# Convección lineal en una dimensión

Josué Juárez Morales

La ecuación de convección lineal en una dimensión es

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

con una condición inicial

$$u(x, t = 0) = u_0(x), \tag{2}$$

la solución de esta ecuación diferencial es

$$u(x, t) = u_0(x - ct). \tag{3}$$

La interpretación de esta ecuación es que para un perfil $u_0(x)$ que es desplazado a velocidad $c$ después de un tiempo $t$, entonces $u(x)$ es simplemente el perfil inicial desplazado una distancia $x = ct$.

## Discretización

El siguiente paso es discretizar la ecuación diferencial. Recordamos que la definición de derivada es

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Si discretizamos la coordenada espacial en el conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y aumentos discretos de tiempo $\Delta t$, entonces la ecuación discreta es

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0, \tag{5}$$

donde para la derivada temporal, se utiliza una diferenciación hacia adelante, y hacia atras para la derivada espacial. Dependiendo de que tan pequeños sean los $\Delta x$ y $\Delta t$ la aproximación es mas parecida a la derivada real.

$n$ y $n - 1$ representan dos pasos consecutivos en el tiempo, mientras que $i$ e $i - 1$ son dos puntos vecinos de la coordenada $x$ discretizada. Si la condición inicial esta dada, entonces el valor $u_i^{n+1}$ es la unica incognita en la ecuación discretizada. Si despejamos para esta función obtenemos una equación que permite avanzar en el tiempo

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n). \tag{6}$$

### Ejemplo

Definimos

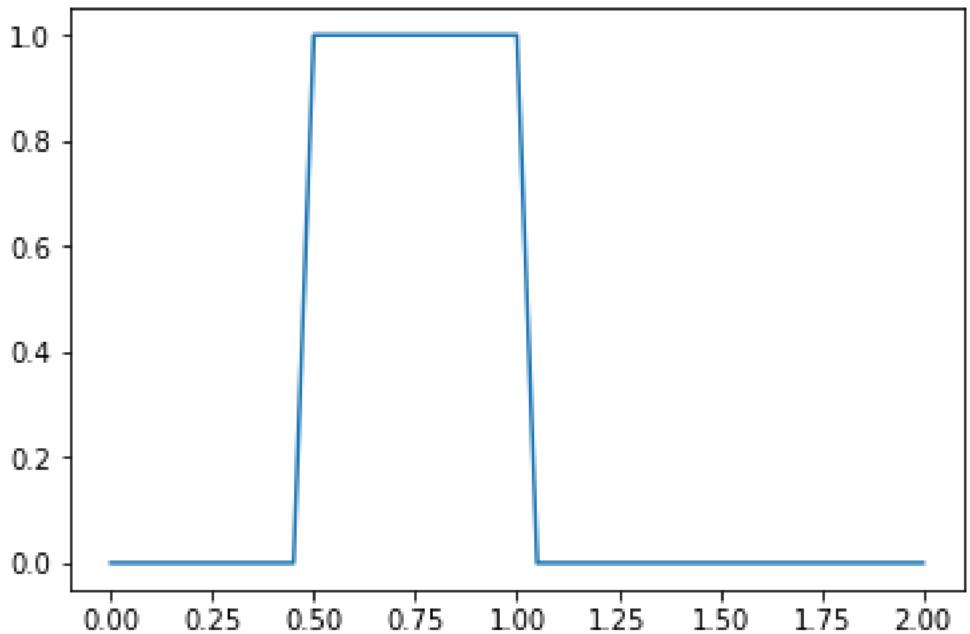
$$u(x_0, x_l, x) = \begin{cases} 0 & si \qquad x < x_0 \\ \\ 1 & si \quad x_0 \leq x < x_l \\ \\ 0 & si \qquad x > x_l \end{cases}, \tag{7}$$

el cual representa un pulso entre los valores $x_0$ y $x_l$.

Procedemos a implementarlo en codigo

[0]:
```
import numpy as np #importa numpy.
import matplotlib.pyplot as plt #importa la herramienta para graficar
%matplotlib inline
#hace que las gráficas aparescan en la siguiente linea

def pulso(x0, x1, x): #define la función pulso
  if x < x0 or x > x1:
    return(0.0)
  else:
    return(1.0)

L = 2 #el tamaño de nuestro intervalo en x
nx = 41 #el número en que se va a discretizar la variable x
dx = L/(nx-1) #la distancia que hay entre cada punto discretizado x (dx)
T = 1.0 #intervalo total de tiempo
nt = 51 #número de veces que se discretiza la variable tiempo
dt = T/(nt-1) #tamaño de los intervalos de tiempo (dt)
c = 1.0 #velocidad de la onda (e.d.)
u = np.linspace(0, L, nx) #np.linspace genera un vector con nx entradas que␣
 ↪contiene números igualmente espaciados en un intervalo (0,L)
x = np.linspace(0, L, nx) #generamos dos porque uno va a entrar a la funcion␣
 ↪pulso
#print(u) #u = x en este caso

for i in range(len(x)):
  u[i] = pulso(0.5, 1.0, x[i]) #es de hecho la condicion inicial

#print(u) #x ahora esta evaluada en la función pulso

plt.plot(x,u)
```

[0]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9b2c0e3320>]
```



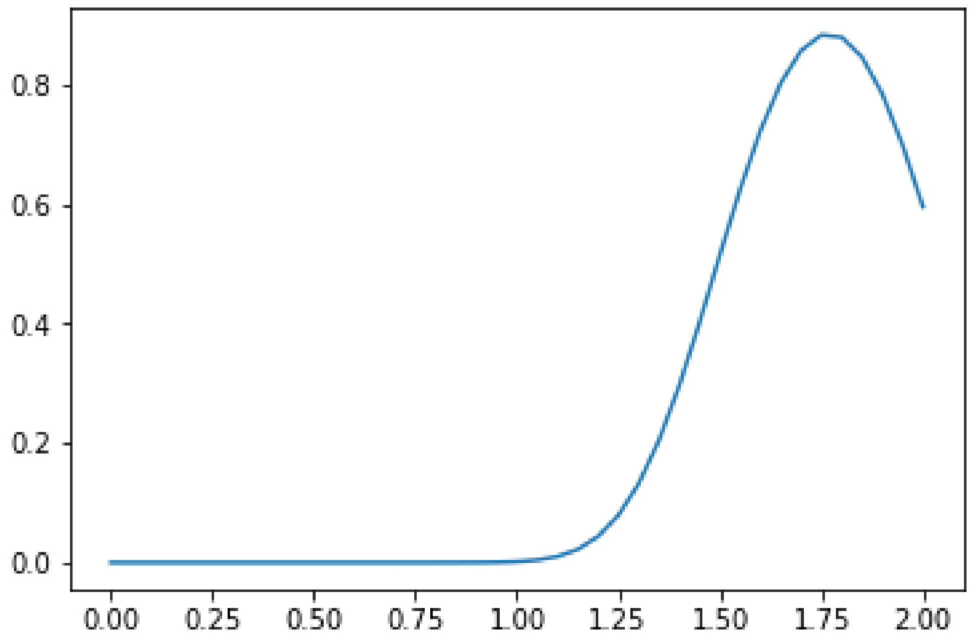

Ahora implementamos la discretización, para cada elemento de $u$ se debe realizar la operación

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n), \tag{8}$$

el codigo que realiza esto es

[0]:
```
un = np.zeros(nx) #crea un vector temporal de tamaño nx con entradas ceros
for n in range(nt): #genera el loop nt veces
  un = u.copy() #copia los elementos de u al vector temporal un
  for i in range(1,nx): #el loop realiza las operaciones para calcular el
 ↪u^{n+1}_{i}, pero comienza con el elemento u[1] y no u[o] (se salta el primer
 ↪elemento)
    u[i] = un[i]- c*dt*(un[i]-un[i-1])/dx

plt.plot(x,u)
```

[0]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9b2c042630>]
```

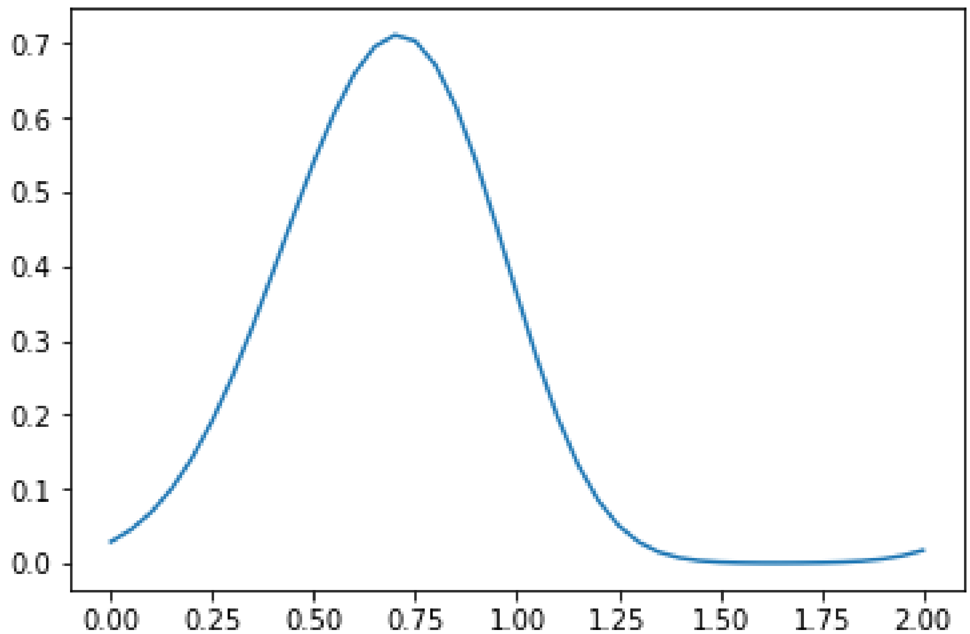



El pulso se desplazo hacia la derecha y dejo de ser de forma cuadrada. La razon por la que ya no es cuadrada, es que, el número de veces en que se dividió la variable $x$ es muy pequeña y la aproximación de la derivada no es muy buena. Esto se corrige dando un valor mas grande al `nx`, pero tambien, valores grandes de `nx` producen inestabilidad númerica.

Si en el `for` donde se calcula el elemento $u_i^{n+1}$ no se salta el primer elemento, lo que sucede es

[0]:
```
un = np.zeros(nx)
for n in range(nt):
  un = u.copy()
  for i in range(nx): #no se salta el primer elemento
    u[i] = un[i]- c*dt*(un[i]-un[i-1])/dx

plt.plot(x,u)
```

[0]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f9b2c01fda0>]
```




Se debe de empezar el `for(1, nx)` asi, porque de la ecuacion iterada, si se comienza desde el número $i = 0$, se necesitaria el elemento $i = -1$ para realizar el calculo; ese elemento no se encuentra en la lista de puntos `u`. El programa funciona porque en python el elmento $i = -1$ es el ultimo elemento de una lista.