Gewöhnliche Differentialgleichungen - Übungsblatt 9

Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Anna Marciniak-Czochra, Christian Düll

Abgabe: 31. Dezember, 11:00 Uhr über Mampf

Bitte beachten Sie das abweichende Abgabedatum. Da der Abgabetermin deutlich nach dem Schließdatum des Mathematikons liegt (d.h. nach dem 23.12.), ist diese Mal ausschließlich eine online Abgabe über Mampf möglich.
Auf diesem Blatt behandeln wir Kriterien für die Existenz oder die Nicht-Existenz von periodischen Lösungen in planaren Systemen.

Aufgabe 9.1 4 Punkte

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $f : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wir betrachten das dynamische System

$$y' = f(y). \tag{1}$$

Nehmen Sie an, dass eine stetig differenzierbare Funktion $\beta : U \to \mathbb{R}$ existiert, sodass die Divergenz

$$\operatorname{div}(\beta(y)f(y)) := \partial y_1(\beta(y)f_1(y)) + \partial y_2(\beta(y)f_2(y))$$

fast überall echt positiv ist (Nullmenge bzgl. des Lebesgues-Maßes $\lambda_{\mathbb{R}^2}$). Zeigen Sie, dass dann das System (**??**) in U keine nicht-trivialen Orbits besitzen kann.
*Bemerkung: Eine solche Funktion β heißt **Dulac-Funktion** und ist im Allgemeinen schwer zu finden…Aus Symmetriegründen gilt das Kriterium natürlich auch, wenn β fast überall echt negativ ist.*

Aufgabe 9.2 4 Punkte

Betrachten Sie die Systeme

$$a)\begin{cases} x' = & x(2-x-y) \\ y' = & y(4x-x^2-3) \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x' = & y \\ y' = & -x-y+x^2+y^2 \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass diese in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ (System a)) bzw. $\mathbb{R}^2$ (System b)) keine periodischen Orbits besitzen.
Hinweis: Verwenden Sie die Ansätze $\beta(x,y) = -\frac{1}{xy}$ bzw. $\beta(x,y) = -e^{\alpha x}$.

Der wichtigste Satz für die Existenz periodischer Orbits in planaren System ist der folgende

Satz 1 (Poincaré-Bendixson)**.** *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(U)$. Wir betrachten das System $y' = f(y)$. Ist für ein $y_0 \in U$ der Vorwärtsorbit $\gamma_+(y_0)$ beschränkt und enthält $\omega(y_0)$ keinen Fixpunkt, so ist $\omega(y_0)$ ein periodischer Orbit.*

Aufgabe 9.3 4 Punkte

Es sei $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$. Betrachten Sie das folgende System in $\mathbb{R}^2$

$$x' = Ax - \|x\|^2 x, \tag{2}$$

wobei $\|x\|$ die übliche Euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Zeigen Sie

a) Das System besitzt einen eindeutigen Fixpunkt.

b) Ist $a < 0$, so besitzt das System keinen periodischen Orbit.
*Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 9.1 mit einer **sehr(!)** einfachen Dulac-Funktion.*

Sei nun im Folgenden $a > 0$.

c) Es sei $c > 0$ mit $c^2 > a$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M_c := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq c\}$$

invariant für (**??**) ist.
Hinweis: Schreiben Sie das System explizit auf und zeigen Sie mittels einer Transformation in Polarkoordinaten, dass das Vektorfeld am Rand stets nach innen zeigt.

(d) Folgern Sie mittels Poincaré-Bendixson, dass das System (**??**) mindestens einen periodischen Orbit besitzt.

Aufgabe 9.4 4 Punkte

Betrachten Sie für $b > 0$ folgende parameterabhängige Differentialgleichung für $x, y > 0$

$$\begin{cases} x' = & 1 - bx + x^2y - x \\ y' = & bx - x^2y \end{cases} \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte von (**??**) und untersuchen Sie diese auf Stabilität (in Abhängigkeit vom Parameter b).

b) Zeigen Sie, dass Lösungen (x, y) mit echt positiven Startwerten $x_0, y_0 > 0$ für alle $t > 0$ nicht negativ werden. Verwenden Sie bei dieser Teilaufgabe nicht, dass die Menge K_b positiv invariant ist, sondern suchen Sie sich eine einfachere (und größere) invariante Menge.

Betrachten Sie nun die Menge

$$K_b := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2 + b + 2b^2, y - x \leq b + 2b^2\}.$$

Für die folgenden Aufgabenteile c) und d) dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass K_b positiv invariant für das System (**??**) ist.

c) Es sei nun $b = 3$. Zeigen Sie, dass das System (**??**) periodische Orbits besitzt.

d) Es sei nun $b = 1$. Zeigen Sie, dass das System (**??**) keine periodischen Lösungen für $x, y > 0$ besitzen kann. Können Sie nun verbesserte Aussagen über Stabilität treffen?
Hinweis: Verwenden Sie die Funktion $\beta(x, y) = -\frac{1}{x^2}$.