Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Existe diversidad de aplicaciones sobre las ecuaciones diferenciales de primer orden.

1) Ley de enfriamiento o calentamiento de Newton.
2) Problemas de mezclas.
3) Problemas de circuitos en serie.

Ley de enfriamiento o calentamiento de Newton

Los experimentos han demostrado que bajo ciertas condiciones se puede obtener una buena aproximación de la temperatura de un objeto o de un cuerpo, usando la ley de enfriamiento de Newton. Esta ley puede enunciarse de la manera siguiente:

"La rapidez con que cambia la temperatura de un objeto o de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su temperatura y el medio que lo rodea".

O sea que si:

T(t): representa la temperatura del objeto o de un cuerpo en un instante t.

$\boldsymbol{T_m}$**:** es la temperatura del medio que lo rodea o la temperatura del medio circundante (temperatura ambiente)

$\boldsymbol{\frac{dT}{dt}}$**:** es la rapidez con que cambia la temperatura del cuerpo

Entonces, la ley de enfriamiento de Newton se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - T_m) \;\; o \;\; \frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \qquad (1)$$

Donde k es la constante de proporcionalidad.

Se puede generalizar partiendo de (1) $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$, para encontrar la función temperatura que depende del tiempo.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

Aplicando separación de variables:

$$dT = k(T - T_m)dt$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = \int kdt$$

$$Ln|T - T_m| = kt + C_1$$

Aplicando exponenciales y sus propiedades

$$e^{Ln|T - T_m|} = e^{kt + C_1}$$

$$T - T_m = e^{kt + C_1}$$

$$T - T_m = e^{kt}.e^{C_1}$$

$$T - T_m = e^{kt}.C; donde\ C = e^{C_1}$$

$$T = T_m + Ce^{kt}$$

La función temperatura que depende del tiempo es:

$$\boldsymbol{T(t) = T_m + Ce^{kt} \ \ (2)}$$

Donde T_m es la temperatura del ambiente

Ejemplo. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300° F. Tres minutos después su temperatura es de 200° F. ¿Cuánto tiempo le tomará al pastel enfriarse hasta la temperatura ambiente de 70º F?

Solución: Del problema tenemos que

$T_m = 70°$ F

$T(0) = 300,$

Determinar el valor de k, cuando el tiempo es 3 minutos, es decir: $T(3) = 200$

La ecuación (1) es tanto lineal como de variables separables, pero usaremos (2) con los datos del problema.

$$T(t) = T_m + Ce^{kt}$$

$$T(t) = 70 + Ce^{kt}, \text{la segunda condicion } t = 0, T = 300$$

$$300 = 70 + Ce^{k(0)}, entonces \ \ C = 230$$

Por lo tanto $T(t) = 70 + 230e^{kt}$

Para encontrar el valor de k, se usa la última condición inicial $T(3) = 200$

$$200 = 70 + 230e^{k(3)}$$

$$\frac{200 - 70}{230} = e^{3k} = \frac{13}{23}$$

Tomando logaritmo natural a ambos la dos de la igualdad:

$$Ln(e^{3k}) = Ln\left(\frac{13}{23}\right),$$

$$3kLn(e) = Ln\left(\frac{13}{23}\right);$$

$$3k(1) = Ln\left(\frac{13}{23}\right); entonces\ k = \frac{1}{3}Ln\left(\frac{13}{23}\right) = -0.190181619$$

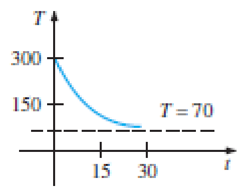
Así:

$$\boldsymbol{T(t) = 70 + 230e^{-0.19018t}} \ \textbf{Modelo de enfriamiento } (\mathbf{3})$$

Se puede observar que la ecuación (3) no tiene una solución finita ya que $T(t) = \ 70$ cuando al aplicar limite cuando el tiempo crece se obtiene:

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} (\boldsymbol{70 + 230e^{-0.19018t}})$$

No obstante, en forma intuitiva esperamos que el pastel se enfríe al transcurrir un intervalo razonablemente largo. ¿Qué tan largo es “largo”? Por supuesto, no nos debe inquietar el hecho de que el modelo (3) no se apegue mucho a nuestra intuición física.
Los incisos a) y b) de la figura siguiente muestran claramente que el pastel estará a la temperatura ambiente en aproximadamente una media hora.
La temperatura ambiente en la ecuación (1) no necesariamente es una constante, pudiera ser una función $T_m(t)$ del tiempo *t*.



a)

$T(t)$	t (min)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70.5°	32.3

b)

Ejemplo. Sea T la temperatura (en °F) de un objeto en una habitación cuya temperatura se conserva constante a 60°. Si la temperatura del objeto baja de 100° a 90° en 10 minutos, ¿cuánto tiempo se requerirá para bajar la temperatura a 80°?
Solución Por la ley de enfriamiento de Newton, se sabe que la razón de cambio en T es proporcional a la diferencia entre T y 60.
Del problema tenemos que
$T_m = 60°$ F
$T(0) = 100$
$T(10) = 90$
$T(t) = 80$; donde hay que encontrar t

Para resolver la integral se usará la separación de variables es decir la ecuación (2)

$$T(t) = T_m + Ce^{kt}$$

$$T(t) = 60 + Ce^{kt} \text{ , la segunda condicion } t = 0, T = 100$$

$$100 = 60 + Ce^{k(0)}, entonces\ \ C = 40$$

Dado que $T = 90$ cuando $t = 10$

$$T = 60 + 40e^{kt}$$

$$90 = 60 + 40e^{k(10)}, entonces\ 30 = 40e^{k(10)}$$

$$\frac{3}{4} = e^{10t}$$

Tomando logaritmo natural a ambos la dos de la igualdad:

$$Ln(e^{10k}) = Ln\left(\frac{3}{4}\right), \text{entonces } 10k = Ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

El valor de k es: $k = \frac{1}{10} Ln\left(\frac{3}{4}\right) = -0.02877$

Así:

$$\boldsymbol{T(t) = 60 + 40e^{-0.028768t}} \quad \textbf{Modelo de enfriamiento}$$

y finalmente, cuando $T = 80$, se obtiene el valor de "t"

$$\boldsymbol{80 = 60 + 40e^{-0.02877t}}$$

$$\boldsymbol{20 = 40e^{-0.02877t}}$$

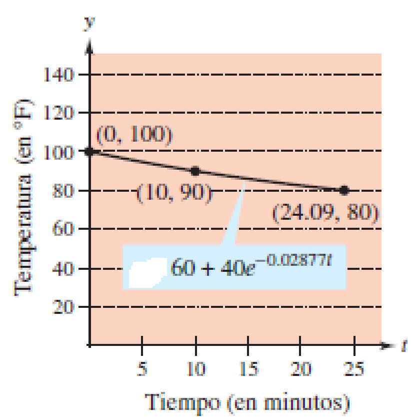
$$\boldsymbol{\frac{1}{2} = e^{-0.02877t}}, \textbf{aplicando Ln}$$

$$Ln\left(\frac{1}{2}\right) = Ln(\boldsymbol{e^{-0.02877t}})$$

$$Ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0.02877t$$

$$t \approx 24.09$$

Así, se requerirán alrededor de 14.09 minutos *más* para enfriar el objeto a una temperatura de 80°



GUIA DE EJERCICIOS DE LA LEY DEL ENFRIAMIENTO

1) Se calienta agua a temperatura de 100° C. Se enfría en 10 minutos a 81° C, en un cuarto cuya temperatura es de 32° C. Encontrar:
   a) La temperatura del agua después de 20 minutos
   b) ¿Cuándo la temperatura será de 40° C?
   c) ¿Cuándo será de 34° C.

2) Un rico industrial fue encontrado asesinado en su casa. La policía llegó a la escena a las 11:00pm. La temperatura del cadáver en ese momento era de 31° C y una hora después era de 30° C. La temperatura de la habitación en que se encontró el cadáver era de 22° C. Estime la hora en que ocurrió el asesinato.

Nota Si se comete un homicidio, la temperatura del cuerpo de la víctima disminuirá gradualmente de 37° C (temperatura normal del cuerpo) a la temperatura del ambiente.

3) Cuando un objeto se extrae del horno y se coloca en un entorno con una temperatura constante de 80° F, la temperatura en el centro es 1,500° F. Una hora después de extraerlo, la temperatura del centro es 1,120° F. Encontrar la temperatura del centro 5 horas después de extraer el objeto del horno.

4) Un contenedor de líquido caliente se coloca en un congelador que se mantiene a una temperatura constante de 20° F. La temperatura inicial del líquido es 160° F. Después de 5 minutos, la temperatura del líquido es 60° F. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que su temperatura disminuya a 30° F?

Mezclas.
Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones surge una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal contenida en la mezcla.

Como una segunda aplicación consideraremos un tanque que tiene una solución (una mezcla de un contaminante y un solvente) como una sal disuelta en agua (salmuera), Hay un flujo tanto de entrada como de salida y se quiere calcular la cantidad de Q(t) de contaminante que hay en el tanque en el tiempo t, en función de la cantidad inicial $Q(0) = Q_0$ en el instante $t = 0$.

Si disolvemos 500 gr de azúcar en 20lt de agua, obtenemos una solución dulce con una concentración $C = \frac{500}{20} gr/lt = 25 gr/lt$ de azúcar (se lee 25 gramos por litro y significa 25 gramos de azúcar por cada litro de solución)

Cuando disolvemos 10lb de sal en 50 gal de agua, obtenemos una solución salina o salmuera con una concentración $C = \frac{10}{50}\ lb/gal = 0.2 lb/gal$ de sal (léase 0.2 libras por galón)

En general, si disolvemos Q kg (o cualquier unidad de masa) de un soluto en V lt (o cualquier unidad de volumen) de un solvente, obtenemos una solución con concentración $C = \frac{Q}{V}\ kg/lt$ del soluto (se lee C kilogramos por litro o C kilogramos de soluto por cada libro de solución)

Ahora supongamos que inicialmente (en $t = 0$) tenemos en un tanque una cantidad V_0 de solución donde hay disuelta una cantidad Q_0 de un soluto.

Supongamos también que, a partir de $t = 0$, se deja entrar otra solución al tanque con una rapidez R_e (flujo de entrada) y con una concentración C_e (concentración de entrada) del mismo soluto y que, al mismo tiempo, se deja salir del tanque la nueva solución (considerada uniforme por mezclado) con una rapidez R_s (flujo de salida) y una concentración C_s (concentración de salida) del mismo soluto.
Se observa lo siguiente:

1) $R_e = R_s$, entonces la cantidad V_0 de solución se mantiene constante al paso del tiempo "t".
2) $R_e \neq R_s$, entonces la cantidad V de solución será función del tiempo "t"; es decir $V = V(t)$. Aún más, si $R_e > R_s$, entonces $V(t) > V_0$ (creciente); mientras que, si $R_e < R_s$, entonces $V(t) < V_0$ (decreciente)
3) En general, cantidad Q de soluto en el tanque será función del tiempo "t"; es decir, $Q = Q(t)$.
4) Igualmente, la concentración C del soluto en el tanque será función del tiempo "t"; y variará según $R_e = R_s$ o que $R_e \neq R_s$, esto es,
$$C(t) = \frac{Q(t)}{V_0} \; o \; bien \; C(t) = \frac{Q(t)}{V}$$
5) Un problema que es de interés en esta clase de procesos consiste en determinar la cantidad Q(t) de soluto en el tanque en cualquier instante $t \geq 0$

Para resolver estos problemas se procede como sigue:
Consideraremos primero la rapidez con que cambia la cantidad de soluto Q(t) en el tanque, la cual está dada por la rapidez con que entra el soluto menos la rapidez con la que sale.
Esto es,
$$\frac{d}{dt}Q(t) = (\text{rapidez con que entra el soluto}) - (\text{rapidez con que sale el soluto})$$
Si se toma en cuenta que:
La rapidez con que entra el soluto es $R_e C_e$;
La rapidez con que sale el soluto es $R_s C_s = R_s C(t)$
El modelo de este proceso es un problema de valores iniciales
$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_e C_e - R_s C(t), con \; Q(0) = Q_0$$
El método de solución de este tipo de problemas con valores iniciales dependerá de las condiciones del problema.

Ejemplo. En un tanque que contiene 1,000 lt de agua, inicialmente se disuelven 5 kg de sal. Luego se bombea salmuera al tanque a razón de 20 lt/min y la solución uniformemente mezclada se bombea hacia afuera del tanque a la misma razón. Considerando que la concentración de la solución que entra es de 0.01 kg/lt, determinar:

a) La cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier instante $t \geq 0$
b) La cantidad de sal en el tanque después de 30 minutos.

c) La cantidad de sal en el tanque después de mucho tiempo.
d) El tiempo que debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque.

Solución a) La cantidad de sal que hay en el tanque en cualquier instante $t \geq 0$
Sea Q(t) la cantidad en kg de sal en el tanque después de t minutos. Como inicialmente se tienen 5 kg de sal, entonces $Q(0) = 5$
La rapidez de cambio de la cantidad Q(t) de sal en el tanque en el instante t es:

$$\frac{d}{dt}Q(t) = (\text{rapidez con que entra el soluto}) - (\text{rapidez con que sale el soluto})$$

¿Con qué rapidez entra la sal al tanque?
Ya que la solución entra con una rapidez $R_e = 20 \text{ lt/min}$ con una concentración $C_e = 0.01 \text{ kg/lt}$, entonces la rapidez con que entra la sal al tanque es:

$$R_e C_e = (20\ lt/min)(0.01\ kg/lt) = 0.2\ kg/min$$

¿Con que rapidez sale la sal del tanque?
La rapidez con que sale la solución el tanque es $R_s = 20 \text{ lt/min}$. Sin embargo, la concentración de sal a la salida se debe hallar a partir de estas consideraciones:

- Ya que entra solución a razón 20 lt/min y sale solución a la misma razón, es claro que el volumen V de solución en el tanque es contante: $\text{V} = \text{volumen inicial} = 1000\text{lt}$.
- Después de t minutos hay Q(t) kg de sal disueltos en 1000lt de solución, por lo que la concentración de sal en la solución que sale es:

$$C_s = \frac{Q(t)}{V} = \frac{Q(t)}{1000}\ kg/lt$$

Entonces la rapidez con que sale la sal del tanque es:

$$R_s C_s = (20\ lt/min\,)\left(\frac{Q(t)}{1000}\frac{kl}{lt}\right) = \frac{Q(t)}{50}\ kg/min$$

Por lo tanto, la rapidez de cambio de la cantidad Q(t) de sal en el tanque, después de 't' minutos es

$$\frac{d}{dt}Q(t) = R_e C_e - R_s C_s = 0.2 - \frac{Q(t)}{50}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{50} = 0.2$$

La cantidad de sal en el tanque Q(t) está dada por la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{50}Q(t) = 0.2 \text{ con } \text{Q}(0) = 5$$

$$Q(t) = e^{-\int \frac{1}{50}dt}\left(\int e^{\int \frac{1}{50}dt}\,(0.2)dt + c\right)$$

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{50}}\left(\int e^{\frac{t}{50}}\,(0.2)dt + c\right)$$

Haciendo cambio de variable $w = \frac{t}{50}$ entonces $dw = \frac{1}{50}\ dt$, es decir $50dw = dt$

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{50}}\left(\int e^{w}\,(0.2)50dw + c\right)$$

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{50}}\left(10\int e^{w}\,dw + c\right) = e^{-\frac{t}{50}}(10e^{w} + c)$$

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{50}}\left(10e^{\frac{t}{50}} + c\right) = 10 + ce^{-\frac{t}{50}}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{Q(t) = 10 + ce^{-\frac{t}{50}}} \quad (*)$$

Utilizando la condición inicial $\mathrm{Q}(0) = 5$ para hallar el valor de la constante “c”

$$5 = \mathrm{Q}(0) = 10 + \mathrm{ce}^{-\frac{0}{50}}$$

$$5 = 10 + \mathrm{ce}^{0}, \text{entonces} - 5 = c$$

Sustituyendo en (*) tenemos:

$$\mathbf{Q(t) = 10 - 5e^{-\frac{1}{50}t}} \quad (**)$$

La ecuación (**) da la cantidad de sal en kilogramos que hay en el tanque después de “t” minutos.

Solución b) La cantidad de sal que hay después de 30 minutos.

Sustituyendo $t = 30$ en (**)

$$\mathbf{Q(t) = 10 - 5e^{-\frac{1}{50}t}} \ (**)$$

$$\mathbf{Q(30) = 10 - 5e^{-\frac{1}{50}(30)}}$$

$$\mathbf{Q(30) = 10 - 5e^{-0.6}}$$

$$Q(30) \approx 7.25594182$$

$$Q(30) \approx 7.256\ kg$$

Solución c) La cantidad de sal en el tanque después de mucho tiempo la podemos denotar y calcular como sigue:

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\mathbf{10 - 5e^{-\frac{1}{50}t}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(10 - \frac{5}{e^{t/50}}\right) = 10$$

Por lo tanto, la cantidad de sal después de mucho tiempo es 10kg.

Solución d) ¿Qué tiempo que debe transcurrir para que haya 8 kg de sal en el tanque?

$$\mathrm{Q(t)} = 10 - 5\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}; donde\ Q(t) = 8$$

$$8 = 10 - 5\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}$$

$$\frac{8 - 10}{-5} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}$$

$$\frac{2}{5} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}$$

Aplicando logaritmo natural a ambos lados.

$$Ln\left(\frac{2}{5}\right) = \mathrm{Ln}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}\right) = -\frac{1}{50}t.Ln(e)$$

$$-50.Ln\left(\frac{2}{5}\right) = \mathrm{t} = 45.81453659 \text{ min}$$

Por lo tanto, el tiempo que transcurre para que el tanque tenga 8kg de sal es 45.81 min.

Ejemplo. Supongamos que un tanque grande de mezcla inicialmente contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto cierta cantidad de sal). Otra solución de salmuera se inyecta en el tanque grande a una velocidad de 3 galones por minuto; en este flujo de entrada, la concentración de sal es de 2 libras por galón. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae al mismo ritmo que la solución de entrada. Si había 50 libras de sal disueltas en los 300 galones iniciales. ¿Cuánta sal habrá en el tanque pasado un gran tiempo?

Solución. Si $Q(t)$ indica la cantidad de sal medida en libras que hay en el tanque en el momento t, entonces la velocidad a que Q(t) cambia será una tasa neta de:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \begin{pmatrix} Velocidad\ de \\ entrada\ de\ sal \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Velocidad\ de \\ salida\ de\ sal \end{pmatrix} = R_e - R_s$$

La velocidad de entrada R_e a la que ingresa la sal al tanque es el producto de la concentración de sal del flujo de entrada y la velocidad del fluido de entrada. Se puede ver que R_e se mide en libras por minuto.

$$R_e = \begin{pmatrix} Concentracion\ de \\ sal\ del\ flujo \\ de\ entrada \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Velocidad\ de \\ entrada\ de \\ salmuera \end{pmatrix} = \left(2\frac{Lb}{gal}\right)\left(3\frac{gal}{min}\right) = 6\frac{Lb}{min}$$

Como la solución está siendo bombeada hacia afuera del tanque con la misma velocidad a la ingresa, la cantidad de galones de salmuera que hay dentro del tanque en el tiempo “t” es una constante de 300 galones.

Por lo tanto, la concentración de sal dentro del tanque, así como en el flujo de salida, es $C_s = \frac{Q(t)}{300} Lb/gal$, y la velocidad de salida de sal es:

$$R_s = \begin{pmatrix} Concentracion\ de \\ sal\ del\ flujo \\ de\ salida \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Velocidad\ de \\ salida\ de \\ salmuera \end{pmatrix} = \left(\frac{Q(t)}{300} Lb/gal\right)\left(3\frac{gal}{min}\right)$$

$$R_s = \frac{Q(t)}{100}\frac{Lb}{min}$$

Entonces la velocidad neta se convierte en:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = R_e - R_s = 6\frac{Lb}{min} - \frac{Q(t)}{100}\frac{Lb}{min} = 6 - \frac{Q(t)}{100}$$

Para encontrar la cantidad de sal Q(t) en el tanque al tiempo t, se resuelve el problema con valores iniciales $\frac{dQ(t)}{dt} = 6 - \frac{Q(t)}{100}, Q(0) = 50$
Aquí observamos que la condición adjunta es la cantidad inicial de sal $Q(0) = 50$ en el tanque y *no* la cantidad inicial de líquido.

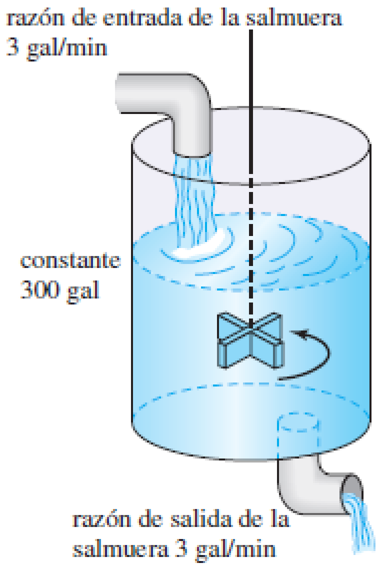
Utilizando ED lineales $\frac{dQ}{dt} = 6 - \frac{Q}{100}$ se obtiene $\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{100} = 6$, $sea\ P(t) = \frac{1}{100}, Q(t) = 6$

$$Q(t) = e^{-\int \frac{1}{100}dt}\left(\int e^{\int \frac{1}{100}dt}(6)dt + c\right)$$

Integrando y haciendo procesos algebraicos, además evaluar en la cantidad inicial se llega a la función Q(t):

$$Q(t) = 600 - 550e^{\frac{-1}{100}t} \quad (*)$$

La solución (*) se puede usar para construir la tabla de valores para ver el comportamiento de la función.
En la ecuación (*) también se puede ver, que cuando ha pasado un gran tiempo la cantidad de libras de sal en la solución es 600 lb. Es decir, aplicando limite a la ecuación.



En este ejemplo supusimos que la razón con que entra la solución al tanque es la misma que la razón con que sale. Sin embargo, el caso no necesita ser siempre el mismo; la salmuera mezclada se puede sacar con una razón R_{sale} que es mayor o menor que la razón R_{entra} con la que entra la otra salmuera.

Ejemplo. Un tanque contiene al principio 120 galones de salmuera, con 75 libras de sal disuelta. Al tanque entra agua salada que contiene 1.2 libras de sal por galón, a razón de 2 galones por minuto y la salmuera fluye hacia afuera a la misma razón. Si la mezcla se mantiene uniforme mediante una agitación constante, encuentre la cantidad de sal al final de una hora.

Solución. Sea Q el número de libras de sal en el tanque al término de “t minutos.

$$R_e = \begin{pmatrix} Concentracion\ de \\ sal\ del\ flujo \\ de\ entrada \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Velocidad\ de \\ entrada\ de \\ salmuera \end{pmatrix} = \left(1.2\frac{Lb}{gal}\right)\left(2\frac{gal}{min}\right) = 2.4\frac{Lb}{min}$$

$$R_s = \begin{pmatrix} Concentracion\ de \\ sal\ del\ flujo \\ de\ salida \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Velocidad\ de \\ salida\ de \\ salmuera \end{pmatrix} = \left(\frac{Q(t)}{120} Lb/gal\right)\left(2\frac{gal}{min}\right)$$

$$R_s = \frac{Q(t)}{60}\frac{Lb}{min}$$

Entonces:

$$\frac{dQ}{dt} = R_e - R_s = 2.4\frac{Lb}{min} - \frac{Q(t)}{60}\frac{Lb}{min} = 2.4 - \frac{Q(t)}{60}$$

Es decir, resolver $\frac{dQ}{dt} = 2.4 - \frac{Q}{60}, A(0) = 75$

Usando ED lineales $\frac{dQ}{dt} = 2.4 - \frac{Q}{60}$ se obtiene $\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{60} = 2.4$, $sea\ P(t) = \frac{1}{60}, Q(t) = 2.4$

$$Q(t) = e^{-\int \frac{1}{60}dt}\left(\int e^{\int \frac{1}{60}dt}(2.4)dt + c\right)$$

Integrando y haciendo procesos algebraicos, además evaluar en la cantidad inicial se llega a la función Q(t):

$$Q(t) = 144 - 69e^{\frac{-1}{60}t}$$

Encuentre la cantidad de sal al final de una hora (60 minutos).

$$Q(60) = 144 - 69e^{\frac{-1}{60}(60)} = 144 - 69e^{-1} \approx 118.62\ libras$$

Por lo tanto, en una hora habrá 118.62 libras de sal.

TRAYECTORIAS ORTOGONALES

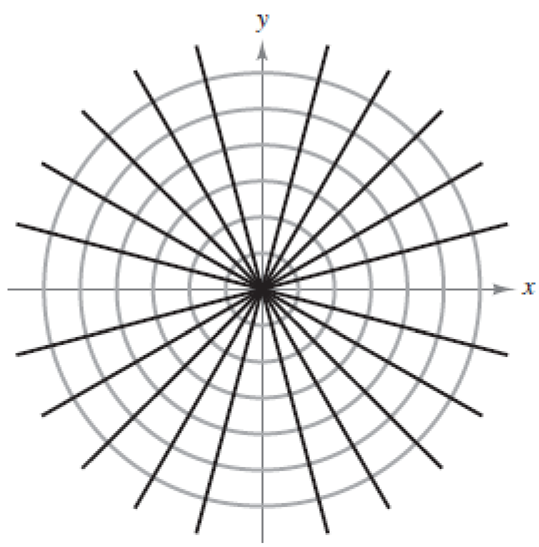
Definición. Sea $F(x, y, c) = 0$ (*) una familia uniparamétrica dada de curvas en el plano xy. Una curva que que interseca las curvas de la familia (*) en ángulo recto se llama trayectoria ortogonal de la familia dada.

Esas dos familias de curvas se dice que son **mutuamente ortogonales**, y cada curva en una de las familias se denomina **trayectoria ortogonal** de la otra familia. En electrostática, las líneas de fuerzas son ortogonales a las curvas equipotenciales.

En termodinámica, el flujo de calor que atraviesa una superficie plana es ortogonal a las curvas isotérmicas. En hidrodinámica, las líneas de flujo (corriente) son trayectorias ortogonales a las curvas de potencial de velocidad.

Ejemplo. Consideremos la familia de circunferencias $x^2 + y^2 = r^2$ (1), con centro en el origen y radio "r". Cada recta que pasa por el origen, $y = kx$ (2), es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias. Recíprocamente, cada circunferencia de la familia (1) es una trayectoria ortogonal de la familia de rectas. Ambas familias son trayectorias ortogonales entre sí. En la siguiente figura, con líneas continuas se ven varios miembros de la familia de circunferencias y varios miembros de la familia de rectas, están trazadas con guiones.

El problema de determinar las trayectorias ortogonales de una familia dada de curvas se presenta en muchos casos de carácter físico; por ejemplo, en un campo eléctrico de dos dimensiones las líneas de fuerza (líneas de flujo) y las curvas equipotenciales son trayectorias ortogonales entre sí.



Cada recta $y = Kx$ es una trayectoria ortogonal de la familia de circunferencias

Procedimiento para encontrar las trayectorias ortogonales de una familia de curvas.
Para determinar las trayectorias ortogonales de una familia de curvas $F(x, y, c) = 0$ (1)
A partir de esta se obtiene una ED de la familia anterior derivando primero la ecuación (1) en forma implícita con respecto a "x", y después eliminando el parámetro "c" entre la ecuación que se ha obtenido y la ecuación (1). La ecuación diferencial resultante de la familia se puede expresar en la forma: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
Entonces la curva C de la familia dada que pasa por el punto (x, y) tiene pendiente $f(x, y)$ en ese punto. Puesto que la trayectoria ortogonal de la familia dada interseca cada curva de la familia en ángulo recto, la pendiente de la trayectoria ortogonal C en (x, y) es:

$$-\frac{1}{f(x,y)}.$$

En consecuencia, la ED de la familia de trayectorias ortogonales es:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)} \quad (2)$$

Se obtiene una familia uniparamétrica $G(x, y, c) = 0$ o bien, $y = F(x, c)$ de soluciones de la ED (2) representa la familia de trayectorias ortogonales de la familia original.
Nota: en el primer paso al determinar la ED de la familia dada, se debe tener la seguridad de eliminar el parámetro "c" durante el proceso.

Ejemplo. Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de parábolas $y = cx^2$
Solución. **Paso 1**: obtener la ED de la familia dada $y = cx^2$
Derivar con respecto a "x"

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cx^2) = 2cx$$

Despejar "c" de la ecuación original y sustituir en la derivada $\left(c = \frac{y}{x^2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = 2cx = 2\left(\frac{y}{x^2}\right)x = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \quad (1)$$

En este caso $f(x, y) = \frac{2y}{x}$

Paso 2. Sustituir en (1) por su reciproca negativa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\left(\frac{2y}{x}\right)} = \frac{-x}{2y} \quad (2)$$

Paso 3. Resolver la ED (2) separando las variables $2ydy = -xdx$

$$\int 2ydy = \int -xdx$$

$$y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$2y^2 = -x^2 + 2C$$

Entonces $x^2 + 2y^2 = K^2$, donde K es una constante arbitraria representa una familia uniparamétrica de soluciones de (2)

$$\therefore\ x^2 + 2y^2 = K^2, \text{ es la familia de trayectorias ortogonales de } y = cx^2.$$

Ejemplo. Describir las trayectorias ortogonales para la familia de curvas dada por $y = \frac{C}{x}$ para $C \neq 0$. Trazar la gráfica para varios miembros de cada familia.

Solución. Primero, resolver la ecuación dada para C y escribir $xy = C$. Entonces, derivando implícitamente con respecto a "x", se obtiene la diferencial siguiente:

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(C)$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0, entonces\ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\ (1)$$

En este caso $f(x, y) = -\frac{y}{x}$

Sustituir en (1) por su reciproca negativa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\left(-\frac{y}{x}\right)} = \frac{x}{y}\ \ (2)$$

Resolver la ED (2) separando las variables $ydy = xdx$

$$\int ydy = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

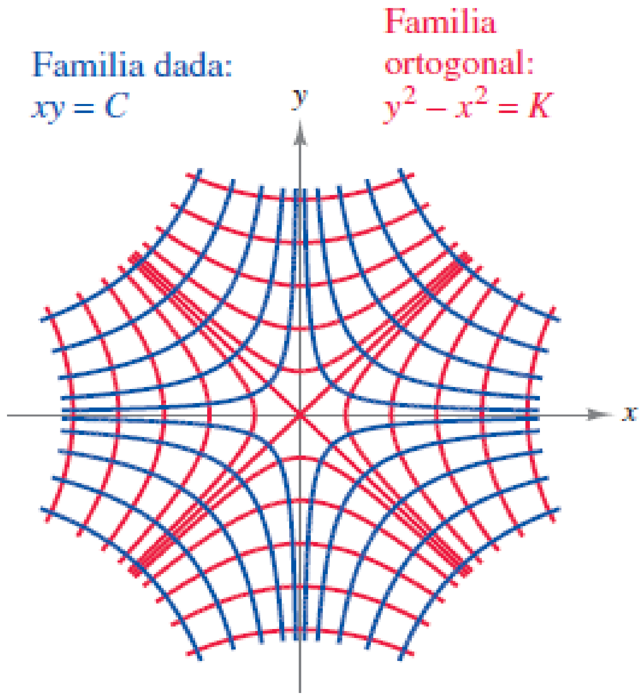
$$y^2 - x^2 = 2C$$

Por lo tanto $y^2 - x^2 = K, 2C = K$

Los centros de las hipérbolas están en el origen y los ejes transversales son verticales para $K > 0$ y horizontales para $K < 0$. Si $K = 0$, las trayectorias ortogonales son líneas $y = \pm x$

Si $K \neq 0$, las trayectorias ortogonales son hipérbolas.

$$\therefore\ y^2 - x^2 = K, \text{ es la familia de trayectorias ortogonales de } y = \frac{C}{x}$$



Trayectorias ortogonales

GUIA DE EJERCICIOS DE TRAYECTORIAS ORTOGONALES

Para los ejercicios siguientes hallar las trayectorias ortogonales de las familias.

a) $x^2 + y^2 = C$ $\quad d)\ x^2 - 2y^2 = C$

b) $x^2 = Cy$ $\quad e)\ y^2 = 2cx$

c) $y^2 = Cx^3$ $\quad f)\ y = ce^x$

Encontrar la ED de trayectorias ortogonales a la familia de circunferencias concéntricas que tienen su centro en el origen del sistema.