UNIDAD IV: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR

Introducción. Anteriormente vimos que se pueden resolver algunas ecuaciones diferenciales de primer orden si se reconocen como separables, exactas, homogéneas o quizás como ecuaciones de Bernoulli.
Aunque las soluciones de estas ecuaciones estuvieran en la forma de una familia uniparamétrica, esta familia, con una excepción, no representa la solución de la ecuación diferencial.
Sólo en el caso de las ED *lineales* de primer orden se pueden obtener soluciones generales considerando ciertas condiciones iniciales.
Recuerde que una **solución general** es una familia de soluciones definida en algún intervalo *I* que contiene *todas* las soluciones de la ED que están definidas en *I*. Como el objetivo principal de esta unidad es encontrar soluciones generales de ED lineales de orden superior, primero necesitamos examinar un poco de la teoría de ecuaciones lineales.

Problemas de valor inicial y de valores en la frontera
Anteriormente se definió un problema con valores iniciales para una ED lineal de n-ésimo orden. Para una ED lineal, **un problema con valores iniciales de n-ésimo orden** es:

Resolver:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1)$$

Sujeta a:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

Para un problema como este se busca una función definida en algún intervalo I que contenga a x_0 y satisfaga la ED y las "n" condiciones iniciales que se especifican en x_0:

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$

Ya hemos visto que, en el caso de un problema con valores iniciales de segundo orden, una curva solución debe pasar por el punto (x_0, y_0) y tener pendiente y_1 en este punto.

Problemas con valores en la frontera. Otro tipo de problema similar al PVI consiste en resolver una ED de segundo orden o mayor en la cual la variable dependiente "y", o sus derivadas estén especificadas en puntos diferentes. Por ejemplo, un problema como:

Resolver: $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$,

sujeto a $y(a) = y_0, \qquad y(b) = y_1$

Se denomina problema de valores en la frontera (PVF). Las condiciones impuestas se conocen como **condiciones de frontera.** Una solución al problema anterior es una función que satisface la ecuación diferencial en algún intervalo I, que contiene a ***a*** y ***b***, cuya gráfica pasa por los puntos (a, y_0) y (b, y_1)

Para una ED de segundo orden, otros pares de condiciones en la frontera podrían ser:

$$y'(a) = y_0, \qquad y(b) = y_1$$

$$y(a) = y_0, \qquad y'(b) = y_1$$

$$y'(a) = y_0, \qquad y'(b) = y_1$$

Ejemplo. Use la familia biparamétrica de soluciones $y = c_1 Cos(x) + c_2 Sen(x)$ de la ED $y'' + y = 0$. Para encontrar una solución que satisfaga las condiciones de frontera:

a) $y(0) = 1, y(\pi) = 1$
b) $y(0) = 1, y(2\pi) = 1$
c) $y(0) = 1, y(\pi/4) = 1$

Solución.

a) La primera condición implica que:
$1 = c_1 Cos(0) + c_2 Sen(0), entonces\ c_1 = 1$

$1 = c_1 Cos(\pi) + c_2 Sen(\pi), entonces\ c_1 = -1$
Como no podemos hacer que c_1 sea igual a 1 y -1 al mismo tiempo, esta condición implica que el problema de valores en la frontera no tiene solución.

b) La primera condición y segunda condición implican que:
$1 = c_1 Cos(0) + c_2 Sen(0)\ \ y\ \ 1 = c_1 Cos(2\pi) + c_2 Sen(2\pi)$
Del sistema resulta que $c_1 = 1$, pero no podemos encontrar el valor de c_2. Esto nos indica que cualquier valor es correcto en otras palabras, el PVF presenta una infinidad de soluciones de la forma: $y = Cos(x) + c_2 Sen(x)$

c) Finalmente, el par de condiciones implican que:
$1 = c_1 Cos(0) + c_2 Sen(0)\ \ y\ \ 1 = c_1 Cos(\pi/4) + c_2 Sen(\pi/4)$
De donde se obtiene: $c_1 = 1\ y$

$$1 = c_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$1 = 1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + c_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = c_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=c_2$$

$$\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}-1=c_2=\frac{2}{\sqrt{2}}-1$$

Racionalizando el denominador se tiene que $c_2=\sqrt{2}-1$

Por lo tanto $\boldsymbol{y=1Cos(x)+\left(\sqrt{2}-1\right)Sen(x)}$ es la solución única al PVF

ECUACIONES HOMOGÉNEAS Y NO HOMOGÉNEAS

Una ecuación diferencial lineal de *n*-ésimo orden de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0\ (\mathbf{2})$$

se dice que es **homogénea**, mientras que una ecuación

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

donde g(x) no es idénticamente cero, se llama **no homogénea**.

Por ejemplo, $xy''+3Cos(x)y'-6y=0$ es un ejemplo de una ED lineal homogénea de segundo orden.

Mientras que $x^2y'''+5y'-8y=Cos\ (x)$ es una ecuación diferencial lineal de tercer orden no homogénea.

En este contexto, la palabra **homogénea** no indica el mismo concepto de homogeneidad de las ecuaciones de primer orden vistas anteriormente.

Para resolver una **ecuación lineal no homogénea,** en primera instancia se debe resolver la ecuación **homogénea asociada**. Así, por ejemplo: $x^2y'''+5y'-8y=Cos\ (x)$, la ecuación homogénea asociada a esta es: $x^2y'''+5y'-8y=0$

El siguiente teorema se ve que la suma o superposición de dos o más soluciones de una ED lineal homogénea es también una solución.

Teorema 1. Principio de superposición; ecuaciones homogéneas.
Sean $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$ soluciones de la ecuación homogénea de n-esimo orden

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

en un intervalo I. Entonces la combinación lineal.

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ky_k(x)$$

donde $c_i, i = 1,2, \dots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo.

Ejemplo. El principio de superposición y las ecuaciones homogéneas.
Dadas $y_1 = e^{2x}Cos(3x);\ y_2 = e^{2x}Sen(3x)$ soluciones de la ecuación homogénea $y'' - 4y' + 13y = 0$, encuentre una solución de esta ecuación que cumpla el PVI $y(0) = 2, y'(0) = 5$.
Para evaluar el PVF se necesita una solución que involucre dos constantes arbitrarias c_1, c_2
Solución. Primero se verificará que $y_1 = e^{2x}Cos(3x)$, es solución de la ED dada.
El estudiante puede verificar que y_2 es también solución de la ED dada.

$$\boldsymbol{y'_1 = 2e^{2x}Cos(3x) - 3e^{2x}Sen(3x)}$$

$$\boldsymbol{y''_1 = 4e^{2x}Cos(3x) - 6e^{2x}Sen(3x) - 6e^{2x}Sen(3x) - 9e^{2x}Cos(3x)}$$

$$\boldsymbol{y''_1 = -12e^{2x}Sen(3x) - 5e^{2x}Cos(3x)}$$

Sustituyendo en la ED dada:

$$y''_1 - 4y'_1 + 13y_1 = 0$$

$$\boldsymbol{= -12e^{2x}Sen(3x) - 5e^{2x}Cos(3x) - 4\left(2e^{2x}Cos(3x) - 3e^{2x}Sen(3x)\right) + 13e^{2x}Cos(3x)}$$

$$\boldsymbol{= -12e^{2x}Sen(3x) - 5e^{2x}Cos(3x) - 8e^{2x}Cos(3x) + 12e^{2x}Sen(3x) + 13e^{2x}Cos(3x) = 0}$$

Por lo tanto $y_1 = e^{2x}Cos(3x)$ es solución de la ED dada

Por el **Teorema 1**, para cualquier par de constantes c_1 y c_2. Entonces la combinación lineal.

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

Será solución de la ED dada.
Es decir:

$$\boldsymbol{y = c_1e^{2x}Cos(3x) + c_2e^{2x}Sen(3x)} *$$

(una combinación lineal de las funciones) será solución de: $y'' - 4y' + 13y = 0$.
(Haciendo el mismo proceso similar se verifica que * es solución de la ED)
Se obtendrá la primera derivada de * para sustituir las condiciones iniciales para encontrar los valores de las constantes.

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{2x} Cos(3x) + c_2 e^{2x} Sen(3x)} *$$

$$y' = 2c_1 e^{2x} Cos(3x) - 3c_1 e^{2x} Sen(3x) + 2c_2 e^{2x} Sen(3x) + 3c_2 e^{2x} Cos(3x)$$

Evaluando las condiciones iniciales $y(0) = 2, y'(0) = 5$ se obtiene:

$$2 = c_1 e^{2(0)} Cos(3.0) + c_2 e^{2(0)} Sen(3.0), \text{entonces } 2 = c_1(1)(1) = c_1$$

$$5 = 2c_1 e^{2(0)} Cos(3.0) - 3c_1 e^{2(0)} Sen(3.0) + 2c_2 e^{2(0)} Sen(3.0) + 3c_2 e^{2(0)} Cos(3.0)$$

$$5 = 2c_1(1)(1) + 3c_2(1)(1) = 2(2) + 3c_2$$

$$5 - 4 = 3c_2 \rightarrow \frac{1}{3} = c_2$$

Por lo tanto: $c_1 = 2$ y $c_2 = 1/3$.
Por consiguiente, la solución al PVF es: $y = 2e^{2x} Cos(3x) + \frac{1}{3} e^{2x} Sen(3x)$

Definición 1. Dependencia e independencia lineal
Un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$ es linealmente dependiente en un intervalo I si existen constantes $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, no todas cero, tales que:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x), \dots, c_n f_n(x) = 0$$

Para toda "x" en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es linealmente independiente.

