

# Péndulo invertido

Franco Castro Chavez C01886, Alexander Rojas Brenes B86869, Josué Salmerón Córdoba C07183

1.1

**Resumen**—En el presente trabajo se muestra el comportamiento de un péndulo invertido por medio de su dinámica no lineal y linealizada. Se utiliza el software Matlab con la herramienta @ode45, para modelar sistemas no lineales, es decir ecuaciones que poseen expresiones cuadráticas, trigonométricas, entre otras. Esta misma herramienta es utilizada para modelar el sistema linealizado y con esto analizar ambas respuestas con el objetivo de observar la similitud que poseen. Finalmente, se obtienen las funciones de transferencia y con esto realizar el análisis de estabilidad del sistema así como la respuesta en frecuencia.

**Palabras clave**— modelo linealizado, modelo en variables de estado, función de transferencia, diagrama de Bode.

## I. INTRODUCCIÓN

Un péndulo invertido consiste de una barra cilíndrica, la cual se mueve libremente en torno a un pivote colocado de manera fija en un carrito móvil. Se sabe que este sistema cuenta con dos puntos de equilibrio: un punto estable cuando la barra está hacia abajo y un punto de inestabilidad cuando esta está hacia arriba [1]. Cuando el sistema se encuentre en el primer punto de equilibrio, este tenderá siempre al segundo. Asimismo, cabe recalcar que la variable de control es la fuerza aplicada al carrito y que normalmente las salidas de interés son la posición y el ángulo de la barra respecto a la normal, tal como se verá más adelante.

Este es un sistema mecánico muy usado para realizar varias pruebas en el campo de sistemas de control lineal y no lineal. Es usado para el diseño de algoritmos con el objetivo de adaptarlos a dinámicas más cercanas a la realidad, por ejemplo, un brazo robótico. Otro tipo de aplicaciones más complejas van desde la simulación del sistema de equilibrio humano, sistemas de guía de misiles, sismómetros y, en particular, vehículos de dos ruedas autoequilibrados [2]. Asimismo, el péndulo invertido deja ver conceptos elementales de física y permite un acercamiento a los fenómenos oscilatorios, los cuales son inherentes a la física y la ingeniería.

## II. PRESENTACIÓN DEL MODELO

La dinámica del péndulo consiste en carro de masa  $M$  con una barra de masa  $m$  y de longitud  $L$  que gira en torno a un eje de rotación perpendicular al movimiento inminente del carro, de modo que se forma un ángulo  $\theta$  respecto a la normal del carro. Al sistema se le aplica una fuerza  $F$  y además se consideran parámetros como el coeficiente de fricción  $b$  y el momento de inercia  $I$ . El esquemático del péndulo a trabajar se muestra en la figura 1.

Las ecuaciones describen la dinámica del modelo son las siguientes [1]:

$$F = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - mL\ddot{\theta}\cos(\theta) + mL\dot{\theta}^2\sin(\theta) \quad (1)$$

$$(I + mL^2)\ddot{\theta} - mgL\sin(\theta) = mL\ddot{x}\cos(\theta) \quad (2)$$

Los parámetros relacionados al péndulo invertido en estudio se presentan en la Tabla I.

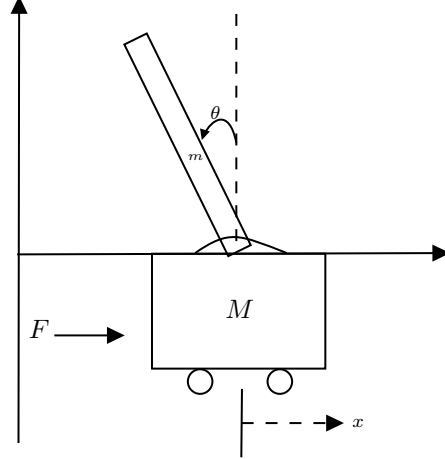


Figura 1: Péndulo invertido.

