Namen: ______________________

____

Aufgabe	7.1	7.2	7.3	Z7.1	Z7.2	Z7.3	Z7.4	$\sum$
Punkte								

Höhere Analysis – Übungsblatt 7

Wintersemester 2020/2021, Universität Heidelberg

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Aufgabe 7.1 **5 Punkte**

Sei $g\colon (0,1)\times(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) \coloneqq \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{für alle } x,y \in (0,1). \tag{1.1}$$

Berechnen Sie

$$\int_{(0,1)}\int_{(0,1)} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{und} \qquad \int_{(0,1)}\int_{(0,1)} g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Warum stimmen die beiden Integrale nicht überein? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7.2 **5 Punkte**

Sei $U \coloneqq (1,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(0,\infty)$. Wir definieren die Abbildung $\Phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ durch

$$\Phi(r,s,t) \coloneqq (rt\cos(s), rt\sin(s), \sqrt{r^2-1}) \qquad \text{für alle } (r,s,t)\in U. \tag{2.1}$$

a) Bestimmen Sie $\Phi(U)$ und $\det \mathrm{D}\Phi$.

b) Zeigen Sie, dass $\Phi\colon U \longrightarrow \Phi(U)$ ein C^1–Diffeomorphismus ist.

c) Sei $H \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 \in [0,2],\ \frac{1}{2}(1+x_3^2) \le x_1^2+x_2^2 \le 2(1+x_3^2)\}$. Bestimmen Sie $\Phi^{-1}(H)$.

d) Berechnen Sie

$$\int_H x_1^2 x_3\,\mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Aufgabe 7.3 **5 Punkte**

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n), \mathscr{L}^n)$. Seien $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren die Faltung $f*g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(f*g)(x) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Zeigen Sie, dass $f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\,\mathrm{d}x = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathrm{d}x\Big). \tag{3.2}$$

Zusatzaufgabe 7.1 (Volumen von Rotationskörpern) **3 Punkte**

Seien $a,b \in \mathbb{R}$ und $a<b$. Sei $f\colon [a,b] \longrightarrow [0,\infty]$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge

$$V \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2 \le f(x_3)^2\} \tag{4.1}$$

eine messbare Menge ist, und dass

$$\mathscr{L}^3(V) = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

Abgabe bis spätestens 14.01.2021, 14:00 Uhr in Moodle.

Prof. Dr. Hans Knüpfer
Denis Brazke denis.brazke@uni-heidelberg.de

Zusatzaufgabe 7.2 **3 Punkte**

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathscr{L}^1)$. Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$.

a) Zeigen Sie, dass $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

b) Zeigen Sie, dass f uneigentlich Riemann–integrierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi. \tag{5.1}$$

Hinweis: Zur Erinnerung: Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $f|_J$ Riemann–integrierbar ist für alle abgeschlossenen Intervalle $J \subset \mathbb{R}$. Dann heißt f **uneigentlich Riemann–integrierbar**, falls ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass die Limiten

$$\lim_{R\to\infty} \int_c^R f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.2}$$

existieren. Wir schreiben

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{R\to\infty} \int_c^R f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

Zu a): Betrachten Sie $|f|$. Zu b): Nutzen Sie das Cauchy–Kriterium. Zu c): Benutzen Sie die Identität

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t,$$

partielle Integration, Konvergenzsätze und den Satz von Fubini.

Zusatzaufgabe 7.3 (Interpolationsungleichung) **3 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{E}, \mu)$ ein Maßraum und $0 < \theta < 1$. Seien $p, q, r \in (0, \infty)$ und es gelte $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$. Zeigen Sie, dass $L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu) \subset L^r(X,\mu)$, und dass

$$\|f\|_{L^r(X,\mu)} \le \|f\|_{L^p(X,\mu)}^{\theta} \|f\|_{L^q(X,\mu)}^{1-\theta} \qquad \text{für alle } f \in L^p(X,\mu) \cap L^q(X,\mu). \tag{6.1}$$

Zusatzaufgabe 7.4 **3 Punkte**

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mathscr{L}^1)$. Widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann messbar, wenn $|f|$ eine messbare Funktion ist.

b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn $|f|$ eine integrierbare Funktion ist.

c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine messbare Menge. Dann existiert eine Folge offener Mengen $\Omega_k \subset \mathbb{R}$, so dass $\Omega = \cup_k \Omega_k$.

d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine messbare Menge. Dann existiert eine Folge offener Mengen $\Omega_k \subset \mathbb{R}$, so dass $\Omega = \cap_k \Omega_k$.

e) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, dann ist $f \in L^2(\mathbb{R})$.

f) Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$, dann ist $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Abgabe bis spätestens 14.01.2021, 14:00 Uhr in Moodle.