Übungen zu Funktionentheorie 2 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 10

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 12. Februar

Sie können bei jeder Aufgabe die Ergebnisse der vorherigen nutzen, auch wenn Sie diese nicht bearbeitet haben. Sie können maximal 16 Punkte erreichen.

50. Aufgabe: (2+2=6 Punkte) Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung zusammenhängender topologischer Räume. Zeigen Sie:

(a) Die Menge der Homöomorphismen $f : X \to X$ mit der Eigenschaft $p \circ f = p$ bildet mit Hintereinanderausführung eine Gruppe. Diese operiert frei auf X und es gibt einen Isomorphismus $X/D(p) \cong Y$.

(b) Sei $H \subseteq D(p)$ eine Untergruppe, dann gibt es eine Überlagerung $r : X \to W$ mit $H = D(r)$.

(c) Wenn H sogar ein Normalteiler in $D(p)$ ist, dann gibt es eine Überlagerung $s : W \to Y$ mit $s \circ r = p$ und $D(s) \cong D(p)/H$

51. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Sei Y eine topologische Liegruppe, also eine Mannigfaltigkeit mit Gruppenstruktur, sodass Multiplikation und Inversion stetig sind. Sei $p : X \to Y$ eine Überlagerung von Y.

(a) Konstruieren Sie auf X eine Verknüpfung, sodass X eine komplexe Liegruppe und p ein Gruppenhomomorphismus wird. Hinweis: Liftungslemma.

(b) Wenn die Gruppenstruktur auf Y differenzierbar ist, dann auch auf X.

52. Aufgabe: (4 Punkte) Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, die drei Werte w_1, w_2, w_3 in $\overline{\mathbb{C}}$ nicht annimmt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

53. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, sodass $f \circ f$ keinen Fixpunkt besitzt, also $f(f(z)) \neq z$ für alle z. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $g(z) = \frac{f \circ f(z) - z}{f(z) - z}$ ist niemals Null oder Eins und daher konstant c.

(b) Die holomorphe Funktion $f' \circ f$ nimmt die Werte 0 und c nicht an und ist damit auch konstant.

(c) Folgern Sie, dass f eine Translation ist, also ein Polynom ersten Grades.

Hinweis: Verwenden Sie zweimal den Satz von Picard.

54. Aufgabe: (4 Punkte) Seien f und g ganze holomorphe Funktionen mit

$$f^3 + g^3 = 1 \ .$$

Zeigen Sie, dass f und g konstant sind. Hinweis: Zerlegen Sie das Polynom $X^3 - 1$ in Linearfaktoren. Wenden Sie Aufgabe 52 auf die meromorphe Funktion $h = f/g$ an.