



## Sistemas Lineales de Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias

| Linear Fractional Differential Equations Systems |

 Erika González Nava<sup>1</sup>

15282707@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero  
Guerrero, México

 Martín P. Árciga Alejandro<sup>2</sup>

mparciga@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero  
Guerrero, México

 Jorge Sánchez Ortiz<sup>3</sup>

jsanchez@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero  
Guerrero, México

 Jorge A. Morales Buenaventura<sup>4</sup>

18349939@uagro.mx

Universidad Autónoma de Guerrero  
Guerrero, México

Recibido: 12 de febrero de 2024

Aceptado: 1 de agosto de 2024

**Resumen:** Este trabajo se centra en la descripción cualitativa y cuantitativa de soluciones de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. La transformada de Laplace y la función Mittag-Leffler son las principales herramientas utilizadas para encontrar dichas soluciones. Como en el caso ordinario, los valores propios determinan la estabilidad del sistema mediante una condición que depende del orden de la derivada fraccionaria. Por último, se demuestra un teorema fundamental para los sistemas fraccionarios lineales y se dan algunos ejemplos particulares.

**Palabras Clave:** Derivada de Caputo, transformada de Laplace, operador Mittag-Leffler.

**Abstract:** This paper focuses on the qualitative and quantitative description of solutions for linear systems of differential equations with fractional order. The Laplace transform and the Mittag-Leffler function are the main tools used to find such solutions. As in the ordinary case, the eigenvalues determine the stability of the system via a condition depending on the order of the fractional derivative. Finally, a fundamental theorem for linear fractional systems is proved and some particular examples are given.

**Keywords:** Caputo derivative, Laplace transform, Mittag-Leffler operator.

<sup>1</sup>Erika González Nava. Estudiante de doctorado de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Dirección postal: Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. Código postal: 39038. Correo electrónico: 15282707@uagro.mx

<sup>2</sup>Martín P. Árciga Alejandro. Profesor Investigador de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Dirección postal: Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. Código postal: 39070. Correo electrónico: mparciga@uagro.mx

<sup>3</sup>Jorge Sánchez Ortiz. Profesor investigador de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Dirección postal: Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. Código postal: 39044. Correo electrónico: jsanchez@uagro.mx

<sup>4</sup>Jorge A. Morales Buenaventura. Estudiante de maestría de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Dirección postal: Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. Código postal: 39050. Correo electrónico: 18349939@uagro.mx

## 1. Introducción

La teoría de sistemas lineales de orden fraccionario se refiere al estudio de sistemas dinámicos que consideran derivadas de orden fraccionario (ver [7, 3, 2]); es decir, operadores integrodiferenciales en lugar de operadores diferenciales de orden entero y puede considerarse como una generalización de los sistemas de orden entero (ver [1, 4]). El estudio de los sistemas lineales de orden fraccionario ha ganado considerable atención en los últimos años debido a su capacidad para modelar y analizar una amplia gama de fenómenos físicos y biológicos. Estudiar y resolver estos sistemas nos permite comprender mejor el comportamiento de los sistemas físicos y su evolución a lo largo del tiempo.

En este artículo nos centraremos en la resolución de sistemas lineales de orden fraccionario utilizando dos herramientas principales: la transformada de Laplace y la teoría de las funciones de Mittag-Leffler como operadores que actúan sobre matrices.

El enfoque de la transformada de Laplace nos permite cambiar un sistema de ecuaciones diferenciales fraccionarias por un sistema de ecuaciones de una variable compleja, donde tras una factorización adecuada queremos identificar transformadas de Laplace de funciones conocidas para obtener las soluciones. Por otra parte, podemos utilizar una generalización del operador exponencial; es decir, el operador Mittag-Leffler

$$E_{\alpha}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , para resolver sistemas lineales de orden fraccionario. En el caso de disponer de los valores y vectores propios para  $A$ , podemos obtener soluciones analíticas exactas. En particular, para sistemas bidimensionales, exploraremos cómo la solución de sistemas lineales de orden fraccionario se ve afectada por los valores propios de la matriz implicada. En este caso, tenemos las siguientes situaciones: valores propios repetidos, valores propios distintos y valores propios complejos. En cada caso, examinaremos las características especiales y las implicaciones para la solución de sistemas lineales de orden fraccionario y cómo cambia con respecto al orden entero. Analizaremos la estabilidad del sistema en cada caso, obteniendo una clasificación de los sistemas de orden fraccionario, que se pueden presentar en un plano traza-determinante generalizado.

## 2. Sistemas lineales de orden fraccionario

En este artículo se estudiará un problema de valor inicial para un sistema lineal con derivada fraccionaria de Caputo. Para abordar este problema se utilizarán las siguientes definiciones.

### Definición 1 (Función Gamma)

La función Gamma  $\Gamma(z)$  está definida por la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1)$$

que es convergente en el semiplano complejo  $\Re(z) > 0$ .

Una de las propiedades de  $\Gamma$  es

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (2)$$

que podemos demostrar integrando por partes

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = z \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z).$$

### Definición 2 (Derivada fraccionaria de Caputo [5])

Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ , con  $0 < \alpha \leq 1$  y  $x$  una función absolutamente continua en  $[0, l]$ . Entonces la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  se define como :

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (3)$$

donde  $\Gamma$  es la función Gamma y  $x'(\tau)$  es la primera derivada de  $x(\tau)$ .

Ahora definamos la derivada fraccionaria de Caputo de un vector:

### Definición 3 (Derivada fraccionaria de Caputo de un vector)

Sea  $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función definida por

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

entonces la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  de un vector se define mediante

$$D^\alpha X(t) = \begin{pmatrix} D^\alpha x_1(t) \\ \vdots \\ D^\alpha x_n(t) \end{pmatrix}.$$

El problema a resolver en este artículo es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$D^\alpha X(t) = AX(t), \quad (4)$$

donde  $A$  es una matriz de  $n \times n$  con coeficientes reales y  $D^\alpha$  la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$ . El problema se completa especificando las condiciones iniciales en

$$X(0) = X_0.$$

## 2.1. Valores y Vectores propios

Cuando las ecuaciones del sistema de ecuaciones diferenciales son lineales, el álgebra de matrices proporciona una notación compacta para expresar el sistema. La notación de tal sistema es entonces (4) donde  $A$  es la matriz de coeficientes reales y  $X(t)$  es el vector solución.

**Definición 4 (Valores y vectores propios)**

Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ . Se dice que un número  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  si existe un vector solución  $v$  distinto de cero, tal que

$$Av = \lambda v. \quad (5)$$

El vector solución  $v$  es el vector propio que corresponde al valor propio  $\lambda$ .

Usando las propiedades del álgebra matricial, podemos expresar la ecuación (5) en la forma alternativa

$$(A - \lambda I)v = 0, \quad (6)$$

donde  $I$  es la matriz identidad. Por tanto, para determinar una solución  $v$  distinta de cero de la ecuación (6) se debe tener que

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (7)$$

La ecuación (7) se llama polinomio característico de  $A$ . Por lo que, los valores propios de  $A$  son las raíces del polinomio característico.

Para encontrar un vector propio que corresponde a un valor propio  $\lambda$ , solo se resuelve el sistema de ecuaciones que surge de la ecuación (6).

### 3. Diagonalización

La técnica algebraica de diagonalizar una matriz cuadrada  $A$  se puede utilizar para reducir el sistema lineal (4) a un sistema lineal desacoplado.

Primero consideramos el caso en el que  $A$  tiene valores propios reales y distintos. El siguiente teorema nos permite resolver el sistema.

**Teorema 1**

Si los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , de una matriz  $A$  de  $n \times n$  son reales y distintos, entonces cualquier conjunto de vectores propios correspondientes  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  forma una base para  $\mathbb{R}^n$ , la matriz  $Q = [v_1, v_2, \dots, v_n]$  es invertible, y

$$Q^{-1}AQ = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n],$$

donde  $\text{diag}[\cdot]$  es la matriz diagonal.

Para transformar el sistema (4) en un sistema lineal desacoplado, definimos la transformación lineal de coordenadas

$$Y(t) = Q^{-1}X(t),$$

donde  $Q$  es la matriz invertible que define el teorema anterior. Entonces

$$\begin{aligned} X(t) &= QY(t), \\ D^\alpha Y(t) &= Q^{-1}D^\alpha X(t) = Q^{-1}AX(t) = Q^{-1}AQY(t). \end{aligned}$$

Así, se obtiene el sistema lineal desacoplado

$$D^\alpha Y(t) = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]Y(t).$$

Este sistema tiene la solución

$$Y(t) = \text{diag} [E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha), E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha), \dots, E_\alpha(\lambda_n t^\alpha)] Y(0),$$

la cual se estudia en la sección 4.2, donde  $E_\alpha$  es la función Mittag-Leffler que se define a continuación.

