Übungen zu Funktionentheorie 1 Sommersemester 2020

Prof. Dr. R. Weissauer Blatt 8

Dr. Mirko Rösner Abgabe auf Moodle bis zum 19. Juni

Bearbeiten Sie vier Aufgaben. Jede Aufgabe ist vier Punkte wert.
Für jedes Gebiet D bezeichne $\mathcal{O}(D)$ die Menge der holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$.

32. Aufgabe: Seien V und U Gebiete mit $V \subseteq U$. Die Einschränkungsabbildung $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$, $f \mapsto f|_V$ ist definiert durch $f|_V(z) = f(z)$ für $z \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass die Einschränkungsabbildung injektiv ist.

(b) Konstruieren Sie ein Beispiel für U und V, sodass die Einschränkungsabbildung nicht surjektiv ist (mit Beweis).

33. Aufgabe: Sei $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Bestimmen Sie $\mathrm{Aut}(E)$, also die Gruppe der Bijektionen $f : E \to E$, sodass f und f^{-1} holomorph sind.
Hinweis: Schwarz'sches Lemma und Möbius-Transformationen.

34. Aufgabe: Sei $f \in \mathcal{O}(D)$ nicht konstant, sodass $|f|$ in $z_0 \in D$ ein Minimum annimmt, also $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ für alle $z \in D$. Zeigen Sie $f(z_0) = 0$.
Hinweis: Maximumsprinzip.

35. Aufgabe: Konstruieren Sie eine nichtkonstante holomorphe Funktion $g : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ mit $f(1/n) = 0$ für alle $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Warum ist das kein Widerspruch zum Identitätssatz?

36. Aufgabe: Seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ holomorph. Zeigen Sie: Wenn $|g(z)| \leq |f(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit

$$g = c \cdot f \ .$$

Hinweis: Modifizieren Sie den Beweis von Aufgabe 24(c).