Tabla I: Parámetros del péndulo.

Símbolo	Descripción del parámetro	Valor
$M$	Masa del carro	1,096 kg
$m$	Masa del péndulo	0,109 kg
$b$	Coefficiente de fricción del carro	0.1 N/m/s
$L$	Distancia del péndulo al centro de masa	0,25 m
$I$	Momento de inercia del péndulo	0,0034 m

En la figura 1, se presenta un diagrama que ilustra el sistema en cuestión. Una vez se tienen las ecuaciones dinámicas, pueden definirse las variables de estado, las cuales se presentan a continuación:

$$\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T \quad (3)$$

En lo que respecta a las entradas, en este caso solo se tiene una, la cual corresponde a la fuerza  $F$ , es decir:

$$u = F \quad (4)$$

Para verificar el comportamiento del sistema, se definen dos salidas: la posición angular  $\theta$  y el desplazamiento del carro  $x$ . Por lo tanto, el vector de salidas está dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2]^T = [x \quad \theta]^T \quad (5)$$

Una vez definidas las variables de estado, es necesario determinar una ecuación de estado de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u) = [\dot{x} \quad \ddot{x} \quad \dot{\theta} \quad \ddot{\theta}]^T \quad (6)$$

Notando que se deben encontrar cuatro ecuaciones dependientes de las variables de estado y de la entrada, a partir de las ecuaciones dinámicas del sistema (1) y (2) se determinan dos ecuaciones independientes para  $\ddot{x}$  y  $\ddot{\theta}$ .

$$\ddot{x} = \frac{(I + mL^2) (F + (M + m)g \tan(\theta) - b\dot{x} - mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta))}{(M + m)(I + mL^2) - (mL \cos(\theta))^2} - g \tan(\theta) \quad (7)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mL ((F \cos(\theta) + (M + m)g \sin(\theta) - b\dot{x} \cos(\theta)))}{(M + m)(I + mL^2) - (mL \cos(\theta))^2} + \frac{mL (-mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta))}{(M + m)(I + mL^2) - (mL \cos(\theta))^2} \quad (8)$$

Este par de ecuaciones corresponden a dos de las cuatro expresiones de la ecuación de estado. Note que las otras dos, se obtienen al derivar la posición y la posición angular.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad (9)$$

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad (10)$$

Con las ecuaciones (7), (8), (9) y (10) ya se tienen las cuatro componentes de la ecuación de estado (6). Seguidamente, se implementa una simulación en Matlab, para graficar la evolución en el tiempo de las variables de estado mediante la herramienta `@ode45`.

En primera instancia, se excita el sistema con una fuerza de 1 N, con condiciones iniciales iguales a cero y con un tiempo de simulación de 30 s, tal y como se muestra en la siguiente figura:

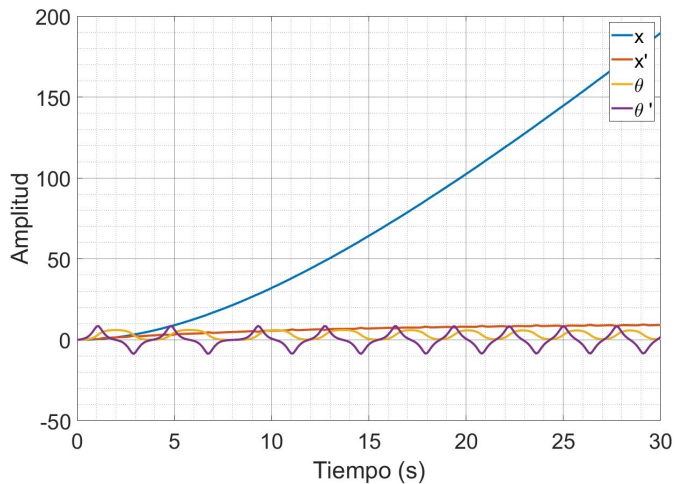


Figura 2: Respuesta en el tiempo de las variables de estado del péndulo invertido ante una fuerza de 1 N

