Anmerkung: Wir benutzen für Referenzen unser mit ein paar Kommilitonen zusammen getextes Skript, zu finden unter `https://flavigny.de/lecture/pdf/analysis2`.

Aufgabe 1

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = e^x \cos(y) + \ln(1+y^2)$ Dann gilt:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ -e^x \sin(y) + \frac{2y}{1+y^2} \end{pmatrix}$$

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Behauptung: f ist zweimal partiell differenzierbar, aber

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$$

Beweis. Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{yx^4 + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{x^5 - 4y^2x^3 - y^4x}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Da $(x^2+y^2)^2 \neq 0$ sind diese partiellen Ableitungen als Quotienten partieller Ableitungen wieder partiell differenzierbar.

Für die partielle Ableitung von f im Punkt $(x,y) = (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(h,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+(0,h)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = 0, \end{aligned}$$

und für die zweiten partiellen Ableitungen gilt

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)}{h} = \frac{h^5}{hh^4} = 1$$
$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0)}{h} = -\frac{h^5}{hh^4} = -1.$$

Somit existieren die zweiten partiellen Ableitungen, aber es gilt

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}.$$

□

Behauptung: Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$ ist unstetig in $(0,0)$.

Beweis. Es ist für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Für die Folge $(x,y)_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} (x,y)_n \longrightarrow (0,0)$. Jedoch ist außerdem

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y)_n = \frac{\frac{1}{n^6} - \frac{9}{n^6} - \frac{9}{n^6} - \frac{1}{n^6}}{\frac{8}{n^6}} = 0 \neq 1 = \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Der Satz von Schwarz wirkt nur, wenn f 2-mal stetig partiell diffbar ist für alle $x \in D$. Für $x = (0,0)$ ist die zweite partielle Ableitung von f nicht stetig. □

Aufgabe 2

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)^T$ konvergiert gegen (0,0) für $n \to \infty$. Allerdings gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Also ist f an der Stelle $(0,0)$ unstetig und daher auch nicht differenzierbar. Die Richtungsableitung nach v ergibt sich als

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f\left(t \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{\frac{t^3 v_0 \cdot v_1^2}{t^2 v_0^2 + t^4 v_1^4}}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{v_0 v_1^2}{v_0^2 + t^2 \cdot v_1^4}.$$

Ist nun $v_0 = 0$, so ist der Zähler und damit der gesamte Limes 0. Sonst schreiben wir

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{v_0 v_1^2}{v_0^2 + t^2 \cdot v_1^4} = \frac{v_0 v_1^2}{v_0^2} = \frac{v_1^2}{v_0}.$$

Damit haben wir für beliebige v_0, v_1 gezeigt, dass die Richtungsableitung für $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ existiert.

(b) Wählen wir die euklidische Norm, so gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{\|h\|_2} &= \lim_{h\to 0}\frac{(h_1^2+h_2^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \lim_{h\to 0}\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right) \\
&\overset{h\to 0 \implies \|h\|_2\to 0}{=} \lim_{\|h\|_2\to 0}\|h\|_2 \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\|h\|_2}\right)}_{\text{beschränkt}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Also ist f an der Stelle 0 differenzierbar mit $Df = 0$, also ist insbesondere $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_0 = 0$. Es gilt aber

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (x^2+y^2)\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\cdot 2x + 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n = \left(\frac{1}{2\pi n}, 0\right)^T$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(a_n) &= -1\cdot\cos\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right) + \frac{2}{2\pi n}\cdot\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}}\right) \\
&= -1\cdot\cos(n\cdot 2\pi) + \frac{1}{\pi n}\cdot\sin(n\cdot 2\pi) \\
&= -1\cdot 1 + \frac{1}{\pi n}\cdot 0 \\
&= -1 \\
&\neq 0 = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_0
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ an der Stelle 0 unstetig.

Aufgabe 3

Es gilt

$$D_f(1,e) = \begin{pmatrix} \ln x_2 & \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{\cos^2(x_1x_2)} & \frac{x_1}{\cos^2(x_1x_2)} \end{pmatrix}\Bigg|_{1,e} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{e} \\ \frac{e}{\cos^2(e)} & \frac{1}{\cos^2(e)} \end{pmatrix}$$

und

$$D_g(f(1,e)) = \begin{pmatrix} 2y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{f(1,e)=(1,\tan(e))} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\tan(e) \end{pmatrix}$$

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$D_h(1,e) = D_{g\circ f}(1,e) = D_g(f(1,e))\cdot D_f(1,e) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\tan(e) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{e} \\ \frac{e}{\cos^2(e)} & \frac{1}{\cos^2(e)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{e} \\ \frac{2e\tan(e)}{\cos^2(e)} & \frac{2\tan(e)}{\cos^2(e)} \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$h(x_1,x_2) = (g\circ f)(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \ln^2(x_2) \\ \tan^2(x_1x_2) \end{pmatrix}.$$

Für die Jacobi-Matrix ohne die Kettenregel erhalten wir demnach

$$D_h(1,e) = \left.\begin{pmatrix} 2x_1 \ln^2(x_2) & \frac{x_1^2 \cdot 2\ln(x_2)}{x_2} \\ 2x_2 \tan(x_1x_2)\frac{1}{\cos^2(x_1x_2)} & 2x_1\tan(x_1x_2)\frac{1}{\cos^2(x_1x_2)} \end{pmatrix}\right|_{1,e} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{e} \\ \frac{2e\tan(e)}{\cos^2(e)} & \frac{2\tan(e)}{\cos^2(e)} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$

Seien $a = 0$ und $b = 2\pi$.
Behauptung: Es existiert kein $\xi \in (a,b)$ mit $f(b) - f(a) = D_f(\xi)(b-a)$.

Beweis. Es gilt

$$D_f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Nach Ana 1 wissen wir, dass $\cos(x)$ und $\sin(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen in $\mathbb{R}$ haben. Somit gilt $\forall x \in \mathbb{R}:$

$$D_f(x) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt gilt somit

$$f(b) - f(a) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi) \\ \sin(2\pi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \neq 2\pi \begin{pmatrix} -\sin(\xi) \\ \cos(\xi) \end{pmatrix} = D_f(\xi).$$

□