Übungsblatt 7

1	2	3		Σ

Josua Kugler, Ann Cathrin Wesener

1)

- $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$
  $\dot{x}_2(t) = -4x_1(t)$

  $\ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = -4x_1(t)$

  $\ddot{x}_1(t) + 4x_1(t) = 0$

  $x_1(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ $\qquad$ $\dot{x}_2(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$

  $x_1(0) = A$ $\qquad$ $\hookrightarrow x_2(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$

  $x_2(0) = 2B$

  $$\Rightarrow \boxed{\Phi_t^1 \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10}\cos(2t) + \frac{x_{20}}{2}\sin(2t) \\ -2x_{10}\sin(2t) + x_{20}\cos(2t) \end{pmatrix}}$$

- $\dot{y}_1(t) = 2y_2(t)$
  $y_2(t) = -2y_1(t)$

  $\ddot{y}_1(t) + 4y_1(t) = 0$

  $\Rightarrow y_1(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

  $y_2(t) = -A\sin(2t) + B\cos(2t)$ $\qquad \Rightarrow \boxed{\Phi_t^2 \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10}\cos(2t) + y_{20}\sin(2t) \\ -y_{10}\sin(2t) + y_{20}\cos(2t) \end{pmatrix}}$

Konjugation durch lineare Abbildung $\psi \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ offensichtlich Homöomorphismus. Diese erfüllt $\psi \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ \psi$

$$\begin{pmatrix} a x_{10}\cos(2t) + a\frac{x_{20}}{2}\sin(2t) - b2x_{10}\sin(2t) + bx_{20}\cos(2t) \\ cx_{10}\cos(2t) + c\frac{x_{20}}{2}\sin(2t) - d2x_{10}\sin(2t) + dx_{20}\cos(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_{10}\cos(2t) + bx_{20}\cos(2t) + cx_{10}\sin(2t) + dx_{20}\sin(2t) \\ -(ax_{10} + bx_{20})\sin(2t) + (cx_{10} + dx_{20})\cos(2t) \end{pmatrix}$$

wobei $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

7.2

(a) Nullkline: $x' = x(-x-y+1) = 0 \qquad x = 0 \ \lor \ x = 1-y$

$y' = y(-ax-y+b) = 0 \qquad y = 0 \ \lor \ y = b-ax$

Fixpunkte: $(0,0)$, $(0,b)$, $(1,0)$, $\left(\frac{1-b}{1-a}, \frac{b-a}{1-a}\right)$ für $a>1$, $b<a$ ist $\left(\frac{1-b}{1-a}, \frac{b-a}{1-a}\right)$ relevant

(b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f(x,y)$:

↳ $(0,0)$: $f\big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Eigenwerte: $\left|\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & b-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(b-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, b$ hyperbolisch

nach 3.19 zu e^{At} konjugiert $\Rightarrow$ Stabilität durch EW gegeben $\Rightarrow$ hier nicht stabil

↳ $(0,b)$: $f\big|_{(0,b)} = \begin{pmatrix} -b+1 & 0 \\ -ba & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-b \end{pmatrix}$ Eigenwerte: $\left|\begin{pmatrix} 1-b-\lambda & 0 \\ -ba & -b-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 = (1-\lambda-b)(-b-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -b, \ \lambda = 1-b$

$\Rightarrow$ stabil

↳ $(1,0)$: $f\big|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -a+b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ Eigenwerte: $\left|\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 0 & -a+b-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \underbrace{\lambda = -1 \quad \lambda = -a+b}_{\text{kommt drauf an, für}}$ $-a+b>0$ Sattelpunkt,

$-a+b<0$ stabil

↳ $\left(\frac{1-b}{1-a}, \frac{b-a}{1-a}\right)$: Dieser Fixpunkt scheint direkt aus der Hölle zu kommen und wird daher ignoriert

(c) Nach 3.17 können wir Rückschlüsse auf die Stabilität des ursprünglichen Systems ziehen.