#### Definición 5 (Mittag-Leffler de tres parámetros)

Para cualquier argumento  $z \in \mathbb{C}$ , la generalización de la función Mittag-Leffler de tres parámetros,  $E_{\alpha,\beta}^\gamma$ , conocida como la función Prabhakar [6] se define del siguiente modo

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+k)}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)} z^k, \quad (8)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ,  $\Re(\alpha) > 0$ ,  $\Re(\beta) > 0$ ,  $\gamma > 0$  y donde  $\Gamma(z)$  es la función Gamma.

En particular, si en la ecuación (8),  $\gamma = 1$ , obtenemos la función Mittag-Leffler de dos parámetros

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},$$

si  $\gamma = \beta = 1$ , tenemos la clásica función Mittag-Leffler

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (9)$$

y si  $\alpha = 1$  tenemos la función exponencial

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Entonces, continuando con nuestro problema, dado que  $Y(0) = Q^{-1}X(0)$  y  $X(t) = QY(t)$ , resulta que el sistema (4) tiene la solución

$$X(t) = Q(\text{diag} [E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha), E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha), \dots, E_\alpha(\lambda_n t^\alpha)]) Q^{-1} X(0).$$

## 4. Solución de sistemas lineales de orden fraccionario mediante la transformada de Laplace

En esta sección resolveremos el sistema (4) utilizando la transformada de Laplace, para lo cual requerimos las siguiente definiciones:

#### Definición 6 (Orden exponencial)

Una función  $x(t)$  es llamada de orden exponencial  $\gamma$ , si existen constantes  $\gamma \in \mathbb{R}$  and  $M > 0$ , tal que  $|x(t)| \leq M e^{\gamma t}$ , para todo  $t \geq 0$ .

Teniendo en cuenta la condición anterior podemos definir la transformada de Laplace de la siguiente manera.

**Definición 7 (Transformada de Laplace)**

Sea  $x(t)$  una función de variable real de orden exponencial  $\gamma$  y  $s$  una variable compleja. Definimos la transformada de Laplace de  $x(t)$  como

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \hat{x}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt, \quad \Re(s) > \gamma.$$

**Definición 8 (Transformada de Laplace de un vector)**

Sea

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

entonces la transformada de Laplace de un vector se define como

$$\mathcal{L}\{X(t)\}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{x_1(t)\}(s) \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{x_n(t)\}(s) \end{pmatrix}.$$

A continuación definimos la transformada inversa de Laplace.

**Definición 9 (Transformada inversa de Laplace)**

Si  $x(t)$  tiene transformada de Laplace  $\hat{x}(s)$ , entonces la transformada inversa de Laplace está definida por

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{x}(s)\}(t) = x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \hat{x}(s) ds,$$

donde  $\gamma$  es un número real tal que la línea de integración  $\gamma - i\infty$  a  $\gamma + i\infty$  esté a la derecha de todas las singularidades de  $\hat{x}(s)$ .

La transformada de Laplace tiene muchas propiedades interesantes, algunas de las cuales se enumeran a continuación.

**Teorema 2 (Transformada de Laplace de la derivada de una función)**

Sea  $x(t)$  una función diferenciable, entonces

$$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = s\hat{x}(s) - x(0).$$

Una de las propiedades más importantes de la transformada de Laplace está relacionada con la convolución de dos funciones.

**Definición 10 (Convolución)**

La convolución de dos funciones  $f$  y  $g$  se escribe como  $f * g$  y se define por la integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau,$$

que existe si  $f$  y  $g$  son continuas a trozos en  $[0, \infty)$ .

**Observación 1**

Tomando en cuenta la definición anterior, observamos que la derivada fraccionaria de Caputo (3), puede escribirse como la convolución de las funciones  $\phi_\alpha(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  y  $x'(t)$  la derivada de la función  $x(t)$ ; es decir,

$$D^\alpha x(t) = (\phi_\alpha * x')(t). \quad (10)$$

**Teorema 3 (Transformada de Laplace de la convolución de dos funciones)**

Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son dos funciones continuas a trozos sobre  $[0, \infty)$  y de orden exponencial, tales que existen sus respectivas transformadas de Laplace  $F(s)$ ,  $G(s)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(g * f)(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s)\mathcal{L}\{g(t)\}(s) \\ &= F(s)G(s). \end{aligned}$$

**Proposición 1 (Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo)**

$$\mathcal{L}\{D^\alpha x(t)\}(s) = s^\alpha \hat{x}(s) - s^{\alpha-1}x(0).$$

*Demostración.* Usando la ecuación (10), calculamos la transformada de Laplace en ambos lados de la ecuación

$$\mathcal{L}\{D^\alpha x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{(\phi_\alpha * x')(t)\}(s).$$

Calculamos la transformada de Laplace de  $\phi_\alpha(t)$ ,

$$\mathcal{L}\{\phi_\alpha(t)\}(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{st} t^{-\alpha} dt.$$

Haciendo el cambio de variable  $\tau = st$ ,  $d\tau = sdt$ , obtenemos

$$\mathcal{L}\{\phi_\alpha(t)\}(s) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} s^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{-\alpha} d\tau,$$

utilizando la Definición 1 de la función Gamma, obtenemos

$$\mathcal{L}\{\phi_\alpha(t)\}(s) = s^{\alpha-1}.$$

Entonces, utilizando los Teoremas 2 y 3, la transformada de Laplace de la ecuación (10) es

$$\mathcal{L}\{D^\alpha x(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\phi_\alpha(t)\}(s)\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) = s^\alpha \hat{x}(s) - s^{\alpha-1}x(0).$$

□

**Observación 2 (Transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo de un vector)**

Sea

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

entonces la transformada de Laplace de la derivada fraccionaria de Caputo de un vector es

$$\mathcal{L}\{D^\alpha X(t)\}(s) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}\{D^\alpha x_1(t)\}(s) \\ \vdots \\ \mathcal{L}\{D^\alpha x_n(t)\}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^\alpha \widehat{x_1}(s) - s^{\alpha-1} x_1(0) \\ \vdots \\ s^\alpha \widehat{x_n}(s) - s^{\alpha-1} x_n(0) \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}\{D^\alpha X(t)\}(s) = s^\alpha \widehat{X}(s) - s^{\alpha-1} X(0), \quad (11)$$

donde

$$\widehat{X}(s) = \begin{pmatrix} \widehat{x_1}(s) \\ \vdots \\ \widehat{x_n}(s) \end{pmatrix}.$$

**Proposición 2**

Sea  $A = (a_{i,j})$ ,  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, n$ , una matriz de  $n \times n$  con coeficientes reales y  $X(t) = (x_i(t))^T$ ,  $i = 1, \dots, n$ , un vector de  $n$  componentes. Entonces

$$\mathcal{L}\{AX(t)\}(s) = A\widehat{X}(s). \quad (12)$$

*Demostración.* Sea la coordenada  $i$ -ésima  $(AX(t))_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k(t)$ , por tanto

$$(\mathcal{L}\{AX(t)\}(s))_i = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k(t)\right\}(s) = \sum_{k=1}^n a_{ik}\widehat{x_k}(s) = (A\widehat{X}(s))_i.$$

□

Utilizando estos resultados, el sistema

$$D^\alpha X(t) = AX(t), \quad X(0) = X_0,$$

se resuelve de la siguiente manera:

Aplicando la transformada de Laplace y utilizando la ecuación (11) y (12) obtenemos lo siguiente

$$s^\alpha \widehat{X}(s) - s^{\alpha-1} X(0) = A\widehat{X}(s), \quad (13)$$



agrupando los términos en común, obtenemos

$$(s^\alpha I - A) \hat{X}(s) = s^{\alpha-1} X(0), \quad (14)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de  $n \times n$ . Suponemos que la matriz  $(s^\alpha I - A)$  es invertible, es decir,  $s^\alpha$  es distinta de los valores propios de  $A$ , entonces  $\det(s^\alpha I - A) \neq 0$ . En este caso

$$\hat{X}(s) = s^{\alpha-1} (s^\alpha I - A)^{-1} X(0). \quad (15)$$

Más adelante veremos que si tenemos  $A$  en su forma canónica, entonces podemos usar la transformada inversa de Laplace para encontrar  $X(t)$  mediante la fórmula dada en el teorema siguiente.