Seguidamente, se presentan las gráficas individuales de cada salida definida en la ecuación (5)

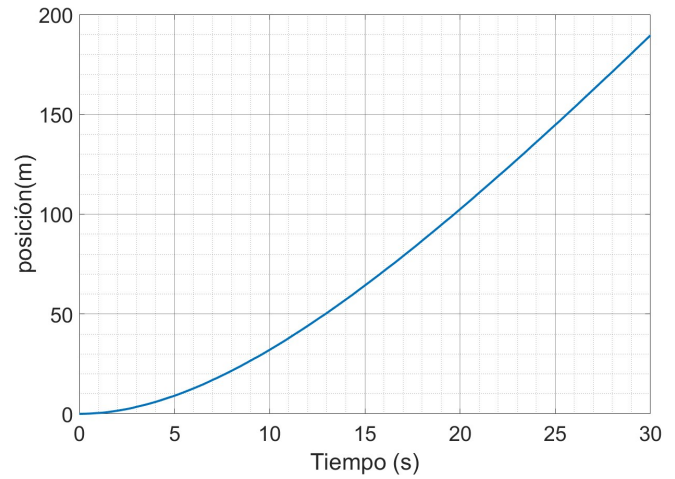


Figura 3: Respuesta en el tiempo de la posición  $x$  ante una fuerza de 1 N

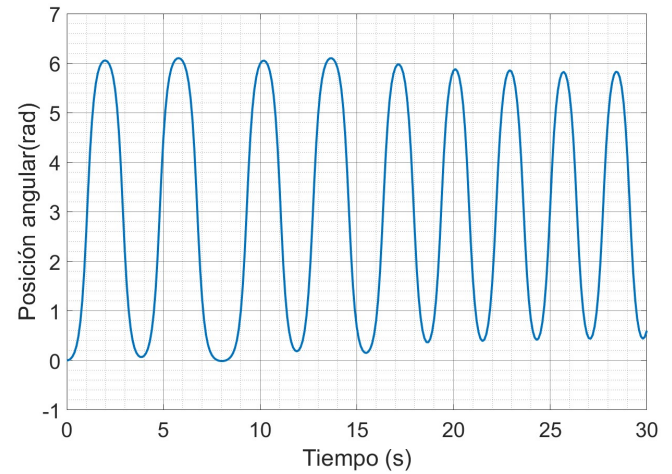


Figura 4: Respuesta en el tiempo de la posición angular  $\theta$  ante una fuerza de 1 N

Como se puede observar, de la figura 3 se extrae que el sistema es inestable, pues la posición del carro crece hacia el infinito ante una fuerza aplicada. Intuitivamente esto tiene sentido, pues ante la entrada de 1 N, el carro se acelera y por ende varía su posición en dirección a la fuerza aplicada y no se detiene ya que la entrada permanece constante.

Por otra parte, note de la figura 4 que la posición angular es oscilatoria, lo cual también es coherente, pues al tratarse de un modelo abstracto, no existe ningún mecanismo que detenga la rotación del péndulo. Asimismo, se destaca que la posición angular oscila entre 0 y aproximadamente 6,0546 radianes, aspecto que concuerda con los valores dentro de los cuales se puede dar el movimiento de rotación del péndulo, es decir, entre 0 y  $2\pi$  radianes.

Seguidamente, se procede a cambiar la magnitud de la entrada de un escalón de 1 N a 10 N y se obtiene la siguiente respuesta:

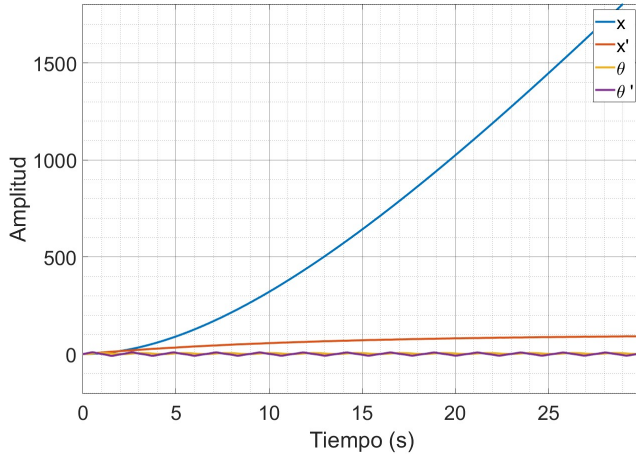


Figura 5: Respuesta en el tiempo de las variables de estado del péndulo invertido ante una fuerza de 10 N

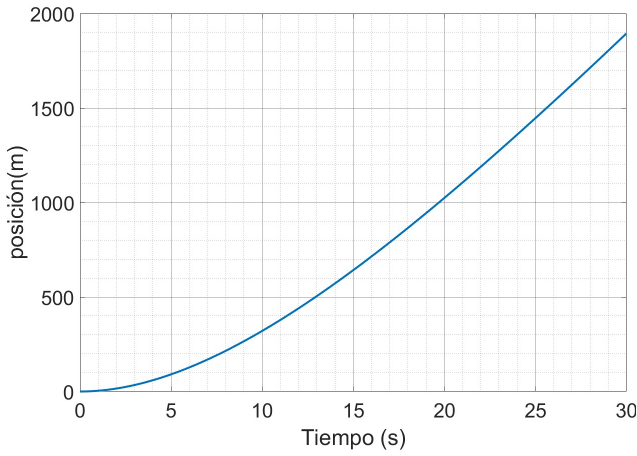


Figura 6: Respuesta en el tiempo de la posición  $x$  ante una fuerza de 10 N

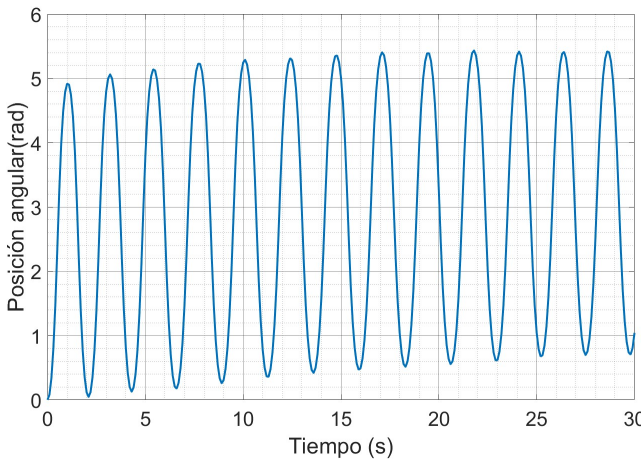


Figura 7: Respuesta en el tiempo de la posición angular  $\theta$  ante una fuerza de 10 N

Como se puede observar, la tendencia del sistema es la misma, con la diferencia de que recorre más distancia en menor tiempo, lo cual es lógico, ya que una fuerza mayor implica una mayor aceleración. Asimismo, la posición angular nuevamente oscila en un intervalo que se encuentra entre 0 y  $2\pi$  radianes. Puesto que la respuesta de las salidas que se han definido se encuentran dentro de lo esperado por la simulación, se extrae que la ecuación de estado planteada es coherente físicamente.

