Moritz Meyer, Josua Kugler

Aufgabe 1 (Diskrete Moduln). **(4 Punkte)**
Sei G eine proendliche Gruppe. Zeigen Sie: A e.e. als $\mathbb{Z}[G]$-Modul

(a) Ist A ein *endlich erzeugter* diskreter G-Modul und B ein beliebiger diskreter G-Modul, so ist auch $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)$ ein diskreter G-Modul.

(b) Der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ ist genau dann ein diskreter G-Modul, wenn G endlich ist. $\Leftarrow$ trivial

$\{g \in G : ga = a\}$ offen $\forall a \in A$

z.z. $\{g \in G : gf = f\}\ \forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)$ offen in G

$= \{g \in G : gf(g^{-1}a) = f(a)\ \forall a \in A\}$

$= \{g \in G : f(ga) = gf(a)\ \forall a \in A\}$

di $a = x \cdot a_1 + y \cdot a_2 \Rightarrow f(g(xa_1 + ya_2)) = f(gxa_1 + gya_2) \overset{\text{df}}{\underset{\text{G-Wirkung}}{=}} f(xga_1 + yga_2)$

$\overset{\mathbb{Z}\text{-Hom}}{=} xf(ga_1) + yf(ga_2)$

A ist endlich erzeugter G-Modul $\leadsto a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}[G]$

$f(ga) = f(g \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(ga_i)$

$gf(a) = gf(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g f(a_i)$

$\Rightarrow f(ga) = gf(a)\ \forall a \in A \Leftrightarrow f(ga_i) = gf(a_i)\quad i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \{g \in G : f(ga) = gf(a)\ \forall a \in A\} = \bigcap_{i=1}^n \{g \in G : f(ga_i) = gf(a_i)\}$

$\{g \in G : f(ga_i) = a\} = \{g \in G : ga_i \in f^{-1}(a)\} = \bigcup_{x \in f^{-1}(a)} \{g \in G : ga_i = x\}$ offen als NK des Stabilisators von a_i in A

$\Rightarrow \{g \in G : f(ga_i) = a\}$ offen

$\Rightarrow \{g \in G : f(ga_i) = gf(a_i)\} = \bigcup_{a \in A} \{g \in G : f(ga_i) = a\} \cap \{g \in G : a = g \cdot f(a_i)\}$
offen

offen als NK des Stabilisators von $f(a_i)$ in B

$\Rightarrow \{g \in G : f(ga) = gf(a)\ \forall a \in A\} = \bigcap_{i=1}^n \{g \in G : f(ga_i) = gf(a_i)\}$ offen als endlicher Schnitt offener Mengen

$\square$

b) Ist G endlich, so trägt G die diskrete Topologie und jeder G-Modul ist diskret.

Z.z. $\mathbb{Z}[G]$ diskret $\Rightarrow$ G endl.

$\mathbb{Z}[G]$ diskret $\Leftrightarrow$ $\{\tilde{g} \in G : \tilde{g} \cdot \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} a_g g\}$ offen $\forall \sum_{g \in G} a_g g \in \mathbb{Z}[G]$

$\Rightarrow \{\tilde{g} \in G : \tilde{g} \cdot 1 = 1\} = \{1\}$ offen $\Rightarrow (G : \{1\}) < \infty \Rightarrow \# G < \infty$ $\square$

Aufgabe 2 (Limites kohomologisch trivialer Moduln). **(4 Punkte)**
Sei G eine endliche Gruppe und sei $(A_0 \leftarrow A_1 \leftarrow \ldots)$ ein inverses System von G-Moduln. Zeigen Sie:

(a) Der inverse Limes $A := \varprojlim_i A_i$ abelscher Gruppen hat eine kanonische Struktur als G-Modul.

$a \in A \Rightarrow a = (a_0, a_1, \ldots)$ mit $d_{ij}(a_i) = a_j \quad \forall i, j$

$ga := (ga_0, ga_1, \ldots) \in \prod_i A_i$

Da es sich um ein inverses System von G-Moduln handelt, erhalten wir $d_{ij}(g a_i) = g \cdot d_{ij}(a_i) = g \cdot a_j \Rightarrow ga = (ga_0, ga_1, \ldots) \in \varprojlim_i A_i$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und jede Untergruppe H von G ist die kanonische Abbildung

$$C^n(H, A) \longrightarrow \varprojlim_i C^n(H, A_i)$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

Sei $\varphi_i : A = \varprojlim_i A_i \longrightarrow A_i$ die kanonische Projektionsabbildung.

$$C^n(H,A) = \mathrm{Abb}(H^{n+1}, A)^H \cong \varprojlim_i \mathrm{Abb}(H^{n+1}, A_i)^H$$
$$= \mathrm{Abb}(H^{n+1}, \varprojlim_i A_i)^H$$