#### Teorema 4

Sea  $\gamma \in \mathbb{N}$ ,  $a, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , entonces tenemos que para todo  $t > 0$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha\gamma-\beta}}{(s^\alpha - a)^\gamma} \right\} (t) = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(at^\alpha) \quad (16)$$

la cual es válida para todo  $\Re(s) > 0$ ,  $\Re(\beta) > 0$  y  $|as^{-\alpha}| < 1$  (ver [2]).

### 4.1. Sistemas lineales con valores propios reales repetidos

A continuación estudiaremos los problemas de valor inicial para un sistema lineal con derivada fraccionaria de Caputo analizando las raíces del polinomio característico asociado a la matriz del sistema, es decir, sus valores propios, que pueden ser: reales repetidos, reales distintos y complejos. Considerando las dificultades para invertir la matriz cuando es  $n \times n$ , en este documento consideraremos  $I$  la matriz de identidad de  $2 \times 2$  y  $A$  una matriz de  $2 \times 2$ . Comenzaremos con un sistema que contiene valores propios reales repetidos.

Consideremos el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = \lambda x(t) + y(t) \\ D^\alpha y(t) = \lambda y(t) \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \end{cases} \quad (17)$$

este sistema puede escribirse en forma matricial como

$$D^\alpha \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Utilizando la ecuación (13)

$$s^\alpha \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix} - s^{\alpha-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix},$$

usando (14), obtenemos

$$\begin{pmatrix} s^\alpha - \lambda & -1 \\ 0 & s^\alpha - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix} = s^{\alpha-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos la inversa de la matriz  $(s^\alpha I - A)$ , para ello utilizamos el polinomio característico  $P(s^\alpha)$  de esta matriz, que se obtiene como

$$P(s^\alpha) = \det(s^\alpha I - A)$$

para este caso

$$P(s^\alpha) = (s^\alpha - \lambda)^2.$$

Por lo tanto, si  $s^\alpha \neq \lambda$ , entonces

$$(s^\alpha I - A)^{-1} = \frac{1}{(s^\alpha - \lambda)^2} \begin{pmatrix} s^\alpha - \lambda & 1 \\ 0 & s^\alpha - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así, utilizando (15)

$$\begin{pmatrix} \widehat{x}(s) \\ \widehat{y}(s) \end{pmatrix} = \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)^2} \begin{pmatrix} s^\alpha - \lambda & 1 \\ 0 & s^\alpha - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

este resultado puede verse como

$$\begin{pmatrix} \widehat{x}(s) \\ \widehat{y}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)} & s^{-\alpha} \frac{s^{2\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)^2} \\ 0 & \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Para resolver este sistema calculamos la transformada inversa de Laplace de cada uno de los componentes de la matriz. Utilizando la ecuación (16) y la Definición 5 de la función Mittag-Leffler, obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)} \right\} (t) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha) = E_\alpha(\lambda t^\alpha). \quad (18)$$

Por otro lado, utilizando la forma inversa del Teorema 3 de convolución de dos funciones tenemos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \frac{s^{2\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)^2} \right\} (t) = \left( \mathcal{L}^{-1} \{ s^{-\alpha} \} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{2\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)^2} \right\} \right) (t),$$

donde

$$\mathcal{L}^{-1} \{ s^{-\alpha} \} (t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

y

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{2\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)^2} \right\} (t) = E_{\alpha,1}^2(\lambda t^\alpha).$$

Así, por la Definición 4 de convolución de dos funciones

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha} \frac{s^{2\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)^2} \right\} (t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} E_{\alpha,1}^2(\lambda \tau^\alpha) d\tau.$$

Posteriormente, utilizando la ecuación (8)

$$E_{\alpha,1}^2(\lambda t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{\Gamma(\alpha k + 1)} (\lambda t^\alpha)^k,$$

entonces

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} E_{\alpha,1}^2(\lambda\tau^\alpha) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha)} \lambda^k \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\alpha k} d\tau$$

Haciendo el cambio de la variable  $\tau = tr$ ,  $d\tau = tdr$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} E_{\alpha,1}^2(\lambda\tau^\alpha) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\lambda^k t^{\alpha k+\alpha}}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{\alpha k} dr.$$

Para continuar utilizamos la siguiente definición:

#### Definición 11 (Función Beta)

La función Beta  $B(z, u)$ , está definida por la siguiente integral

$$B(z, u) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{u-1} dt, \quad (19)$$

donde  $\Re(z) > 0$ ,  $\Re(u) > 0$  y puede expresarse en términos de la función  $\Gamma$  mediante la relación

$$B(z, u) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)}. \quad (20)$$

Entonces, utilizando (19), y la relación (20) que esta función tiene con la función Gamma, obtenemos

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} E_{\alpha,1}^2(\lambda\tau^\alpha) d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha)} (\lambda t^\alpha)^k t^\alpha \frac{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha k+1+\alpha)}.$$

Y por la propiedad (2) de la función Gamma, nos queda

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} E_{\alpha,1}^2(\lambda\tau^\alpha) d\tau = \frac{t^\alpha}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha).$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda t^\alpha) & \frac{t^\alpha}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) \\ 0 & E_\alpha(\lambda t^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Note que si  $\alpha = 1$

$$E_\alpha(\lambda t^\alpha) = e^{\lambda t}$$

y

$$\frac{t^\alpha}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) = t e^{\lambda t}$$

así

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

#### 4.1.1. Ejemplo: Valores propios repetidos

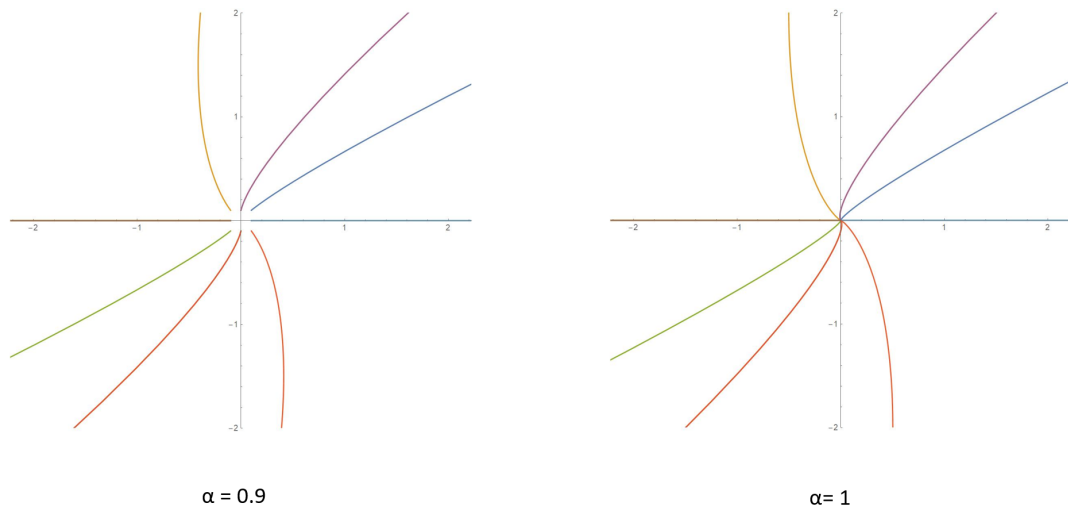
Consideremos el sistema (17) con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que este sistema tiene una solución general

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\alpha(4t^\alpha) & \frac{t^\alpha}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(4t^\alpha) \\ 0 & E_\alpha(4t^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Tomando un  $\alpha = 0.9$ , podemos representar algunas curvas solución como se muestra en la Figura 1. Observemos que estas curvas son muy parecidas a las del caso ordinario ( $\alpha = 1$ ), y podemos ver que estas soluciones sufren una contracción debido al valor de  $\alpha$ .



**Figura 1:** Curvas solución para el caso de valores propios reales repetidos. Elaboración propia.

Comparado con el caso ordinario, el flujo de las soluciones en su forma cualitativa es muy similar cuando tomamos diferentes valores de  $\alpha$ .

#### 4.2. Sistemas lineales con valores propios reales y distintos

Resolvamos ahora el siguiente sistema lineal

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = \lambda x(t) \\ D^\alpha y(t) = \mu y(t) \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \end{cases} \quad (21)$$

este sistema puede escribirse en forma matricial como

$$D^\alpha \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Aplicando la transformada de Laplace en la ecuación (22) obtenemos

$$\begin{pmatrix} s^\alpha - \lambda & 0 \\ 0 & s^\alpha - \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{x}(s) \\ \widehat{y}(s) \end{pmatrix} = s^{\alpha-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Para este caso, el polinomio característico es  $P(s^\alpha) = (s^\alpha - \lambda)(s^\alpha - \mu)$ , entonces cuando  $s^\alpha \neq \lambda, \mu$  obtenemos

$$\begin{pmatrix} \widehat{x}(s) \\ \widehat{y}(s) \end{pmatrix} = \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \lambda)(s^\alpha - \mu)} \begin{pmatrix} s^\alpha - \mu & 0 \\ 0 & s^\alpha - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace en ambos lados de cada componente de la matriz y utilizando (18) para  $\lambda$  y  $\mu$ , respectivamente, obtenemos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda t^\alpha) & 0 \\ 0 & E_\alpha(\mu t^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

por definición clásica de la función Mittag-Leffler (9).

