UNIDAD II. INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación que incluye las derivadas de una o más funciones se llama ecuación diferencial. En otras palabras, una ecuación diferencial expresa una relación entre funciones y sus derivadas.

El término ecuación diferencial se utiliza desde 1676, cuando Leibniz lo empleó por primera vez; desde entonces, los científicos y los ingenieros han usado extensamente las ecuaciones diferenciales para modelar y resolver una amplia gama de problemas prácticos. Probablemente usted se pregunte por qué estudiamos ecuaciones diferenciales.

Después de todo, parece que podríamos resolver prácticamente cualquier problema mediante ecuaciones algebraicas. Bueno, bastará con decir que, hasta este punto, usted se enfrentó principalmente a problemas cuyo modelo matemático resultaba en ecuaciones algebraicas.

Definición: Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una **ecuación diferencial (ED)**.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con su tipo, orden y linealidad.

Clasificación según su tipo

a) **Ecuación diferencial ordinaria**. Es cuando una ecuación diferencial solo contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente se llama ecuación diferencial ordinaria (EDO)
b) **Ecuación diferencial parcial.** Es cuando una ecuación diferencial incluye derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial (EDP)

Ejemplo. Ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

Nota. Una ED puede contener más de una variable dependiente. Tal como aparece en el último ejemplo las variables dependientes son x e y.

Ejemplo. Ecuaciones diferenciales parciales.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Las derivadas ordinarias se escribirán usando la **notación de Leibniz** $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$

, . . . o la **notación prima** $\boldsymbol{y', y'', y'''}$, ... Usando esta última notación, las primeras dos ecuaciones diferenciales en (2) se pueden escribir en una forma un poco más compacta como $y' + 5y = e^x$; $y'' - y' + 6y = 0$.
La notación prima se usa para denotar sólo las primeras tres derivadas: la cuarta derivada se denota por: $y^{(4)}$ en lugar de y''''.
En general, la *n*-ésima derivada de *y* se escribe como $\frac{d^n y}{dx^n}$ $o\ y^{(n)}$
Aunque es menos conveniente para escribir o componer tipográficamente, la notación de Leibniz tiene una ventaja sobre la notación prima en que muestra claramente ambas variables, las dependientes y las independientes. Por ejemplo, en la ecuación

función incógnita
o variable dependiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0$$

variable independiente

se ve inmediatamente que ahora el símbolo *x* representa una variable dependiente, mientras que la variable independiente es *t*.

Clasificación según el orden

El **orden** de una ecuación diferencial ordinaria o ecuación diferencial parcial representa el orden de la derivada más alta presente en la ecuación.

segundo orden   primer orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

Se llama **grado** de una ecuación diferencial ordinaria o ecuación diferencial parcial al exponente al que esta elevada la derivada de mayor orden que aparece en ella.

Ejemplos:

a) $\frac{dy}{dx} = 2x^2 + y$. Ecuación diferencial ordinaria, de primer orden y primer grado

b) $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^3 - 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$. Ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden y tercer grado

c) $(y'')^4 = 4x[1 - (y')^2]^6$. Ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden y cuarto grado.

d) $\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. Ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden y de primer grado. La EDO sigue siendo de segundo orden aun cuando se puede hacer lo siguiente:

$$\left(\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2}}\right)^2 = \left(\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

e) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} - 2x = 0$. Ecuación diferencial parcial de primer orden y segundo grado

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden algunas veces son escritas en la forma diferencial: $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$.
Por ejemplo, la ecuación diferencial de primer orden $5xy' + 4x = 3$, sabiendo que $y' = \frac{dy}{dx}$, puede escribirse como:

$$(4x - 3)dx + 5xdy = 0$$

Simbólicamente, es posible expresar una ecuación diferencial ordinaria de n-esimo orden en la variable dependiente "y" e independiente "x" empleando la forma general:
$\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right)} = 0$, donde F es una función con valores reales de $n + 2$ variables: $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$. Supondremos en lo que sigue, por razones prácticos y teóricos, que es posible despejar en forma única la derivada de mayor orden $y^{(n)}$ de la ecuación $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$, en términos de las $n + 1$ variables restantes obteniendo la forma normal o estándar
$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$, donde *f* es una función continua con valores reales.
De este modo, cuando nos sea útil, debemos utilizar las formas normales $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$ para representar ecuaciones diferenciales generales ordinarias de primero y segundo orden. Por ejemplo, la forma normal de la ecuación de primer orden

$$4xy' + y = x \text{ es } y' = \frac{x-y}{4x}$$

$$y'' - y' + 6y = 0 \text{ es } y'' = -y' - 6y$$

Clasificación según su linealidad.

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de n-esimo orden
$\boldsymbol{F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0}$ es lineal si F es lineal en $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$.

Esto significa que un EDO de n-esimo orden es lineal cuando
$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$ es de la forma:

$$\boldsymbol{a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)} \quad *$$

Dos casos especiales de la ecuación anterior son las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (n =1) y de segundo orden (n = 2)

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{y} \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

En la combinación de la suma del lado izquierdo de la ecuación (*).
En el miembro izquierdo de * se observan dos propiedades características de una EDO lineal:

1) La variable dependiente y así como todas sus derivadas $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ son de primer grado, es decir la potencia de cada uno de los términos que involucran a "y" es 1.
2) Los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ de $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ dependen a lo sumo de la variable independiente "x"

Una ecuación diferencial ordinaria no lineal simplemente es una ecuación que no es lineal. Las funciones no lineales de la variable dependiente o de sus derivadas, tales como $Sen(y)$ o e^y , no se pueden aparecer en una ecuación lineal.

Por tanto, los siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales de primer, segundo y cuarto orden respectivamente.

$$\overset{\substack{\text{término no lineal:}\\ \text{coeficiente depende de } y\\ \downarrow}}{(1-y)}y' + 2y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \overset{\substack{\text{término no lineal:}\\ \text{función no lineal de } y\\ \downarrow}}{\text{sen}\, y} = 0, \qquad \text{y} \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + \overset{\substack{\text{término no lineal:}\\ \text{el exponente es diferente de 1}\\ \downarrow}}{y^2} = 0$$

Ejemplos:

1) $(1-y)y' + 2y = e^x$, es una EDO no lineal, el coeficiente depende de "y"
2) $\frac{d^2y}{dx^2} + Sen(y) = 0$, es una EDO no lineal.
3) $\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$, es una EDO no lineal, potencia diferente de 1.
4) $3y^{(4)} - 2y^{(3)} + 5y'' - 3(y')^2 + y = sen(x)$, es una EDO no lineal ya que el cuarto término $-3(y')^2$, tiene exponente distinto de 1.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Como ya se ha establecido, uno de los objetivos del curso es resolver o encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales.

En la siguiente definición consideramos el concepto de solución de una ecuación diferencial ordinaria.

Definición: Cualquier función $\emptyset$, definida sobre un intervalo I y que tiene al menos "n" derivadas continuas en I, las cuales cuando se sustituyen en una EDO de n-esimo orden reduce la ecuación a una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación en ese intervalo.

En otras palabras, una solución de una EDO de n-esimo orden $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$ es una función $\emptyset$ que posee al menos n derivadas para las que:

$$F\left(x, \emptyset(x), \emptyset'(x), \emptyset''(x), \ldots, \emptyset^{(n-1)}(x), \emptyset^{(n)}(x)\right) = 0, \text{ para todo x en I}$$

Decimos que $\emptyset$ satisface la ecuación diferencial en I. Para nuestros propósitos supondremos que una solución $\emptyset$ es una función con valores reales.

Intervalo de Definición. No se puede considerar la solución de una EDO sin que al mismo tiempo se piense en el intervalo.

El intervalo I de la definición se denomina de diversas maneras: intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez o dominio de la solución y puede ser un intervalo abierto, cerrado o infinito $]a, b[$, $[a, b]$, $[a, \infty[$, etc.

Ejemplo 1. Compruebe que la función señalada representa una solución de EDO, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$

a) $\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$; $y = \frac{x^4}{16}$
b) b) $y'' - 2y' + y = 0; y = xe^x$

Solución a). Una forma de verificar que la función dada es una solución es ver, una vez que se ha sustituido, si cada lado de la ecuación es el mismo para toda *x* en el intervalo.

a) Derivando "y" tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{16}\right) = \frac{1}{16}(4x^3) = \frac{1}{4}x^3$$

Lado derecho: $xy^{\frac{1}{2}} = x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = x\left(\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{4}x^3$

Vemos que cada lado de la ecuación es el mismo para todo número real x.

b) $y'' - 2y' + y = 0;\ y = xe^x$, derivando dos veces la variable "y"

$$y' = \frac{d}{dx}(xe^x) = xe^x + e^x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(xe^x + e^x) = xe^x + e^x + e^x = xe^x + 2e^x$$

Sustituyendo las derivadas encontradas tenemos:

$$y'' - 2y' + y = (xe^x + 2e^x) - 2(xe^x + e^x)$$

$$= xe^x + 2e^x - 2xe^x - 2e^x = 0$$

Se puede observar que en el ejemplo 1 cada EDO posee la solución constante $y = 0$, $-\infty < x < \infty$.

La solución de una ED idéntica a cero sobre un intervalo I se dice que es una **solución trivial**.

CURVA SOLUCIÓN. La gráfica de una solución $\emptyset$ de una EDO se llama **curva solución.** Puesto que $\emptyset$ es una función derivable, es continua en su intervalo de definición I. Puede haber diferencia entre la gráfica de la función $\emptyset$ y la gráfica de la solución $\emptyset$. Es decir, el dominio de la función $\emptyset$ no necesita ser igual al intervalo de definición I (o dominio) de la solución $\emptyset$.

Soluciones implícitas y explicitas. Usted debe estar familiarizado con los términos funciones explícitas y funciones implícitas. Una solución en la cual la variable dependiente se expresa sólo en términos de la variable independiente y las constantes se dice que es una **solución explícita**. Para nuestros propósitos, consideremos una solución explícita como una fórmula explícita $y = \emptyset(x)$ que podamos manejar, evaluar y derivar usando las reglas usuales.

Ejemplo. La relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

En el intervalo abierto $(-5,5)$. Derivando implícitamente se obtiene

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

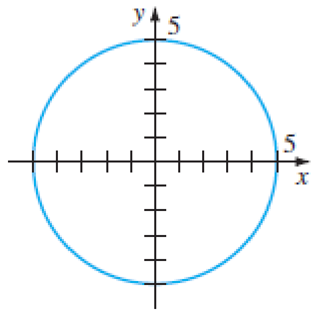
Resolviendo $x^2 + y^2 = 25$ para "y" en términos de x, se obtiene

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$

Las dos funciones $y = \emptyset_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $y = \emptyset_2 = -\sqrt{25 - x^2}$, satisfacen

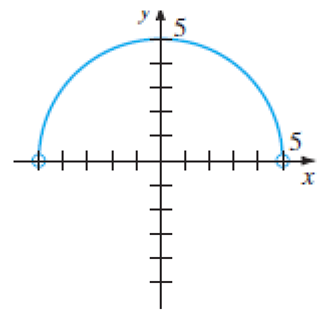
$$x^2 + \emptyset_1^2 = 25 \;\; y \; x^2 + \emptyset_2^2 = 25$$

Y son soluciones explicitas definidas en el intervalo $(-5{,}5)$.



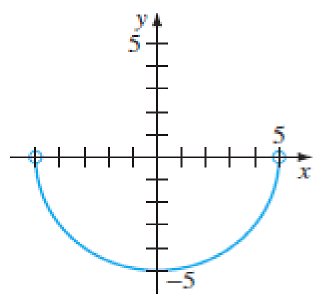
a) solución implícita

$x^2 + y^2 = 25$



b) solución explícita

$y_1 = \sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$



c) solución explícita

$y_2 = -\sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$

Ejercicios. Verificar que cada función es solución de la ED dada.

1) $y = cx^2;\; x\frac{dy}{dx} = 2y$
2) $y = Ae^x + Be^{-2x} + x^2 + x, A\ y\ b\ son\ constantes;\; \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 3 - 2x^2$
3) $Ln(y) + \frac{x}{y} = C; C\ es\ una\ constante\ ;\; (y - x)\frac{dy}{dx} + y = 0$
4) $x + y + e^{xy} = 0;\;\; (1 + xe^{xy})\frac{dy}{dx} + 1 + ye^{xy} = 0$

FAMILIA DE SOLUCIONES.

El estudio de las ED es similar al del cálculo integral. Al evaluar una antiderivada o integral indefinida en cálculo, utilizamos una sola constante “c” de integración. En forma análoga, al resolver una ED de primer orden $F(x, y, y') = 0$, por lo general obtenemos una solución que contiene una sola constante arbitraria o parámetro “c”. Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto: $G(x, y, c) = 0$ de soluciones denominadas **familia de soluciones** de un parámetro.

Al resolver una EDO de orden n $F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)},y^{(n)}\right)=0$, se busca una familia n-paramétricas de soluciones $G(x,y,c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$. Esto quiere decir que una ED puede poseer un número infinito de soluciones que corresponden al número ilimitado de opciones para el o los parámetros.
Una solución de una ED que se encuentra libre de parámetros arbitrarios se denomina **solución particular.**

ELIMINACIÓN DE CONSTANTES ARBITRARIAS
En este caso, dada una familia n-paramétrica, se encontrará una ecuación diferencial libre de constantes arbitrarias, asociada con la familia dada.

Ejemplo. Obtener la ED libre de constantes arbitrarias de la familia de parábolas de ramas verticales con vértice en el origen del sistema.
Solución: Con las características de la familia se deduce que la ecuación de la familia es: $x^2=cy$, por ser "c" una constante arbitraria podemos asignarles distintos valores y se obtienen distintas curvas y como "c" puede tomar infinidad de valores se obtiene una infinidad de curvas.
Para eliminar la constante arbitraria se permite obtener una derivada de la ecuación, luego se combina esta derivada con la ecuación dada y se elimina la constante arbitraria, así: $2x=c\frac{dy}{dx}$, como: $x^2=cy$ entonces despejando "c" se obtiene $c=\frac{x^2}{y}$ sustituyendo $2x=\frac{x^2}{y}\frac{dy}{dx}$ al multiplicar por "y" a ambos lados obtenemos:

$\therefore\ \boldsymbol{2xy=x^2\frac{dy}{dx}}$ **La cual es llamada EDO asociada a la familia de parábolas libre de constantes arbitrarias.**

Nota: La familia de curvas dada mediante la función debe derivarse tantas veces como constantes arbitrarias aparezcan en la ecuación de la familia, en el ejemplo anterior $x^2=cy$ solo aparece un parámetro c, razón por la cual derivamos una sola vez.

Ejemplo. Dada la familia bi- paramétrica $y=Ae^{3x}+Be^{-3x}$, obtener la ED libre de constantes arbitrarias de la familia dada.
Solución: la ecuación $y=Ae^{3x}+Be^{-3x}$ tiene dos constantes arbitrarias A y B por lo que se puede derivar dos veces la ecuación así:

$$y'=3Ae^{3x}-3Be^{-3x}\,;y''=9Ae^{3x}+9Be^{-3x}$$

Se observa que tenemos tres ecuaciones con dos incógnitas donde se pueden solucionar de varias formas:

$$y=Ae^{3x}+Be^{-3x}\ (1)$$

$$y'=3Ae^{3x}-3Be^{-3x}\ (2)$$

$$y''=9Ae^{3x}+9Be^{-3x}\ (3)$$

Si se multiplica por -9 la ecuación (1) y se suma con la ecuación (3) se obtiene

$$-9y = -9Ae^{3x} - 9Be^{-3x}$$

$$y'' = 9Ae^{3x} + 9Be^{-3x}$$

$$y'' - 9y = 0$$

∴ La ED libre de constantes arbitrarias de la familia bi- paramétrica dada es $y'' - 9y = 0$

PROBLEMAS CON VALOR INICIAL

Con frecuencia enfrentamos problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ED de modo que $y(x)$ satisfaga condiciones adicionales establecidas, es decir, condiciones impuestas sobre la incógnita $y(x)$ o sobre sus derivadas.

Problema de valor inicial. En cierto intervalo I que contiene a x_0, el problema de:

Resolver: $\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$

Sujeta a: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, donde $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ son constantes reales especificadas de forma arbitraria, se llama **problemas de valores iniciales** de orden "n".

Los siguientes valores se denominan condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0, y'^{(x_0)} = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Problemas de valor inicial de primero y segundo orden respectivamente.

Resolver: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Sujeta a: $y(x_0) = y_0$

Resolver: $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$

Sujeta a: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$

Ejemplo: Es fácil verificar que $y = ce^x$ representa una familia de un parámetro para la ED de primer orden $y' = y$ sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$. Con la condición inicial $y(0) = 3$, es decir $x = 0, y = 3$, entonces al sustituir en la familia se determina la constante:

$$3 = ce^0 = c.$$

Por lo tanto, la función es $\boldsymbol{y = 3e^x}$ es una solución del problema de valor inicial:

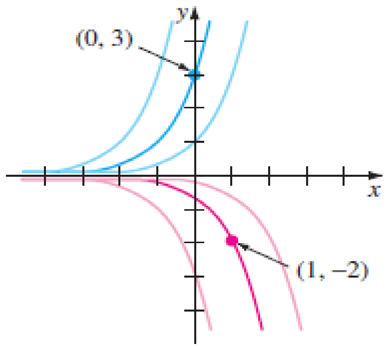
$$y' = y, \qquad \mathrm{y}(0) = 3$$

Si hacemos que la curva solución atraviese el punto $(1, -2)$ en lugar de (0,3), entonces $y(1) = -2$ se obtendrá $-2 = ce^1\ o\ \ c = -2e^{-1}$.

En este caso la función $y = -2e^{x-1}$, es una solución del problema de valor inicial

$$y' = y, \qquad \mathrm{y}(1) = -2$$

Las gráficas se muestran a continuación: Se muestran en azul y en rojo las dos curvas solución.



Ejemplo: Se puede verificar que $y = c_1 Cos(4x) + c_2 Sen(4x)$ representa una familia de soluciones de dos parámetros para $y'' + 16y = 0$.
Encontrar una solución del problema de valor inicial $y'' + 16y = 0$,

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Solución: Primero aplicamos $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$, es decir $x = \frac{\pi}{2}$ cuando $y = -2$ a la familia de soluciones dada:

$c_1 Cos(2\pi) + c_2 Sen(2\pi) = -2$, entonces encontramos que $c_1 = -2$, entonces

$y = -2Cos(4x) + c_2 Sen(4x)$, al derivar y aplicar la segunda condición tenemos:

$y' = 8Sen(4x) + 4c_2 Cos(4x)$ al evaluar en , $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ se obtiene

$$8Sen(2\pi) + 4c_2 Cos(2\pi) = 1$$

$$4c_2 = 1$$

$$c_2 = \frac{1}{4}$$

$\therefore\ y = -2Cos(4x) + \frac{1}{4}Sen(4x)$ es solución de $y'' + 16y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

GUÍA DE EJERCICIOS Nº 1
INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En los ejercicios del 1 al 4 defina el orden de la ecuación diferencial presentada. Determine si la ecuación es lineal o no lineal.

1) $x\dfrac{d^3y}{dx^3}-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4+y=0$

2) $(1-x)y''-4xy'+5y=\cos x$

3) $\dfrac{d^2u}{dr^2}+\dfrac{du}{dr}+u=\cos(r+u)$

4) $\dfrac{d^2R}{dt^2}=-\dfrac{k}{R^2}$

En los ejercicios del 5 al 8 $y=\dfrac{1}{x^2+c}$, c es constante, es una solución de la ecuación diferencial $y'+2xy^2=0$. Calcule una solución particular para cada condición inicial.

5) $y(2)=\dfrac{1}{3}$

6) $y(0)=1$

7) $y(-2)=\dfrac{1}{2}$

8) $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4$

En los ejercicios del 9 al 12 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}$, c_1 y c_2 son constantes, es una solución general de la E.D. $y''-y=0$. Calcule una solución particular para cada condición inicial.

9) $y(0)=1$, $y'(0)=2$

10) $y(1)=0$, $y'(1)=e$

11) $y(-1)=5$, $y'(-1)=-5$

12) $y(0)=0$, $y'(0)=0$

En los ejercicios del 13 al 16 muestre que la función indicada es solución de la ecuación diferencial dada. Calcule un intervalo adecuado de validez de la solución.

13) $(y-x)y'=y-x+8$; $y=x+4\sqrt{x+2}$

14) $y'=25+y^2$; $y=5\tan(5x)$

15) $y'=2xy^2$; $y=\dfrac{1}{4-x^2}$

16) $2y'=y^3\cos(x)$; $y=(1-\operatorname{sen}x)^{-1/2}$

17) Determine si el teorema de existencia y unicidad garantiza que la E.D. $y'=\sqrt{y^2-9}$; posee una solución única a través del punto proporcionado:

a) $(1,4)$ b) $(5,3)$ c) $(2,-3)$ d) $(-1,1)$

En los ejercicios del 18 al 19 muestre que la expresión indicada es solución implícita de la ecuación diferencial dada. Determine al menos una solución explicita en cada caso y describa el intervalo I de definición de cada solución.

18) $2xy\,dx+(x^2-y)dy=0$; $-2x^2y+y^2=1$

19) $\dfrac{dx}{dt}=(x-1)(1-2x)$; $Ln\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right)=t$

EJERCICIOS VARIOS

1) Muestre si la ecuación diferencial tiene la solución dada.

$$x^3\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 = 2v\frac{dv}{dx} \quad ; \quad v = cx^2 \text{, c es constante.}$$

2) Determine una ecuación diferencial correspondiente a la solución general dada.:

a) $x^2 + cy^2 = 1$, c; constante   b) $y^2 = ax + b$, a y b son constantes.

3) Determine la ecuación diferencial correspondiente a:

a) La familia de rectas que pasan por el punto $(2,1)$, y
b) La familia de circunferencias que son tangentes al eje x y que tienen por radio la unidad.

4) Obtenga una solución singular de la E.D. $y' = y^2 - 1$.

5) Muestre si la Ecuación Diferencial tiene la solución dada.

$$4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y + 2 \quad ; \quad x = 4t + 1 \ , \ y = t^2 - 2$$

6) Las ecuaciones diferenciales de primer orden

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$ y $(y')^2 + y^2 + 4 = 0$ no tienen soluciones reales ¿por qué?

7) La ecuación de segundo orden $(y'')^2 + 10y^4 = 0$ tiene solamente una solución real. ¿Cuál es?

8) Analice la existencia y unicidad de la solución de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $y' = 2xy$, $y(0) = 1$

b) $y = xy' - (y')^2$, $y(2) = 1$

c) $y' = \dfrac{y+x}{y-x}$, $y(1) = 1$

9) Calcule los valores de m tales que $y = e^{mx}$ sea una solución de cada ecuación diferencial.

a) $y'' - 5y' + 6y = 0$ b) $y'' + 10y' + 25y = 0$

10) Determine los valores de m tales que $y = x^m$ sea solución de cada ecuación diferencial.

a) $x^2y'' - y = 0$ b) $x^2y'' + 6xy' + 4y = 0$

En los problemas 1 a 8 establezca el orden de la ecuación diferencial ordinaria dada. Determine si la ecuación es lineal o no lineal.

1. $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

2. $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

3. $t^5y^{(4)} - t^3y'' + 6y = 0$

4. $\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + u = \cos(r+u)$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

6. $\dfrac{d^2R}{dt^2} = -\dfrac{k}{R^2}$

7. $(\text{sen}\,\theta)y''' - (\cos\theta)y' = 2$

8. $\ddot{x} - \left(1 - \dfrac{\dot{x}^2}{3}\right)\dot{x} + x = 0$

UNIDAD III. ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Comenzaremos nuestro estudio de cómo resolver las ecuaciones diferenciales con la más simple de todas las ecuaciones diferenciales: **ecuaciones diferenciales de primer orden con variables separables**.

Debido a que el método que se presenta en esta unidad y que muchas de las técnicas para la solución de ecuaciones diferenciales implican integración, es de recordar las fórmulas básicas de integración y las técnicas (como la integración por partes).

Métodos para resolver ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales que se han resuelto hasta este momento son casos particulares, y como podemos darnos cuenta, son bastante sencillas de resolver; pero no todas las ecuaciones diferenciales presentan el mismo grado de dificultad y por eso existen diferentes métodos de solución.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

Una ecuación diferencial de primer orden es de variables separables si la derivada es igual al producto de una función de “x” por una función de “y”.

Es decir, una ecuación diferencial de la forma: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ se llama de variables separables.
La estrategia de solución consiste en despejar a un solo lado de la ecuación todos los términos que contienen "x" y al otro lado todos los términos que contienen "y".
En este caso resulta la igualdad siguiente: $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$, integrando en ambos miembros se tiene:
$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx \;\; o \;\; H(y) = G(x) + c$, donde $H(y)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $\frac{1}{h(y)}$ y $g(x)$, respectivamente.

Puede verse que no hay necesidad de usar dos constantes en la integración de una ecuación separable, porque si escribimos $H(y) + c_1 = G(x) + c_2$, entonces la diferencia de $c_2 - c_1$ Puede reemplazarse por una sola constante "c"

Ejemplo. Resolver: $\frac{dy}{dx} = y^2 Cos(x)$
Solución: Primero separamos las variables

$$\frac{dy}{dx} = y^2 Cos(x)$$

$$\frac{dy}{y^2} = Cos(x)dx, aplicamos \int \text{a ambos lados}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int Cos(x)dx$$

$$\int y^{-2}\, dy = sen(x) + c$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = Sen(x) + c$$

$$\frac{-1}{y} = Sen(x) + c, entonces \; -1 = (Sen(x) + c)y$$

$$y = -\frac{1}{Sen(x) + c}$$

Por lo tanto, al resolver $\frac{dy}{dx} = y^2 Cos(x)$, obtenemos $y = -\frac{1}{Sen(x)+c}$

En muchos casos a lo largo de esta unidad, renombraremos las constantes de una forma que convenga a cada ecuación. Por ejemplo, los múltiplos de constantes o las combinaciones de constantes algunas veces pueden reemplazarse por una sola constante.

Ejemplo. Resolver $(x+1)dy - ydx = 0$
Solución: Primero separar los términos.
Segundo multiplicar a ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{(x+1)y}$ para obtener:

$$(x+1)dy = ydx$$

$$\left(\frac{1}{(x+1)y}\right)(x+1)dy = \left(\frac{1}{(x+1)y}\right)ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}, \text{haciendo w} = \text{x} + 1; \text{dw} = \text{dx}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dw}{w}$$

$$Ln|y| = Ln|w| + c_1$$

$$\boldsymbol{Ln|y| = Ln|x+1| + c_1}$$

Por lo tanto, resolviendo $(x+1)dy - ydx = 0$, se obtiene $Ln|y| = Ln|x+1| + c_1$

Observación: Una elección cuidadosa de la constante de integración seria $Ln|c|$ en lugar de c_1. Al escribir de nuevo la última línea de la solución como:
$Ln|y| = Ln|x+1| + Ln|c|$, por propiedades de logaritmos tenemos:

$$Ln|y| = Ln|c(x+1)|, entonces\ y = c(x+1)(*)$$

Otra solución de $Ln|y| = Ln|x+1| + c_1$ seria (*)

Aun cuando las integrales indefinidas no sean todos logaritmos, todavía puede resultar ventajoso usar $Ln|c|$. Sin embargo, no se puede dar una regla.

Ejemplo. Resolver el siguiente problema de valor inicial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, y(4) = -3$,
o sea $(4, -3)$
Solución: Primero separar las variables:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$ydy = -xdx$$

$$\int ydy = \int -xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1 (*)$$

Solución 1. Sustituyendo $(4, -3)$ para hallar el valor de la constante en (*) tenemos:

$$\frac{(-3)^2}{2} = -\frac{(4)^2}{2} + c_1, entonces\ c_1 = \frac{25}{2}$$

Por lo tanto, al resolver $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, y(4) = -3$; obtenemos $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{25}{2}$ $(*)$

Solución 2. Podemos escribir el resultado de la integración como $x^2 + y^2 = c^2$ al reemplazar la constante $2c_1$ por c^2. Esta solución de la ecuación diferencial representa una familia de circunferencias concéntricas centradas en el origen.
Cuando $x = 4$, $y = -3$, de forma que $16 + 9 = c^2$, es decir $c = 5$
Por lo tanto, el problema de valor inicial determina el círculo $x^2 + y^2 = 25$, con radio 5.

Podemos concluir que al resolver $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, y(4) = -3$; se obtiene el círculo $x^2 + y^2 = 25$

Pérdida de una solución. Se debe tener cuidado al separar las variables ya que las variables que sean divisores podrían ser cero en un punto. Tenemos que, si *r* es una raíz de la función $h(y)$, entonces sustituyendo $y = r\ en\ \frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ se encuentra que ambos lados son iguales a cero; es decir, $y = r$ es una solución constante de la ecuación diferencial. Pero después de que las variables se separan, el lado izquierdo de $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$ está indefinido en *r*. Por tanto, $y = r$ podría no representar a la familia de soluciones que se ha obtenido después de la integración y simplificación. Recuerde que una solución de este tipo se llama solución singular.

Ejemplo. Resolver $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$
Solución. Primero separamos las variables y después poner la ED en forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4, \rightarrow \frac{dy}{y^2 - 4} = dx;$$

$$\left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2} - \frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right] dy = dx\ (1)$$

En la ecuación (1) es el resultado de utilizar fracciones parciales en el lado izquierdo. Integrando y utilizando las leyes de los logaritmos se obtiene lo siguiente (multiplicando a ambos lados por 4):

$$\int\left[\frac{\frac{1}{4}}{y-2}-\frac{\frac{1}{4}}{y+2}\right]dy=\int dx$$

$$\int\frac{\frac{1}{4}}{y-2}\,dy-\int\frac{\frac{1}{4}}{y+2}\,dy=\int dx$$

$$\frac{1}{4}Ln|y-2|-\frac{1}{4}Ln|y+2|=x+c_1$$

$$Ln|y-2|-Ln|y+2|=4(x+c_1)$$

$$Ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=4x+4c_1\ o\ Ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right|=4x+c_2$$

$$\frac{y-2}{y+2}=\pm e^{4x+c_2}=\pm(e^{4x}e^{c_2})=\pm e^{c_2}e^{4x}=ce^{4x}$$

Aquí se ha sustituido $4c_1$ por c_2. Por último, después de sustituir $\pm e^{c_2}$ por c y despejando "y" de la última ecuación, se obtiene una familia uniparamétrica de soluciones:

$$\frac{y-2}{y+2}=ce^{4x}$$

Entonces:

$$y-2=(y+2)ce^{4x}$$
$$y-2=yce^{4x}+2ce^{4x}$$

$$y-yce^{4x}=2+2ce^{4x}$$

$$y(1-ce^{4x})=2(1+ce^{4x})$$

$$y=\frac{2(1+ce^{4x})}{1-ce^{4x}}$$

Ejemplo. Resolver $(e^{2y}-y)Cos(x)\frac{dy}{dx}=e^{y}Sen(2x), y(0)=0\ o\ sea\ (0,0)$

Solución. Dividiendo la ecuación entre e^{y} cos (x) se obtiene lo siguiente:

$$(e^{2y}-y)Cos(x)\frac{dy}{dx}=e^{y}Sen(2x)$$

$$\frac{e^{2y}-y}{e^{y}Cos(x)}Cos(x)dy=\frac{e^{y}Sen(2x)}{e^{y}Cos(x)}dx$$

$$\frac{e^{2y}-y}{e^{y}}dy=\frac{Sen(2x)}{Cos(x)}dx$$

Antes de integrar se realiza la división del lado izquierdo y se utiliza la identidad trigonométrica $Sen(2x)=2Sen(x)Cos(x)$ en el lado derecho. Entonces tenemos que:

$$\int\left(\frac{e^{2y}}{e^{y}}-\frac{y}{e^{y}}\right)dy=\int\frac{2Sen(x)Cos(x)}{Cos(x)}dx$$

$$\int(e^{y}-ye^{-y})dy=\int 2Sen(x)\,dx$$

$$\int e^{y}dy-\int ye^{-y}dy=2\int Sen(x)dx$$

La segunda integral se resuelve usando integración por partes

$$e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}=-2Cos(x)+C$$

Usando la condición inicial $y=0$ cuando $x=0$ para hallar la constante “C”

$$e^{0}+(0)e^{-0}+e^{-0}=-2Cos(0)+C$$

$$1+0+1=-2(1)+C, entonces\ 2+2=C=4$$

Por lo tanto, una solución del problema con valores iniciales es:

$$\boldsymbol{e^{y}+ye^{-y}+e^{-y}=-2Cos(x)+4}$$

GUIA DE EJERCICIOS No.2

En los problemas 1 a 22 resuelva la ecuación diferencial dada por separación de variables.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$
2. $\dfrac{dy}{dx} = (x + 1)^2$
3. $dx + e^{3x}dy = 0$
4. $dy - (y - 1)^2dx = 0$
5. $x\dfrac{dy}{dx} = 4y$
6. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
8. $e^xy\dfrac{dy}{dx} = e^{-y} + e^{-2x-y}$
9. $y \ln x \dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y + 1}{x}\right)^2$
10. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2y + 3}{4x + 5}\right)^2$
11. $\csc y\, dx + \sec^2 x\, dy = 0$
12. $\operatorname{sen} 3x\, dx + 2y \cos^3 3x\, dy = 0$
13. $(e^y + 1)^2e^{-y}\, dx + (e^x + 1)^3e^{-x}\, dy = 0$
14. $x(1 + y^2)^{1/2}\, dx = y(1 + x^2)^{1/2}\, dy$
15. $\dfrac{dS}{dr} = kS$
16. $\dfrac{dQ}{dt} = k(Q - 70)$
17. $\dfrac{dP}{dt} = P - P^2$
18. $\dfrac{dN}{dt} + N = Nte^{t+2}$
19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$
20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2y - x - 2}{xy - 3y + x - 3}$
21. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1 - y^2}$
22. $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$

En los problemas 23 a 28 encuentre una solución explícita del problema con valores iniciales dado.

23. $\dfrac{dx}{dt} = 4(x^2 + 1), \quad x(\pi/4) = 1$
24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 - 1}{x^2 - 1}, \quad y(2) = 2$
25. $x^2\dfrac{dy}{dx} = y - xy, \quad y(-1) = -1$
26. $\dfrac{dy}{dt} + 2y = 1, \quad y(0) = \frac{5}{2}$
27. $\sqrt{1 - y^2}\, dx - \sqrt{1 - x^2}\, dy = 0, \quad y(0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
28. $(1 + x^4)\, dy + x(1 + 4y^2)\, dx = 0, \quad y(1) = 0$
29. $\dfrac{dy}{dx} = ye^{-x^2}, \quad y(4) = 1$
30. $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \operatorname{sen} x^2, \quad y(-2) = \frac{1}{3}$
31. a) Encuentre una solución al problema con valores iniciales que consiste en la ecuación diferencial del ejemplo 3 y de las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y(0) = -2$, y $y(\frac{1}{4}) = 1$.

ECUACIONES DIFERENCIALES REDUCIBLES A LA FORMA SEPARABLE

Si una ecuación dada no es de variables separables, se puede considerar la posibilidad de reducirla a dicha forma separable mediante un cambio de variable.

Un caso sencillo de esta reducción es el de las ecuaciones con coeficientes homogéneos.

Un polinomio en x e y es homogéneo de grado “n”, cuando todos sus términos son del mismo grado “n”

Definición. La función $f(x, y)$ es homogénea de grado “n” si y solo si se cumple:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Esto significa que si λx y λy sustituyen a x e y respectivamente en $f(x, y)$ y si λ^n se presenta como un factor común, el otro factor continúa siendo el mismo que en la expresión original.

Ejemplo. Determinar el grado de homogeneidad de la función:

$$f(x, y) = 3xy - 2\sqrt{3x^2y^2 - 5y^4} - 4x^2$$

Solución: aplicamos la definición.

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3(\lambda x)(\lambda y) - 2\sqrt{3(\lambda x)^2(\lambda y)^2 - 5(\lambda y)^4} - 4(\lambda x)^2$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^2 xy - 2\sqrt{3(\lambda^2 x^2)(\lambda^2 y^2) - 5\lambda^4 y^4} - 4\lambda^2 x^2$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^2 xy - 2\sqrt{3\lambda^4 x^2 y^2 - 5\lambda^4 y^4} - 4\lambda^2 x^2$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^2 xy - 2\sqrt{\lambda^4(3x^2 y^2 - 5y^4)} - 4\lambda^2 x^2$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^2 xy - 2\lambda^2\sqrt{3x^2 y^2 - 5y^4} - 4\lambda^2 x^2$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2(3xy - 2\sqrt{3x^2 y^2 - 5y^4} - 4x^2)$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$$

$f(x, y)$ es homogénea de grado dos.

Ejemplo. Determinar el grado de homogeneidad de la función:

$$f(x, y) = 2y^3 e^{y/x} - \frac{x^4}{x + 3y}$$

Solución: aplicamos la definición.

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda y)^3 e^{\lambda y/\lambda x} - \frac{(\lambda x)^4}{\lambda x + 3\lambda y}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda^3 y^3 e^{y/x} - \frac{\lambda^4 x^4}{\lambda x + 3\lambda y}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda^3 y^3 e^{y/x} - \frac{\lambda^4 x^4}{\lambda(x + 3y)}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda^3 y^3 e^{y/x} - \frac{\lambda^3 x^4}{(x + 3y)}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3\left(2y^3 e^{y/x} - \frac{x^4}{(x + 3y)}\right) = \lambda^3 f(x, y)$$

Puede verse que $f(x, y)$ es homogénea de grado tres.

Observación. Si la función $f(x, y)$ es polinomial, basta con que todos los términos del polinomio sean del mismo grado para poder decir o conocer el grado de homogeneidad de $f(x, y)$.

Ejemplo. $f(x, y) = 7x^3y^2 - 4x^2y^3 + 9xy^4 + 13x^4y$**,** es una función homogénea de grado 5, ya que todos los términos del polinomio son de quinto grado.

Definición. Sea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, una ecuación diferencial de primer orden diremos que es homogénea si las funciones $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas del mismo grado.

Ejemplo. $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy}\right)dx - xdy = 0$
Solución la Ecuación diferencial tiene la forma: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, donde

$$M(x,y) = y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy}\text{ , de tal manera que}$$

$$M(\lambda x, y\lambda) = \lambda y + \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y)}$$

$$M(\lambda x, y\lambda) = \lambda y + \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - \lambda^2 (xy)}$$

$$M(\lambda x, y\lambda) = \lambda y + \sqrt{\lambda^2 (x^2 + y^2 - xy)}$$

$$M(\lambda x, y\lambda) = \lambda y + \lambda\sqrt{x^2 + y^2 - xy} = \lambda(y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy})$$

$$M(\lambda x, y\lambda) = \lambda M(x,y)\text{, Homogénea de grado uno}$$

Evidentemente $N(x,y) = -x$, es homogénea de grado uno.

Por lo tanto $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy}\right)dx - xdy = 0$, es una ED homogénea de grado uno.

Ejemplo. Resolver la ED siguiente $(2x^2 - 8y^2)dx + 5xydy = 0$
Solución: en la ecuación dada se tiene

$$M(x,y) = 2x^2 - 8y^2, \qquad N(x,y) = 5xy$$

Haciendo el análisis anterior se tiene $M(x,y)$ es una función homogénea de grado dos y $N(x,y)$ también es homogénea de grado dos.

Por lo anterior podemos concluir que: $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2 - xy}\right)dx - xdy = 0$, es una ED homogénea de grado dos.

Si $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$, es homogénea, entonces el cambio de variable $\boldsymbol{y = vx,}$ donde $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(vx) = v + x\frac{dv}{dx}$, luego $\boldsymbol{dy} = \left(v + x\frac{dv}{dx}\right)dx = \boldsymbol{vdx + xdv}$ transforma la ecuación $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$ en una ecuación de variables separables en x y v.

Ejemplo. Resolver $(2x^2 - 8y^2)dx + 5xydy = 0$
Solución: Sustituir $\boldsymbol{y = vx}$ y a $\boldsymbol{dy = vdx + xdv}$ en la ecuación diferencial dada

$$(2x^2 - 8\boldsymbol{y}^2)dx + 5xy\boldsymbol{dy} = 0$$

$$(2x^2 - 8(\boldsymbol{vx})^2)dx + 5x(vx)(\boldsymbol{vdx + xdv}) = 0$$

$$(2x^2 - 8v^2x^2)dx + 5x^2v(\boldsymbol{vdx + xdv}) = 0$$

$$2x^2dx - 8v^2x^2dx + 5x^2v^2dx + 5x^3vdv = 0$$

$$2x^2dx - 3x^2v^2dx + 5x^3vdv = 0$$

$$x^2(2 - 3v^2)dx = -5x^3vdv$$

Esta última ecuación es de variables separables y se puede multiplicar a ambos lados de la igualdad por un factor integrante de la forma: $\frac{1}{x^3(2-3v^2)}$

$$\frac{1}{x^3(2-3v^2)}(x^2(2-3v^2)dx) = \frac{1}{x^3(2-3v^2)}(-5x^3vdv)$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{-5v}{2-3v^2}dv$$

Integrando a ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{-5v}{2-3v^2}dv$$

En la segunda integral hacer cambio de variable $W = 2 - 3v^2$, $dW = -6vdv,\ \ \frac{dW}{-6v} = dv$

$$Ln|x| + Ln|A| = \int \left(\frac{-5v}{W}\right)\frac{dW}{-6v} = \frac{5}{6}\int \frac{dW}{W} = \frac{5}{6}Ln|W|$$

$$Ln|x| + Ln|A| = \frac{5}{6}Ln|2-3v^2|\ , tomando\ c = Ln|A|\ (1)$$

$$Ln|A||x| = \frac{5}{6}Ln|2-3v^2|$$

$$6Ln|A||x| = 5Ln|2-3v^2|$$

$$Ln(|A||x|)^6 = Ln(|2-3v^2|)^5$$

$$(|A||x|)^6 = (|2-3v^2|)^5$$

Sustituyendo $\boldsymbol{y = vx,}$ obtenemos:

$$(|A||x|)^6 = \left(\left|2 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|\right)^5$$

Al trabajar llegamos a que $Bx^6 = (2x^2 - 3y^2)^5$, donde $B = A^6$, es solución de la EDO: $(2x^2 - 8y^2)dx + 5xydy = 0$

$\therefore Bx^6 = (2x^2 - 3y^2)^5$ es la solución de la ED dada.

Otra solución. Partiendo de (1) y usando "c" en lugar del logaritmo natural de A y sustituir $\boldsymbol{y = vx,\ \frac{y}{x} = v}$

$$Ln|x| + Ln|A| = \frac{5}{6}Ln|2 - 3v^2|\,,\,tomando\ c = Ln|A|\ (1)$$

$$Ln|x| + c = \frac{5}{6}Ln|2 - 3v^2|$$

$$Ln|x| + c = \frac{5}{6}Ln\left|2 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|$$

Por lo tanto, la solución de la ED homogénea $(2x^2 - 8y^2)dx + 5xydy = 0$ es:

$$\boldsymbol{Ln|x| + c = \frac{5}{6}Ln\left|2 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|}$$

GUIA DE EJERCICIOS No.3

Cada una de las ED de los problemas 1-14 es homogénea.

En los problemas 1 a 10 resuelva la ecuación diferencial dada usando las sustituciones adecuadas.

1. $(x - y)\,dx + x\,dy = 0$ **2.** $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$

3. $x\,dx + (y - 2x)\,dy = 0$ **4.** $y\,dx = 2(x + y)\,dy$

5. $(y^2 + yx)\,dx - x^2\,dy = 0$

6. $(y^2 + yx)\,dx + x^2\,dy = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y - x}{y + x}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{3x + y}$

9. $-y\,dx + \left(x + \sqrt{xy}\right)dy = 0$

10. $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad x > 0$

En los problemas 11 a 14 resuelva el problema con valores iniciales dado.

11. $xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3, \quad y(1) = 2$

12. $(x^2 + 2y^2)\dfrac{dx}{dy} = xy, \quad y(-1) = 1$

13. $(x + ye^{y/x})\,dx - xe^{y/x}\,dy = 0, \quad y(1) = 0$

14. $y\,dx + x(\ln x - \ln y - 1)\,dy = 0, \quad y(1) = e$

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS Y FACTORES INTEGRANTES

Definición. Sea F una función de dos variables reales tales que F tiene primeras derivadas parciales continuas en un dominio D. La diferencial total de la función F se denota por dF y se define por $\boldsymbol{dF(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy}$, para todo par o punto (x, y) en D.

Ejemplo. Sea $F(x,y) = 2x^2y^3 - 3x^3y^2 + 5xy$. Encontrar la diferencial total de F

$$dF(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y^3 - 3x^3y^2 + 5xy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y^3 - 3x^3y^2 + 5xy)dy$$

$$dF(x,y) = (4xy^3 - 9x^2y^2 + 5y)dx + (6x^2y^2 - 6x^3y + 5x)dy$$

Definición. La ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ se llama diferencial exacta en un dominio D, si existe una función F de dos variables reales, tales que esta expresión sea igual a la diferencial total $dF(x,y)$ para todo (x,y) en D, es decir que la expresión $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta en D si existe una función F tal que:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad y \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

para todo (x,y) en D.

Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ es una diferencial exacta, entonces la ecuación diferencial $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$, se llama **Ecuación Diferencial exacta**.

Ejemplo. La ecuación $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$, es exacta, ya que existe una función F de la forma siguiente $F(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^3$, tal que:

$$\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) = x^2y^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) = x^3y^2$$

Luego:

$$\boldsymbol{dF(x,y)} = \frac{\boldsymbol{\partial F(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}}\boldsymbol{dx} + \frac{\boldsymbol{\partial F(x,y)}}{\boldsymbol{\partial y}}\boldsymbol{dy} = x^2y^3dx + x^3y^2dy$$

El siguiente teorema proporciona un proceso que nos permite determinar si una ecuación diferencial es exacta.

Teorema de exactitud. Consideremos una Ecuación diferencial de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en todos los puntos (x,y) en el dominio D.

1) Si $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, es exacta en D, entonces $\frac{\boldsymbol{\partial M(x,y)}}{\boldsymbol{\partial y}} = \frac{\boldsymbol{\partial N(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}}$**,** para todo punto (x,y) en D.
2) Recíprocamente si $\frac{\boldsymbol{\partial M(x,y)}}{\boldsymbol{\partial y}} = \frac{\boldsymbol{\partial N(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}}$**,** para todo punto (x,y) en D, entonces la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta en D.

Nota: Para aplicar el criterio de exactitud, la Ecuación diferencial debe estar en forma estándar $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Ejemplo: Verificar si la ecuación diferencial siguiente es exacta

$$(\boldsymbol{2xSen(y)} + \boldsymbol{y^3e^x})dx + (\boldsymbol{x^2Cos(y)} + \boldsymbol{3y^2e^x})dy = 0$$

Solución:

Sea $M(x,y) = 2xSen(y) + y^3e^x$ y $N(x,y) = x^2Cos(y) + 3y^2e^x$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xSen(y) + y^3e^x) = 2xCos(y) + 3y^2e^x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2Cos(y) + 3y^2e^x) = 2xCos(y) + 3y^2e^x$$

Puede verse que: $\frac{\boldsymbol{\partial M(x,y)}}{\boldsymbol{\partial y}} = \frac{\boldsymbol{\partial N(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}}$**,** podemos concluir que la ecuación diferencial dada es exacta.

Ejemplo: Verificar si la ecuación diferencial siguiente es exacta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - Cos(x)Sen(x)}{y(1-x^2)}$$

Solución. Reescribir la ED en la forma estándar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - Cos(x)Sen(x)}{y(1-x^2)}$$

$$y(1-x^2)dy = (xy^2 - Cos(x)Sen(x))dx$$

$$-\left(xy^2 - Cos(x)Sen(x)\right)dx + y(1-x^2)dy = 0$$

Entonces:

$$M(x,y) = -\left(xy^2 - Cos(x)Sen(x)\right)\ y\ N(x,y) = y(1-x^2)$$

Para que la ecuación diferencial sea exacta debe cumplir: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\left(xy^2 - Cos(x)Sen(x)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-xy^2 + Cos(x)Sen(x))$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = -2xy$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y(1-x^2)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(y - yx^2) = -2xy$$

Como

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = -2xy$$

Entonces la ED siguiente $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 - Cos(x)Sen(x)}{y(1-x^2)}$ **es exacta**

GUIA DE EJERCICIOS No. 4

En los problemas 1 a 20 determine si la ecuación diferencial dada es exacta.

1. $(2x - 1)\,dx + (3y + 7)\,dy = 0$
2. $(2x + y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$
3. $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$
4. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\,dx + (\cos x + x\cos y - y)\,dy = 0$
5. $(2xy^2 - 3)\,dx + (2x^2y + 4)\,dy = 0$
6. $\left(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x\right)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen} 3x = 0$
7. $(x^2 - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy = 0$
8. $\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)\,dy$
9. $(x - y^3 + y^2 \operatorname{sen} x)\,dx = (3xy^2 + 2y\cos x)\,dy$
10. $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$
11. $(y \ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\frac{1}{y} + x\ln y\right)dy = 0$
12. $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$
13. $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$
14. $\left(1 - \frac{3}{y} + x\right)\frac{dy}{dx} + y = \frac{3}{x} - 1$
15. $\left(x^2y^3 - \frac{1}{1 + 9x^2}\right)\frac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$
16. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$
17. $(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$
18. $(2y \operatorname{sen} x \cos x - y + 2y^2e^{xy^2})\,dx = (x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})\,dy$
19. $(4t^3y - 15t^2 - y)\,dt + (t^4 + 3y^2 - t)\,dy = 0$
20. $\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t^2 + y^2}\right)dt + \left(ye^y + \frac{t}{t^2 + y^2}\right)dy = 0$

Determinar los valores de las constantes A y B de tal manera que las siguientes ecuaciones diferenciales sean exactas.

1) $(y^2 + x^2)dx + (Axy + By))dy = 0$
2) $(Ln(x) + B)dx + \left(\frac{x}{y} + A\right)dy = 0$
3) $(AxSen(y) - 9)dx + \left(Bx^2 - Cos(y)\right)dy = 0$
4) $(Ae^x + x^2)dx + \left(Bx^2 - Cos(y)\right)dy = 0$
5) $ASen^{-1}(y)dx + \frac{Bx}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$

MÉTODO DE SOLUCIÓN.

Para resolver una ecuación diferencial de la forma: $\mathrm{M(x,y)\ dx\ + N(x,y)\ dy = 0}$, se siguen los siguientes pasos:

1) Verificamos que la ED es exacta	$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$
2) Establecer la igualdad	$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$
3) Integrar con respecto a la variable “x”, considerando a “y” como constante	$\int \frac{\boldsymbol{\partial F(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}} dx = \int M(x,y)\,dx$
4) Al ser “y” constante podemos designar por g(y) a la constante de integración C. Es decir, $C = g(y)$	$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$
5) Derivar con respecto a “y” a ambos lados de la ecuación	$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g(y)$
6) Anteriormente, designamos $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$	$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g(y)$ $= N(x,y)$
7) Despejamos $g'(y)$	$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$
8) Integrar con respecto a “y” para obtener para obtener $\mathrm{F(x,y)}$, que es una función	g(y). El valor obtenido lo sustituimos en 4 implícita de “y” con respecto a “x”

La solución de la ED exacta se expresa implícitamente de la manera siguiente:

$$\boldsymbol{F(x,y) = C}$$

Ejemplo Resolver la ED $(6xy-y^3)dx+(4y+3x^2-3xy^2)dy=0$
Solución. Primero verificar que es exacta.

$$M(x,y)=(6xy-y^3); \qquad N(x,y)=(4y+3x^2-3xy^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(6xy-y^3)=6x-3y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(4y+3x^2-3xy^2)=6x-3y^2$$

La ecuación diferencial es exacta.
Hacer $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y)=6xy-y^3$
Integrar con respecto a "x"

$$\int \frac{\boldsymbol{\partial F(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}}\,dx=\int(6xy-y^3)\,dx=\int 6xy\,dx-\int y^3\,dx=3x^2y-xy^3+g(y)$$

$$F(x,y)=3x^2y-xy^3+g(y) \quad (*)$$

Derivar con respecto a "y" a ambos lados de la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y-xy^3+g(y)\right)=3x^2-3xy^2+g'(y)=N(x,y)$$

Es decir:

$$3x^2-3xy^2+g'(y)=4y+3x^2-3xy^2$$

$$g'(y)=4y+3x^2-3xy^2-3x^2+3xy^2$$

$$g'(y)=4y$$

Integrando con respecto a "y" para obtener g(y)

$$\int g'(y)\,dy=\int 4y\,dy$$

$$g(y)=2y^2$$

Sustituyendo en (*) este valor para obtener $F(x,y)=3x^2y-xy^3+2y^2$

Por lo tanto, la solución general de $(6xy-y^3)dx+(4y+3x^2-3xy^2)dy=0$, esta dada de manera implícita por ($F(x,y)=C$).
Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$\boldsymbol{3x^2y-xy^3+2y^2=C}$$

Ejemplo Resolver $(e^x + y)dx + (2 + x + ye^y)dy = 0, y(0) = 1$
Solución. Primero verificar que es exacta.

$$M(x,y) = (e^x + y); \qquad N(x,y) = (2 + x + ye^y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x + y) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2 + x + ye^y) = 1$$

La ecuación diferencial es exacta.
Hacer $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = e^x + y$
Integrar con respecto a "x"

$$\int \frac{\boldsymbol{\partial F(x,y)}}{\boldsymbol{\partial x}} dx = \int (e^x + y)\, dx = \int e^x\, dx - \int y\, dx = e^x + yx + g(y)$$

$$F(x,y) = e^x + yx + g(y) \quad (*)$$

Derivar con respecto a "y" a ambos lados de la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\big(e^x + yx + g(y)\big) = x + g'(y) = N(x,y)$$

Es decir:

$$x + g'(y) = 2 + x + ye^y$$

$$g'(y) = -x + 2 + x + ye^y$$

$$g'(y) = 2 + ye^y$$

Integrando con respecto a "y" para obtener g(y)

$$\int g'(y)\, dy = \int (2 + ye^y) dy$$

$$g(y) = 2y + ye^y - e^y$$

Sustituyendo en (*) este valor para obtener $F(x,y) = e^x + yx + 2y + ye^y - e^y$

Por lo tanto, la solución general de $(e^x + y)dx + (2 + x + ye^y)dy = 0$ esta dada de manera implícita por ($F(x,y) = C$).

La solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$e^x + yx + 2y + ye^y - e^y = C$$

La solución particular se encuentra utilizando el problema con valor inicial $y(0) = 1$ o el par ordenado (0,1) para encontrar el valor de "C"

$$e^x + yx + 2y + ye^y - e^y = C$$

$$e^0 + 1(0) + 2(1) + 1e^1 - e^1 = 3 = C$$

Por lo tanto, la solución particular de la ED $(e^x + y)dx + (2 + x + ye^y)dy = 0$ con el valor inicial $y(0) = 1$ es:

$$e^x + yx + 2y + ye^y - e^y = 3$$

GUIA DE EJERCICIOS No. 5

Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, primero verifique que son exactas, luego resolver el problema de valor inicial.

1) $2xydx + (1 + x^2)dy = 0$
2) $(3xy^4 + x)dx + (6x^2y^3 - 2y^2 + 7)dy = 0$
3) $(2x^2 + 5xy^2)dx + (5x^2y - 2y^4)dy = 0$
4) $Sec^2(x)Tan(y)dx + Sec^2(y)Tan(x)dy = 0$
5) $(x^2 + ye^{2y})dx + (2xy + x)e^{2y}dy = 0$
6) $\big(Sen(x) + Sen(y)\big)dx + \big(xCos(y) + Cos(y)\big)dy = 0$
7) $(4x - 2y + 3)dx + (5y - 2x + 7)dy = 0,\ y(1) = 2$
8) $\big(2xSen(y) + 2x + 3yCos(x)\big)dx + \left(x^2Cos(y) + 3Sen(x)\right)dy = 0,$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
9) $(-2xy + 5)dx - (x^2 + 1)dy = 0, y(1) = 4$
10) $(3y - xy + e^x)dx + \left(3x - \frac{x^2}{2} + y\right)dy = 0, y(0) = -2$
11) $\left(-5y + y^2 + Cos(x)\right)dx + \big(-5x + 2xy - Sen(y)\big)dy = 0, y(0) = \pi/2$

FACTORES INTEGRANTES.

Si la ED $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ no es exacta, existe la posibilidad de encontrar un factor integrante, tal que multiplicada la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ por dicho factor integrante, el producto que resulte es una ED exacta.

Se estudian dos casos:

1) Cuando el factor integrante es función solo de la variable "x". Si la expresión

$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}(N(x,y)\right)=Q(x)$, donde Q(x) es una función de la

variable "x", entonces existe un factor integrante de la forma:

$$U(x)=e^{\int \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}(N(x,y)\right)dx}=e^{\int Q(x)dx}$$

De manera que la ecuación $U(x)M(x,y)dx+U(x)N(x,y)dy=0$ es exacta.

Si la expresión $\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}(N(x,y)\right)$ no es una función que depende únicamente de la variable "x", entonces la ED $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ no posee un factor integrante que dependa de "x"

2) Cuando el factor integrante U es función únicamente de la variable "y". Si la expresión $\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)\right)=Q(y)$, donde Q(y) es una función de la variable "y", entonces existe un factor integrante de la forma:

$$U(y)=e^{\int \frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}(N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)\right)dy}=e^{\int Q(y)dy}.$$

De manera que la ecuación $U(y)M(x,y)dx+U(y)N(x,y)dy=0$ es exacta.

Ejemplo. Resolver $(3y^2+4x)dx+(2xy)dy=0$
Solución. Sean $M(x,y)=3y^2+4x,\ \ y\ \ N(x,y)=2xy$
Primero verificar si es exacta.

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(3y^2+4x)=6y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(2xy)=2y$$

Como la ED no es exacta buscar el factor integrante.

$$\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}(M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}(N(x,y)\right)=\frac{1}{2xy}(6y-2y)=\frac{1}{2xy}(4y)=\frac{2}{x}=Q(x)$$

donde Q(x) es una función de la variable "x", entonces existe un factor integrante de la forma:

$$U(x)=e^{\int Q(x)dx}=e^{\int \frac{2}{x}dx}=e^{2Ln|x|}=e^{Ln|x|^2}=x^2$$

Multiplicar la ED dada por $U(x)=x^2$, para convertirla en una ED exacta.

$$x^2(3y^2+4x)dx+x^2(2xy)dy=x^2(0)$$

$$(3x^2y^2 + 4x^3)dx + (2x^3y)dy = 0$$

Donde $M(x,y) = 3x^2y^2 + 4x^3$; $N(x,y) = 2x^3y$ aplicando el criterio de exactitud tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + 4x^3) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y) = 6x^2y$$

Puede verse que: $\frac{\partial}{\partial y}U(x)M(x,y)dx = \frac{\partial}{\partial x}U(x)N(x,y)dy$

Se concluye que $\boldsymbol{(3x^2y^2 + 4x^3)dx + (2x^3y)dy = 0}$, es exacta y se resuelve como tal.

Para ello se siguen los pasos del ejemplo anterior.

Hacer $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 3x^2y^2 + 4x^3$
Integrar con respecto a "x"

$$\int \boldsymbol{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}\,dx = \int (3x^2y^2 + 4x^3)\,dx = \int 3x^2y^2\,dx + \int 4x^3\,dx = x^3y^2 + x^4 + g(y)$$

$$F(x,y) = x^3y^2 + x^4 + g(y) \quad (*)$$

Derivar con respecto a "y" a ambos lados de la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y^2 + x^4 + g(y)\right) = 2x^3y + g'(y) = N(x,y)$$

Es decir:

$$2x^3y + g'(y) = \boldsymbol{2x^3y}$$

$$g'(y) = \boldsymbol{2x^3y - 2x^3y = 0}$$

$$g'(y) = 0$$

Integrando con respecto a "y" para obtener g(y)

$$\int g'(y)\,dy = \int 0\,dy$$

$$g(y) = \boldsymbol{K}$$

Sustituyendo en (*) este valor para obtener $F(x,y) = x^3y^2 + x^4 + \boldsymbol{K}$

Por lo tanto, la solución general de $(\boldsymbol{3y^2}+\boldsymbol{4x})\boldsymbol{dx}+(\boldsymbol{2xy})\boldsymbol{dy}=0$, esta dada de manera implícita por ($F(x,y)=C$), es decir la solución general es: $x^3y^2+x^4+\boldsymbol{K}=C$

Otra forma de expresar la solución general es la siguiente:

$$\boldsymbol{x^3y^2+x^4=R; donde\ R=C-K}$$

GUIA DE EJERCICIOS No. 6

En los problemas siguiente resuelva la ecuación diferencial dada determinando, un factor integrante adecuado.

$(2y^2+3x)\,dx+2xy\,dy=0$

$y(x+y+1)\,dx+(x+2y)\,dy=0$

$6xy\,dx+(4y+9x^2)\,dy=0$

$\cos x\,dx+\left(1+\dfrac{2}{y}\right)\operatorname{sen} x\,dy=0$

$(10-6y+e^{-3x})\,dx-2\,dy=0$

$(y^2+xy^3)\,dx+(5y^2-xy+y^3\operatorname{sen} y)\,dy=0$

En los problemas siguientes resuelva la ecuación diferencial dada determinando, un factor integrante adecuado y resolver el problema con valor inicial dado.

$x\,dx+(x^2y+4y)\,dy=0,\quad y(4)=0$

$(x^2+y^2-5)\,dx=(y+xy)\,dy,\quad y(0)=1$

ECUACIONES LINEALES Y ECUACIONES DE BERNOULLI

Se dice que una ecuación diferencial de primer orden, de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \qquad (1)$$

es una **ecuación lineal** en la variable dependiente “y”.

Cuando $g(x)=0$ se dice que la ecuación lineal (1) es homogénea, de lo contrario es no homogénea.

Forma estándar:

Al dividir ambos lados de (1) entre el primer coeficiente $a_1(x)$ se obtiene una forma más útil, la **forma estándar** de una ecuación lineal.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \quad (2)$$

Donde $P(x)$ es función de la variable independiente “x” y $Q(x)$ también.

La ED (2) tiene la propiedad de que su solución es la suma de las dos soluciones:

$$\boldsymbol{y=y_c+y_p}$$

Donde $\boldsymbol{y_c}$ es una solución de la ecuación homogénea asociada $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ y $\boldsymbol{y_p}$ es una solución particular de la ecuación (2) no homogénea $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$.

Método de solución de una ecuación lineal de primer orden.

1) Escribir la ecuación lineal en la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, si no está escrita en esta forma.
2) Determinar $e^{\int P(x)dx}$
3) La familia uniparamétrica de soluciones de la ED (2) viene dada por la solución general:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right) \quad (3)$$

En este tópico es común usar la propiedad de los exponentes $e^{Lnx)} = x$

Ejemplo. Resolver $ydx + xdy + 2xydx - xe^{-2x}dx = 0$,

Solución. Como la ED dada no está en la forma estándar $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, razón por la cual es necesario hacer las operaciones algebraicas para llevarla a la forma estándar.

$$ydx + xdy + 2xydx - xe^{-2x}dx = 0,$$

Dividiendo entre xdx se obtiene:

$$\frac{ydx}{xdx} + \frac{xdy}{xdx} + \frac{2xydx}{xdx} - \frac{xe^{-2x}dx}{xdx} = 0$$

$$\frac{y}{x} + \frac{dy}{dx} + 2y - e^{-2x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{y}{x} + 2y\right) = e^{-2x}$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x} + 2\right)y = e^{-2x}$$

Donde $P(x) = \frac{1}{x} + 2$ y $Q(x) = e^{-2x}$. Aplicando la fórmula (3) para obtener la solución general de la ED dada así:

$$y = e^{-\int\left(\frac{1}{x}+2\right)dx}\left(\int e^{\int\left(\frac{1}{x}+2\right)dx}\, e^{-2x}dx + c\right)$$

$$y = e^{-(Ln(x)+2x)}\left(\int e^{(Ln(x)+2x)}\, e^{-2x}dx + c\right)$$

$$y = e^{-Ln(x)-2x}\left(\int e^{Ln(x)}e^{2x}\, e^{-2x}dx + c\right)$$

$$y = e^{-Ln(x)}e^{-2x}\left(\int e^{Ln(x)}e^{0}dx + c\right) = e^{Ln\left(x^{-1}\right)}e^{-2x}\left(\int e^{Ln(x)}dx + c\right)$$

$$= x^{-1}e^{-2x}\left(\int xdx + c\right) = \frac{1}{x}e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

Por lo que la solución general de la ED dada es $y = \frac{1}{x}e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

Ejemplo. Resolver la ecuación $2(y - 4x^2)dx + xdy = 0, y(2) = 1$
Solución. Como la ED dada no está en la forma estándar $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, razón por la cual es necesario hacer las operaciones algebraicas para llevarla a la forma estándar.

$$2(y - 4x^2)dx + xdy = 0$$

Dividiendo entre xdx se obtiene:

$$\boldsymbol{\frac{2(y - 4x^2)dx}{xdx} + \frac{xdy}{xdx} = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + \frac{2y - 8x^2}{x} = \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} - \frac{8x^2}{x} = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 8x}$$

Donde $p(x) = \frac{2}{x}, Q(x) = 8x$. Aplicando la fórmula (3) para obtener la solución general de la ED dada así:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right) \quad (3)$$

$$y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}\left(\int e^{\int \frac{2}{x}dx}8xdx + c\right)$$

$$y = e^{-2Ln(x)}\left(\int e^{2Ln(x)}\,8xdx + c\right)$$

$$y = e^{Ln\left(x^{-2}\right)}\left(\int e^{Ln\left(x^{2}\right)}\,8xdx + c\right)$$

$$y = x^{-2}\left(\int x^2\,8xdx + c\right) = x^{-2}\left(\int 8x^3dx + c\right) = x^{-2}\left(8\frac{x^4}{4} + c\right)$$

$$y = x^{-2}(2x^4 + c) \quad (*)$$

Utilizando la condición inicial $y(2) = 1\ o\ x = 2, y = 1$, sustituyendo en *

$$1 = 2^{-2}(2(2^4) + c), entonces\ 1 = \frac{1}{4}\ (32 + c)$$

$$\mathbf{4 = 32 + c \rightarrow 4 - 32 = c = -28}$$

Por lo tanto $y = x^{-2}(2x^4 - 28)$

Conclusión.

La solución general de la ecuación diferencial: $2(y - 4x^2)dx + xdy = 0, y(2) = 1$ es: $y = x^{-2}(2x^4 + c)$

La solución particular es: $y = x^{-2}(2x^4 - 28)$, con la condición inicial $y(2) = 1$

GUIA DE EJERCICIOS No. 7

En los problemas 1 a 24 determine la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $\frac{dy}{dx} = 5y$
2. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
3. $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$
4. $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$
5. $y' + 3x^2y = x^2$
6. $y' + 2xy = x^3$
7. $x^2y' + xy = 1$
8. $y' = 2y + x^2 + 5$
9. $x\frac{dy}{dx} - y = x^2 \operatorname{sen} x$
10. $x\frac{dy}{dx} + 2y = 3$
11. $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$
12. $(1 + x)\frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$
13. $x^2y' + x(x + 2)y = e^x$
14. $xy' + (1 + x)y = e^{-x} \operatorname{sen} 2x$
15. $y\,dx - 4(x + y^6)\,dy = 0$
16. $y\,dx = (ye^y - 2x)\,dy$
17. $\cos x\frac{dy}{dx} + (\operatorname{sen} x)y = 1$
18. $\cos^2 x \operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} + (\cos^3 x)y = 1$
19. $(x + 1)\frac{dy}{dx} + (x + 2)y = 2xe^{-x}$
20. $(x + 2)^2\frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$
21. $\frac{dr}{d\theta} + r\sec\theta = \cos\theta$
22. $\frac{dP}{dt} + 2tP = P + 4t - 2$
23. $x\frac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{-3x}$
24. $(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 2y = (x + 1)^2$

En los problemas 25 a 30 resuelva el problema con valores iniciales.

25. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = 2$

26. $y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2, \quad y(1) = 5$

29. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x, \quad y(1) = 10$

30. $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad y(0) = -1$

ECUACION DE BERNOULLI

La ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ (4)
donde n es cualquier número real, se llama **ecuación de Bernoulli.** Se puede observar que para $n = 0$ y $n = 1$, la ecuación (4) es lineal. Para $n \neq 0$ y $n \neq 1$, la sustitución $u = y^{-n+1}$ reduce cualquier ecuación de la forma (4) a una ecuación lineal.
La ecuación (4) puede ponerse de la forma

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x) \quad (5)$$

al dividir cada termino entre y^n.

Al hacer $u = y^{-n+1}$ la derivada de "u" es:

$$\frac{d}{dx}(u) = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(y^{-n+1}) = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

De este modo al multiplicar la ecuación (5) por $(-n+1)$ queda una ecuación en la variable "x" y "u" de la forma:

$$(-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (-n+1)P(x)y^{-n+1} = (-n+1)Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} + (-n+1)P(x)u = (-n+1)Q(x) \quad (6)$$

La ecuación (6) es una ecuación lineal en la forma estándar. De aquí que cualquier ecuación de Bernoulli puede resolverse con la ayuda del cambio de variable anterior para variable dependiente (a menos que $n = 1$, en la que la sustitución no es necesaria)

Ejemplo. Resolver $x\frac{dy}{dx} + y = x^2y^2$
Solución. Primero dividir entre "x" cada término.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2(*)$$

Con $\boldsymbol{n=2, u=y^{-n+1}=y^{-1}}$. Al derivar con respecto a "x" a ambos lados de la igualdad de: $\boldsymbol{u=y^{-1}}$ obtenemos**:**

$$\frac{d}{dx}(u)=\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(y^{-1})=-1y^{-2}.\frac{dy}{dx}=-y^{-2}.\frac{dy}{dx}$$

Multiplicar cada término de (*) por $-y^{-2}$ se obtiene:

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx}+(-y^{-2})\frac{1}{x}y=(-y^{-2})xy^2$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}y^{-1}=x \;\rightarrow \boldsymbol{\frac{du}{dx}+\left(-\frac{1}{x}u\right)=-x}$$

Donde $P(x)=-\frac{1}{x}, Q(x)=-x$, donde se resuelve como una ED. Lineal en la variable "u"

Primero determinar $e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{-1}{x}dx}=e^{-Ln(x)}$
Sustituir en la formula siguiente los valores:

$$u=e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx+c\right)$$

$$u=e^{-(-Ln(x))}\left(\int e^{-Ln(x)}(-x)dx+c\right)=e^{Ln(x)}\left(\int e^{Ln\left(x^{-1}\right)}(-x)dx+c\right)$$

$$u=x\left(\int x^{-1}(-x)dx+c\right)=x\left(\int -1\,dx+c\right)=x(-x+c)$$

Sustituir $\boldsymbol{u=y^{-1}}$.

$$\boldsymbol{y^{-1}}=x(-x+c), entonces\ \frac{1}{y}=-x^2+cx$$

Por lo que la solución general de la ED: $x\frac{dy}{dx}+y=x^2y^2$ es: $\boldsymbol{y=\frac{1}{-x^2+cx}}$

GUIA DE EJERCICIOS No.8

· Resuelva del 1 a 6 la respectiva ecuación de Bernoulli empleando la sustitución adecuada.

1) $\frac{dy}{dx}-y=e^xy^2$

2) $x\frac{dy}{dx}-(1+x)y=xy^2$

3) $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=(1+ln(x))y^3$

4) $\frac{dy}{dx}+y=(\cos(x)-sen(x))y^2$

5) $3(1+x^2)\frac{dy}{dx}=2xy(y^3-1)$

6) $y^{1/2}\frac{dy}{dx}+y^{3/2}=1\rightarrow$ condición inicial: $y(0)=4$

Resolver la Ecuación Diferencial de Bernoulli

$y' + 3x^2y = x^2y^3$

$y' + xy = xy^{-1}$

$y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = xy^2$

$y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = x\sqrt{y}$

$xy' + y = xy^3$

$y' - y = y^3$

$y' - y = e^x\sqrt[3]{y}$

$yy' - 2y^2 = e^x$