

Diseño y análisis de un sistema de control realimentado para un motor DC

Franco Castro Chavez C01886, Alexander Rojas Brenes B86869, Josué Salmerón Córdoba C07183

Resumen—En el presente trabajo, se documentan las distintas etapas del proceso de diseño de un sistema de control. En primer lugar, se realizaron tres identificaciones experimentales para obtener el modelo de mejor ajuste que describe el comportamiento de la planta asignada. Una vez que este fue identificado, se procedió con el diseño de controladores que hicieran cumplir una serie de especificaciones de desempeño propuestas en función de la aplicación para la que quiere emplearse el sistema. Los tres controladores diseñados fueron optimizados para servocontrol y estos tienen la forma PI. Para los diseños, se utilizaron los métodos de LGR, síntesis analítica y el método de Fertik y Sharpe. Una vez que se obtuvieron los modelos de controlador y se observaron resultados adecuados en las simulaciones, se probaron dichos controladores con la planta real y se calcularon y documentaron los valores de desempeño, robustez y esfuerzo de control. A través de una serie de comparaciones entre los valores especificados, pudo determinarse que el controlador que mostró mejores resultados fue aquel diseñado con LGR, ya que cumple de manera más cercana con las especificaciones de diseño requeridas para la aplicación planteada.

Palabras clave— servocontrol, controlador PI, LGR, desempeño de control, modelo de mejor ajuste.

I. INTRODUCCIÓN

El motor DC consta de un estator que cubre un eje, un rotor con un cable conductor enrollado en forma de bobina, en el que al fluir la corriente eléctrica suministrada por parte de la fuente de alimentación, se genera un campo electromagnético que atrae y repele los imanes en el rotor, causando que se de la rotación. Los diseños que usan para estos motores requieren poca incertidumbre esto porque es necesaria una alta eficiencia lo que implica reducir el consumo de energía [1]. Lo anterior causa que este tipo de sistemas sean muy lineales, lo que los hace útiles para operaciones de alta velocidad y muchos propósitos de control de posicionamiento preciso [2].

II. APLICACIÓN Y DEFINICIONES GENERALES

El motor se utilizará para el control de velocidad de las ruedas mecanum de un robot omnidireccional móvil y autónomo. Se busca que el motor sea capaz de seguir con alta fidelidad la señal de control, con el fin de que su accionar sea rápido y preciso. El robot será utilizado para fines demostrativos y académicos, por lo que su carga es constante, a saber, el acrílico que conforma su carcasa, el microcontrolador y el microcomputador que aseguran su funcionamiento, un grupo de sensores y el cableado eléctrico. La carga se distribuye uniformemente sobre cada una de las ruedas. La idea del seguimiento fiel y el hecho de que cada motor tendrá pocas perturbaciones, deja ver que el motor DC será utilizado en servocontrol.

Para el control del proceso, se sabe que el motor DC tiene un comportamiento lineal a causa de su naturaleza, por lo que no se tomará en cuenta la robustez en el proceso de diseño del controlador, sin embargo, se quieren las siguientes especificaciones

de diseño: el mínimo sobrepaso posible, un tiempo de asentamiento al 2 % menor o igual a 0,9176 s y un error permanente de 0 %. El primer requerimiento es necesario para asegurar la mayor estabilidad posible, pues a menor sobrepaso, menor posibilidad de oscilaciones y por tanto un efecto inicial más fácil de compensar. El segundo se buscará con el fin de permitir una reacción rápida del robot, sin exigirle más de lo que es capaz de dar (este valor se calculó como cuatro veces la constante de tiempo del modelo de mejor ajuste que se verá más adelante) y el tercero para que el sistema sea suficientemente fiel a la referencia, a lo largo del tiempo.