#### 4.2.1. Ejemplo: Valores propios reales distintos

Consideremos ahora el sistema (22) con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

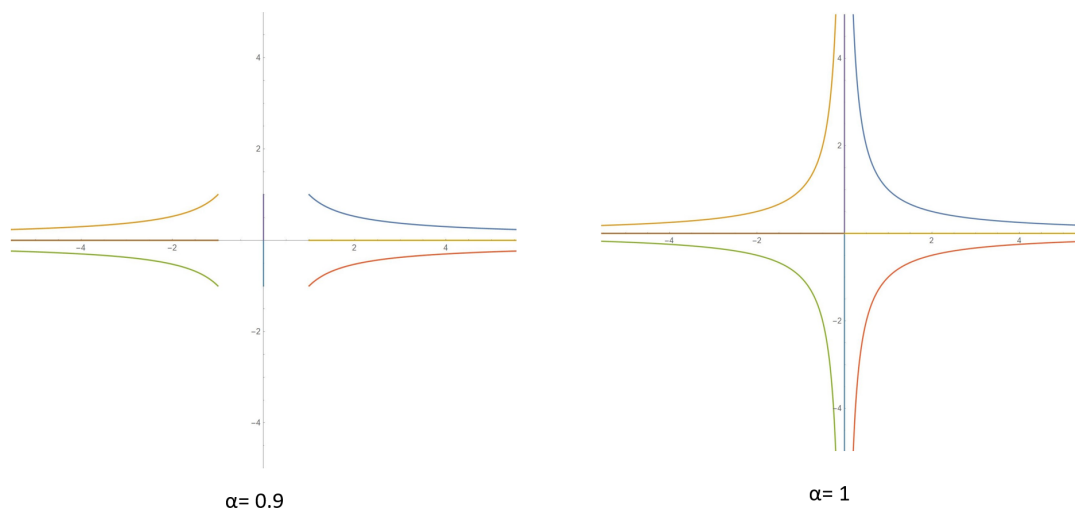
se sabe que este sistema tiene como solución general

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha) & 0 \\ 0 & E_\alpha(-t^\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Para el caso particular, con la siguiente condición  $\alpha = 0.9$ , se puede observar que las curvas solución del sistema (21) presentan similitud a las del caso ordinario ( $\alpha = 1$ ) con la diferencia que cuando tenemos el  $\alpha = 0.9$  el decrecimiento de las soluciones es más rápido debido al valor de  $\alpha$ ; como se muestra en la Figura 2.

### 4.3. Sistemas lineales con valores propios complejos

Por último, nos ocuparemos de los sistemas lineales cuando la matriz  $A$  tiene valores propios complejos, esto ocurre cuando el polinomio característico contiene raíces complejas. Sin embargo, todavía podemos obtener la solución general como en los valores propios reales mediante el uso de algunas estrategias con números complejos y funciones.



**Figura 2:** Curvas solución para el caso de valores propios reales y distintos. Elaboración propia.

Cosideremos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = ax(t) - by(t) \\ D^\alpha y(t) = bx(t) + ay(t) \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \end{cases} \quad (23)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Este sistema puede considerarse

$$D^\alpha \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados, según la ecuación (13), obtenemos

$$s^\alpha \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix} - s^{\alpha-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix},$$

agrupando términos tenemos que

$$\begin{pmatrix} s^\alpha - a & b \\ -b & s^\alpha - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix} = s^{\alpha-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos

$$\begin{pmatrix} s^\alpha - a & b \\ -b & s^\alpha - a \end{pmatrix}^{-1}$$

donde el polinomio característico  $P(s^\alpha)$ , de esta matriz es

$$P(s^\alpha) = (s^\alpha - \omega)(s^\alpha - \bar{\omega}),$$

con  $\omega = a + ib$  y  $\bar{\omega} = a - ib$ , entonces si  $s^\alpha \neq \omega, \bar{\omega}$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix} = \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \omega)(s^\alpha - \bar{\omega})} \begin{pmatrix} s^\alpha - a & -b \\ b & s^\alpha - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

separando en fracciones parciales podemos ver que

$$\frac{s^\alpha - a}{(s^\alpha - \omega)(s^\alpha - \bar{\omega})} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(s^\alpha - \omega)} + \frac{1}{(s^\alpha - \bar{\omega})} \right]$$

y

$$\frac{b}{(s^\alpha - \omega)(s^\alpha - \bar{\omega})} = \frac{1}{2i} \left[ \frac{1}{(s^\alpha - \omega)} - \frac{1}{(s^\alpha - \bar{\omega})} \right].$$

Por lo tanto, la expresión (24) puede verse como

$$\begin{pmatrix} \hat{x}(s) \\ \hat{y}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \omega)} + \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \bar{\omega})} \right] & -\frac{1}{2i} \left[ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \omega)} - \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \bar{\omega})} \right] \\ \frac{1}{2i} \left[ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \omega)} - \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \bar{\omega})} \right] & \frac{1}{2} \left[ \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \omega)} + \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha - \bar{\omega})} \right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a ambos lados a cada componente de la matriz y utilizando (18) para  $\omega$  y  $\bar{\omega}$ , respectivamente, obtenemos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [E_\alpha(\omega t^\alpha) + E_\alpha(\bar{\omega} t^\alpha)] & -\frac{1}{2i} [E_\alpha(\omega t^\alpha) - E_\alpha(\bar{\omega} t^\alpha)] \\ \frac{1}{2i} [E_\alpha(\omega t^\alpha) - E_\alpha(\bar{\omega} t^\alpha)] & \frac{1}{2} [E_\alpha(\omega t^\alpha) + E_\alpha(\bar{\omega} t^\alpha)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\alpha = 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{[E_\alpha(\omega t^\alpha) + E_\alpha(\bar{\omega} t^\alpha)]}{2} &= \frac{e^{t(a+ib)} + e^{t(a-ib)}}{2} \\ &= \frac{e^{at} (e^{ibt} + e^{-ibt})}{2} \\ &= e^{at} (\cos(bt)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{[E_\alpha(\omega t^\alpha) - E_\alpha(\bar{\omega} t^\alpha)]}{2i} &= \frac{e^{t(a+ib)} - e^{t(a-ib)}}{2i} \\ &= \frac{e^{at} (e^{ibt} - e^{-ibt})}{2i} \\ &= e^{at} (\text{sen}(bt)), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\text{sen}(bt) \\ \text{sen}(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Si  $\alpha \in (0, 1]$ , podemos utilizar coordenadas polares para representar la solución, es decir, tomando

$$\frac{\omega + \bar{\omega}}{2} = r \cos(\theta), \quad \frac{\omega - \bar{\omega}}{2i} = r \text{sen}(\theta)$$

y la definición de la función Mittag-Leffler (8), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{[E_\alpha(\omega t^\alpha) + E_\alpha(\bar{\omega} t^\alpha)]}{2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\omega^k + \bar{\omega}^k}{2} t^{\alpha k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \cos(k\theta) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{[E_{\alpha}(\omega t^{\alpha}) - E_{\alpha}(\bar{\omega} t^{\alpha})]}{2i} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\omega^k - \bar{\omega}^k}{2i} t^{\alpha k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \text{sen}(k\theta). \end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} r^k \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\text{sen}(k\theta) \\ \text{sen}(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

