Lineare Algebra 2 — Lösung zu Übungsblatt 7

Sommersemester 2020

AOR Dr. D. Vogel
P. Gräf, R. Steingart

Abgabe: Do 18.06.2020 um 9:15 Uhr

---

26. Aufgabe: *(6 Punkte, Universelle Eigenschaft des Kerns)* Seien R ein Ring, M und N zwei R-Moduln und $\varphi\colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus. Sei $\iota\colon \ker(\varphi) \to M$ die kanonische Inklusion. Man zeige, dass das Paar $(\ker(\varphi), \iota)$ die folgende Eigenschaft erfüllt:

(UK) Zu jedem R-Modul U und jedem R-Modulhomomorphismus $f\colon U \to M$ mit $\varphi \circ f = 0$ gibt es einen eindeutig bestimmten R-Modulhomomorphismus $g\colon U \to \ker(\varphi)$ mit $f = \iota \circ g$,

$$\begin{tikzcd}
\ker(\varphi) \arrow[dr, "\iota"] \arrow[drr, "0"] & & \\
& M \arrow[r, "\varphi"] & N, \\
U \arrow[uu, dotted, "g"] \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

d.h. die Abbildung von Mengen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(U, \ker(\varphi)) &\to \{f \in \mathrm{Hom}_R(U, M) \mid \varphi \circ f = 0\} \\
g &\mapsto \iota \circ g
\end{aligned}$$

ist bijektiv.

Lösung:
Wir betrachten zunächst die einzelnen (kommutativen) Teildiagramme.

$$\text{(I)}\quad \begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\varphi"] & & N \\
& \ker(\varphi) \arrow[ul, "\iota"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\text{(II)}\quad \begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\varphi"] & & N \\
& U \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

(I) Dies gilt für alle R-Modulhomomorphismen, denn $\varphi(\iota(\ker(\varphi)) = \varphi(\ker(\varphi)) = \{0\}$ und damit $\varphi \circ \iota = 0$.

(II) Dies entspricht gerade der Voraussetzung, dass $\varphi \circ f = 0$ gilt. Da $\varphi(f(U)) = \{0\}$, muss also $f(U) \subseteq \ker(\varphi)$ gelten.

Wir suchen nun einen R-Modulhomomorphismus g, sodass das Diagramm

$$\text{(I)}\quad \begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "g"'] & & M \\
& \ker(\varphi) \arrow[ur, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Aus (II) wissen wir, dass $f(U) \subseteq \ker(\varphi)$ gilt, wir können also f einschränken auf den Homomorphismus

$$g := f|^{\ker(\varphi)} : U \to \ker(\varphi), \quad x \mapsto f(x).$$

Offenbar gilt damit $\iota \circ g = f$ und g ist eindeutig bestimmt. Denn für eine weitere Abbildung g' mit diesen Eigenschaften gilt $\iota \circ g = f = \iota \circ g'$ und da die Inklusion ι eine injektive Abbildung ist, folgt daraus schon $g = g'$.

27. Aufgabe: *(2+4 Punkte, Direkte Summen von freien Moduln)* Seien R ein Ring und $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von freien R-Moduln. Sei $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$. In dieser Aufgabe soll mit Hilfe der universellen Eigenschaften von direkten Summen und freien Moduln gezeigt werden, dass M frei ist. Sei dazu $(x_{i,j})_{j\in J_i}$ eine Basis von M_i. Wir setzen

$$K := \bigcup_{i\in I}(\{i\} \times J_i)$$

und betrachten $(x_{i,j})_{(i,j)\in K}$ via der kanonischen Inklusionen $q_i \colon M_i \to M$ als Familie von Elementen von M. Sei N ein Modul mit einer Familie von Elementen $(y_{i,j})_{(i,j)\in K}$ aus N.

(a) Man zeige, dass es für alle $i \in I$ einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $f_i \colon M_i \to N$ mit $f_i(x_{i,j}) = y_{i,j}$ für alle $j \in J_i$ gibt.

(b) Man folgere aus (a) und der universellen Eigenschaft der direkten Summe, dass $(M, (x_{i,j})_{(i,j)\in K})$ die Eigenschaft (UF) erfüllt, M also frei ist.

Lösung:

(a) Sei $i \in I$. Anwendung der universellen Eigenschaft freier Moduln (UF) aus Satz 7.7 auf das Paar $(M_i, (x_{i,j})_{j\in J_i})$ liefert zu dem R-Modul N und der Familie $(y_{i,j})_{j\in J_i}$ einen eindeutigen R-Modulhomomorphismus $f_i \colon M_i \longrightarrow N$ mit $f_i(x_{i,j}) = y_{i,j}$ für alle $j \in J_i$. M.a.W. ist die Abbildung

$$\Phi_i \colon \mathrm{Hom}_R(M_i, N) \longrightarrow N^{J_i},\ \varphi \longmapsto (\varphi(x_{i,j}))_{j\in J_i}$$

bijektiv, da die Familie $(y_{i,j})_{j\in J_i} \in N^{J_i}$ beliebig war.

(b) Um einzusehen, dass das Paar $(M, (x_{i,j})_{(i,j)\in K})$ die universelle Eigenschaft (UF) erfüllt, müssen wir gemäß Satz 7.7 zeigen, dass die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow N^K,\ f \longmapsto (f(x_{i,j}))_{(i,j)\in K}$$

für jeden R-Modul N bijektiv ist.
Setzen wir $f_i := f \circ q_i \colon M_i \longrightarrow N$ für jedes $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, so ist nach der UE der direkten Summe 7.4 die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N),\ f \longmapsto (f_i)_{i\in I}$$

bijektiv, und unter Verwendung der Bijektionen $\Phi_i \colon \mathrm{Hom}_R(M_i, N) \longrightarrow N^{J_i} = \prod_{j\in J_i} N$ aus (a) erhalten wir die Bijektivität von

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \prod_{i\in I} N^{J_i} &= \prod_{(i,j)\in K} N = N^K,\\ f \longmapsto (\Phi_i(f_i))_{i\in I} &= (f(x_{i,j}))_{(i,j)\in K}\end{aligned}$$

(beachte, dass wir gemäß der Angabe die Identifikationen $x_{i,j} = q_i(x_{i,j}) \in M$ verwenden).

Die Übungsblätter sowie weitere Informationen zur Vorlesung sind über **MaMpf** abrufbar.