

11. Übungsblatt

Ausgabe 02.02.2020 – Besprechung 08.02-11.02.2021

Verständnisfragen

- Welche der folgenden Ausdrücke sind Lorentz-invariant?

$$x^2, x_\mu x^\mu, x^\mu x^\mu, \eta_{\mu\nu}, ds^2, (dx^0)^2, \gamma, d\tau^2 \quad (1)$$

- Welche Bedingungen sollte ein relativistischer Lagrange-Formalismus erfüllen?
- Betrachten Sie ein Minkowski-Diagramm wie in der Vorlesung eingeführt. Verhält sich ein ruhender Beobachter raum- oder zeitartig?
- Wie stellt sich das Problem der Gleichzeitigkeit bzgl. Tunnel und Zug von Zettel 9 in einem Minkowski-Diagramm dar?
- Relativistischer Börsen-Insiderhandel

Ein Börsenhändler ist angeklagt, Insiderhandel betrieben zu haben: Er hat an der Börse in Chicago Aktien gekauft, bevor sie aufgrund einer Aussage der FED in New York hin an Wert gewonnen haben. Das Problem ist nun, dass der Börsenhändler schon 1 Mikrosekunde nach der Veröffentlichung des Statements der FED seinen Kauf getätigt hat.

1. Sind die beiden Ereignisse raum- oder zeitartig getrennt?
2. Die Anklage lautet auf Insiderhandel, weil der Börsenhändler in Chicago zum Zeitpunkt des Kaufs nicht von der Aussage der FED hätte wissen können. Angenommen, Sie sind Anwalt und vertreten den Börsenhändler vor Gericht: Können Sie mit Ihrer Kenntnis der Relativitätstheorie argumentieren, dass es keine Kausalität gab?
3. Angenommen, Sie sind Staatsanwalt: Können Sie auf relativistische Weise die Anklage präzisieren, so dass alle Argumente Lorentz-invariant sind?

1. Aufgabe: Lebensdauer von Myonen

Der energiereiche Teil der sekundären kosmischen Strahlung besteht hauptsächlich aus schnellen Myonen mit einer Geschwindigkeit von etwa $v = 0.98c$. Da Myonen lediglich eine Lebensdauer von $\tau_0 = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s haben, scheint es für sie zunächst aussichtslos, die Erdoberfläche zu erreichen, da $v\tau_0 = 0.65$ km. Als vereinfachtes Modell gehen wir davon aus, dass ein Strom von Myonen aus einer Höhe von $h = 3$ km senkrecht mit konstanter Geschwindigkeit auf die Erdoberfläche niedergeht und unterwegs außer durch einen spontanen Zerfall keine Myonen verloren gehen.

- (a) Geben Sie eine Lorentz-Transformation an, welche den Wechsel zwischen erdfestem Laborsystem und dem Bezugssystem der Myonen ausdrückt.
- (b) Wie lang ist eine Zeitdifferenz $\Delta t'$ im Labor, wenn im Ruhesystem der Myonen eine Zeitdifferenz Δt gemessen wird? Vergleichen Sie die typische tatsächlich zurückgelegte Strecke mit h .

2. Aufgabe:

Der Feldstärketensor ist gegeben durch

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \epsilon_{ijk} B_k \end{pmatrix} = A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu} \quad (2)$$

mit $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$.

- (a) Verifizieren Sie, dass sich \mathbf{E} und \mathbf{B} gemäß den bekannten Relationen aus den Potentialen ϕ und \mathbf{A} berechnen:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4)$$

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\epsilon_{ijk}\epsilon^{imn} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_j^n \delta_k^m$.

- (b) Wie betrachten die Eichtransformation $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$ mit einer skalaren Funktion $f(x)$. Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ eichinvariant ist.

3. Aufgabe:

Der Energie-Impuls-Tensor des freien Feldes ist gegeben durch

$$T^\mu_\nu = \frac{1}{4\pi} \left[-F^{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + \frac{1}{4} \delta^\mu_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right]. \quad (5)$$

Rechnen Sie ausgehend von diesem Tensor die Energie-Impuls-Erhaltung nach.

Hinweis: Energie-Impuls-Erhaltung ist gleichbedeutend mit der (vierdimensionalen) Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors.

4. Aufgabe:

Wir möchten sie sogenannten homogenen Maxwellgleichungen $F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0$ ähnlicher zur inhomogenen Gleichung schreiben. Dazu führt man den dualen Feldstärketensor ein:

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}, \quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen der Indizes} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen der Indizes} \\ 0 & \text{für zwei gleiche Indizes} \end{cases} \quad (6)$$

- (a) Welche Form nimmt die homogene Maxwell-Gleichung für $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ an?
- (b) Drücken Sie $\tilde{F}^{\alpha\beta}$ mit den Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes aus. Vergleichen Sie mit $F^{\alpha\beta}$
- (c) Wir betrachten nun die Produkte $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ sowie $\tilde{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$. Zeigen Sie mir ihrer Hilfe, dass gilt: Haben \mathbf{E} und \mathbf{B} in einem Inertialsystem denselben Betrag $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$, so auch in jedem anderen Inertialsystem.