UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL

UNIDAD 0: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CALCULO DIFERENCIAL)

0.1 Funciones de varias variables

Una función de una variable es una regla de correspondencia $y = f(x)$ que asigna a cada elemento x en el subconjunto X de los números reales, denominado el *dominio* de *f*, uno y sólo un número real *y* en otro conjunto de números reales Y.
El conjunto $\{y\ /y\ =\ f\ (x), x\ en\ X\}$ se llama *rango* de *f*.
Es probable que tengamos conocimiento de la existencia de funciones de dos o más variables.
Por ejemplo:
a) $\boldsymbol{A = xy}$ área de un rectángulo
b) $\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$ volumen de un cilindro circular
c) $\boldsymbol{V = 1/3\pi r^2 h}$ volumen de un cono circular
d) $\boldsymbol{P = 2x + 2y}$ perímetro de un rectángulo

Definición:(**función de dos variables).** Sea D un conjunto de pares ordenados. Si a cada par (x, y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$,entonces se dice que *f* es una función de "x" e "y". El conjunto D es el **dominio** de *f* y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el **recorrido** de *f*.

Una función de dos variables suele escribirse $z = f(x, y)$ y se lee "*f* de *x*, *y*." Las variables *x e y* se denominan **variables independientes** de la función y *z* es la **variable dependiente**.

Funciones polinomiales y racionales. Una **función polinomial** de dos variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n$ donde *m* y *n* son enteros no negativos. El cociente de dos funciones polinomiales se denomina **función racional**.
Por ejemplo:

Funciones polinomiales: $f(x, y) = xy - 5x^5 + 9$ y $f(x, y) = 3xy^2 - 5x^2y + x^3$

Funciones racionales: $f(x, y) = \frac{1}{xy-3y}$ y $f(x, y) = \frac{x^4y^2}{x^2y+y^5+2x}$

El dominio de una función polinomial es el plano xy completo. El dominio de una función racional es el plano xy, excepto aquellos pares ordenados (x, y) para los cuales el denominador es cero.
Por ejemplo, el dominio de la función racional $f(x, y) = \frac{4}{6-x^2-y^2}$ consiste en el plano xy, excepto aquellos puntos (x, y) que yacen en la circunferencia:

$$6 - x^2 - y^2 = 0 \;\; o \; x^2 + y^2 = 6$$

Ejemplo. Dado $f(x,y) = 4 + \sqrt{x^2 - y^2}$

a) Encontrar $f(1{,}0), f(5{,}3), f(4,-2)$
b) Dibuje el dominio de la función.

Solución a)

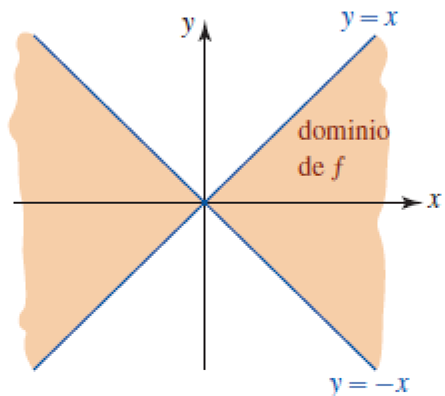
$$f(1{,}0) = 4 + \sqrt{1^2 - 0^2} = 5$$

$$f(5{,}3) = 4 + \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 + \sqrt{16} = 8$$

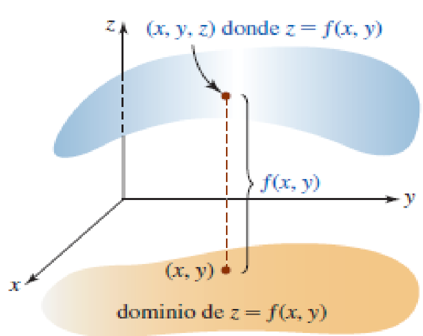
$$f(4,-2) = 4 + \sqrt{4^2 - (-2)^2} = 4 + \sqrt{12}$$

Solución b)

El dominio de f consiste en todos los pares ordenados (x, y) para los cuales $x^2 - y^2 \geq 0$ o $(x + y)(x - y) \geq 0$ Como se ilustra en la figura siguiente, el dominio consiste en todos los puntos sobre las rectas $y = x$ y $y = -x$, y es la región sombreada entre ellas.



La **grafica** de una función $z = f(x, y)$ es una superficie en el espacio tridimensional.



La gráfica de una función de x y y es una superficie

Ejemplo: A partir de lo visto anteriormente de superficies cuádricas, puede reconocer que la gráfica de una función polinomial $f(x, y) = x^2 + 9y^2$ es un paraboloide elíptico. Puesto que f se define para todo par ordenado de números reales, su dominio es el plano xy

completo. Del hecho de que $x^2 \geq 0$ y $y^2 \geq 0$, podemos afirmar que el rango de *f* está definido por la desigualdad $z \geq 0$.