### III. ANÁLISIS

En esta sección se realiza la linealización del modelo no lineal y se busca expresarlo como un modelo en variables de estado. Para ello, considérese la siguiente notación para las variables de estado y la ecuación de estado:

$$\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u) = [\dot{x} \quad \ddot{x} \quad \dot{\theta} \quad \ddot{\theta}]^T = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4]^T \quad (12)$$

Para la linealización del modelo, se realiza el método de expansión en series de Taylor, obviando todos los elementos de orden 2 y superior. Con la notación establecida, la  $i$ -ésima componente de la ecuación de estado linealizada es:

$$\delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^4 \left( \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, F)}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_0, F_0} (x_j - x_{j0}) \right) + \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, F)}{\partial F} \right|_{\mathbf{x}_0, F_0} (F - F_0) \quad (13)$$

Donde  $\mathbf{x}_0$  es el punto de operación, el cuál se toma como

$$\mathbf{x}_0 = [x_{10} \quad x_{20} \quad x_{30} \quad x_{40}]^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (14)$$

Y  $F_0$  es el valor de la entrada en  $t = 0$ , el cual se toma por simplicidad como  $F_0 = 0$ .

Note que la ecuación de salida ya es lineal, por lo tanto, al aplicar la ecuación (13) y evaluar los parámetros de la tabla I, se obtiene un modelo en variables de estado lineal de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}F \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (15)$$

De modo que, las componentes de las matrices toman los siguientes valores:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0902 & 0,8579 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,1605 & 18,9691 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,9025 \\ 0 \\ 1,6047 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Posteriormente, para obtener el comportamiento del sistema, se construye un *script* de Matlab con el propósito de obtener gráficas para las salidas del sistema con base en el modelo en variables de estado. Para verificar el comportamiento del modelo lineal respecto al modelo no lineal, se obtiene en una misma gráfica ambas respuestas y con el fin de obtener el grado de error presente en las simulaciones realizadas. Esto se presenta a continuación:

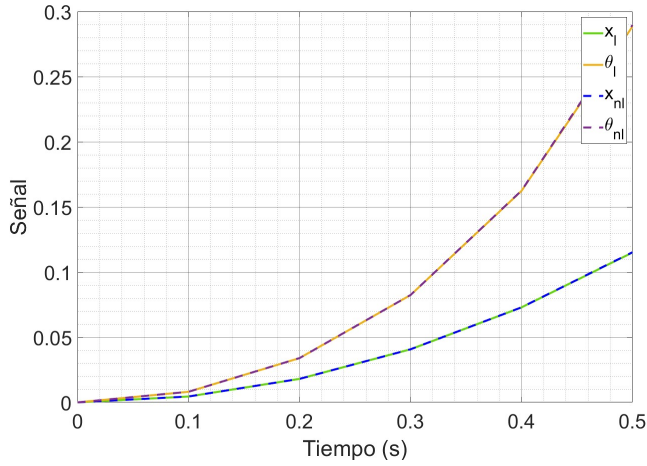


Figura 8: Respuesta del modelo lineal y no lineal con una entrada de 1 N.

En este caso, a ambos sistemas se les aplica una fuerza de entrada de 1 N y puede notarse la similitud de las respuestas obtenidas, lo que muestra la fiabilidad del modelo lineal obtenido. Para graficar, se utiliza en ambos modelos los mismos parámetros así como las mismas condiciones iniciales (todas iguales a 0).

Asimismo, para verificar la forma en la que reaccionan los modelos, se modifica la fuerza de entrada a un valor de 10 N con lo que se obtiene la siguiente gráfica:

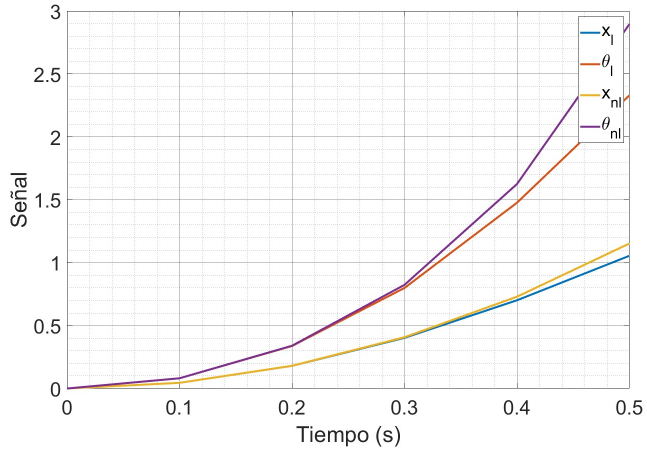


Figura 9: Respuesta del modelo lineal y no lineal con una entrada de 10 N.

