0.5 DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR Y MIXTAS.

Para una función de dos variables $z = f(x, y)$, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ son ellas mismas funciones de x y y. En consecuencia, se pueden calcular las **derivadas parciales de segundo orden** y de orden superior.

De hecho, se encuentra la derivada parcial de $\frac{\partial z}{\partial x}$ con respecto a "y", y la derivada parcial de $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ con respecto a x

Los últimos tipos de derivadas parciales se denominan **derivadas parciales mixtas**. En resumen, las segundas, terceras derivadas parciales y la derivada parcial mixta de $z = f(x, y)$ están definidas así:

Derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ significa \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \ significa \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$f_{xx} \ significa \ (f_x)_x$$

$$f_{yy} \ significa \ (f_y)_y$$

Derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \ significa \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \ significa \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Para las derivadas parciales de segundo orden mixtas se tendrán dos notaciones:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \ significa \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \ significa \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy} \ significa \ (f_x)_y$$

$$f_{yx} \ significa \ (f_y)_x$$

El orden de los símbolos en los subíndices de las parciales mixtas es justamente lo opuesto al orden de los símbolos cuando se usa la notación de operador de diferenciación parcial:

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

El siguiente teorema enuncia que bajo ciertas condiciones es irrelevante el orden en el cual se efectúa una derivada parcial de segundo orden mixto; esto es, las derivadas parciales mixtas $\boldsymbol{f_{xy}}$ y $\boldsymbol{f_{yx}}$ son iguales

Teorema 1. Igualdad de parciales mixtas
Sea *f* una función de dos variables. Si las derivadas parciales f_x, f_y , f_{yx} y f_{xy} son continuas en algún disco abierto, entonces: $\boldsymbol{f_{xy} = f_{yx}}$, en cada punto sobre el disco.

Ejemplo. Si $z = x^2y^2 - y^3 + 3x^4 + 5$. Encontrar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$ **y** $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

Solución. Primero encontrar las derivadas de primero orden:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 - y^3 + 3x^4 + 5) = 2\text{x}y^2 + 12x^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2\text{x}y^2 + 12x^3) = 2y^2 + 36x^2$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2y^2 + 36x^2) = 72x$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(z) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 - y^3 + 3x^4 + 5) = 2x^2y - 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - 3y^2) = 2x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 - 6y) = -6$$

Derivadas mixtas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2\text{x}y^2 + 12x^3) = \boldsymbol{4xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - 3y^2) = \boldsymbol{4xy}$$

GUIA DE EJERCICIOS No.5. DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

En los problemas del 1 al 10 encuentre las derivadas parciales indicadas.

1. $f(x, y) = 4x^2y$; $f_x(x, y), f_{xy}(x, y)$.

2. $f(x, y) = 4x^3 + 5x^2y^3 - 3y$; $f_x(x, y), f_{xx}(x, y)$.

3. $f(x, y) = 7x^2 + 3y$; $f_y(x, y), f_{yy}(x, y), f_{yyx}(x, y)$.

4. $f(x, y) = (x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + 1)$; $f_x(x, y), f_{xy}(x, y)$.

5. $f(x, y) = 9e^{2xy}$; $f_y(x, y), f_{yx}(x, y), f_{yxy}(x, y)$.

6. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + 2$; $f_x(x, y), f_{xx}(x, y), f_{xy}(x, y)$.

7. $f(x, y) = (x + y)^2(xy)$; $f_x(x, y), f_y(x, y), f_{xx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$.

8. $f(x, y, z) = xy^2z^3$; $f_x(x, y, z), f_{xz}(x, y, z), f_{zy}(x, y, z)$.

9. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

10. $z = \frac{\ln(x^2 + 5)}{y}$; $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$.

En los problemas del 11 al 16 encuentre el valor indicado.

11. Si $f(x, y, z) = 7$, encuentre $f_{yxx}(4, 3, -2)$.

12. Si $f(x, y, z) = z^2(3x^2 - 4xy^3)$, encuentre $f_{xyz}(1, 2, 3)$.

13. Si $f(l, k) = 5l^3k^6 - lk^7$, encuentre $f_{kkl}(8, 1)$.

14. Si $f(x, y) = 2x^2y + xy^2 - x^2y^2$, encuentre $f_{xxy}(5, 1)$.

15. Si $f(x, y) = y^2e^x + \ln(xy)$, encuentre $f_{xyy}(1, 1)$.

16. Si $f(x, y) = x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^3$, encuentre $f_{xy}(1, -1)$.

0.6 REGLA DE LA CADENA

La regla de la cadena para funciones de una sola variable indica que si $y = f(x)$ es una función diferenciable de x, y $x = g(t)$ es una función diferenciable de t, entonces la derivada de la función compuesta es $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$

Regla de la cadena para derivadas ordinarias.

Si $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una sola variable t, entonces el siguiente teorema indica cómo calcular la derivada ordinaria $\frac{dz}{dt}$.

Teorema 1. Regla de la cadena

Suponga que $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x, y) y $x = g(t)$ y que $y = h(t)$ son funciones diferenciables en t.

Entonces $z = f(g(t), h(t))$ es una función diferenciable de t y:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Ejemplo. Si $z = x^3y - y^4$, $x = 2t^2$, $y = 5t^2 - 6t$. Calcular $\frac{dz}{dt}$ cuando $t = 1$

Solución. Aplicando la fórmula del teorema 1 tenemos:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y - y^4)\frac{\partial}{\partial t}(2t^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^3y - y^4)\frac{\partial}{\partial t}(5t^2 - 6t)$$

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dt} = (3x^2y)(4t) + (x^3 - 4y^3)(10t - 6)}$$

En este caso el valor de $t = 1$,
Como $x = 2t^2$; $y = 5t^2 - 6t$, sustituyendo el valor de "t"
Se obtiene $x = 2(1^2) = 2; y = 5(1)^2 - 6(1) = -1$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{\substack{t=1\\x=2\\y=-1}} = \big(3(2)^2(-1)\big)4(1) + (2^3 - 4(-1)^3)(10(1) - 6)$$

$$= \big(-3(4)\big)4 + \big(8 - (-4)\big)(4) = -48 + (8 + 4)4$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{\substack{t=1\\x=2\\y=-1}} = -48 + 48 = 0$$

Regla de la cadena para derivadas parciales Para una función compuesta de dos variables $z = f(x, y)$, donde $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, se esperarían naturalmente *dos* fórmulas análogas dadas en el teorema 1, ya que $z = f(g(u, v), h(u, v))$, y por ello pueden calcularse $\frac{\partial z}{\partial u}$ tanto como $\frac{\partial z}{\partial v}$.

La regla de la cadena para funciones de dos variables se resume en el siguiente teorema.

Teorema 2. Regla de la cadena

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable y $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Ejemplo. Si $\boldsymbol{z = x^2 - y^3, x = e^{2u-3v}, y = Sen(u^2 - v^2)}$. Calcular las dos derivadas parciales

Solución. Usando el teorema 2 tenemos:

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^3).\frac{\partial}{\partial u}(e^{2u-3v}) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^3).\frac{\partial}{\partial u}(Sen(u^2 - v^2))$$

$$= (2x)\boldsymbol{e^{2u-3v}(2) + (-3y^2)Cos(u^2 - v^2)2u}$$

$$= 4xe^{2u-3v} - 6uy^2Cos(u^2 - v^2)$$

$$\therefore \boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial u} = 4xe^{2u-3v} - 6uy^2Cos(u^2 - v^2)}$$

De la misma manera calcular la otra derivada parcial

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^3).\frac{\partial}{\partial v}(e^{2u-3v}) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^3).\frac{\partial}{\partial v}(Sen(u^2 - v^2))$$

$$= (2\mathrm{x})e^{2u-3v}(-3) + (-3y^2)Cos(u^2 - v^2)(-2v)$$

$$= -6xe^{2u-3v} + 6vy^2Cos(u^2 - v^2)$$

$$\therefore \boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial v} = -6xe^{2u-3v} + 6vy^2Cos(u^2 - v^2)}$$

Los resultados dados en el teorema 1 y 2 se generalizan a cualquier número de variables

GUIA DE EJERCICIOS No.6. REGLA DE LA CADENA

En los problemas del 1 al 12 encuentre las derivadas indicadas usando la regla de la cadena.

1. $z = 5x + 3y, x = 2r + 3s, y = r - 2s; \quad \partial z/\partial r, \partial z/\partial s.$

2. $z = x^2 + 3xy + 7y^3, x = r^2 - 2s, y = 5s^2;$ $\partial z/\partial r, \partial z/\partial s.$

3. $z = e^{x+y}, x = t^2 + 3, y = \sqrt{t^3}; \quad dz/dt.$

4. $z = \sqrt{8x + y}, x = t^2 + 3t + 4,$ $y = t^3 + 4; \quad dz/dt.$

5. $w = x^2z^2 + xyz + yz^2, x = 5t,$ $y = 2t + 3, z = 6 - t; \quad dw/dt.$

6. $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2),$ $x = 2 - 3t, y = t^2 + 3, z = 4 - t; \quad dw/dt.$

7. $z = (x^2 + xy^2)^3, x = r + s + t,$ $y = 2r - 3s + 8t; \quad \partial z/\partial t.$

8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x = r^2 + s - t,$ $y = r - s + t; \quad \partial z/\partial r.$

9. $w = x^2 + xyz + y^3z^2, x = r - s^2,$ $y = rs, z = 2r - 5s; \quad \partial w/\partial s.$

10. $w = e^{xyz}, x = r^2s^3, y = r - s, z = rs^2; \quad \partial w/\partial r.$

11. $y = x^2 - 7x + 5, x = 19rs + 2s^2t^2; \quad \partial y/\partial r.$

12. $y = 4 - x^2, x = 2r + 3s - 4t; \quad \partial y/\partial t.$

0.7 MAXIMOS Y MINIMOS PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES

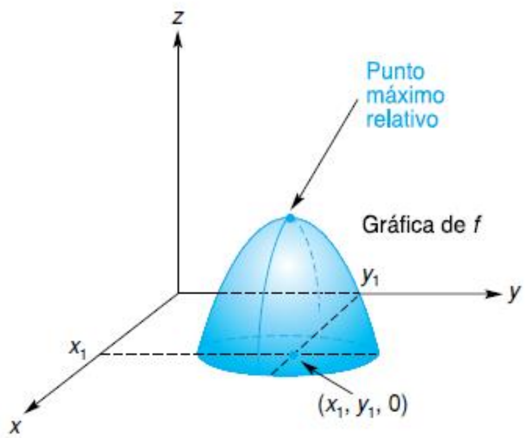
Ahora se extenderán los conceptos de máximos y mínimos relativos (o extremos relativos) a funciones de dos variables.

Definición. Se dice que una función $z = f(x, y)$ tiene un ***máximo relativo*** en el punto (x_0, y_0), si $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) en el plano que esté lo suficientemente cercano a (x_0, y_0) con excepción de (x_0, y_0) mismo.

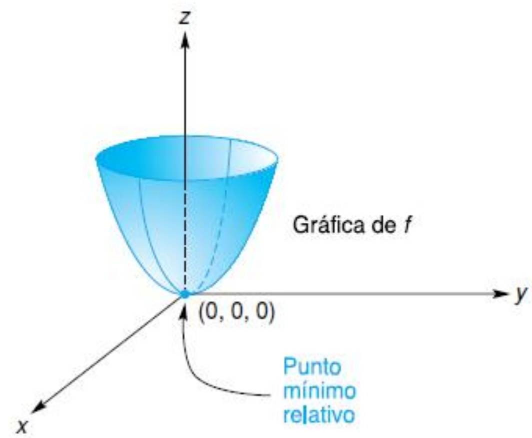
La función $z = f(x, y)$ tiene un ***mínimo relativo*** en el punto (x_0, y_0), si $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) en el plano que esté lo suficientemente cercano a (x_0, y_0) con excepción de (x_0, y_0) mismo.

Decir que $z = f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0), significa, en forma geométrica, que el punto (x_0, y_0, z_0), sobre la gráfica de f es mayor que (o tan alto como) todos los otros puntos sobre la superficie "cercanos" a (x_0, y_0, z_0) .

En la figura (a), f tiene un máximo relativo en (x_1, y_1). En forma similar, la función f en la figura (b) tiene un mínimo relativo cuando $x = y = 0$, el cual corresponde a un punto *bajo* en la superficie.



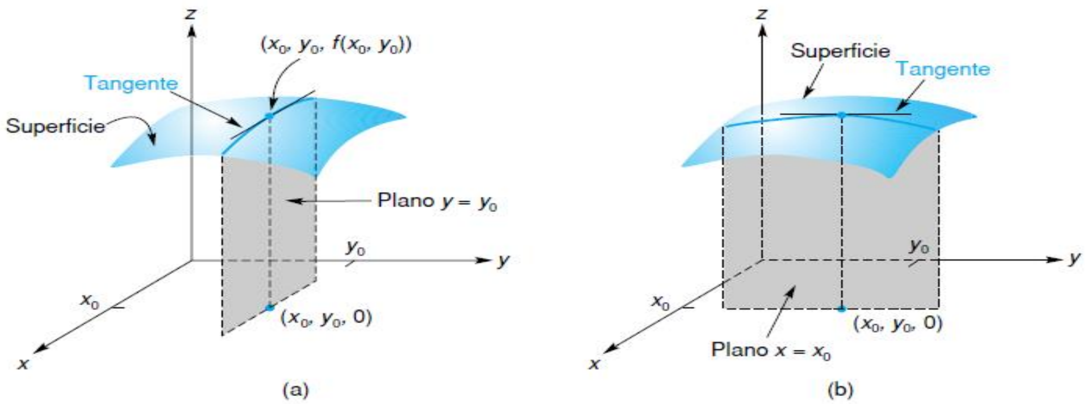
(a)



(b)

Para localizar los extremos de una función $y = f(x)$ de una variable, examinamos aquellos valores de x en el dominio de f para los cuales $f'(x) = 0$ *o* $f'(x)$ no existe. Para funciones de dos (o más) variables, se sigue un procedimiento similar. Sin embargo, para las funciones que nos interesan, los extremos no se presentarán donde una derivada no exista, y tales situaciones no se considerarán.

Supongamos que $z = f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (x_0, y_0), como se indica en la figura (a). Entonces, la curva donde el plano $y = y_0$ interseca la superficie debe tener un máximo relativo cuando $x = x_0$. Por tanto, la pendiente de la recta tangente a la superficie en la dirección x debe ser 0 en (x_0, y_0). De manera equivalente, $f_x(x, y) = 0$ en (x_0, y_0). En forma análoga, sobre la curva en que el plano $x = x_0$ interseca la superficie figura (b), debe haber un máximo relativo cuando $y = y_0$. Así, en la dirección **y,** la pendiente de la tangente a la superficie debe ser 0 en (x_0, y_0). De manera equivalente, $f_y(x, y) = 0$ en (x_0, y_0).



En el extremo relativo, $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$.

El término valor extremo abarca tanto a máximos como a mínimos

Definición. El punto (x_0, y_0) es un punto crítico de la función $z = f(x, y)$, si (x_0, y_0) está en el dominio de la función y $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ o bien $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ no existen.

Un punto (x_0, y_0) para el cual $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ se llama **punto crítico** de *f*. Así, de la definición anterior inferimos que, para localizar extremos relativos de una función debemos examinar sus puntos críticos.

Advertencia. La definición anterior no implica que un extremo deba ser punto crítico.
Al igual que en el caso de funciones de una variable, un punto crítico puede resultar ser un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de éstos. Un punto crítico sólo es un ***candidato*** para ser un extremo relativo.
El concepto de punto crítico, pueden extenderse a funciones de más de dos variables. Por **ejemplo**, para localizar posibles extremos de $w = f(x, y, z)$, debemos examinar aquellos puntos para los cuales $w_x = w_y = w_z = 0$.

Ejemplo. Encontrar los puntos críticos de la siguiente función:

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1$$

Solución. Primero encontrar la primera derivada con respecto a *x* e *y*, luego igualar a cero cada derivada.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1) = 4x - 2y + 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1) = 2y - 2x - 3$$

Hacer $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$, es decir resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$4x - 2y + 5 = 0 \;\; (1)$$
$$2y - 2x - 3 = 0 \;\; (2)$$

Sumando la ecuación (1) y (2) nos da: $2x + 2 = 0$, es decir $x = -1$
Sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones resulta que $y = 1/2$

Por lo tanto, el punto crítico de $f(x,y)$ es $(-1,1/2)$

Ejemplo. Encontrar los puntos críticos de la siguiente función:

$$f(x,y,z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 100)$$

Solución. Primero encontrar la primera derivada con respecto a x, y y z luego igualar a cero cada derivada.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + xy + y^2 + 100 - zx - zy + 100z) = 4x + y - z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + xy + y^2 + 100 - zx - zy + 100z) = x + 2y - z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(2x^2 + xy + y^2 + 100 - zx - zy + 100z) = -x - y + 100$$

Hacer $f_x(x,y) = f_y(x,y) = f_z(x,y) = 0$, es decir resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$4x + y - z = 0 \quad (1)$$
$$x + 2y - z = 0 \quad (2)$$
$$-x - y + 100 = 0 \; (3)$$

Eliminar la variable "y" de las tres ecuaciones, simultanear (1) y (3); (2) y (3)

$$4x + y - z = 0 \quad (1)$$
$$-x - y + 100 = 0 \; (3)$$
$$3x - z + 100 = 0 \;\; (4)$$

Multiplicar por 2 la ecuación (3)

$$x + 2y - z = 0 \qquad (2)$$
$$2(-x - y + 100 = 0\,) \; (3)$$
$$-x - z + 200 = 0 \qquad (5)$$

Simultanear las ecuaciones (4) y (5) multiplicando por -1 la ecuación (4)

$$-1(3x - z + 100 = 0\,) \; (4)$$
$$-x - z + 200 = 0 \qquad (5)$$
$$-4x + 100 = 0 \; entonces \;\; x = 25$$

Al sustituir el valor de $x = 25$ en la ecuación (4) $3x - z + 100 = 0$, de aquí $z = 175$

Sustituir $x = 25, z = 175$ en la ecuación (1) $4x + y - z = 0$, entonces $y = 75$

Por lo tanto el punto critico es (25,75,175)

Prueba de la segunda derivada para funciones de dos variables

Sea (x_0, y_0) un **punto crítico** de la función $z = f(x, y)$, la cual tiene derivadas parciales continuas f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} en todo punto (x, y) cercano al punto crítico (x_0, y_0). Sea Δ la función definida por: $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - \left[f_{xy}(x, y)\right]^2$. Entonces:

- **a.** Si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ y $\Delta(x_0, y_0) > 0$, entonces f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0)
- **b.** Si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ y $\Delta(x_0, y_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0).
- **c.** Si $\Delta(x_0, y_0) < 0$, entonces f tiene un punto de silla en (x_0, y_0).
- **d.** Si $\Delta(x_0, y_0) = 0$, ninguna conclusión puede sacarse con respecto a extremos en (x_0, y_0) y requiere que se haga un análisis adicional.

Ejemplo. Examinar $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$ con respecto a máximos y mínimos relativos, usando la prueba de la segunda derivada.

Solución. Primero encontrar los puntos críticos, es decir hallar la primera derivada con respecto a x e y luego hacer $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3 - xy) = 3x^2 - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3 - xy) = 3y^2 - x$$

Hacer $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, es decir resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x^2 - y = 0 \quad (1)$$
$$3y^2 - x = 0 \quad (2)$$

De la ecuación (1) tenemos $3x^2 = y$ (3) sustituyendo este valor en la ecuación (2) para obtener:

$$3(3x^2)^2 - x = 0$$
$$3(9x^4) - x = 0$$
$$27x^4 - x = x(27x^3 - 1) = 0$$

Es decir $x = 0$ y $27x^3 - 1 = 0$, despejando "x" tenemos $x = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, al sustituir este valor en la ecuación tres obtenemos $y = 3(1/3)^2 = 1/3$, también cuando $x = 0, y = 0$

Los puntos críticos de $f(x, y)$ son $(0,0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Ahora sacar las segundas derivadas. Si $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - x$, entonces:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - y) = 6x, \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3y^2 - x) = 6y$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}\right)$$

Es decir, si $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y$, entonces:

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial y}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - y) = -1$$

Formar $\boldsymbol{\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2}$

$$= (6x)(6y) - (-1)^2 = 36xy - 1.$$

Evaluar $\Delta(x,y)$ en cada punto crítico.

$$\Delta(0{,}0) = 36(0)(0) - 1 = -1 < 0$$

$$\Delta\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 36\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{3}\right) - 1 = 3 > 0$$

Y evaluar en f_{xx} para ver si es positiva o negativa

$$f_{xx}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) = 2 > 0$$

CONCLUSION.

La función $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$ tiene un punto de silla en (0,0), ya que $\Delta(0{,}0) < 0$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, ya que $\Delta\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) > 0$ y $f_{xx}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) > 0$

La función alcance el mínimo en el punto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{27}\right)$, cuyo valor se obtiene al evaluar el mínimo en la función $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$.

Ejemplo. Determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y^2 - x^2$, usando la prueba de la segunda derivada.

Solución. Primero encontrar los puntos críticos, es decir hallar la primera derivada con respecto a *x* e *y* luego hacer $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x^2) = -2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - x^2) = 2y$$

Hacer $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$, es decir resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-2x = 0, entonces\ x = 0$$

$$2y = 0, entonces\ y = 0$$

Se obtiene el punto crítico (0,0)
Sacar las segundas derivadas y la derivada mixta.

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-2x) = -2\ ;\ f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2;\ f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-2x) = 0$$

Se aplica la prueba de la segunda derivada, para ello formar:

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left[f_{xy}(x,y)\right]^2 = -2(2) - 0 = -4$$

Evaluar $\Delta(x,y)$ en el único punto crítico.

$$\Delta(0,0) = -4 < 0$$

Conclusión. La función $f(x,y) = y^2 - x^2$ tiene un punto de silla en (0,0), ya que $\Delta(0,0) < 0$

GUIA DE EJERCICIOS No.7. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En los problemas del 1 al 6 encuentre los puntos críticos de las funciones.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5x + 4y + xy.$

2. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 16y.$

3. $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 + 1.5y^2 - 12x - 90y.$

4. $f(x, y) = xy - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$

5. $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + 100 - z(x + y - 200).$

6. $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 - w(x - y + 2z - 6).$

En los problemas del 7 al 20 encuentre los puntos de las funciones. Para cada punto crítico, determine, por medio de la prueba de la segunda derivada, si corresponde a un máximo relativo, a un mínimo relativo, a ninguno de los dos, o si la prueba no da información.

7. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 3.$

8. $f(x, y) = -2x^2 + 8x - 3y^2 + 24y + 7.$

9. $f(x, y) = y - y^2 - 3x - 6x^2.$

10. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 9x + 1.$

11. $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 + y - 5.$

12. $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2 - 2x + 2y - 2xy.$

13. $f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + 8y^3) - 2(x^2 + y^2) + 1.$

14. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x^3.$

15. $f(l, k) = 2lk - l^2 + 264k - 10l - 2k^2.$

16. $f(l, k) = l^3 + k^3 - 3lk.$

17. $f(p, q) = pq - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$

18. $f(x, y) = (x - 3)(y - 3)(x + y - 3).$

19. $f(x, y) = (y^2 - 4)(e^x - 1).$

20. $f(x, y) = \ln(xy) + 2x^2 - xy - 6x.$

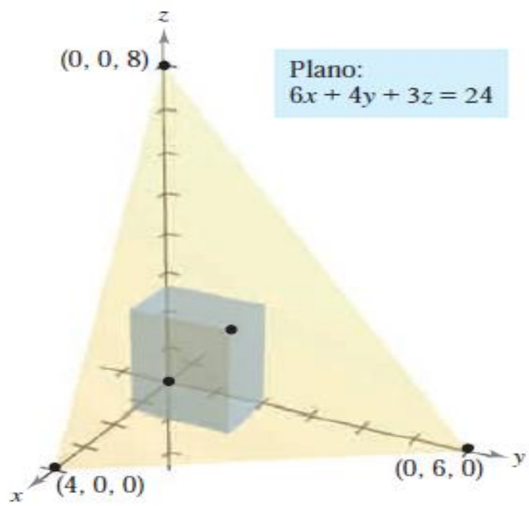
0.8 APLICACIONES

En muchas situaciones que implican funciones de dos variables, y en especial en sus aplicaciones, la naturaleza del problema dado es un indicador de si un punto crítico es realmente un máximo relativo (o absoluto) o un mínimo relativo (o absoluto). En tales casos, la prueba de la segunda derivada no se necesita. A menudo, en estudios matemáticos de problemas de aplicación se supone que se satisfacen las condiciones apropiadas de segundo orden.

Algunas de las muchas aplicaciones de los extremos de funciones de dos (o más) variables.

Ejemplo1 Hallar un volumen máximo

Una caja rectangular descansa en el plano xy con uno de sus vértices en el origen. El vértice opuesto está en el plano $6x + 4y + 3z = 24$ como se muestra en la figura. Hallar el volumen máximo de la caja.



Solución Sean x, y y z el largo, ancho y la altura de la caja. Como un vértice de la caja se encuentra en el plano $6x + 4y + 3z = 24$, se sabe que $z = \frac{24-6x-4y}{3}$, y así se puede expresar el volumen xyz de la caja en función de dos variables.

$$\boldsymbol{V(x,y) = x.y.\left(8 - 2x - \frac{4}{3}y\right) = 8xy - 2x^2y - \frac{4}{3}xy^2}$$

Derivando parcialmente con respecto a "x" y a "y" e igualando a cero dichas derivadas para encontrar los puntos críticos obtenemos:

$$V_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(8xy - 2x^2y - \frac{4}{3}xy^2\right) = \boldsymbol{8y - 4xy - \frac{4}{3}y^2}$$

$$V_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(8xy - 2x^2y - \frac{4}{3}xy^2\right) = \boldsymbol{8x - 2x^2 - \frac{8}{3}xy}$$

$$\boldsymbol{8y - 4xy - \frac{4}{3}y^2} = y\left(8 - 4x - \frac{4}{3}y\right) = 0 \ \ (1)$$

$$\boldsymbol{8x - 2x^2 - \frac{8}{3}xy} = x\left(8 - 2x - \frac{8}{3}y\right) = 0 \ (2)$$

De la ecuación (1) tenemos:

$$y = 0\ ;\ \ 8 - 4x - \frac{4}{3}y = 0 \ (1)$$

De la ecuación (2) se obtiene:

$$x = 0;\ 8 - 2x - \frac{8}{3}y = 0 \ (2)$$

Entonces tenemos un punto crítico el par ordenado (0,0) el otro se obtiene al simultanear las ecuaciones (1) y (2) pero antes multiplicar por -2 la ecuación (2) para eliminar la variable "x"

$$8 - 4x - \frac{4}{3}y = 0 \ (1)$$

$$-2\ \left(8 - 2x - \frac{8}{3}y = 0\right)(2)$$

$$\boldsymbol{-8 + 4y = 0}, \text{entonces } \boldsymbol{y = 2}$$

Sustituir el valor de y=2 en la ecuación (1) para encontrar el valor de "x"

$$8 - 4x - \frac{4}{3}(2) = 0 \ (1)$$

$$8 - \frac{8}{3} = 4x$$

$$\boldsymbol{\frac{16}{3} = 4x}, \text{entonces } \boldsymbol{x = \frac{4}{3}}$$

Los puntos críticos son: (0,0) y (4/3, 2).
En (0,0) el volumen es 0, así que ese punto no proporciona un volumen máximo.
En el punto (4/3,2) se puede aplicar el criterio de la segunda derivada.

$$V_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(8y - 4xy - \frac{4}{3}y^2\right) = -4y$$

$$V_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(8x - 2x^2 - \frac{8}{3}xy\right) = -\frac{8}{3}x$$

$$V_{xy}(x,y) = \boldsymbol{\frac{\partial}{\partial y}}\left(\boldsymbol{\frac{\partial V}{\partial x}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\boldsymbol{8y - 4xy - \frac{4}{3}y^2}\right) = 8 - 4x - \frac{8}{3}y$$

Sustituyendo en $\Delta(x,y) = V_{xx}(x,y)V_{yy}(x,y) - \left[V_{xy}(x,y)\right]^2$

$$\Delta(x,y) = (-4y)\left(-\frac{8}{3}x\right) - \left[8 - 4x - \frac{8}{3}y\right]^2$$

el punto crítico se obtiene

$$\Delta\left(\frac{4}{3},2\right) = (-4(2))\left(-\frac{8}{3}\left(\frac{4}{3}\right)\right) - \left[8 - 4\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{8}{3}(2)\right]^2$$

$$= -8\left(-\frac{32}{9}\right) - \left(-\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{3}$$

Como $\Delta\left(\frac{4}{3},2\right) = \frac{64}{3} > 0\ \ y\ \ V_{xx}\left(\frac{4}{3},2\right) = -8 < 0$, entonces de acuerdo con el criterio de la segunda derivada el punto (4/3, 2) es un máximo relativo. Y su volumen máximo es:

$$V\left(\frac{4}{3},2\right) = 8\left(\frac{4}{3}\right)2 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 2 - \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\right)(2)^2 = \frac{64}{9}\ \text{ unidades cúbicas}$$

Puede notarse que el volumen es cero en los puntos frontera.

Ejemplo. Un fabricante de artículos electrónicos determina que la ganancia o beneficio *P* (en dólares) obtenido al producir *x* unidades de un reproductor de DVD y *y* unidades de televisores se aproxima mediante el modelo:

$$P(x,y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10000$$

Hallar el nivel de producción que proporciona una ganancia o beneficio máximo. ¿Cuál es la ganancia máxima?

Solución. Reescribiendo la función beneficio o ganancia

$$P(x,y) = 8x + 10y - 0.001x^2 - 0.001xy - 0.001y^2 - 10000$$

Las derivadas parciales de la función ganancia o beneficio son:

$$P_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(8x + 10y - 0.001x^2 - 0.001xy - 0.001y^2 - 10000)$$

$$\boldsymbol{P_x(x,y) = 8 - 0.002x - 0.001y\ \ (1)}$$

$$P_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(8x + 10y - 0.001x^2 - 0.001xy - 0.001y^2 - 10000)$$

$$\boldsymbol{P_y(x,y) = 10 - 0.001x - 0.002y\ \ (2)}$$

Igualando estas derivadas parciales a 0, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$8 - 0.002x - 0.001y = 0 \ (1)$$

$$10 - 0.001x - 0.002y \ = 0 \ (2)$$

Resolviendo el sistema se obtiene que $x = 2{,}000$ y $y = 4{,}000$

El punto crítico es (2000, 4000) se puede aplicar el criterio de las segundas derivadas parciales.

$$P_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(8 - 0.002x - 0.001y) = -0.002$$

$$P_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(10 - 0.001x - 0.002y) = -0.002$$

$$P_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{8 - 0.002x - 0.001y}) = -0.001$$

Sustituyendo en $\Delta(x,y) = P_{xx}(x,y)P_{yy}(x,y) - \left[P_{xy}(x,y)\right]^2$ el punto crítico se obtiene

$$\Delta(2000{,}4000) = (-0.002)(-0.002) - [-0.001]^2 = 3x10^{-6} > 0$$

Como $\Delta(2000{,}4000) > 0 \ y \ P_{xx}(2000{,}4000) = -0.002 < 0$, se concluye que con

$x = 2000$ unidades y $y = 4000$ unidades proporciona el beneficio máximo.

El beneficio máximo es: $18,000 y se obtiene así evaluando el número critico en la función original: $P(x,y) = 8x + 10y - 0.001x^2 - 0.001xy - 0.001y^2 - 10000$

$$P(2000{,}4000) = 8(2000) + 10(4000) - 0.001(2000)^2$$

$$-0.001(2000)(4000) - 0.001(4000)^2 - 10000 = 18{,}000$$

GUIA DE EJERCICIOS No. 8

1. **Maximización de la producción** Suponga que

   $$P = f(l,k) = 1.08l^2 - 0.03l^3 + 1.68k^2 - 0.08k^3$$

   es una función de producción para una empresa. Encuentre las cantidades de entrada, l y k, que maximizan la producción P.

2. **Maximización de la producción** En cierto proceso manufacturero automatizado, las máquinas M y N se utilizan m y n horas, respectivamente. Si la producción diaria Q es una función de m y n, dada por

   $$Q = 4.5m + 5n - 0.5m^2 - n^2 - 0.25mn,$$