UPEC Automne 2023

Mesure et Probabilités
Travaux Dirigés 3

BUT. Tribus et mesures

Exercice 1. Vrai ou faux (justifier). Ci-dessous, $(E, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré.

a) L'union de deux tribus est une tribu.
b) L'intersection de deux tribus est une tribu.
c) Toute tribu est stable par lim inf et lim sup de ses éléments.
d) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $\mu(A_{2023}) < \infty$ alors
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$
e) La mesure de comptage $\delta_{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}$ est σ-finie.

Exercice 2. Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 2023$ est borélienne.

Exercice 3. Soit un ensemble quelconque Ω.

a) Démontrer que les tribus engendrées respectivement par
   i. les singletons
   ii. les parties finies
   iii. les parties dénombrables

   coïncident. On note cette tribu $\mathcal{A}$.
b) Montrer que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties dénombrables ou de complémentaire dénombrable.
c) A-t-on $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ si Ω est fini, $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\Omega = \mathbb{N}$?

Exercice 4. Soit f une application de E dans F et soit $\mathcal{F}$ une tribu sur F. Démontrer que
$$\mathcal{G} = \left\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\right\}$$
est une tribu sur E.

a) Prouver que $\mathcal{G}$ est la plus petite tribu sur E rendant f mesurable.

b) Soit $f : \{0, 1, 2\} \to \{1, 2\}$ définie par $f(0) = f(2) = 2$ et $f(1) = 1$. On muni $1, 2$ de la tribu $\mathcal{P}(1, 2)$. Quelle est la plus petite tribu sur $\{0, 1, 2\}$ rendant f mesurable ?

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n,\ n \in \mathbb{N})$ une suite dans $\mathcal{F}$.

a) Démontrer que

$$\sup_n \mu(A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

b) Démontrer que

$$0 \leq \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \inf \mu(A_n)$$

c) Démontrer que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 \text{ si et seulement si } \mu(A_n) = 0, \text{ pour tou } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 6. a) Si un espace Ω est muni d'une partition $\mathcal{A}$ décrire la tribu engendrée par $\mathcal{A}$.

b) Montrer qu'une fonction $f : (\Omega, \sigma(\mathcal{A})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque partie A_n.

Exercice 7. Soit m une mesure et (A_n) dans $\mathcal{F}$ tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n) < \infty.$$

Montrez que $m(\limsup A_n) = 0$.