Aufgabe	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 1

Ist eine Matrix diagonalisierbar, so zerfällt ihr charakteristisches Polynom in Linearfaktoren. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\lambda-4 & 5 & 4\\ -6 & \lambda+7 & 4\\ 3 & -4 & \lambda-3\end{pmatrix} &= (\lambda-4)\cdot(\lambda+7)\cdot(\lambda-3)+156-12\cdot(\lambda+7)+30\cdot(\lambda-3)+16(\lambda-4)\\ &= (\lambda^2+3\lambda-28)\cdot(\lambda-3)+156-12\lambda-84+30\lambda-90+16\lambda-64\\ &= \lambda^3+3\lambda^2-3\lambda^2-28\lambda-12\lambda+30\lambda-9\lambda+16\lambda+156-90-64\\ &= \lambda^3-3\lambda+2\\ &= (\lambda-1)\cdot(\lambda^2+\lambda-2)\\ &= (\lambda-1)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda+2)\\ &= (\lambda-1)^2\cdot(\lambda+2)\end{aligned}$$

Folglich sind die Eigenwerte der Matrix durch 1 und -2 gegeben. Daraus sehen wir sofort, dass die Matrix trigonalisierbar ist, da $\mu_{\text{alg}}(1)=2$, $\mu_{\text{alg}}(-2)=1$ und die Summe der algebraischen Vielfachheiten damit gleich 3 ist. Nun untersuchen wir die geometrische Vielfachheit von 1. Dazu müssen wir die Dimension des Kerns der zugehörigen Matrix bestimmen.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1-4 & 5 & 4\\ -6 & 1+7 & 4\\ 3 & -4 & 1-3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-3 & 5 & 4\\ -6 & 8 & 4\\ 3 & -4 & -2\end{pmatrix} \;|\,\mathrm{II}+2\cdot\mathrm{III} &&= \begin{pmatrix}-3 & 5 & 4\\ 3 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \;|\,\mathrm{I}+\mathrm{II}\\ &= \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \;|\,\mathrm{II}+\mathrm{I} &&= \begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \;|\,\mathrm{I}\cdot -\tfrac{1}{3}\\ &= \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \;|\,\mathrm{I}+\mathrm{II} &&= \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Kern dieser Matrix, also der Eigenraum zu $\lambda=1$ ist also gegeben durch $\operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$. Die Summe der geometrischen Vielfachheiten ist folglich gleich $\mu_{\text{geo}}(-2)+\mu_{\text{geo}}(1)=1+1=2<3$ und somit ist die Matrix nicht diagonalisierbar. Die Matrix $S=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ erfüllt die Aufgabenstellung. Es gilt $S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir

$$S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & -4 \\ 6 & -7 & -4 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

(a) **ZZ:** Es existiert eine eindeutige Matrix $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f \in U$ gilt:

$$\begin{pmatrix} f(n+2) \\ f(n+1) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}$$

Behauptung: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

löst die Gleichung.

Beweis. Es gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2f(n+1) + 3f(n) \\ f(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(n+2) \\ f(n+1) \end{pmatrix}$$

□

Behauptung: A ist eindeutig.

Beweis. Die Darstellung von $f(n+2)$ ist durch $f(n+2) = 2f(n+1) + 3f(n)$ eindeutig und die Darstellung von$f(n+1)$ in Abhängigkeit von $f(n+1)$ und $f(n)$ ist durch $f(n+1) = f(n+1) + 0 \cdot f(n)$ eindeutig. Somit gibt es nur eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f(n+2) &= a_{1,1}f(n+1) + a_{1,2}f(n) \\ f(n+1) &= a_{2,1}f(n+1) + a_{2,2}f(n) \end{aligned}$$

Diese ist offensichtlich durch A gegeben. □

(b) **Behauptung:** Die Eigenräume von A sind $\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Beweis. Wir betrachten das charakteristische Polynom der Matrix A. Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2) \cdot \lambda - 3 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3) \cdot (\lambda + 1) \Longrightarrow \lambda \in \{-1, 3\}$$

Nun ist

$$\ker(3E - A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\ker(-E - A) = \ker \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

(c) **Behauptung:** Die Matrix $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ erfüllt die Eigenschaft $S^{-1}AS$.