Note que la posición y posición angular para ambas respuestas posee la misma tendencia, con la diferencia de que la respuesta del modelo lineal se mantiene por debajo de la no lineal.

Puesto que se está trabajando con una aproximación, es de esperar discrepancias entre los modelos como se puede observar en la figura 9 y es que es necesario mencionar que es importante mantener el tiempo de simulación bajo para poder notar la similitud entre el modelo lineal y el no lineal, ya que el modelo lineal no es nada más que el primer término resultante de aplicar una aproximación polinomial de Taylor de grado 1, por lo tanto, el modelo linealizado se aproxima al modelo real únicamente en el vecindario del punto de operación. Es decir, el modelo lineal se aproxima únicamente en un intervalo cercano a cero (pues en el punto de operación todos los valores son cero).

Lo mencionado en el párrafo anterior se evidencia en la figura 8, pues los modelos son prácticamente idénticos hasta un tiempo

de simulación de 0,5 s. De igual manera, en la figura 9 ambos modelos mantienen su similitud hasta 0,3 s.

Por otro lado, a través del MVE pueden obtenerse las funciones de transferencia del sistema utilizando la función de Matlab `ss2tf()`. En este caso, como el sistema cuenta con una sola entrada, pero dos salidas, se tendrán dos funciones de transferencia, las cuales pueden consultarse a continuación:

$$G_1 = \frac{0,9025(s - 4,17644)(s + 4,17644)}{s(s - 4,35182)(s + 0,082985)(s + 4,35903)} \quad (19)$$

$$G_2 = \frac{1,6047s}{(s - 4,35182)(s + 0,082985)(s + 4,35903)} \quad (20)$$

Ambas funciones de transferencia pueden utilizarse para obtener la respuesta en frecuencia del sistema por medio de la construcción de diagramas de Bode. Para esto se utilizó un *script* de Matlab y los resultados para las funciones de transferencia asociadas a la posición y ángulo pueden consultarse en las figuras 10 y 11, respectivamente.

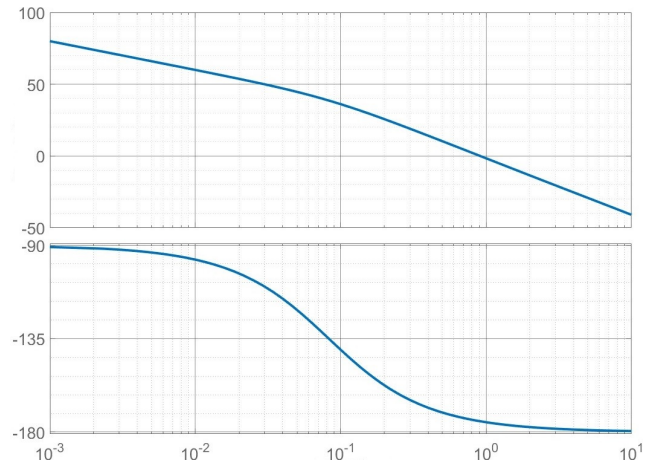


Figura 10: Respuesta de la posición en función de la frecuencia.