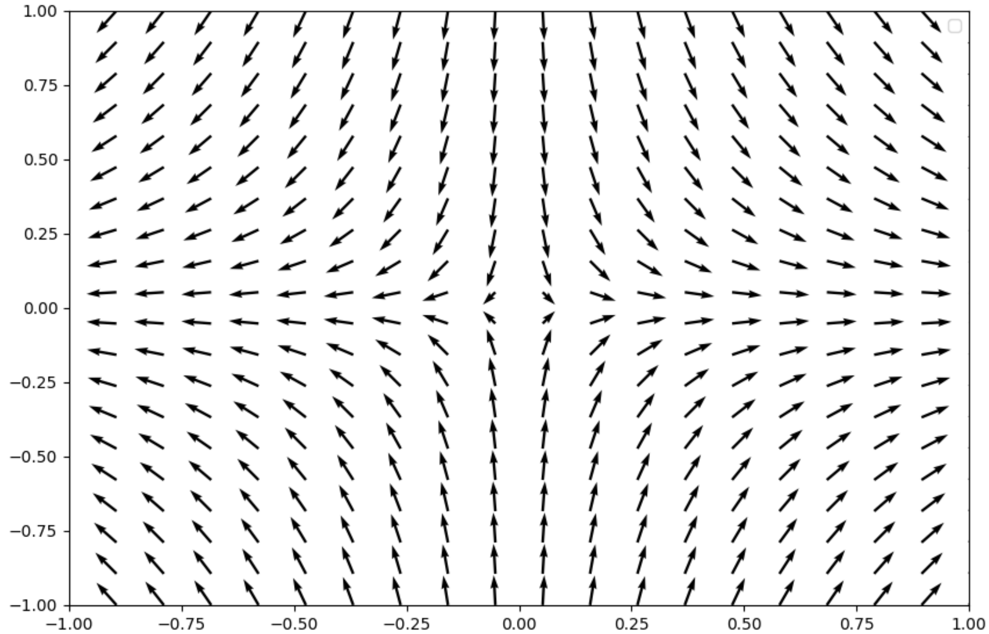
Aufgabe 3

1. Aus $x' = y' = 0$ folgt sofort $x = 0$ und dann auch $y = 0$, d.h. $y* = (0,0)$ ist der Gleichgewichtspunkt des Systems. Das linearisierte System ist dann gegeben durch

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   Die Eigenwerte sind offensichtlich gegeben durch 1 und -1 und wir können die Eigenräume direkt ablesen:

$$E_1(A) = E^-(A) = \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-1}(A) = E^+(A) = \text{Span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



2. y^* ist in beiden Eigenräumen enthalten und damit ein Sattelpunkt im linearen System. Zum linearisierten System gehört der Fluss

$$\Phi_t^l \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ y_0 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

   Das nichtlinearisierte System ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 4x^3 = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei g differenzierbar mit $g'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 12x^2$ und daher auf einer Umgebung U stets eine beschränkte Ableitung besitzt. Der zugehörige Fluss ist gegeben durch

$$\Phi_t^{\mathrm{nl}}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ (x_0)^3 e^{3t} + (y_0 - x_0^3)e^{-t} \end{pmatrix},$$

denn:
Die Differentialgleichung in der ersten Komponente ist unabhängig von der zweiten Komponente und ist bekanntlich eindeutig lösbar durch $x = x_0 e^t$. In der zweiten Komponente folgt die Eindeutigkeit aus dem Satz von Picard-Lindelöf, da $-y + 4(x_0^3 e^{3t})$ lokal Lipschitz-stetig in y ist. Es gilt

$$y' = 3x_0^3 e^{3t} - (y_0 - x_0^3)e^{-t} = -x_0^3 e^{3t} - (y_0 - x_0^3)e^{-t} + 4(x_0 e^t)^3 = -y + 4x^3$$

und

$$y(0) = x_0^3 + (y_0 - x_0^3) = y_0.$$

Insbesondere ist also y eine Lösung des Anfangswertproblems. Diese ist nach Picard-Lindelöf aber eindeutig.

Insgesamt ist also Satz 3.18 anwendbar und es folgt, dass Φ_t^{nl} und

$$e^{tA} \overset{A \text{ diagonal}}{=} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \Phi_t^{\mathrm{l}}$$

topologisch konjugiert sind. y^* ist in beiden Systemen der Fixpunkt, d.h. die beiden Punkte werden aufeinander abgebildet unter der topologischen Konjugation. Insbesondere ist also y^* auch im nichtlinearisierten System ein Sattelpunkt. Sei (x_0, y_0) ein Element der stabilen Menge. Dann muss gelten $\lim\limits_{t\to\infty} x_0 e^t = c \in \mathbb{R} \implies x_0 = 0$. Weiter muss gelten $\lim\limits_{t\to\infty} x_0^3 e^{3t} + (y_0 - x_0^3)e^{-t} = \lim\limits_{t\to\infty} y_0 e^{-t} = 0$ für beliebiges y_0. Die stabile Menge ist also gegeben durch span $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Sei nun (x_0, y_0) Element der instabilen Menge. Dann gilt für beliebiges x_0 $\lim\limits_{t\to-\infty} x_0 e^t = 0$. Weiter muss gelten $\lim\limits_{t\to-\infty} (x_0)^3 e^{3t} + (y_0 - x_0^3)e^{-t} = (y_0 - x_0^3) \lim\limits_{t\to-\infty} e^{-t}$. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-t}$ divergiert, also muss $y_0 = x_0^3$ gelten. Wir erhalten als instabile Menge die Menge aller (x_0, x_0^3) für $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Betrachte die Abbildung

$$\Psi\colon \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b - a^3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für beliebige $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\Phi_t^{\mathrm{l}} \circ \Psi \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \Phi_t^{\mathrm{l}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 - x_0^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ (y_0 - x_0^3) e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ x_0^3 e^{3t} + (y_0 - x_0^3) - (x_0 e^t)^3 \end{pmatrix} \\
&= \Psi \begin{pmatrix} x_0 e^t \\ x_0^3 e^{3t} + (y_0 - x_0^3) e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \Psi \circ \Phi_t^{\mathrm{nl}} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

4. Phasendiagramm des nichtlinearisierten Systems: