Lineare Algebra 2 — Lösung zu Übungsblatt 9

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart *Abgabe:* Do 02.07.2020 um 9:15 Uhr

---

32. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Polynome mit speziellen Nullstellen)* Seien $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

(a) Man zeige, dass $\sqrt{2}$ ein Eigenwert von A und $\sqrt{3}$ ein Eigenwert von B ist.

(b) Man bestimme $C := A \otimes E_2 + E_2 \otimes B \in M_{4,4}(\mathbb{R})$.

(c) Man berechne $\chi_C^{\text{char}} \in \mathbb{R}[t]$ und folgere aus Aufgabe 31 (c), dass $\chi_C^{\text{char}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$.

Lösung:

(a) Die charakteristischen Polynome sind $\chi_A^{\text{char}} = \det(tE_2 - A) = \det\left(\begin{smallmatrix} t & -2 \\ -1 & t \end{smallmatrix}\right) = t^2 - 2$ und $\chi_B^{\text{char}} = \det\left(\begin{smallmatrix} t & -3 \\ -1 & t \end{smallmatrix}\right) = t^2 - 3$.
$\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ sind daher als Nullstellen von $t^2 - 2$ bzw. $t^2 - 3$ Eigenwerte von A bzw. B.

(b) Nach Bemerkung 8.18 ist das Kroneckerprodukt von A und E_2 gegeben durch

$$A \otimes E_2 = \begin{pmatrix} 0E_2 & 2E_2 \\ 1E_2 & 0E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist

$$E_2 \otimes B = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher erhalten wir

$$C := A \otimes E_2 + E_2 \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Das charateristische Polynom von C ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \chi_C^{\text{char}} &= \det\left(\begin{smallmatrix} t & -3 & -2 & 0 \\ -1 & t & 0 & -2 \\ -1 & 0 & t & -3 \\ 0 & -1 & -1 & t \end{smallmatrix}\right) = t \cdot \det\left(\begin{smallmatrix} t & 0 & -2 \\ 0 & t & -3 \\ -1 & -1 & t \end{smallmatrix}\right) + 3 \cdot \det\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & t & -3 \\ 0 & -1 & t \end{smallmatrix}\right) - 2 \cdot \det\left(\begin{smallmatrix} -1 & t & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & t \end{smallmatrix}\right) \\ &= t(t^3 - 5t) + 3(-t^2 + 1) - 2(t^2 + 1) = t^4 - 10t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]. \end{aligned}$$

Seien nun $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ die durch A bzw. B induzierten linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Nach Aufgabe 31 (c) ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ein Eigenwert von $\tilde{A} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \tilde{B}$. Da nach Bemerkung 8.8 die Darstellungsmatrizen von $\tilde{A} \otimes \mathrm{id}$ und $\mathrm{id} \otimes \tilde{B}$ bezüglich der Standardbasis die Kroneckerprodukte $A \otimes E_2$ und $E_2 \otimes B$ sind, ist die Darstellungsmatrix von $\tilde{A} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \tilde{B}$ gerade durch C gegeben. Damit ist $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ein Eigenwert von C. Insbesondere gilt $\chi_C^{\text{char}}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$.

33. Aufgabe: *(2+2+2 Punkte, Tensorprodukte und Dualräume)* Seien K ein Körper und V ein (nicht notwendig endlich-dimensionaler) K-Vektorraum. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$V^{\otimes n} := \underbrace{V \otimes_K \cdots \otimes_K V}_{n \text{ mal}} \quad \text{und} \quad (V^*)^{\otimes n} := \underbrace{V^* \otimes_K \cdots \otimes_K V^*}_{n \text{ mal}}.$$

Man zeige:

(a) Seien $f_1, \ldots, f_n \in V^*$. Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi_{f_1,\ldots,f_n} \colon V^{\otimes n} \to K$ mit

$$\varphi_{f_1,\ldots,f_n}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) \quad \text{für } x_1, \ldots, x_n \in V.$$

(b) Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\Phi_n \colon (V^*)^{\otimes n} \to (V^{\otimes n})^*$ mit

$$\Phi_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \varphi_{f_1,\ldots,f_n} \quad \text{für } f_1, \ldots, f_n \in V^*.$$

(c) Sei $n = 2$ und V endlich-dimensional. Dann ist Φ_2 ein Isomorphismus (von K-Vektorräumen).

Lösung:

(a) Definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} \mu : V \times \ldots \times V &\longrightarrow K \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n). \end{aligned}$$

Dies ist eine n-fache K-multilineare Abbildung, denn für jede Komponente i, für $i = 1, \ldots, n$, und $\lambda \in K, x_i, x_i' \in V$ gilt, da f_i linear:

$$\begin{aligned} &\mu(x_1, \ldots, \lambda x_i + x_i', \ldots, x_n) \\ &\quad = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_i(\lambda x_i + x_i') \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) \\ &\quad = \lambda f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_i(x_i) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) + f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_i(x_i') \cdot \ldots \cdot f_n(x_n) \\ &\quad = \lambda \mu(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \mu(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Das Paar $(V^{\otimes n}, \tau)$ erfüllt die universelle Eigenschaft (UM), daher gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi_{f_1,\ldots,f_n} \colon V^{\otimes n} \to K$ mit $\varphi_{f_1,\ldots,f_n} \circ \tau = \mu$, d.h.

$$\varphi_{f_1,\ldots,f_n}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n).$$

$$\begin{tikzcd} V^{\otimes n} \arrow[rr, "\varphi_{f_1,\ldots,f_n}"] & & K \\ & V \times \ldots \times V \arrow[ul, "\tau"] \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

(b) Definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} \mu : V^* \times \ldots \times V^* &\longrightarrow (V^{\otimes n})^* \\ (f_1, \ldots, f_n) &\mapsto \varphi_{f_1,\ldots,f_n}. \end{aligned}$$

Dies ist eine n-fache K-multilineare Abbildung, denn für jede Komponente i, für $i = 1, \ldots, n$, und $\lambda \in K, f_i, f_i' \in V^*$ gilt:

$$\begin{aligned} &\mu(f_1, \ldots, \lambda f_i + f_i', \ldots, f_n) \\ &\quad = \varphi_{f_1,\ldots,\lambda f_i + f_i',\ldots,f_n} \\ &\quad = \lambda \varphi_{f_1,\ldots,f_i,\ldots,f_n} + \varphi_{f_1,\ldots,f_i',\ldots,f_n} \\ &\quad = \lambda \mu(f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_n) + \mu(f_1, \ldots, f_i', \ldots, f_n), \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit gilt, da

$$\begin{aligned}
&\varphi_{f_1,\dots,\lambda f_i + f_i',\dots,f_n}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \\
&\quad = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot (\lambda f_i + f_i')(x_i) \cdot \dots \cdot f_n(x_n) \\
&\quad = \lambda f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_i(x_i) \cdot \dots \cdot f_n(x_n) + f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_i'(x_i) \cdot \dots \cdot f_n(x_n) \\
&\quad = \lambda \varphi_{f_1,\dots,f_i,\dots,f_n}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + \varphi_{f_1,\dots,f_i',\dots,f_n}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n).
\end{aligned}$$

Das Paar $((V^*)^{\otimes n}, \tau)$ erfüllt die universelle Eigenschaft (UM), daher gibt es eine eindeutige lineare Abbildung $\Phi_n\colon (V^*)^{\otimes n} \to (V^{\otimes n})^*$ mit $\Phi_n \circ \tau = \mu$, d.h.

$$\Phi_n(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = \varphi_{f_1,\dots,f_n}.$$

$$\begin{tikzcd}
(V^*)^{\otimes n} \arrow[rr, "\Phi_n"] & & (V^{\otimes n})^* \\
& V^* \times \dots \times V^* \arrow[ul, "\tau"] \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

(c) Da V endlich-dimensional ist, existiert eine Basis $e_1, \dots, e_n \in V$ mit $n = \dim V$. Wir erhalten daraus folgende Basen:

- die Basis $e_i \otimes e_j$, $i, j = 1, \dots, n$ für $V \otimes V$,
- die kanonische Basis $e_1^*, \dots, e_n^*$ für den Dualraum V^*, wobei $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$,
- die Basis $e_i^* \otimes e_j^*$, $i, j = 1, \dots, n$ für $V^* \otimes V^*$ und
- die Basis $(e_i \otimes e_j)^*$, $i, j = 1, \dots, n$ für $(V \otimes V)^*$, wobei $(e_i \otimes e_j)^*(e_k \otimes e_l) = \delta_{(i,j)(k,l)} = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

