Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. A. Schmidt
O. Thomas

Übungen zur Linearen Algebra I

3. Übungsblatt

Abgabe bis zum 7.11.19, 9:15 Uhr

Aufgabe 1 $(1+1+1+3$ Punkte$)$**.** Eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ heißt *Zyklus*, wenn es $d \geqslant 2$ und paarweise verschiedene Zahlen $a_1, \ldots, a_d \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass

$$\sigma(a) = \begin{cases} a_1 & \text{falls } a = a_d \\ a_{j+1} & \text{falls } a = a_j \text{ mit } j < d, \\ a & \text{falls } a \notin \{a_1, \ldots, a_d\}. \end{cases}$$

Wir schreiben dann auch $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_d)$ und nennen d die *Länge* des Zyklus.

(a) Schreiben Sie die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5$ auf zwei verschiedene Weisen als Produkt von Zyklen.

(b) Zeigen Sie, dass die Länge eines Zyklus wohldefiniert ist, d. h. aus $(a_1, \ldots, a_d) = (b_1, \ldots, b_e)$ folgt $d = e$.

(c) Sei σ ein Zyklus der Länge d. Wie viele verschiedene Darstellungen der Form $\sigma = (a_1, \ldots, a_d)$ gibt es?

(d) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass sich jedes Element der $\mathfrak{S}_n$ als Produkt von Zyklen der Länge zwei schreiben lässt. (Per Konvention ist in einer Gruppe das leere Produkt gleich ihrem neutralen Element. In der $\mathfrak{S}_1 = \{e\}$ gibt es zwar keine Zyklen der Länge zwei, aber ihr einziges Element ist dennoch das Produkt über diese. Das zeigt den Fall $n = 1$.)

Aufgabe 2 $(3+3$ Punkte$)$**.** Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe. Zeigen Sie:

(a) $\#gH = \#H$ für alle $g \in G$.

(b) $\#G = \#H \cdot \#(G/H)$.

Aufgabe 3 $(4+2$ Punkte$)$**.** Sei R ein (nicht notwendig kommutativer, nicht notwendig unitärer) Ring. Es gelte $x^2 = x$ für alle $x \in R$. Zeigen Sie:

(a) R ist kommutativ.

(b) Ist R ein Körper, so besteht R aus genau zwei Elementen.

Aufgabe 4 $(2+1+3$ Punkte$)$**.** Es sei $d \in \mathbb{Z}$. Auf der Menge $K_d = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ definieren wir $+$ und $\cdot$ durch

$$(a_0, a_1) +_{K_d} (b_0, b_1) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1)$$

und

$$(a_0, a_1) \cdot_{K_d} (b_0, b_1) = (a_0 b_0 + a_1 b_1 d, a_1 b_0 + a_0 b_1).$$

(a) Zeigen Sie, dass mit diesen Verknüpfungen K_d ein kommutativer Ring mit Eins ist. (Wieso muss man nicht nachrechnen, dass $(K_d, +_{K_d}, (0,0))$ eine abelsche Gruppe ist?)

(b) Zeigen Sie, dass $\iota\colon \mathbb{Q} \to K_d, x \mapsto (x, 0)$ ein injektiver unitärer Ringhomomorphismus ist und dass die Gleichung $X^2 - \iota(d) = 0$ eine Lösung in K_d besitzt.

(c) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

  (i) Mit diesen Verknüpfungen ist K_d ein Körper.

  (ii) Sind $a, b \in K_d$, so folgt aus $a \cdot_{K_d} b = 0$, dass $a = 0$ oder $b = 0$ gilt.

  (iii) Die Gleichung $X^2 - d = 0$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$.