

## Aufgabe 7.1

4 Punkte

Sei  $X$  ein Banach-Raum und  $T \in \mathcal{L}(X, X)$  mit

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} < 1.$$

Dann ist  $I - T$  bijektiv mit  $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$  und es gilt

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n,$$

wobei  $T^0 := I$  die Identität auf  $X$  bezeichne und  $T^n$  die  $n$ -fache Komposition  $T \circ \dots \circ T$  von  $T$ .

Betrachte die Familie von Operatoren  $F_k := \sum_{n=0}^k T^n$ . Sei  $x \in X$ . Dann gilt

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|F_k(x)\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n=0}^k T^n(x) \right\| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^k \|T^n(x)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \|T^n(x)\| \leq \|x\| \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \|T^n\|$$

$\leq \|T\| \|x\|$

Nach Voraussetzung gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} < 1$  und mit dem Wurzelkriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

Die punktweise Beschränktheit liefert uns mit dem Satz von Banach-Steinhaus, dass auch  $\sup \|F_k\|$  endlich sein muss. Weil  $X$  ein Banachraum ist, folgt außerdem aus der absoluten Konvergenz von  $\sum_{n=0}^{\infty} T^n(x)$  die Konvergenz. Nach Satz 3.15 erhalten wir damit die Existenz eines stetigen Grenzwerts  $F \in \mathcal{L}(X, X)$ . Weiter gilt:

$$[I - 0(I - T)](x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(I - T)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(x) - T^{n+1}(x) = T^0(x) = x$$

$$[(I - T) \circ F](x) = I\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n(x)\right) - T\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} T^n(x) = x$$

$I - T$  ist also invers zu  $F$ ,  $F = (I - T)^{-1}$ .

D

## Aufgabe 7.2

4 Punkte

[1+1+1.5+0.5 Punkte]

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $Y \subset X$  ein linearer Unterraum. Zeigen Sie:

- a) Ist  $Y$  endlich dimensional, so ist  $(Y, \|\cdot\|)$  vollständig und insbesondere  $Y \subset X$  abgeschlossen.

Mit VL (Bsp. 2) folgt sofort die Vollständigkeit. Nach Lemma 1.17 ist dann auch  $Y$  in  $X$  abgeschlossen.

- b) Ist  $X$  ein Banachraum und  $Y$  besitzt nicht leeres Inneres, dann ist  $Y = X$ .

Beweis per Kontraposition: Wir nehmen an, dass  $X$  von  $Y$  verschieden ist, d.h.  $Y$  ist ein echter Unterraum von  $X$  und  $X \setminus Y$  ist nichtleer.

Z.Z.: Der Abschluss von  $X \setminus Y$  ist der gesamte Raum. Für leeres  $Y$  ist das klar, sei also  $Y$  nichtleer.

Sei  $y \in Y$  und  $x \in X \setminus Y$ . Dann ist  $y + \alpha x \in X \setminus Y$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ansonsten wäre nämlich

$$\alpha * x = (y + \alpha * x) - y \in Y$$

und somit auch  $x \in Y$ . Betrachte also die Folge  $x_n := y + 1/n * x$ . Diese konvergiert gegen  $y$  im Banachraum  $X$ .

Daher liegt  $y$  im Abschluss von  $X \setminus Y$  und somit ist der Abschluss von  $X \setminus Y$  bereits ganz  $X$ .

Wir sind an dieser Stelle schon fertig, weil das Innere von  $Y$  dadurch gekennzeichnet ist, dass es zu jedem Punkt einen Ball gibt, der ganz in  $Y$  enthalten ist. Das kann aber nicht gegeben sein, wenn zu jedem Punkt  $y \in Y$  eine Folge in  $X \setminus Y$  mit Grenzwert  $y$  existiert.

- c) Ist  $X$  ein Banachraum, so besitzt  $X$  entweder eine endliche oder eine überabzählbare Hamelbasis, also insbesondere keine abzählbar unendliche.  
Verwenden Sie den Satz von Baire.

