Ecuación de Onda 1D mediante diferencias finitas.

La ecuación de onda es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Las aproximaciones de las segundas derivadas son:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) = \frac{u_{1,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1}}{dt^2} + O(dt^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = \frac{u_{i+1,n} - 2u_{i,n} + u_{i-1,n}}{dt^2} + O(dx^2)$$

Sustituyendo y despejando para $u_{i,n+1}$ se obtiene la ecuación que permite avanzar en el tiempo

$$u_{i,n+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,n} + \lambda^2(u_{i+1,n} + u_{i-1,n}) - u_{i,n-1},$$

siendo $\lambda = c\, dt/dx$, $i = 1, \ldots, N_x$ y $n = 1, \ldots, N_t - 1$.

Para la evolución se requiere de las condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{cases} u_{i,0} & = f(x_i), \quad \text{para } i = 1, \ldots, N_x \\ u_{0,n} & = 0, \quad \text{para } n = 1, \ldots, N_t \\ u_{N_x+1,n} & = 0, \quad \text{para } n = 1, \ldots, N_t \end{cases}$$

además para $n=1$ se necesita la información de $u_{i,1}$, el cual se obtiene mediante la condición inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

$x \in [0, L]$, y mediante las diferencias finitas se obtiene

$$u_{i,1} = (1-\lambda^2) f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}[f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})] + dt\, g(x_i)$$

Ejemplo

Condición inicial

$u(x,0)=\sin(\pi x)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0.$

Para más detalles, consultar http://gmc.geofisica.unam.mx/papime2020/Descargables/presentaciones-metodosnumericos/06_EcuacionDeOnda.pdf

El programa regresa el archivo .csv con el perfil de la función $u(x,0)$ y $u(x,N_t-1)$. ($u(x,N_t)$ coincide con $u(x,0)$).