Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 3

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 27. November

Sie können bei jeder Aufgabe die Ergebnisse der vorherigen nutzen, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben.
Fixiere ein Gitter $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2 \subseteq \mathbb{C}$ und die Eisensteinreihen $G_k = \sum_{0\neq\gamma\in\Gamma} \gamma^{-k}$ für ganze Zahlen $k \geq 3$.

9. Aufgabe: (2+1+1 = 4 Punkte) Sei $a(z,\gamma) = \left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{\gamma} + \frac{z^2}{2\gamma^2}\right)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $0 \neq \gamma \in \Gamma$. Zeigen Sie:

(a) Für ein festes Kompaktum K in $\mathbb{C}$ gibt es eine Konstante C sodass für alle $z \in K$ gilt: $|a(z,\gamma) - 1| \leq C|\gamma|^{-3}$.

(b) Das folgende Produkt konvergiert kompakt absolut in $z \in \mathbb{C}$ und definiert eine holomorphe ganze Funktion mit einfachen Nullstellen in Γ und ungleich Null sonst:

$$\sigma(z) = z \prod_{0\neq\gamma\in\Gamma} a(z,\gamma) \ .$$

Hinweis: Verwende (a) und Aufgabe 6.

(c) Es gilt $(\sigma'/\sigma)' = -\wp$. Hinweis: Leibnizregel für kompakt konvergente Produkte.

10. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie:

(a) $2\wp''(z) = 12\wp(z)^2 - 60G_4$.

(b) Folgern Sie für alle ganzen $m \geq 4$:

$$(2m+1)(m-3)(2m-1)G_{2m} = 3\sum_{j=2}^{m-2}(2j-1)(2m-2j-1)G_{2j}G_{2m-2j} \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie Cauchy-Faltung und die Laurententwicklung der $\wp$-Funktion.

11. Aufgabe: (2+2=4 Punkte)

(a) Das elliptische Differential $\wp(z)\,\mathrm{d}z$ ist von zweiter, aber nicht von dritter Gattung.

(b) Das elliptische Differential $\frac{\mathrm{d}z}{\wp'(z)}$ ist von dritter, aber nicht von zweiter Gattung.

12. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie folgende explizite Werte für die j-Funktion:

(a) Im Gitter $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i$ gilt $j(\Gamma) = 1$.

(b) Im Gitter $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}e^{-\pi i/3}$ gilt $j(\Gamma) = 0$.

Hinweis: Rotationssymmetrie des Gitters.

13. Aufgabe: (4 Punkte) Sei η ein elliptisches Differential dritter Gattung mit ganzzahligen Residuen. Zeigen Sie: Es gibt eine Konstante c und eine holomorphe elliptische Funktion f sodass $\eta = c\,\mathrm{d}z + \frac{\mathrm{d}f}{f}$.