

Mesure et Probabilités
Travaux Dirigés 2

BUT. Rappels d'Analyse.

Exercice 1. A et B sont inclus dans \mathbb{R} . On définit $A\Delta B := A \cup B \setminus (A \cap B)$. Exprimer \mathbb{I}_{A^c} , $\mathbb{I}_{A \cap B}$, $\mathbb{I}_{A \cup B}$ et $\mathbb{I}_{A\Delta B}$ en fonction de \mathbb{I}_A et \mathbb{I}_B .

Exercice 2. Soit $(a_n, n \in \mathbb{N})$ une suite croissantes vers -1 et $(b_n, n \in \mathbb{N})$ une suite décroissantes vers 1 .

— Trouver la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [a_n, b_n] = ?$$

— Même question si l'on suppose que $(a_n, n \in \mathbb{N})$ une suite convergente vers -1 , et $(b_n, n \in \mathbb{N})$ une suite convergente vers 1 .

Exercice 3. Soit $(A_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de parties de \mathbb{R} .

— Si on choisit les A_n comme suit : pour tout $j \geq 1$,

$$A_{2j} = [-1, 2 + 1/j[, \quad \text{et} \quad A_{2j+1} = [-2 + 1/j, 1].$$

Déterminer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.

— On définit maintenant les A_n autrement :

$$A_{2j} = [-j, j[, \quad \text{et} \quad A_{2j+1} = [-\infty, -j].$$

Déterminer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.

— Existe-t-il des suites $(A_n, n \in \mathbb{N})$ telle que

$$\liminf A_n = [-1, 2], \quad \text{et} \quad \limsup A_n = [-1, 1]?$$

Exercice 4. Montrer que :

- $\liminf A_n \subset \limsup A_n$
- $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$
- $\limsup A_n \setminus \liminf A_n \subset \limsup (A_n \Delta A_{n+1})$.

Exercice 5. Soit $(A_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de parties de \mathbb{R} . Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= \sum_i^n \mathbb{I}_{A_i} - \sum_{i < j}^n \mathbb{I}_{A_i} \cdot \mathbb{I}_{A_j} + \sum_{i < j < k}^n \mathbb{I}_{A_i} \cdot \mathbb{I}_{A_j} \cdot \mathbb{I}_{A_k} - \dots \\ &\quad \dots + (-1)^{n-2} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}}^n \mathbb{I}_{A_{i_1}} \dots \mathbb{I}_{A_{i_{n-1}}} + (-1)^{n-1} \mathbb{I}_{A_1} \cdot \mathbb{I}_{A_2} \dots \mathbb{I}_{A_n}. \end{aligned}$$