Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2022

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. K. Hübner
Dr. C. Dahlhausen

Blatt 5
Abgabe: *Freitag, 27.05.2022, 09:15 Uhr*

Aufgabe 1 (Koinduktion I). **(4 Punkte)**
Seien G eine Gruppe, H eine Untergruppe von G und A ein G-Modul. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung
$$\mathrm{Koind}_G^H \circ \mathrm{Res}_H^G(A) \longrightarrow \mathrm{Abb}(G/H, A), \quad f \mapsto [gH \mapsto gf(g^{-1})],$$
ist ein Isomorphismus.

(b) Es ist $\mathrm{Koind}_G^{\{1\}} \circ \mathrm{Res}_{\{1\}}^G(A) \cong \mathrm{Koind}_G(A)$ und $\mathrm{Koind}_G(A) \cong \mathrm{Koind}_G(A^{\mathrm{tr}})$.

(c) Ist A koinduzierter G-Modul, so ist $\mathrm{Res}_H^G(A)$ ein koinduzierter H-Modul.
Hinweis: Ist $A \cong \mathrm{Koind}_G(B)$, so existiert ein Isomorphismus
$$\mathrm{Res}_H^G \circ \mathrm{Koind}_G(B) \longrightarrow \mathrm{Koind}_H(\mathrm{Abb}(S, B)),$$
wobei S ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von H in G ist und $\mathrm{Abb}(S, B)$ mit einer geeigneten H-Modulstruktur versehen wird.

(d) Falls H ein Normalteiler ist, so gilt $\big(\mathrm{Koind}_G(A)\big)^H \cong \mathrm{Abb}(G/H, A^{\mathrm{tr}}) \cong \mathrm{Koind}_{G/H}^{\{1\}}(A^{\mathrm{tr}})$.

Aufgabe 2 (Koinduktion II). **(4 Punkte)**
Seien G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

(a) Für jeden G-Modul A und jeden H-Modul B ist die Abbildung
$$\mathrm{Hom}_H(\mathrm{Res}_H^G(A), B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(A, \mathrm{Koind}_G^H(B)), \quad f \mapsto [a \mapsto [g \mapsto f(ga)]],$$
ein Isomorphismus, der funktoriell in A und B ist (d.h. Res_H^G ist linksadjungiert zu Koind_G^H).
Hinweis: Geben Sie die Umkehrabbildung an.

(b) Der Funktoren Res_H^G und Koind_G^H sind exakt.

(c) Der Funktor Koind_G^H erhält injektive Objekte und der Funktor Res_H^G erhält projektive Objekte.

Aufgabe 3 (Koinduktion für proendliche Gruppen). **(4 Punkte)**
Seien G eine proendliche Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe von G und A ein diskreter G-Modul. Zeigen Sie:

(a) Für eine abgeschlossene Untergruppe K von H hat die kanonische Projektion der Nebenklassenmengen $p\colon G/K \to G/H$ einen stetigen Schnitt (bezüglich der jeweiligen Quotiententopologien von G), d.h. eine stetige Abbildung $s\colon G/H \to G/K$ derart, dass $p \circ s = \mathrm{id}_{G/H}$.

(b) Es existiert ein Homöomorphismus $G \cong G/H \times H$.

(c) Ist A koinduzierter G-Modul, so ist $\mathrm{Res}_H^G(A)$ ein koinduzierter H-Modul. *Hinweis:* Aufgabe 1 (c).

Aufgabe 4 (Gruppenkohomologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten). **(4 Punkte)**

Bestimmen Sie für alle $n \geq 0$ die Gruppenkohomologiegruppen $\mathrm{H}^n(G, \mathbb{Z})$ für

(a) $G = \mathbb{Z}^2$. *Hinweis:* Verwenden Sie Blatt 3, Aufgabe 3.

(b) $G = C_n$. *Hinweis:* Verwenden Sie Blatt 4, Aufgabe 1.