**AOR Dr. Hendrik Kasten**
**Mathematisches Institut**

**FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK**

**UNIVERSITÄT HEIDELBERG**
ZUKUNFT
SEIT 1386

29. Oktober 2021

# Modulformen 1 – Übungsblatt 2

Wintersemester 2021/22

## Aufgabe 1 (8 Punkte)

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass für ein beliebiges $N \in \mathbb{N}$ der Index $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]$ endlich ist. Weisen Sie hierzu zunächst nach:

(a) Der Gruppenhomomorphismus $\bmod(N) : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ ist surjektiv, und es folgt

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = |\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})|.$$

Sei nun $N = \prod_{p \text{ prim}} p^{\nu_p}$ die Primfaktorzerlegung von $N$. Nach dem Chinesischen Restsatz gilt dann

$$|\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})| = \prod_{p \text{ prim}} |\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{\nu_p}\mathbb{Z})|.$$

Zeigen Sie damit nun:

(b) $|\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{\nu_p}\mathbb{Z})| = p^{4\nu_p}(1-p^{-1})(1-p^{-2})$.

(c) $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{\nu_p}\mathbb{Z})| = p^{3\nu_p}(1-p^{-2})$.

Insgesamt haben wir sogar etwas mehr nachgewiesen, nämlich

$$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \cdot \prod_{p \,|\, N \text{ prim}} (1-p^{-2}).$$

Abschließend folgt nun leicht:

(d) Jede Kongruenzuntergruppe $\Gamma \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist von endlichem Index.

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für die Wirkung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ haben Sie in Satz 1.26 den Standard-Fundamentalbereich

$$\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1 \text{ und } |\mathrm{Re}(z)| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

kennengelernt.

(a) Weisen Sie für eine beliebige Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nach, dass $M \circ \mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist.

(b) Fertigen Sie eine Zeichnung an, wenn $\mathcal{F}$ der Standard-Fundamentalbereich und $M = S$ ist.

**Aufgabe 3 (6 Punkte)**

Aus Beispiel 1.30 ist Ihnen die Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(N)$ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in der Form

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \mod (N) \right\}$$

bekannt. Sei weiter $p$ eine Primzahl. Wir bestimmen die Menge der Spitzen von $\Gamma_0(p)$ und $\Gamma_0(p^2)$.

(a) Wie viele Spitzen besitzt $\Gamma_0(p)$? Bestimmen Sie diese und begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Zeigen Sie: $\Gamma_0(p^2)$ besitzt genau $p+1$ Spitzen, nämlich in den Punkten $0$, $\infty$ und $-\frac{1}{kp}$ für $k = 1, \cdots, p-1$.

**Hinweis:** Machen Sie sich zunächst klar, in welcher Menge die Spitzen liegen können.

**Abgabe**: online über MaMpf bis Freitag, den 05. November 2021, spätestens um 12 Uhr s. t.