

Mesure et Probabilités
Travaux Dirigés 2

BUT. Rappels d'Analyse.

Exercice 1. A et B sont inclus dans \mathbb{R} . On définit $A \Delta B := A \cup B \setminus (A \cap B)$. Exprimer \mathbb{I}_{A^c} , $\mathbb{I}_{A \cap B}$, $\mathbb{I}_{A \cup B}$ et $\mathbb{I}_{A \Delta B}$ en fonction de \mathbb{I}_A et \mathbb{I}_B .

Exercice 2. Soit $(a_n, n \in \mathbb{N})$ une suite croissantes vers -1 et $(b_n, n \in \mathbb{N})$ une suite décroissantes vers 1 .

— Trouver la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n, b_n] = ?$$

— Même question si l'on suppose que $(a_n, n \in \mathbb{N})$ une suite convergente vers -1 , et $(b_n, n \in \mathbb{N})$ une suite convergente vers 1 .

Exercice 3. Soit $(A_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de parties de \mathbb{R} .

— Si on choisit les A_n comme suit : pour tout $j \geq 1$,

$$A_{2j} = [-1, 2 + 1/j[, \quad \text{et} \quad A_{2j+1} = [-2 + 1/j, 1].$$

Déterminer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.

— On définit maintenant les A_n autrement :

$$A_{2j} = [-j, j[, \quad \text{et} \quad A_{2j+1} = [-\infty, -j].$$

Déterminer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.

— Existe-t-il des suites $(A_n, n \in \mathbb{N})$ telle que

$$\liminf A_n = [-1, 2], \quad \text{et} \quad \limsup A_n = [-1, 1]?$$

Exercice 4. Montrer que

$$\limsup A_n \setminus \liminf A_n \subset \limsup (A_n \Delta A_{n+1}).$$

Exercice 5. Soit $(A_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de parties de \mathbb{R} . Montrer que

$$\mathbb{I}_{\cup A_i} = \sum_i \mathbb{I}_{A_i} - \sum_{i < j} \mathbb{I}_{A_i} \cdot \mathbb{I}_{A_j} + \sum_{i < j < k} \mathbb{I}_{A_i} \cdot \mathbb{I}_{A_j} \cdot \mathbb{I}_{A_k} - \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{I}_{A_1} \cdot \mathbb{I}_{A_2} \cdot \dots \cdot \mathbb{I}_{A_n}.$$