Al caracterizar el sistema, se definieron los siguientes puntos:

- **Variable controlada $c(t)$** : velocidad angular de las ruedas, es decir, revoluciones por minuto (RPM).
- **Variable de referencia $r(t)$** : revoluciones por minuto meta en un instante de tiempo dado.
- **Variable de control $u(t)$** : señal PWM que puede variar entre 0 y 255, debido a los 8 bits del convertidor analógico-digital.
- **Variable manipulada $m(t)$** : corriente eléctrica suministrada por el driver L298N.
- **Señal realimentada $y(t)$** : esta es determinada por un sensor que obtiene las revoluciones por minuto al contar los pulsos generados por el encoder del motor.
- **Perturbaciones $d(t)$** : pueden proceder de varias fuentes, por ejemplo, golpes abruptos o cambios en la carga del robot. Para este caso particular, se tomará como base que las rutas seguidas por el robot son lineales y sin peligro de impacto, y como se dijo anteriormente, la carga es constante.

III. MÉTODOS DE IDENTIFICACIÓN EXPERIMENTAL

Al importar los datos suministrados para el punto de operación dado (varía de 155 a 125) y graficar las curvas de entrada y salida se obtuvo lo siguiente:

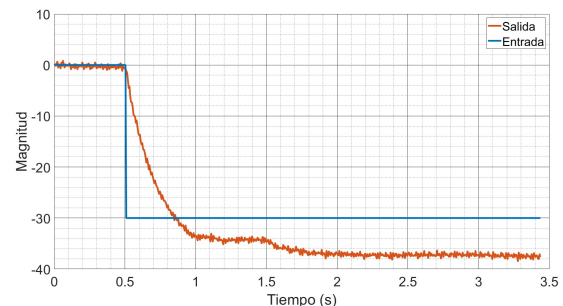


Figura 1: Gráfica de la respuesta de la planta ante una entrada escalón.

A continuación, se hace una descripción de los procedimientos seguidos para identificar el modelo de mejor ajuste del sistema proveído. En la Figura 2, pueden consultarse las curvas obtenidas para cada modelo de la planta sobre la curva real:

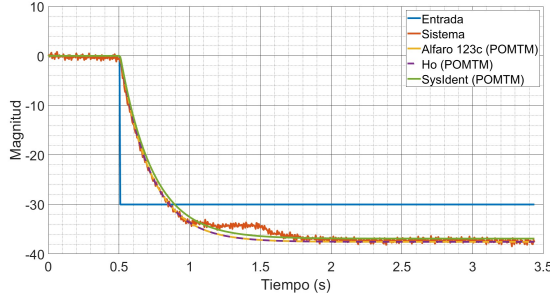


Figura 2: Curvas del comportamiento del modelo encontrado con los tres métodos de identificación utilizados y la curva del sistema al aplicar en todas la misma entrada escalón.

III-A. Uso de la herramienta “System Identification”

Para este método, se utilizó la herramienta “System Identification Tool” de MATLAB, la cual permite obtener una función de transferencia que se ajusta al comportamiento del sistema proveído. Para esto se importaron los datos de entrada, salida y muestra temporal (diferencias temporales entre datos) para que la herramienta tuviera sobre qué trabajar. Seguidamente, se ingresó a la sección de estimación y se utilizó la opción “Process Models”, para la cual se escogió un modelo de primer orden más tiempo muerto. El resultado obtenido fue el siguiente:

$$P_{SIT}(s) = \frac{1,2296}{(0,2294 \cdot s + 1)} \quad (1)$$

Como puede verse, el modelo no cuenta con tiempo muerto, ya que de la herramienta se sabe que $L = 0$ s.

III-B. Método Alfaro 123c de POMTM

Según se explica en [3], para este método de identificación, se utiliza la siguiente función de primer orden:

$$P(s) = \frac{K e^{-Ls}}{(\tau s + 1)} \quad (2)$$

Donde, sustituyendo los parámetros dados en [4], se tiene que:

$$K = \frac{\Delta y}{\Delta u} \quad (3)$$

$$\tau = 0,910(t_{75\%} - t_{25\%}) \quad (4)$$

$$L = 1,262t_{25\%} + (1 - 1,262)t_{75\%} \quad (5)$$

Utilizando MATLAB para la obtención de los tiempos necesarios, medidos desde la aplicación del escalón, para que la respuesta del sistema llegue a los porcentajes indicados y sustituyendo los valores de K , τ y L en la ecuación (2), se obtiene que:

$$P_{A123C}(s) = \frac{1,2517}{(0,2163s + 1)} \quad (6)$$

En este caso tampoco se tiene tiempo muerto. A pesar de que sí se obtuvo un valor para L , este era negativo y lo suficientemente pequeño como para ser despreciado ($L = -0,0113$ s). De no hacerlo de esta forma, el sistema no podría ser físicamente realizable al tratarse de un sistema no causal, un sistema que reacciona antes de que la entrada sea aplicada.