#### 4.3.1. Ejemplo: Valores propios complejos

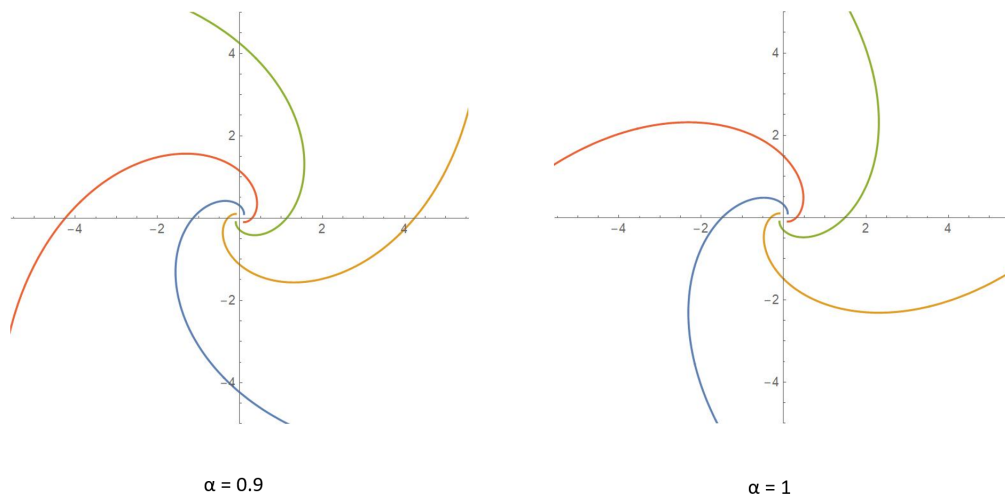
Analicemos ahora el caso en el que tenemos valores propios complejos, para ello consideremos el sistema (23) con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si  $\lambda = 1 + i$ ,  $\theta = \text{Arg}(\lambda)$  y  $r = \sqrt{2}$ , este sistema con matriz A tiene como solución general

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(rt^{\alpha})^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\text{sen}(k\theta) \\ \text{sen}(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

En el caso en que  $\alpha = 0,9$ , podemos observar en la Figura 3, que obtenemos como soluciones espirales fuente, es decir, curvas inestables al igual que en el caso ordinario ( $\alpha = 1$ ). La diferencia es la velocidad con la que crece y los giros que da esta espiral, debido al parámetro  $\alpha$ .



**Figura 3:** Curva solución para valores propios complejos con parte real distinta de cero. Elaboración propia.

Ahora bien, si consideramos la matriz de la siguiente forma

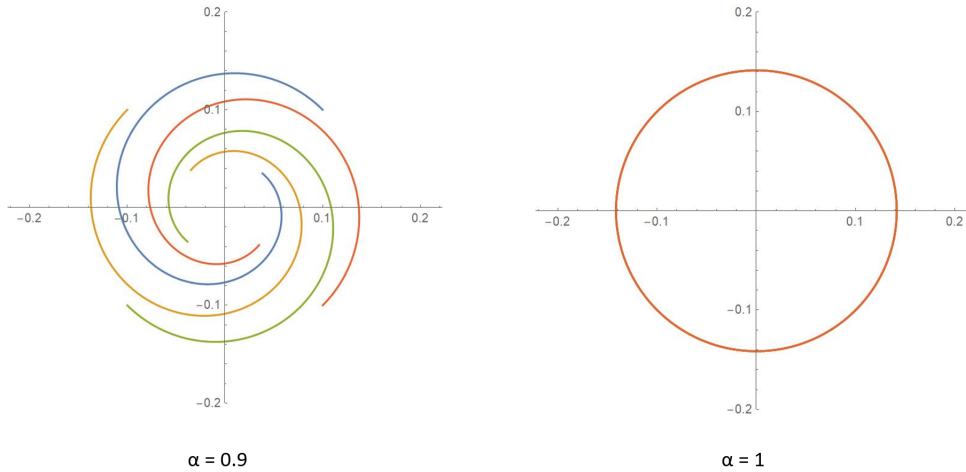
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



es decir, la matriz con valores propios con parte real cero y parte imaginaria 1, este sistema tiene como solución a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \begin{pmatrix} \cos(k\frac{\pi}{2}) & -\sin(k\frac{\pi}{2}) \\ \sin(k\frac{\pi}{2}) & \cos(k\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

En este ejemplo podemos observar que para el sistema de la matriz  $A$ , con valores propios imaginario puro, si hay diferencia cuando tomamos el caso  $\alpha = 0.9$  y  $\alpha = 1$ , ya que en el caso ordinario tenemos centros o soluciones periódicas, y cuando tomamos  $\alpha \neq 1$ , tenemos espirales, ver Figura 4.



**Figura 4:** Curva solución para valores propios complejos con parte real igual a cero. Elaboración propia.

## 5. Función Mittag-Leffler de una Matriz

Para definir la función Mittag-Leffler de una matriz, definamos primero la Mittag-Leffler de un operador lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y para ello es necesario definir el concepto de convergencia en el espacio lineal  $L(\mathbb{R}^n)$  de operadores lineales sobre  $\mathbb{R}^n$ . Para ello se utiliza la norma de operador de  $T$  definida por

$$\|T\| = \max_{|x| \leq 1} |T(x)|,$$

donde  $|x|$  denota la norma euclidiana de  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ , es decir,

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

El operador norma tiene todas las propiedades habituales de una norma; es decir, para  $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \|T\| &\geq 0 \text{ y } \|T\| = 0 \text{ ssi } T = 0, \\ \|kT\| &= |k| \|T\| \text{ para } k \in \mathbb{R}, \\ \|S + T\| &\leq \|S\| + \|T\|. \end{aligned}$$

La convergencia de una sucesión de operadores  $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$  se define en términos de la norma del operador como sigue:

**Definición 12 (Convergencia de una sucesión de operadores)**

Se dice que una sucesión de operadores lineales  $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$  converge a un operador lineal  $T \in L(\mathbb{R}^n)$  cuando  $k \rightarrow \infty$ ; es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que para  $k \geq N$ ,  $\|T - T_k\| < \epsilon$ .

**Lema 1** Para  $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$  y  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(1) |T(x)| \leq \|T\| |x|$$

$$(2) \|TS\| \leq \|T\| \|S\|$$

$$(3) \|T^k\| \leq \|T\|^k \text{ para } k = 0, 1, 2, \dots$$

La demostración de este lema puede encontrarse, por ejemplo, en Perko [4].

**Teorema 5**

Sea  $T \in L(\mathbb{R}^n)$  y  $t_0 > 0$ , la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo  $|x| < R$ .

*Demostración.* Sea  $\|T\| = a$ . Entonces se deduce del lema anterior que para  $|t| \leq t_0$ ,

$$\left\| \frac{T^k t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \leq \frac{a^k t_0^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Pero

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(at_0).$$

Por lo tanto, de la prueba M de Weierstrass se deduce que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

es absoluta y uniformemente convergente para todo  $|t| \leq t_0$ . □

La función Mittag-Leffler del operador lineal  $T$  viene definida entonces por la serie absolutamente convergente

$$E_{\alpha}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

De las propiedades de los límites se deduce que  $E_{\alpha}(T)$  es un operador lineal sobre  $\mathbb{R}^n$  y se deduce, como prueba del teorema anterior, que  $\|E_{\alpha}(T)\| \leq E_{\alpha}(\|T\|)$ .

Dado que estamos resolviendo sistemas lineales de la forma

$$D^\alpha X(t) = AX(t),$$

supondremos que la transformación lineal  $T \in \mathbb{R}^n$  está representada por la matriz  $A$  de  $n \times n$  con respecto a la base estándar para  $\mathbb{R}^n$  y definiremos la función de Mittag-Leffler  $E_\alpha(At^\alpha)$ .

### Definición 13 (Función Mittag-Leffler de una matriz)

Sea  $A$  sea una matriz de  $n \times n$ . Entonces para  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

### Proposición 3

Si  $Q$  y  $T$  son transformaciones lineales sobre  $\mathbb{R}^n$  y  $S = QTQ^{-1}$ , entonces  $E_\alpha(S) = QE_\alpha(T)Q^{-1}$ .

*Demostración.* La demostración se sigue de la definición de la función Mittag-Leffler de una matriz, en efecto

$$E_\alpha(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(QTQ^{-1})^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = Q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} Q^{-1}.$$

□

El siguiente corolario se deduce inmediatamente de la Definición 13 y de la Proposición 3.

**Corolario 1** Si  $Q^{-1}AQ = \text{diag}[\lambda_j]$  entonces  $E_\alpha(At^\alpha) = Q \text{diag}[E_\alpha(\lambda_j t^\alpha)]Q^{-1}$ , donde los  $\lambda_j$  son los valores propios de la matriz  $A$ .

Ahora analizaremos los diferentes casos en los que podemos tener la matriz  $A$  y cómo sería la función Mittag-Leffler de dicha matriz.