$\psi : \quad f \longmapsto (\varphi_i \circ f)_i$

$\phi : \quad f \xleftarrow[\text{proj. Lim.}]{\text{UE}} (f_i)_i$

Wohldefiniertheit ψ:

$\varphi_{ij}(\varphi_i \circ f) = (\varphi_{ij} \circ \varphi_i) \circ f = \varphi_j \circ f \rightsquigarrow (\varphi_i \circ f)_i \in \varprojlim_i \mathrm{Abb}(H^{n+1}, A_i)$

$h \cdot (\varphi_i \circ f)_i = (h \cdot (\varphi_i \circ f))_i = (\tilde{h} \mapsto h \cdot \varphi_i(f(h \cdot \tilde{h}))),$

$\underset{\mathrm{Abb}(H^{n+1}, A_i)}{\cap}$

$f \in \mathrm{Abb}(H^{n+1}, A)^H$

$= (\tilde{h} \mapsto h \cdot \varphi_i(h^{-1} f(\tilde{h})))_i \underset{\text{auf proj. Lim. siehe (a)}}{\overset{\text{Def. Gruppenop.}}{=}} (h h^{-1} \varphi_i(f(\tilde{h})))_i = (\varphi_i \circ f)_i$

$\rightsquigarrow (\varphi_i \circ f)_i \in \varprojlim_i \mathrm{Abb}(H^{n+1}, A_i)^H$

Wohldefiniertheit ϕ: Nach UE des proj. Limes erhalten wir aus $(f_i)_i \in \varprojlim_i \mathrm{Abb}(H^{n+1}, A_i)$ ein $f \in \mathrm{Abb}(H^{n+1}, \varprojlim_i A_i)$.

Nun müssen wir noch zeigen, dass sich auch die H-Invarianz überträgt:

$$h \cdot f = (\tilde{h} \mapsto h \cdot f(h \tilde{h})) = (\tilde{h} \mapsto h \cdot (\varphi_i \circ f(h \tilde{h}))_i)$$
$$\underset{\text{def } f}{=} (\tilde{h} \mapsto (h \cdot f_i(h \cdot \tilde{h}))_i) = (\tilde{h} \mapsto (f_i(\tilde{h}))_i) = (\tilde{h} \mapsto f(\tilde{h})) = f \quad \checkmark$$
$$f_i \in \mathrm{Abb}(H^{n+1}, A_i)^H$$

Dass ϕ und ψ invers sind, ist klar nach Konstruktion.

(c) Sind alle A_i kohomologisch trivial, so ist A kohomologisch trivial.

$H^n(H, A^i) = 0 \quad \forall\, H \leq_{\text{UG}} G,\ n \geq 1$

$= H^n(C^\bullet(H, A^i))$

$\Leftrightarrow \quad 0 \longrightarrow C^0(H, A^i) \longrightarrow C^1(H, A^i) \longrightarrow \cdots \qquad \text{exakt } \forall i$

Linksexaktheit

$\Leftrightarrow \quad 0 \longrightarrow C^0(H, A) \longrightarrow C^1(H, A) \longrightarrow \cdots \qquad \text{exakt}$

proj. Limes

$\Leftrightarrow \quad H^n(H, A) = 0 \quad \forall\, H \leq_{\text{UG}} G,\ n \geq 1$

(d) Im Allgemeinen ist die kanonische Abbildung

$$\mathrm{H}^*(G, A) \longrightarrow \varprojlim_i \mathrm{H}^*(G, A_i)$$

kein Isomorphismus.

Aufgabe 3 (Cup-Produkt und Verbindungshomomorphismus). **(4 Punkte)**
Sei G eine Gruppe und sei $A \times B \to C$ eine Paarung von G-Moduln (d.h. eine G-bilinieare Abbildung). Dann existiert eine G-lineare Abbildung $A \otimes_{\mathbb{Z}} B \to C$ und wir erhalten das *Cup-Produkt*

$$- \cup - : \mathrm{H}^p(G,A) \times \mathrm{H}^q(G,B) \xrightarrow{\cup} \mathrm{H}^{p+q}(G, A \otimes_{\mathbb{Z}} B) \longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(G,C).$$

für alle $p,q \in \mathbb{N}$. Seien nun

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$
$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

