Theoretische Physik I: Klassische Mechanik (PTP1)

Universität Heidelberg
Wintersemester 2019/20

Dozent: Prof. Dr. Matthias Bartelmann
Obertutor: Dr. Christian Angrick

Übungsblatt 6

Besprechung in den Übungsgruppen am 25. November 2019

1. Hausaufgabe: Matrizen und Determinanten

Gegeben seien die Matrizen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Matrixprodukte CD, DC, EF und FE. Was ist mit den Produkten DE und ED?

b) Berechnen Sie die Determinanten $\det(E)$, $\det(F)$ und $\det(EF)$. Was ist mit $\det(C)$, $\det(D)$, $\det(CD)$ und $\det(DC)$?

c) Berechnen Sie die inversen Matrizen E^{-1} und F^{-1}. Was ist mit C^{-1} und D^{-1}?

2. Hausaufgabe: Pauli-Matrizen

Jede komplexe Zahl z kann durch ihren Realteil a und ihren Imaginärteil b als $z = a + \mathrm{i}b$ dargestellt werden, wobei i die imaginäre Einheit ist und $a, b \in \mathbb{R}$. Die komplex Konjugierte der Zahl z wird durch einen Stern gekennzeichnet und ist definiert als $z^* \equiv a - \mathrm{i}b$. Die komplex Konjugierte einer Matrix erhält man, indem jede einzelne Komponente komplex konjugiert wird.

Die *unitäre Gruppe* $U(N)$ ist so definiert, dass die Transformationen dieser Gruppe das komplexe Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_i^* y_i$ erhalten, wobei $\vec{x}$ und $\vec{y}$ komplexwertige Vektoren mit N Komponenten sind.

a) Zeigen Sie, dass eine Transformation A das komplexe Skalarprodukt genau dann erhält, wenn die Adjungierte $A^\dagger \equiv A^{*\top}$ genau die Inverse der Transformation ist, $A^\dagger = A^{-1}$.

In der Quantenmechanik wird der Spin eines Teilchens mit Hilfe der drei Pauli-Matrizen beschrieben, die folgendermaßen definiert sind,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

b) …die Pauli-Matrizen selbst-adjungiert sind, $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$,

c) …das Quadrat jeder Pauli-Matrix die Einheitsmatrix ergibt, $\sigma_i^2 = \mathbb{1}_2$,

d) …die Pauli-Matrizen selbst-invers sind, $\sigma_i^{-1} = \sigma_i$,

e) …die Pauli-Matrizen Elemente der $U(2)$, nicht aber der $SU(2)$ sind*,

f) …für die Pauli-Matrizen $\sigma_i \sigma_j = \mathrm{i}\,\sigma_k$ gilt, wenn (i, j, k) eine gerade Permutation von $(1, 2, 3)$ ist.

---

* *Hinweis:* Die $SU(2)$ ist die Untergruppe von $U(2)$ mit positiver Determinante.

3. Präsenzaufgabe: Erhaltung des Skalarprodukts

a) Zeigen Sie, dass Transformationen der orthogonalen Gruppe $O(N)$ das euklidische Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_i y_i$ erhalten.

b) Betrachten Sie das Skalarprodukt der speziellen Relativitätstheorie in einer räumlichen Dimension $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = -x_0 y_0 + x_1 y_1$. Zeigen Sie, dass sog. *Lorentz-Boosts*, die über die Transformation

$$\Lambda \equiv \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

definiert sind, dieses Skalarprodukt erhalten.

4. Verständnisfragen

a) Begründen Sie, welche Untermenge der quadratischen Matrizen die allgemeine lineare Gruppe $GL(N)$ bildet.

b) Wodurch sind orthonormale Transformationen gekennzeichnet? Was bedeutet das?

c) Was sind polare und axiale Vektoren?

Hinweis:

Liebe Theo-1-Hörer*innen,

in der Woche vom **25. bis 29. November** findet der Klimastreik statt, um auf die besondere Dringlichkeit der Klimakrise aufmerksam zu machen.

In Zusammenarbeit mit sehr vielen Dozent*innen und anderen engagierten Menschen laden wir für diese Woche zu einem alternativen Veranstaltungsprogramm ein, zur sogenannten **Public Climate School**. Die PCS bietet eine Vielfalt an Zugängen zum Thema Klimakrise an, und sie ist offen für jedermensch, ihr dürft also gerne Leute von außerhalb der Uni mitbringen. Es sind Workshops, Vorlesungen und sogar Filmvorführungen dabei. Ihr findet das Programm unter

fridaysforfuture-heidelberg.de/pcs

Wenn ihr euch mal ein interessantes Paper zur Dringlichkeit der Lage anschauen wollt, sei hier ein Vorschlag:

https://www.pnas.org/content/pnas/115/33/8252.full.pdf

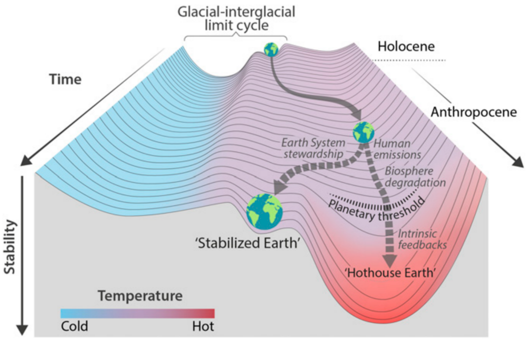

Abbildung 1: Aus: Steffen, Rockström et.al. 2018

Es ist auf Englisch und benötigt natürlich viel Vorwissen, um im Detail verstanden zu werden, aber es gibt einen Ausblick darauf, wie physikalische Begrifflichkeiten (wie z.B. „Trajektorie“) in anderen Zusammenhängen verwendet werden können. Es lohnt sich auch, allein die Titel der zitierten Paper (auf der letzten Seite) zu lesen, sie lassen oft erahnen, woran derzeit geforscht wird.

Ihr habt Fragen oder Anregungen? Ihr wollt euch engagieren? Wir freuen uns von euch zu hören!

Für die Students for Future Heidelberg — klimawoche@fridaysforfuture-heidelberg.de
Michelangelo Tagliavini (Übungsgruppe 3) — tagliavini@stud.uni-heidelberg.de
Paul Wiesemeyer (Übungsgruppe 2) — wiesemeyer@thphys.uni-heidelberg.de