**Corolario 2** Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

entonces la función Mittag-Leffler de la matriz  $A$  es

$$E_\alpha(A) = \begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda) & 0 \\ 0 & E_\alpha(\mu) \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix}.$$

De este modo

$$E_\alpha(A) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda) & 0 \\ 0 & E_\alpha(\mu) \end{pmatrix}.$$

□

**Corolario 3** Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces la función Mittag-Leffler de la matriz  $A$  es

$$E_\alpha(t^\alpha A) = \begin{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha \lambda) & \frac{t^\alpha}{\alpha} E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha \lambda) \\ 0 & E_\alpha(t^\alpha \lambda) \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces

$$(t^\alpha A)^k = \begin{pmatrix} (t^\alpha \lambda)^k & t^{\alpha k} k \lambda^{k-1} \\ 0 & (t^\alpha \lambda)^k \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, encontramos

$$E_\alpha(t^\alpha A) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha \lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k} k \lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha \lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k} k \lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + 1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\alpha k} \frac{t^{\alpha k} \lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{\alpha k} \lambda^{k-1}}{\Gamma(\alpha k)} = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha(k+1)} \lambda^{(k+1)-1}}{\Gamma(\alpha(k+1))} \\ &= \frac{t^\alpha}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\alpha \lambda)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} = \frac{t^\alpha}{\alpha} E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha \lambda). \end{aligned}$$

Entonces, obtenemos que

$$E_{\alpha}(t^{\alpha}A) = \begin{pmatrix} E_{\alpha}(t^{\alpha}\lambda) & \frac{t^{\alpha}}{\alpha}E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}\lambda) \\ 0 & E_{\alpha}(t^{\alpha}\lambda) \end{pmatrix}.$$

□

**Corolario 4** Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

entonces la función Mittag-Leffler de la matriz  $A$  es

$$E_{\alpha}(A) = \begin{pmatrix} E_{2\alpha}(-b^2) & bE_{2\alpha,\alpha+1}(-b^2) \\ -bE_{2\alpha,\alpha+1}(-b^2) & E_{2\alpha}(-b^2) \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

entonces, podemos ver que

$$A^0 = I, \quad A^2 = -b^2I, \quad A^3 = -b^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = b^4I, \quad A^5 = b^5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

Así, encontramos

$$\begin{aligned} E_{\alpha}(A) &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}}{\Gamma(2k\alpha+1)} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k+1}}{\Gamma((2k+1)\alpha+1)} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k+1}}{\Gamma((2k+1)\alpha+1)} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{b^{2k}}{\Gamma(2k\alpha+1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_{2\alpha}(-b^2) & bE_{2\alpha,\alpha+1}(-b^2) \\ -bE_{2\alpha,\alpha+1}(-b^2) & E_{2\alpha}(-b^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Tenga en cuenta que, si  $\alpha = 1$ , entonces

$$E_{\alpha}(A) = \begin{pmatrix} \cos(b) & \operatorname{sen}(b) \\ -\operatorname{sen}(b) & \cos(b) \end{pmatrix}.$$

**Corolario 5** Si

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

entonces la función Mittag-Leffler de la matriz  $A$  es

$$E_{\alpha}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ -A_1 & A_0 \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Si

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que

$$A^0 = I, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 - 3ab^2 & -3a^2b + b^3 \\ 3a^2b - b^3 & a^3 - 3ab^2 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} a^4 - 6a^2b + b^4 & -4a^3b + 4ab^3 \\ 4a^3b - 4ab^3 & a^4 - 6a^2b + b^4 \end{pmatrix},$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4 & -5a^4b + 10a^2b^3 - b^5 \\ 5a^4b - 10a^2b^3 + b^5 & a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4 \end{pmatrix},$$

$\vdots$

$$A^k = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ -A_1 & A_0 \end{pmatrix},$$

con  $A_j = \sum_{m=0}^{\lceil \frac{k+j}{2} \rceil} (-1)^{m+j} \binom{k}{2m+j} a^{k-2m-j} b^{2m+j}$ , para  $j = 0, 1$ , donde  $\lceil \frac{k}{2} \rceil, \lceil \frac{k+1}{2} \rceil = \min \{n \in \mathbb{Z} \mid \frac{k}{2}, \frac{k+1}{2} \leq n\}$  y  $\binom{k}{2m}, \binom{k}{2m+1}$  son coeficientes binomiales.

Por lo tanto

$$E_{\alpha}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ -A_1 & A_0 \end{pmatrix}.$$

□

Este análisis demuestra que si

$$B = Q^{-1}AQ,$$

tiene una de las siguientes formas

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

se deduce de los corolarios anteriores y de la Definición 13 que

$$E_\alpha(Bt^\alpha) = \begin{pmatrix} E_\alpha(\lambda t^\alpha) & 0 \\ 0 & E_\alpha(\mu t^\alpha) \end{pmatrix}, \quad E_\alpha(Bt^\alpha) = \begin{pmatrix} E_\alpha(t^\alpha \lambda) & \frac{t^\alpha}{\alpha} E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \lambda) \\ 0 & E_\alpha(t^\alpha \lambda) \end{pmatrix}$$

o

$$E_\alpha(Bt^\alpha) = \begin{pmatrix} E_{2\alpha}(-b^2) & bE_{2\alpha,\alpha+1}(-b^2) \\ -bE_{2\alpha,\alpha+1}(-b^2) & E_{2\alpha}(-b^2) \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Por la Proposición 3, la matriz  $E_\alpha(At^\alpha)$  viene dada por

$$E_\alpha(At^\alpha) = QE_\alpha(Bt^\alpha)Q^{-1}.$$

## 6. Teorema fundamental de los sistemas lineales

Sea  $A$  una matriz de  $2 \times 2$ . En esta sección, demostraremos el hecho de que para  $X_0 \in \mathbb{R}^2$  el problema del valor inicial

$$\begin{aligned} D^\alpha X(t) &= AX(t), \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{26}$$

tiene una solución única para todos los  $t \in \mathbb{R}$  que es

$$X(t) = E_\alpha(At^\alpha)X_0.$$

Para demostrar este teorema, primero calculamos la derivada fraccionaria de Caputo de la función Mittag-Leffler  $E_\alpha(At^\alpha)$ .

**Lema 2** Sea  $A$  una matriz cuadrada, entonces

$$D^\alpha E_\alpha(At^\alpha) = AE_\alpha(At^\alpha).$$

*Demostración.* Por definición de la derivada fraccionaria de Caputo (3)

$$\begin{aligned} D^\alpha E_\alpha(At^\alpha) &= D^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\alpha k A^k \tau^{\alpha k - 1}}{(t - \tau)^\alpha} d\tau. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de la variable  $\tau = tr$ ,  $d\tau = t dr$ , obtenemos

$$D^\alpha E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha k A^k t^{\alpha k - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + 1)\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^1 (1 - r)^{1 - \alpha - 1} r^{\alpha k - 1} dr.$$

Entonces, por la relación de la función Beta con la función Gamma (20), tenemos que

$$D^\alpha E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha k A^k t^{\alpha k - \alpha}}{\Gamma(\alpha k + 1)\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\alpha k)}{\Gamma(1 - \alpha + \alpha k)}$$

Reescribiendo la suma, haciendo un cambio de índice en  $k$  y teniendo en cuenta, por la propiedad de la función Gamma (2), que  $\alpha k \Gamma(\alpha k) = \Gamma(\alpha k + 1)$ , obtenemos

$$D^\alpha E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1} t^{\alpha(k+1) - \alpha}}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1 - \alpha)}.$$

Eliminando los términos semejantes y utilizando la definición de la función Mittag-Leffler de una matriz, nos queda

$$D^\alpha E_\alpha(At^\alpha) = A E_\alpha(At^\alpha).$$

□

#### Teorema 6 (Teorema fundamental de los sistemas lineales)

Sea  $A$  una matriz de  $2 \times 2$ . Entonces, para un  $X_0 \in \mathbb{R}^2$ , el problema del valor inicial (26) tiene una solución única dada por

$$X(t) = E_\alpha(At^\alpha)X_0.$$

*Demostración.* Por el lema anterior, si  $X(t) = E_\alpha(At^\alpha)X_0$ , entonces

$$D^\alpha X(t) = D^\alpha E_\alpha(At^\alpha)X_0 = A E_\alpha(At^\alpha)X_0 = A X(t)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

□

## 7. El plano traza-determinante

Ahora intentaremos resumir lo que hemos hecho con la teoría anterior. Para ello quisiéramos alguna caracterización que nos permita decir cómo son las soluciones de algún sistema lineal autónomo fraccionario de  $2 \times 2$ . Utilicemos la caracterización del plano traza-determinante.

Para una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tenemos su polinomio característico y esto en el caso ordinario nos permite saber qué tipos de valores propios tiene  $A$ .