Zunächst halten wir fest, dass nach LA1 jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Angenommen,  $X$  besitzt keine endliche Hamelbasis, aber dafür eine abzählbar unendliche Basis  $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Dann lässt sich  $X$  schreiben als abzählbare Vereinigung der linearen Unterräume  $V_i = \langle v_i \rangle$ , die von einem Basiselement erzeugt werden. Außerdem ist jedes  $V_i$  ein echter Unterraum (sonst wäre durch das Element  $v_i$  eine Basis gegeben). Nach (a) sind diese Räume abgeschlossen und nach (b) ist ihr Inneres leer, d.h.  $V_i$  ist nirgends dicht für alle  $i$ . Somit ist  $X$  mager, im Widerspruch zum Satz von Baire. Also besitzt  $X$  entweder eine endliche oder überabzählbare Basis.

- d) Sei  $P$  der Raum aller reellwertigen Polynome.  $(P, \|\cdot\|)$  ist für jede beliebige Norm  $\|\cdot\|$  kein Banachraum.

Durch die Monome  $1, x^1, x^2, \dots$  ist eine abzählbar unendliche Basis von  $P$  gegeben (dass die Monome ein Erzeugendensystem bilden ist aus der Standarddarstellung der Polynome sofort ersichtlich. Lineare Unabhängigkeit ist auch klar per Definition: Nur das Nullpolynom hat vor allen Monomen Koeffizient 0. Mit Aufgabe (c) folgt daher, dass  $P$  kein Banachraum sein kann.

### Aufgabe 7.3

4 Punkte

[1+1.5+1.5 Punkte]

Sei  $X \subset L_1(\mathbb{R})$  ein abgeschlossener Untervektorraum mit

$$X \subseteq \bigcup_{p>1} L_p(\mathbb{R}).$$

$$L_q \subset L_p \quad \text{falls} \quad p < q$$

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass ein  $p_0 > 1$  existiert, sodass  $X \subset L_{p_0}(\mathbb{R})$ . Gehen Sie dafür, wie folgt vor:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{k}} + \frac{1}{k+\frac{1}{k}} = 1$$

- (a) Für  $k \in \mathbb{N}$  definieren wir die Menge

$$F_k = \{f \in X \mid \|f\|_{L_{1+1/k}} \leq k\}.$$

ngm knz. was?

Zeigen Sie, dass die  $F_k$  abgeschlossene Mengen bzgl. der  $L_1$  Norm sind.

$$\int |f(x)|^{1+1/k} dx \leq k^{1+1/k}$$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $F_k$  mit Grenzwert  $f \in X$ . z.z.:  $f \in F_k$  d.h.

$$\int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \right)^{1+1/k} dx \leq k^{1+1/k}$$

$$= \int \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)|^{1+1/k} dx$$

kann man das was weitergehen?

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \leq g(x) ?$$

(b) Zeigen Sie, dass  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ .

Hinweis: Zeigen Sie  $\|f\|_{L_{1+1/k}} \leq \left( \|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{1+1/k}}$ , indem Sie das Integral geeignet aufspalten.

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{1+1/k}}^{1+1/k} &= \int |f|^{1+1/k} dx = \int_{\{|f| \leq 1\}} |f|^{1+1/k} dx + \int_{\{|f| > 1\}} |f|^{1+1/k} dx \\ &\leq \int_{\{|f| \leq 1\}} |f| dx + \int_{\{|f| > 1\}} |f|^p dx \quad \text{für } p > 1+1/k \\ &\leq \|f\|_{L_1} + \|f\|_{L_p}^p \end{aligned}$$

Sei  $f \in X$ . Dann existiert ein  $p > 0$  mit  $f \in L_p(\mathbb{R})$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $1+1/k < p$  gilt dann  $\|f\|_1 + \|f\|_p^p < C^{1/(1+1/k)}$  für  $C \in \mathbb{R}$ . Wir suchen nun ein solches  $k$ , sodass  $C^{1/(1+1/k)} \leq k$  gilt. Es gilt  $0.5 \leq (1/(1+1/k)) < 1$  für  $k \geq 1$  und somit  $C^{1/(1+1/k)} < C$ . Wähle also  $k \geq C$  und  $k$  so groß, dass  $1+1/k < p$ . Dann ist  $f \in F_k$ .

