Übungen zu Funktionentheorie 1 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 12
Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 17. Juli

Dieser Zettel wird mit Maximalpunktzahl 16 gewertet. Sie können jedoch mehr Punkte erreichen. Überzählige Punkte zählen dann als Bonuspunkte.
Sei D ein Gebiet und $z_0 \in D$.

50. Aufgabe: (2+2=4 Punkte)

(a) Sei $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol in z_0 der Ordnung $\leq N$. Zeigen Sie

$$\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \big((\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z})^{N-1} (z - z_0)^N f(z) \big) \ .$$

(b) Seien $p, q \in \mathcal{O}(D)$ holomorphe Funktion auf D und sei $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ definiert für alle $z \in D$ mit $q(z) \neq 0$. Wenn $z_0 \in D$ eine einfache Nullstelle von q ist dann gilt $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$.

51. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Berechnen Sie für zwei der folgenden Funktionen das Residuum von

(a) $f(z) = z^{-2}(\exp(z+1) - \exp(2z+1))$ in $z_0 = 0$,

(b) $g(z) = (\cos(z/2))^{-2}$ in $z_0 = \pi$,

(c) $h(z) = \frac{\exp(z^2)}{\sin^2(z)}$ in $z_0 = 0$,

Hinweis: Wenn Sie Aufgabe 50 verwenden, sollten Sie zeigen, dass die Voraussetzungen erfüllt sind.

52. Aufgabe: (2+1+1=4 Punkte) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion. Zeigen Sie:

(a) $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$.

(b) die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$ ist holomorph.

(c) Ist $D = \mathbb{C}$, dann ist f ein Polynom vom Grad $\deg(f) = 1$.

Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis des Satzes von der Gebietstreue.

53. Aufgabe: (2+2+2+2=8 Punkte) Wir zeigen in mehreren Schritten die Gleichung

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi} \overset{!}{=} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) =: G(z) \ . \qquad (*)$$

(a) Zeigen Sie, dass $G(z)$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert und damit eine holomorphe Funktion darstellt.

(b) Vergleichen Sie die Ordnung der Nullstellen auf beiden Seiten und folgern Sie, dass es eine ganze holomorphe Funktion $h(z)$ gibt mit

$$H(z) := \frac{\sin(\pi z)}{\pi} = e^{h(z)} G(z) \ .$$

(c) Zeigen Sie $h' = 0$, indem Sie $\frac{H'}{H}$ für beide Seiten von H berechnen. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 49.

(d) Folgern Sie die obige Produktformel, indem Sie die Konstante $c = e^{h(z)}$ explizit berechnen. Hinweis: Bestimmen Sie zum Beispiel den linearen Term der Taylorentwicklung von $H(z)$ in $z = 0$ auf beiden Seiten.