Namen: ____________________

____

Aufgabe	10.1	10.2	10.3	Z10.1	$\sum$
Punkte					

Höhere Analysis – Übungsblatt 10

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 10.1 (n–dimensionale Mannigfaltigkeiten) **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nicht–leer. Zeigen Sie, dass Ω genau dann eine C^1–Mannigfaltigkeit der Dimension n ist, falls Ω eine offene Menge ist.

Aufgabe 10.2 (Beispiele von Mannigfaltigkeiten) **5 Punkte**

Wir definieren die Mengen

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}, \qquad K^{n-1} := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : x_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2\Big\}. \tag{2.1}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^{n-1}$ eine C^1–Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $K^{n-1} \setminus \{0\}$ eine C^1–Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ist.

c) Zeigen Sie, dass K^{n-1} keine C^1–Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 10.3 (Langrange–Multiplikatoren) **5 Punkte**

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine C^1–Mannigfaltigkeit der Dimension m und sei $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Sei $\xi \in M$ und F nehme in ξ ein lokales Minimum an, d.h. es existiert ein $r > 0$, so dass $F(x) \geq F(\xi)$ für alle $x \in B_r(\xi) \cap M$.

a) Zeigen Sie, dass $\nabla F(\xi) \in N_\xi M$.

b) Sei $\rho > 0$ und sei $f \in C^1(B_\rho(\xi), \mathbb{R}^{n-m})$, so dass $\operatorname{rang} \mathrm{D}f(x) = n - m$ für alle $x \in B_\rho(\xi)$, und $f^{-1}(0) = B_\rho(\xi) \cap M$. Zeigen Sie, dass ein $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ existiert, so dass

$$\nabla F(\xi) = \sum_{k=1}^{n-m} y_j \nabla f_j(\xi). \tag{3.1}$$

Die Zahlen $y_1, \ldots, y_{n-m} \in \mathbb{R}$ heißen *Lagrange–Multiplikatoren.*

Zusatzaufgabe 10.1 (Helmholtz–Gleichung) **3 Punkte**

Sei $\lambda > 0$ und sei $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ existiert, so dass

$$u''(x) - \lambda u(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Fouriertransformation.

Abgabe bis spätestens 04.02.2021, 14:00 Uhr in Moodle.