Übungen zur Algebra II

Sommersemester 2021

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. A. Schmidt
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 9
Abgabe: *Freitag, 18.06.2021, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Tor und Lokalisierung). **(6 Punkte)**
Sei A ein kommutativer Ring mit Eins und sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Ferner seien M und N zwei $S^{-1}A$-Moduln, die wir über die kanonische Abbildung $A \to S^{-1}A$ auch als A-Moduln auffassen. Benutzen Sie Satz 16.7 um zu zeigen, dass für jedes $i \geq 0$ ein Isomorphismus

$$\mathrm{Tor}_i^A(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_i^{S^{-1}A}(M,N)$$

von A-Moduln existiert.

Aufgabe 2 (Ext). **(6 Punkte)**
Seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $d,e \in \mathbb{N}$ Teiler von n. Ferner sei $i \in \mathbb{N}_0$.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{Ext}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Ext}_i^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/e\mathbb{Z})$. *Hinweis:* Blatt 6, Aufgabe 1.

(c) Bestimmen Sie $\mathrm{Ext}_i^{\mathbb{C}[X,Y]}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, wobei $\mathbb{C}$ vermöge der Abbildung $\mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}, X \mapsto 0, Y \mapsto 0$ als $\mathbb{C}[X,Y]$-Modul aufgefasst wird. *Hinweis:* Blatt 8, Aufgabe 2.

Aufgabe 3 (Abgeleitete projektive Limites). **(6 Punkte)**
Zeigen Sie:

(a) Für ein projektives System $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ endlicher abelscher Gruppen ist $\lim^1_{n\in\mathbb{N}} A_n = 0$.

(b) Für eine Primzahl p ist $\lim^1_{n\in\mathbb{N}} p^n\mathbb{Z} \neq 0$, wobei die Übergangsabbildungen die Inklusionsabbildungen sind. *Hinweis:* Blatt 4, Zusatzaufgabe 5.

Aufgabe 4 (Induzierte Abbildungen auf Spektren[1]). **(6 Punkte)**
Sei $\phi\colon A \to B$ ein Morphismus kommutativer Ringe mit Eins und sei $\phi^*\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ die induzierte stetige Abbildung der Spektren. Zeigen Sie:

(a) Ist ϕ injektiv, so ist das Bild von ϕ^* dicht in $\mathrm{Spec}(A)$, d. h. der Abschluss des Bildes ist ganz $\mathrm{Spec}(A)$.

(b) Ist B treuflach über A, so ist ϕ^* surjektiv.

Zusatzaufgabe 5 (Leerer projektiver Limes). **(6 Punkte)**
Sei I die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$, halbgeordnet durch Inklusion. Für $i \in I$ setzen wir

$$M_i := \{f\colon i \to \mathbb{Q} \mid f \text{ ist injektiv}\}$$

und für $i \subseteq j$ sei $\varphi_{ij}: M_j \to M_i, f \mapsto f|_i$, die Einschränkungsabbildung. Zeigen Sie:

(a) Es ist $(M_i, \varphi_{ij})_{i\in I}$ ein projektives System nichtleerer Mengen mit surjektiven Übergangsabbildungen.

(b) Es ist $\varprojlim_{i\in I} M_i = \varnothing$.

---

[1] Diese Aufgabe ist Teil einer Serie von Aufgaben über das Spektrum eines Ringes.