Aufgabe 1

(a) Voraussetzungen:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $\exists q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|.$$

Z.Z.: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon$ ($\forall n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq n_\varepsilon$ und o.B.d.A. $n > m$).

Beweis.
Dafür zeigen wir zunächst die folgenden Aussagen:
Z.Z.: $\forall n, m \in \mathbb{N}$: $|a_{m+n} - a_{m+n-1}| \leq q^n|a_{m+1} - a_m|$ ($n \geq 2$, $0 < q < 1$)

Beweis.
Induktionsanfang ($n = 2$):

$$|a_{m+2} - a_{m+1}| \leq q|a_{m+1} - a_m|$$

Induktionsvoraussetzung: Gelte

$$|a_{m+n} - a_{m+n-1}| \leq q^n|a_{m+1} - a_m|$$

für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$
Induktionsschluss ($n \to n + 1$):

$$|a_{m+n+1} - a_{m+n}| \leq q|a_{m+n} - a_{m+n-1}| \overset{I.V.}{\leq} q \cdot q^n|a_{m+1} - a_m| \leq |q^{n+1}|a_{m+1} - a_m|$$

□

Z.Z.:$\forall k \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}$: $|a_{n+k} - a_n| \leq (\sum_{i=0}^{k} q^i)|a_n - a_{n-1}|$

Beweis.
Induktionsanfang ($k = 1$):

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|$$

Induktionsvoraussetzung: Gelte $|a_{n+k} - a_n| \leq \left(\sum_{i=0}^{k} q^i\right) |a_n - a_{n-1}|$ für ein beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$.
Induktionsschluss ($k \to k + 1$):

$$\begin{aligned}
|a_{n+k+1} - a_n| &= |a_{n+k+1} - a_{n+k} + a_{n+k} - a_n| \\
&\leq |a_{n+k+1} - a_{n+k}| + |a_{n+k} - a_n| \\
&\overset{\text{I.V.}}{\leq} |a_{n+k+1} - a_{n+k}| + \left(\sum_{i=0}^{k} q^i\right) |a_n - a_{n-1}| \\
&\leq q^{k+1}|a_n - a_{n-1}| + \left(\sum_{i=0}^{k} q^i\right) |a_n - a_{n-1}| \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} |a_n - a_{n-1}|
\end{aligned}$$

□

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_\varepsilon = \lceil \log_q \left(\frac{(1-q)\varepsilon}{|a_0 - a_1|} \right) \rceil$ Dann gilt $\forall n, m \in \mathbb{N}, n, m > n_\varepsilon$, o.B.d.A. $n > m$:

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |a_{n_\epsilon + k} - a_{n_\epsilon + l}| = |a_{n_\epsilon + l + k - l} - a_{n_\epsilon + l}| \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{k-l} q^i \right) |a_{n_\epsilon + l} - a_{n_\epsilon + l - 1}| \\
&= \left(\frac{1 - q^{k-l}}{1-q} \right) |a_{n_\epsilon + l} - a_{n_\epsilon + l - 1}| \\
&< \left(\frac{1}{1-q} \right) |a_{n_\epsilon + l} - a_{n_\epsilon + l - 1}| \\
&\leq \left(\frac{1}{1-q} \right) q^{n_\epsilon + l - 1} |a_1 - a_0| \\
&\leq \left(\frac{1}{1-q} \right) q^{n_\varepsilon} |a_1 - a_0| = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

(b) Behauptung: Es genügt nicht zu fordern, dass $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq |a_n - a_{n-1}|$$

sodass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beweis. Wähle $a_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Aus $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ folgt

$$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \left| \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right| < \left| \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \right| = |\sqrt{n} - \sqrt{n-1}|$$

Nach Aufgabe 3.1 gilt jedoch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ für $(n \to \infty)$

□

Aufgabe 2

Sei $A > 0$ und $0 < b < a$ mit $ab = A$.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit der Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$ und Anfangswert $a_0 = a$.
Sei außerdem $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Vorschrift $b_n = \frac{A}{a_n}$. Dabei ist $b_0 = \frac{A}{a_0} = \frac{A}{a} = b$.

(a) **Z.Z.:** $a_n > \sqrt{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis.

$$a_{n+1}^2 = \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{A}{a_n}\right) = \left(\frac{a_n + \frac{A}{a_n}}{2}\right)^2 \overset{2.2b}{\geq} a_n \cdot \frac{A}{a_n} = A$$

Da $a_{n+1} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und $A > 0$ folgt mit der in der Aufgabenstellung gegeben Identität:

$$a_{n+1} \geq \sqrt{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

(b) **Z.Z.:** $a_{n+1} - a_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Nach a) gilt $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} \geq \sqrt{A} \iff \frac{A}{b_{n+1}} \geq \sqrt{A} \iff a \geq \sqrt{A} \cdot b_{n+1} \iff \sqrt{A} \geq b_{n+1}$$

Wir erhalten also $a_{n+1} \geq b_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_m \leq \frac{2a_n}{2} - a_n = 0$$

□

(c) **Z.Z.:** $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{A}$.