Wir betrachten den VR-Homomorphismus aus b) gegeben auf der Basis durch

$$\Phi_2\colon V^* \otimes V^* \to (V \otimes V)^*$$

$$e_i^* \otimes e_j^* \mapsto \varphi_{e_i^*, e_j^*}.$$

Da

$$\varphi_{e_i^*, e_j^*}(e_k \otimes e_l) = e_i^*(e_k) e_j^*(e_l) = \delta_{ik}\delta_{jl} = (e_i \otimes e_j)^*(e_k \otimes e_l)$$

ist die lineare Abbildung

$$\Psi_2\colon (V \otimes V)^* \to V^* \otimes V^*$$

$$(e_i \otimes e_j)^* \mapsto e_i^* \otimes e_j^*,$$

eine Umkehrabbildung zu Φ_2 und damit ist Φ_2 ein VR-Isomorphismus.

34. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Erzeugendensysteme von äußeren Potenzen)* Seien R ein Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul.

(a) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(x_1, \dots, x_m)$ ein Erzeugendensystem von M. Man zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ die Familie

$$(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m}$$

ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^n M$ ist.

(b) Sei nun $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $I = (2, 1 + \sqrt{-5}) \subseteq R$. Man zeige, dass $\bigwedge^2 I = 0$ ist.

Lösung:

(a) Aus der VL wissen wir, dass $\bigwedge^n M$ erzeugt wird von

$$y_1 \wedge ... \wedge y_n, y_i \in M.$$

Wir verkleinern dieses Erzeugendensystem nun systematisch, bis wir nur noch die Familie $(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n})_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le m}$ erhalten.

Sei $y_1 \wedge ... \wedge y_n \in \bigwedge^n M$, mit $y_i \in M$ beliebig. Angenommen $y_j \notin \{x_1, ..., x_m\}$. Schreibe $y_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i$, mit $a_{ij} \in R$. Es folgt

$$\begin{aligned} & y_1 \wedge ... \wedge y_{j-1} \wedge y_j \wedge y_{j+1} \wedge ... \wedge y_n \\ =& y_1 \wedge ... \wedge y_{j-1} \wedge (\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i) \wedge y_{j+1} \wedge ... \wedge y_n \\ =& \sum_{i=1}^m a_{ij} (y_1 \wedge ... \wedge y_{j-1} \wedge x_i \wedge y_{j+1} \wedge ... \wedge y_n), \end{aligned}$$

d.h. $y_1 \wedge ... \wedge y_j \wedge ... \wedge y_n$ liegt in Erzeugnis von $y_1 \wedge ... \wedge x_i \wedge ... \wedge y_n, i = 1, ..., m$. Dadurch können wir ohne Einschränkung annehmen, dass alle y_j aus $\{x_1, ..., x_m\}$ sind. Unser ES wurde damit verkleinert auf Elemente der Form $x_{i_1} \wedge ... \wedge x_{i_n}$ mit $1 \le i_1, \ldots, i_n \le m$.

Es gilt weiterhin $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} = 0$, falls $x_{i_j} = x_{i_k}$ mit $j \ne k$ existieren, d.h. wir können die Indizes paarweise verschieden wählen. Nun gilt (siehe Beweis von Bemerkung 9.7 aus der Vorlesung):

$$x_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(i_n)} = \operatorname{sgn}(\sigma) x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} \quad \text{für } \sigma \in S_n.$$

Somit kann durch Anwenden einer geeigneten Permutation stets erreicht werden, dass $i_j < i_{j+1}$ für alle $j = 1, ..., n-1$ gilt und wir erhalten, dass die Familie $(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_n})_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le m}$ ein ES von $\bigwedge^n M$ ist.

(b) I ist endlich erzeugter R-Modul, erzeugt von 2 und $1 + \sqrt{-5}$. Aus Teil a) folgt, dass $\bigwedge^2 I$ erzeugt ist von $2 \wedge (1 + \sqrt{-5})$. Es gilt aufgrund von R-Linearität und Alterniertheit:

$$\begin{aligned} 2 \wedge (1 \sqrt{-5}) &= 6 \wedge (1 + \sqrt{-5}) - 4 \wedge (1 + \sqrt{-5}) \\ &= (1 - \sqrt{-5}) \cdot (1 + \sqrt{-5}) \wedge (1 + \sqrt{-5}) - 2 \cdot 2 \wedge (1 + \sqrt{-5}) \\ &= (1 - \sqrt{-5}) \cdot 0 - (1 + \sqrt{-5}) \cdot 2 \wedge 2 \\ &= 0 - (1 + \sqrt{-5}) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Da der einzige Erzeuger von $\bigwedge^2 I$ also 0 ist, gilt $\bigwedge^2 I = 0$.

35. Aufgabe: *(3+3 Punkte, Äußere Potenzen und Tensorprodukte)* Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Man zeige:

(a) Es gibt einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $f\colon \bigwedge^2 M \to M \otimes_R M$ mit

$$f(a \wedge b) = a \otimes b - b \otimes a \quad \text{für } a, b \in M.$$

(b) Ist M endlich erzeugt und frei, so ist die Abbildung f aus (a) injektiv.

Hinweis: Man verwende Aufgabe 34 (a).

Lösung:

(a) Wir definieren die Abbildung $\varphi : M \times M \to M \otimes M$, $(m_1, m_2) \mapsto m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$. Die Abbildung ist offensichtlich wohldefiniert und antisymmetrisch. Außerdem ist die Abbildung bilinear: Für $r \in R$ und $m_1, m_2, n_1 \in M$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(rm_1 + n_1, m_2) &= (rm_1 + n_1) \otimes m_2 - m_2 \otimes (rm_1 + n_1)\\ &= r(m_1 \otimes m_2) + (n_1 \otimes m_2) - r(m_2 \otimes m_1) - (m_2 \otimes n_1)\\ &= r(m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1) + (n_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes n_1)\\ &= r\varphi(m_1, m_2) + \varphi(n_1, m_2)\end{aligned}$$

Aus der Antisymmetrie folgt dann auch die Linearität im zweiten Argument.
Für $m_1 = m_2$ gilt weiterhin $\varphi(m_1, m_1) = m_1 \otimes m_1 - m_1 \otimes m_1 = 0$. Daher ist φ alternierend. Durch Anwendung der universellen Eigenschaft äußerer Potenzen erhalten wir einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $f\colon \bigwedge^2 M \to M \otimes_R M$ mit $f(a \wedge b) = \varphi(a, b) = a \otimes b - b \otimes a$ für $a, b \in M$.

(b) Da M endlich erzeugt und frei ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und eine endliche Basis $(x_1, ..., x_m)$ von M.
Falls $m = 1$ ist, betrachten wir die Basis (x_1) von M. Für $a, b \in M$ existieren dann Ringelemente $r, s \in R$ mit $a = rx_1$ und $b = sx_1$. Insbesondere ist $a \wedge b = rx_1 \wedge sx_1 = rs(x_1 \wedge x_1) = 0$. Da $\bigwedge^2 M$ von den Elementen dieser Form erzeugt wird, ist $\bigwedge^2 = 0$ und f die Nullabbildung. Diese ist trivialerweise injektiv.
Ist $m \geq 2$, so ist nach Aufgabe 34 (a) ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^2 M$ durch $(x_{i_1} \wedge x_{i_2})_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m}$ gegeben. Sei nun $x \in \ker(f)$, dann hat x die Gestalt

$$x = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} c_{i_1, i_2}\,(x_{i_1} \wedge x_{i_2}) \quad \text{mit } c_{i_1, i_2} \in R$$

und es gilt

$$\begin{aligned}0 = f(x) = f\left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} c_{i_1, i_2}\,(x_{i_1} \wedge x_{i_2})\right) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} c_{i_1, i_2}\, f(x_{i_1} \wedge x_{i_2})\\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} c_{i_1, i_2}\,(x_{i_1} \otimes x_{i_2} - x_{i_2} \otimes x_{i_1})\\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} c_{i_1, i_2}\,(x_{i_1} \otimes x_{i_2}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} c_{i_1, i_2}\,(x_{i_2} \otimes x_{i_1}).\end{aligned}$$

Da $(x_i \otimes x_j)_{i,j=1,...,m}$ eine Basis von $M \otimes_R M$ bildet, müssen alle c_{i_1, i_2} Null sein. Daher ist $x = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} c_{i_1, i_2}\,(x_{i_1} \wedge x_{i_2}) = 0$ und damit $\ker f = 0$. Insbesondere ist f injektiv.