Observación:
En consecuencia, de lo anterior: para que un conjunto de funciones $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$ sea linealmente independiente significa que la única manera de que se cumpla con:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x), \dots, c_n f_n(x) = 0,$$

es que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ (la única manera de obtener una combinación lineal nula es que todas las constantes sean nulas)

Ejercicios. Verificar si las funciones son linealmente dependientes (LD) o linealmente independientes (LI). $y_1 = e^{5x}$; $y_2 = e^{-2x}$
Solución. En este caso se estará interesado principalmente en funciones linealmente independientes o con más precisión, soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal. Aunque se podría apelar siempre en forma directa a la definición anterior, resulta que la cuestión de si el conjunto de *n* soluciones $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, de una ecuación

diferencial lineal homogénea de *n*-ésimo orden (2) es linealmente independiente se puede establecer en forma un poco mecánica usando un determinante.

Definición 2. Wronskiano

Supongamos que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)$ posee al menos n-1 derivadas. El determinante:

$$W(f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x)\ ) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \dots & f_n \\ f'_1 & f'_2 \dots & f'_n \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} \dots & f_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Donde las primas denotan derivadas, se llama el Wronskiano de las funciones.

Ejemplo. Sean $f_1(x) = e^{2x}$; $f_2(x) = e^{-2x}, f_3(x) = e^{3x}$. Hallar el Wronskiano es decir $W(f_1, f_2, f_3)$

$$\boldsymbol{W(f_1, f_2, f_3)} = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ 4e^{2x} & 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{W} = e^{2x}\begin{vmatrix} -2e^{-2x} & 3e^{3x} \\ 4e^{-2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} - e^{-2x}\begin{vmatrix} 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} + e^{3x}\begin{vmatrix} 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 4e^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{W} = e^{2x}(-18e^{x} - 12e^{x}) - e^{-2x}(18e^{5x} - 12e^{5x}) + e^{3x}(8e^{0} + 8e^{0})$$

$$\boldsymbol{W} = e^{2x}(-30e^{x}) - e^{-2x}(6e^{5x}) + e^{3x}(16) = -30e^{3x} - 6e^{3x} + 16e^{3x} = -20e^{3x}$$

Por lo tanto, el Wronskiano de las funciones es:

$$W(f_1, f_2, f_3) = -20e^{3x}$$

Teorema 2. Criterio para soluciones linealmente independientes

Sean $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, n soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de n-esimo orden en el intervalo I. El conjunto de soluciones es **linealmente independiente** en I si y sólo si $W(y_1, y_2, y_3, \dots, y_k)\ \neq 0$ para toda *x* en el intervalo.

Ejemplo. Verificar si el conjunto de soluciones dadas anteriormente forma un conjunto de soluciones linealmente independiente en I.

Solución. Para que el conjunto de soluciones sea Linealmente Independientes debe de cumplirse que el Wronskiano debe ser diferente de cero para toda "x"

Por lo tanto, el Wronskiano de las funciones es:

$$W(f_1, f_2, f_3) = -20e^{3x} \neq 0$$

Puede concluirse que $f_1(x) = e^{2x}$; $f_2(x) = e^{-2x}, f_3(x) = e^{3x}$, son LI

GUIA DE EJERCICIOS No.1

En los siguientes problemas determinar si el conjunto de funciones es linealmente independiente en el intervalo $(-\infty, \infty)$

a) $\boldsymbol{f_1 = x,\ f_2 = x^2, f_3 = 4x - 3x^2}$

b) $\boldsymbol{f_1 = 0,\ f_2 = x, f_3 = e^x}$

c) $\boldsymbol{f_1 = 5,\ f_2 = Cos^2(x),\ f_3 = Sen^2(x)}$

d) $\boldsymbol{f_1 = Cos(2x),\ f_2 = 1, f_3 = Cos^2(x)}$

e) $\boldsymbol{f_1 = x,\ f_2 = x - 1,\ f_3 = x + 3}$

f) $\boldsymbol{f_1 = 2 + x,\ f_2 = 2 + |x|}$

g) $\boldsymbol{f_1 = 1 + x,\ f_2 = x,\ f_3 = x^2}$

h) $\boldsymbol{f_1 = e^x,\ f_2 = e^{-x},\ f_3 = Sen(x)}$

Definición 3. Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ de *n* soluciones linealmente independientes de la ED lineal homogénea de *n*-ésimo orden

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (*)$$

en un intervalo I es un **conjunto fundamental de soluciones** en el intervalo.

Teorema 3. Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial lineal homogénea de *n*-ésimo orden (*) en un intervalo *I*.

Teorema 4. Solución general; ecuaciones homogéneas

Sea $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de *n*-ésimo orden (*) en el intervalo I. Entonces la **solución general** de la ecuación en el intervalo es $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x), \dots, c_ny_n(x)$, donde $c_i, i = 1,2, \dots, n$, son constantes arbitrarias.

Ejemplo 1. **Solución general de una ED homogénea**.

Las funciones $y_1 = e^{3x}$; $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' - 9y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Por inspección las soluciones son linealmente independientes en el eje x. Esto se corrobora al sacar el Wronskiano:

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = (e^{3x})(-3e^{-3x}) - (3e^{3x})(e^{-3x})$$
$$= -3e^{0} - 3e^{0} = -6 \neq 0, \forall\, x$$

Por lo tanto, $y_1 = e^{3x};\ y_2 = e^{-3x}$ forman un conjunto fundamental de soluciones y $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$ es la solución general de la ecuación diferencial dada en el intervalo.

Ejemplo 2. **Solución general de una ED homogénea**
Las funciones $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea de tercer orden $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. Ya que:

$$W(e^{x}, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0, \forall\, x \in R$$

Las funciones $y_1 = e^{x},\ y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{3x}$ forman un conjunto fundamental de soluciones y $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ es la solución general de la ecuación diferencial dada en el intervalo.

GUIA DE EJERCICIOS No.2

En los problemas 23 a 30 compruebe que las funciones dadas forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo que se indica. Forme la solución general.

23. $y'' - y' - 12y = 0;\quad e^{-3x}, e^{4x}, (-\infty, \infty)$

24. $y'' - 4y = 0;\quad \cos\ 2x, \operatorname{sen}\ 2x, (-\infty, \infty)$

25. $y'' - 2y' + 5y = 0;\quad e^{x}\cos 2x, e^{x}\operatorname{sen} 2x, (-\infty, \infty)$

26. $4y'' - 4y' + y = 0;\quad e^{x/2}, xe^{x/2}, (-\infty, \infty)$

27. $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0;\quad x^3, x^4, (0, \infty)$

28. $x^2y'' + xy' + y = 0;\quad \cos(\ln x), \operatorname{sen}(\ln x), (0, \infty)$

29. $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0;\quad x, x^{-2}, x^{-2}\ln x, (0, \infty)$

30. $y^{(4)} + y'' = 0;\quad 1, x, \cos x, \operatorname{sen} x, (-\infty, \infty)$

ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS.
Cualquier función y_p libre de parámetros arbitrarios, que satisface la ED no homogénea dada por la siguiente ecuación se dice que es una **solución particular** de la ecuación.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), g(x) \neq 0$$

La solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea siempre tiene la forma:

$$\boldsymbol{y = y_c + y_p}$$

Donde $y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x), \ldots, c_ny_n(x)$, es la solución general de la ED homogénea de orden “n” asociada a la ED no homogénea, llamada solución complementaria y $\boldsymbol{y_p}$ es una solución particular la ED lineal no homogénea.

En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea, primero se resuelve la ecuación homogénea asociada y luego se encuentra una solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es entonces:

$$\boldsymbol{y = y_c + y_p}$$

Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.
Comencemos por considerar el caso especial de una ecuación de segundo orden:

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}, \qquad (1)$$

$con\ a, b\ y\ c\ constantes\ y\ a \neq 0$
Si tenemos la ecuación $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$, suponemos que $y = e^{mx}$, es solución de dicha ecuación diferencial lineal homogénea.
Pero si $y = e^{mx}$ es solución entonces debe de satisfacerla, es decir, $y' = me^{mx}$, $y'' = m^2e^{mx}$, entonces después de sustituir la ecuación (1) se convierte en:

$$\boldsymbol{am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0} \quad o \quad \boldsymbol{e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0}$$

Como $e^{mx} \neq 0$, es decir nunca es cero para valores reales de x, evidentemente la única forma que tiene esta función exponencial de satisfacer la ecuación diferencial (1) es elegir “m” como una raíz de la ecuación cuadrática $\boldsymbol{am^2 + bm + c = 0} \quad \boldsymbol{(2)}$
La ecuación (2) es llamada **ecuación auxiliar** de la ecuación diferencial (1). Al resolver esta ecuación auxiliar, resulta:

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Estas dos ecuaciones presentan 3 casos, dependiendo estos del término dentro del radical

a) $m_1 \; y \; m_2$ son reales y distintas $si \; (b^2 - 4ac > 0)$
b) $m_1 \; y \; m_2$ son reales e iguales $(si \;\; b^2 - 4ac = 0)$
c) $m_1 \; y \; m_2$ son raíces complejas conjugadas $(si \; b^2 - 4ac < 0)$

Se analizan cada uno de estos casos por separado:

Caso I. Raíces reales distintas

Bajo el supuesto de que la ecuación auxiliar (2) tiene dos raíces reales distintas $m_1 \; y \; m_2$, se encuentran dos soluciones: $y_1 = e^{m_1 x} \;\; y \;\; y_2 = e^{m_2 x}$.

La solución general de $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$, es:

$$\boldsymbol{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}$$

Caso II. Raíces reales repetidas

Cuando $m_1 = m_2$ se obtiene solo una solución exponencial, $y_1 = e^{m_1 x}$, se encuentran dos soluciones: $y_1 = e^{m_1 x} \;\; y \;\; y_2 = x e^{m_1 x}$.

La solución general de $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$, es:

$$\boldsymbol{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}}$$

Caso III. Raíces complejas conjugadas.

Si $m_1 \; y \; m_2$ son complejas, entonces: $m_1 = \alpha + i\beta \;\; y \;\; m_2 = \alpha - i\beta$, donde
$y_1 = e^{\alpha x} Cos(\beta x) \;\; y \;\; y_2 = e^{\alpha x} Sen(\beta x)$

La solución general de $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$, es:

$$\boldsymbol{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\alpha x} Cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} Sen(\beta x)}$$

OBSERVACIÓN: Si tenemos una ecuación de segundo orden: $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$ **(1)**

La **ecuación auxiliar asociada a la** ecuación diferencial (1) es $\boldsymbol{am^2 + bm + c = 0}$ **(2)**

Ejemplo. Encontrar la ecuación auxiliar asociada a la ED dada.

Solución.

a) Si $2y'' - 5y' - 3y = 0$, entonces la Ecuación auxiliar es $\boldsymbol{2m^2 - 5m - 3 = 0}$
b) $y'' - 10y' + 25y = 0$, entonces la Ecuación auxiliar es $\boldsymbol{m^2 - 10m + 25 = 0}$
c) $y'' + 4y' + 7y = 0$, entonces la Ecuación auxiliar es $\boldsymbol{m^2 + 4m + 7 = 0}$

Ejemplo. Resolver las ED anteriores.

Solución. a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$

En cada caso se resuelve la ecuación auxiliar $\boldsymbol{2m^2 - 5m - 3 = 0}$

Utilizando la fórmula cuadrática para resolver la ecuación auxiliar:

$$m_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}, \qquad m_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$m_1 = \frac{5 + \sqrt{49}}{4}, m_2 = \frac{5 - \sqrt{49}}{4}$$

$$m_1 = \frac{5 + 7}{4} = 3, \qquad m_2 = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2}$$

Entonces $m_1 = 3, m_2 = -\frac{1}{2}$

Como tiene dos raíces reales distintas $m_1 = 3$ y $m_2 = -\frac{1}{2}$, se encuentran dos soluciones:

$$y_1 = e^{m_1 x} \;\; y \;\; y_2 = e^{m_2 x}.$$

$$y_1 = e^{3x} \;\; y \;\; y_2 = e^{-1/2x}$$

Por lo tanto, la solución general de $\boldsymbol{2y'' - 5y' - 3y = 0}$, es:

$$\boldsymbol{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-1/2x}}$$

Solución. b) $y'' - 10y' + 25y = 0$

En casa caso se resuelve la ecuación auxiliar:

$$\boldsymbol{m^2 - 10m + 25 = 0 = (m-5)(m-5) = (m-5)^2}$$

Igualando el factor a cero se obtienen los valores de “m”

$$\boldsymbol{(m-5)^2 = 0}$$

Cuando $m_1 = m_2 = 5$ se obtiene solo una solución exponencial, $y_1 = e^{m_1 x}$, y se encuentran dos soluciones: $y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = xe^{m_1 x}$.

$$\boldsymbol{y_1 = e^{5x} \;\; y \;\; y_2 = xe^{5x}}$$

Por lo tanto, la solución general de $\boldsymbol{y'' - 10y' + 25y = 0}$, es:

$$\boldsymbol{y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}}$$

Solución. c) $y'' + 4y' + 7y = 0$

En casa caso se resuelve la ecuación auxiliar usando la fórmula cuadrática:

$$\boldsymbol{m^2 + 4m + 7 = 0}$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$m = \frac{-4 \pm \sqrt{4(-3)}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{-3}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{-3} = -2 \pm \sqrt{-1(3)}$$

$$= -2 \pm \sqrt{-1}\sqrt{3}, donde\ i = \sqrt{-1}$$

$$m = -2 \pm \sqrt{3}i$$

Entonces: $m_1 = -2 + \sqrt{3}i\ \ y\ \ m_2 = -2 - \sqrt{3}i$

Como $m_1\ y\ m_2$ son complejas, entonces: $m_1 = \alpha + i\beta\ \ y\ \ m_2 = \alpha - i\beta$, es decir,

$$\alpha = -2\ y\ \beta = \sqrt{3}$$

Sustituyendo

$$y_1 = e^{\alpha x}Cos(\beta x)\ ;\ \ y_2 = e^{\alpha x}Sen(\beta x)$$

$$y_1 = e^{-2x}Cos\left(\sqrt{3}x\right)\ ;\ \ y_2 = e^{-2x}Sen(\sqrt{3}x)$$

Por lo tanto, la solución general de $\boldsymbol{y'' + 4y' + 7y = 0}$, es

$$\boldsymbol{y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^{-2x}Cos\left(\sqrt{3}x\right) + c_2e^{-2x}Sen\left(\sqrt{3}x\right)}$$

$$\boldsymbol{= e^{-2x}\left(c_1Cos\left(\sqrt{3}\,x\right) + c_2Sen\left(\sqrt{3}\,x\right)\right)}$$

Ecuaciones de orden superior. En general, para resolver una ED de orden superior.

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0\ (*)$$

donde $a_i, i = 1,2, \dots, n,$ son constantes reales, se debe solucionar una ecuación polinomial de n-ésimo grado: $a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_2m^2 + a_1m + a_0 = 0\ \ (3)$

Si todas las raíces de (3) son reales y distintas, entonces la solución general de (*) es:

$$\boldsymbol{y = c_1e^{m_1x}\ +\ c_2e^{m_2x} + \cdots + c_ne^{m_nx}}$$

Cuando m_1 es una raíz de multiplicidad k de una ecuación auxiliar de n-esimo orden (es decir, k raíces son iguales a m_1). Entonces la solución general debe contener la combinación lineal: $\boldsymbol{y = c_1e^{m_1x}\ +\ c_2xe^{m_1x} + c_3x^2e^{m_1x} + \cdots + c_kx^{k-1}e^{m_1x}}$

Ejemplos. Resolver

a) $\boldsymbol{y''' + 3y'' - 4y = 0}$

b) $\boldsymbol{\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0}$

Solución. a) $y''' + 3y'' - 4y = 0$
En casa caso se resuelve la ecuación auxiliar $\boldsymbol{m^3 + 3m^2 - 4 = 0}$
Para resolver este tipo de ecuación se usa la división sintética donde se usan únicamente los coeficientes y le completa con ceros los términos faltantes: $\boldsymbol{m^3 + 3m^2 + 0m - 4 = 0,}$ las posibles raíces son todos los divisores del término independiente $\{-4,-2,-1,1,2,4\}$

1	**3**	**0**	**-4**	$\boldsymbol{m = 1}$
	1	**4**	**4**	
1	**4**	**4**	**0**	

Es decir $\mathrm{m} = 1$ es una raiz y $\mathrm{m} - 1$ es un factor de $\boldsymbol{m^3 + 3m^2 + 0m - 4 = 0}$
Entonces

$$\boldsymbol{m^3 + 3m^2 + 0m - 4 = (m-1)(m^2 + 4m + 4) = (m-1)(m+2)^2 = 0}$$

Así: las raíces de esta ecuación son 3**.**

$$\boldsymbol{m_1 = 1, m_2 = -2, m_3 = -2}(\boldsymbol{-2} \text{ es una raiz de multiplicidad doble})$$

Por lo tanto la solucion general de la ED dada es**:** $\boldsymbol{y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}}$

Solución. b) $\boldsymbol{\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0}$
En casa caso se resuelve la ecuación auxiliar $\boldsymbol{m^4 + 2m^2 + 1 = 0}$
Es decir $\boldsymbol{m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)(m^2 + 1) = 0,}$ resolviendo cada factor, tenemos:

$$\boldsymbol{m^2 + 1 = 0}$$

$$\boldsymbol{m^2 = -1}$$

$$\boldsymbol{m = \pm\sqrt{-1} = \pm\sqrt{1}i}$$

Las raíces de la ecuación son**:** $\boldsymbol{m_1 = 1i,\ m_2 = -1i,\ m_3 = 1i,\ m_4 = -1i,}$ pero cada raiz puede escribirse de la forma siguiente**:**

$$\boldsymbol{m_1 = 0 + 1i, \quad m_2 = 0 - 1i, \quad m_3 = 0 + 1i,\ m_4 = 0 - 1i}$$

Donde $\alpha = 0$ y $\beta = 1$

Por lo tanto, la solucion general de la ED dada es**:**

$$\boldsymbol{y = c_1 e^{0x} Cos(x) + c_2 e^{0x} Sen(x) + c_3 e^{0x} x Cos(x) + c_4 e^{0x} x Sen(x)}$$

$$\boldsymbol{y = c_1 Cos(x) + c_2 Sen(x) + c_3 x Cos(x) + c_4 x Sen(x)}$$

Observación. En el ejemplo anterior puede verse que cada raiz tiene multiplicidad doble.

GUIA DE EJERCICIOS No.3

En los problemas 1 a 14, obtenga la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden dada.

1. $4y'' + y' = 0$
2. $y'' - 36y = 0$
3. $y'' - y' - 6y = 0$
4. $y'' - 3y' + 2y = 0$
5. $y'' + 8y' + 16y = 0$
6. $y'' - 10y' + 25y = 0$
7. $12y'' - 5y' - 2y = 0$
8. $y'' + 4y' - y = 0$
9. $y'' + 9y = 0$
10. $3y'' + y = 0$
11. $y'' - 4y' + 5y = 0$
12. $2y'' + 2y' + y = 0$
13. $3y'' + 2y' + y = 0$
14. $2y'' - 3y' + 4y = 0$

En los problemas 15 a 28 encuentre la solución general de la ecuación diferencial de orden superior dada.

15. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$
16. $y''' - y = 0$
17. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$
18. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$
19. $\dfrac{d^3u}{dt^3} + \dfrac{d^2u}{dt^2} - 2u = 0$
20. $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0$
21. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$
22. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
23. $y^{(4)} + y''' + y'' = 0$
24. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$
25. $16\dfrac{d^4y}{dx^4} + 24\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$
26. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 7\dfrac{d^2y}{dx^2} - 18y = 0$
27. $\dfrac{d^5u}{dr^5} + 5\dfrac{d^4u}{dr^4} - 2\dfrac{d^3u}{dr^3} - 10\dfrac{d^2u}{dr^2} + \dfrac{du}{dr} + 5u = 0$
28. $2\dfrac{d^5x}{ds^5} - 7\dfrac{d^4x}{ds^4} + 12\dfrac{d^3x}{ds^3} + 8\dfrac{d^2x}{ds^2} = 0$

En los problemas 29 a 36 resuelva el problema con valores iniciales

29. $y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 2, y'(0) = -2$
30. $\dfrac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0, y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2$
31. $\dfrac{d^2y}{dt^2} - 4\dfrac{dy}{dt} - 5y = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 2$
32. $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$
33. $y'' + y' + 2y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0$
34. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = 5, y'(0) = 10$
35. $y''' + 12y'' + 36y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -7$
36. $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$

En los problemas 37 a 40 resuelva el problema con valores en la frontera dado.

37. $y'' - 10y' + 25y = 0, \quad y(0) = 1, y(1) = 0$
38. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, y(\pi) = 0$
39. $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 0, y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
40. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y(\pi) = 1$

MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS.

Sea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x) \quad (1)$$

una ED no homogénea.

La primera de las dos formas que se consideran para obtener una solución particular $\boldsymbol{y_p}$ de una ED lineal no homogénea se llama **método de coeficientes indeterminados**. La idea fundamental detrás de este método es una conjetura acerca de la forma de $\boldsymbol{y_p}$, que forman la función de entrada $g(x)$. El método general se limita a ED lineales como (1) donde: los coeficientes $a_i, i=1,2,\ldots,n$ son constantes y $g(x)$ puede ser una función constante k, una función polinomial, una función exponencial $\boldsymbol{e^{ax}}$, una función seno o coseno $sen(\beta x)$ o $cos(\beta x)$ o sumas finitas y productos de estas funciones.

La siguiente tabla ilustra la forma de $g(x)$ junto con la forma correspondiente de la solución particular. Por supuesto, se da por sentado que ninguna función de la solución particular supuesta y_p se duplica por una función en la función complementaria y_c.

$g(x)$	Forma de $\boldsymbol{y_p}$
1) A (cualquier constante)	A
2) $5x+7$	$Ax+B$
3) $3x^2-2$	Ax^2+Bx+C
4) x^3-x+1	Ax^3+Bx^2+Cx+E
5) $Sen(4x)$	$ACos(4x)+BSen(4x)$
6) $Cos(3x)$	$ACos(3x)+BSen(3x)$
7) e^{5x}	Ae^{5x}
8) $(9x-2)e^{5x}$	$(Ax+B)e^{5x}$
9) x^2e^{5x}	$(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$
10) $e^{3x}Sen(4x)$	$Ae^{3x}Cos(4x)+Be^{3x}Sen(4x)$
11) $5x^2Sen(4x)$	$(Ax^2+Bx+C)Cos(4x)+(Ex^2+Fx+G)Sen(4x)$
12) $xe^{3x}Cos(4x)$	$(Ax+B)e^{3x}Cos(4x)+(Cx+E)e^{3x}Sen(4x)$

En los ejemplos siguientes se ilustra el método básico.

Ejemplo 1. Resolver $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$ (*)
Paso 1. Resolver la ED homogénea asociada a $y'' - 3y' + 2y = 0$
La ecuación auxiliar asociada es: $m^2 - 3m + 2 = 0$, con la fórmula cuadrática o los casos de factoreo se encuentran las raíces de la ecuación auxiliar $(m-2)(m-1) = 0$, entonces $m_1 = 2 \;\; y \;\; m_2 = 1$, la solución complementaria es: $y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$

Paso 2. Como $g(x)$ es un polinomio cuadrático, supongamos una solución particular que también tiene la forma de un polinomio cuadrático $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Donde se busca encontrar el valor de las constantes A, B y C para los cuales y_p sea una solución de la ED (*). Al sustituir y_p y las derivadas en la ecuación diferencial (*) se obtiene lo siguiente:

$$y_p = Ax^2 + Bx + C, \qquad y'_p = 2Ax + B, \qquad y''_p = 2A$$

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1 \; *$$

$$y''_p - 3y'_p + 2y_p = 2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 1$$
$$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2x^2 + 1$$

Agrupando los términos semejantes tenemos

$$2Ax^2 + (-6A + 2B)x + (2A - 3B + 2C) = 2x^2 + 0x + 1$$

Por igualdad de polinomios:

$$2A = 2\,, entonces\ A = 1$$
$$-6A + 2B = 0, entonces\ B = 3$$
$$2A - 3B + 2C = 1, entonces\ C = 4$$

Sustituyendo estos valores en $y_p = Ax^2 + Bx + C = x^2 + 3x + 4$

∴ La solución general de $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$ es de la forma: $\boldsymbol{y = y_c + y_p}$
Es decir, la solución general de la ED dada es: $\boldsymbol{y = (c_1 e^{2x} + c_2 e^x) + (x^2 + 3x + 4)}$

Ejemplo 2. Resolver $y'' + y = 2e^{3x}$ (*)
Paso 1. Resolver la ED homogénea asociada a $y'' + y = 0$
La ecuación auxiliar asociada es: $m^2 + 1 = 0$, con la fórmula cuadrática se encuentran las raíces de la ecuación auxiliar,

$$m = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0}{2} \pm \frac{2i}{2} = 0 \pm i$$

entonces $m_1 = 0 + i \;\; y \;\; m_2 = 0 - i$, la solución complementaria es:

$$\boldsymbol{y_c = c_1 e^{0x} Cos(x) + c_2 e^{0x} Sen(x) = c_1 Cos(x) + c_2 Sen(x)}$$

Paso 2. Como $g(x) = 2e^{3x}$, supongamos una solución particular que también tiene la forma siguiente $y_p = Ae^{3x}$. Donde se busca encontrar el valor de la constantes A, para los cuales y_p sea una solución de la ED (*). Al sustituir y_p y las derivadas en la ecuación diferencial (*) se obtiene lo siguiente:

$$y_p = Ae^{3x}, \qquad y'_p = 3Ae^{3x}, \qquad y''_p = 9Ae^{3x}$$

$$y''_p + y_p = 9Ae^{3x} + Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

$$10Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

Por igualdad de funciones tenemos $10A = 2$ entonces $A = \frac{1}{5}$, sustituyendo en la solución particular se obtiene: $y_p = \frac{1}{5}e^{3x}$

Por lo tanto, la solución general de la ED dada es:

$$\boldsymbol{y = y_c + y_p = (c_1 Cos(x) + c_2 Sen(x)) + \frac{1}{5}e^{3x}}$$

Ejemplo 3. Resolver $y'' + 2y' - 3y = 2e^x$ (*)

Paso 1. Resolver la ED homogénea asociada a $y'' + 2y' - 3y = 0$

La ecuación auxiliar asociada es: $m^2 + 2m - 3 = 0$, con la fórmula cuadrática o los casos de factoreo se encuentran las raíces de la ecuación auxiliar $(m + 3)(m - 1) = 0$, entonces $m_1 = -3$ y $m_2 = 1$, la solución complementaria es: $y_c = c_1e^{-3x} + c_2e^x$

Paso 2. Como $g(x) = 2e^x$, supongamos una solución particular que también tiene la forma siguiente $y_p = Ae^x$ pero e^x ya aparece en la solución de la ED homogénea. Entonces tal suposición no es conveniente en este caso se tomará: $y_p = Axe^x$

Al sustituir y_p y las derivadas en la ecuación diferencial (*) se obtiene lo siguiente:

$$y_p = Axe^x, \qquad y'_p = Ae^x + Axe^x, \qquad y''_p = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x$$

$$y''_p + 2y'_p - 3y_p = 2Ae^x + Axe^x + 2(Ae^x + Axe^x) - 3Axe^x = 2e^x$$

$$4Ae^x = 2e^x$$

Por igualdad de funciones tenemos $4A = 2$ entonces $A = \frac{1}{2}$, sustituyendo en la solución particular se obtiene: $y_p = \frac{1}{2}xe^x$

Por lo tanto, la solución general de la ED dada es:

$$\boldsymbol{y = y_c + y_p = (c_1e^{-3x} + c_2e^x) + \frac{1}{2}xe^x}$$

Ejemplo 4. Resolver $y'' + y = 4x + 10Sen(x)$ $(*)$, $y(\pi) = 0, y'(\pi) = 2$
Paso 1. Resolver la ED homogénea asociada a $y'' + y = 0$
La ecuación auxiliar asociada es: $m^2 + 1 = 0$, con la formula cuadrática se encuentran las raíces de la ecuación auxiliar,

$$m = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0}{2} \pm \frac{2i}{2} = 0 \pm i$$

entonces $m_1 = 0 + i$ y $m_2 = 0 - i$, la solución complementaria es:

$$\boldsymbol{y_c = c_1 e^{0x} Cos(x) + c_2 e^{0x} Sen(x) = c_1 Cos(x) + c_2 Sen(x)}$$

Paso 2. Como $g(x) = 4x + 10Sen(x)$, es la suma de una función polinomial y una función seno. La solución particular tiene la forma siguiente:

$$y_p = Ax + B + CCos(x) + DSen(x)$$

Pero al observar la solución complementaria hay una duplicación obvia de los términos $Cos(x)$ y $Sen(x)$ en la forma supuesta. Esta duplicación se elimina simplemente multiplicando por "x" así:

$$y_p = Ax + B + CxCos(x) + DxSen(x)$$

Derivando esta expresión y sustituyendo en la ecuación diferencial (*) se obtiene lo siguiente:

$$y_p = Ax + B + CxCos(x) + DxSen(x)$$

$$y'_p = A + CCos(x) - CxSen(x) + DSen(x) + DxCos(x)$$

$$y''_p = -CSen(x) - CSen(x) - CxCos(x) + DCos(x) + DCos(x) - DxSen(x)$$

$$y''_p = -2CSen(x) - CxCos(x) + 2DCos(x) - DxSen(x)$$

$$y''_p + y_p = -2CSen(x) - CxCos(x) + 2DCos(x) - DxSen(x) + Ax + B + CxCos(x) + DxSen(x)$$

$$y''_p + y_p = -2CSen(x) + 2DCos(x) + Ax + B = 4x + 10Sen(x)$$

Completando las funciones con ceros para usar la igualdad de funciones tenemos:

$$y''_p + y_p = Ax + B - 2CSen(x) + 2DCos(x) = 4x + 0 + 10Sen(x) + 0Cos(x)$$

$$A = 4, \qquad B = 0, \qquad -2C = 10, \qquad 2D = 0$$

Es decir: $A = 4,\ B = 0,\ C = -5, D = 0$. Sustituyendo estos valores para encontrar la solución particular. $y_p = Ax + B + CxCos(x) + DxSen(x)$

$$y_p = 4x - 5xCos(x)$$

Por lo tanto, la solución general de la ED dada es:

$$\boldsymbol{y = y_c + y_p = (c_1Cos(x) + c_2Sen(x)) + 4x - 5xCos(x)}\ **$$

Aplicando las condiciones iniciales dadas en el problema $y(\pi) = 0, y'(\pi) = 2$, para ello hallamos la primera derivada de "y" de **

$$\boldsymbol{y = c_1Cos(x) + c_2Sen(x) + 4x - 5xCos(x)}$$

$$\boldsymbol{y' = -c_1Sen(x) + c_2Cos(x) + 4 - 5Cos(x) + 5xSen(x)}$$

$$\boldsymbol{0 = c_1Cos(\pi) + c_2Sen(\pi) + 4\pi - 5\pi Cos(\pi)}$$

$$\boldsymbol{0 = -c_1 + 4\pi - 5\pi(-1), entonces\ \ c_1 = 9\pi}$$

$$\boldsymbol{y' = -c_1Sen(x) + c_2Cos(x) + 4 - 5Cos(x) + 5xSen(x)}$$

$$\boldsymbol{2 = -c_1Sen(\pi) + c_2Cos(\pi) + 4 - 5Cos(\pi) + 5\pi Sen(\pi)}$$

$$\boldsymbol{2 = c_2(-1) + 4 - 5(-1) = -c_2 + 4 + 5, \textbf{entonces}\ c_2 = 7}$$

Por lo tanto, la solución particular de la ED dada cuando $y(\pi) = 0, y'(\pi) = 2$, viene dada por:

$$\boldsymbol{y = \left(9\pi Cos(x) + 7Sen(x)\right) + 4x - 5xCos(x)}$$

GUIA DE EJERCICIOS No.4

En los problemas 1 a 26 resuelva la ecuación diferencial dada usando coeficientes indeterminados.

1. $y'' + 3y' + 2y = 6$
2. $4y'' + 9y = 15$
3. $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$
4. $y'' + y' - 6y = 2x$
5. $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$
6. $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$
7. $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$
8. $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$
9. $y'' - y' = -3$
10. $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$
11. $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$
12. $y'' - 16y = 2e^{4x}$
13. $y'' + 4y = 3 \operatorname{sen} 2x$
14. $y'' - 4y = (x^2 - 3) \operatorname{sen} 2x$
15. $y'' + y = 2x \operatorname{sen} x$
16. $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$
17. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$
18. $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3 \operatorname{sen} x)$
19. $y'' + 2y' + y = \operatorname{sen} x + 3 \cos 2x$
20. $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x + 2)e^{4x}$
21. $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$
22. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$
23. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$
24. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$
25. $y^{(4)} + 2y'' + y = (x - 1)^2$
26. $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$

En los problemas 27 a 36 resuelva el problema con valores iniciales dado.

27. $y'' + 4y = -2, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}, y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$
28. $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$
29. $5y'' + y' = -6x, \quad y(0) = 0, y'(0) = -10$
30. $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 5$
31. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}, \quad y(0) = -3, y'(0) = 1$

VARIACIÓN DE PARÁMETROS

El procedimiento que se utiliza para encontrar una solución particular y_p de una ED lineal de primer orden en un intervalo es también aplicable a una ED de orden superior.
Para adaptar el método de **variación de parámetros** a una ecuación diferencial de segundo orden:

$$\boldsymbol{a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)\ (1),}$$

comenzamos por escribir la ecuación en su forma estándar:

$$\boldsymbol{y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)\ (2)}$$

dividiendo entre el coeficiente principal $a_2(x)$.
La ecuación (2) es la análoga de segundo orden de la forma estándar de una ecuación lineal de primer orden: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$.
En (2) se supone que $P(x), Q(x)$ y $f(x)$ son continuas en algún intervalo común I. Como ya hemos visto, no hay dificultad para obtener la función complementaria y_c, la solución general de la ecuación homogénea asociada de (2), cuando los coeficientes son constantes.

Suposiciones. Correspondiendo con la suposición $y_p = u_1(x)y_1(x)$ que se usó anteriormente para encontrar una solución particular y_p de $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, para la ecuación lineal de segundo orden (2) se busca una solución de la forma:

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)\ (3)$$

Donde y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones en I de la forma homogénea

asociada de (1).
Como se busca determinar dos funciones desconocidas u_1 y u_2, la razón impone que son necesarias dos ecuaciones. Estas ecuaciones se obtienen con la suposición adicional de que las funciones u_1 y u_2 satisfacen $y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0$. Esta suposición no se presenta por sorpresa, puesto que si se requiere que $y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0$, entonces se reduce a $y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x)$
Ahora tenemos nuestras dos ecuaciones deseadas, a pesar de que sean dos ecuaciones para determinar las derivadas u'_2 y u'_2. Por la regla de Cramer, la solución del sistema

$$y_1u'_1 + y_2u'_2 = 0$$

$$y'_1u'_1 + y'_2u'_2 = f(x)$$

puede expresarse en términos de determinantes:

$$\boldsymbol{u'_1 = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2f(x)}{W}\ ;\ u'_2 = \frac{W_2}{W} = -\frac{y_1f(x)}{W}}\ \ (5)$$

Donde

$$\boldsymbol{W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix};\ W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y'_2 \end{vmatrix};W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & f(x) \end{vmatrix}}\ (6)$$

Las funciones u_1 y u_2 se encuentran integrando los resultados de (5). El determinante W se reconoce como el Wronskiano de y_1 y y_2.
Por la independencia lineal de y_1 y y_2 en I, se sabe que $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$ para toda x en el intervalo.

Resumen del Método. Normalmente, no es buena idea memorizar fórmulas en lugar de entender un procedimiento. Sin embargo, el procedimiento, en este caso resulta más eficaz usar simplemente las fórmulas de (5). Así que para resolver $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$, primero se encuentra la función complementaria $\boldsymbol{y_c = c_1y_1 + c_2y_2}$ y luego se calcula el Wronskiano $W(y_1(x), y_2(x))$. Dividiendo entre a_2, se escribe la ecuación en la forma estándar $y'' + Py' + Qy = f(x)$ para determinar $f(x)$. Se encuentra u_1 y u_2 integrando

$$\boldsymbol{u'_1 = \frac{W_1}{W}\ ;\ u'_2 = \frac{W_2}{W}}$$

Donde $\boldsymbol{W_1}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{W_2}$ **se** definen como en (6). Una solución particular es $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$. Entonces la solución general de la ecuación es $y = y_c + y_p$.

Ejemplo. Resolver $y'' - 4y' + 4y = (x+1)\boldsymbol{e^{2x}}$
Solución. La ecuación auxiliar $m^2 - 4m + 4 = (m-2)(m-2) = 0$, se tiene que: $m_1 = m_2 = 2$, entonces la solución es:

$$\boldsymbol{y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}}$$

Donde $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = xe^{2x}$, a continuación, se calcula el Wronskiano:

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{2x}(2xe^{2x} + e^{2x}) - 2e^{2x}(xe^{2x})$$

$$= 2xe^{4x} + e^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x}$$

Puesto que la ecuación diferencial dada ya está en la forma (2) (es decir, el coeficiente de y'' es 1), identificamos $f(x) = (x+1)\boldsymbol{e^{2x}}$. De (5), obtenemos

$$\boldsymbol{u'_1 = \frac{W_1}{W} = -\frac{y_2 f(x)}{W}\ ;\ u'_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{y_1 f(x)}{W}}$$

$$\boldsymbol{u'_1} = -\frac{xe^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}}; \boldsymbol{u'_2} = \frac{e^{2x}(x+1)e^{2x}}{e^{4x}}$$

$$\boldsymbol{u'_1 = -x(x+1);\ u'_2 = (x+1)}$$

$$\boldsymbol{\int u'_1 dx = \int (-x^2 - x)\, dx = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2}$$

$$\boldsymbol{u_1 = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2}$$

De la misma forma calcular $\boldsymbol{u_2}$

$$\boldsymbol{\int u'_2 dx = \int (x+1)\, dx = \frac{1}{2}x^2 + x}$$

$$\boldsymbol{u_2 = \frac{1}{2}x^2 + x}$$

Una solución particular es $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$$\boldsymbol{y_p = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)xe^{2x}}$$

$$\boldsymbol{y_p = \left(-\frac{1}{3}x^3\right)e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x^2\right)e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2\right)xe^{2x} + (x)xe^{2x} = \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}}$$

Entonces la solución general de la ecuación es $y = y_c + y_p$.

$$\boldsymbol{y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}}$$

NOTA: Cuando se calculan las integrales indefinidas de u_1 y u_2, no es necesario introducir las constantes de integración.

GUIA DE EJERCICIOS No.5

En los problemas 1 a 18 resuelva cada ecuación diferencial por medio de variación de parámetros.

1. $y'' + y = \sec x$
2. $y'' + y = \tan x$
3. $y'' + y = \operatorname{sen} x$
4. $y'' + y = \sec \theta \tan \theta$
5. $y'' + y = \cos^2 x$
6. $y'' + y = \sec^2 x$
7. $y'' - y = \cosh x$
8. $y'' - y = \operatorname{senh} 2x$
9. $y'' - 4y = \dfrac{e^{2x}}{x}$
10. $y'' - 9y = \dfrac{9x}{e^{3x}}$
11. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^x}$
12. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$
13. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$
14. $y'' - 2y' + y = e^t \arctan t$
15. $y'' + 2y' + y = e^{-t} \ln t$
16. $2y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x}$
17. $3y'' - 6y' + 6y = e^x \sec x$
18. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1 - x^2}$

En los problemas 19 a 22 resuelva cada ecuación diferencial mediante variación de parámetros, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

19. $4y'' - y = xe^{x/2}$
20. $2y'' + y' - y = x + 1$
21. $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}$
22. $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$

UNIDAD V: LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Introducción
En cálculo elemental se aprendió que la derivación y la integración son t*ransformadas*; esto significa, a grandes rasgos, que estas operaciones transforman una función en otra. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se transforma, a su vez, en una función lineal y en una familia de funciones polinomiales cúbicas con las operaciones de derivación e integración:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \;\; y \;\; \int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$$

Además, estas dos transformadas tienen la **propiedad de linealidad** tal que la transformada de una combinación lineal de funciones es una combinación lineal de las transformadas. Para $\alpha \; y \; \beta$ constantes

$$\frac{d}{dx}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

siempre que cada derivada e integral exista. En esta unidad se examinará un tipo especial de transformada integral llamada **transformada de Laplace**. Además de tener la propiedad de linealidad, la transformada de Laplace tiene muchas otras propiedades interesantes que la hacen muy útil para resolver problemas lineales con valores iniciales.

Definición 1. Sea *f* una función definida para $t \geq 0$. Entonces se dice que la integral**:**

$$\boldsymbol{F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt}$$

es la **Transformada de Laplace** de *f*, siempre que la integral converja.

Cuando la integral de la definición anterior converge, el resultado es una función de *s*.
En el análisis general se usa una letra minúscula para denotar la función que se transforma y la letra mayúscula correspondiente para denotar su transformada de Laplace, por ejemplo:

$$L\{f(t)\} = F(s), \qquad L\{g(t)\} = G(s), \qquad L\{y(t)\} = Y(s)$$

Ejemplo. Usar la definición anterior para hallar $L\{1\}$
Solución. La función en este caso es $f(t) = 1$. Sustituyendo en la integral anterior tenemos:

$$\boldsymbol{L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt}$$

$$\boldsymbol{L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1) dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} dt}$$

Haciendo $\boldsymbol{w = -st}$, entonces $\boldsymbol{dw = -sdt}$ es decir $\boldsymbol{\frac{dw}{-s} = dt}$

$$L\{1\} = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^w \frac{dw}{-s} = \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^w\, dw$$

$$L\{1\} = \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty} e^w\Big|_0^b = \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty} e^{-st}\Big|_0^b = \frac{-1}{s}\lim_{b\to\infty}\left(e^{-sb} - e^{-s(0)}\right)$$

$$L\{1\} = \frac{-1}{s}\left(\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{sb}} - \lim_{b\to\infty} 1\right) = \frac{-1}{s}(0-1) = \frac{1}{s}$$

Por lo tanto $L\{1\} = \frac{1}{s}$, siempre que $s > 0$. En otras palabras, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y $e^{-sb} \to 0$ conforme $b \to \infty$.

De la misma manera usando esta definición se pueden encontrar la transformada de Laplace para diferentes funciones tales como:

$$\boldsymbol{L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}\,(t)dt}$$

$$\boldsymbol{L\{e^t\} = \int_0^\infty e^{-st}(\,e^t)dt}$$

$$\boldsymbol{L\{Sen(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,Sen(t)dt}$$

Donde puede verse que algunas de estas integrales se resuelven por partes. Donde estos procesos son demasiados largos, para ello utilizaremos el teorema siguiente donde ya están dados los resultados para este tipo de funciones.

Se establece la generalización de algunos ejemplos anteriores por medio del siguiente teorema. A partir de este momento se deja de expresar cualquier restricción en s; se sobreentiende que s está lo suficientemente restringida para garantizar la convergencia de la adecuada transformada de Laplace.

Teorema 1. **Transformada de algunas funciones básicas**

$$\text{a)} \quad \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\text{b)} \quad \mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{c)} \quad \mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\text{d)} \quad \mathscr{L}\{\text{sen}\, kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2} \qquad \text{e)} \quad \mathscr{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

$$\text{f)} \quad \mathscr{L}\{\text{senh}\, kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2} \qquad \text{g)} \quad \mathscr{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2 - k^2}$$

Para una combinación lineal de funciones se puede escribir:

$$L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha L\{f(t)\} + \beta L\{g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

Como resultado de la propiedad anterior, se dice que L es una **transformación lineal**.

Ejemplo. Hallar $L\{1 + 5t\}$ usando el teorema anterior
Solución. Como la transformada de Laplace L es una transformación lineal se cumple lo siguiente:

$$L\{1 + 5t\} = L\{1\} + L\{5t\} = L\{1\} + 5L\{t\}$$

$$L\{1 + 5t\} = \frac{1}{s} + 5\left(\frac{1!}{s^{1+1}}\right) = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2}$$

Por lo tanto: $L\{1 + 5t\} = \frac{1}{s} + \frac{5}{s^2}$

Ejemplo. Hallar $L\{4e^{-3t} - 10Sen(2t)\}$ usando el teorema anterior
Solución. Como la transformada de Laplace L es una transformación lineal se cumple lo siguiente:

$$L\{4e^{-3t} - 10Sen(2t)\} = L\{4e^{-3t}\} - L\{10Sen(2t)\}$$

$$= 4L\{e^{-3t}\} - 10L\{Sen(t)\} = 4\left(\frac{1}{s-(-3)}\right) - 10\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)$$

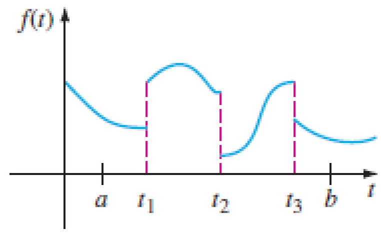
$$4\left(\frac{1}{s-(-3)}\right) - 10\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right) = \frac{4}{s+3} - \frac{20}{s^2+4}$$

Por lo tanto $L\{4e^{-3t} - 10Sen(2t)\} = \frac{4}{s+3} - \frac{20}{s^2+4}$

Condiciones suficientes para la existencia de $L\{f(t)\}$

La integral que define la transformada de Laplace no tiene que converger. Por ejemplo, no existe $L\{1/t\}$ ni $L\{e^{t^2}\}$.

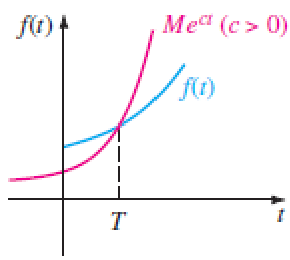
Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de $L\{f\ (t)\}$ son que *f* sea continua por tramos en $[0,\infty)$ y que *f* sea de orden exponencial para $t > T$. Recuerde que la función es **continua por tramos** en $[0,\infty)$ sí, en cualquier intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$, hay un número finito de puntos t_k, k = 1, 2, . . . , n ($t_{k-1} < t_k$) en los que f tiene discontinuidades finitas y es continua en cada intervalo abierto (t_{k-1}, t_k). Puede observarse en la figura siguiente. El concepto de **orden exponencial** se define de la siguiente manera.



Función continua por tramos

Definición. Orden exponencial

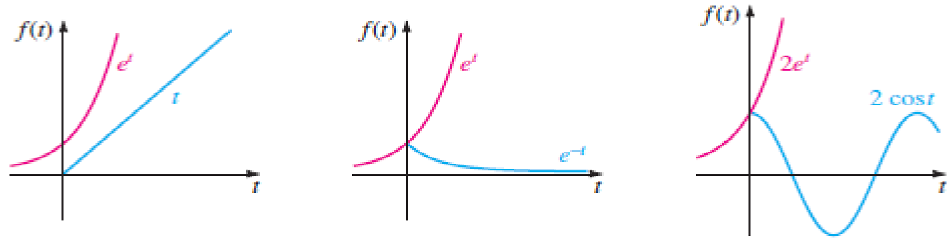
Se dice que *f* es de **orden exponencial *c*** si existen constantes c, $M\ >\ 0\ y\ T\ > 0$ tales que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para toda $t\ >\ T$.



f es de orden exponencial c

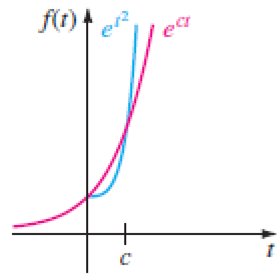
Si *f* es una función *creciente*, entonces la condición $|f(t)| \leq Me^{ct}$, $t > T$, simplemente establece que la gráfica de *f* en el intervalo (T,∞) no crece más rápido que la gráfica de la función exponencial Me^{ct}, donde c es una constante positiva. Vea la siguiente figura. Las funciones $f(t) = \ t, f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = 2\ cos(\ t)$ son de orden exponencial $c = 1$ para $t > 0$ puesto que se tiene, respectivamente,

$$|t| \leq e^t, \qquad |e^{-t}| \leq e^t, \qquad |2Cos(t)| \leq 2e^t$$



a) b) c)

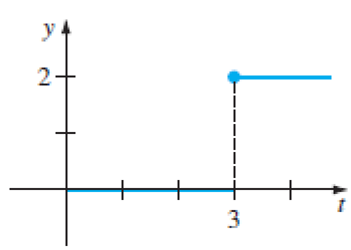
Una función como $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial puesto que, como se muestra en la figura siguiente su gráfica crece más rápido que cualquier potencia lineal positiva de *e* para $t > c > 0$.



Teorema 2. Condiciones suficientes para la existencia
Si *f* es una función continua por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial *c*, entonces $L\{f(t)\}$ existe para $s > c$.

Ejemplo. Evalúe $L\{f(t)\}$ donde $f(t) = \begin{cases} 0, si\ 0 \leq t < 3 \\ 2, si\ t \geq 3 \end{cases}$

Solución. La función que se muestra en la siguiente figura, es continua por tramos y de orden exponencial para $t > 0$.
Puesto que *f* se define en dos tramos, $L\{f(t)\}$ se expresa como la suma de dos integrales:
La grafica de la función se muestra a continuacion.



Función continua por tramos

$$\boldsymbol{L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt}$$

$$\boldsymbol{L\{f(t)\} = \int_0^3 e^{-st} f(t) dt + \int_3^\infty e^{-st} f(t) dt}$$

$$= \int_0^3 e^{-st}(0)dt + \int_3^\infty e^{-st}\,(2)dt$$

$$= 0 + 2 \lim_{b\to\infty} \int_3^b e^{-st}\,dt = \ 2 \ \lim_{b\to\infty} \int_3^b e^{-st} dt$$

Haciendo $w = -st$, **entonces** $dw = -sdt$ **es decir** $\frac{dw}{-s} = dt$

$$2 \ \lim_{b\to\infty} \int_3^b e^{-st} dt = 2 \ \lim_{b\to\infty} \int_3^b e^{w} \frac{dw}{-s}$$

$$= \frac{-2}{s} \lim_{b\to\infty} \int_3^b e^{w}\, dw$$

$$= \frac{-2}{s} \lim_{b\to\infty} e^{w}|_3^b = \frac{-2}{s} \lim_{b\to\infty} e^{-st}|_3^b$$

$$= \frac{-2}{s} \lim_{b\to\infty} \left(e^{-sb} - e^{-s(3)}\right)$$

$$= \frac{-2}{s}\left(\lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^{sb}} - \lim_{b\to\infty} e^{-s(3)}\right) = \frac{-2}{s}(0 - e^{-3s}) = \frac{2}{s} e^{-3s}, s > 0$$

Por lo tanto $L\{f(t)\} = \frac{2}{s} e^{-3s}, s > 0$

Se concluye con un poco más de teoría relacionada con los tipos de funciones de s con las que en general se estará trabajando. El siguiente teorema indica que no toda función arbitraria de s es una transformada de Laplace de una función continua por tramos de orden exponencial.

GUIA DE EJERCICIOS No.1

En los problemas 1 a 18 use la definición 1 para encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

1. $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} 2t + 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$

6. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi/2 \\ \cos t, & t \geq \pi \ 2 \end{cases}$

10.

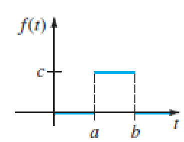


FIGURA 7.1.9 Gráfica para el problema 10.

11. $f(t) = e^{t+7}$

12. $f(t) = e^{-2t-5}$

13. $f(t) = te^{4t}$

14. $f(t) = t^2 e^{-2t}$

15. $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t$

16. $f(t) = e^{t} \cos t$

17. $f(t) = t \cos t$

18. $f(t) = t \operatorname{sen} t$

En los problemas 19 a 36 use el teorema 1 para encontrar $\mathscr{L}\{f(t)\}$.

19. $f(t) = 2t^4$

20. $f(t) = t^5$

7.

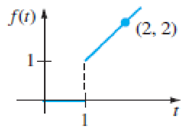


FIGURA 7.1.6 Gráfica para el problema 7.

8.

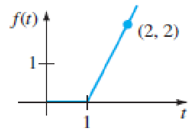


FIGURA 7.1.7 Gráfica para el problema 8.

9.

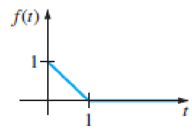


FIGURA 7.1.8 Gráfica para el problema 9.

21. $f(t) = 4t - 10$
22. $f(t) = 7t + 3$
23. $f(t) = t^2 + 6t - 3$
24. $f(t) = -4t^2 + 16t + 9$
25. $f(t) = (t + 1)^3$
26. $f(t) = (2t - 1)^3$
27. $f(t) = 1 + e^{4t}$
28. $f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$
29. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$
30. $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$
31. $f(t) = 4t^2 - 5 \operatorname{sen} 3t$
32. $f(t) = \cos 5t + \operatorname{sen} 2t$
33. $f(t) = \operatorname{senh} kt$
34. $f(t) = \cosh kt$
35. $f(t) = e^t \operatorname{senh} t$
36. $f(t) = e^{-t} \cosh t$

En los problemas 37 a 40 encuentre $\mathscr{L}\{f(t)\}$ usando primero una identidad trigonométrica.

37. $f(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$
38. $f(t) = \cos^2 t$
39. $f(t) = \operatorname{sen}(4t + 5)$
40. $f(t) = 10 \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$

Transformadas inversas

En esta ocasión se dan algunos pasos hacia un estudio de cómo se puede usar la transformada de Laplace para resolver ciertos tipos de ecuaciones para una función desconocida. Se empieza el análisis con el concepto de transformada de Laplace inversa o, más exactamente, la inversa de una transformada de Laplace $F(s)$. Después de algunos antecedentes preliminares importantes sobre la transformada de Laplace de derivadas $f'(t), f''(t), \ldots$, se ilustra cómo entran en juego la transformada de Laplace y la transformada de Laplace inversa para resolver ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias sencillas.

Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, es decir, $L\{f(t)\} = F(s)$, se dice entonces que $f(t)$ es la **transformada de Laplace inversa** de $F(s)$ y se escribe $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.

Veremos que en la aplicación de la transformada de Laplace a ecuaciones no se puede determinar de manera directa una función desconocida $f(t)$; más bien, se puede despejar la transformada de Laplace $F(s)$ o $f(t)$; pero a partir de esto, se determina f calculando: $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$.

El teorema siguiente es el análogo del teorema 1 para la transformada inversa.

Teorema 2

a) $1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

b) $t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\}$

d) $\operatorname{sen} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 + k^2}\right\}$

e) $\cos kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + k^2}\right\}$

f) $\operatorname{senh} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 - k^2}\right\}$

g) $\cosh kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - k^2}\right\}$

Al evaluar las transformadas inversas, suele suceder que una función de s que se está considerando no concuerda *exactamente* con la forma de una transformada de Laplace $F(s)$ que se presenta en el teorema 2. Es posible que sea necesario "arreglar" la función de s multiplicando y dividiendo entre una constante apropiada.

Ejemplo. Evalúe $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$

Solución. Para hacer coincidir la forma dada en el inciso b) del teorema 2, se identifica con $n+1=5$, entonces $n=4$ y luego se multiplica y se divide entre $4! = 4.3.2.1 = 24$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{4!}L^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}$$

$$= \frac{1}{4!}L^{-1}\left\{\frac{4!}{s^{4+1}}\right\} = \frac{1}{24}t^4$$

Por lo tanto $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{1}{24}t^4$

Ejemplo. Evalúe $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$

Solución. Para que coincida con la forma dada en el inciso d) del teorema 2, se identifica $k^2 = 7$ y, por tanto $k = \sqrt{7}$. Se arregla la expresión multiplicando y dividiendo entre $\sqrt{7}$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{7}}{s^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}Sen(\sqrt{7}t)$$

Por lo tanto: $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\} = \frac{1}{\sqrt{7}}Sen(\sqrt{7}t)$

La transformada de Laplace inversa es también una transformada lineal para las constantes α y β.

$$\boldsymbol{L^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha L^{-1}\{F(s)\} + \beta L^{-1}\{G(s)\}\ (1)}$$

donde F y G son las transformadas de algunas funciones f y g.

Ejemplo. Evalue $L^{-1}\left(\frac{-2s+6}{s^2+4}\right)$

Solucion. Primero se reescribe la función dada de s como dos expresiones dividiendo cada uno de los términos del numerador entre el denominador y después se usa la ecuación (1):

división de cada uno de los términos entre el denominador

linealidad y arreglo de las constantes

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4} + \frac{6}{s^2+4}\right\} = -2\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{6}{2}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= -2\cos 2t + 3\,\text{sen}\, 2t.$$

$\leftarrow$ incisos e) y d) del teorema 2. con $k = 2$

Las fracciones parciales juegan un papel importante en la determinación de transformadas de Laplace inversas. La descomposición de una expresión racional en las fracciones componentes se puede hacer rápidamente usando una sola instrucción en la mayoría de los sistemas algebraicos de computadora.

Ejemplo. Evalúe $L^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$

Solución. Existen constantes reales A, B y C por lo que:

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s+4}$$

$$=\frac{A(s-2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

Puesto que los denominadores son idénticos, los numeradores son idénticos:

$$\boldsymbol{s^2+6s+9=A(s-2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s-2)}\ *$$

Comparando los coeficientes de las potencias de s en ambos lados de la igualdad, se sabe que la ecuación anterior es equivalente un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas A, B y C.

Sin embargo, se pueden determinar estas incógnitas, si se hace $s=1, s=2\ y\ s=-4$ en (*) se obtiene, respectivamente,

$$1^2+6(1)+9=A(1-2)(1+4)+B(1-1)(1+4)+C(1-1)(1-2)$$

$$16=A(-1)5,\text{entonces } A=-\frac{16}{5}$$

$$2^2+6(2)+9=A(2-2)(2+4)+B(2-1)(2+4)+C(2-1)(2-2)$$

$$25=B(1)6, entonces\ B=\frac{25}{6}$$

$$(-4)^2+6(-4)+9=A(-4-2)(-4+4)+B(-4-1)(-4+4)+C(-4-1)(-4-2)$$

$$1=C(-5)(-6),\text{entonces } C=\frac{1}{30}$$

Por descomposición en fracciones parciales se tiene:

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}=\frac{-16/5}{s-1}+\frac{25/6}{s-2}+\frac{1/30}{s+4}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-16/5}{s-1}+\frac{25/6}{s-2}+\frac{1/30}{s+4}\right\}$$

Utilizando la linealidad de la transformada inversa y utilizando el c) del teorema 2 se tiene:

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-16/5}{s-1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{25/6}{s-2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1/30}{s+4}\right\}$$

$$=-\frac{16}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\frac{25}{6}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\frac{1}{30}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}=-\frac{16}{5}e^{t}+\frac{25}{6}e^{2t}+\frac{1}{30}e^{-4t}$$

GUIA DE EJERCICIOS No.2

TRANSFORMADAS INVERSAS

En los problemas 1 a 30 use el álgebra apropiada y el teorema 2. para encontrar la transformada inversa de Laplace dada.

1. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$
2. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$
3. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{48}{s^5}\right\}$
4. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\left(\frac{2}{s}-\frac{1}{s^3}\right)^2\right\}$
5. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$
6. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s+2)^2}{s^3}\right\}$
7. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-2}\right\}$
8. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s}+\frac{6}{s^5}-\frac{1}{s+8}\right\}$
9. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s+1}\right\}$
10. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s-2}\right\}$
11. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+49}\right\}$
12. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{10s}{s^2+16}\right\}$
13. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{4s^2+1}\right\}$
14. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+1}\right\}$
15. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-6}{s^2+9}\right\}$
16. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$
17. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$
18. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-4s}\right\}$
19. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s-3}\right\}$
20. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-20}\right\}$
21. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{0.9s}{(s-0.1)(s+0.2)}\right\}$
22. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}\right\}$
23. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}\right\}$
24. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s(s-1)(s+1)(s-2)}\right\}$
25. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+5s}\right\}$
26. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$
27. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}\right\}$
28. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-9}\right\}$
29. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$
30. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{6s+3}{s^4+5s^2+4}\right\}$