MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En el procedimiento aplicado para resolver problemas de máximos y mínimos con restricciones, nos vimos en la necesidad de tener que despejar una de las variables, algunas veces sucede que no podemos resolver la ecuación planteada en la condición para alguna de las variables, de tal manera que ninguna de ellas pueda eliminarse, por ejemplo, si la condición fuera: $x^5 - 5x^3y^3 + z^3 + z^5 + 2y^5 + 16 = 0$ (no se puede resolver para x, y o z en términos de las otras variables)

Estudiaremos un método alternativo, conocido como ***Multiplicadores de Lagrange***.

Supongamos que estamos interesados en encontrar los valores extremos de la función $f(x, y, z)$ sujeta a la condición o restricción $g(x, y, z) = 0$, entonces construimos una función auxiliar $F(x, y, z, \lambda)$ definida de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)}$$

La nueva variable λ "lambda" se denomina multiplicador de Lagrange.

Para calcular los valores máximos y mínimos de (x, y, z), sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ (suponiendo que estos valores extremos existen):

a) Determinar todos los valores de x, y, z y λ, tales que

$$\boldsymbol{F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0}$$

b) Evaluar f en todos los puntos (x, y, z) que surjan del paso anterior. El más grande de esos valores es el máximo valor de f, el más pequeño es el valor mínimo de f.

De acuerdo con este método, si $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ es un punto crítico de $F(x, y, z, \lambda)$, entonces (x_0, y_0, z_0) es un punto crítico de $f(x, y, z)$, sujeta a la condición $g(x, y, z) = 0$, con el objeto de encontrar los puntos críticos de una función $f(x, y, z)$, podemos en lugar de ello encontrar los puntos críticos de la función auxiliar: $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$.

Ejemplo 1. Emplee el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar el máximo de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeto a $x + y = 3$

Solución. Primero formamos $g(x, y)$ de la siguiente forma donde se pueden transponer los términos de derecha hacia la izquierda o viceversa $g(x, y) = x + y - 3$. Segundo formar la ecuación auxiliar

$$\boldsymbol{F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)}$$

Así: $F(x, y, \lambda) = 9 - x^2 - y^2 - \lambda(x + y - 3) = 9 - x^2 - y^2 - \lambda x - \lambda y + 3\lambda$

Tercero derivar F con respecto a cada una de las variables

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(9 - x^2 - y^2 - \lambda x - \lambda y + 3\lambda) = -2x - \lambda$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(9 - x^2 - y^2 - \lambda x - \lambda y + 3\lambda) = -2y - \lambda$$

$$F_\lambda = \frac{\partial}{\partial\lambda}(9 - x^2 - y^2 - \lambda x - \lambda y + 3\lambda) = -x - y + 3$$

Haciendo $F_x = F_y = F_\lambda = 0$. Es decir $-2x - \lambda = 0$ $Ecuacion\ (1)$

$$-2y - \lambda = 0 \ \ Ecuacion\ (2)$$
$$-x - y + 3 = 0 \ \ Ecuacion\ (3)$$

Igualar la ecuación (1) y la ecuación (2) se obtiene $-2x = -2y$ o $x = y$. Al sustituir este resultado en la ecuación (3) se tiene que $-2y + 3 = 0$ o $y = \frac{3}{2}$. Entonces $x = y = 3/2$.
El punto crítico de $f(x, y)$ es $(3/2, 3/2)$

Por lo tanto, el máximo con restricciones es $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$

Ejemplo 2. Determine los extremos de $f(x, y) = y^2 - 4x$ sujeto a $x^2 + y^2 = 9$
Solución. Si definimos $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9$ entonces formar la ecuación auxiliar

$$\boldsymbol{F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)}$$

Así: $F(x, y, \lambda) = y^2 - 4x - \lambda(x^2 + y^2 - 9) = y^2 - 4x - \lambda x^2 - \lambda y^2 + 9\lambda$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 - 4x - \lambda x^2 - \lambda y^2 + 9\lambda) = -4 - 2x\lambda$$
$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 4x - \lambda x^2 - \lambda y^2 + 9\lambda) = 2y - 2y\lambda$$
$$F_\lambda = \frac{\partial}{\partial\lambda}(y^2 - 4x - \lambda x^2 - \lambda y^2 + 9\lambda) = -x^2 - y^2 + 9$$

Haciendo $F_x = F_y = F_\lambda = 0$. Es decir, $-4 - 2x\lambda = 0$ $Ecuacion\ (1)$

$$2y - 2y\lambda = 0 \ \ Ecuacion\ (2)$$
$$-x^2 - y^2 + 9 = 0 \ \ Ecuacion\ (3)$$

Factorizar la ecuación (2) tenemos $y(1 - \lambda) = 0$, vemos que $y = 0$ o $\lambda = 1$

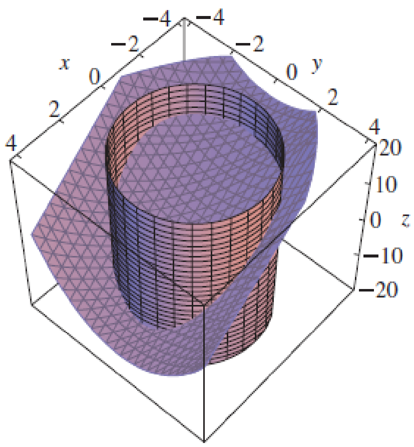
Si $\boldsymbol{y = 0}$ sustituyendo este valor en la ecuación (3) produce $x^2 = 9$ o $x = \pm 3$
Por consiguiente $(3,0), (-3,0)$ son soluciones del sistema y la función *f* podría tener un extremo.
Si $\boldsymbol{\lambda = 1}$, sustituyendo en la ecuación (1), resulta $x = -2$, al sustituir este valor en la ecuación (3) se obtiene $y^2 = 5$ o $y = \pm\sqrt{5}$. Entonces $\left(-2, \sqrt{5}\right), \left(-2, -\sqrt{5}\right)$ son dos soluciones más del sistema.
Los puntos críticos son $(3,0), (-3,0), \left(-2, \sqrt{5}\right), \left(-2, -\sqrt{5}\right)$
Evaluando cada punto crítico en la función $f(x, y) = y^2 - 4x$

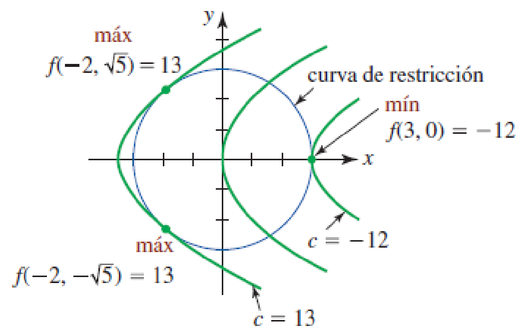
$$f(3,0) = 0^2 - 4(3) = -12; \qquad f(-3,0) = 0^2 - 4(-3) = 12$$

$$f\left(-2, \sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 4(-2) = 13; \ f\left(-2, -\sqrt{5}\right) = \left(-\sqrt{5}\right)^2 - 4(-2) = 13$$

Conclusión: f tiene un mínimo con restricciones de -12 en (3,0) y un máximo con restricciones de 13 en $(-2, \sqrt{5})$ $y\ en$ $(-2, -\sqrt{5})$

La figura siguiente muestra la gráfica de $f(x, y) = y^2 - 4x$ intersecando el cilindro definido por la ecuación de restricción $x^2 + y^2 = 9$. Los cuatro puntos que encontramos al resolver $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ yacen en el plano xy sobre el círculo de radio 3; los tres extremos con restricciones corresponden a los puntos $(3, 0, -12)$, $(-2, \sqrt{5}, 13)$ $(-2, -\sqrt{5}, 13)$ en el espacio tridimensional sobre la curva de intersección de la superficie del cilindro circular. Alternativamente la fig. b) muestra tres curvas de nivel $y^2 - 4x = c$ Dos de las curvas de nivel son tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 9$





Intersección del cilindro y la superficie en *a*); curvas de nivel de *f* y ecuación de restricción en *b*)

Al aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, en realidad no estamos interesados en determinar los valores de λ que satisfacen el sistema. ¿Se puede notar en el ejemplo 1 que no nos molestamos por encontrar λ? En el ejemplo 2, empleamos el valor $\lambda = 1$ para que nos ayudará a encontrar $x = -2$, pero después lo ignoramos.

GUIA DE EJERCICIOS No.9 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En los ejercicios siguientes, utilizar multiplicadores de Lagrange para hallar el extremo indicado, suponer que "x" y "y" son positivos.

1) Minimizar $f(x, y) = x^2 + y^2$; restricción $x + 2y - 5 = 0$
2) Maximizar $f(x, y) = x^2 - y^2$; restricción $2y - x^2 = 0$
3) Maximizar $f(x, y) = 2x + 2xy + y$; restricción $2x + y = 100$
4) Minimizar $f(x, y) = 3x + y + 10$; restricción $x^2y = 6$
5) Maximizar $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$; restricción $x + y - 2 = 0$
6) Minimizar $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; restricción $2x + 4y - 15 = 0$

En los problemas del 1 al 12 encuentre por el método de los multiplicadores de Lagrange, los puntos críticos de las funciones sujetas a las restricciones indicadas.

1. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 + 6;\ \ 2x - 8y = 20.$
2. $f(x, y) = -2x^2 + 5y^2 + 7;\ \ 3x - 2y = 7.$
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\ \ 2x + y - z = 9.$
4. $f(x, y, z) = x + y + z;\ \ xyz = 27.$
5. $f(x, y, z) = x^2 + xy + 2y^2 + z^2;\ \ x - 3y - 4z = 16.$
6. $f(x, y, z) = xyz^2;\ \ x - y + z = 20\ (xyz^2 \neq 0).$
7. $f(x, y, z) = xyz;\ \ x + 2y + 3z = 18\ (xyz \neq 0).$
8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2;\ \ x + y + z = 3.$

DERIVADA DIRECCIONAL

Recordando, si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces las primeras derivadas parciales $f_x\ \ y\ \ f_y$ están definidas por:

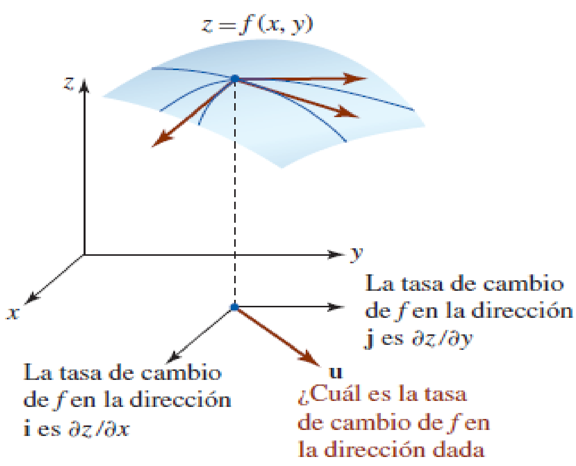
$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (1)$$

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (2)$$

Si tales límites existen.

Es de recordar que las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}\ y\ \frac{\partial z}{\partial x}$ producen la pendiente de una recta tangente a la traza, o curva de intersección, de una superficie dada por $z = f(x, y)$ y planos verticales que son, respectivamente, paralelos a los ejes de coordenadas x y y.

Estas derivadas representan las razones de cambio de $\boldsymbol{z}$ en las direcciones de x y de y respectivamente, es decir en las direcciones de los vectores unitarios $\vec{\imath} = \langle 1,0\rangle$ y $\vec{\jmath} = \langle 0,1\rangle$

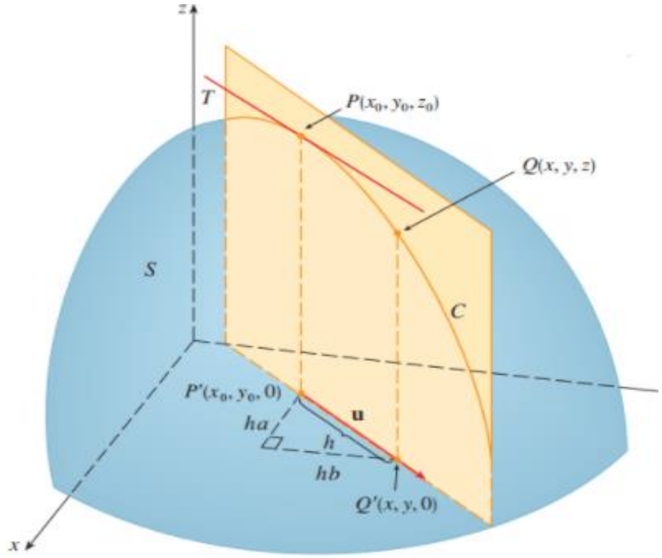


El vector **u** determina la dirección

Supongamos que se desea calcular la razón de cambio de z en el punto (x_0, y_0) en la dirección de un vector unitario $\vec{u} = \langle a, b\rangle$ arbitrario.

Para hacer esto consideraremos la superficie S con ecuación $z = f(x, y)$ y sea

$z_0 = f(x_0, y_0)$. Entonces el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ esta sobre S. El plano vertical que pasa por el punto P en la dirección de $\vec{u}$ cruza a S en la curva C (ver la figura). La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la tasa de cambio de z en la dirección de $\vec{u}$.



Si $Q(x, y, z)$ es otro punto sobre C y P' y Q' son las proyecciones de P y Q sobre el plano xy, entonces el vector $P'Q'$ es paralelo a **u** y por consiguiente:

$P'Q' = hu = (ha, hb)$ para algún escalar h.

Así: $ha = x - x_0 \rightarrow x = x_0 + ha;:$ $hb = y - y_0 \rightarrow y = y_0 + hb$

Haciendo el cociente incremental $\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0+ha, y_0+hb) - f(x_0, y_0)}{h}$

Si tomamos el límite cuando h tiende a 0 se obtiene la tasa de cambio de z en la dirección de $\boldsymbol{u}$ la cual llamamos derivada direccional de *f* en la dirección de $\boldsymbol{u}$.

Definición: La derivada direccional de *f* en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ es:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si este límite existe.

Comparando con las ecuaciones señaladas anteriormente. Vemos que si $\vec{u} = \vec{\imath} = \langle 1,0 \rangle$, entonces:

$$D_{\vec{\imath}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$$

Si $\vec{u} = \vec{\jmath} = \langle 0,1 \rangle$, entonces

$$D_{\vec{\jmath}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = f_y(x_0, y_0)$$

En otras palabras, las derivadas parciales de *f* con respecto a "x" y a "y" son solo casos especiales de la derivada direccional.

Para propósitos de cálculo, por lo general se usa la fórmula dada en el siguiente teorema:

Teorema 1. Si es una función diferenciable de *x* y de *y*, entonces *f* tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ (el vector tiene norma igual a 1) viene dado por: $\boldsymbol{D_{\vec{u}} f(x, y) = f_x(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{a} + f_y(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{b}}$

Ejemplo 1. Hallar la derivada direccional de $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}\mathrm{y}^2$ en (1,2) en la dirección de $\vec{u} = \langle \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \rangle$

Solución. Como el vector ***u*** es unitario entonces sacar las derivadas parciales

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\left(\left(Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2\right) + \left(\left(Sen\ \left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2\right)} = 1$$

$$f_x(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(4 - x^2 - \frac{1}{4}\mathrm{y}^2\right) = -2\mathrm{x}$$

$$f_y(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(4 - x^2 - \frac{1}{4}\mathrm{y}^2\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{y}$$

Sustituyendo estos valores en la derivada direccional $\boldsymbol{D_{\vec{u}} f(x, y) = f_x(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{a} + f_y(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{b}}$

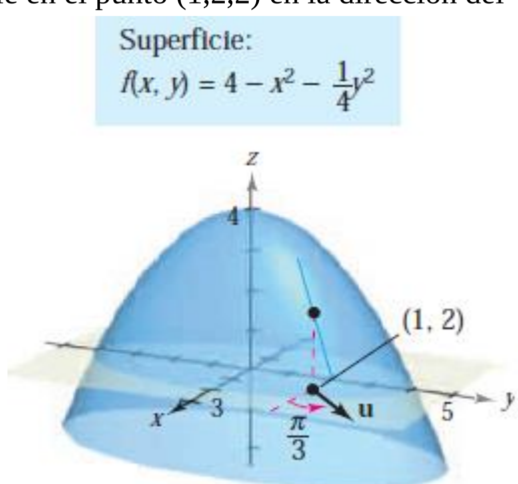
$$D_{\vec{u}} f(x, y) = (-2x)\big(\cos(\pi/3)\big) + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{y}\right)\big(\operatorname{sen}(\pi/3)\big)$$

Evaluando la derivada direccional en (1,2)

$$D_{\vec{u}} f(1{,}2) = (-2(1))\big(\cos(\pi/3)\big) + \left(-\frac{1}{2}(2)\right)\big(\operatorname{sen}(\pi/3)\big) = -2(05) - 1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$D_{\vec{u}} f(1{,}2) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La figura siguiente muestra que la derivada direccional se puede interpretar como la pendiente de la superficie en el punto (1,2,2) en la dirección del vector unitario ***u*.**



Ejemplo 2. Hallar la derivada direccional de $f(x, y) = x^2Sen(2y)$ en $(1, \pi/2)$ en la dirección de $\vec{v} = \langle 3, -4 \rangle$

Solución. Como f_x y f_y son continuas, *f* es diferenciable, y se puede aplicar el teorema 1.

Se comienza por calcular un vector unitario en la dirección de $\vec{v}$.

Como el vector ***v*** no es un vector unitario, entonces

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{\|\vec{\boldsymbol{v}}\|} = \frac{\langle \mathbf{3}, -\mathbf{4} \rangle}{\sqrt{\mathbf{3}^2 + (-\mathbf{4})^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{25}}} \langle \mathbf{3}, -\mathbf{4} \rangle = \langle \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}, \frac{-\mathbf{4}}{\mathbf{5}} \rangle$$

Teniendo el vector unitario entonces sacar las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2Sen(2y)) = 2xSen(2y)$$

$$f_y(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(x^2Sen(2y)) = 2x^2Cos(2y)$$

Sustituyendo estos valores en la derivada direccional $\boldsymbol{D_{\vec{u}}f(x, y) = f_x(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{a} + f_y(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{b}}$

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = (2xSen(2y))\frac{3}{5} + (2x^2Cos(2y))\left(\frac{-4}{5}\right)$$

Evaluando la derivada direccional en $(1, \pi/2)$

$$D_{\vec{u}}f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \left(2Sen\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\frac{3}{5} + \left(2Cos\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\left(\frac{-4}{5}\right) = (0)\left(\frac{3}{5}\right) + (-2)\left(\frac{-4}{5}\right)$$
$$= 8/5$$

Ejemplo 3. Hallar la derivada direccional de $f(x, y) = x^2\mathrm{y}^3 - 4\mathrm{y}$ en $(2, -1)$ en la dirección de $\vec{v} = \langle 2,5 \rangle$.

Solución. Como el vector ***v*** no es un vector unitario, entonces

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{\|\vec{\boldsymbol{v}}\|} = \frac{\langle \mathbf{2}, \mathbf{5} \rangle}{\sqrt{\mathbf{2}^2 + \mathbf{5}^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{29}}} \langle \mathbf{2}, \mathbf{5} \rangle = \langle \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{29}}}, \frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{29}}} \rangle$$

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3 - 4y) = 2xy^3$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 - 4y) = 3x^2y^2 - 4$$

Sustituyendo estos valores en la derivada direccional $\boldsymbol{D_{\vec{u}}f(x, y) = f_x(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{a} + f_y(\mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{b}}$

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = 2xy^3\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) + (3x^2y^2 - 4)\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

Evaluando la derivada direccional en $(2, -1)$

$$D_{\vec{u}}f(2,-1) = 2(2)(-1)^3\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) + (3(2)^2(-1)^2 - 4)\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = \frac{-8}{\sqrt{29}} + \frac{40}{\sqrt{29}}$$

$$D_{\vec{u}}f(2,-1) = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

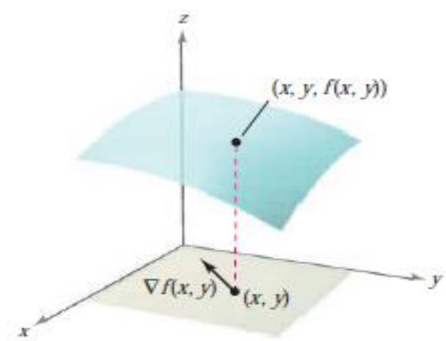
EL GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

El **gradiente** de una función de dos variables es una función vectorial de dos variables. Esta función tiene múltiples aplicaciones importantes, algunas de las cuales se describen más adelante.

Definición. Sea $z = f(x, y)$ una función de x e y talque $f_x(\mathrm{x,y})$ y $f_y(\mathrm{x,y})$ existen. Entonces el gradiente de f, denotado por $\nabla f(x, y)$ o por $\boldsymbol{grad\ f}$, es el vector:

$$\boldsymbol{\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}}$$

En la siguiente figura hay que observar que para cada (x, y), el gradiente $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano no un vector en el espacio.



El gradiente de f es un vector en el plano xy

Ejemplo. Hallar el gradiente de $f(x, y) = Sen(x) + e^{xy}$, en el punto (0,1)

Solución. Por definición el gradiente es un vector y se define así:

$$\nabla f(x,y) = \langle\frac{\partial}{\partial x}(Sen(x) + e^{xy}), \frac{\partial}{\partial y}(Sen(x) + e^{xy})\rangle = \langle Cos(x) + ye^{xy}, xe^{xy}\rangle$$

$$\boldsymbol{\nabla f(x,y) = \langle Cos(x) + ye^{xy}, xe^{xy}\rangle} = (Cos(x) + ye^{xy})\boldsymbol{\vec{\imath}} + (xe^{xy})\boldsymbol{\vec{\jmath}}$$

$$\boldsymbol{\nabla f(0,1) = \langle Cos(0) + (1)e^{0(1)}, (0)e^{0(1)}\rangle = \langle 2, 0\rangle}$$

Se puede observar que, haciendo uso del gradiente la derivada direccional se puede escribir como el producto punto entre el gradiente y el vector unitario $\vec{u} = \langle a, b\rangle$, así para cualquier vector unitario $\vec{u} = \langle a, b\rangle$ se tiene que:

$$\boldsymbol{D_{\vec{u}}f(x,y) = f_x(\mathrm{x,y})\mathrm{a} + f_y(\mathrm{x,y})\mathrm{b}}$$

$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle . \langle a,b\rangle$$

$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{u} \quad (*)$$

(*) es llamada forma alternativa de la derivada direccional

Ejemplo. Usar la forma alternativa de la derivada direccional para hallar la derivada direccional de $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ en (-3/4, 0) en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$ donde P(-3/4,0), Q(0,1).

Solución. Primero encontrar el vector $\overrightarrow{PQ} = \langle 0 - \left(-\frac{3}{4}\right), 1 - 0\rangle = \langle 3/4, 1\rangle$ como dicho vector no es unitario hay que hacerlo unitario $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{\langle 3/4,1\rangle}{\sqrt{(3/4)^2+(1)^2}} = \frac{\langle 3/4,1\rangle}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2-2y^2) = 6x; \;\; f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2y^2) = -4y$$

$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{u} = \langle 6x, -4y\rangle . \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$$

$$D_{\vec{u}}f(-3/4, 0) = \langle 6(-\frac{3}{4}), -4(0)\rangle . \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle = -\frac{9}{2}.\left(\frac{3}{5}\right) + 0\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{27}{10}$$

APLICACIONES DEL GRADIENTE

Se ha visto ya que hay muchas derivadas direccionales en un punto (x,y) de una superficie. En muchas aplicaciones, se desea saber en qué dirección moverse de manera que $f(x,y)$ crezca más rápidamente. Esta dirección se llama la dirección de mayor ascenso, y viene dada por el gradiente, como se establece en el teorema siguiente.

Teorema 2. Propiedades del Gradiente

Sea *f* diferenciable en el punto (x,y)

1) Si $\nabla f(x,y) = \vec{0}$ entonces $D_{\vec{u}}f(x,y) = 0$ para todo $\vec{u}$

2) La dirección de *máximo* incremento de *f* está dada por $\nabla f(x,y)$. El valor máximo de la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(x,y)$ es: $\|\nabla f(x,y)\|$ y ocurre cuando $\vec{u}$ tiene la misma dirección que el vector gradiente.

3) La dirección de *mínimo* incremento de *f* está dada por $-\nabla f(x,y)$. El valor mínimo de la derivada direccional $D_{\vec{u}}f(x,y)$ es: $-\|\nabla f(x,y)\|$ y ocurre cuando $\vec{u}$ y el vector gradiente tienen direcciones opuestas.

Ejemplo. Encuentre el gradiente y el valor máximo y mínima de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto (1,3)

Solución. El gradiente de la función es: $\nabla f(x,y) = \langle 2x, 2y\rangle$

$$\nabla f(1,3) = \langle 2(1), 2(3)\rangle = \langle 2,6\rangle$$

La razón de cambio máxima de f en el punto (1,3) es

$\|\nabla f(1,3)\| = \|\langle 2,6\rangle\| = \sqrt{2^2+6^2} = \sqrt{40}$ y ocurre en la dirección de $\vec{u} = \frac{\nabla f(1,3)}{\|\nabla f(1,3)\|}$

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(1,3)}{\|\nabla f(1,3)\|} = \frac{\langle 2,6\rangle}{\sqrt{40}} = \langle \frac{2}{\sqrt{40}}, \frac{6}{\sqrt{40}} \rangle$$

En forma similar se tiene que la mínima razón de cambio de f en $(1,3)$ es $-\|\nabla f(1,3)\| = -\sqrt{40}$ y ocurre en la dirección de

$$\vec{u} = -\frac{\nabla f(1,3)}{\|\nabla f(1,3)\|} = -\frac{\langle 2,6\rangle}{\sqrt{40}} = \langle \frac{-2}{\sqrt{40}}, \frac{-6}{\sqrt{40}} \rangle$$

Las definiciones de derivada direccional y gradiente se pueden extender de manera natural a funciones de tres o más variables. Como a menudo pasa, algo de la interpretación geométrica se pierde al generalizar funciones de dos variables a funciones de tres variables. Por ejemplo, no se puede interpretar la derivada direccional de una función de tres variables como una pendiente.

GUIA DE EJERCICIOS No.10. LA DERIVADA DIRECCIONAL

En los ejercicios 1 a 12, hallar la derivada direccional de la función en P en dirección de v.

1. $f(x,y) = 3x - 4xy + 9y$, $P(1,2)$, $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$
2. $f(x,y) = x^3 - y^3$, $P(4,3)$, $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
3. $f(x,y) = xy$, $P(0,-2)$, $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$
4. $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $P(1,1)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{j}$
5. $h(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$, $P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i}$
6. $g(x,y) = \arccos xy$, $P(1,0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$
7. $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P(3,4)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
8. $h(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $P(0,0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
9. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1,1,1)$, $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$
10. $f(x,y,z) = xy + yz + xz$, $P(1,2,-1)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
11. $h(x,y,z) = xyz$, $P(2,1,1)$, $\mathbf{v} = \langle 2,1,2\rangle$
12. $h(x,y,z) = x \arctan yz$, $P(4,1,1)$, $\mathbf{v} = \langle 1,2,-1\rangle$

En los ejercicios 13 a 16, hallar la derivada direccional de la función en dirección de $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$.

En los ejercicios 27 a 30, utilizar el gradiente para hallar la derivada direccional de la función en P en la dirección de Q.

27. $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1$, $P(1,2)$, $Q(2,3)$
28. $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 4$, $P(-1,4)$, $Q(3,6)$
29. $f(x,y) = e^y \operatorname{sen} x$, $P(0,0)$, $Q(2,1)$
30. $f(x,y) = \operatorname{sen} 2x \cos y$, $P(\pi, 0)$, $Q\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

En los ejercicios 31 a 40, hallar el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto dado.

	Función	*Punto*
31.	$f(x,y) = x^2 + 2xy$	$(1,0)$
32.	$f(x,y) = \frac{x+y}{y+1}$	$(0,1)$
33.	$h(x,y) = x \tan y$	$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
34.	$h(x,y) = y\cos(x-y)$	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$
35.	$g(x,y) = ye^{-x}$	$(0,5)$
36.	$g(x,y) = \ln \sqrt[3]{x^2+y^2}$	$(1,2)$
37.	$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$(1,4,2)$

13. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$

14. $f(x, y) = \frac{y}{x + y}, \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$

15. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + y), \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

16. $g(x, y) = xe^y, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$

En los ejercicios 17 a 20, hallar la derivada direccional de la función en P en dirección de Q.

17. $f(x, y) = x^2 + 3y^2, \quad P(1, 1), Q(4, 5)$

18. $f(x, y) = \cos(x + y), \quad P(0, \pi), Q\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

19. $g(x, y, z) = xye^z, \quad P(2, 4, 0), Q(0, 0, 0)$

20. $h(x, y, z) = \ln(x + y + z), \quad P(1, 0, 0), Q(4, 3, 1)$

En los ejercicios 21 a 26, hallar el gradiente de la función en el punto dado.

21. $f(x, y) = 3x + 5y^2 + 1, \quad (2, 1)$

22. $g(x, y) = 2xe^{y/x}, \quad (2, 0)$

23. $z = \ln(x^2 - y), \quad (2, 3)$

24. $z = \cos(x^2 + y^2), \quad (3, -4)$

25. $w = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2, \quad (1, 1, -2)$

26. $w = x\tan(y + z), \quad (4, 3, -1)$

38. $w = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} \quad (0, 0, 0)$

39. $w = xy^2z^2 \quad (2, 1, 1)$

40. $f(x, y, z) = xe^{yz} \quad (2, 0, -4)$

En los ejercicios 41 a 46, utilizar la función $f(x, y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$.

41. Dibujar la gráfica de f en el primer octante y marcar el punto $(3, 2, 1)$ sobre la superficie.

42. Hallar $D_{\mathbf{u}} f(3, 2)$, donde $\mathbf{u} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j}$, usando cada valor dado de θ.

a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ *b)* $\theta = \frac{2\pi}{3}$

c) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ *d)* $\theta = -\frac{\pi}{6}$

43. Hallar $D_{\mathbf{u}} f(3, 2)$, donde $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, usando cada vector $\mathbf{v}$ dado.

a) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

b) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

c) $\mathbf{v}$ es el vector que va de $(1, 2)$ a $(-2, 6)$.

d) $\mathbf{v}$ es el vector que va de $(3, 2)$ a $(4, 5)$.

44. Hallar $\nabla f(x, y)$.

45. Hallar el valor máximo de la derivada direccional en $(3, 2)$.

46. Hallar un vector unitario de $\mathbf{u}$ ortogonal a $\nabla f(3, 2)$ y calcular $D_{\mathbf{u}} f(3, 2)$. Analizar el significado geométrico del resultado.

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE

Hasta ahora las superficies en el espacio se han representado principalmente por medio de ecuaciones de la forma $z = f(x, y)$. Sin embargo, es conveniente utilizar la representación más general $F(x, y, z) = 0$.

Una superficie S, dada por $z = f(x, y)$ se puede convertir a la forma general definiendo F como: $F(x, y, z) = f(x, y) - z$.

Puesto que $f(x, y) - z = 0$. Se puede considerar S como la superficie de nivel de F dada por $F(x, y, z) = 0$(ecuación alternativa de la superficie).

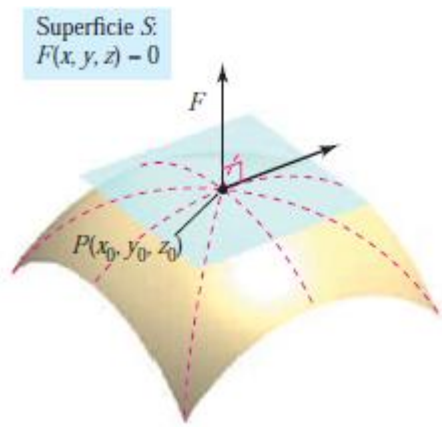
Definición de plano tangente y recta normal

Sea F diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S dada por

$F(x, y, z) = 0$ tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$

1. Al plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama *plano tangente* a S en P. En otras palabras, el *plano tangente* en P es aquel plano que pasa por P y es perpendicular a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$

2. A la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama *recta normal* a S en P.



Plano tangente a la superficie S en P

Teorema 1. Ecuación del plano tangente

Si F es diferenciable en $P(x_0, y_0, z_0)$, entonces una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ es:

$$\boldsymbol{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0}$$

Ejemplo 1. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en (1,1,1).

Solución. Empezamos por formar $\boldsymbol{F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3}$.Sacar las derivadas parciales:

$$F_x(x, y, z) = 2x, \qquad F_y(x, y, z) = 2y, \quad F_z(x, y, z) = 2z$$

Evaluando en (1,1,1) estas derivadas obtenemos:

$$F_x(1,1,1) = 2, \qquad F_y(1,1,1) = 2, \quad F_z(1,1,1) = 2$$

La ecuación del plano tangente es:

$$F_x(1,1,1)(x - 1) + F_y(1,1,1)(y - 1) + F_z(1,1,1)(z - 1) = 0$$
$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0$$
$$2x + 2y + 2z - 6 = 0$$

Ejemplo 2. Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$ en el punto (1,1,1/2).

Solución. Empezamos por formar $\boldsymbol{F(x, y, z) = z + \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2) - 1}$. Sacar las derivadas parciales:

$$F_x(x, y, z) = \frac{1}{5}x, \qquad F_y(x, y, z) = \frac{4}{5}y, \quad F_z(x, y, z) = 1$$

Evaluando en (1,1,1) estas derivadas obtenemos:

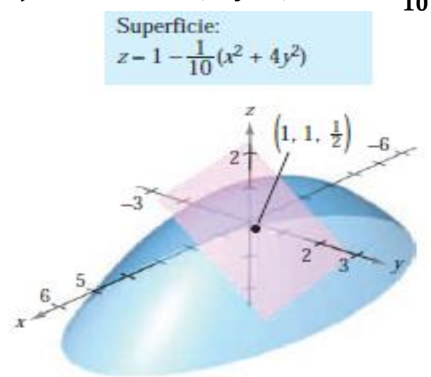
$$F_x(1,1,1/2) = \frac{1}{5}, \qquad F_y(1,1,1/2) = \frac{4}{5}, \quad F_z(1,1,1/2) = 1$$

Así, una ecuación del plano tangente en (1,1,1/2) es:

$$F_x(1,1,1/2)(x-1) + F_y(1,1,1/2)(y-1) + F_z(1,1,1/2)(z-1/2) = 0$$
$$\frac{1}{5}(x-1) + \frac{4}{5}(y-1) + 1(z-1/2) = 0$$

Observación: $F(x,y,z)$ puede formarse de dos maneras

$\boldsymbol{F(x,y,z) = z + \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2) - 1}$ **o** $\boldsymbol{F(x,y,z) = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2) - z}$



Ejemplo 3. Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie dada por: $xyz = 12$ en el punto $(2,-2,-3)$

Solución. Empezamos por formar $\boldsymbol{F(x,y,z) = xyz - 12}$. Sacar las derivadas parciales:

$$F_x(x,y,z) = yz, \qquad F_y(x,y,z) = xz, \quad F_z(x,y,z) = xy$$

Entonces el gradiente está dado por: $\nabla f(x,y,z) = \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z)\rangle = \langle yz, xz, xy\rangle$

Evaluando en el punto $(2,-2,-3)$ se tiene que:

$$\nabla f(2,-2,-3) = \langle(-2)(-3), 2(-3), 2(-2)\rangle = \langle 6,-6,-4\rangle$$

La recta normal en $(2,-2,-3)$ tiene números de dirección o directores $\langle 6,-6,-4\rangle$

Por lo tanto, las ecuaciones simétricas de la recta normal son:

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-(-2)}{-6} = \frac{z-(-3)}{-4}$$

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+3}{-4}$$

GUIA DE EJERCICIOS No.11.

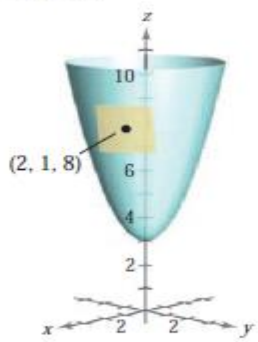
En los ejercicios 5 a 16, hallar un vector unitario normal a la superficie en el punto dado. [*Sugerencia*: Normalizar el vector gradiente $\nabla F(x, y, z)$.]

	Superficie	*Punto*
5.	$3x + 4y + 12z = 0$	$(0, 0, 0)$
6.	$x + y + z = 4$	$(2, 0, 2)$
7.	$x^2 + y^2 + z^2 = 6$	$(1, 1, 2)$
8.	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$(3, 4, 5)$
9.	$z = x^3$	$(2, -1, 8)$
10.	$x^2y^4 - z = 0$	$(1, 2, 16)$
11.	$x^2 + 3y + z^3 = 9$	$(2, -1, 2)$
12.	$x^2y^3 - y^2z + 2xz^3 = 4$	$(-1, 1, -1)$
13.	$\ln\left(\dfrac{x}{y - z}\right) = 0$	$(1, 4, 3)$
14.	$ze^{x^2-y^2} - 3 = 0$	$(2, 2, 3)$
15.	$z - x \operatorname{sen} y = 4$	$\left(6, \dfrac{\pi}{6}, 7\right)$
16.	$\operatorname{sen}(x - y) - z = 2$	$\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{3}{2}\right)$

En los ejercicios 17 a 30, hallar una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

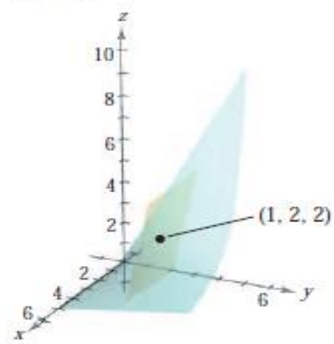
17. $z = x^2 + y^2 + 3$

$(2, 1, 8)$



18. $f(x, y) = \dfrac{y}{x}$

$(1, 2, 2)$



19. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, 5)$

20. $g(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$, $(1, 0, 0)$

21. $g(x, y) = x^2 + y^2$, $(1, -1, 2)$

22. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, $(1, 2, 1)$

23. $z = 2 - \frac{2}{3}x - y$, $(3, -1, 1)$

24. $z = e^x(\operatorname{sen} y + 1)$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}, 2\right)$

25. $h(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, \ln 5)$

26. $h(x, y) = \cos y$, $\left(5, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

27. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$, $(2, -2, 4)$

28. $x^2 + 2z^2 = y^2$, $(1, 3, -2)$

29. $xy^2 + 3x - z^2 = 8$, $(1, -3, 2)$

30. $x = y(2z - 3)$, $(4, 4, 2)$

En los ejercicios 31 a 40, hallar una ecuación del plano tangente y hallar ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie en el punto dado.

31. $x + y + z = 9$, $(3, 3, 3)$

32. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $(1, 2, 2)$

33. $x^2 + y^2 + z = 9$, $(1, 2, 4)$

34. $z = 16 - x^2 - y^2$, $(2, 2, 8)$

35. $z = x^2 - y^2$, $(3, 2, 5)$

36. $xy - z = 0$, $(-2, -3, 6)$

37. $xyz = 10$, $(1, 2, 5)$

38. $z = ye^{2xy}$, $(0, 2, 2)$

39. $z = \arctan \dfrac{y}{x}$, $\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$

40. $y \ln xz^2 = 2$, $(e, 2, 1)$