Übungen zu Funktionentheorie 1 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 10 Musterlösung

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 3. Juli

Bearbeiten Sie bitte nur vier Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.
Für jedes Gebiet D bezeichne $\mathcal{O}(D)$ die Menge der holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$.
Sei $D_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ der Kreisring um $z_0 \in \mathbb{C}$ für reelle $0 \leq r < R$.

42. Aufgabe: Die Funktionen $f_j \in \mathcal{O}(D_{0,\pi}(0))$ für $j = 1, 2, 3, 4$ haben jeweils eine Singularität in $z = 0$. Bestimmen Sie den Typ der Singularität (mit Beweis):

(a) $f_1(z) = \sin(z)/z$,

(b) $f_2(z) = 1/\sin(z)$,

(c) $f_3(z) = \cos(z)/z$,

(d) $f_4(z) = \sin(1/z)$.

Lösung: Man kann die Laurententwicklung in $D_{0,\pi}(0)$ direkt hinschreiben.

(a) $f_1(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j}}{(2j+1)!}$, also sind die Laurentkoeffizienten $a_\nu = (-1)^{\nu/2}\frac{1}{(\nu+1)!}$ für gerade $\nu \geq 0$ und Null sonst. Die Singularität ist damit hebbar.

(b) Sinus hat eine Nullstelle in $z = 0$, also gilt $\lim_{z\to 0} f_2(z) = \infty$, damit liegt ein Pol vor.

(c) $f_3(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{2j-1}}{(2j)!}$, also sind die Laurentkoeffizienten $a_\nu = (-1)^{(\nu+1)/2}\frac{1}{(\nu+1)!}$ für ungerade $\nu \geq -1$ und Null sonst. Die Singularität ist damit ein Pol der Ordnung Eins.

(d) $f_4(z) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \frac{z^{-2j-1}}{(2j+1)!}$, also sind die Laurentkoeffizienten $a_\nu = (-1)^{(-\nu-1)/2}\frac{1}{(-\nu+1)!}$ für gerade $\nu \leq 0$ und Null sonst. Die Singularität ist damit wesentlich, weil es unendlich viele Laurentkoeffizienten mit $\nu < 0$ gibt.

43. Aufgabe: Sei $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\varphi(t) = (1 + |t|)\exp(2\pi i t)$. Bestimmen Sie die Umlaufzahl $N(\varphi, z)$ in den Punkten $z = -1$ und $z = 3/2$.

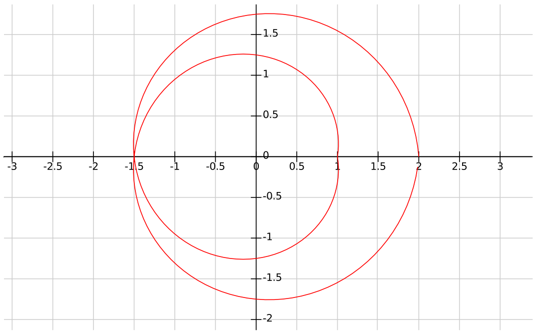
Lösung:
Man kann die Umlaufzahl in Abbildung 0.1 direkt ablesen: $N(\varphi, -1) = 2$ und $N(\varphi, 3/2) = 1$.
Für einen direkten Beweis verwenden wir Aufgabe 19.
Aufgabenteil 1: Sei $z_1 = 3/2$. Wir wählen einen Hilfsweg, der zu φ in $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$ homotop ist: Setze

$$\psi_1(t) = \begin{cases} 2\exp(2\pi i t) & -1 \leq t \leq -\frac{1}{2} \ , \\ -2 & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2\exp(2\pi i t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \ . \end{cases}$$

Die Homotopie $H : [0, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_1\}$ ist gegeben durch $H(s, t) = \varphi(t)s + \psi_1(1-s)$. Man prüft durch elementares Rechnen nach dass H stetig ist und dass $H(s, t) \neq z_1$, die Homotopie ist also wohldefiniert in den Definitionsbereich des Integranden. Man erhält die Umlaufzahl

$$N(\varphi, z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{1}{\zeta - z_1}\, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\psi_1} \frac{1}{\zeta - z_1}\, \mathrm{d}\zeta = N(\psi_1, z_1) \ .$$

Abbildung 0.1: Das Bild der Kurve φ aus Aufgabe 43.



Ab jetzt lässt sich die Aufgabe rechnerisch lösen. Wir kürzen zunächst den Bruch und addieren dann eine Konstante: Auf dem Intervall $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ ist die Kurve ψ_1 konstant, daher trägt dieser Bereich nicht zum Integral bei. Das Integral ist

$$\begin{aligned}
2\pi i N(\psi_1, z_1) &= \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{\psi_1(t) - z_1} \psi_1'(t)\ \mathrm{d}t + \int_{1/2}^{1} \frac{1}{\psi_1(t) - z_1} \psi_1'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{4\pi i \exp(2\pi i t)}{2\exp(2\pi i t) - \frac{3}{2}}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{4\pi i}{2 - \frac{3}{2}\exp(-2\pi i t)}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (2\pi i) + \frac{2\pi i \cdot \frac{3}{2}\exp(-2\pi i t)}{2 - \frac{3}{2}\exp(-2\pi i t)}\ \mathrm{d}t \\
&= 2\pi i + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Log}(2 - \tfrac{3}{2}\exp(-2\pi i t))\ \mathrm{d}t \\
&= 2\pi i + [\mathrm{Log}(2 - \tfrac{3}{2}\exp(-2\pi i t))]_0^1 = 2\pi i
\end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, weil $2 - \frac{3}{2}\exp(-2\pi i t) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ im Definitionsbereich der komplexen Logarithmusfunktion liegt. Also ist die gesuchte Umlaufzahl $N(\varphi, z_1) = N(\psi_1, z_1) = 1$.

Aufgabenteil 2: Sei $z_2 = -1$. Setze $\psi_2(t) = 2\exp(2\pi i t)$ für $-1 \leq t \leq 1$. Wähle die Homotopie $H : [0,1] \times [-1,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_2\}$ gegeben durch $H(s,t) = \varphi(t)s + \psi_1(1-s)$ für $0 \leq s \leq 1$. Man prüft elementar nach, dass z_2 nicht im Bild von H liegt und dass H stetig ist. Damit folgt mit einer ähnlichen Rechnung wie oben $N(\varphi, z_2) = N(\psi_2, z_2) = 2$.

44. Aufgabe: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze holomorphe Funktion und $n \geq 0$ eine natürliche Zahl, sodass die Urbildmenge $f^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = w\}$ für jedes feste $w \in \mathbb{C}$ höchstens n Elemente enthält. Zeigen Sie: f ist eine Polynomfunktion von Grad $\deg(f) \leq n$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $z \mapsto f(1/z)$ keine wesentliche Singularität in $z = 0$ besitzt.

Lösung: Sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ die Taylorentwicklung in $z = 0$. Sei $g : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ gegeben durch $g(z) = f(z^{-1})$.
Schritt 0: Die Funktion f kann nicht konstant sein, weil sonst die Faser $f^{-1}(a_0)$ ganz $\mathbb{C}$ wäre.
Schritt 1: Wir zeigen jetzt: "Die Singularität von g in $z = 0$ ist nicht wesentlich".

Sei dazu $w \in \mathbb{C}$ ein Punkt, dessen Faser $f^{-1}(w) = \{z_1, \ldots, z_n\}$ genau n Elemente hat. Sei $\delta > 0$ eine reelle Konstante, sodass der kleinste Abstand zwischen Punkten z_j größer als 2δ ist. Dann ist das Bild von $V_j = B_\delta(z_j)$ unter f offen in $\mathbb{C}$ nach dem Satz von der offenen Abbildung. Das Bild $f(V_j)$ enthält also eine Kugel $B_{\epsilon_j}(w)$ um w vom Radius $\epsilon_j > 0$. Sei $U = \bigcap_j B_{\epsilon_j}(w)$. Dann gilt $U \subseteq f(V_j)$ für jedes j. Insbesondere hat jedes $u \in U$ mindestens ein Urbild in jedem V_j, also mindestens n Urbilder in $V = \bigcup_j V_j$, da die V_j paarweise disjunkt sind. An dieser Stelle können wir annehmen, dass $w \neq f(0)$, sonst ersetzen wir w durch eines der gerade konstruierten u und führen die ganze Konstruktion nocheinmal durch. Außerdem können wir jetzt annehmen, dass $0 \notin V$ indem wir $\delta > 0$ klein genug wählen. Für jedes $u \in U$ sind damit aber schon alle Urbilder in V enthalten, da $f^{-1}(u)$ höchstens n Elemente hat, also

$$f^{-1}(U) \subseteq V \ .$$

V ist beschränkt, das bedeutet es gibt eine Konstante $c > 0$ sodass $|z| < c$ für alle $z \in V$. Für jedes Element von $g^{-1}(U)$ gilt dann aber $|z| > c^{-1}$, also ist $g^{-1}(U)$ enthalten in $\mathbb{C} \setminus B_{c^{-1}}(0)$. Also ist das Bild von $B_{c^{-1}}(0)$ unter g enthalten in $\mathbb{C} \setminus U$. Wäre die Singularität von g wesentlich, so wäre das Bild $B_{c^{-1}}(0)$ dicht in $\mathbb{C}$ nach dem Satz von Casorati-Weierstraß. Widerspruch!
Schritt 2: g hat Laurententwicklung $g(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} a_\nu z^\nu$. Da $g(z)$ keine wesentliche Singularität besitzt, gilt $a_\nu = 0$ für alle $\nu < -N$ mit einer geeigneten natürlichen Zahl N. Damit ist

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu z^\nu$$

eine Polynomfunktion. Jetzt bleibt nur noch zu zeigen $N \leq n$.
Schritt 3: Wähle ein $\zeta \in \mathbb{C}$, sodass jedes $z \in f^{-1}(\zeta)$ regulär ist, d.h. $f'(z) \neq 0$. Das geht, weil f' nur endlich viele Nullstellen hat. Dann hat $z \mapsto f(z) - \zeta$ genau N paarweise verschiedene Nullstellen nach dem Fundamentalsatz der Algebra, also $N = \# f^{-1}(\zeta) \leq n$.

45. Aufgabe: Sei die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definiert durch $\gamma(t) = 2\exp(4\pi i t)$. Berechnen Sie das Integral

$$\oint_\gamma \frac{\exp(\frac{\pi}{2} \cdot z)}{z^2 - 2iz + 3} \, \mathrm{d}z \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie den Residuensatz.

Lösung: Der Nenner ist $z^2 - 2i + 3 = (z - 3i)(z + i)$, der Zähler hat keine Null- oder Polstellen. Also liegen die Singularitäten bei $z_1 = 3i$ und bei $z_2 = -i$. Beide Singularitäten sind Pole, weil

$$\lim_{z \to z_j} \frac{\exp(\frac{\pi}{2} \cdot z)}{(z - z_1)(z - z_2)} = \infty \ .$$

Umlaufzahl: Die Umlaufzahl ist $N(\gamma, z_1) = 2$ und $N(\gamma, z_2) = 0$, wie man entweder an einer Skizze sofort abliest oder explizit ausrechnet. Wir rechnen (ähnlich wie in Aufgabe 43):

$$\begin{aligned} 2\pi i \cdot N(\gamma, z_1) = \oint_\gamma \frac{1}{\zeta - z_1} \, \mathrm{d}\zeta &= \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t) - z_1} \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{8\pi i \exp(4\pi i t)}{2\exp(4\pi i t) - 3i} \, \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Log}(-2\exp(4\pi i t) + 3i) \, \mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{Log}(-2\exp(4\pi i t) + 3i)\big|_{t=0}^{t=1} = 0 \ . \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, weil $-\gamma(t) + 3i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ im Definitionsbereich der komplexen Logarithmusfunktion liegt. Für $z_2 = -i$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
2\pi i N(\gamma, z_2) &= \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t) - z_2} \gamma'(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{8\pi i \exp(4\pi i t)}{2\exp(4\pi i t) + i} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{8\pi i}{2 + i\exp(-4\pi i t)} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 2(2\pi i) + \frac{4\pi \cdot \exp(-4\pi i t)}{2 + i\exp(-4\pi i t)} \, \mathrm{d}t \\
&= 2(2\pi i) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{Log}(2 + i\exp(-4\pi i t)) \, \mathrm{d}t \\
&= 2(2\pi i) + [\mathrm{Log}(2 + i\exp(-4\pi i t)) \, \mathrm{d}t]_{t=0}^{t=1} \\
&= 2(2\pi i) \; .
\end{aligned}$$

Wieder ist dies wohldefiniert, weil $2 + i\exp(-4\pi i t)$ im Definitionsbereich des komplexen Logarithmus liegt. Also folgt $N(\gamma, z_1) = 0$ und $N(\gamma, z_2) = 2$.

Residuum: Für das Residuum einer meromorphen Funktion mit einer einfachen Polstelle in z_j haben wir die Formel

$$\mathrm{Res}_{z_j}(f) = \lim_{z \to z_j} (z - z_j) f(z). \tag{$*$}$$

Dieser Limes ist unendlich, wenn die Funktion eine Polstelle höherer als erster Ordnung hat. In unserem Fall ist $f(z) = \frac{\exp(\pi \cdot z/2)}{z^2 - 2iz + 3}$ und wir erhalten

$$\mathrm{Res}_{z_2}(f) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2)(f(z)) = \lim_{z \to -i} \frac{\exp(\frac{\pi}{2} \cdot z)}{(z - 3i)} = \frac{\exp(\frac{\pi}{2} \cdot (-i))}{-4i} = \frac{-i}{-4i} = \frac{1}{4} \; .$$

Jetzt liefert der Residuensatz

$$\oint_\gamma \frac{\exp(\frac{\pi}{2} \cdot z)}{z^2 - 2iz + 3} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{2} N(\gamma, z_j) \, \mathrm{Res}_{z_j}(f) = 2\pi i \cdot 2 \cdot \mathrm{Res}_{z_2}(f) = 4\pi i \cdot \tfrac{1}{4} = \pi i \; .$$

Nachtrag: Obige Rechnung zum Residuum hat bei einigen zu einer "Mischung aus entsetzt und verärgert"geführt, weil die Formel $(*)$ in der Vorlesung noch nicht behandlet wurde. Der Beweis dieser Formel ist eine (leichte!) Übungsaufgabe. Im folgenden bestimme ich das Residuum in z_2 ohne diese Formel.

Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{a}{z - z_1} + \frac{b}{z - z_2}$$

mit $a(z - z_2) + b(z - z_1) = 1$ und das bedeutet $a = -b = (z_1 - z_2)^{-1} = (3i - (-i))^{-1} = \frac{1}{4i}$. Der Integrand ist damit

$$f(z) = \frac{\exp(\pi \cdot z/2)}{z^2 - 2iz + 3} = \underbrace{a \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{2} \cdot z}}{z - z_1}}_{f_1(z)} + \underbrace{b \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{2} \cdot z}}{z - z_2}}_{f_2(z)} \; .$$

Die Funktion f_1 ist holomorph fortsetzbar nach z_2, also ist $\mathrm{Res}_{z_2}(f_1) = 0$. Für f_2 setzen wir die Potenzreihe der Exponentialfunktion ein:

$$f_2(z) = b \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{2} \cdot z}}{z - z_2} = \underbrace{-\frac{e^{\frac{\pi}{2} z_2}}{4i}}_{=\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{z - z_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_2)^n}{n!} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{\nu=-1}^{\infty} \frac{(z - z_2)^\nu}{(\nu + 1)!} = \frac{1}{4} \cdot (z - z_2)^{-1} + \cdots$$

Jetzt kann man das Residuum direkt ablesen und erhält $\mathrm{Res}_{z_2}(f) = \mathrm{Res}_{z_2}(f_2) = \frac{1}{4}$.