exakte Folgen von G-Moduln, B ein G-Modul und $\overset{\mu}{A \times B \to C}$ eine bilineare Paarung, die Paarungen $\underbrace{A' \times B \to C'}_{\nu:}$ und $\underset{\tilde{\mu}}{A'' \times B \to C''}$ induziert. Zeigen Sie: Das Diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^p(G,A'') \times \mathrm{H}^q(G,B) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "{(\delta_A,\mathrm{id})}"] & \mathrm{H}^{p+q}(G,C'') \arrow[d, "\delta_C"] \\
\mathrm{H}^{p+1}(G,A') \times \mathrm{H}^q(G,B) \arrow[r, "\cup"] & \mathrm{H}^{p+q+1}(G,C')
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei δ die jeweiligen Verbindungshomomorphismen der langen exakten Kohomologiefolgen bezeichne. In anderen Worten: für alle $\alpha \in \mathrm{H}^p(G,A'')$ und alle $\beta \in \mathrm{H}^q(G,B)$ ist $\delta_C(\alpha \cup \beta) = \delta_A(\alpha) \cup \beta$.
Hinweis: Betrachten Sie Kozykel, die α und β darstellen, benutzen Sie eine explizite Beschreibung der Verbindungshomomorphismen (Schlangenlemma) und stellen Sie mittels einer Diagrammjagd die Differenz der jeweiligen Bilder als Korand dar.

Da es sich stets um G-Moduln handelt schreiben wir im Folgenden statt $H^*(G,X)$ ($C^*(G,X)$) einfach $H^*(X)$ ($C^*(X)$)

Sei $a'' \in C^p(A'')$ mit $\partial a'' = 0$ und $b \in C^q(B)$ mit $\partial b = 0$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^p(A') \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C^p(A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C^p(A'') \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{p+1}(A') \arrow[r] & C^{p+1}(A) \arrow[r] & C^{p+1}(A'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$a \mapsto a''$, $a'' \mapsto 0$, $a \mapsto \partial a$, $a' \mapsto \partial a \mapsto 0$

$a' = \delta_A(a'')$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^{p+q}(C') \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & C^{p+q}(C) \arrow[r, "p^\#"] \arrow[d, "\partial"] & C^{p+q}(C'') \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{p+q+1}(C') \arrow[r] & C^{p+q+1}(C) \arrow[r] & C^{p+q+1}(C'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$c \mapsto c''$, $c'' \mapsto 0$, $c \mapsto \partial c$, $c' \mapsto \partial c$

$c' = \delta_C(c'')$

$$\delta_C(a'' \cup b) = \delta_C\Big(\overbrace{(g_0, \dots, g_{p+q}) \longmapsto \tilde{\mu}(\underset{\substack{\uparrow \\ A''}}{a''(g_0, \dots, g_p)}, \underset{\substack{\uparrow \\ B}}{b(g_p, \dots, g_{p+q})})}^{c'' \in C''}\Big)$$

Wähle $c = (g_0, \dots, g_{p+q}) \longmapsto \mu(\tilde{a}(g_0, \dots, g_p), b(g_p, \dots, g_{p+q}))$ für ein $\tilde{a} \in C^p(A)$

mit $\tilde{a}(g_0, \dots, g_p) \longmapsto a''(g_0, \dots, g_p)$ unter der Projektion $A \to A''$,

sodass $\tilde{\mu}(a''(g_0, \dots, g_p), b(g_p, \dots, g_{p+q})) = \overline{\mu(\tilde{a}(g_0, \dots, g_p), b(g_p, \dots, g_{p+q}))} \in C''$

$\Rightarrow c = \tilde{a} \cup b \in C^{p+q}(C)$

$\partial c = \partial(\tilde{a} \cup b)$ liegt schon in $C^{p+q+1}(C')$, da $\tilde{a}$ Urbild von $a'' \in A''$ ist.

$\Rightarrow \delta_C(a'' \cup b) = \partial(\tilde{a} \cup b)$

Sei $a \in C^p(A)$ ein Urbild von a''.

$\partial a =$ liegt dann bereits in $C^{p+1}(A')$ (siehe Diagramm)

$\Rightarrow \delta_A(a'') = \partial a \Rightarrow \delta_A(a'') \cup b = \partial a \cup b$

$$\begin{aligned}
\delta_C(a'' \cup b) - \delta_A(a'') \cup b &= \partial(\tilde{a} \cup b) - (\partial a) \cup b \\
&= (\partial \tilde{a}) \cup b + (-1)^p \tilde{a} \cup \partial b - \partial a \cup b \\
&= \partial(\tilde{a} - a) \cup b + 0 \\
&= \partial(\tilde{a} - a) \cup b + (-1)^p (\tilde{a} - a) \cup \partial b \\
&= \partial((\tilde{a} - a) \cup b)
\end{aligned}$$

$| \partial b = 0,$
da b Kozykel

Da $\tilde{a}$ und a beide als Urbilder von a'' gewählt wurden, ist in A'' $\overline{\tilde{a} - a} = a'' - a'' = 0$. Aufgrund der Exaktheit von

$$0 \to C^p(A') \to C^p(A) \to C^p(A'') \to 0$$

liegt $\tilde{a} - a$ daher bereits in $C^p(A') \Rightarrow (\tilde{a} - a) \cup b \in C^{p+q}(C')$

Also ist die Differenz $\delta_C(a'' \cup b) - \delta_A(a'') \cup b$ ein Korand. $\square$

Aufgabe 4 ((Ko-)Induktion für endlichen Index). **(4 Punkte)**

Sei G eine abstrakte Gruppe. Für eine Untergruppe H von G von endlichem Index sei S ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von H in G.

