Unidad I. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (CÁLCULO INTEGRAL)

1.1 INTEGRALES ITERADAS

En la unidad anterior vimos como derivar funciones de varias variables con respecto a una variable manteniendo constantes las demás variables. Emplearemos un procedimiento similar para integrar funciones de varias variables. Así, por ejemplo, si conocemos que $f_x(x,y) = 2xy$, entonces considerando a la variable "y" constante, podemos integrar respecto a x para obtener lo siguiente:

$$f(x,y) = \int f_x(x,y)\,dx = \int 2xy\,dx$$

$$= 2y \int x\,dx = 2y\left(\frac{x^2}{2}\right) + C(y)$$

$$f(x,y) = x^2 y + C(y)$$

Donde la constante de integración $C(y)$ es una función de "y"

En otras palabras, al integrar con respecto a x, se puede recobrar $f(x,y)$ sólo parcialmente. Cómo recobrar totalmente una función de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ a partir de sus derivadas parciales es un tema que se estudiará más adelante. Por ahora, lo que interesa es extender las integrales definidas a funciones de varias variables.

Por **ejemplo**, al considerar "***y***" constante, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo para evaluar

$$\int_1^{2y} 2xy\,dx = x^2y\Big]_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y = 4y^3 - y.$$

x es la variable de integración y *y* es fija.

Sustituir *x* por los límites de integración.

El resultado es una función de *y*.

De manera similar se puede integrar con respecto a y, manteniendo x fija. Ambos procedimientos se resumen como sigue.

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x,y)\,dx = f(x,y)\Big]_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y),y) - f(h_1(y),y) \qquad \text{Con respecto a } x.$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x,y)\,dy = f(x,y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x,g_2(x)) - f(x,g_1(x)) \qquad \text{Con respecto a } y.$$

Nota:

1) **La variable de integración no puede aparecer en ninguno de los límites de integración. Por ejemplo, no tiene sentido escribir** $\int_0^x y\,dx$

2) **Si integramos respecto a una variable, el resultado nos da una expresión en términos de la otra variable y por lo tanto podemos integrar este resultado con respecto a la otra variable.**

1.2 DEFINICIÓN Y EVALUACIÓN DE INTEGRALES DOBLES

Ejemplo. Evaluar $\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy$

Solución. Se considera "x" constante y se integra con respecto a "y", con lo que se obtiene:

$$\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y)\, dy = \int_1^x 2x^2y^{-2}\, dy + \int_1^x 2y\, dy$$

$$= \boldsymbol{2x^2 \int_1^x y^{-2}\, dy + 2\int_1^x y\, dy}$$

$$= \boldsymbol{2x^2 \left(\frac{y^{-2+1}}{-2+1}\right)\Big|_1^x + 2\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^x}$$

$$= \boldsymbol{2x^2 \left(\frac{y^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^x + y^2\Big|_1^x = \left(-\frac{2x^2}{y}\right)\Big|_1^x + (x^2 - 1^2)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{-2x^2}{x} - \frac{(-2x^2)}{1} + x^2 - 1 = -2x + 2x^2 + x^2 - 1}$$

$$\therefore \int_1^x \boldsymbol{(2x^2y^{-2} + 2y)\, dy = 3x^2 - 2x - 1}$$

En el ejemplo anterior se puede ver que la integral define una función de *x* que puede ser integrada *ella misma*, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo. Evaluar $\int_1^2 \left[\int_1^x \boldsymbol{(2x^2y^{-2} + 2y)\, dy}\right] dx$

Solución. Utilizando el ejemplo anterior tenemos:

$$\int_1^2 \left(\int_1^x \boldsymbol{(2x^2y^{-2} + 2y)} dy\right) dx = \int_1^2 \boldsymbol{(3x^2 - 2x - 1)} dx$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 - \boldsymbol{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 - \boldsymbol{(x)}\Big|_1^2 = \boldsymbol{(x^3 - x^2 - x)}\Big|_1^2$$

$$= (2^3 - 2^2 - 2) - (1^3 - 1^2 - 1) = (8 - 4 - 2) - (1 - 1 - 1)$$

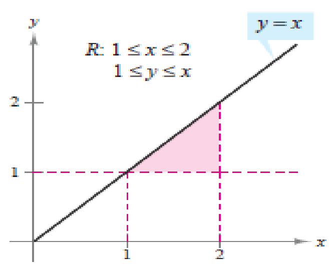
$$2 - (-1) = 3$$

$$\int_1^2 \left[\int_1^x (\mathbf{2x^2y^{-2}} + \mathbf{2y})\, \boldsymbol{dy} \right] dx = 3$$

La integral del ejemplo anterior es una **integral iterada**. Los corchetes usados en el ejemplo normalmente no se escriben. Las integrales iteradas se escriben normalmente como

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Los **límites interiores de integración** pueden ser variables con respecto a la variable exterior de integración. Sin embargo, los **límites exteriores de integración** *deben ser* constantes con respecto a ambas variables de integración. Después de realizar la integración interior, se obtiene una integral definida "ordinaria" y la segunda integración produce un número real. Los límites de integración de una integral iterada definen dos intervalos para las variables. Así, en el ejemplo anterior, los límites exteriores indican que x está en el intervalo
$1 \leq x \leq 2$ y los límites interiores indican que y está en el intervalo $1 \leq y \leq x$.
Juntos, estos dos intervalos determinan la **región de integración R** de la integral iterada, como se muestra en la figura siguiente.



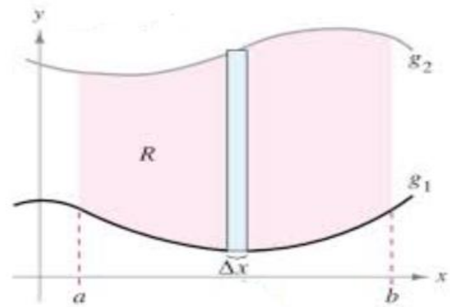
La región de integración para
$\int_1^2 \int_1^x f(x, y)\, dy\, dx$

Como una integral iterada es simplemente un tipo especial de integral definida, en el que el integrando es también una integral, se pueden utilizar las propiedades de las integrales definidas para evaluar integrales iteradas.

Teorema 1. Sea f continua en una región plana R:

1) Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1 \leq y \leq g_2$, donde g_1, g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

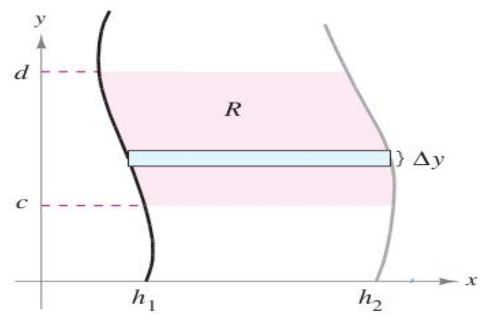
$$\int_R \int f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$



Región Verticalmente simple

2) Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1 \leq x \leq h_2$, donde h_1, h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

$$\int_R \int f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$



Región horizontalmente simple

Observaciones: En el teorema anterior

1) **Si $\boldsymbol{f(x,y) = 1}$ la evaluación de la integral doble da el valor del área de la región R, en cada caso.**
2) Si $f(x,y) > 0$ para todo (x,y) en la región R, la evaluación de la integral doble nos da el volumen del sólido que se forma entre la región R y la gráfica de $z = f(x,y)$
3) A la **región verticalmente simple** se le llama **Región Tipo I.**
4) A la **región horizontalmente simple** se la llama **Región tipo II.**

Con frecuencia, uno de los órdenes de integración hace que un problema de integración resulte más sencillo de como resulta con el otro orden de integración. Sin embargo, si se llega al resultado, se verá que la respuesta es la misma. En otras palabras, el orden de integración afecta la complejidad de la integración, pero no el valor de la integral.

Ejemplo. Comparación de órdenes de integración

Dibujar la región cuya área está representada por la integral $\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\, dy$, después hallar la otra integral iterada que utilice el orden $dydx$ para representar la misma área y mostrar que ambas integrales dan el mismo valor.

Solución. De acuerdo con los límites de integración dados, se sabe que $y^2 \leq x \leq 4$, lo cual significa que la región R está limitada o acotada a la izquierda por la parábola $x = y^2$ y a la derecha por la recta $x = 4$. Además, como $0 \leq y \leq 2$, se sabe que R está limitada inferiormente por el eje "x" $(y = 0)$ y por la recta horizontal $y = 2$.

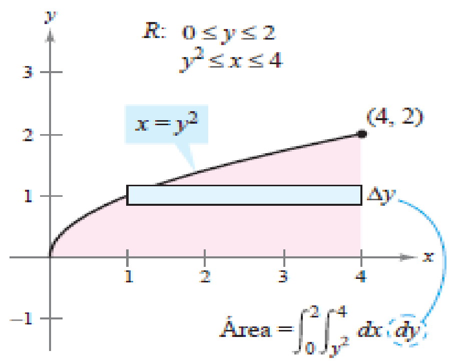
El valor de la integral está dado por:

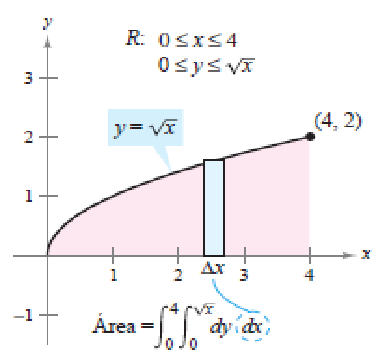
$$A = \int_0^2 \int_{y^2}^4 dxdy$$

$$A = \int_0^2 \left((\boldsymbol{x})\Big|_{\boldsymbol{y^2}}^{\boldsymbol{4}} \right) dy = \int_0^2 (4 - y^2)\, dy$$

$$A = \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(4(2) - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4(0) - \frac{0^3}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$A = \frac{16}{3}\, u^2$$





Para cambiar el orden de integración a $dydx$ se coloca un rectángulo vertical en la región, como se muestra en la figura anterior. Con esto se puede ver que los límites o cotas constantes $0 \leq x \leq 4$ sirven como límites exteriores de integración. Despejando y de la ecuación $x = y^2$, se concluye que los límites interiores son: $0 \leq y \leq \sqrt{x}$ .Por tanto, el área de la región también se puede representar por: $A = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dydx$.
Evaluando esta integral, se ve que tiene el mismo valor que la integral original

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^4 (y)\Big|_0^{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \sqrt{x}dx$$

$$\int_0^4 \sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{1/2}dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\left(4^{3/2} - 0^{3/2}\right) = \frac{2}{3}(8) = \frac{16}{3}$$

Podemos ver que el área es la misma, es decir:

$$A = \int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\, dy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dydx = \frac{16}{3}\, u^2$$

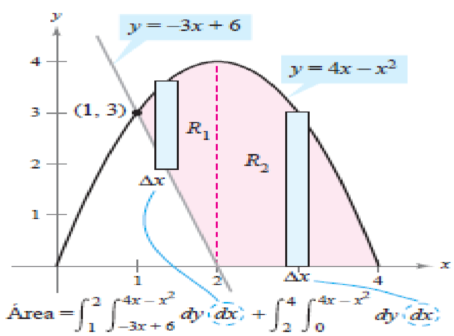
Algunas veces no es posible calcular el área de una región con una sola integral iterada. En estos casos se divide la región en subregiones de manera que el área de cada subregión pueda calcularse por medio de una integral iterada.
El área total es entonces la suma de las integrales iteradas.

Ejemplo. Hallar el área de la región R que se encuentra acotada por la parábola $y = 4x - x^2$, sobre el eje “x” y sobre la recta $y = -3x + 6$
Solución. Primero encontrar los puntos de intersección de ambas curvas luego hacer la gráfica de la región para poder plantear la integral que nos dará el área encerrada.
Igualamos $y = y$

$$4x - x^2 = -3x + 6, entonces\ 0 = x^2 - 4x - 3x + 6 = x^2 - 7x + 6$$

$$x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1) = 0$$

Es decir $x - 6 = 0, x = 6$ además $x - 1 = 0, x = 1$
Sustituir en cualquiera de las dos ecuaciones dadas en los valores encontrados
$y = -3x + 6$, si $x = 1$ entonces $y = 3$. De igual forma si $x = 6$ entonces $y = -12$



El punto $(6, -12)$ no forma parte de la región, ya que se pide hallar la región sobre el eje "x"

Para hallar el área encerrada es conveniente tomar rectángulos verticales y puede observarse que se divide la región en dos subregiones $R_1\ y\ R_2$ como se ve en la figura.

$$Area\ = \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dydx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dydx$$

$$Area = \int_1^2 \left[(y)|_{-3x+6}^{4x-x^2}\right] dx + \int_2^4 \left[(y)|_0^{4x-x^2}\right] dx$$

$$= \int_1^2 [4x - x^2 - (-3x + 6)]\, dx + \int_2^4 [4x - x^2 - 0] dx$$

$$= \int_1^2 [4x - x^2 + 3x - 6]\, dx + \int_2^4 [4x - x^2] dx$$

$$= \int_1^2 [7x - x^2 - 6]\, dx + \int_2^4 [4x - x^2] dx$$

$$= \left[7\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2\right] - \left[\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2\right] - [(6x)|_1^2] + \left[4\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^4\right] - \left[\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^4\right]$$

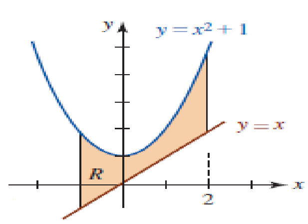
$$= \frac{7}{2}(2^2 - 1^2) - \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) - (6.2 - 6.1) + 2(4^2 - 2^2) - \frac{1}{3}(4^3 - 2^3)$$

$$= \frac{7}{2}(3) - \frac{1}{3}(7) - 6 + 2(12) - \frac{1}{3}(56) = \frac{15}{2}$$

El área de la región es 15/2 unidades cuadradas. Se puede tratar de comprobar el resultado usando rectángulos horizontales y se llega al mismo resultado.

Ejemplo. Evalúe la integral iterada de $f(x, y) = 2xy$, sobre la región $y = x^2 + 1, y = x$, $-1 \leq x \leq 2$.

Solución. Primero dibujar la región para visualizar si utilizar el número 1 o 2 del teorema 1, se puede observar que es más fácil usar rectángulos verticales para evaluar la integral iterada sobre la región R.



Planteamos la integral iterada de la siguiente forma:

$$\int_{-1}^{2}\int_{x}^{x^2+1} 2xy\,dydx = \int_{-1}^{2}\left[\int_{x}^{x^2+1} 2xydy\right]dx = \int_{-1}^{2} 2x\left[\int_{x}^{x^2+1} ydy\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{2} 2x\left[\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x}^{x^2+1}\right]dx = \int_{-1}^{2} 2x\left(\frac{(x^2+1)^2}{2} - \frac{(x)^2}{2}\right)dx$$

$$= \int_{-1}^{2} x((x^2+1)^2 - x^2)dx = \int_{-1}^{2} x(x^2+1)^2\,dx - \int_{-1}^{2} x^3\,dx$$

Haciendo cambio de variable tenemos: $u = x^2 + 1, entonces\ du = 2xdx \rightarrow \frac{du}{2} = xdx$

$$= \int_{-1}^{2} u^2\frac{du}{2} - \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right)$$

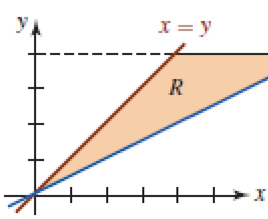
$$= \left(\frac{1}{6}(x^2+1)^3\right)\Big|_{-1}^{2} - \left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}\{(2^2+1)^3 - ((-1)^2+1)^3\} - \frac{15}{4}$$

$$= \frac{1}{6}(117) - \frac{15}{4} = \frac{63}{4}$$

$$\therefore\ \int_{-1}^{2}\int_{x}^{x^2+1} 2xy\,dydx = \frac{63}{4}$$

Ejemplo. Evalúe la integral iterada de $f(x, y) = 8x + e^y$, sobre la región $x = y, 2y = x$, $0 \leq y \leq 4$.

Solución. Primero dibujar la región para visualizar si utilizar el número 1 o 2 del teorema 1.



Se plantea la integral iterada tomando rectángulos horizontales, ya que de la otra forma tendríamos hacer dos integrales por lo que la integral sobre la región es:

$$\int_{0}^{4}\int_{y}^{2y} (8x + e^y)\,dxdy$$

De la misma manera resolvemos la integral iterada.

$$\int_0^4 \int_y^{2y} (8x + e^y)\, dxdy = \int_0^4 \left[\int_y^{2y} (8x + e^y) dx\right] dy = \int_0^4 \left(8\left(\frac{x^2}{2}\right) + e^y x\right)\Bigg|_y^{2y} dy$$

$$= \int_0^4 \left[\left[8\left(\frac{(2y)^2}{2}\right) + e^y(2y)\right] - \left[8\left(\frac{(y)^2}{2}\right) + e^y(y)\right]\right] dy$$

$$= \int_0^4 [4(2y)^2 + 2ye^y - 4y^2 - ye^y]\, dy = \int_0^4 (16y^2 + ye^y - 4y^2)\, dy$$

$$= \int_0^4 (12y^2 + ye^y)\, dy$$

$$= \left(12\left(\frac{y^3}{3}\right) + ye^y - e^y\right)\Bigg|_0^4 = \left(12\left(\frac{4^3}{3}\right) + 4e^4 - e^4\right) - \left(12\left(\frac{0^3}{3}\right) + 0e^0 - e^0\right)$$

$$= 256 + 3e^4 - 0 - 0 + 1 = 257 + 3e^4 \approx 420.79$$

$$\therefore \int_0^4 \int_y^{2y} (8x + e^y)\, dxdy \approx 420.79$$

GUIA DE EJERCICIOS No.1

En los ejercicios 11 a 30, evaluar la integral iterada.

11. $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\, dy\, dx$ **12.** $\int_{-1}^1 \int_{-2}^2 (x^2 - y^2)\, dy\, dx$

13. $\int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$ **14.** $\int_{-1}^2 \int_1^3 (x + y^2)\, dx\, dy$

15. $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 y \cos x\, dy\, dx$ **16.** $\int_0^{\ln 4} \int_0^{\ln 3} e^{x+y}\, dy\, dx$

17. $\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} (1 + \cos x)\, dy\, dx$

18. $\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}\, dy\, dx$

19. $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 - x^2}\, dy\, dx$ **20.** $\int_{-4}^4 \int_0^{x^2} \sqrt{64 - x^3}\, dy\, dx$

21. $\displaystyle\int_{-1}^{5}\int_{0}^{3y}\left(3 + x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) dx\, dy$

22. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{y}^{2y}(10 + 2x^2 + 2y^2)\, dx\, dy$

23. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}(x + y)\, dx\, dy$

24. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{3y^2-6y}^{2y-y^2} 3y\, dx\, dy$

25. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\, dx\, dy$

26. $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{0}^{y}\frac{4}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$

27. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{2\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

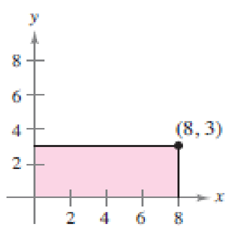
28. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

29. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\operatorname{sen}\theta} \theta r\, dr\, d\theta$

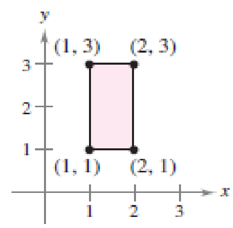
30. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\cos\theta} 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

En los ejercicios 35 a 38, utilizar una integral iterada para hallar el área de la región.

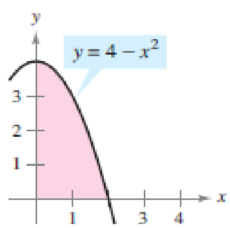
35.



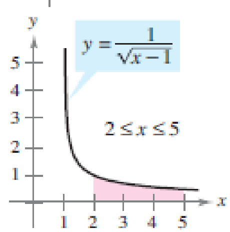
36.



37.



38.



En los ejercicios 39 a 46, utilizar una integral iterada para calcular el área de la región limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \quad x = 0, \quad y = 0$

40. $y = x^{3/2}, \quad y = 2x$

41. $2x - 3y = 0, \quad x + y = 5, \quad y = 0$

42. $xy = 9, \quad y = x, \quad y = 0, \quad x = 9$

43. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

44. $y = x, \quad y = 2x, \quad x = 2$

45. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2$

46. $x^2 + y^2 = 4, \quad x = 0, \quad y = 0$

En los ejercicios 47 a 54, dibujar la región *R* de integración y cambiar el orden de integración.

47. $\int_0^4 \int_0^y f(x, y)\, dx\, dy$ **48.** $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y)\, dx\, dy$

49. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx$ **50.** $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y)\, dy\, dx$

51. $\int_1^{10} \int_0^{\ln y} f(x, y)\, dx\, dy$ **52.** $\int_{-1}^2 \int_0^{e^{-x}} f(x, y)\, dy\, dx$

53. $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y)\, dy\, dx$ **54.** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y)\, dy\, dx$

1.3 INTEGRALES DOBLES. VOLUMEN

Las integrales iteradas vistas anteriormente proporcionan los medios para evaluar una integral doble $\iint_R f(x,y)dA$ sobre una región tipo I o tipo II o una región que puede expresarse como una unión de un número finito de estas regiones. El siguiente resultado se debe al matemático italiano Guido Fubini (1879-1943).

Teorema de Fubini

Sea *f* continua sobre una región *R*.

i) Si *R* es una región de tipo I, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \qquad (1)$$

ii) Si *R* es una región de tipo II, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (2)$$

El teorema anterior es la contraparte de la integral doble del teorema fundamental del cálculo. Si bien el teorema anterior es difícil de probar, podemos tener alguna idea intuitiva de su importancia al considerar volúmenes. Sea *R* una región de tipo I y $z = f(x,y)$ continua y no negativa sobre *R*. El área *A* del plano vertical que se muestra en la figura es el área bajo la traza de la superficie $z = f(x,y)$ en el plano *x* =*constante* y en consecuencia está dado por la integral parcial:

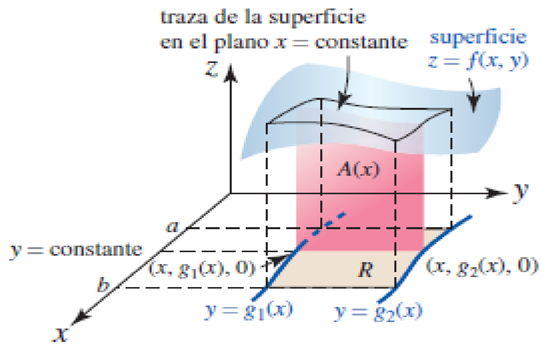
$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

Al sumar todas estas áreas de $x = a$ a $x = b$, se obtiene el volumen V del solido sobre R y debajo de la superficie:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \boldsymbol{f(x,y)dy}\, dx$$

Sin embargo, como ya se vio anteriormente, este volumen esta también dado por la integral doble $V = \iint_R f(x,y)dA$. En consecuencia,

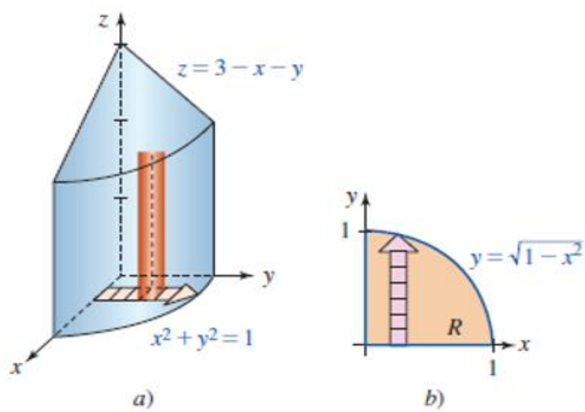
$$V = \iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \boldsymbol{f(x,y)dy}\, dx$$



Ejemplo. Utilizar integrales dobles para calcular el volumen V del solido en el primer octante que está acotada por los planos coordenados y las gráficas del plano $z = 3 - x - y$, y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Solución. Primero hacer la gráfica para poder calcular el volumen.

Puede verse que el volumen viene dado por $V = \iint_R (3 - x - y)dA$



a) b)

En la figura anterior muestra que la región de integración R y es del tipo I, es decir

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\, dydx$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\, dydx = \int_0^1 \left(\boldsymbol{3y - xy - \frac{1}{2}y^2}\right)\Big|_{\mathbf{0}}^{\sqrt{\mathbf{1-x^2}}} \boldsymbol{dx}$$

$$= \int_0^1 \left(\boldsymbol{3\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 3\sqrt{\boldsymbol{1-x^2}}\, dx - \int_0^1 x\sqrt{\boldsymbol{1-x^2}}\, dx - \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^2) dx$$

La primera integral se resuelve por sustitución trigonométrica:

$\boldsymbol{\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} ArcSen\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} x\sqrt{a^2-x^2} + C}$

La segunda haciendo un cambio de variable $u = 1 - x^2, du = -2xdx \ entonces \frac{du}{-2} = xdx$

$$= 3\int_0^1 \sqrt{\boldsymbol{1-x^2}}\, dx - \int_0^1 u^{1/2} \frac{du}{-2} - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2) dx$$

$$= 3\left(\boldsymbol{\frac{1^2}{2} ArcSen\left(\frac{x}{1}\right) + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2}} \right)\Bigg|_0^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\boldsymbol{\frac{3}{2} ArcSen(x) + \frac{3}{2} x\sqrt{1-x^2}} \right)\Bigg|_0^1 + \frac{1}{3}\left((1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1$$

$$= \left(\frac{3}{2} ArcSen(1) + \frac{3}{2}(1)\sqrt{1-1^2} \right) - \left(\frac{3}{2} ArcSen(0) + \frac{3}{2}(0)\sqrt{1-0^2} \right) + \frac{1}{3}\left((1-1^2)^{\frac{3}{2}} - (1-0^2)^{\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(0 - \frac{0^3}{3}\right) \right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}(0-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3} \approx 1.69\ U^3$$

Por lo tanto, el volumen del solido en el primer octante es:

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\, dydx \approx 1.69\ U^3$$

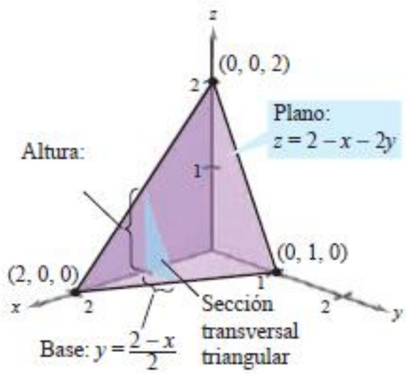
Ejemplo. Encontrar el volumen de la región solida acotada por el plano $z = f(x,y) = 2 - x - 2y$, y por los tres planos coordenados.

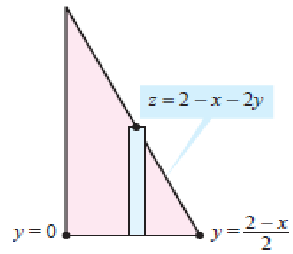
Solución. Primero hallar las intersecciones con los ejes coordenados para ello hacemos lo siguiente:

Intersección con el eje "**x**" hacer $y = z = 0$, $0 = 2 - x - 2(0)$, entonces $x = 2$, el punto es (2,0,0)

Intersección con el eje “y” hacer $x = z = 0$, $0 = 2 - 0 - 2y$, entonces $y = 1$, el punto es (0,1,0)

Intersección con el eje “z” hacer $x = y = 0$, $z = 2 - 0 - 2(0)$, entonces $x = 2$, el punto es (0,0,2)





Sección transversal triangular

El volumen viene dado por la integral iterada

$$V = \int_R \int f(x,y)dA = \int_0^2 \int_0^{\frac{2-x}{2}} (2 - x - 2y)dydx$$

$$V = \int_0^2 \left[(2y - xy - y^2)\Big|_{0}^{(2-x)/2} \right] dx = \int_0^2 \left[2\left(\frac{2-x}{2}\right) - x\left(\frac{2-x}{2}\right) - \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 \right] dx$$

$$V = \int_0^2 \left[2 - x - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}(4 - 4x + x^2) \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[2 - 2x + \frac{1}{2}x^2 - 1 + x - \frac{1}{4}x^2 \right] dx = \int_0^2 \left[1 - x + \frac{1}{4}x^2 \right] dx$$

$$V = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right) \right)\Bigg|_0^2 = 2 - \frac{2^2}{2} + \frac{1}{12}(2)^3 = \frac{2}{3}U^3$$

GUIA DE EJERCICIOS No.2

En los problemas 13-18, emplee la integral doble para calcular el área de la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones que se indican.

13. $y = -x, y = 2x - x^2$

14. $x = y^2, x = 2 - y^2$

15. $y = e^x, y = \ln x, x = 1, x = 4$

16. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, x + y = 4$

17. $y = -2x + 3, y = x^3, x = -2$

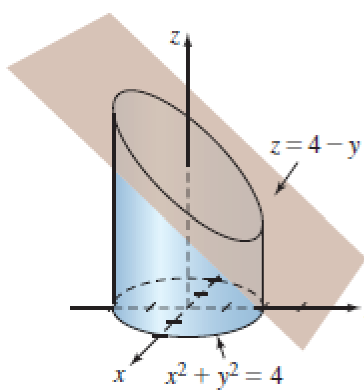
18. $y = -x^2 + 3x, y = -2x + 4, y = 0, 0 \leq x \leq 2$

19. Considere el sólido acotado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4, z = 4 - y$ y $z = 0$ que se muestran en la FIGURA 14.3.10. Elija y evalúe la integral correcta que represente al volumen V del sólido.

a) $4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx$

b) $2\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\, dy\, dx$

c) $2\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\, dx\, dy$



Sólido del problema 19

En los problemas 21-30, determine el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

21. $2x + y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

22. $z = 4 - y^2, x = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

23. $x^2 + y^2 = 4, x - y + 2z = 4, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

24. $y = x^2, y + z = 3, z = 0$

25. $z = 1 + x^2 + y^2, 3x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

26. $z = x + y, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

27. $yz = 6, x = 0, x = 5, y = 1, y = 6, z = 0$

28. $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2, z = 0$

29. $z = 4 - y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$

30. $z = 1 - x^2, z = 1 - y^2, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

1.4 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS POLARES

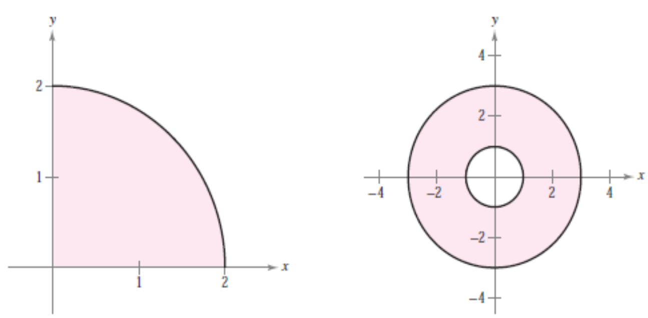
Algunas integrales dobles son ***mucho*** más fáciles de evaluar en forma polar que en forma rectangular. Esto es así especialmente cuando se trata de regiones circulares, cardiodes y pétalos de una curva rosa, y de integrandos que contienen $x^2 + y^2$.

Anteriormente se vio que las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) del punto, de la manera siguiente.

$$x = rCos(\theta)\ ;\ \ y = rSen(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2;\ \ Tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Ejemplo. Utilizar coordenadas polares para describir cada una de las regiones mostradas en la figura siguiente.



Solución a). La región R es un cuarto del círculo de radio 2. Esta región se describe en coordenadas polares como:

$$R = \left\{(r, \theta): 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

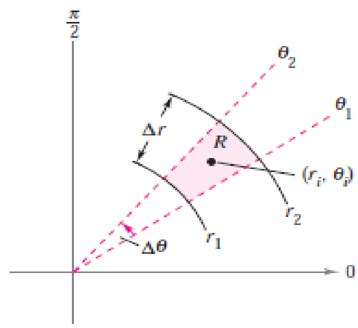
b) La región R consta de todos los puntos comprendidos entre los círculos concéntricos de radios 1 y 3. Esta región se describe en coordenadas polares como:

$$R = \{(r, \theta): 1 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\,\pi\}$$

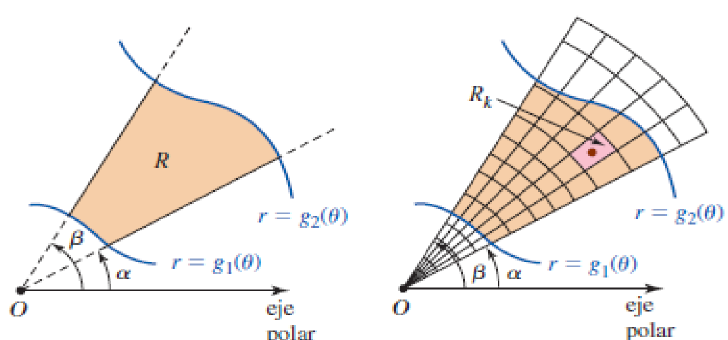
Las regiones de este ejemplo son casos especiales de **sectores polares**

$$\boldsymbol{R = \{(r, \theta): r_1 \leq r \leq r_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}}\ \boldsymbol{Sector\ Polar}$$

Como el mostrado en la figura siguiente.



Para definir una integral doble de una función continua $z = f(x, y)$ en coordenadas polares, se considera una región R limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones polares $r = g_1(\theta)\ y\ r = g_2(\theta)$ y los rayos o rectas $\theta = \alpha, \theta = \beta$, y *f* es una función continua de *r* y θ que es continua sobre R. Con el fin de definir la integral doble de *f* sobre R, se emplean rayos y círculos concéntricos para dividir la región en una retícula de "rectángulos polares" o subregiones R_k



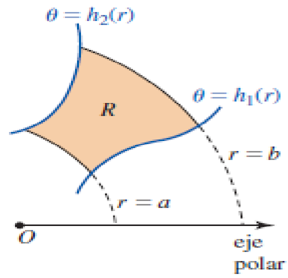
a) Región *R* *b)* Subregión R_k

La integral doble se evalúa entonces por medio de la integral iterada

$$\int_R \int f(x, y)\, dA = \int_R \int f(r, \theta)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta)\, \boldsymbol{r}\, dr d\theta \quad (1)$$

Por otro lado, si la región R es como lo indica la figura siguiente, la integral doble de *f* sobre R es entonces:

$$\int_R \int f(x,y)\, dA = \int_R \int f(r,\theta)\, dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r,\theta)\mathbf{r}\, d\theta dr \quad (2)$$



1.4.1 CAMBIO DE VARIABLES: COORDENADAS RECTANGULARES A POLARES.

En algunos casos una integral doble $\int_R \int f(x,y)\, dA$ que es difícil o incluso imposible de evaluar utilizando coordenadas rectangulares puede evaluarse fácilmente cuando se recurre a un cambio de variables. Si suponemos que *f* es continua sobre la región *R*, y si *R* puede describirse en coordenadas polares como $\mathbf{0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)},\ \boldsymbol{\alpha \le \theta \le \beta, 0 < \beta - \alpha \le 2\pi}$ entonces:

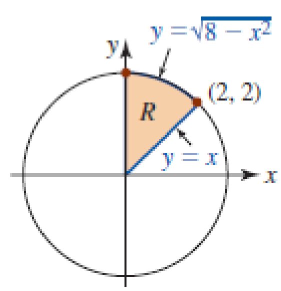
$$\int_R \int f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(rCos(\theta), rSen(\theta))\mathbf{r}\, drd\theta \quad (3)$$

La ecuación (3) es particularmente útil cuando *f* contiene la expresión $x^2 + y^2$, puesto que, en coordenadas polares, no podemos escribir:

$$x^2 + y^2 = r^2 \ \ y \ \ \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Ejemplo. Usar coordenadas polares para evaluar $\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \left(\frac{1}{5+x^2+y^2}\right) dydx$

Solución. A partir de los limites de integracion tenemos $x \le y \le \sqrt{8 - x^2}$; $0 \le x \le 2$, se dibuja la región de integración. Como $x^2 + y^2 = r^2$, la descripcion polar de la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ es $r = \sqrt{8}$.



En consecuencia, en coordenadas polares, la región R es dada por $0 \leq r \leq \sqrt{8}$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

De acuerdo con la función $\frac{1}{5+x^2+y^2} = \frac{1}{5+r^2}$, entonces la integral original se convierte en:

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \left(\frac{1}{5+x^2+y^2}\right) dydx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{5+r^2}\right) \boldsymbol{r} drd\theta$$

Haciendo cambio de variable $u = 5 + r^2, entonces\ du = 2rdr;\ \frac{du}{2} = rdr$:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{5+r^2}\right) rdrd\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{2}\ d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} Ln(u)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{8}} d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} Ln(5+r^2)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{8}} d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\left(Ln(5+\left(\sqrt{8}\right)^2\right) - \frac{1}{2}(Ln(5+(0)^2)\right) d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}(Ln(13) - \frac{1}{2}(Ln(5)\right) d\theta$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} Ln\left(\frac{13}{5}\right)\right) d\theta = \left(\frac{1}{2} Ln\left(\frac{13}{5}\right)\right)\left(\frac{\theta}{1}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} = \left(\frac{1}{2} Ln\left(\frac{13}{5}\right)\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} Ln\left(\frac{13}{5}\right)\right)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} Ln\left(\frac{13}{5}\right)$$

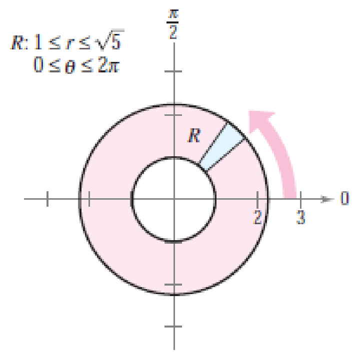
$$\therefore \int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \left(\frac{1}{5+x^2+y^2}\right) dydx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{5+r^2}\right) rdrd\theta = \frac{\pi}{8} Ln\left(\frac{13}{5}\right)$$

Ejemplo. Sea R la region anular comprendida entre los dos circulos:

$$x^2 + y^2 = 1\ y\ x^2 + y^2 = 5$$

Evaluar la integral $\int_R \int (x^2 + y) dA$

Solución. Los limites en este caso para "r" son: $1 \leq r \leq \sqrt{5}$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ como se muestra en la figura.



Ademas $x^2 = (rCos(\theta))^2 = r^2Cos^2(\theta); y = rSen(\theta)$, y una sustitucion importante $Cos^2(x) = \frac{1+Cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{Cos(2x)}{2}$ por lo tanto se tiene:

$$\int_R \int (x^2 + y)dA = \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^2Cos^2(\theta) + rSen(\theta))\, \boldsymbol{r} drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}} (r^3Cos^2(\theta) + r^2Sen(\theta))\, drd\theta = \int_0^{2\pi} \left(Cos^2(\theta)\frac{r^4}{4} + Sen(\theta)\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{5}} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}Cos^2(\theta)\left(\sqrt{5}\right)^4 + \frac{1}{3}Sen(\theta)\left(\sqrt{5}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}Cos^2(\theta) + \frac{1}{3}Sen(\theta)\right)\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{4}Cos^2(\theta) + \frac{1}{3}Sen(\theta)\left(\sqrt{5}\right)^3 - \frac{1}{4}Cos^2(\theta) - \frac{1}{3}Sen(\theta)\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(6Cos^2(\theta) + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}Sen(\theta)\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(6\left(\frac{1+Cos(2\theta)}{2}\right) + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}Sen(\theta)\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(3 + 3Cos(2\theta) + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}Sen(\theta)\right) d\theta$$

$$\vdots$$

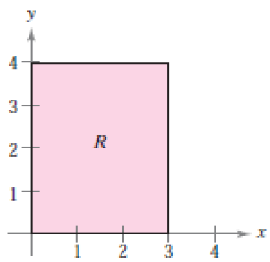
$$\vdots$$

$$\therefore \int_R \int (x^2 + y)dA = 6\pi$$

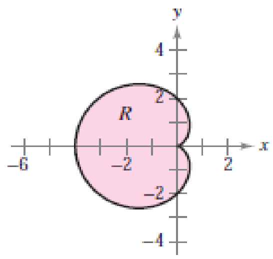
GUIA DE EJERCICIOS No.3

En los ejercicios 1 a 4 se muestra la región R para la integral $\int_R\int f(x, y)\, dA$. Decir si serían más convenientes coordenadas rectangulares o polares para evaluar la integral.

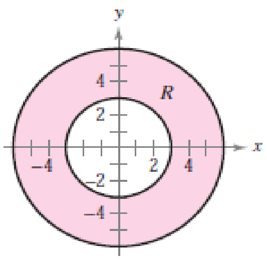
1.



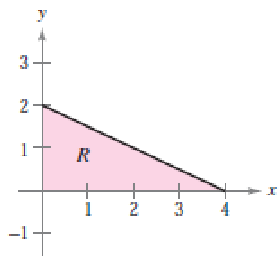
2.



3.

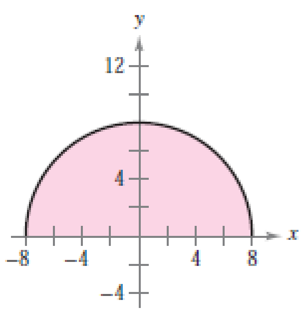


4.

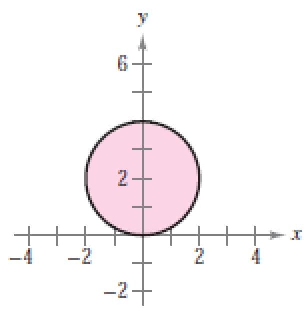


En los ejercicios 5 a 8, utilizar las coordenadas polares para describir la región mostrada.

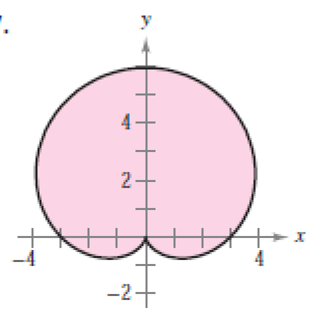
5.



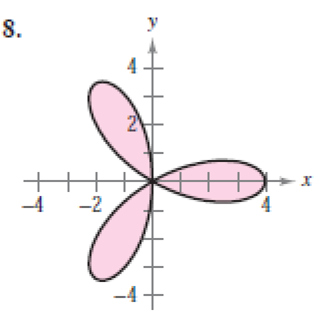
6.



7.



8.



En los ejercicios 9 a 16, evaluar la integral doble $\int_R\int f(r, \theta)\, dA$, y dibujar la región R.

9. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} r\, dr\, d\theta$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r^2\, dr\, d\theta$

11. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{6} 3r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta$

12. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{4} r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, dr\, d\theta$

13. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_2^{3} \sqrt{9-r^2}\, r\, dr\, d\theta$

14. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{3} re^{-r^2}\, dr\, d\theta$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1+\operatorname{sen}\theta} \theta r\, dr\, d\theta$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{1-\cos\theta} (\operatorname{sen}\theta) r\, dr\, d\theta$

En los problemas 25-32, evalúe la integral iterada que se indica cambiando a coordenadas polares.

25. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$

26. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2}\int_y^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$

27. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$

28. $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi-x^2}} \operatorname{sen}(x^2+y^2)\, dy\, dx$

29. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dy\, dx + \int_1^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dy\, dx$

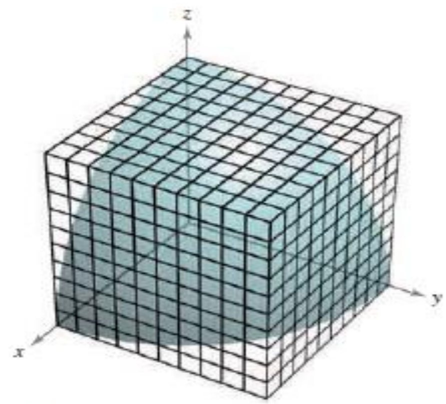
30. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} (1-x^2-y^2)\, dx\, dy$

31. $\displaystyle\int_{-5}^{5}\int_0^{\sqrt{25-x^2}} (4x+3y)\, dy\, dx$

32. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$

1.5 DEFINICION Y EVALUACION DE INTEGRALES TRIPLES

El procedimiento utilizado para definir una **integral triple** es análogo al utilizarlo para integrales dobles. Considerar una función *f* en tres variables que es continua sobre una región sólida acotada *Q*. Entonces, se encierra *Q* en una red de cubos y se forma una **partición interna** que consta de todos los cubos que quedan completamente dentro de *Q*, como se muestra en la figura:



Región sólida Q

1.5.1 DEFINICIÓN DE INTEGRAL TRIPLE

Si *f* es continua sobre una región solida acotada Q, entonces la integral triple de *f* sobre Q se define como:

$$\iint_Q \int f(x, y, z)dV = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i \; (1)$$

siempre que este límite exista. El volumen de la región solida Q está dada por:

$$Volumen\ de\ Q = \iiint_Q dV$$

Algunas de las propiedades de las integrales dobles pueden replantearse en términos de integrales triples.

$$1)\ \iiint_Q cf(x, y, z)dV = c \iiint_Q f(x, y, z)dV$$

$$2)\ \iiint_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)]dV = \iiint_Q f(x, y, z)\, dV \pm \iiint_Q g(x, y, z)\, dV$$

$$3)\ \iiint\limits_{Q} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{Q_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{Q_2} f(x,y,z)\, dV$$

En las propiedades dadas arriba, Q es la unión de dos subregiones sólidas que no se sobreponen $Q_1\ y\ Q_2$. Si la región sólida es simple, la integral triple puede evaluarse con una integral iterada utilizando alguno de los seis posibles órdenes de integración:

$dx\,dy\,dz$, $dy\,dx\,dz$, $dz\,dx\,dy$, $dx\,dz\,dy$, $dy\,dz\,dx$, $dz\,dy\,dx$.

Ejemplo. Encontrar $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} xdzdydx$

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} x\, dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x \left[\int_0^{x-y} x\, dz \right] dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (xz)\Big|_0^{x-y} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x [x(x-y) - 0]\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x (x^2 - xy)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\int_0^x (x^2 - xy)\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2y - \frac{xy^2}{2} \right)\Big|_0^x dx = \int_0^1 \left[\left(x^3 - \frac{x^3}{2} \right) - 0 \right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{2}\, dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

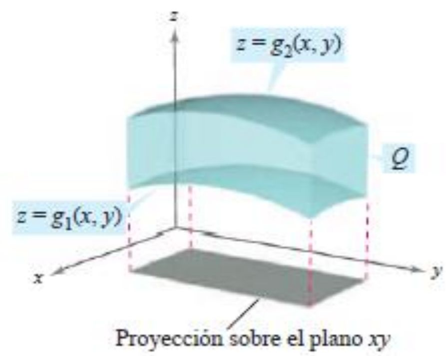
$$\therefore \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x-y} xdzdydx = 1/8$$

Evaluación mediante integrales iteradas. Si la región Q está acotada por arriba de la gráfica de $z = g_2(x,y)$ y acotada por abajo por la gráfica de $z = g_1(x,y)$, entonces es posible demostrar que la integral triple (1) puede expresarse como una integral doble de la integral parcial:

$$\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz;$$

Esto es:

$$\iint\limits_{Q} \int f(x,y,z)dV = \iint\limits_{R} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dA\ (\mathbf{2})$$



Donde R es la proyección ortogonal de Q sobre el plano xy. En particular, si R es una región tipo I definida por:

$$R: a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x),$$

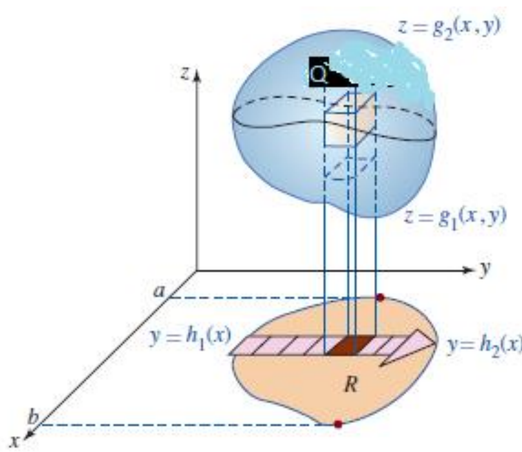
Entonces, como se ilustra en la siguiente figura, la integral triple sobre Q puede escribirse como una integral iterada:

$$\iint_Q \int f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx \quad (\mathbf{3})$$

Para evaluar la integral iterada en (3) empezamos evaluando la integral definida parcial:

$$\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

En la cual x e y se mantienen constantes.



Por otro lado, si R es una region tipo II:

$$R: c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y),$$

Entonces (2) se convierte en

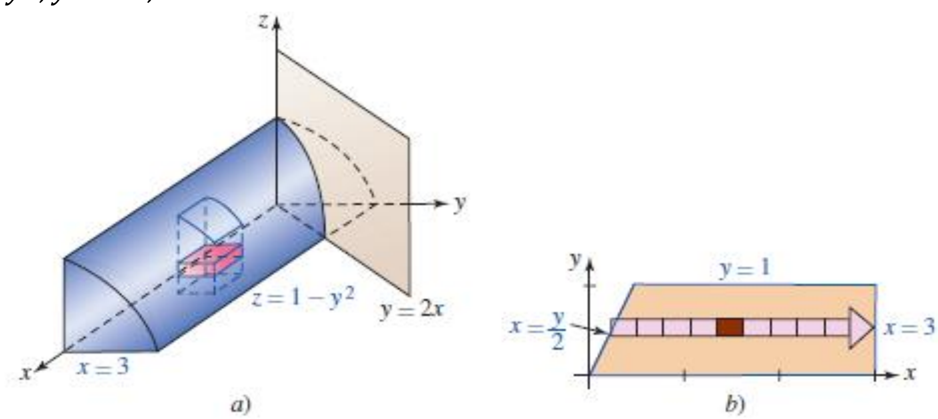
$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dzdxdy \ (4)$$

En una integral doble hay sólo dos posibles órdenes de integración: $dydx$ y $dxdy$. Las integrales triples en (3) y (4) ilustran dos de ***seis*** posibles órdenes de integración:

$$dz\,dy\,dx \quad dz\,dx\,dy \quad dy\,dx\,dz$$
$$dx\,dy\,dz \quad dx\,dz\,dy \quad dy\,dz\,dx.$$

1.6 CÁLCULO DE VOLÚMENES

Ejemplo. Encuentre el volumen del sólido en el primer octante acotado por las gráficas de: $z = 1 - y^2, y = 2x, x = 3$



Solución. Como se indica en la figura a), la primera integración con respecto a "z" será de 0 a $1 - y^2$ Además, de la figura b) vemos que la proyección del sólido Q sobre el plano *xy* es una región de tipo II. Por consiguiente, se integra, con respecto a "x", de $y/\,2$ a 3. La última integración es con respecto a "y" de 0 a 1. De tal manera,

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^1 \int_{y/2}^3 \int_0^{1-y^2} dzdxdy$$

$$\int_0^1 \int_{y/2}^3 \int_0^{1-y^2} dzdxdy = \int_0^1 \int_{y/2}^3 (z)|_0^{1-y^2}\, dxdy = \int_0^1 \int_{y/2}^3 (1-y^2)dxdy$$

$$= \int_0^1 (x - xy^2)|_{y/2}^3\, dy = \int_0^1 \left((3-3y^2) - \left(\frac{y}{2} - \frac{y}{2}y^2\right)\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left((3-3y^2) - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3\right) dy = \left(3y - y^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}y^4\right)\right)\Big|_0^1$$

$$= \left(3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4\right)\Big|_0^1 = 3(1) - 1^3 - \frac{1}{4}(1)^2 + \frac{1}{8}(1)^4 - 0 = \frac{15}{8}$$

Por lo tanto,

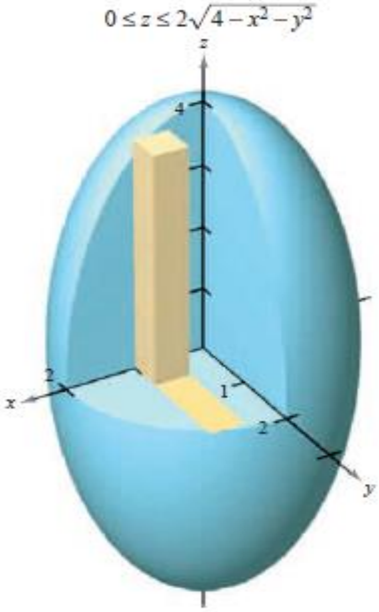
$$V = \iint_Q \int dV = \int_0^1 \int_{y/2}^3 \int_0^{1-y^2} dzdxdy = \frac{15}{8}\ U^3$$

Ejemplo. Hallar el volumen del elipsoide dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$
Solución. Como en la ecuación *x*, y y *z* juegan papeles similares, el orden de integración es probablemente irrelevante, y se puede elegir arbitrariamente $dzdydx$. Además, se pueden simplificar los cálculos considerando sólo la porción del elipsoide que se encuentra en el primer octante, como se muestra en la figura. Para el orden se determinan primero los límites o cotas de *z*.

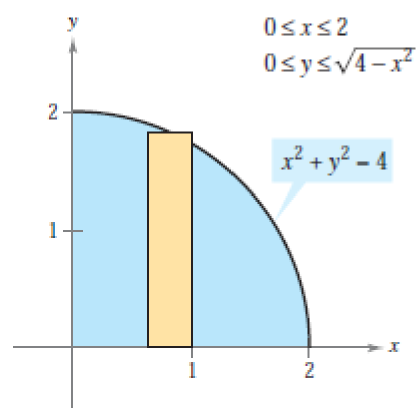
$$0 \le z \le \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2} = \sqrt{4(4 - x^2 - y^2)} = 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Los límites de x e y se ven en la otra figura, $0 \le x \le 2; 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$, por lo que el volumen del elipsoide es 8 veces la integral ya que solo estamos tomando la porción del primer octante y como son 8 los octantes.

$$V = \iint_Q \int dV = 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$$



Elipsoide: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$



$$V = \iint_Q \int dV = 8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$$

Al resolver la integral anterior podemos decir que el volumen del elipsoide es $V = \frac{64\pi}{3}\ U^3$

Ejemplo. Dar **una integral triple** para el volumen de cada una de las regiones sólidas.

a) La región en el primer octante acotada superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$, y comprendida entre los planos verticales $x + y = 1;\ x + y = 3$

b) El hemisferio superior dado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

c) La región acotada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

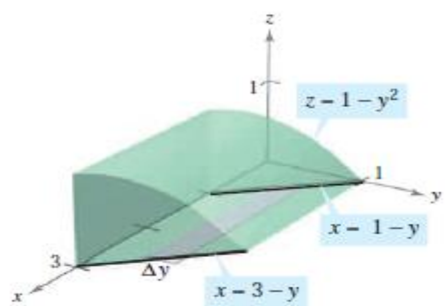
Solución: a. En la figura se observa que el sólido está acotado inferiormente por el plano xy $(z = 0)$ y superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$. Por tanto:

$$0 \le z \le 1 - y^2$$

Proyectando la región sobre el plano xy se obtiene un paralelogramo. Como dos de los lados son paralelos al eje "x", se tienen las cotas siguientes:

$$1 - y \le x \le 3 - y;\ \ 0 \le y \le 1$$

Por tanto, el volumen de la región está dado por:



$$V = \iint_Q \int dV = \int_0^1 \int_{1-y}^{3-y} \int_0^{1-y^2} dzdxdy$$

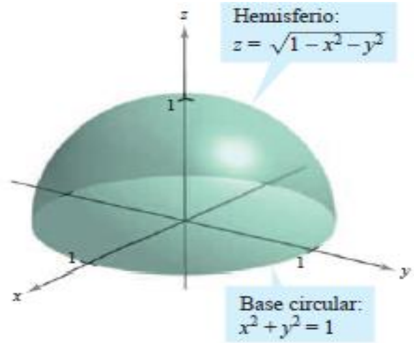
Solución: b. Para el hemisferio superior dado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, se tiene que

$$0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

En la figura siguiente se puede observar que la proyección del hemisferio sobre el plano xy es el circulo dado por $x^2 + y^2 = 1$,(haciendo $z = 0$) se puede usar el orden $dxdy$ o el orden $dydx$.

Eligiendo el primero se obtiene:

$$\boldsymbol{-\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{1 - y^2}\ ;-1 \le y \le 1}$$



El volumen de la región está dado por:

$$\boldsymbol{V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdxdy}$$

Solución: c. Para la región acotada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, se tiene:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}}$$

Haciendo $z = z$ para ver donde se corta la esfera y el paraboloide

$$x^2 + y^2 = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 6 - x^2 - y^2$$

$$(x^2 + y^2)^2 + (x^2 + y^2) - 6 = 0$$

$$\big((x^2 + y^2) + 3\big)\big((x^2 + y^2) - 2\big) = 0$$

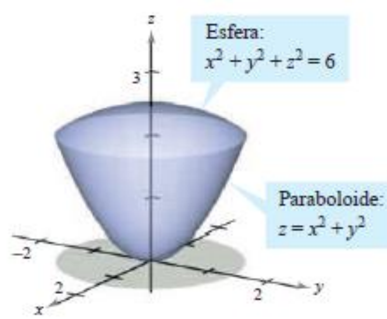
$$\big((x^2 + y^2) + 3\big) = 0 \; o \; \big((x^2 + y^2) - 2\big) = 0$$

El primer factor no tiene sentido ya que $\boldsymbol{x^2 + y^2 = -3}$ **o** $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2,}$ es decir la esfera y el paraboloide se cortan en $\boldsymbol{z = 2.}$

En la figura puede verse que la proyección de la región solida sobre el plano xy es el circulo de centro (0,0) y radio $r = \sqrt{2}$ cuya ecuación es $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2.}$

Utilizando el orden $dydx$ se obtiene:

$$-\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}; \; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$



lo cual implica que el volumen de la región está dado por:

$$\boldsymbol{V = \iint\limits_{Q}\int dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dzdydx}$$

GUIA DE EJERCICIOS No.4

En los problemas 1-8, evalúe la integral iterada que se indica.

1. $\int_2^4\int_{-2}^2\int_{-1}^1 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$ **2.** $\int_1^3\int_1^x\int_2^{xy} 24xy\,dz\,dy\,dx$

3. $\int_0^6\int_0^{6-x}\int_0^{6-x-z} dy\,dz\,dx$ **4.** $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\sqrt{y}} 4x^2z^3\,dz\,dy\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2}\int_0^{y^2}\int_0^{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)dz\,dx\,dy$ **6.** $\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{y}}^{2}\int_0^{e^{x^2}} x\,dz\,dx\,dy$

7. $\int_0^1\int_0^1\int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\,dz\,dx\,dy$

8. $\int_0^4\int_0^{1/2}\int_0^{x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dy\,dx\,dz$

$\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{2}\int_{1}^{2} 6xy^2z^3\;dx\;dy\;dz.$ $\int_0^1\int_0^x\int_0^{x-y} x\;dz\;dy\;dx.$

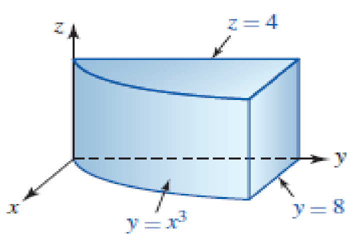
$\int_0^1\int_{x^2}^{x}\int_0^{xy} dz\;dy\;dx.$ $\int_0^2\int_{y^2}^{3y}\int_0^x dz\,dx\,dy.$

9. Evalúe $\iiint_D z\,dV$, donde D es la región en el primer octante acotada por las gráficas de $y=x$, $y=x-2$, $y=1$, $y=3$, $z=0$ y $z=5$.

10. Evalúe $\iiint_D (x^2+y^2)\,dV$, donde D es la región acotada por las gráficas de $y=x^2$, $z=4-y$ y $z=0$.

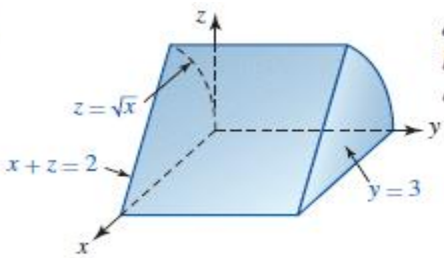
En los problemas 13 y 14, se considera el sólido dado en la figura. Plantee, pero no evalúe, las integrales que producen el volumen V del solido utilizando los órdenes de integración indicados.

13.



a) $dz\,dy\,dx$
b) $dx\,dz\,dy$
c) $dy\,dx\,dz$

14.



a) $dx\,dz\,dy$
b) $dy\,dx\,dz$
c) $dz\,dx\,dy$ [*Sugerencia*: Esto requerirá dos integrales.]

En los problemas 21-24, encuentre el volumen V del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

21. $x = y^2, 4 - x = y^2, z = 0, z = 3$

22. $x^2 + y^2 = 4, z = x + y$, los planos de coordenadas, el primer octante.

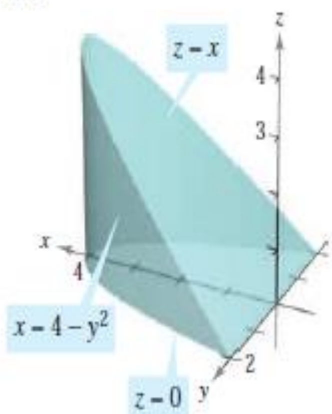
En los ejercicios 13 a 18, dar una integral triple para el volumen del sólido.

13. El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano $z = 5 - x - y$

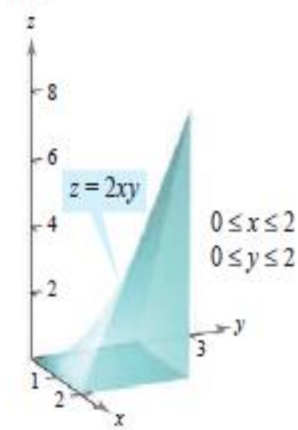
14. El sólido acotado por $z = 9 - x^2, z = 0, y = 0$ y $y = 2x$

Volumen **En los ejercicios 19 a 22, utilizar una integral triple para hallar el volumen del sólido mostrado en la figura.**

19.



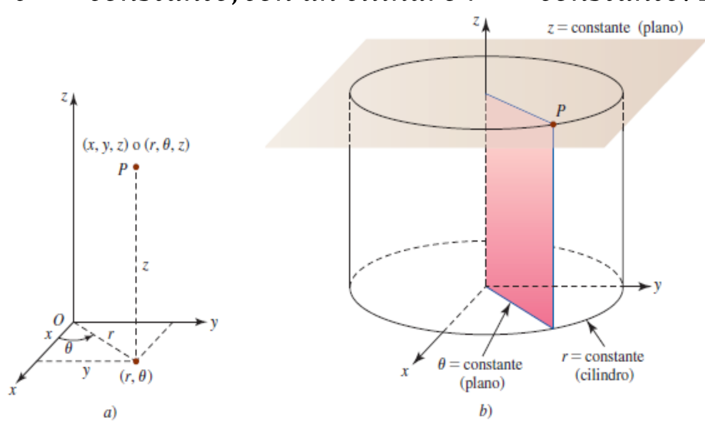
20.



1.7 INTEGRALES TRIPLES EN OTROS SISTEMAS DE COORDENADAS

A partir de la geometría de una región en el espacio tridimensional, la evaluación de una integral triple sobre la región puede a menudo facilitarse al utilizar un nuevo sistema de coordenadas.

<u>1.7.1 Coordenadas cilíndricas.</u> El sistema de coordenadas cilíndricas combina la descripción polar de un punto en el plano con la descripción rectangular de la componente z de un punto en el espacio. Como se ve en la figura a), las coordenadas cilíndricas de un punto P se denotan mediante la triada ordenada (r, θ, z). La palabra *cilíndricas* surge del hecho de que un punto P en el espacio está determinado por la intersección de los planos $z = constante,\ \theta = constante, con\ un\ cilindro\ r = constante$. Figura b).



Coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares De la figura a) vemos que las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto se obtienen de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) mediante las ecuaciones:

$$\boldsymbol{x = rCos\theta}, \qquad \boldsymbol{y = rSen\theta}, \qquad \boldsymbol{z = z}$$

En este sistema de coordenadas, la región sólida más simple es un bloque cilíndrico determinado por:

$$r_1 \leq r \leq r_2;\ \ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2;\ \ z_1 \leq z \leq z_2$$

Para expresar una integral triple por medio de coordenadas cilíndricas, se supone que Q es una región solida cuya proyección R sobre el plano xy puede describirse en coordenadas polares. Es decir:

$$Q = \{(x, y, z) : (x, y) \in R, h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

$$R = \{(r, \theta):\ \ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ \ g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}$$

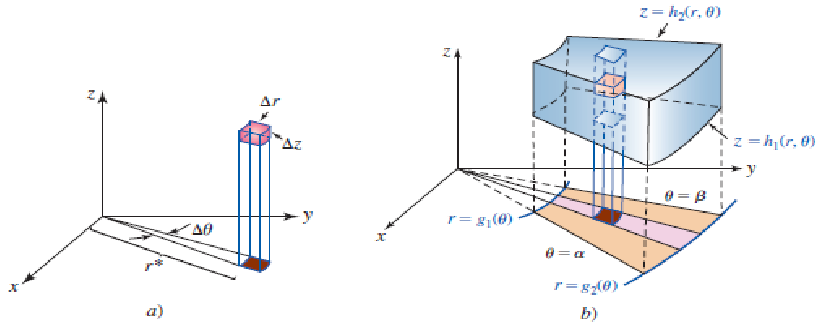
Si f es una función continua sobre el sólido Q, se puede expresar la integral triple de f sobre Q así:

$$\iint_Q \int f(x,y,z)dV = \iint_R \left[\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA$$

donde la integral doble sobre se evalúa en coordenadas polares. Es decir, es una región plana que es r-simple o θ -simple. Si R es r-simple, la forma iterada de la integral triple en forma cilíndrica es:

$$\iint_Q \int f(x,y,z)dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(rCos\theta,rSen\theta)}^{h_2(rCos\theta,rSen\theta)} f(rCos\theta, rSen\theta, z) rdzdrd\theta$$

La integral anterior se puede expresar de la siguiente manera usando la figura siguiente:



$$\iint_Q \int f(r,\theta,z)dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r,\theta,z) rdzdrd\theta$$

Éste es sólo uno de los seis posibles órdenes de integración.

1.7.2 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS.

Las integrales triples que involucran esferas o conos son a menudo más fáciles de calcular mediante la conversión a coordenadas esféricas. Anteriormente se estudiaron las ecuaciones rectangulares para convertirlas a coordenadas esféricas:

$$\boldsymbol{x = \rho Sen\emptyset Cos\theta}, \qquad \boldsymbol{y = \rho Sen\emptyset Sen\theta}, \qquad \boldsymbol{z = \rho Cos\emptyset}$$

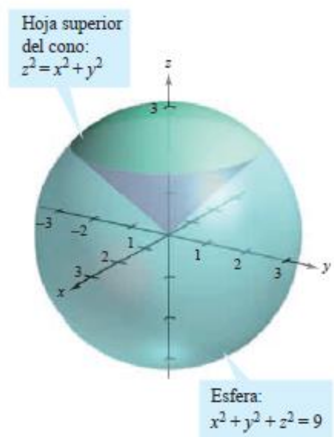
En este sistema de coordenadas, la región más simple es un bloque esférico determinado por: $\{(\rho,\theta,\emptyset): \rho_1 \le \rho \le \rho_2,\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\ \emptyset_1 \le \emptyset \le \emptyset_2\}$
donde $\rho_1 \ge 0,\ \theta_2 - \theta_1 \le 2\pi\ \ y\ \ 0 \le \emptyset_1 \le \emptyset_2 \le \pi$

Si $(\rho,\theta,\emptyset)$ es un punto en el interior de uno de estos bloques, entonces el volumen del bloque puede ser aproximado utilizando el proceso habitual que comprende una partición interior, una suma y un límite, se desarrolla la versión siguiente de una integral triple en coordenadas esféricas para una función continua f en la región sólida Q.

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\emptyset_1}^{\emptyset_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho Sen\emptyset Cos\theta, \rho Sen\emptyset Sen\theta\ , \rho Cos\emptyset)\ \boldsymbol{\rho^2 Sen}\emptyset d\rho d\emptyset d\theta$$

Esta fórmula puede modificarse para emplear diferentes órdenes de integración y se puede generalizar a regiones con límites o cotas variables.
Como las integrales triples en coordenadas cilíndricas, las integrales triples en coordenadas esféricas se evalúan empleando integrales iteradas.
Como sucede con las coordenadas cilíndricas, se puede visualizar un orden determinado de integración contemplando la integral iterada en términos de tres movimientos de barrido, cada uno de los cuales agrega una dimensión al sólido.

1.8 CÁLCULO DE VOLÚMENES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS
Ejemplo. Hallar el volumen de la región solida Q limitada o acotada inferiormente por la hoja superior del cono $\boldsymbol{z^2 = x^2 + y^2}$ y superiormente por la esfera $\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 9}$



Solución. En coordenadas esféricas, la ecuación de la esfera es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9, entonces\ \rho^2 = 9 \rightarrow \boldsymbol{\rho = 3}$$

La intersección de la esfera y el cono se encuentra al sustituir la ecuación del cono en la esfera así: como $\boldsymbol{z^2 = x^2 + y^2}$ se puede sustituir $\boldsymbol{z^2}$ en la ecuación de la esfera

$\boldsymbol{(x^2 + y^2) + z^2 = 9}$, entonces $\boldsymbol{z^2 + z^2 = 9}$

$$\boldsymbol{2z^2 = 9}, \text{es decir } \boldsymbol{z^2 = 9/2}$$

$$\boldsymbol{z = \frac{3}{\sqrt{2}}}, \text{pero } \boldsymbol{z = \rho Cos\emptyset}$$

$$\boldsymbol{\rho Cos\emptyset = \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

$$\boldsymbol{3Cos\emptyset = \frac{3}{\sqrt{2}}, entonces\ Cos\emptyset = \frac{3}{\sqrt{2}}.\frac{1}{3}}$$

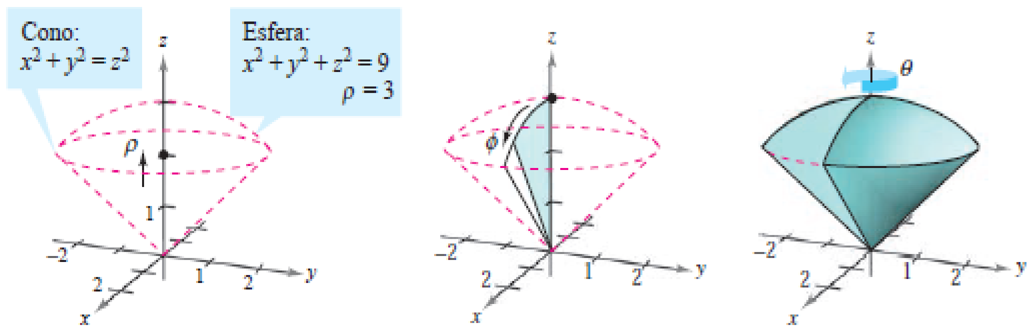
$$\boldsymbol{Cos\emptyset} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \rightarrow \emptyset = \frac{\pi}{4}$$

Usando el orden de integración $\boldsymbol{d\rho d\emptyset d\theta}$**,** donde**:**

$$0 \leq \rho \leq 3, \qquad 0 \leq \emptyset \leq \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Por lo tanto, el volumen se calcula resolviendo la integral siguiente:

$$V = \iint_Q \int dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{3} \boldsymbol{\rho^2\, Sen\emptyset d\rho d\emptyset d\theta}$$



ρ varía desde 0 hasta 3 mientras ϕ y θ se mantienen constantes

ϕ varía desde 0 hasta $\pi/4$ mientras θ se mantiene constante

θ varía desde 0 hasta 2π

GUIA DE EJERCICIOS No.5

En los ejercicios 1 a 6, evaluar la integral iterada.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{5}\int_0^{\pi/2}\int_0^{3} r\cos\theta\, dr\, d\theta\, dz$ **2.** $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{6}\int_0^{6-r} rz\, dz\, dr\, d\theta$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos^2\theta}\int_0^{4-r^2} r\,\text{sen}\,\theta\, dx\, dr\, d\theta$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\int_0^{2} e^{-\rho^3}\rho^2\, d\rho\, d\theta\, d\phi$

5. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta} \rho^2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$