Aufgabe 1

(a) Es ist

$$\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx = \int_0^1 (x(x(x)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{8}}dx$$
$$= \int_0^1 x^{\frac{7}{8}}dx = [\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}]_0^1 = \frac{8}{15}$$

(b) Es ist

$$\int_0^1 e^x(1-x+x^2)dx = [e^x(1-x+x^2)]_0^1 - \int_0^1 e^x(-1+2x)dx$$
$$= [e^x(1-x+x^2)]_0^1 - [e^x(-1+2x)]_0^1 + \int_0^1 2e^x dx$$
$$= [e^x(1-x+x^2)]_0^1 - [e^x(-1+2x)]_0^1 + [e^x]_0^1$$
$$= e(1-1+1) - (e-1) + (e-1) = e$$

(c) Substituiere $u = x^2$:

$$(u)' = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{dx} \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2}x^3 dx$$
$$= \int_0^1 \frac{e^u xu}{2x}du = \frac{1}{2}\int_0^1 e^u u du = \frac{1}{2}([e^u u]_0^1 - \int_0^1 e^u du)$$
$$= \frac{1}{2}[e^u u - e^u]_0^1 = -\frac{1}{2}$$

(d) Es gilt $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$. Partielle Integration führt also auf

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \Big[x \cdot \tan(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

Substituiere $u = \cos(x)$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{\cos(0)}^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{\pi}{4} - \Big[\ln(u)\Big]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Aufgabe 2

(a) Da f stetig ist, muss f auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar sein. Es gibt also eine Stammfunktion F mit $\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\ \mathrm{d}t = F(\phi(x)) - F(\psi(x))$. Dann gilt auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(\psi(x)) - F(\phi(x)) \overset{\text{Kettenregel}}{=} f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$$

(b) Es gilt

$$G(x) := \int_a^x |f'(t)|\ \mathrm{d}t \overset{\text{Rannacher 1, Korollar 6.3}}{\geq} \left|\int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t\right| = |f(x)|,$$

womit wir Ungleichung (I) erhalten:

$$\left(G(x)^2\right)' = 2 \cdot |f'(x)| \cdot G(x) \geq 2 \cdot |f'(x) \cdot f(x)|.$$

Ferner gilt

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b 2|f(x)f'(x)|\ \mathrm{d}x$$

Nun wenden wir Ungleichung (I) an und folgern

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2}\int_a^b \left(G(x)^2\right)'\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}G(x)^2 \end{aligned}$$

Daraufhin benutzen wir, dass in $\mathbb{R}$ stets $x^2 = |x|^2$ gilt und setzen die Definition von G ein

$$= \frac{1}{2}\left|\int_a^b 1 \cdot |f'(t)|\ \mathrm{d}t\right|^2$$

Wenden wir schließlich die CSU an, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2}\int_a^b 1^2\ \mathrm{d}x \cdot \int_a^b |f'(x)|^2\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{b-a}{2} \cdot \int_a^b f'(x)^2\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2x}{(1+n^2x^2)^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2x}{1+2n^2x^2+n^4x^4}\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{2x^2}{n^2}+x^4}\right) \longrightarrow 0$$

Damit kovergiert die Funktionenfolge $f_n(x)$ gegen die konstante Funktion f mit$f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit ist

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$$

Für $x^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$ wird $|f_n(x)|$ nach Hinweis maximal. Es gilt

$$|f_n(x^*) - 0| = \frac{n^2 \frac{1}{\sqrt{3}n}}{(1^2 + n^2 \frac{1}{3n^2})^2} = \frac{\frac{n}{\sqrt{3}}}{(1+\frac{1}{3})^2} = \frac{9n}{16\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}n}{16}$$

Und somit

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\sqrt{3}n}{16}\right) \longrightarrow \infty$$

Also konvergiert $f_n(x)$ punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ Satz 1.3.1 bezieht sich nur auf gleichmäßig konvergente Funktionen.
Außerdem gilt mit der Substitution $u = (1 + n^2x^2)$:

$$\begin{aligned}
(u)' = 2n^2x \Rightarrow du = dx2n^2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2n^2x}\\
\implies \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{n^2x}{(1+n^2x^2)^2}\right)\\
= \frac{1}{2}\int_1^{1+n^2} \frac{1}{u^2}du = \frac{1}{2}[-\frac{1}{u}]_1^{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{1}{1+n^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+2n^2}\\
\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+2n^2}\right) \to \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Da $\frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}$ streng monoton fällt, gilt $\forall x \geq 0 : \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}} \leq \frac{1}{n}e^{-\frac{0}{n}} = \frac{1}{n}$. Wähle also für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. Dann gilt

$$\forall n \geq N,\ \forall x \geq 0 :\ |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon.$$

Also konvergiert f_n für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ und $\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x = 0$. Andererseits ist

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{z\to\infty}\int_0^z \frac{1}{n}e^{-\frac{x}{n}}\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\lim_{z\to\infty}\left[-e^{-\frac{x}{n}}\right]_0^z = \lim_{n\to\infty}\lim_{z\to\infty} -e^{\frac{z}{n}} + e^0 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\ \mathrm{d}x = 1 \neq 0 = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mathrm{d}x,$$

was nicht im Widerspruch zu Satz 1.3.1 steht, da dort der Definitionsbereich von f als beschränktes Intervall $[a, b]$ vorausgesetzt wird, hier ist aber der Definitionsbereich der $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ unbeschränkt.

Aufgabe 5

Mithilfe von partieller Integration lässt sich das Integral schreiben als

$$\int \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Addieren wir nun $\int \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$ und dividieren durch 2, so erhalten wir

$$\int \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2(x)}{2} + C.$$