De la primera función de transferencia (ecuación 19), puede observarse que hay un polo en el origen, lo que produce una caída de magnitud con pendiente de -20 dB, desde el valor inicial. El valor inicial de magnitud se calcula como:

$$K_i = 20\log(K) + 20\log\left(\frac{1}{f_i}\right) \quad (21)$$

Donde K corresponde al valor obtenido al manipular la primera función de transferencia hasta dejar los polos y ceros como monomios de la forma  $(\tau s + 1)^{\pm 1}$  y  $f_i$  es la frecuencia inicial del diagrama, es este caso  $10^3$  rad/s. De lo anterior se obtiene que  $K_i = 80$  dB. Los comportamientos descritos pueden confirmarse con el diagrama de magnitud de la figura 10. Además, el primero polo en actuar lo hace una frecuencia de 0.082985 rad/s, lo cual aumenta la caída de la gráfica otros 20 dB, causando una pendiente de -40 dB hasta las frecuencias más altas del diagrama. Lo que ocurre con el resto de los polos y ceros es una cancelación de sus contribuciones a causa de la cercanía de sus frecuencias de acción.

Por otro lado, para la segunda función de transferencia (ecuación 20), puede observarse que se tiene un cero en el origen, lo que produce un aumento de magnitud con pendiente de 20 dB desde el valor inicial ( $K_i = -60$  dB, calculado utilizando (21)), tal y con puede confirmarse en la figura 11. Este comportamiento se mantiene hasta que inicia la contribución del polo cuya frecuencia de



acción es de 0.082985 rad/s, lo que contrarresta el comportamiento anterior y es por esto que la tendencia es constante. Lo último que ocurre para este caso es el inicio del aporte de los siguientes dos polos, los cuales empiezan a actuar aproximadamente a la misma frecuencia (4.35 rad/s), por lo que producen una caída de pendiente de -40 dB. En ambos casos, el comportamiento de fase es el mismo y el hecho de que ambos diagramas tengan una fase inicial de  $-90^\circ$  se debe a que sus funciones de transferencia cuentan con polos en el origen o muy cercanos al origen. Además, en ambos casos, el valor final de fase es de  $-180^\circ$ , lo cual se debe a que si se verifican las sumas de las contribuciones del resto de polos y ceros, donde los ceros aportan  $90^\circ$  y los polos  $-90^\circ$ , el resultado es en ambos casos de  $-90^\circ$ , sobre los  $-90^\circ$  ya comentados.

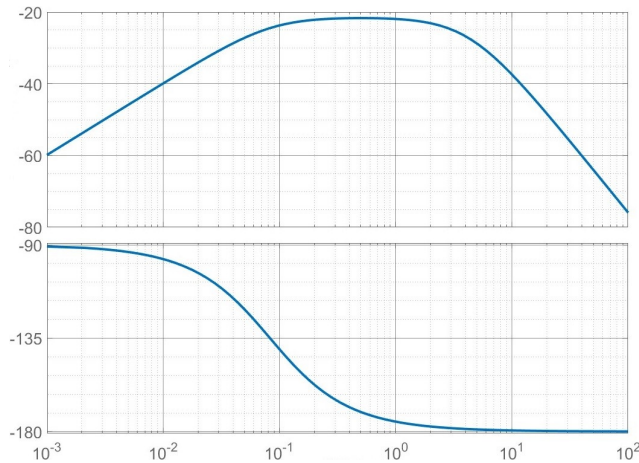


Figura 11: Respuesta de la posición angular en función de la frecuencia.

Luego, para conocer el comportamiento en función de la frecuencia, es necesario conocer la posición de los polos en el plano complejo, ya que esto permite determinar la estabilidad del sistema, por lo tanto, se obtienen los diagramas de polos y ceros correspondiente a la posición y el ángulo del péndulo, con la ayuda de Matlab:

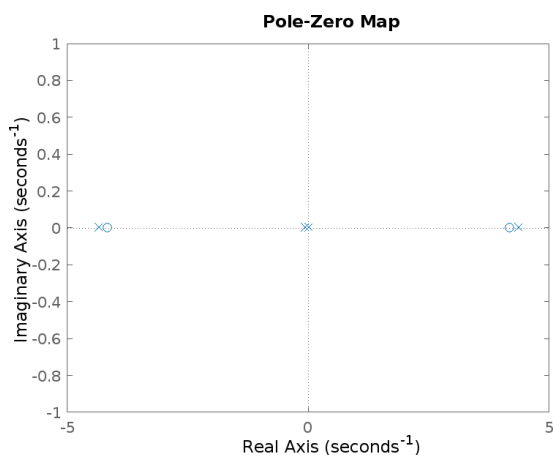


Figura 12: Diagrama de polos y ceros de para la función de transferencia que relaciona posición con la fuerza.