III-C. Método Ho de POMTM

Según se explica en [4], para este método de identificación, se utiliza la función de primer orden de la ecuación (2) y la ecuación (3) también es utilizada para la ganancia. En τ y L , se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$\tau = 0,670(t_{85\%} - t_{35\%}) \quad (7)$$

$$L = 1,290t_{35\%} + (1 - 1,290)t_{85\%} \quad (8)$$

Utilizando MATLAB para la obtención de los tiempos necesarios y sustituyendo los valores de K , τ y L en la ecuación (2), se obtiene que:

$$P_{HO}(s) = \frac{1,2517}{(0,2162s + 1)} \quad (9)$$

En este caso tampoco se tiene tiempo muerto y a pesar de que sí se obtuvo un valor para L ($L = -0,0087$ s), este es despreciado, al igual que en el caso de identificación Alfaro 123c y por las mismas razones.

III-D. Comparativa de modelos obtenidos

Para verificar la eficacia en la identificación de modelos, se utilizó el índice de bondad integral IAE, en el cual se compara la salida de sistema con la salida del modelo, ante un cambio escalón en la entrada. En la Tabla 1 pueden consultarse los índices obtenidos para cada modelo:

Tabla 1: Tabla comparativa de los índices de bondad de los tres modelos identificados respecto al sistema real.

| Método de identificación | IAE obtenido |
|--------------------------|--------------|
| System Identification | 2.3615 |
| POMTM Alfaro 123c | 2.4273 |
| POMTM Ho | 2.4279 |

Como puede observarse en la Tabla 1, el modelo con menor IAE y por ende, con un comportamiento más cercano al del sistema es el de la ecuación (1), encontrado utilizando el “System Identification Tool” de MATLAB. Es por lo anterior que se tomará este como el modelo de mejor ajuste y se utilizará para el diseño del controlador correspondiente al motor DC.

IV. DISEÑO DEL CONTROLADOR

Para diseñar los controladores se tomará que la acción de control seleccionada es acción inversa (+1), ya que si se aumenta la señal realimentada, se espera que una disminución en la señal de control sea capaz de provocar un acercamiento al valor deseado disminuyendo su valor y lo mismo en el caso contrario. Asimismo, en la ecuación 6, puede observarse que la ganancia de la planta es positiva. A continuación, se hará una descripción de los métodos utilizados para el diseño de los controladores adecuados para el sistema asignado:

IV-A. Diseño PID con LGR para servocontrol

Como lo que se quiere es un error permanente de 0 %, se iniciará con un controlador PI por lo que en este caso se tiene $C(s) = k_p \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right)$, entonces la función de lazo abierto del sistema es:

$$L(s) = C(s)P_{SIT}(s) = \frac{1,2296k_p(T_i s + 1)}{T_i s(0,2294 \cdot s + 1)}$$

Si se asume que $T_i = 0,2294$, se obtiene que:

$$L(s) = \frac{1,2296k_p}{s} \quad (10)$$

A partir de la ecuación (10), puede obtenerse el LGR utilizando *sisotool*, el cual puede consultarse en la Figura 3:

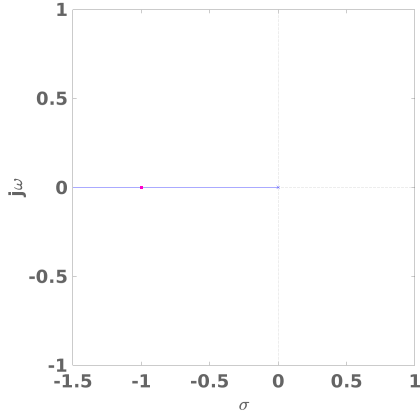


Figura 3: LGR de la función de lazo abierto para la planta $P_{SIT}(s)$ con un controlador proporcional integral