Beweis. Wir dürfen voraussetzen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Sei also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Dann ist nach Lemma 2.5 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$. Es gilt zudem: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ Eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right) &= a \\
a + \frac{A}{a} &= 2a && \mid -a \\
\frac{A}{a} &= a && \mid \cdot a \\
A &= a^2 \\
\implies a &= \sqrt{A}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3

Nach Definition der komplexen Zahlen existieren $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ mit $z = a + b \cdot i$, $z_1 = c + d \cdot i$ und $z_2 = e + f \cdot i$.

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{c + d \cdot i + e + f \cdot i} = \overline{c + e + (d + f) \cdot i} = c + e - (d + f) \cdot i = c - d \cdot i + e - f \cdot i = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(b) $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a + b \cdot i) = a = \frac{1}{2}(a + a) = \frac{1}{2}(a + b \cdot i + a - b \cdot i) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a + b \cdot i) = b = -\frac{i^2}{2}(b + b) = -\frac{i}{2}(b \cdot i + b \cdot i) = -\frac{i}{2}(a + b \cdot i - (a - b \cdot i)) = -\frac{i}{2}(z - \overline{z})$

(c) $|z| = |a + b \cdot i| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$. Sei $|z| = 0$. Dann ist $0 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Nach Quadrieren ergibt sich $a^2 + b^2 = 0$. Da sowohl $a^2 \geq 0$ als auch $b^2 \geq 0$ erhalten wir $a = b = 0$ und damit $z = 0 + 0 \cdot i = 0$.

(d) $|\overline{z}| = |a - b \cdot i| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + b \cdot i| = |z|$. $z \cdot \overline{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 - (b \cdot i)^2 = a^2 - i^2 \cdot b^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |a + b \cdot i|^2 = |z|^2$.

(e) $|z_1 \cdot z_2| = |(c + d \cdot i) \cdot (e + f \cdot i) = |ce - df + (cf + de) \cdot i| = \sqrt{(ce - df)^2 + (cf + de)^2} = \sqrt{c^2e^2 - 2cdef + d^2f^2 + c^2f^2 + 2cdef + d^2e^2} = \sqrt{c^2e^2 + d^2f^2 + c^2f^2 + d^2e^2} = \sqrt{(c^2 + d^2) \cdot e^2 + (c^2 + d^2) \cdot f^2} = \sqrt{c^2 + d^2} \cdot \sqrt{e^2 + f^2} = |c + d \cdot i| \cdot |e + f \cdot i| = |z_1| \cdot |z_2|$

(f)

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (cf - de)^2 \\
0 &\leq (cf)^2 - 2(cf)(de) + de^2 \\
2cdef &\leq c^2f^2 + d^2e^2 \\
c^2e^2 + 2cdef + d^2f^2 &\leq c^2e^2 + c^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 \\
(ce + df)^2 &\leq c^2e^2 + c^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2 \\
2 \cdot (ce + df) &\leq 2\sqrt{c^2e^2 + c^2f^2 + d^2e^2 + d^2f^2} \\
ce + df + (de - cf) \cdot i + ce + df + (cf - de) \cdot i &\leq 2\sqrt{(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)} \\
(c + di) \cdot (e - fi) + (e + fi) \cdot (c - di) &\leq 2\sqrt{c^2 + d^2}\sqrt{e^2 + f^2} \\
z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} &\leq 2|z_1||z_2| && | + |z_1|^2 + |z_2|^2 \\
|z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\
z_1 \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) + z_2 \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\
(z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\
(z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1 + z_2}) &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\
|z_1 + z_2|^2 &\leq (|z_1| + |z_2|)^2 \\
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|
\end{aligned}
$$

Es gilt $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$. Durch Subtrahieren von $|z_2|$ erhalten wir $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$. Vertauschen wir nun z_1 und z_2, so erhalten wir $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$. Ist die linke Seite nun positiv, so gilt $||z_1| - |z_2|| = |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$. Ist sie hingegen negativ, so gilt $||z_1| - |z_2|| = |z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$. Die umgekehrte Dreiecksungleichung gilt also stets.

