Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 4

Besprechung in den Übungsgruppen am 11. November 2019

1. Hausaufgabe: Skalar- und Vektorprodukt

Zeigen Sie die folgenden Relationen unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention sowie der Levi-Civita- und Kronecker-Symbole.

a) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *

2. Hausaufgabe: Vektorraum der Polynome

Betrachten Sie den Vektorraum der Polynome vom Grad N (d.h. die Polynome dürfen höchstens Terme der Ordnung x^N enthalten) auf dem Intervall $[-1, 1]$. Das Skalarprodukt der Polynome $p(x)$ und $q(x)$ sei durch

$$\langle p(x), q(x) \rangle \equiv \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \, p(x) \, q(x)$$

definiert. Gegeben seien außerdem die drei Polynome

$$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x, \quad \text{und} \quad p_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right).$$

Dies sind die ersten drei *Legendre-Polynome*, die unter anderem in Bereichen der Elektrodynamik und der Quantenmechanik als Basis verwendet werden.

a) Welchen Vektorraum V spannen die Polynome p_0 bis p_2 auf? Beweisen Sie ihre Antwort.

b) Zeigen Sie, dass diese drei Polynome eine Basis von V sind.

c) Ist diese Basis orthogonal? Ist sie orthonormal?

3. Hausaufgabe: Elektron im Magnetfeld

Auf ein Teilchen mit der Ladung q und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ wirkt im elektrischen Feld $\vec{E}$ und magnetischen Feld $\vec{B}$ die *Lorentz-Kraft*

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right),$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Betrachten Sie nun eine Ladung in einem verschwindenden elektrischen Feld und dem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B_z)^\top$.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Geschwindigkeiten des Teilchens in x-,y- und z-Richtung auf. Führen Sie dabei die Frequenz $\omega \equiv qB_z/(mc)$ ein.

b) Lösen Sie zunächst die Differentialgleichung für $v_z(t)$ für die Anfangsbedingung $v_z(t = 0) = v_{z0}$.

---

* *Hinweis:* Bitte beachten Sie, dass das Vektorprodukt nicht assoziativ ist, sodass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ gilt!

c) Entkoppeln Sie die Differentialgleichungen für v_x und v_y, indem Sie beide Gleichungen ein weiteres Mal nach der Zeit ableiten und die ursprünglichen Differentialgleichungen in die Ergebnisse einsetzen.

d) Lösen Sie die resultierenden Differentialgleichungen für die Anfangsgeschwindigkeiten $v_x(t = 0) = v_{x0}$ und $v_y(t = 0) = 0$. Verwenden Sie außerdem, dass die Differentialgleichungen aus a) einen Zusammenhang zwischen v_x und v_y fordern, der *für alle Zeiten* gelten muss.

e) Bestimmen Sie die Trajektorie des Elektrons für die Anfangsbedingungen $y(t = 0) = v_{x0}/\omega$ und $x(t = 0) = z(t = 0) = 0$. Skizzieren Sie diese.

f) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Teilchens. Ist diese erhalten?

g) Bestimmen Sie den Drehimpuls des Teilchens im Bezug auf die z-Achse†. Ist dieser erhalten?

4. ***Präsenzaufgabe:*** **Gravitationspotential zweier Teilchen**

Ein Teilchen der Masse M erzeugt in seiner Umgebung das Gravitationspotential

$$\Phi = -\frac{GM}{r},$$

wobei G die Gravitationskonstante und r der Abstand zum Teilchen ist. Das Gravitationspotential ist definiert als $\Phi \equiv E_{\text{pot}}/m$, wobei E_{pot} die potentielle Energie und m die Masse eines Testteilchens ist. Der Vorteil des Potentials gegenüber der potentiellen Energie ist, dass es unabhängig von den Eigenschaften der Testteilchens ist.

Betrachten Sie nun zwei Teilchen der Masse M, die auf der x-Achse eines Koordinatensystems liegen und den Abstand $+d/2$ und $-d/2$ vom Ursprung haben. Welches Gravitationspotential erwarten Sie an einem Punkt auf der x-Achse mit dem Abstand $a > d/2$ vom Ursprung? Ab welcher Distanz kann das Potential beider Teilchen durch das einer Punktmasse angenähert werden, wenn man einen relativen Fehler von einem Prozent in Kauf nimmt?

5. Verständnisfragen

a) Nennen Sie die wesentlichen Unterschiede zwischen einem Skalar- und dem Vektorprodukt.

b) Beschreiben Sie die Kronecker- und Levi-Civita-Symbole und erklären Sie, wozu sie gut sind.

c) Erklären Sie den Begriff der Umkehrpunkte einer gebundenen Bewegung.

† *Hinweis:* Der Drehimpuls in Bezug auf eine Achse ist definiert als der Drehimpuls bezüglich des nächstgelegenen Punktes auf dieser Achse; bewegt sich das Teilchen entlang der Achse, verschiebt sich dieser Punkt.