Ejemplo. Encontrar el dominio de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

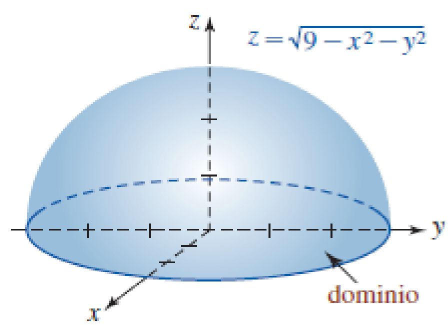
Solución. Anteriormente vimos que la función es una esfera de radio 3 centrada en el origen. Al resolver para *z*, y tomar la raíz cuadrada no negativa, obtenemos la función

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \text{ o } f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

La gráfica de *f es* el hemisferio superior que se ilustra en la figura. El dominio de la función es un conjunto de pares ordenados (x, y) donde las coordenadas satisfacen

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \text{ o } x^2 + y^2 \leq 9$$

Esto es, el dominio de *f* consiste en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y su interior. La figura muestra que el rango de la función es el intervalo [0, 3] sobre el eje *z*.



Ejemplo: Determinar el dominio de la función racional de cuatro variables:

$$f(x, y, z) = \frac{2x + 3y + z}{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Solución: el dominio es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface:

$$x^2 + y^2 + z^2 \neq 4$$

En otras palabras, el dominio de *f* es todo el espacio tridimensional salvo los puntos que yacen sobre la superficie de una esfera de radio 2 centrada en el origen.

Funciones de tres o más variables Las definiciones de funciones de tres o más variables son simplemente generalizaciones de la definición anterior.

Por ejemplo, una **función de tres variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada triada ordenada de números reales (x, y, z) en un subconjunto del espacio tridimensional, uno y sólo un número *w* en el conjunto *R* de los números reales.

Una función de tres variables suele denotarse por medio de $w = f(x, y, z)$ o $w = F(x, y, z)$

GUIA DE EJERCICIOS No.1. DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

En los problemas 1-10, encuentre el dominio de la función dada.

1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

2. $f(x, y) = (x^2 - 9y^2)^{-2}$

3. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{y + x^2}$

4. $f(x, y) = x^2 - y^2\sqrt{4 + y}$

5. $f(s, t) = s^3 - 2t^2 + 8st$

6. $f(u, v) = \dfrac{u}{\ln(u^2 + v^2)}$

7. $g(r, s) = e^{2r}\sqrt{s^2 - 1}$

8. $g(\theta, \phi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}$

9. $H(u, v, w) = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 16}$

10. $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{z - 5}$

0.2 Límites y continuidad

En el caso de funciones de una variable, puede calcularse el límite a partir de la gráfica de la función. También se aprovecha que:

$\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y solo si $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existen y son iguales a un mismo número L, en cuyo caso $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Límites de funciones de dos variables

Analizar un límite dibujando la gráfica de $z = f(x, y)$ no es conveniente ni es una rutina posible para la mayor parte de las funciones de dos variables.

Por intuición sabemos que f tiene un límite en un punto (a, b) si los valores de la función $f(x, y)$ se acercan a un número L conforme (x, y) se acerca a (a, b).

Escribimos $f(x, y) \to L$ como $(x, y) \to (a, b)$ o

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

Para tener un poco más de precisión, f tiene un límite L en el punto (a, b) si los puntos en el espacio $(x, y, f(x, y))$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a (a, b) siempre que (x, y) sea suficientemente cercano a (a, b)

La noción de (x, y) "aproximándose" a un punto (a, b) no es tan simple como para funciones de una variable donde $x \to a$ significa que x puede acercarse a $\underline{a}$ sólo desde la izquierda y desde la derecha.
En el plano xy *hay* un número infinito de maneras de aproximarse al punto (a, b).
Como se muestra en la figura, para que:

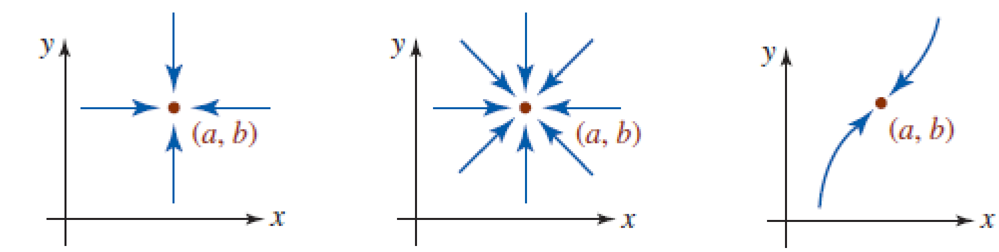
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

exista, se requiere que f se aproxime al mismo número L a lo largo de **cualquier trayectoria** o curva posible que pase por (a, b). Si se pone lo anterior de manera negativa: Si $f(x, y)$ no se aproxima al mismo número L por dos trayectorias diferentes a (a, b), entonces:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

no existe.