$g = s \cdot h$

(a) Zeigen Sie, dass für jeden H-Modul A die Abbildung

$$\mathrm{Koind}_H^G(A) \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G(A), \quad f \mapsto \sum_{s\in S} s^{+1} \otimes f(s)^{-1},$$

ein Isomorphismus von G-Moduln ist.

Wohldefiniertheit

$$\sum_{s\in S} \underset{\mathbb{Z}[G]}{\underset{\cap}{s}} \otimes \underset{A}{\underset{\cap}{f(s^{-1})}} \quad \checkmark$$

G-Modulhom:

$$gf \longmapsto \sum_{s\in S} s \otimes (gf)(s^{-1}) = \sum_{s\in S} s \otimes gf(gs^{-1}) = \sum_{s\in S} sg^{-1} \otimes f((sg^{-1})^{-1})$$

multiplikation mit g^{-1} vertauscht die Nebenklassen

$$= \sum_{s\in S} s \otimes f(s^{-1})$$

$[s_1 h_1, s_2 h_2, \dots, s_n h_n] \otimes a \longmapsto [s_i \longmapsto h_i a]$

$g \otimes a \longmapsto$

$$\mathrm{Koind}_G A \longrightarrow \mathrm{Ind}_G A$$

$$f \longmapsto \sum_{g\in G} g \otimes f(g^{-1}) \longmapsto \sum_{g\in G} \left[\tilde{g} \longmapsto \begin{cases} g^{-1} f(g^{-1}) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}\right]$$

$$= [\tilde{g} \longmapsto \sum_{g\in G} g^{-1} a]$$

$$\mathrm{Ind}_G A \longmapsto \mathrm{Koind}_G A$$

$$g \otimes a \longmapsto \left[\tilde{g} \longmapsto \begin{cases} \tilde{g}^{-1} a & \mid \tilde{g} = 1 \\ 0 & \mid \text{sonst} \end{cases}\right]$$

$$\sum_{g\in G} g \otimes f(g^{-1}) = 1 \otimes f(1)$$

$$= 1 \otimes \tilde{g}^{-1} a$$

$$= g \otimes a$$

Sei nun G endlich. Für einen G-Modul A betrachten wir die G-Moduln $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, definiert durch $A_0 := A$, $A_i := \operatorname{coker}(A_{i-1} \to \operatorname{Koind}_G A_{i-1})$ für $i \geq 1$ und $A_i := \ker(\operatorname{Ind}_G A_{i+1} \to A_{i+1})$ für $i < 1$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)_n = A_n \otimes_{\mathbb{Z}} B = A \otimes_{\mathbb{Z}} B_n.$$

für alle G-Moduln A, B und $n \in \mathbb{Z}$.

$n \geq 0$: IA $n=0$ klar

IS: Gelte die Beh für n.

$$0 \to A_n \to \operatorname{Koind}_G A_n \to A_{n+1} \to 0$$

$$A_n \otimes B \to \operatorname{Koind}_G A_n \otimes B \to A_{n+1} \otimes B \to 0$$

IV $\quad \cong$

$$(A \otimes B)_n \to \operatorname{Koind}_G (A \otimes B)_n \to (A \otimes B)_{n+1} \to 0$$

$n \leq 0$: IA $n=0$ klar

IS: Gelte Beh. für $n+1$. Dann

$$0 \to A_n \to \operatorname{Ind}_G A_{n+1} \to A_{n+1} \to 0$$

$$\dots \to \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(A_{n+1}, B) \to A_n \otimes B \to (\operatorname{Ind}_G A_{n+1}) \otimes B \to A_{n+1} \otimes B \to 0$$

$$\cong \operatorname{Ind}_G (A_{n+1} \otimes B)$$

mit IV schließen wir:

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(A_{n+1}, B) \to A_n \otimes B \to \operatorname{Ind}_G (A \otimes B)_{n+1} \to (A \otimes B)_{n+1} \to 0$$

7.2.1 /

$$0 \to (A \otimes B)_n \to \operatorname{Ind}_G (A \otimes B)_{n+1} \to (A \otimes B)_{n+1} \to 0$$

§ 7.2.: $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}[G]}(A_{n+1}, B) \xrightarrow{0} A_n \otimes B$