A partir del LGR de la Figura 3, puede realizarse el siguiente análisis: si lo que se quiere es el mínimo sobrepaso máximo, la condición necesaria es que los polos del sistema deben situarse sobre el eje real del LGR y como este cuenta con una rama, para que el valor de la ganancia proporcional cause lo dicho anteriormente, debe utilizarse un $M_{yr}(s)$ de primer orden. Así:

$$M_{yr}(s) = \frac{1}{(T_c s + 1)} \quad (11)$$

Asimismo, del LGR se sabe que para todo el recorrido del polo, el sistema será de primer orden (condición necesaria). Sin embargo, se debe de tomar en consideración el tiempo de asentamiento, ya que este limitará el recorrido válido del polo. Como para la condición necesaria el sistema es de primer orden, $t_{a2\%} = 4T_c$ y de los requerimiento de diseño se sabe que $t_{a2\%} \leq 0,9176$ s, por lo tanto:

$$4T_{deseado} \leq 0,9176 \text{ s}$$

Así:

$$T_{deseado} \leq 0,2294 \text{ s}$$

Por lo que, para cumplir con el tiempo de asentamiento, el polo debe encontrarse sobre o a la izquierda de $-1/T_c$, es decir, un valor menor o igual a -4.3592. Con este valor, puede calcularse el polinomio característico deseado para cumplir con el $M_{pn\%} = 0\%$ y $t_{a2\%} \leq 0,9176$ s, ya que puede ser sustituido en el polinomio característico de la ecuación (11):

$$p.c.deseado(M_{pn}, t_{a2}) = \left(s + \frac{1}{T_{c_deseado}} \right)$$

De esta manera:

$$p.c.deseado(M_{pn}, t_{a2}) = (s + 4,43592) \quad (12)$$

Para el polinomio característico del sistema se calcula $1 + L(s)$ y se toma el numerador:

$$p.c.sistema = s + \frac{1,2296}{0,2294} k_p \quad (13)$$

Comparando las ecuaciones (12) y (13) se concluye que:

$$k_p = 0,8133 \quad (14)$$

Por lo tanto, la ecuación del controlador resultante es:

$$C(s)_{LGR} = \frac{0,8133 \cdot (0,2294 s + 1)}{0,2294 s} \quad (15)$$

Para verificar el diseño, se utilizó la herramienta de simulación *sisotool*. El comportamiento del sistema con su respectivo controlador ante un cambio escalón puede consultarse en la Figura 4:

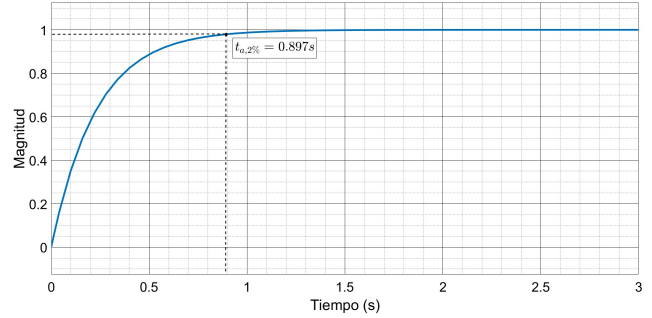


Figura 4: Respuesta ante un escalón unitario del sistema resultante utilizando LGR para diseñar el controlador.

Como puede verse en la Figura 4, el tiempo de asentamiento tiene un valor de 0,897 s, no hay sobrepaso máximo y el error permanente es de 0%.

IV-B. Diseño con Síntesis Analítica

Para el cálculo de los parámetros del controlador, se toma la ecuación (1) y se definen las siguientes variables

$$T = T_1 = 0,2294 \text{ s}$$

$$T_2 = 0$$

$$a = \frac{T_2}{T_1} = 0$$

De este modo, los parámetros del controlador están dados por las siguientes ecuaciones:

$$k_p = \frac{1}{k} \left(\frac{1+a}{\tau_c} \right) = \frac{1}{1,2296\tau_c} = 0,8225 \quad (16)$$

$$T_i = T = 0,2294 \text{ s} \quad (17)$$

$$T_d = \frac{a}{a+1} = 0 \quad (18)$$

Por lo tanto, la ecuación del controlador resultante es:

$$C(s)_{\text{Síntesis analítica}} = \frac{0,8225 \cdot (0,2294 s + 1)}{0,2294 s} \quad (19)$$