Beweis. Es gilt

$$S^{-1}S = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

□

(d) **Behauptung:** Die Formel $S \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix}$ berechnet $f(n)$ aus $f(1)$ und $f(2)$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f(n) \\ f(n+1) \end{pmatrix} &= A^{n-2} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \\ &= S \cdot (S^{-1} \cdot A \cdot S)^{n-2} \cdot S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \\ &= S \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n-2} \cdot S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \\ &= S \cdot \begin{pmatrix} (-1)^{n-2} & 0 \\ 0 & 3^{n-2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3

(a) Es gilt für $\alpha \in K,\ f, g, h \in K[x]_{\leq n}$

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha \cdot f + g, h) &= \left(\int((\alpha \cdot f + g) \cdot h)\mathrm{d}x\right)(1_K)\\ &= \left(\int(\alpha \cdot f \cdot h + g \cdot h)\mathrm{d}x\right)(1_K)\\ &= \alpha \cdot \left(\int(f \cdot h)\right)(1_K) + \left(\int(g \cdot h)\right)(1_K)\\ &= \alpha \cdot \gamma(f, h) + \gamma(g, h)\end{aligned}$$

γ ist sußerdem symmetrisch, da die Multiplikation von Polynomen kommutativ ist. Also ist γ nicht nur im ersten, sondern auch im zweiten Argument linear. Es gilt

$$\ker(\Gamma) = \{f \in K[x]_{\leq n} | \gamma(f, g) = 0 \forall g \in K[x]_{\leq n}\}.$$

ZZ: $\ker(\Gamma) = \{0\}$.

Beweis. Sei also $f \in K[x]_{\leq n}$.

Fall 1: $\left(\int(f)\right) \neq 0$. Wähle dann $g = 1$. Dann erhalten wir

$$\gamma(f, 1) = \left(\int(f \cdot 1)\mathrm{d}x\right)(1_K) = \left(\int f\mathrm{d}x\right)(1_K) \neq 0.$$

Folglich ist $f \notin \ker(\Gamma)$.

Fall 2:

□

(b) Sei $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$ und $v_4 = x^3$. Dann ist

$$\begin{aligned}g_{ij} &= \gamma(v_i, v_j)\\ &= \left(\int(v_i \cdot v_j)\mathrm{d}x\right)(1_K)\\ &= \left(\int(x^{i+j-2})\mathrm{d}x\right)(1_K)\\ &= \left(\frac{x^{i+j-1}}{i+j-1}\right)(1_K)\\ &= \frac{1}{i+j-1}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

(c) Behauptung: Die Polynome $\underline{v} = \{1, 1-2x, -1+6x-6x^2, -\frac{1}{2}+6x-15x^2+10x^3\}$ bilden eine Orthogonalbasis von $Q[x]_{\leq 3}$.

Beweis. Wir erhalten die Transformationsmatrix

$$M^e_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -6 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 6 & -15 & 10 \end{pmatrix}$$

Folglich erhalten wir für die Fundamentalmatrix F bezüglich unserer neuen Basis $\underline{v}$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & -6 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 6 & -15 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{28} \end{pmatrix}$$

□

Aufgabe 4

Ist λ ein Eigenwert von f, so gilt

$$\begin{aligned} &\chi_f(\lambda) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\det(\lambda \cdot \mathrm{id} - f) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\det(\lambda \cdot E - M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f)) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\det((\lambda \cdot E - M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f))^t) = 0 \end{aligned}$$

Die Determinante ist invariant unter Transposition

$$\Longleftrightarrow \det(\lambda \cdot E - (M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f))^t) = 0$$

Lemma 3.25

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow &\det(\lambda \cdot E - M^{\underline{v}^*}_{\underline{v}^*}(f^*)) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\det(\lambda \cdot \mathrm{id} - f^*) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\chi_{f^*}(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Folglich ist also λ ein Eigenwert der dualen Abbildung. Außerdem ist

$$\begin{aligned} &\dim\ker(\lambda E - M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f)) \\ = &\dim V - \dim\mathrm{im}(\lambda E - M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f)) \end{aligned}$$

Zeilenrang gleich Spaltenrang, $\dim V = \dim V^*$

$$
\begin{aligned}
&= \dim V^* - \dim \operatorname{im}((\lambda E - M_{\underline{v}}^{\underline{v}}(f))^t) \\
&= \dim V^* - \dim \operatorname{im}(\lambda E - M_{\underline{v^*}}^{\underline{v^*}}(f^*)) \\
&= \dim \ker(\lambda E - M_{\underline{v^*}}^{\underline{v^*}}(f^*))
\end{aligned}
$$

Folglich ist die Dimension des Eigenraums von f zu λ gleich der Dimension des Eigenraums von f^* zu λ.