CS 441: Program 1

Josue Lopez

1 Introduction

Results for solving the 8-puzzle using Best-First Search and A* Search algorithms with three different heuristics on 5 initial states:

- **Heuristic 1 (h1):** Misplaced tiles
- **Heuristic 2 (h2):** Manhattan distance (L1 norm)
- **Heuristic 3 (h3):** `max(h1, h2)`

Initial States Used

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & \text{b} & 1 \end{bmatrix}$

2 Best-First Search

Heuristic 1 (h1)

- Path 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \mathrm{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

- Path 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \mathrm{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 6 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & \mathrm{b} \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \mathrm{b} & 7 \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \mathrm{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \mathrm{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

- Path 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{b} & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \mathrm{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 6 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & \mathrm{b} \\ 6 & 8 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \mathrm{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \mathrm{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

- Path 4:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ \mathrm{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & \mathrm{b} \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & \mathrm{b} & 4 \\ 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{b} & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{b} & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \mathrm{b} & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \mathrm{b} \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

- Path 5:

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & \mathrm{b} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & \mathrm{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & \mathrm{b} \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & \mathrm{b} \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & \mathrm{b} & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & \mathrm{b} & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{b} & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mathrm{b} \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \mathrm{b} \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

Average number of steps: 66

Heuristic 2 (h2)

- Path 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 6 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ \text{b} & 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & \text{b} & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \text{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & \text{b} & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \text{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 4:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & \text{b} & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ \text{b} & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ \text{b} & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} \text{b} & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \text{b} & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 6 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 5:

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & \text{b} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & \text{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & \text{b} \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & \text{b} \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & \text{b} & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & \text{b} & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \text{b} & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & \text{b} \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \text{b} \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

Average number of steps: `36.4`

Heuristic 3 (h3)

- Path 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ 6 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ \text{b} & 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & \text{b} & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \text{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & \text{b} & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \text{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 4:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & \text{b} & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ \text{b} & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ \text{b} & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} \text{b} & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \text{b} & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 6 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 5:

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & \text{b} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & \text{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & \text{b} \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & \text{b} \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & \text{b} & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & \text{b} & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \text{b} & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & \text{b} \\ 4 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \text{b} \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

Average number of steps: `36.4`

3 A* Search

Heuristic 1 (h1)

- Path 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \text{b} \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & \text{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & \text{b} & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ \text{b} & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \text{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \text{b} \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & \text{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & \text{b} & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \text{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 4:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ \text{b} & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & \text{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & \text{b} \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & \text{b} \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \text{b} \\ 4 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & \text{b} \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 6 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 5:

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & \text{b} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & \text{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & \text{b} \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & \text{b} \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & \text{b} & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \text{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

Average number of steps: `16.8`

Heuristic 2 (h2)

- Path 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \text{b} \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & \text{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & \text{b} & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ \text{b} & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \text{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \text{b} \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & \text{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & \text{b} & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \text{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 4:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & \text{b} & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ \text{b} & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{b} & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} \text{b} & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \text{b} & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \text{b} \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

- Path 5:

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & \text{b} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & \text{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & \text{b} \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & \text{b} \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & \text{b} & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \text{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \text{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \text{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \text{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \text{b} \end{bmatrix}$$

Average number of steps: `16.8`

Heuristic 3 (h3)

- Path 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \mathrm{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

- Path 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \mathrm{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \mathrm{b} \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & \mathrm{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & \mathrm{b} & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ \mathrm{b} & 6 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \mathrm{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \mathrm{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

- Path 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{b} & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \mathrm{b} & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \mathrm{b} \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & \mathrm{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 6 & \mathrm{b} & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \mathrm{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \mathrm{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

- Path 4:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ \mathrm{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 5 \\ 7 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & \mathrm{b} & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ \mathrm{b} & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathrm{b} & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{b} & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{b} & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & \mathrm{b} & 5 \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & \mathrm{b} \\ 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

- Path 5:

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & \mathrm{b} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & \mathrm{b} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & \mathrm{b} \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 6 & \mathrm{b} \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & \mathrm{b} & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & \mathrm{b} & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathrm{b} & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \mathrm{b} & 7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & \mathrm{b} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \mathrm{b} \end{bmatrix}$$

Average number of steps: `16.8`

4 Conclusion

The results clearly demonstrate that A* Search significantly outperforms Best-First Search in terms of efficiency, consistently requiring fewer steps to reach the goal state across all heuristics and initial states. While Best-First Search with heuristics h2 and h3 improved performance compared to h1, A* won by incorporating the cost to reach a node ($g(n)$) in addition to the heuristic estimate ($h(n)$). This allowed A* to explore more promising paths, being faster and and leading to more reliable solutions. Interestingly, heuristics h2 and h3 produced nearly identical performance under both search strategies, suggesting that combining heuristics did not degrade A*'s efficiency. Overall, A* not only yielded lower step counts but also demonstrated greater consistency and scalability across the different initial states. While the textbook, and class lectures, said this was the case, it's interesting to see it happen with a real example. This highlights how significantly an algorithm can impact complexity and why it's important to choose the right one, especially in AI applications.