En la discusión de $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ que sigue se supondrá que la función f está definida en todo punto (x, y) en un disco abierto centrado en (a, b) pero no necesariamente *en* el propio (a, b).



a) A lo largo de las rectas horizontal y vertical que pasan por (*a*, *b*)
b) A lo largo de toda recta que pasa por (*a*, *b*)
c) A lo largo de toda curva que pasa por (*a*, *b*)

Tres de muchas maneras de aproximar el punto (*a*, *b*)

Ejemplo 1. Demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, no existe

Solución: Sea la función: $f(x, y) = \frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}$, se define en todas partes excepto en (0,0).
Como se ilustra en la figura a), dos maneras de aproximarse a (0,0) son a lo largo del eje "x" $(y = 0)$ y a lo largo del eje "y" $(x = 0)$.

A lo largo del eje "x"; hacer $\boldsymbol{y = 0}$ se obtiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$$

A lo largo del eje "y"; hacer $x = 0$ se obtiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0-3y^2}{0+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-3y^2}{y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -3 = -3$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2} \text{ } no \text{ } existe$$

Ejemplo 2. Demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$, no existe

Solución. Sea la función: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ .En este caso los límites a lo largo de los ejes *x* y "*y*" son los mismos, es decir:

A lo largo del eje "x"; hacer $y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(0)}{x^2+0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

A lo largo del eje "y"; hacer $x = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0(y)}{0+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$$

Sin embargo, esto *no* significa que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ exista, ya que no se ha examinado *toda trayectoria* a (0, 0). Como se ilustra en la figura anterior *b*), ahora intentaremos cualquier recta que pase por el origen dada por $y = mx$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(mx)}{x^2+m^2x^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Puesto que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ depende del valor de la pendiente *m* de la recta sobre la cual se hace la aproximación al origen, es decir dándole valores a "m"

Cuando $m = 1$ entonces $y = x$, sustituyendo tenemos, $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} = 1/2$$

En el caso que $m = 2$ entonces $y = 2x$ sustituyendo $f(x, 2x) = \frac{x(2x)}{x^2+4x^2} = \frac{2x^2}{x^2+4x^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, 2x) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{5x^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2}{5} = 2/5$$

Debe tenerse claro por qué diferentes trayectorias a (0,0) producen diferentes valores del límite. Podemos concluir entonces:

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \ no\ existe$$

Ejemplo 3. Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$, no existe

Solución: Sea la función $f(x, y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$. En este caso los límites a lo largo de los ejes *x* y "y" son los mismos lo cual podemos verificar:

A lo largo del eje "x"; hacer $\boldsymbol{y = 0}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(0)}{x^6 + 0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{x^6 + 0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (0) = 0$$

A lo largo del eje "y"; hacer $\boldsymbol{x = 0}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(0, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0(y)}{0 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{0}{y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (0) = 0$$

Sin embargo, esto *no* significa que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ exista, ya que no se ha examinado *toda trayectoria* a (0, 0), ahora intentaremos cualquier recta que pase por el origen dada por $y = mx, m \neq 0$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, mx) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(mx)}{x^6 + m^2x^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^4}{x^2(x^4 + m^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{mx^2}{x^4 + m^2} = \frac{m(0)}{0 + m^2} = 0$$

Sin embargo, esto *no* significa que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ exista, se examinará la trayectoria a lo largo de cualquier parábola $y = ax^2, a \neq 0$, que pasa por (0,0).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, ax^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(ax^2)}{x^6 + (ax^2)^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax^5}{x^6 + a^2x^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax^5}{x^4(x^2 + a^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{ax}{x^2 + a^2}$$

$$= \frac{a(0)}{0 + a^2} = 0$$

Sin embargo, esto *no* significa que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ exista, se examinará la trayectoria a lo largo de cualquier función cúbica $y = x^3$, que pasa por (0,0).

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x^3) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3(x^3)}{x^6 + (x^3)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6 + x^6}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{2x^6} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Si bien esto constituye verdaderamente un número infinito de trayectorias al origen, el límite *sigue* sin existir, es decir

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6 + y^2} \; no\ existe$$

Observación: Si en este último proceso el límite hubiera dado 0, se podría concluir que el límite existe y tiende a cero.

Propiedades de límites En los siguientes dos teoremas se mencionan las propiedades de límites para funciones de dos variables.

