des Stoßparameters angegeben werden. Damit steht auch der Streuwinkel $\vartheta = 2\bar{\varphi} - \pi$ fest.

c) Wenn die potentielle Energie $V(\vec{x})$ homogen vom Grad k ist, wenn also $V(a\vec{x}) = a^k V(\vec{x})$ gilt, dann bleiben die Bewegungsgleichungen unverändert, sobald die Änderung der Längenskala $\vec{x} \to a\vec{x}$ mit einer Änderung der Zeitskala $t \to bt$ einhergeht, für die $b = a^{1-k/2}$ gilt. Dies nennt sich *mechanische Ähnlichkeit*.

Die Behauptung folgt direkt aus der Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$, denn mit den Skalierungen $\vec{x} \to a\vec{x}$ und $t \to bt$ gilt

$$m\frac{a}{b^2}\ddot{\vec{x}} = -\frac{\vec{\nabla}}{a}\left[a^k V(\vec{x})\right] \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{\vec{x}} = -b^2 a^{k-2}\,\vec{\nabla}V(\vec{x}).$$

Für $b = a^{1-k/2}$ ergibt dies wieder die alte Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$.