1 Aufgabe

a) Z.Z. $f(A \cap f^{-1}(C)) = f(A) \cap B$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $f(A \cap f^{-1}(C)) \subset f(A) \cap C$.
Sei $y \in f(A \cap f^{-1}(C))$ beliebig. Dann $\exists x \in A \cap f^{-1}(C)$ mit $f(x) = y$ sodass

$$\begin{aligned} & x \in A \wedge x \in f^{-1}(C) \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in f(A) \wedge x \in \{a | f(a) \in C\} \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in f(A) \wedge f(x) \in C \\ \Leftrightarrow\ & f(x) \in f(A) \cap C \\ \Leftrightarrow\ & y \in f(A) \cap C \end{aligned}$$

Nun zeigen wir $f(A) \cap C \subset f(A \cap f^{-1}(C))$.
Sei $y \in f(A) \cap C$ beliebig. Dann $\exists x \in X$ mit $f(x) \in f(A) \cap C$. Gemäß den obigen Äquivalenzumformungen ist also $x \in (A \cap f^{-1}(C))$ und $f(x) \in f(A \cap f^{-1}(C))$. □

b) Z.Z. $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$.

Beweis. $\forall x \in f^{-1}(Y \setminus C)$

$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}(Y \setminus C) \\ \Leftrightarrow & f(x) \in Y \setminus C \\ \Leftrightarrow & f(x) \in Y \wedge f(x) \notin C \\ \Leftrightarrow & x \in X \wedge x \in \{a | f(a) \notin C\} \\ \Leftrightarrow & x \in X \wedge x \notin \{a | f(a) \in C\} \\ \Leftrightarrow & x \in X \wedge x f^{-1}(C) \\ \Leftrightarrow & x \in X \cap f^{-1}(C) \end{aligned}$$

Daraus resultiert $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$. □

c) Z.Z. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Beweis. Sei $y \in f(A \cap B)$ beliebig. Dann $\exists x \in A \cap B$ mit $f(x) = y$. Es gilt

$(x \in A \wedge x \in B) \implies (f(x) \in f(A) \wedge f(x) \in f(B)) \implies (f(x) \in f(A) \cap f(B)) \implies (y \in f(A) \cap f(B))$

. □

d) Z.Z. $f(f^{-1}(C)) \subset C$

Beweis. Sei $y \in f(f^{-1}(C))$ beliebig. Dann $\exists x \in f^{-1}(C)$ mit $f(x) = y$. Es gilt

$$(x \in f^{-1}(C)) \implies (x \in \{a | f(a) \in C\}) \implies f(x) \in C \implies y \in C$$

. □

2 Aufgabe

a) Z.Z. f ist genau dann injektiv, wenn für alle Teilmengen $A, B \subset X$ die Gleichheit $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ gilt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ gilt, wenn f injektiv ist. Wir wissen bereits, dass $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Z.Z.: f injektiv $\implies$ $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Wir beweisen einfach die Kontraposition $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B) \implies f$ ist nicht injektiv.
Es gibt also stets ein $y \in f(A) \cap f(B)$ mit $y \notin f(A \cap B)$. Daher $\exists x \in A$ und $\exists x' \in B$ mit $f(x) = f(x') = y$, wobei weder x noch x' in $A \cap B$ liegen, da ansonsten $y = f(x) \in f(A \cap B)$ wäre. Das impliziert $x \notin B$ und $x' \notin A \implies x \neq x'$, f ist also nicht injektiv.

Im zweiten Teil des Beweises zeigen wir, dass f injektiv ist, wenn $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \forall A, B \subset X$.
Auch hier zeigen wir die Kontraposition: f nicht injektiv $\implies \exists A, B \subset X$ mit $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
Wir betrachten eine nicht injektive Abbildung f und wählen $A = \{x\}$ und $B = \{x'\}$ mit $f(x) = f(x') = y$. Dann ist $y = f(x) \in f(A) \wedge y = f(x) \in f(B) \implies y \in f(A) \cap f(B)$. Allerdings ist weder x noch x' Element von $A \cap B$. Daher ist sowohl $f(x) \notin f(A \cap B)$ als auch $f(x') \notin f(A \cap B)$ und damit auch $y \notin f(A \cap B)$. □

b) Z.Z. f ist genau dann surjektiv, wenn für alle Teilmengen $C \subset Y$ die Gleichheit $f(f^{-1}(C)) = C$ gilt.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $f(f^{-1}(C)) = C$ gilt, wenn f surjektiv ist. Wir wissen bereits, dass $f(f^{-1}(C)) \subset C$.
Z.Z.: f surjektiv $\implies C \subset f(f^{-1}(C))$. Sei y aus C beliebig. Dann folgt aus der Surjektivität von f, dass es ein x mit $f(x) = y$ geben muss. Es gilt

$$f(x) \in C \implies x \in \{c | f(c) \in C\} \implies x \in f^{-1}(C) \implies f(x) \in f(f^{-1}(C)) \implies y \in f(f^{-1}(C))$$

.
Im zweiten Teil des Beweises zeigen wir, dass f surjektiv ist, wenn $\forall C \subset X : f(f^{-1}(C)) = C$.
Wir zeigen die Kontraposition: f nicht surjektiv $\implies \exists C \subset X : f(f^{-1}(C)) \neq C$.
Wir betrachten eine nicht surjektive Abbildung f, sodass $\exists y \in C$ mit $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Da y kein Urbild hat, ist auch $y \notin f(M) \forall M \subset X$, insbesondere also auch $y \notin f(f^{-1}(C))$. □

3 Aufgabe

Sei A eine Menge und $X, Y \subset A$. Wir betrachten die Abbildung $f_{X,Y} : P(A) \to P(A)$, welche für $M \subset A$ definiert ist durch

$$f_{X,Y}(M) = (X \cap M) \cup (Y \cap (A \setminus M))$$

Wann gibt es eine Teilmenge $M \subset A$ mit $f_{X,Y}(M) = \emptyset$?

Lemma 1. *$Y \cap (A \setminus M) = \emptyset$ gilt genau dann, wenn $M \subset Y$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst: $(Y \cap (A \setminus M) = \emptyset) \implies (Y \subset M)$.
Beweis durch Widerspruch: Annahme: $(Y \cap (A \setminus M) = \emptyset)$ und $(\exists x \in Y \wedge x \notin M)$. Es gilt $x \in A$ und $x \notin M$, also $x \in A \setminus M$. Daher ist auch $x \in (Y \cap (A \setminus M)$. $\lightning$
Im zweiten Teil des Beweises zeigen wir: $(Y \subset M) \implies (Y \cap (A \setminus M) = \emptyset)$.
Beweis durch Kontraposition: $(Y \cap (A \setminus M) \neq \emptyset) \implies (Y \not\subset M)$.
$(\exists x \in Y \cap (A \setminus M)) \implies (\exists x \in Y \wedge x \notin M) \implies (Y \not\subset M)$ $\square$

Satz 2. *Es gibt genau dann eine Teilmenge $M \subset A$ mit $f_{X,Y}(M) = \emptyset$, wenn $X \cap Y = \emptyset$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es eine Teilmenge $M \subset A$ mit $f_{X,Y}(M) = \emptyset$ gibt, wenn $X \cap Y = \emptyset$. Wir wählen M einfach gleich Y. Dann gilt

$$f_{X,Y}(M) = (X \cap M) \cup (Y \cap (A \setminus M)) = (X \cap Y) \cup (Y \cap (A \setminus Y)) = Y \cap (A \setminus Y)$$

Mit $Y \subset Y$ folgt aus dem Lemma: $f_{X,Y}(M) = Y \cap (A \setminus Y) = \emptyset$.

Im zweiten Teil des Beweises zeigen wir, dass $X \cap Y = \emptyset$ gilt, wenn es eine Teilmenge $M \subset A$ mit $f_{X,Y}(M) = \emptyset$ gibt.

$$((X \cap M) \cup (Y \cap (A \setminus M)) = \emptyset) \implies (X \cap M = \emptyset) \wedge (Y \cap (A \setminus M) = \emptyset)$$

Mit dem Lemma erhalten wir

$$(X \cap M = \emptyset) \wedge (Y \subset M) \implies (X \cap Y) = \emptyset$$

. $\square$

4 Aufgabe

Seien A und B endliche Mengen, welche jeweils genau n verschiedene Elemente enthalten.

a) In der Vorlesung wurde skizziert, wieso die Potenzmenge $P(A)$ genau 2^n Elemente enthält. Führen Sie einen Beweis dieser Behauptung mit vollständiger Induktion.

Def. 1. $\#M$ sei die Anzahl der Elemente von M.

Beweis. Offensichtlich ist $\#A = n$.
Induktionsanfang: $n = 0$**:** $P(\emptyset)$ enthält $1 = 2^0 = 2^n$ mit $n = \#A = 0$
Induktionsschritt $n \to n+1$**:** Induktionsannahme: Jede Menge $P(A)$ mit $\#A = n$ enthält 2^n Elemente.
Wir betrachten eine Menge C mit $\#C = n+1$.
Sei $c \in C$ beliebig, $D \coloneqq \{M \in P(C) | c \notin M\}$ und $E \coloneqq \{M \in P(C) | c \in M\}$. Offensichtlich ist $C = D \dot{\cup} E$.

D gleicht der Potenzmenge von $C \setminus \{c\}$, da alle Teilmengen von C, die c nicht enthalten, auch Teilmengen von $C \setminus \{c\}$ sind, aber gleichzeitig $P(C \setminus \{c\}) \subset P(C)$.
Damit ist $\#D = \#P(C \setminus \{c\}) = 2^{\#C \setminus \{c\}} = 2^{\#C-1} = 2^n$.
Da man aus jedem Element von D durch Hinzufügen von c ein Element von E erzeugen kann, ist $\#E \geq \#D$. Analog kann man aber durch Entfernen von c aus einem beliebigen Element von E ein Element von D erzeugen, sodass $\#D \geq \#E$.
Insgesamt ist $\#C = \#D + \#E = 2\#D = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. □

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass es genau $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ bijektive Abbildungen $f : A \to B$ gibt. Hierbei definieren wir $0! = 1$.

Beweis. Bei einer bijektiven Abbildung $f : A \to B$ gibt es zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$.
Induktionsanfang: $n = 1$**:** Da es genau ein $a \in A$ und genau ein $b \in B$ gibt, ist die bijektive Abbildung $f : A \to B, a \mapsto b$ eindeutig.
Induktionsschritt $n \to n+1$**:** Induktionsannahme: Zu zwei beliebigen Mengen A, B mit $\#A = \#B = n$ gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen $f : A \to B$.
Wir betrachten zwei beliebige Mengen C, D mit $\#C = \#D = n+1$.
Jedes Element von C muss auf genau ein Element von D abgebildet werden. Wir wählen $c \in C$ beliebig. Es gibt offensichtlich $n+1$ Möglichkeiten, auf welches $d \in D$ c abgebildet wird.
Nun verbleiben noch n Elemente aus C, die bijektiv auf n Elemente aus D abgebildet werden müssen. Dafür gibt es laut Induktionsannahme $n!$ verschiedene bijektive Abbildungen $f' : C \setminus \{c\} \to D \setminus \{d\}$. Insgesamt erhalten wir also $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ mögliche $f : C \to D$. □