Convección lineal en una dimensión.

https://www.theoj.org/jose-papers/jose.00021/10.21105.jose.00021.pdf

La ecuación de convección lineal (también se puede buscar como ecuación de transporte) en una dimensión es

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

con una condición inicial $u(x,t=0)=u_0(x)$. La solución de esta ecuación diferencial es

$$u(x,t)=u_0(x-ct).$$

La interpretación de esta ecuación es que para un perfil $u_0(x)$ que es desplazado a velocidad c después de un tiempo t, entonces $u(x)$ es simplemente el perfil inicial desplazado una distancia $x=ct$.

Discretización

El siguiente paso es discretizar la ecuación diferencial. Recordamos que la definición de derivada es

$$\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Si discretizamos la coordenada espacial en el conjunto de puntos $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y aumentos discretos de tiempo Δt, entonces la ecuación discreta es

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}+c\frac{u_i^n-u_{i-1}^n}{\Delta x}=0,$$

donde para la derivada temporal, se utiliza una diferenciación hacia adelante, y hacia atrás para la derivada espacial. Dependiendo de que tan pequeños sean los Δx y Δt la aproximación es mas parecida a la derivada real.

n y $n-1$ representan dos pasos consecutivos en el tiempo, mientras que i e $i-1$ son dos puntos vecinos de la coordenada x discretizada. Si la condición inicial esta dada, entonces el valor u_i^{n+1} es la única incógnita en la ecuación discretizada. Si despejamos para esta función obtenemos una ecuación que permite avanzar en el tiempo

$$u_i^{n+1}=u_i^n-c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n-u_{i-1}^n)$$

Ejemplo

Definimos

$$u(x_0, x_l, x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < x_0 \\ 1, & \text{si } x_0 \leq x < x_l \\ 0, & \text{si } x > x_l \end{cases}$$

el cual representa un pulso entre los valores x_0 y x_1 .

El programa regresa la función en el tiempo $t=0$ y la función después de un tiempo $t=T$ en el archivo .csv.