En este caso, la variable τ_c es una variable del método de sintonización que define la rapidez de respuesta de la señal realimentada y se ha escogido mediante prueba y error en las simulaciones como $\tau_c = 5,3$. De esta manera, se obtiene la expresión de $L(s)$ y se realiza la simulación en MATLAB con la herramienta *sisotool* para verificar la respuesta deseada, la cual se presenta a continuación:

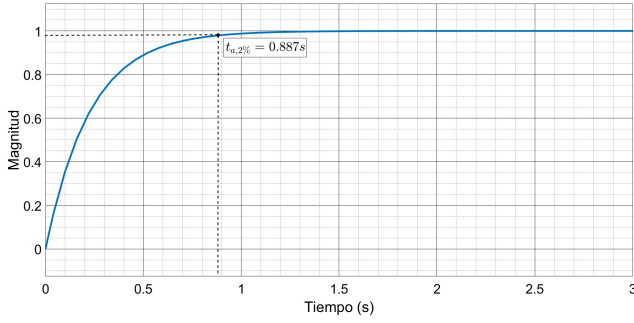


Figura 5: Respuesta ante un escalón unitario del sistema resultante utilizando Síntesis Analítica para diseñar el controlador.

Como puede verse en la Figura 5, el tiempo de asentamiento tiene un valor de 0,887s, el sobrepaso máximo es de 0% y el error permanente es de 0%.

IV-C. Diseño con la regla de Fertik y Sharpe

Para encontrar los parámetros deseados en esta regla lo que se hizo fue usar la ecuación (1) y aplicar las siguientes fórmulas planteadas en [5]. Para hallar k_p se tiene que:

$$k_p = \frac{0,56}{K}$$

y se sabe que el valor de $K = 1,2296$, por tanto:

$$k_p = \frac{0,56}{1,2296} = 0,4554$$

Luego, el valor de T_i se encuentra de la siguiente manera:

$$T_i = 0,65 \cdot T$$

y $T = 0,22938$ s

Por lo que:

$$T_i = 0,1490$$

Por lo tanto, la ecuación del controlador resultante es:

$$C(s)_{\text{Fertik y Sharpe}} = \frac{0,4554 \cdot (0,1490s + 1)}{0,1490s} \quad (20)$$

Al obtener la expresión de $L(s)$ como el producto de las ecuaciones (1) y (20), se realizó la simulación en MATLAB usando la herramienta *sisotool* y comprobar que efectivamente se tiene la respuesta esperada. El resultado obtenido se muestra a continuación:

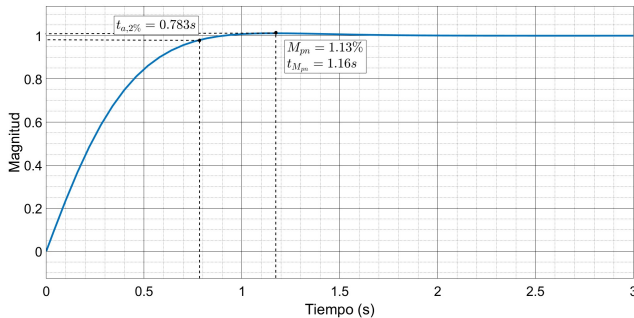


Figura 6: Respuesta ante un escalón unitario del sistema resultante utilizando la regla de Fertik y Sharpe para diseñar el controlador.

Como puede verse en la Figura 6, el tiempo de asentamiento tiene un valor de 0,783s, el sobrepaso máximo es de 1.13% y el error permanente es de 0%.

V. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS PRUEBAS CON LA PLANTA REAL

Al aplicar los controladores planteados anteriormente sobre la planta real, se obtuvieron los resultados de la salida del sistema que pueden observarse en la Figura 7:

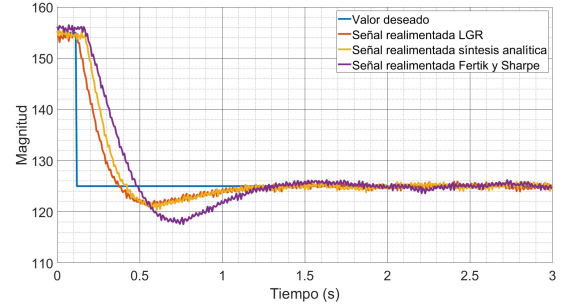


Figura 7: Salidas del sistema obtenidas al aplicar cada uno de los controladores diseñados sobre la planta real.

Asimismo, se obtuvieron los resultados de la señal de control que pueden consultarse en la Figura 8:

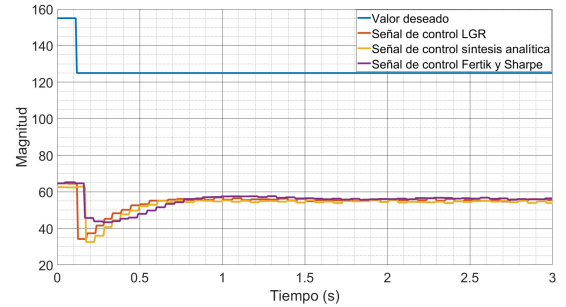


Figura 8: Señal de control resultante al aplicar cada uno de los controladores diseñados sobre la planta real.

Para determinar cuál de estos controladores corresponde al mejor para esta planta específica, se calcularon los parámetros de desempeño y se agruparon con los parámetros meta especificados al inicio y los valores simulados. Además de estos, se calcularon los valores de sensibilidad máxima y esfuerzo de control. Los resultados para el controlador diseñado con LGR pueden consultarse en la Tabla 2:

Tabla 2: Parámetros de desempeño del sistema en el que se utilizó el controlador LGR.

| Parámetro | Especificación | Simulado | Real |
|-------------|----------------|----------|----------|
| $t_{a,2\%}$ | 0,9176 s | 0,897 s | 0,7087 s |
| $e_{pr0\%}$ | 0 % | 0 % | 0.0232 % |
| $M_{pr\%}$ | 0 % | 0 % | 23.816 % |
| M_s | 1 | - | - |
| TV_u | - | 24.3998 | 77.670 |

Los parámetros de desempeño, esfuerzo y robustez para el controlador diseñado con síntesis analítica se presentan en la Tabla 3:

Tabla 3: Parámetros de desempeño del sistema en el que se utilizó el controlador de Síntesis Analítica.

| Parámetro | Especificación | Simulado | Real |
|--------------|----------------|----------|----------|
| $t_{a2} \%$ | 0,9176 s | 0,887 s | 0,7524 s |
| $e_{pr0} \%$ | 0 % | 0 % | 0.0466 % |
| $M_{pn} \%$ | 0 % | 0 % | 24.088 % |
| M_s | 1 | - | - |
| TV_u | - | 24.9518 | 80.930 |

Por último, los parámetros para el controlador diseñado con Fertik y Sharpe se presentan en la Tabla 4:

Tabla 4: Parámetros de desempeño del sistema en el que se utilizó el controlador de Fertik y Sharpe.

| Parámetro | Especificación | Simulado | Real |
|--------------|----------------|----------|----------|
| $t_{a2} \%$ | 0,9176 s | 0,783 s | 1,0416 s |
| $e_{pr0} \%$ | 0 % | 0 % | 0.1032 % |
| $M_{pn} \%$ | 0 % | 1.13 % | 24.904 % |
| M_s | 1.0120 | - | - |
| TV_u | - | 26.2377 | 47.220 |

Para determinar la robustez de los sistemas descritos, se utilizó la ecuación de sensibilidad máxima en la que se emplea el modelo de mejor ajuste de la planta y el modelo de controlador diseñado. En los controladores LGR y con síntesis analítica, se obtuvo una sensibilidad unitaria, valor bastante ideal. Lo anterior pudo haber sido causado por el hecho de que se está trabajando con controladores PI sin tiempo muerto, lo cual resulta en un sistema bastante ideal y estable. Por otro lado, para el sistema con el controlador de Fertik y Sharpe, se obtuvo una sensibilidad de 1.012, posicionándolo como el sistemas menos robusto de los tres.