De esa manera, con base a la figura 12 puede confirmarse la razón del comportamiento inestable de la posición del sistema y esta corresponde a la presencia de polos con parte de real

positiva, es decir, polos que se encuentran en la región inestable del diagrama.

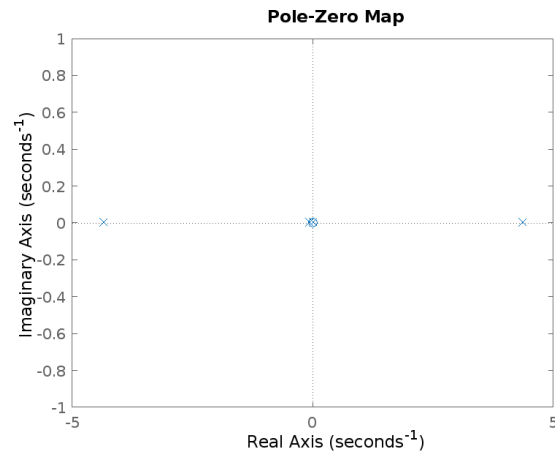


Figura 13: Diagrama de polos y ceros para la función de transferencia que relaciona posición angular con la fuerza.

Ahora, de la figura 13 se puede decir que el sistema es inestable también respecto a su ángulo, ya que posee polos con parte real igual a cero, lo que causa que el ángulo tenga un comportamiento oscilatorio, pero también cuenta con un polo en la región inestable. Lo anterior se debe a que esta salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a las condiciones iniciales [3].

#### IV. CONCLUSIONES

Mediante la linealización del sistema, pudo obtenerse un modelo en variables de estado y dos funciones de transferencia, datos útiles para la caracterización en el tiempo y en la frecuencia, respectivamente. Con la primera de estas pudo hacerse una comparación con la respuesta obtenida en el modelo no lineal, la cual resultó en la confirmación de la fiabilidad del modelo lineal obtenido, ya que la forma en el comportamiento de ambos modelos fue muy similar. A pesar de lo anterior, al cambiar el valor de entrada se notaron variaciones en el comportamiento y esto se debe a que el modelo lineal solo opera de forma correcta dentro de un vecindario de puntos cercanos al punto de operación escogido. En ambos casos se comprobó el hecho de que las dos salidas del sistema se mantienen inestables a lo largo del tiempo, debido a su tendencia infinitamente creciente (posición) u oscilatoria (ángulo). Por otro lado, a través de las funciones de transferencia extraídas del MVE, se **logró** obtener diagramas de polos y ceros concordantes con la información recopilada en la caracterización temporal, ya que debido a la posición de sus polos se sabe que el sistema no llega a estabilizarse. Con dichas funciones de transferencia también se construyeron diagramas de Bode que describen el funcionamiento del sistema para distintos rangos de frecuencia.

#### REFERENCIAS

- [1] M. A. Al-Mekhalif and H. Wahid, "Modelling and control of a non-linear inverted pendulum using an adaptive neuro-fuzzy controller," in *International Conference of Reliable Information and Communication Technology*, pp. 218–225, Springer, 2017.
- [2] A. I. Roose, S. Yahya, and H. Al-Rizzo, "Fuzzy-logic control of an inverted pendulum on a cart," *Computers & Electrical Engineering*, vol. 61, pp. 31–47, 2017.
- [3] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.

# Índice de comentarios

---

1.1 Errores ortográficos en rojo

5.1 solo usan 3 referencias