Cuando tenemos el caso fraccionario, el polinomio no se puede calcular directamente, debido a la forma del sistema.

$$D^\alpha X = AX,$$

sin embargo, aplicando la transformada de Laplace podemos obtener el polinomio característico y éste es de la forma

$$P(s^\alpha) = s^{2\alpha} - s^\alpha(a + d) + ad - cb.$$

Si  $\text{Det} A = D = ad - cb$  y  $\text{Tr} A = T = a + d$ , entonces

$$P(s^\alpha) = s^{2\alpha} - s^\alpha T + D.$$

Ahora, calculando los valores propios de  $A$ , tenemos que si  $p(s^\alpha) = 0$ , entonces

$$s_\pm^\alpha = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4D}).$$

Esta última expresión nos dice cuando tenemos valores propios reales repetidos, distintos y complejos con sólo conocer  $T$  y  $D$ ; es decir,

- si  $T^2 - 4D > 0$  tenemos valores propios reales distintos,
- si  $T^2 - 4D = 0$  tenemos valores propios reales repetidos,
- si  $T^2 - 4D < 0$  tenemos valores propios complejos.

Con el par  $(T, D)$  podemos hacer una visualización de la geometría en el plano fase que corresponde precisamente al plano traza-determinante. En los casos  $T^2 - 4D > 0$  y  $T^2 - 4D = 0$ , el comportamiento cualitativo no cambia respecto al caso ordinario, nuestro caso de interés es el siguiente  $T^2 - 4D < 0$ .

Consideremos  $s^\alpha = re^{i\theta}$  porque en este caso  $p(s^\alpha) = 0$  tiene raíces complejas. Ahora  $s = r^{\frac{1}{\alpha}} e^{i\theta/\alpha} = r^{\frac{1}{\alpha}} (\cos(\theta/\alpha) + i \sin(\theta/\alpha))$ , recordemos que para el caso ordinario cuando  $T < 0$  se obtienen espirales pozo, como la parte real de  $s^\alpha$  es  $T/2$  entonces  $T = 2r^{\frac{1}{\alpha}} \cos(\theta/\alpha)$ .

- Análogamente, tomando  $T < 0$  tenemos que analizar ahora cuando  $2r^{\frac{1}{\alpha}} \cos(\theta/\alpha) < 0$  equivalentemente

$$\cos(\theta/\alpha) < 0$$

y esto ocurre cuando

$$\begin{cases} -\pi < \frac{\theta}{\alpha} < -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{\alpha} < \pi \end{cases}$$

o, de forma equivalente, cuando

$$\begin{cases} -\alpha\pi < \theta < -\frac{\alpha\pi}{2} \\ \frac{\alpha\pi}{2} < \theta < \alpha\pi \end{cases}.$$

Por lo tanto, para estos valores de  $\theta$  tenemos espirales pozo.

- Si  $T > 0$  es necesario  $\cos(\theta/\alpha) > 0$  y esto ocurre cuando

$$\frac{-\pi}{2} < \frac{\theta}{\alpha} < \frac{\pi}{2}$$

o, de forma equivalente, cuando

$$\frac{-\alpha\pi}{2} < \theta < \frac{\alpha\pi}{2},$$

por lo tanto, tenemos espirales fuente cuando  $\theta$  toma estos valores.

- Por último, si  $T = 0$ , es decir,

$$\cos(\theta/\alpha) = 0$$

esto ocurre cuando

$$\frac{\theta}{\alpha} = \pm \frac{\pi}{2}$$

o, de forma equivalente

$$\theta = \pm \frac{\alpha\pi}{2}.$$

### Observación 3

Tomando  $\alpha < 1$  podemos ver que la estabilidad depende de  $\alpha$ . Recordemos que en el caso ordinario cuando  $T < 0$  y  $D > 0$  el sistema es estable y es inestable en los otros casos. En el caso fraccionario el sistema es estable cuando

$$|\theta| > \frac{\alpha\pi}{2},$$

esto se cumple cuando  $T^2 \geq 4D$ , con  $D > 0$  y  $T < 0$ , considerando

$$s_{\pm}^{\alpha} = \frac{1}{2}(T \pm \sqrt{T^2 - 4D}) \quad \text{y} \quad \theta = \arg(s^{\alpha})$$

y cuando  $T^2 < 4D$ , con  $D > 0$ , considerando

$$s_{\pm}^{\alpha} = \frac{1}{2}(T \pm i\sqrt{4D - T^2})$$

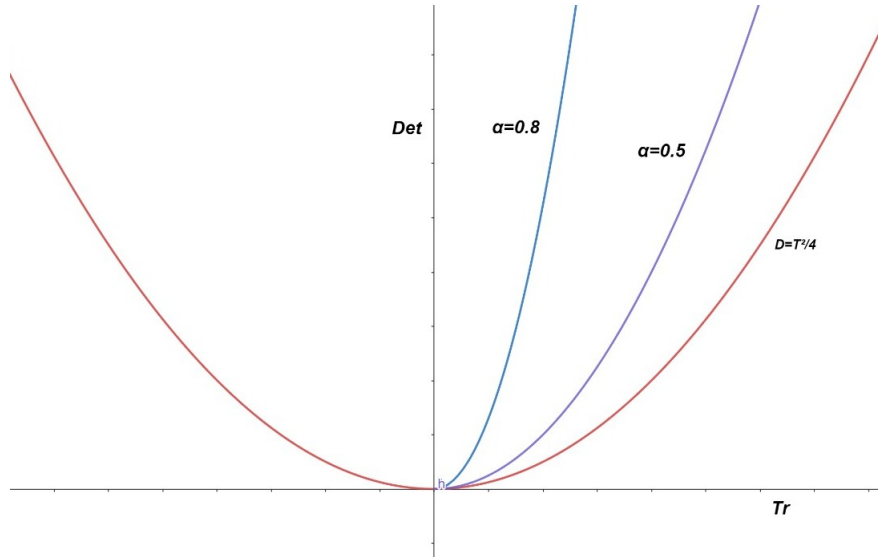
con

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{\sqrt{4D-T^2}}{T}), & \text{si } T > 0. \\ \pi + \arctan(\frac{\sqrt{4D-T^2}}{T}), & \text{si } T < 0. \end{cases}$$

La transición de estable a inestable ocurre cuando

$$D = \frac{T^2}{4}((\tan(\alpha\pi/2))^2 + 1).$$

A partir de esta última ecuación podemos decir que cuando  $\alpha \rightarrow 0$  la región en el plano traza-determinante donde obtenemos soluciones estables, es mayor que cuando  $\alpha \rightarrow 1$ , como podemos ver en la Figura 5, ya que en el caso ordinario la transición de estable a inestable ocurre cuando  $T = 0$ .



**Figura 5:** Comportamiento cualitativo de las soluciones en un sistema fraccionario de  $2 \times 2$  utilizando el plano traza-determinante. Elaboración propia.

## 8. Oscilador armónico amortiguado de orden fraccionario

En esta sección estudiaremos un ejemplo particular, donde se aplica la teoría que desarrollamos en el presente artículo. Consideremos la Segunda Ley de Newton

$$mx''(t) = f(t, x(t), x'(t)),$$

donde  $x(t)$  es la posición al tiempo  $t$ ,  $x'(t)$  es la velocidad al tiempo  $t$ ,  $m$  representa la masa del objeto puntual y  $f$  es la fuerza.

Estudiaremos el siguiente caso particular, el cual corresponde al oscilador armónico amortiguado

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = f(t), \quad (27)$$

donde

- $b \geq 0$  es el coeficiente de amortiguamiento (fricción o resistencia),
- $k > 0$  es la constante de resorte,
- $f(t)$  es una fuerza externa que actúa sobre el sistema.

Considerando la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  y tomando  $m = 1$  y  $f(t) = 0$ , definimos la siguiente generalización de la ecuación (27):

$$D^\alpha D^\alpha x(t) + bD^\alpha x(t) + kx(t) = 0.$$

La ecuación anterior es equivalente al siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} D^\alpha x(t) &= y(t) \\ D^\alpha y(t) &= -kx(t) - by(t), \end{aligned} \quad (28)$$

con condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ . Entonces de forma matricial tendríamos

$$D^\alpha \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{pmatrix}$$

define el comportamiento del sistema. Los valores propios  $\lambda$  de  $A$  nos permiten clasificar este comportamiento, los cuáles se calculan resolviendo el polinomio característico

$$\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

de donde se deduce que son

- complejos si  $b^2 < 4k$ ,
- repetidos si  $b^2 = 4k$ ,
- reales distintos si  $b^2 > 4k$ .