Teorema 1. **Límites fundamentales**

i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c,$ c es una constante

ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

iv) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y) = c \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Teorema 2. **Límite de la suma, producto y cociente**
Supongamos que (a,b)es un punto en el plano xy y que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$ existen.
Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = M$, entonces:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = L \pm M$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y).g(x,y)) = L.M$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}; M \neq 0$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y))^n = L^n$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$

Ejemplo. Evalúe el límite siguiente: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (x + y^2)$

Solución. Sabemos que el límite de una suma es la suma de los límites y el límite de un producto es el producto de los límites siempre que exista el límite. (Usando el teorema 2 parte i) tenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} (x + y^2) = \lim_{(x,y)\to(2,3)} x + \lim_{(x,y)\to(2,3)} (y^2)$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,3)} x + \left(\lim_{(x,y)\to(2,3)} y\right)^2$$

$$= 2 + 3^2 = 11$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(2,3)} (x + y^2) = 11$$

0.1.1 CONTINUIDAD

Una función $z = f(x,y)$ es **continua** en (a,b) si cumple las tres condiciones siguientes:

a) $f(a,b)$ está definida.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\ \ existe$

c) El límite es el mismo que el valor de la función $f(a,b)$ esto es,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Si *f* no es continua en (a,b), se afirma que es **discontinua**. La gráfica de una función continua es una superficie sin quiebres.

Ejemplo. Demostrar que la función $f(x,y) = \frac{3x+2y}{x+y+1}$ es continua en el punto $(5,-3)$

Solución. Hay tres condiciones que deben cumplirse, según la definición de continuidad. En este ejemplo $a = 5$ y $b = -3$

a) $f(a,b)$ está definida. Esto es cierto porque el dominio de la función consiste en aquellos pares ordenados para los que el denominador es distinto de cero, es decir $x+y+1 \neq 0$. El punto $(5,-3)$ satisface esta condición. Además,

$$f(a,b)=f(5,-3)=\frac{3(5)+2(-3)}{5+(-3)+1}=\frac{15-6}{2+1}=3$$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\ \ existe$. Esto también es cierto:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(5,-3)}\frac{3x+2y}{x+y+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(5,-3)}(3x+2y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(5,-3)}(x+y+1)}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(5,-3)}(3x)+\lim\limits_{(x,y)\to(5,-3)}(2y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(5,-3)}(x)+\lim\limits_{(x,y)\to(5,-3)}(y)+\lim\limits_{(x,y)\to(5,-3)}(1)}$$

$$=\frac{3\left(\lim\limits_{(x,y)\to(5,-3)}x\right)+2\left(\lim\limits_{(x,y)\to(5,-3)}(y)\right)}{5+(-3)+1}=\frac{3(5)+2(-3)}{2+1}$$

$$=\frac{15-6}{2+1}=3$$

$$\therefore \lim_{(x,y)\to(5,-3)}\frac{3x+2y}{x+y+1}=3$$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$. Esto es cierto porque se acaba de demostrar que ambos lados de la ecuación son iguales a 3.

Por lo tanto, $f(x,y)=\frac{3x+2y}{x+y+1}$ es continua en el punto $(5,-3)$

Una función $z=f(x,y)$ es **continua sobre una región *R*** del plano xy si *f* es continua en cualquier punto en *R*.

La **suma** y el **producto** de dos funciones continuas también son continuas.
El **cociente** de dos funciones continuas es continua, excepto en el punto donde el denominador es cero.

Ejemplo 1. Analizar la continuidad de la siguiente función $f(x,y)=\frac{x-2y}{x^2+y^2}$
Solución. Dado que $f(x,y)$ es una función racional. Como una función racional es continua en todo punto de su dominio, excepto en el punto donde el denominador es cero. Por lo tanto, se puede concluir que ***f* es continua en todo punto del plano xy excepto en (0, 0).**

Ejemplo 2. Analizar la continuidad de la siguiente función $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2-z}$
Solución. $f(x, y, z)$ es continua en todo punto del espacio, excepto en los puntos donde $x^2 + y^2 - z = 0$

Ejemplo 3. ¿Dónde es continua función $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$?
Solución. La función es discontinua en (0,0), debido a que *f* no está definida en ese punto.

Por lo tanto $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ es continua en todo $(x, y) \in R^2/(x, y) \neq (0,0)$

GUIA DE EJERCICIOS No.2. LIMITES Y CONTINUIDAD

En los problemas 1-30, evalúe el límite dado, si existe.

1. $\lim_{(x,y)\to(5,-1)} (x^2 + y^2)$

2. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^2 - y}{x - y}$

3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$

4. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{4x^2 + y^2}{16x^4 + y^4}$

5. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2 - y}{x^2 + 2y^2}$

7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy^2}{x^2 + y^4}$

9. $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^3y^2(x + y)^3$

10. $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{x + y + 1}$

12. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x^2 + y^2}$

13. $\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{xy}{x^3 + y^2}$

14. $\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi/4)} \cos(3x + y)$

15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 3y + 1}{x + 5y - 3}$

16. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4 + 5y^4}$

17. $\lim_{(x,y)\to(4,3)} xy^2\left(\frac{x + 2y}{x - y}\right)$

18. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$

19. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$

20. $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{xy - 3y}{x^2 + y^2 - 6y + 9}$

0.3 DERIVADAS PARCIALES

La derivada de una función de **una variable** $y = f(x)$ está dada por el límite de un cociente de diferencia $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (regla de los 4 pasos)

Exactamente de la misma manera, podemos definir la derivada de primer orden de una función de **dos variables** $z = f\ (x, y)$ con respecto a *cada* variable.

Definición. Derivadas parciales de primer orden

Si $z\ = f\ (x, y)$ es una función de dos variables, entonces la **derivada parcial de *f* con respecto a *x*** en un punto (x, y) es:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x+h}, y) - f(x,y)}{h} \qquad (1)$$

La **derivada parcial de *f* con respecto a *y* en el punto** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es:

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, \boldsymbol{y+h}) - f(x,y)}{h} \qquad (2)$$

Siempre y cuando exista el límite.

Ejemplo. Aplicar la definición de derivada parcial para hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si

$z = f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$

Solución.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x+h}, y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2 - 2(x+h)y + y^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - 2xy - 2hy + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2xy - 2hy + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 2hy}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(6x + 3h - 2y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}(6x + 3h - 2y) = 6x + 3(0) - 2y$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 2y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, \boldsymbol{y + h}) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 - 2x(y + h) + (y + h)^2 - (3x^2 - 2xy + y^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 - 2xy - 2xh + (y^2 + 2yh + h^2) - 3x^2 + 2xy - y^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 - 2xy - 2xh + y^2 + 2yh + h^2 - 3x^2 + 2xy - y^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + 2yh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + 2y + h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}(2x + 2y + h) = 2x + 2y + 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y$$

NOTA: La definición anterior es la equivalente a la regla de los 4 pasos en R^2.

Cálculo de una derivada parcial En (1) se puede observar que la variable "*y*" no cambia en el proceso del límite, en otras palabras, "*y*" se mantiene fija. De manera similar, en la definición del límite (2) la variable "*x*" se mantiene fija. Las dos derivadas parciales de primer orden (1) y (2) representan entonces las razones *de cambio* de *f* con respecto a *x* y *y*.

Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x$, tratar a "*y*" como constante y diferenciar *f* con respecto a "*x*" de la manera usual.

Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y$, tratar a "*x*" como constante y diferenciar *f* con respecto a "*y*" de la manera usual.

Notaciones para las derivadas parciales de $z = f(x, y)$

Derivada parcial de f o de z con respecto a x.

$$z_x(x,y) = f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)]$$

Derivada parcial de f o de z con respecto a x evaluada en (x_0, y_0)

$$f_x(x_0, y_0), \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}[f(x_0, y_0)]$$

Derivada parcial de f o de z con respecto a y.

$$z_y(x,y) = f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)]$$

Derivada parcial de f o de z con respecto a y evaluada en (x_0, y_0)

$$f_y(x_0, y_0), \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}[f(x_0, y_0)]$$

Ejemplo 1. Hallar $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ si $f(x,y) = xy^2 + x^2y$. Encontrar también $f_x(3,4)$ y $f_y(3,4)$

Solución. Aplicamos la derivada parcial con respecto a "x" tomando a "y" como constante y distribuyendo esta derivada obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2 + x^2y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial x}(x^2y)$$

$$= y^2\frac{\partial}{\partial x}(x) + y\frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$

$$= y^2(1) + y(2x) = y^2 + 2xy$$

$$\therefore \ \frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)] = f_x(x,y) = y^2 + 2xy$$

De la misma forma aplicamos la derivada parcial con respecto a "y" tomando a "x" como constante

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)] = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2 + x^2y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) = x\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + x^2\frac{\partial}{\partial y}(y)$$

$$= x(2y) + x^2(1) = 2xy + x^2$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)] = f_y(x,y) = 2xy + x^2$$

$f_x(3,4) = 4^2 + 2(3)(4) = 40;\ \ f_y(3,4) = 2(3)4 + 3^2 = 33$

Ejemplo 2. Si $z = 3x^3y^3 - 9x^2y + xy^2 + 4y$. Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solución. Aplicamos la derivada parcial con respecto a "x" tomando a "y" como constante y distribuyendo esta derivada obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^3y^3 - 9x^2y + xy^2 + 4y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^3y^3) - \frac{\partial}{\partial x}(9x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial x}(4y)$$

$$= 3y^3\frac{\partial}{\partial x}(x^3) - 9y\frac{\partial}{\partial x}(x^2) + y^2\frac{\partial}{\partial x}(x) + 0 = 3y^3(3x^2) - 9y(2x) + y^2(1)$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 9x^2y^3 - 18xy + y^2$$

De la misma manera se puede calcular $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^3y^3 - 9x^2y + xy^2 + 4y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^3y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(9x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(4y)$$

$$= 3x^3\frac{\partial}{\partial y}(y^3) - 9x^2\frac{\partial}{\partial y}(y) + x\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(4y) = 3x^3(3y^2) - 9x^2(1) + x(2y) + 4$$

$$= 9x^3y^2 - 9x^2 + 2xy + 4$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = 9x^3y^2 - 9x^2 + 2xy + 4$$

Ejemplo 3. Si $w = x^2e^{2x+3y}$. Hallar $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$

Solución. Aplicamos la derivada parcial con respecto a "x" tomando a "y" como constante y aplicando la regla del producto para derivadas obtenemos:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2e^{2x+3y}) = x^2\frac{\partial}{\partial x}(e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}\frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$

$$= x^2e^{2x+3y}\frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y) + e^{2x+3y}(2x)$$

$$= x^2 e^{2x+3y}\left(\frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial x}(3y)\right) + e^{2x+3y}(2x)$$

$$= x^2 e^{2x+3y}(2+0) + e^{2x+3y}(2x)$$

$$\therefore \ \frac{\partial w}{\partial x} = 2x^2 e^{2x+3y} + 2xe^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 e^{2x+3y}) = x^2 \frac{\partial}{\partial y}(e^{2x+3y}) + e^{2x+3y}\frac{\partial}{\partial y}(x^2)$$

$$= x^2 e^{2x+3y}\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y) + e^{2x+3y}(0)$$

$$= x^2 e^{2x+3y}\left(\frac{\partial}{\partial y}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(3y)\right) = x^2 e^{2x+3y}(0+3)$$

$$\therefore \frac{\partial w}{\partial y} = 3x^2 e^{2x+3y}$$

Ejemplo 4. Si $f(x,y,z) = x^2 + y^2 z + z^3$. Hallar $f_x(x,y,z), f_y(x,y,z) \quad y \quad f_z(x,y,z)$

Solución. Como $f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z)]$, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z)] = \frac{\partial}{\partial x}[x^2 + y^2 z + z^3]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(y^2 z) + \frac{\partial}{\partial x}(z^3)$$

$$= \boldsymbol{2x + 0 + 0 = 2x}$$

$$\therefore f_x(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

De igual forma pueden obtenerse las derivadas faltantes:

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y,z)] = \frac{\partial}{\partial y}[x^2 + y^2 z + z^3]$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(z^3) = 0 + z\frac{\partial}{\partial y}(y^2) + 0$$

$$= \boldsymbol{0 + z(2y) + 0 = 2yz}$$

$$\therefore f_y(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y} = 2yz$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[f(x,y,z)] = \frac{\partial}{\partial z}[x^2 + y^2 z + z^3]$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2 z) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 0 + y^2\frac{\partial}{\partial z}(z) + 3z^2$$

$$= \mathbf{0} + \boldsymbol{y^2}(\mathbf{1}) + \mathbf{3}\boldsymbol{z^2} = \boldsymbol{y^2} + \mathbf{3}\boldsymbol{z^2}$$

$$\therefore f_z(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 3z^2$$

GUIA DE EJERCICIOS No.3. DERIVADAS PARCIALES

En cada uno de los problemas del 1 al 26, se da una función de dos o más variables. Encuentre la derivada parcial de la función con respecto a cada una de las variables.

1. $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 - 7.$

2. $f(x, y) = 2x^2 + 3xy.$

3. $f(x, y) = 2y + 1.$

4. $f(x, y) = e.$

5. $g(x, y) = x^3y^2 + 2x^2y - 4xy + 3y.$

6. $g(x, y) = (x + 1)^2 + (y - 3)^3 + 5xy^3 - 2.$

7. $g(p, q) = \sqrt{pq}.$

8. $g(w, z) = \sqrt[3]{w^2 + z^2}.$

9. $h(s, t) = \dfrac{s^2 + 4}{t - 3}.$

10. $h(u, v) = \dfrac{8uv^2}{u^2 + v^2}.$

11. $u(q_1, q_2) = \frac{3}{4}\ln q_1 + \frac{1}{4}\ln q_2.$

12. $Q(l, k) = 3l^{0.41}k^{0.59}.$

13. $h(x, y) = \dfrac{x^2 + 3xy + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

14. $h(x, y) = \dfrac{\sqrt{x + 9}}{x^2y + y^2x}.$

15. $z = e^{5xy}.$

16. $z = (x^2 + y)e^{3x+4y}.$

17. $z = 5x\ln(x^2 + y).$

18. $z = \ln(3x^2 + 4y^4).$

19. $f(r, s) = \sqrt{r + 2s}\,(r^3 - 2rs + s^2).$

20. $f(r, s) = \sqrt{rs}\,e^{2+r}.$

21. $f(r, s) = e^{3-r}\ln(7 - s).$

22. $f(r, s) = (5r^2 + 3s^3)(2r - 5s).$

23. $g(x, y, z) = 3x^2y + 2xy^2z + 3z^3.$

24. $g(x, y, z) = x^2y^3z^5 - 3x^2y^4z^3 + 5xz.$

25. $g(r, s, t) = e^{s+t}(r^2 + 7s^3).$

26. $g(r, s, t, u) = rs\ln(2t + 5u).$

0.4 DIFERENCIACION PARCIAL IMPLICITA

Una ecuación en *x*, *y* y *z* no necesariamente define a *z* como función de *x* y *y*. Por ejemplo, en la ecuación $z^2 - x^2 - y^2 = 0$

La ecuación anterior no define a *z* como función de *x* y *y*. Sin embargo, despejando *z* de la ecuación se obtiene $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, cada una de las cuales define a *z* como función de *x* y de *y*.

Aunque la ecuación original no expresa de manera explícita a *z* como función de *x* y *y*, puede considerarse que expresa a *z* *implícitamente* como una de dos funciones diferentes de *x* y *y*.

Note que la ecuación $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ tiene la forma $F(x, y, z) = 0$ donde F es una función de tres variables.

Cualquier ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$ puede considerarse que expresa a *z* de manera implícita como un conjunto de posibles funciones de *x* y y. Además, podemos encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ directamente de la forma $F(x, y, z) = 0$

Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial x}$ de $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ diferenciamos primero ambos miembros de la ecuación con respecto a *x* tratando a *z* como función de "x" y "y", tratando a "y" como constante

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial x}(y^2) = 0$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2x - 0 = 0.$$

Al despejar $\frac{\partial z}{\partial x}$, obtenemos:

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \text{ entonces } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2z} = \frac{x}{z}$$

Para encontrar $\frac{\partial z}{\partial y}$ diferenciamos ambos miembros de la ecuación con respecto a "y" *c*onsiderando a *z* como función de "x" y "y", manteniendo a *x* constante.

$$\frac{\partial}{\partial y}(z^2 - x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(0)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} - 0 - 2y = 0.$$

Al despejar $\frac{\partial z}{\partial y}$, obtenemos:

$$2z\frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \text{ entonces } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2z} = \frac{y}{z}$$

Ejemplo. Si $\frac{xz^2}{x+y} + y^2 = 0$ evaluar $\frac{\partial z}{\partial x}$ cuando $x = -1, y = 2$ y $z = 2$

Solución. Tratamos a *z* como función de "x" y "y", diferenciamos ambos miembros de la ecuación con respecto a *x*:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz^2}{x+y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}(y^2)=\frac{\partial}{\partial x}(0).$$

Si usamos la regla del cociente para el primer término a la izquierda, tenemos

$$\frac{(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(xz^2)-xz^2\frac{\partial}{\partial x}(x+y)}{(x+y)^2}+0=0.$$

Con la regla del producto para $\frac{\partial}{\partial x}(xz^2)$ resulta

$$\frac{(x+y)\left[x\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+z^2(1)\right]-xz^2(1)}{(x+y)^2}=0.$$

Despejamos $\partial z/\partial x$, y así obtenemos

$$2xz(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}+z^2(x+y)-xz^2=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz^2-z^2(x+y)}{2xz(x+y)}=-\frac{yz}{2x(x+y)},\quad z\neq 0.$$

Entonces,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,2,2)}=2.$$

Si la ecuación $F(x,y)=0$ define a una función $y=f(x)$ de manera implícita, entonces $F(x,f(x))=0$ para toda x en el dominio de f.
Anteriormente encontramos la derivada mediante el proceso de diferenciación *implícita*. La derivada $\frac{dy}{dx}$ también puede determinarse de la regla de la cadena.

Teorema 1. **Regla de la cadena para derivación implícita**.

1) Si $w=F(x,y)$ es diferenciable y $y=f(x)$ es una función diferenciable de x definida implícitamente por $F(x,y)=0$, entonces:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\right)}$$

donde $F_y(x,y)\neq 0$.

2) Si $w=F(x,y,z)$ es diferenciable y $z=f(x,y)$ es una función diferenciable de x y y definida implícitamente por $F(x,y,z)=0$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\right) \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\right)$$

donde $F_z(x,y,z) \neq 0$.

Ejemplo 1. Encontrar $\frac{dy}{dx}$ si $x^2 - 4\text{xy} - 3y^2 = 10$

Solución. Reescribiendo la función $x^2 - 4\text{xy} - 3y^2 = 10$ así: $x^2 - 4\text{xy} - 3y^2 - 10 = 0$

Hacer $F(x,y) = x^2 - 4\text{xy} - 3y^2 - 10$. Entonces se define "$y$" como una función de "$x$" por medio de $F(x,y) = 0$.

En este caso:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(F(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 4xy - 3y^2 - 10) = 2\text{x} - 4\text{y}$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(F(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 4xy - 3y^2 - 10) = -4\text{x} - 6\text{y}$$

Por el No.1 del teorema 1 tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}\right)$$

$$= -\left(\frac{2x - 4y}{-4x - 6y}\right) = -\left(\frac{2(x - 2y)}{-2(2x + 3y)}\right) = \frac{x - 2y}{2x + 3y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{2x + 3y}$$

Ejemplo 2. Encontrar $\frac{\partial y}{\partial x}$ si $x^2y - 5xy^2 = 2yz - 4z^3$

Solución. Reescribir la función $x^2y - 5xy^2 = 2yz - 4z^3$ en este caso se pueden transponer los términos de derecha a izquierda o viceversa $x^2y - 5xy^2 - 2yz + 4z^3 = 0$

Hacer $F(x,y,z) = x^2y - 5xy^2 - 2yz + 4z^3$. Entonces se define z como una función de x y y por medio de $F(x,y,z) = 0$.

En este caso:

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(F(x,y,z)) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - 5xy^2 - 2yz + 4z^3) = x^2 - 10xy - 2z$$

$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(F(x,y,z)) = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y - 5xy^2 - 2yz + 4z^3) = -2\text{y} + 12z^2$$

Por el No.2 del teorema 1 tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\left(\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\right)$$

$$= -\left(\frac{x^2 - 10xy - 2z}{-2y + 12z^2}\right) = -\left(\frac{x^2 - 10xy - 2z}{-(2y - 12z^2)}\right) = \frac{x^2 - 10xy - 2z}{2y - 12z^2}$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - 10xy - 2z}{2y - 12z^2}$$

GUIA DE EJERCICIOS No.4. DIFERENCIACION PARCIAL IMPLICITA

En los problemas del 1 al 11 encuentre las derivadas parciales indicadas por el método de diferenciación parcial implícita.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 9; \quad \partial z/\partial x.$

2. $z^2 - 5x^2 + y^2 = 0; \quad \partial z/\partial x.$

3. $2z^3 - x^2 - 4y^2 = 0; \quad \partial z/\partial y.$

4. $3x^2 + y^2 + 2z^3 = 9; \quad \partial z/\partial y.$

5. $x^2 - 2y - z^2 + x^2yz^2 = 20; \quad \partial z/\partial x.$

6. $z^3 - xz - y = 0; \quad \partial z/\partial x.$

7. $e^x + e^y + e^z = 10; \quad \partial z/\partial y.$

8. $xyz + 2y^2x - z^3 = 0; \quad \partial z/\partial x.$

9. $\ln(z) + 9z - xy = 1; \quad \partial z/\partial x.$

10. $\ln x + \ln y - \ln z = e^y; \quad \partial z/\partial x.$

11. $(z^2 + 6xy)\sqrt{x^3 + 5} = 2; \quad \partial z/\partial y.$

En los problemas del 12 al 20 evalúe las derivadas parciales indicadas para los valores dados de las variables.

12. $xz + xyz - 5 = 0; \quad \partial z/\partial x, x = 1, y = 4, z = 1.$

13. $xz^2 + yz - 12 = 0; \quad \partial z/\partial x, x = 2, y = -2, z = 3.$

14. $e^{zx} = xyz; \quad \partial z/\partial y, x = 1, y = -e^{-1}, z = -1.$

15. $e^{yz} = -xyz; \quad \partial z/\partial x, x = -e^2/2, y = 1, z = 2.$

16. $\sqrt{xz + y^2} - xy = 0; \quad \partial z/\partial y, x = 2, y = 2, z = 6.$

17. $\ln z = 4x + y; \quad \partial z/\partial x, x = 5, y = -20, z = 1.$

18. $\dfrac{rs}{s^2 + t^2} = t; \quad \partial r/\partial t, r = 0, s = 1, t = 0.$

19. $\dfrac{s^2 + t^2}{rs} = 10; \quad \partial t/\partial r, r = 1, s = 2, t = 4.$

20. $\ln(x + z) + xyz = x^2e^{y+z}; \quad \partial z/\partial x, x = 0, y = 1, z = 1.$