Para el caso del esfuerzo de control, como puede consultarse en las Tablas 2, 3 y 4, no hay una tendencia clara cuando se comparan los valores simulados y los reales. Si se toman como referencia los simulados, puede afirmarse que el sistema con el menor esfuerzo de control es el del controlador LGR, sin embargo, si se centra la atención en los valores reales, el sistema con menor esfuerzo de control es el del controlador de Fertik y Sharpe, seguido por el de LGR. Para validar el mejor controlador se utilizarán los resultados experimentales.

Por otro lado, como puede observarse en las tablas ya mencionadas, los errores permanentes ($e_{pr0} \%$) para cada uno de los controladores se aproximan a 0 %, se tienen valores muy cercanos al esperado. En el caso del sobrepaso máximo ($M_{pn} \%$), se tienen sobrepasos mayores a los deseados, esto pudo haber sido causado por diversas razones. La primera de ellas se debe a que las simulaciones se realizan con respecto a una entrada escalón unitaria, mientras que en el caso experimental (real), se realiza un escalón de una magnitud de 30. Asimismo, cabe destacar que los modelos de identificación empleados, son construidos a partir de la curva de respuesta de la planta ante una entrada escalón, por lo que es una aproximación de una caja negra, es decir, se conoce la entrada y salida, pero no su comportamiento interno. Puesto que no se tiene un modelo que considere todas las variables internas de la planta, es de esperar que existan discrepancias entre el modelo simulado y el real. Según las tablas, el sistema con menor sobrepaso es aquel controlado con el controlador diseñado con LGR. Finalmente, con el tiempo de asentamiento al 2 % ($t_{a2} \%$), se obtuvieron valores cercanos al valor teórico requerido. Como era esperado, el sistema con el tiempo de asentamiento mayor, es aquel que cuenta con el sobrepaso máximo más grande (sistema controlado con el controlador de Fertik y Sharpe). El sistema con el menor tiempo de asentamiento es el controlador LGR.

VI. CONCLUSIONES

Como consecuencia de lo expuesto, se concluye que el mejor controlador para la planta asignada es el que se diseñó utilizando

el método de LGR. Para tomar dicha decisión fue necesario remitirse a las especificaciones de diseño planteadas al inicio del presente. En primer lugar, se tomó en cuenta la necesidad de un sistema con una rápida estabilización ante cambios en la referencia, ya que al tratarse de un motor, las oscilaciones son comportamientos no deseados. Lo anterior implica que el sobrepaso máximo de la salida debe ser el mínimo posible. Asimismo, de las especificaciones iniciales, se sabe que el controlador debe ser capaz de causar un error permanente nulo. El controlador LGR cumple con las características anteriores, pues es el sistema con el menor tiempo de asentamiento, el menor sobrepaso y cumple con que su error permanente es nulo. Además de esto, a pesar de que el enfoque del presente diseño fue el desempeño, dicho controlador se encuentra en el grupo de los que presentan mayor robustez (menor sensibilidad) y según los resultados experimentales también se encuentra en el grupo de los que cuenta con el menor esfuerzo de control.

REFERENCIAS

- [1] C.-S. Liu, J.-C. Hwang, L.-R. Chen, and C.-C. Fu, "Development of new structure of brushless dc servo motor for ceiling fan," in *2009 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications*, pp. 2640–2643, 2009.
- [2] T. Egami and T. Tsuchiya, "Disturbance suppression control with review action of linear dc brushless motor," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 42, no. 5, pp. 494–500, 1995.
- [3] V. Alfaro, *Sistemas de control proporcional, integral y derivativo: algoritmos, análisis y ajuste*. PID Planet, 2018.
- [4] J. Rojas-Fernández and M. Espinoza-Bolaños, *Modelado y análisis de sistemas lineales*. Escuela de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Costa Rica, 2021.
- [5] A. O'Dwyer, *Handbook of PI and PID controller tuning rules*. London : Hackensack, NJ: Imperial College Press ; Distributed by World Scientific Pub, 3rd ed ed., 2009.