Aufgabe 4

(a) **Z.Z.:** Durch $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ sind alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 = i$ gegeben.
Beweis: Es gilt $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Damit können wir die Gleichung umschreiben zu $z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Nach der obigen Formel ist die k-te Lösung der Gleichung gegeben durch $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{2}\right)}$. Für $k = 0$

erhalten wir $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Quadriert erhält man $z_0^2 = e^{2\cdot i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Für $k = 1$ ergibt sich $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Durch Quadrieren erhalten wir $e^{2\cdot i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{10\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

(b) **Z.Z.:** Durch $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ und $z = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ sind alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = -1$ gegeben. **Beweis:** Es gilt $-1 = e^{i\pi}$. Damit können wir die Gleichung umschreiben zu $z^2 = e^{i\pi}$. Nach der obigen Formel ist die k-te Lösung der Gleichung gegeben durch $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{2\pi}{4}\right)}$.
Für $k = 0$ erhalten wir $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Mit 4 potenziert erhält man $z_0^4 = e^{4\cdot i\frac{\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1$.
Für $k = 1$ ergibt sich $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Durch Potenzieren mit 4 erhalten wir $e^{4\cdot i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\frac{12\pi}{4}} = e^{i(\pi+2\pi)}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\pi} = -1$.
Für $k = 2$ ergibt sich $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Durch Potenzieren mit 4 erhalten wir $e^{4\cdot i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{20\pi}{4}} = e^{i(\pi+2\pi+2\pi)}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\pi} = -1$.
Für $k = 3$ ergibt sich $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Durch Potenzieren mit 4 erhalten wir $e^{4\cdot i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\frac{28\pi}{4}} = e^{i(\pi+2\pi+2\pi+2\pi)}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\pi} = -1$.

(c) **Z.Z.:** Durch $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z = e^{i\pi}$ $z = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $z = e^{i\frac{7\pi}{4}}$ und $z = e^{i2\pi}$ sind alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ gegeben. **Beweis:** Es gilt $1 = e^{i\cdot 0}$. Damit können wir die Gleichung umschreiben zu $z^2 = e^{i\cdot 0}$. Nach der obigen Formel ist die k-te Lösung der Gleichung gegeben durch $z_k = e^{i\left(k\cdot\frac{2\pi}{8}\right)}$.
Für $k = 0$ erhalten wir $z_0 = e^{i\cdot 0}$. Mit 8 potenziert erhält man $z_0^8 = e^{8\cdot i\cdot 0} = e^{i\cdot 0} = 1$.
Für $k = 1$ ergibt sich $z_1 = e^{i\frac{1\cdot\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Durch Potenzieren mit 8 erhalten wir $e^{8\cdot i\frac{\pi}{4}} = e^{i\cdot 2\pi}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\cdot 0} = 1$.
Für $k = 2$ ergibt sich $z_2 = e^{i\frac{2\cdot\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Durch Potenzieren mit 8 erhalten wir $e^{8\cdot i\frac{\pi}{2}} = e^{i\cdot 4\pi}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\cdot 0} = 1$.
Für $k = 3$ ergibt sich $z_3 = e^{i\frac{3\cdot\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Durch Potenzieren mit 8 erhalten wir $e^{8\cdot i\frac{3\pi}{4}} = e^{i\cdot 6\pi}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\cdot 0} = 1$.
Für $k = 4$ ergibt sich $z_4 = e^{i\frac{4\cdot\pi}{4}} = e^{i\pi}$. Durch Potenzieren mit 8 erhalten wir $e^{8\cdot i\pi} = e^{i\cdot 8\pi}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\cdot 0} = 1$.
Für $k = 5$ ergibt sich $z_5 = e^{i\frac{5\cdot\pi}{4}} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Durch Potenzieren mit 8 erhalten wir $e^{8\cdot i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\cdot 10\pi}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\cdot 0} = 1$.
Für $k = 6$ ergibt sich $z_6 = e^{i\frac{6\cdot\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Durch Potenzieren mit 8 erhalten wir $e^{8\cdot i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\cdot 12\pi}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\cdot 0} = 1$.
Für $k = 7$ ergibt sich $z_7 = e^{i\frac{7\cdot\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Durch Potenzieren mit 8 erhalten wir $e^{8\cdot i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\cdot 14\pi}$. Nach Berücksichtigung der Periodizität mit zwei π ist das äquivalent zu $e^{i\cdot 0} = 1$.

(d) **Z.Z.:** Durch $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ sind alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 - 2z = i - 1$ gegeben. **Beweis:** Wir schreiben zunächst die Gleichung um:

$$\begin{aligned} z^2 - 2z &= i - 1 \\ z^2 - 2z + 1 &= i \\ (z-1)^2 &= i \end{aligned}$$

Dank Teilaufgabe (a) wissen wir, dass es folgende zwei Möglichkeiten für $(z - 1)$ gibt.

- $z - 1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Daher ist $z = e^{i\frac{\pi}{4}} + 1 = 1 + \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$.
- $z - 1 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Daher ist $z = e^{i\frac{5\pi}{4}} + 1 = 1 - \sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$.