(c) Folgern Sie, dass ein  $p_0 > 1$  existiert, sodass  $X \subset L_{p_0}(\mathbb{R})$ .

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Baire.

Ans:  $\bigcup_{p \geq 1} L_p$  ist offen in  $L_1$  und  $X$  ist ein abgeschlossen

$\Rightarrow \bigcup_{p \geq 1} L_p \setminus X$  ist offen und von zweiter Kategorie

insbesondere nicht leer  $\Rightarrow \exists f \in \bigcup_{p \geq 1} L_p \setminus X$ .

### Aufgabe 7.4

3 Punkte

Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $A \subset X$  eine beliebige Teilmenge. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- $A$  ist beschränkt (siehe Aufgabe 2.1).
- Für alle  $f \in X'$  gilt:  $\sup\{|f(x)| \mid x \in A\} < \infty$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Lemma 3.3(g). Alternativ:

$$|f(x)| = |f(a_0 + d)| \leq |f(a_0)| + |f(d)| \quad \|d\| \leq \text{diam } A$$

$$\sup_{x \in A} |f(x)| \leq |f(a_0)| + \sup_{\|d\| \leq \text{diam } A} |f(d)| < \infty \quad \text{Stetigkeit von } f$$

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Definiere  $F_x: X' \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $F_x(f) = f(x)$ . Behauptung:  $F_x$  ist linear und stetig.

- Linearität:  $F_x(a*f + g) = (a*f + g)(x) = a*f(x) + g(x) = a * F_x(f) + F_x(g)$ .
- Stetigkeit: Sei  $f_n$  eine Folge von Funktionalen in  $X'$ .  $X'$  ist ein Banachraum, also existiert ein eindeutiger Grenzwert  $f$  in  $X'$ . Der punktweise Grenzwert erfüllt dabei die geforderten Bedingungen, es gilt also  $f(x) = \lim f_n(x)$ .  
Nun gilt  $F_x(\lim f_n) = F_x(f) = f(x) = \lim f_n(x) = \lim F_x(f_n)$ . Somit ist  $F_x$  stetig.

Betrachte nun die Familie von linearen Operatoren  $M = \{F_x \mid x \in A\} \subset L(X', \mathbb{R})$ .

$M$  ist punktweise beschränkt: Sei dazu  $f \in X'$  beliebig. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\infty > \sup_{x \in A} |f(x)| = \sup_{x \in A} |F_x(f)| = \sup_{F_x \in M} |F_x(f)|.$$

Wir können also den Satz von Banach-Steinhaus anwenden und erhalten, dass die Familie von Operatoren beschränkt ist,  $\sup_{F_x \in M} \|F_x\| = C < \infty$ .

$$\sup_{F_x \in M} \|F_x\| = \sup_{x \in A} \sup_{f \in X': \|f\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \in A} \sup_{f \in X': \|f\| \leq 1} |f(x)|$$

$$= \sup_{x \in A} \sup_{f \in X': \|f\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{f \in X'} \sup_{x \in A} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

**Aufgabe 7.5**

1 Punkt

Seien  $(X, \|\cdot\|_X)$  und  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banachräume und  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$  mit  $\|T_n\| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Zeigen Sie, dass ein  $x \in X$  existiert, sodass die Folge  $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist.

Angenommen, es existiert kein solches  $x$ . Dann ist die Familie von Operatoren  $T_n$  punktweise beschränkt, denn es gilt  $\sup \|T_n(x)\| < \infty$  für alle  $x \in X$ . Nach dem Satz von Banach-Steinhaus ist dann aber  $\sup \|T_n\| < \infty$ , im Widerspruch zu  $\|T_n\| \rightarrow \infty$ .