Anmerkung: Wir benutzen für Referenzen unser mit ein paar Kommilitonen zusammen getextes Skript, zu finden unter `https://flavigny.de/lecture/pdf/analysis2`.

Aufgabe 1

(a) Die natürliche Matrixnorm ist

- **positiv definit:** $\|Ax\|, \|x\| \geq 0$, also insbesondere auch $\sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq 0$.

  Gilt $\sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$, so folgt daraus

  $$\forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} : \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0 \xRightarrow{\|x\| \neq 0} \|Ax\| = 0 \xRightarrow{\|\cdot\| \text{ definit}} Ax = 0,$$

  also ist $A = 0$.
- **homogen:** $\|b \cdot A\| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|b \cdot Ax\|}{\|x\|} = |b| \cdot \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |b| \cdot \|A\|$.
- **Dreiecksungleichung:**

  $$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|(A+B)x\| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax + Bx\| \\ &\overset{\Delta-\text{Ug für Vektornorm}}{\leq} \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| + \|Bx\| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Bx\| \\ &= \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

(b) Behauptung: Die Abbildung $\mathcal{N} : \mathbb{K}^n \to Kx \mapsto \|A \cdot x\|$ ist stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\forall \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{\|A\|}$ aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung $|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| = |\,\|Ax\| - \|Ay\|\,| \leq \|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\|$. Da $\|\cdot\|$ natürlich ist, ist sie insbesondere verträglich und daher $\|A(x-y)\| \leq \|A\| \cdot \|x - y\| < \varepsilon$. Also ist $\mathcal{N}$ stetig. □

Die Menge $S_1(0) = \{x \in \mathbb{K}^n, \|x\| = 1\}$ ist als Rand der Einheitskugel $K_1(0)$ kompakt. Stetige Funktionen nehmen auf kompakten Mengen ihr Maximum an, also ist

$$\sup_{x \in S_1(0)} \|Ax\| = \sup_{x \in S_1(0)} \mathcal{N}(x) = \max_{x \in S_1(0)} \mathcal{N}(x) = \max_{x \in S_1(0)} \|Ax\|.$$

(c) Die Frobenius-Norm ist

- **verträglich:** Es gilt

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2^2 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i\right)^2 \\
&\overset{\text{C.S.U.}}{\leq} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{\text{unabhängig von } j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \\
&= \|x\|_2 \cdot \|A\|_F
\end{aligned}$$

- **submultiplikativ:**

$$\begin{aligned}
\|A \cdot B\|_F^2 &= \sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}\right)^2 \\
&\overset{\text{C.S.U.}}{\leq} \sum_{i,j=1}^n \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n a_{ik}^2}_{\text{unabhängig von } j} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n b_{kj}^2}_{\text{unabhängig von } i}\right) \\
&= \sum_{i,k=1}^n a_{ik}^2 \cdot \sum_{k,j=1}^n b_{kj}^2 \\
&= \|A\|_F \cdot \|B\|_F
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Sei $A \in M$. Nach Korollar 2.57 gilt $\forall \tilde{A}$ mit $\left\|A - \tilde{A}\right\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ ist $A - \tilde{A}$ immer noch regulär. Also liegt für $\varepsilon \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ die Umgebung $K_\varepsilon(A)$ ganz in M.

b) Sei $z \in \text{Res}(A)$ und $\varepsilon > 0$. Wähle dann $\delta = \min\left(\|(A - z\mathbb{I})\|, \frac{\|(A-z\mathbb{I})\|}{\|(A-z\mathbb{I})^{-1}\|}\varepsilon\right)$. Dann gilt $\forall z, z' \in$

Res(A) mit $|z - z'| < \delta$

$$\begin{aligned}
\|\text{Res}(z) - \text{Res}(z')\| &= \left\|(A - z\mathbb{I})^{-1} - (A - z'\mathbb{I})^{-1}\right\| \\
&= \left\|(A - z\mathbb{I})^{-1} \cdot \mathbb{I} - (A - z\mathbb{I})^{-1} \cdot (A - z'\mathbb{I})^{-1}(A - z\mathbb{I})\right\| \\
&= \left\|(A - z\mathbb{I})^{-1}\left(\mathbb{I} - (A - z'\mathbb{I})^{-1}(A - z'\mathbb{I} + (z' - z)\mathbb{I})\right)\right\| \\
&= \left\|(A - z\mathbb{I})^{-1}\left(\mathbb{I} - \mathbb{I} - (A - z'\mathbb{I})^{-1}(z' - z)\mathbb{I})\right)\right\| \\
&= |z - z'| \cdot \left\|(A - z\mathbb{I})^{-1}(A - z'\mathbb{I})^{-1}\right\| \\
&\leq |z - z'| \cdot \left\|(A - z\mathbb{I})^{-1}\right\| \left\|(A - z'\mathbb{I})^{-1}\right\| \\
&= |z - z'| \cdot \left\|(A - z\mathbb{I})^{-1}\right\| \left\|(A - z\mathbb{I} + z\mathbb{I} - z'\mathbb{I})^{-1}\right\| \\
&= |z - z'| \cdot \left\|(A - z\mathbb{I})^{-1}\right\| \left\|(A - z\mathbb{I} + (z - z')\mathbb{I})^{-1}\right\|
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
1 &= \|\mathbb{I}\| \\
&= \left\|((z - z')\mathbb{I} + (A - z\mathbb{I}))(A - z\mathbb{I} + (z - z')\mathbb{I})^{-1}\right\| \\
&= \left\|((z - z')\mathbb{I}) \cdot (A - z\mathbb{I} + (z - z')\mathbb{I})^{-1} + (A - z\mathbb{I}) \cdot (A - z\mathbb{I} + (z - z')\mathbb{I})^{-1})\right\| \\
&\geq \left|\left\|(z - z')(A - z\mathbb{I} + (z - z')\mathbb{I})^{-1}\right\| - \left\|(A - z\mathbb{I})(A - z\mathbb{I} + (z - z')\mathbb{I})^{-1}\right\|\right| \\
&\geq \left||z - z'| \left\|(A - z\mathbb{I} + (z - z')\mathbb{I})^{-1}\right\| - \|(A - z\mathbb{I})\| \left\|(A - z\mathbb{I} + (z - z')\mathbb{I})^{-1}\right\|\right| \\
&= ||z - z'| - \|(A - z\mathbb{I})\|| \left\|(A - z\mathbb{I} + (z - z')\mathbb{I})^{-1}\right\|
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also

$$\left\|(A - z\mathbb{I} + (z - z')\mathbb{I})^{-1}\right\| \leq \frac{1}{||z - z'| - \|(A - z\mathbb{I})\||}$$

Setzen wir dies oben ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\text{Res}(z) - \text{Res}(z')\| &\leq |z - z'| \cdot \left\|(A - z\mathbb{I})^{-1}\right\| \frac{1}{||z - z'| - \|(A - z\mathbb{I})\||} \\
&= |z - z'| \cdot \frac{\left\|(A - z\mathbb{I})^{-1}\right\|}{|\|(A - z\mathbb{I})\| - |z - z'||}
\end{aligned}$$

$|z - z'| < \|(A - z\mathbb{I})\|$

$$\begin{aligned}
&\leq |z - z'| \cdot \frac{\left\|(A - z\mathbb{I})^{-1}\right\|}{\|(A - z\mathbb{I})\|} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 1$, $f(x) = \sin(x)$ und $c = 1$ ist M nicht kompakt, da es $\forall x \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle x_0 des Sinus gibt, sodass $x_0 > x$.
Z.Z. M ist abgeschlossen.

Beweis. $f(M) = \{c\}$ ist offensichtlich abgeschlossen. Das stetige Urbild einer abgeschlossenen Menge ist wieder abgeschlossen, also ist auch M abgeschlossen. □

Aufgabe 4

Behauptung: Es gilt $|\cos(f(x)) - \cos(g(x))| \leq |f(x) - g(x)|$.

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung gibt es ein ξ zwischen $f(x)$ und $g(x)$ mit $\sin(\xi) = \frac{\cos(g(x))-\cos(f(x))}{g(x)-f(x)}$, also auch $\frac{|\cos(g(x))-\cos(f(x))|}{|g(x)-f(x)|} = |\sin(x)| \leq 1$. Nach Multiplikation mit $|g(x) - f(x)|$ folgt sofort die Behauptung. □

$\forall f, g : \|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{\pi}$ gilt

$$\begin{aligned}|S(f) - S(g)| &= \left| \int_0^\pi \cos(f(x))\, \mathrm{d}x - \int_0^\pi \cos(g(x))\, \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_0^\pi |\cos(f(x)) - \cos(g(x))|\, \mathrm{d}x \\ &\leq \pi \cdot \sup_{x\in[0,\pi]} |\cos(f(x)) - \cos(g(x))|\end{aligned}$$

Diese Ungleichung folgt aus der obigen Behauptung.

$$\begin{aligned}&\leq \pi \cdot \sup_{x\in[0,\pi]} |f(x) - g(x)| \\ &< \pi \cdot \frac{\varepsilon}{\pi} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$