Analicemos el caso cuando  $b^2 > 4k$ . Primero tenemos que diagonalizar la matriz  $A$ , de donde los valores propios son de la forma

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm i \frac{\sqrt{4k - b^2}}{2}.$$

Encontremos el vector propio para el valor propio  $\lambda_1$ , es decir, calculamos  $(A - \lambda_1 I)v = 0$ , resolviendo el sistema, obtenemos que

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b}{2} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{4k - b^2}}{2} \end{pmatrix},$$

así

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{4k - b^2}}{2} & -\frac{b}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{4k - b^2}} & \frac{2}{\sqrt{4k - b^2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

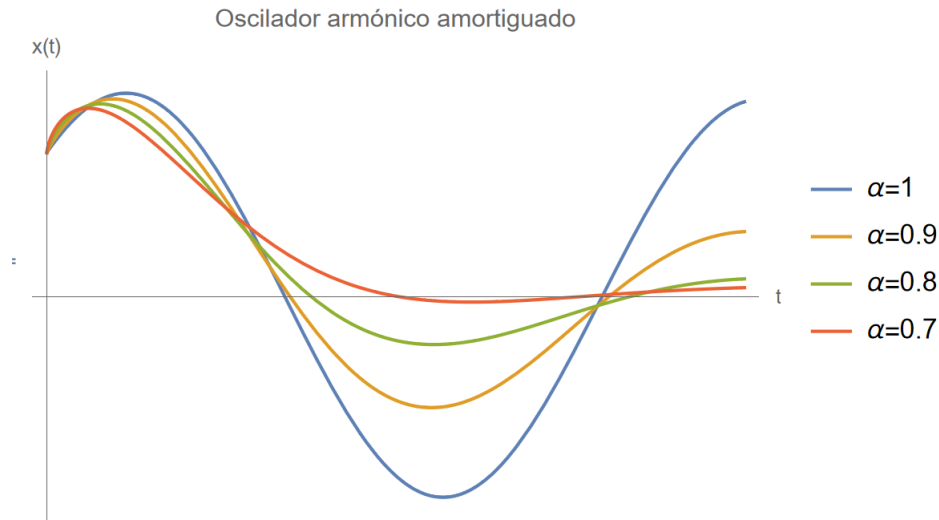
De este modo, obtenemos que la solución de (28) está dada por

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{4k - b^2}}{2} & -\frac{b}{2} \end{pmatrix} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j + 1)} k^{j/2} \begin{pmatrix} \cos(j\theta) & -\sin(j\theta) \\ \sin(j\theta) & \cos(j\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{4k - b^2}} & \frac{2}{\sqrt{4k - b^2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\theta = \begin{cases} \pi/2, & \text{si } b = 0, \\ \pi + \arctan\left(\frac{\sqrt{4k - b^2}}{-b}\right), & \text{si } b > 0. \end{cases}$$

Aquí, hemos utilizado la solución (25), expuesta en la sección (4.3) para valores propios complejos. Donde  $x(t)$  describe el comportamiento del oscilador fraccionario a través del tiempo (ver Figura 6). El cual oscila con una amplitud decreciente exponencialmente a medida que  $\alpha$  se aleja de 1, es decir, cuanto menor sea  $\alpha$  obtendremos un amortiguamiento mayor que en el caso ordinario.



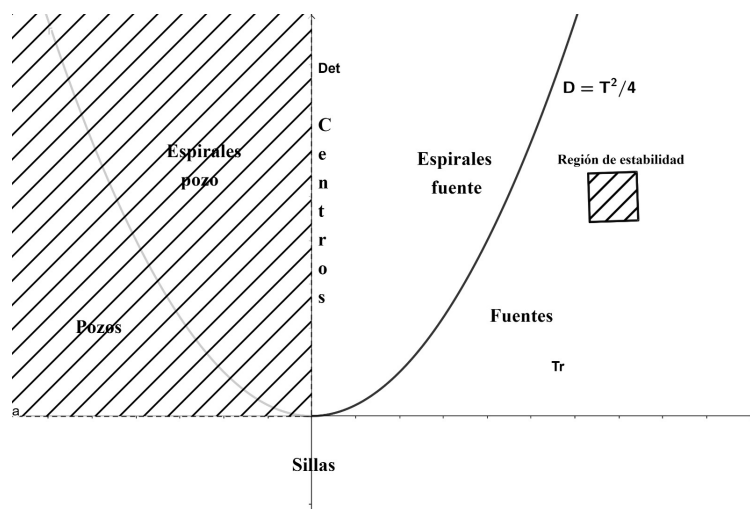
**Figura 6:** Comportamiento de la solución del oscilador armónico amortiguado fraccionario, para  $k = 1$ ,  $b = 0.01$ , y  $x(0) = 1$ . Elaboración propia.

## 9. Conclusiones

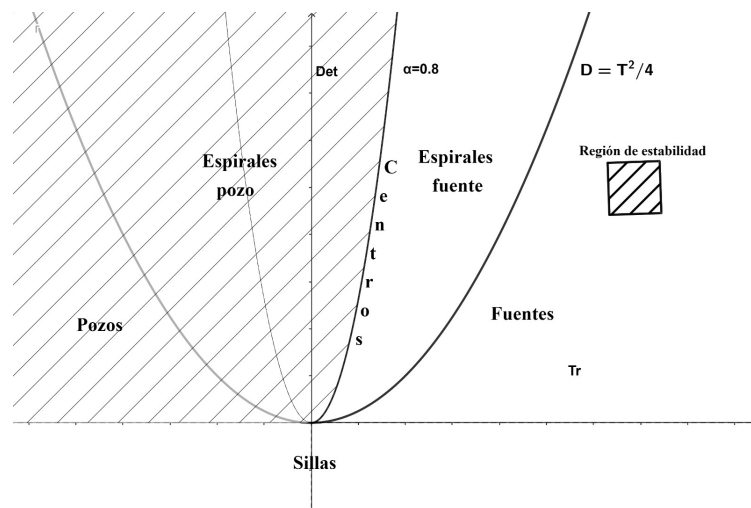
En este artículo, encontramos soluciones para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales con derivada fraccionaria utilizando la teoría de la transformada de Laplace y de la representación de soluciones a través de la función Mittag-Leffler.

Gracias a la transformada de Laplace pudimos obtener soluciones generalizadas para sistemas lineales cuando  $\alpha \in (0, 1]$ , las cuales al compararlas cuando  $\alpha = 1$  se reducen a soluciones conocidas.

Pudimos observar gráficamente que el comportamiento de las soluciones es distinto cuando  $\alpha \in (0, 1)$ , por ejemplo, en el caso de tener un matriz con valores propios complejos con parte real igual a cero, las soluciones son centros para  $\alpha = 1$  y espirales pozo para  $\alpha < 1$ . En general, la región de estabilidad en el plano traza-determinante es más grande cuando  $\alpha < 1$ , como se muestra en las Figuras 7, 8.



**Figura 7:** Estabilidad de los sistemas lineales para  $\alpha = 1$ . Elaboración propia.



**Figura 8:** Estabilidad de los sistemas lineales para  $\alpha = 0.8$ . Elaboración propia.

Se demostraron teoremas para sistemas lineales de orden fraccionario, utilizando la derivada fraccionaria de Caputo y la función Mittag-Leffler de una matriz, análogos a los sistemas lineales ordinarios. Finalmente, se dio un ejemplo explícito en el que se muestra como es la dependencia del comportamiento de las soluciones con respecto al orden de la derivada.

**Contribución de las personas autoras:** Conceptualización: M.P.A.A, J.S.O. Análisis formal: M.P.A.A, J.S.O. Investigación: E.G.N, J.A.M.B. Metodología: E.G.N, J.A.M.B. Supervisión: M.P.A.A, J.S.O. Validación: M.P.A.A, J.S.O. Visualización: E.G.N, J.A.M.B. Escritura (borrador original): E.G.N, J.A.M.B. Escritura (revisión y edición): E.G.N, J.A.M.B.

**Accesibilidad de los datos:** El intercambio de datos no es aplicable a este artículo, ya que no se generaron ni analizaron conjuntos de datos durante el estudio actual.

## 10. Bibliografía

- [1] Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L. (2012). Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic press.
- [2] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). Elsevier.
- [3] Oldham, K., Spanier, J. (1974). The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. Elsevier.
- [4] Perko, L. (2013). Differential equations and dynamical systems (Vol. 7). Springer Science and Business Media.
- [5] Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations. Academic Press. ISBN: 978-0125588409.
- [6] Prabhakar, T. R. (1971). A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. Yokohama math. J, 19(1), 7-15.
- [7] Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. (1987). Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications.