Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 23, No 1. Agosto, 2022 – Febrero, 2023 ISSN 1659 -0643

Sobre las propiedades de los pentagonales generalizados y sus relaciones con números como triangulares, oblongos y otros.

| On the properties of generalized pentagonals and their relationships with numbers such as triangular, oblong and others. |

Alexander José Villarroel Salazar
trabajos_alexvilla@hotmail.com
Investigador Independiente
Carúpano Venezuela

Francisco Javier Villarroel Rosillo
fjvill02@gmail.com
Investigador Independiente
Carúpano Venezuela

Recibido: 11 Julio 2021 Aceptado: 1 de Abril 2022

Resumen: En este artículo se trata específicamente acerca de los números pentagonales generalizados y una serie de propiedades desarrolladas a partir de su estudio que permite apreciar como dichos números se relacionan con números cuadrados, cubos, triangulares, oblongos y como se pueden usar también sucesiones numéricas para crear propiedades interesantes a partir de dichos números.

Palabras Clave: números cuadrados, números triangulares, números pentagonales y pentagonales generalizados, propiedades.

Abstract: This article deals specifically with the generalized pentagonal numbers and a series of properties developed from their study that allows us to appreciate how these numbers are related to square, cube, triangular, oblong numbers and how numerical sequences can also be used to create interesting properties from those numbers.

Keywords: square numbers, triangular numbers, pentagonal and generalized pentagonal numbers, properties.

1. Introducción

El trabajo que se presenta es el resultado de la labor que ha generado en gran parte el castillo matemático que se ha formado hasta la actualidad utilizando la curiosidad, el juego con los números y principalmente el ensayo y el error, por medio de los cuales los hombres de diversas culturas han ido estructurando un universo de conocimientos, la llamada ciencia matemática.

Las propiedades matemáticas de los números pentagonales generalizados surgen como parte de un estudio general sobre ellos, en base a la consideración de posibles patrones o comportamiento de números ampliamente conocidos como lo son los cuadrados y los cubos, es decir, de querer obtener relaciones, que se expresan mediante ecuaciones y fórmulas. Esto es importante en relación a estos números, ya que, aunque dichos números fueron desarrollados por los pitagóricos antes de la era cristiana, son muy pocas las propiedades que se han creado acerca de ellos. La idea de este artículo es mostrar que este grupo de números pueden ser usados para despertar el interés hacia la investigación matemática, lo cual debe surgir de la manipulación numérica, la comprobación de resultados. Por lo tanto, el presente trabajo contempla la presentación de una serie de propiedades sobre los números pentagonales generalizados, donde se mostrará el nombre y enunciado de cada una de las propiedades, así como ejemplos y demostraciones donde sea posible.

2. Números poligonales

Parafraseando a González (2021, p.1) puede decirse que "Los números poligonales, entre ellos los pentagonales y pentagonales generalizados surgieron de los estudios de la Escuela Pitagórica, en la cual el lema principal era que "las cosas son números, y los números son concebidos como cosas". Así los números pentagonales coinciden en su representación con pentágonos, como los triangulares y cuadrados son ante los ojos, triángulos y cuadrados." Así obtenían los diversos tipos de números poligonales o figurados:

- Los números triangulares: $1, 3, 6, 10, 15, \cdots$
- Los números cuadrados: $1, 4, 9, 16, 25, \cdots$
- Los números pentagonales: $1, 5, 12, 22, 35, \cdots$

Es decir, que los números poligonales surgieron de ciertas agrupaciones de números tomando sumas que iban cambiando en cada caso. Así por ejemplo los triangulares surgen de ir sumando luego de fijar el 1 la sucesión de los otros naturales de lo cual resulta: $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \cdots$, y así sucesivamente.

Los cuadrados surgen de fijar el 1 e ir sumando impares mayores que 1: $1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, \cdots$, y de manera consecutiva.

De esas agrupaciones surgieron todos los números poligonales y de las consideraciones de formas geométricas. Esa agregación que se hace a cada uno de los números obtenidos para luego obtener el siguiente se relaciona con el concepto de gnomon que fue muy utilizado por los pitagóricos.

La escuela pitagórica fue un grupo de matemáticos encabezados por Pitágoras en Grecia y actualmente son reconocidos como iniciadores de la matemática formal y de otros aspectos científicos relacionados con la música, la geometría, la numerología y un misticismo religioso impresionante. En relación a lo anterior Kline (1992, p.18) indica que "antes de que entraran en escena los griegos de la época clásica, que va más o menos del 600 al 300 a. C todavía la matemática, no era una disciplina bien organizada".

En líneas generales, se debe mucho del avance de la ciencia en general a la matemática y a la filosofía griega que llevaron a una elevación del pensamiento en torno a asuntos de la vida diaria que desembocaron en el surgimiento definitivo de la ciencia como una forma de explicación de los diversos fenómenos que nos rodean.

Retomando el concepto de gnomon, López y López (2014) plantean que "Los gnómones que se añaden para formar los números pentagonales sucesivos $1, 5, 12, 22, \cdots$ son, respectivamente, $4, 7, 10, \cdots$, o los términos sucesivos de una progresión aritmética que tiene de 3 como la diferencia común". Los gnomos implican que a cada número pentagonal, a partir del 1, hay que sumar 4, luego de obtener $5 = 1 + 4$ se suman al siguiente 7, $12 = 5 + 7$, luego 10 y así $22 = 10 + 12$, es decir, cada vez se va usando un elemento de la sucesión aritmética $4 + 3n$, es decir, que se fija 1 y se van sumando $4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, \cdots$ y así hasta infinito, de cada suma se obtiene un pentagonal. Es evidente que como la sucesión $4 + 3n$ tiene infinitos elementos, entonces la cantidad de números pentagonales también es un conjunto infinito.

Por otro lado, García y Martinón (1998) al referirse a los números poligonales señalan que "en un libro de Nicómaco de Gerasa del 100 D.C. se plantean descubrimientos aritméticos de los pitagóricos y según (Heath, 1981) se usa información sobre los poligonales".

En cuanto a la trascendencia e importancia de los números poligonales resulta que los mismos motivaron grandes descubrimientos de afamados matemáticos, entre los cuales se encuentran Fermat (teorema del número poligonal), Euler (teorema del número pentagonal), Lagrange (teorema de los cuatro cuadrados) y otros muchos teoremas entre los siglos XV y XIX.

Por otra parte, Temple Bell (1949, p.30) plantea el uso de los números poligonales y su aplicación a los seguros y a la estadística a través del análisis combinatorio, y en el primero por medio de la teoría matemática de probabilidades. Ortiz (2009. p.6) indica que los números poligonales son una excelente herramienta para involucrarse con la historia de los números y son útiles para el desarrollo de fórmulas que combinan procesos geométricos e inductivos". La importancia de lo dicho por este autor radica en que el estudio sistemático de los números poligonales no es algo relegado al pasado y permite conocer parte del legado matemático que nos viene de los griegos y el tiempo antiguo sigue siendo una fuente de inspiración para estimular nuestra creatividad y poder desarrollar nuevos estudios en el campo de las matemáticas.

En su blog, González (2021) afirma que los números poligonales han sido uno de los tópicos más atractivos para muchos matemáticos. Es decir, que dichos números forman parte de la historia de la Teoría de Números, como, por ejemplo, el Triángulo de Pascal. Además, el autor plantea su uso en Análisis Combinatorio y probabilidades y en el Binomio de Newton.

De la lectura de dicho blog se puede extraer la idea de que los números pitagóricos han sido un tema de interés que no ha pasado de moda a lo largo de los siglos y que debe ser un tópico matemático de análisis y un asunto de revisión permanente por sus secretos y su riqueza para personas que se dedican a las matemáticas y en especial a la teoría de números.

3. Números pentagonales

Como ya hemos dicho, entre los números poligonales hay una diversidad de números que van desde los triangulares y cuadrados hasta los octagonales, nonagonales y números con representaciones hasta de 20 o más lados. Sin embargo, este artículo se centra especialmente en los llamados pentagonales generalizados, pero para tratar acerca de ellos es necesario hablar de los pentagonales.

Los números pentagonales como su nombre lo indica son representables como pentágonos, es decir, figuras de cinco lados como se puede observar en la figura 1.

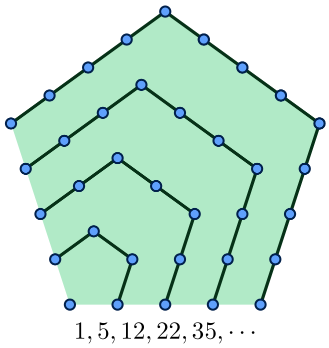

Figura 1: Los primeros números pentagonales. Elaboración propia.

Según Calmaestra (2020) y Roldán (2020) cada número pentagonal $p(n)$ está definido por la siguiente fórmula:

$$p(n) = \frac{n(3n-1)}{2} \text{ con } n \geq 1. \tag{1}$$

Al hacer una lista de los números pentagonales al usar la ecuación (1) para los valores de $n \geq 1$ con $n \in \mathbb{N}$, se obtendría que los primeros números pentagonales (Neil, s.f.a), los cuales se muestran en la tabla 1.

Tabla 1: Los primeros 14 números generalizados. Fuente: Elaboración propia.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Pg(n)	1	2	5	7	12	15	22	26	35	40	51	57	70	77

La escuela pitagórica fue un grupo de matemáticos encabezados por Pitágoras en Grecia y actualmente son reconocidos como iniciadores de la matemática formal y de otros aspectos científicos relacionados con la música, la geometría, la numerología y un misticismo religioso impresionante. En relación a lo anterior Kline (1992, p.18) indica que "antes de que entraran en escena los griegos de la época clásica, que va más o menos del 600 al 300 a. C todavía la matemática, no era una disciplina bien organizada".

En líneas generales, se debe mucho del avance de la ciencia en general a la matemática y a la filosofía griega que llevaron a una elevación del pensamiento en torno a asuntos de la vida diaria que desembocaron en el surgimiento definitivo de la ciencia como una forma de explicación de los diversos fenómenos que nos rodean.

$$\begin{aligned}&1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210, 247, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296,\\&297, 298, 299, 300, 330, 376, 425, 477, 532, 590, 651, 715, 782, 852, 925, 1001, 1080, 1162, 1247, 1335,\\&1426, 1520, 1617, 1717, 1820, 1926, 2035, 2147, 2262, 2380, 2501, 2625, 2752, 2882, 3015, 3151, 3290,\\&3432, 3577, 3725, \cdots\end{aligned}$$

Es interesante, que, respecto a la formación de los pentagonales, Jon Perry (2004) y Roldán (2020) si se considera $p(n)$ a los pentagonales, cada $p(n)$ es la suma de n números enteros consecutivos a partir de n, es decir, $p(1) = 1$, $p(2) = 2 + 3 = 5$, $p(3) = 3 + 4 + 5 = 12$, $p(4) = 4 + 5 + 6 + 7 = 22$, $p(5) = 5+6+7+8+9 = 35$, entre otros, es decir, "el pentagonal de orden n es la suma de n números enteros consecutivos que comienzan en n". Lo indicado por dichos autores es expresable por medio de la fórmula:

$$p(n) = \sum_{k=n}^{2n-1} k \tag{2}$$

Por ejemplo, de la fórmula anterior se puede ver que:

$$p(4) = \sum_{k=4}^{7} k = 4+5+6+7 = 22$$

y

$$p(5) = \sum_{k=5}^{9} k = 5+6+7+8+9 = 35$$

Al detallar los números respecto a sus posiciones pares e impares tomando en cuenta sus valores uno puede percatarse que la ecuación 1 puede escribirse considerando posiciones pares e impares en las formas de las ecuaciones 3 y 4:

$$p(2k) = k(6k-1). \tag{3}$$

Además, surge la ecuación 4 para los pentagonales de posiciones impares la cual es:

$$p(2k-1) = (2k-1)(3k-2) \tag{4}$$

Las demostraciones de las ecuaciones 3 y 4 por su trivialidad se deja como una nota para el lector, ya que basta cambiar $n = 2k$ y $n = 2k+1$ respectivamente. Para las ecuaciones 3 y 4 si se desarrollan los primeros términos se obtienen los números:

$$\begin{array}{ll}
p(1) = (1)(1) = 1, & p(2) = (1)(5) = 5, \\
p(3) = (3)(4) = 12, & p(4) = (2)(11) = 22, \\
p(5) = (5)(7) = 35, & p(6) = (3)(17) = 51, \\
p(7) = (7)(10) = 70, & p(8) = (4)(23) = 92, \\
p(9) = (9)(13) = 117, & p(10) = (5)(29) = 145.
\end{array}$$

Y se puede ver la efectividad de las fórmulas 3 y 4 anterior para la generación de los números pentagonales, ya que la ecuación 4 genera las posiciones impares en la columna izquierda y la ecuación 3 genera las posiciones pares de la columna derecha sin que se den errores o fallas.

4. Números pentagonales generalizados

Los números pentagonales generalizados se obtienen de la fórmula (1) dada anteriormente, pero con n tomando valores en la secuencia $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \cdots$, a partir de lo cual, algunos de los pentagonales generalizados pertenecen a la lista (Neil, s.f.b):

$$0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, 117, 126, 145, 155, 176, 187, 210, 222, 247, 260,$$
$$287, 301, 330, 345, 376, 392, 425, 442, 477, 495, 532, 551, 590, 610, 651, 672, 715, 737, 782, 805, 852,$$
$$876, 925, 950, 1001, 1027, 1080, 1107, 1162, 1190, 1247, 1276, 1335, \cdots$$

Los números pentagonales no deben confundirse con los números pentagonales centrados. Estos últimos, según Johari (2012), son números figurados centrados que representa un pentágono con un punto en el centro y todos los demás puntos que rodean el centro en capas pentagonales sucesivas. Cada número pentagonal centrado n viene dado por la fórmula:

$$P_c(n) = \frac{5n^2 + 5n + 2}{2}; \quad n \geq 0$$

Así, los primeros elementos de dicha sucesión son: $1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, 141, 181$, lo que contraste con los números pentagonales generalizados mostrados anteriormente.

Los números pentagonales generalizados son importantes para la teoría de las particiones de Euler, como se expresa en su teorema del número pentagonal . Al respecto, en 1750, Euler probó el siguiente teorema denominado números pentagonales de Euler.

Teorema 1 Números pentagonales de Euler

Los números pentagonales de Euler, corresponden a aquellos de la forma:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{k(3k-1)}{2}} \tag{5}$$

Este teorema explica que la productoria de las diferencias de $1 - x^n$ siendo n cualquier exponente desde 1 en adelante con exponente entero y sin repeticiones es la serie alternante de las potencias de x donde los exponentes son números pentagonales generalizados en cada caso.

Dado un entero positivo x, para probar que es un pentagonal (no generalizado) podemos calcular:

$$n = \frac{\sqrt{24x+1}+1}{6} \tag{6}$$

Donde el número x es pentagonal si y solo si n es un número natural. En ese caso, x es el n-ésimo número pentagonal.

Para demostrar la ecuación 6, se considera el hecho de que x es pentagonal, trabajemos a partir de la ecuacion 6 sustituyendo el valor de x en la parte derecha de la igualdad. La fórmula de x pentagonal es:

$$x = \frac{n(3n-1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{i}$$

Entonces, sustituyendo i en la parte derecha de 6 tenemos:

$$\frac{\sqrt{24\frac{n(3n-1)}{2}+1}+1}{6}$$

Al desarrollar las expresiones queda:

$$\frac{\sqrt{24\frac{n(3n-1)}{2}+1}+1}{6} = \frac{\sqrt{12n(3n-1)+1}+1}{6}$$
$$\frac{\sqrt{36n^2-12n+1}+1}{6} = \frac{\sqrt{(6n-1)^2}+1}{6} = \frac{6n-1+1}{6} = \frac{6n}{6} = n$$

Entonces, se llega a la parte izquierda de 6, es decir, se verifica la igualdad lo que demuestra que la ecuación 6 es válida para x cualquier pentagonal. En relación a las pruebas para determinar si los números son pentagonales o pentagonales generalizados, Kapoor (2012) afirma que para números pentagonales generalizados, basta con comprobar si $24x + 1$ es un cuadrado perfecto. En efecto si x cumple con la prueba generando un cuadrado perfecto es de hecho un número pentagonal generalizado.

La idea es probar que la expresión $24x + 1$ para cualquier x un pentagonal generalizado es siempre un cuadrado. En forma similar a lo anterior partiendo de i tenemos que la expresión $24x + 1$ se puede reescribir como:

$$24x+1 = 24\frac{n(3n-1)}{2}+1 = 12n(3n-1)+1 = 36n^2-12n+1$$

$$24x+1 = (6n-1)^2 \tag{7}$$

Se puede ver que para todo pentagonal se obtiene un número cuadrado de base $(6n-1)$. Según Kapoor (2012) Las propiedades de los números pentagonales aseguran que estas pruebas sean suficientes para probar o refutar la pentagonalidad de un número (pag.1)

En relación a los números pentagonales generalizados es preciso señalar que los mismos son el doble más abundantes que los pentagonales, ya que entre cada dos pentagonales se genera un nuevo pentagonal en una posición que queda par, lo cual indica que si hay n números pentagonales entonces habría $2n-1$ pentagonales generalizados. Esto es obvio al considerar que los pentagonales generalizados de posiciones impares corresponden a los pentagonales y esto se cumple hasta contextos infinitos. Veamos unos ejemplos:

- Si enumeramos los primeros 5 números pentagonales generalizados: $1, 2, 5, 7$ y 12 tenemos que los números pentagonales son $1, 5$ y 12, o sea hay $n = 3$ números pentagonales. Si aplicamos la fórmula anterior, vemos que en efecto hay $2n - 1 = 2(3) - 1 = 5$ pentagonales generalizados.
- Sí se enlistan los primeros 11 números pentagonales generalizados $1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40$ y 51 se tiene que los números pentagonales son $1, 5, 12, 22, 35$ y 51, es decir, hay $n = 6$ números pentagonales y se tienen $2n - 1 = 2(6) - 1 = 11$ pentagonales generalizados.
- Similarmente, en la lista $1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77, 92, 100, 117, 126$ y 145 hay $n = 10$ números pentagonales y hay un total de $2n-1 = 2(10)-1 = 19$ pentagonales generalizados.

5. Resultados

5.1. Propiedades de los pentagonales generalizados

A continuación, se presentan un conjunto de propiedades que han sido halladas a partir del estudio personal de los números pentagonales generalizados tomando en consideración detalles relacionados con los números pentagonales, los números triangulares y cuadrados, pero que también tienen que ver con varias sucesiones, números cúbicos, entre otros tipos de números. En ellas se muestran algunos elementos relacionados con algunas fórmulas de autores citados, ya que las mismas contienen elementos útiles para desarrollar propiedades de la presente investigación.

5.1.1. Propiedad 1: Adaptación de la fórmula de Jon Perry

La fórmula de Jon Perry (2004), es interesante en cuanto a la forma de expresar cada pentagonal generalizado como sumas a similitud de cómo lo hacia el autor para los números pentagonales. En efecto, de lo expresado en la fórmula (2) por dicho autor puede observarse que los números pentagonales generalizados de posiciones impares corresponden a los números pentagonales usuales, mientras que los pentagonales generalizados de posiciones pares son nuevas inserciones en el grupo de los pentagonales, (para ello vea la diferencia entre los números presentados en Neil s.f.a y Neil s.f.b) de manera que de acuerdo a lo expresado por el autor citado se pueden expresar los números pentagonales generalizados en la siguiente forma:

$$Pg(n) = \begin{cases} Pg(2n-1) = \sum_{n=1}^{2n-1} n, & \text{con } n \geq 1 \quad (8a) \\ Pg(2n) = n + Pg(2n-1), & \text{con } n \geq 1 \quad (8b) \end{cases}$$

De esta forma, se puede apreciar la fórmula de Perry es mejorada en la ecuaciones 8a y 8b para obtener la expresión de todos los números pentagonales generalizados. Se habla de mejora de la fórmula de Perry porque este investigador sugirió calcular los números pentagonales por medio de una suma de naturales consecutivos a partir del índice, es decir, $a(3) = 3 + 4 + 5 = 12$, se comienza en 3 y se cuentan 3 números que son $3, 4$ y 5, pero en el caso de $a(50)$ deben sumarse 50 naturales consecutivos partiendo de 50 hasta 99, lo cual es mucho trabajo, por el contrario, dado que 50 es par se puede usar la ecuación 8b.

Entonces, los pentagonales tienen fórmula $\frac{n(3n-1)}{2}$, que genera las posiciones impares de los pentagonales generalizados. Para ellos las posiciones pares pueden hallarse a partir de la fórmula anterior tomando la ecuación 8a:

$$Pg(2n-1) = \frac{n(3n-1)}{2}, \text{ con } n \geq 1 \tag{9}$$

Ya que los pentagonales generalizados en posiciones impares corresponden a los pentagonales y esta es su fórmula según la ecuación 1 y sustituyendo la ecuación 9 en 8b se obtiene que:

$$Pg(2n) = n + \frac{n(3n-1)}{2} = n + \frac{3n^2-n}{2} = \frac{2n+3n^2-n}{2} = \frac{3n^2+n}{2}$$

De manera que en base a lo anterior podemos reescribir las ecuaciones 8a y 8b y como:

$$Pg(n) = \begin{cases} Pg(2n-1) = \dfrac{3n^2-n}{2}, \text{ con } n \geq 1 & (10a) \\ Pg(2n) = \dfrac{3n^2+n}{2}, \text{ con } n \geq 1 & (10b) \end{cases}$$

Para hablar de las propiedades de los números pentagonales generalizados es necesario tener muy presente los números triangulares (ver tabla 2), ya que los mismos son los números poligonales fundamentales y en este estudio se observa la importancia de estos números en el desarrollo de propiedades de pentagonales generalizados.

Tabla 2: Los primeros 14 números triangulares. Fuente: Elaboración propia.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T(n)	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105

5.1.2. Propiedad 2: Pentagonales generalizados de posiciones impares

Las posiciones impares de los números pentagonales generalizados se obtienen de dividir los triangulares en la posición $3n+2$ entre 3. Entonces tomando las posiciones $2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \cdots, 3n+2$ los pentagonales generalizados impares son:

$$Pg(2n-1) = \frac{T(3n-1)}{3}, \text{ con } n \geq 1 \tag{11}$$

Una forma prácticamente análoga a la ecuación anterior es la expresión:

$$Pg(2n+1) = \frac{T(3n+2)}{3}, \text{ con } n \geq 0 \tag{12}$$

Es preciso señalar que al evaluar las ecuaciones 11 y 12 son dos expresiones generadoras de los mismos resultados. La diferencia entre ambas estriba en que una trabaja desde $n = 1$ y la otra desde $n = 0$

respectivamente. Algunos ejemplos son:

$$Pg(1) = \frac{T(2)}{3} = \frac{3}{3} = 1,$$
$$Pg(3) = \frac{T(5)}{3} = \frac{15}{3} = 5,$$
$$Pg(5) = \frac{T(8)}{3} = \frac{36}{3} = 12,$$
$$Pg(7) = \frac{T(11)}{3} = \frac{66}{3} = 22,$$

Y lo antes planteado se cumple para todos los pentagonales generalizados de posiciones impares.

Para demostrar la propiedad 5.1.2, es sabido que por la ecuación 10a que $Pg(2n-1) = \frac{3n^2-n}{2}$, y la fórmula de triangular de n es $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$T(3n-1) = \frac{(3n-1)(3n)}{2} = \frac{9n^2-3n}{2}$$

Entonces, tenemos que:

$$\frac{T(3n-1)}{3} = \frac{(3n-1)(3n)}{6} = \frac{3n^2-n}{2}$$

Y es evidente que la propiedad 5.1.2 se cumple, ya que la parte derecha de la igualdad genera el mismo resultado de la parte izquierda para cualquier valor de n que se tome.

5.1.3. Propiedad 3: Pentagonales generalizados de posiciones pares

Las posiciones pares de los números pentagonales generalizados se obtienen de dividir los triangulares en la posición $3n$ entre 3 entonces tomando las posiciones $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, \cdots, 3n$, los pentagonales generalizados pares son:

$$Pg(2n) = \frac{T(3n)}{3}, \text{ con } n \geq 1 \tag{13}$$

Así, se tienen:

$$Pn(2) = \frac{T(3)}{3} = \frac{6}{3} = 2,$$
$$Pn(4) = \frac{T(6)}{3} = \frac{21}{3} = 7,$$
$$Pn(6) = \frac{T(9)}{3} = \frac{45}{3} = 15,$$
$$Pn(8) = \frac{T(12)}{3} = \frac{78}{3} = 26,$$

Y lo antes planteado se cumple para todos los pentagonales generalizados en posiciones pares.

Para demostrar la propiedad 5.1.3, es sabido que por las ecuaciones 10a y 10b que $Pg(2n) = \frac{3n^2+n}{2}$, y la formula de triangular de n es $T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$T(3n) = \frac{(3n)(3n+1)}{2} = \frac{9n^2+3n}{2}$$

Entonces, tenemos que:

$$\frac{T(3n)}{3} = \frac{(3n)(3n+1)}{6} = \frac{3n^2+n}{2}$$

Y es evidente que la propiedad 5.1.3 se cumple, ya que la parte derecha de la igualdad genera el mismo resultado de la parte izquierda para cualquier valor de n que se tome.

Observe algo importante: si se ordenan los valores obtenidos en la propiedad 5.1.2 y propiedad 5.1.3 obtenemos exactamente la sucesión $1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, \cdots$ la cual corresponde a los pentagonales generalizados.

Nota: Como se puede ver al descartar en los triangulares los que tienen posición 3n+1 y dividir los restantes entre 3 se van obteniendo todos los números pentagonales generalizados. Lo antes dicho sería tomar la sucesión de triangulares y no considerar las posiciones $3n + 1$, es decir, se descartan $T(1), T(4), T(7), T(10), T(13)$ y todas las demás posiciones que se obtengan sumando cada vez 3 (ver Tabla 3).

Tabla 3: Obtención de pentagonales a partir de triangulares Fuente: Elaboración propia.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$T(n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171
$Pg(n)$	*	$\frac{3}{3}$	$\frac{6}{3}$	*	$\frac{15}{3}$	$\frac{21}{3}$	*	$\frac{36}{3}$	$\frac{45}{3}$	*	$\frac{66}{3}$	$\frac{78}{3}$	*	$\frac{105}{3}$	$\frac{120}{3}$	*	$\frac{153}{3}$	$\frac{171}{3}$
$Pg(n)$		1	2		5	7		12	15		22	26		35	40		51	57

5.1.4. Propiedad 4: Cuadrados de la sucesión 3n

El séxtuple de los pentagonales impares más un número 3n es el cuadrado de dicho número $3n$

$$6Pg(2n-1) + 3n = (3n)^2, \quad n \geq 1 \tag{14}$$

Los pentagonales generalizados son impares son: $1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, \cdots$.

Para $n = 1 \rightarrow 6Pg(1) + 3(1) = 6(1) + 3(1) = 9 = 3^2$.

Para $n = 2 \rightarrow 6Pg(3) + 3(2) = 6(5) + 3(2) = 36 = 6^2$.

Para $n = 3 \rightarrow 6Pg(5) + 3(3) = 6(12) + 3(3) = 81 = 9^2$.

Para $n = 4 \rightarrow 6Pg(7) + 3(4) = 6(22) + 3(4) = 144 = 12^2$.

Para la demostración de la propiedad 5.1.4, tenemos que por un simple despeje podemos ver que:

$$\begin{aligned}
6Pg(2n-1) + 3n &= (3n)^2 \\
6Pg(2n-1) + 3n &= 9n^2 \\
Pg(2n-1) &= \frac{9n^2 - 3n}{6} \\
Pg(2n-1) &= \frac{3n^2 - n}{2}
\end{aligned}$$

Y queda la ecuación 10a lo que indica que se verifica la igualdad.

5.1.5. Propiedad 5: Cuadrados de la sucesión 3n+1

El séxtuple de los pentagonales impares más un número 3n es el cuadrado de dicho número $3n$:

$$6Pg(2n) + 3n + 1 = (3n + 1)^2, \quad n \geq 1 \tag{15}$$

Los pentagonales generalizados son impares son: $2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, \cdots$.

Para $n = 1 \rightarrow 6Pg(2) + 3(1) + 1 = 6(2) + 3(1) + 1 = 16 = 4^2$.

Para $n = 2 \rightarrow 6Pg(4) + 3(2) + 1 = 6(7) + 3(2) + 1 = 49 = 7^2$.

Para $n = 3 \rightarrow 6Pg(6) + 3(3) + 1 = 6(15) + 3(3) + 1 = 100 = 10^2$.

Para $n = 4 \rightarrow 6Pg(8) + 3(4) + 1 = 6(26) + 3(4) + 1 = 169 = 13^2$.

Para demostrar la propiedad 5.1.5, por un simple despeje podemos ver que:

$$\begin{aligned}
6Pg(2n) + 3n + 1 &= (3n + 1)^2 \\
6Pg(2n) &= 9n^2 + 6n + 1 - 3n - 1 \\
Pg(2n) &= \frac{9n^2 + 3n}{6} \\
Pg(2n) &= \frac{3n^2 + n}{2}
\end{aligned}$$

Y queda la ecuación 10b lo que indica que se verifica la igualdad.

5.1.6. Propiedad 6: Fórmula para pentagonales generalizados

De la propiedad 5.1.4 despejamos el pentagonal generalizado impar partiendo de la ecuación 15:

$$\begin{aligned}
6Pg(2n - 1) + 3n &= (3n)^2, \text{ con } n \geq 1 \\
6Pg(2n - 1) + 3n &= 9n^2, \text{ con } n \geq 1 \\
6Pg(2n - 1) &= 9n^2 - 3n, \text{ con } n \geq 1 \\
Pg(2n - 1) &= \frac{9n^2 - 3n}{6}, \text{ con } n \geq 1 \\
Pg(2n - 1) &= \frac{3n^2 - n}{2}, \quad n \geq 1 \qquad (16)
\end{aligned}$$

De la propiedad 5.1.5 despejamos el pentagonal generalizado par partiendo de la eacuación 15:

$$\begin{aligned}
6Pg(2n) + 3n + 1 &= (3n + 1)^2, \text{ con } n \geq 1 \\
6Pg(2n) + 3n + 1 &= 9n^2 + 6n + 1, \text{ con } n \geq 1 \\
6Pg(2n) &= 9n^2 + 3n, \text{ con } n \geq 1 \\
Pg(2n) &= \frac{9n^2 + 3n}{6}, \text{ con } n \geq 1 \\
Pg(2n) &= \frac{3n^2 + n}{2}, \text{ con } n \geq 1 \qquad (17)
\end{aligned}$$

Otra forma de expresar los números pentagonales generalizados es la que se muestra usando el doble signo como se muestra a continuación:

$$Pg(n) = \frac{3n^2 \mp n}{2}, \text{ con } n \geq 1 \tag{18}$$

Evaluando dos veces cada valor de n, primero con el signo negativo y luego con el signo positivo

Nota: Puede verse que la ecuación 18 es la misma que la unión de las ecuaciones 10a y 10b y es mucho más práctica que la conocida para pentagonales generalizados (ecuación 1) que trabaja con valores positivos y negativos con n tomando valores en la secuencia $[0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \cdots]$. Por otra parte, se relaciona con la propiedad 5.1.1. Se puede ver que el uso de la propiedad 5.1.4, y la propiedad 5.1.5 conduce a la propiedad 5.1.6 que permite evidenciar que por 2 caminos muy diferentes se llega al mismo resultado.
Otra ventaja de la ecuación 18 es que solamente se trabaja con los números naturales evaluando para ambos signos con cada valor (primero el negativo y luego el positivo).

5.1.7. Propiedad 7: Tres veces un cuadrado

Tomando de dos en dos pentagonales (sin repetir), la suma de ellos siempre es un cuadrado de un número de la forma 3n (3, 6, 9, 12, 15, ...), pero es exactamente 3 veces el cuadrado de cada uno de los naturales.

$$Pg(2n) + Pg(2n-1) = 3(n)^2, \text{ con } n \geq 1 \tag{19}$$

Para demostrar de la propiedad 5.1.7, se usan las expresiones 3 y 4, así tenemos que:

$$\begin{aligned}
Pg(2n) + Pg(2n-1) &= \frac{3n^2+n}{2} + \frac{3n^2-n}{2} \\
Pg(2n) + Pg(2n-1) &= \frac{3n^2+n+3n^2-n}{2} \\
Pg(2n) + Pg(2n-1) &= 3n^2
\end{aligned}$$

Entonces queda demostrada la propiedad 5.1.7.

Nota: La propiedad 5.1.7 puede enunciarse en la siguiente forma: "La suma de cada par de pentagonales generalizados (sin repetir elementos) es siempre el triple de un cuadrado y dicho cuadrado tiene por base la resta de los dos pentagonales". Así, tenemos como ejemplo:

$$\begin{aligned}
1+2 &= 3 = 3(2-1)^2 \\
5+7 &= 12 = 3(7-5)^2 \\
12+15 &= 27 = 3(15-12)^2 \\
22+26 &= 48 = 3(26-22)^2 \\
35+40 &= 75 = 3(40-35)^2
\end{aligned}$$

Nota: La suma de cada par de pentagonales generalizados (sin repetir elementos) es siempre el triple de un cuadrado y dicho cuadrado es igual al cuadrado del número del par.

5.1.8. Propiedad 8: Diferencia de cuadros de los pares de pentagonales generalizados.

La diferencia de cuadrados de cada par de números pentagonales, (sin repetir) es el triple de un cubo.

$$\frac{[Pg(2n)^2 - Pg(2n-1)^2]}{3} = (n)^3, \text{ con } n \geq 1 \tag{20}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
\frac{2^2 - 1^2}{3} &= 1 = 1^3 \\
\frac{7^2 - 5^2}{3} &= 8 = 2^3 \\
\frac{15^2 - 12^2}{3} &= 27 = 3^3 \\
\frac{26^2 - 22^2}{3} &= 64 = 4^3
\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 5.1.8, se usan las expresiones 3 y 4 tenemos que:

$$\begin{aligned}
Pg(2n)^2 - Pg(2n-1)^2 &= \left[\frac{3n^2+n}{2}\right]^2 - \left[\frac{3n^2-n}{2}\right]^2 \\
Pg(2n)^2 - Pg(2n-1)^2 &= \frac{9n^4 + 6n^3 + n^2 - 9n^4 + 6n^3 - n^2}{4} \\
Pg(2n)^2 - Pg(2n-1)^2 &= \frac{12n^3}{4} \\
Pg(2n)^2 - Pg(2n-1)^2 &= 3n^3
\end{aligned}$$

Entonces, queda demostrada la propiedad 8 pues es fácil ver de lo anterior que:

$$\frac{[Pg(2n)^2 - Pg(2n-1)^2]}{3} = (n)^3$$

5.1.9. Propiedad 9: Pentagonales generalizados pares a partir de los impares

Todo pentagonal de posición impar más su posición genera el pentagonal par siguiente:

$$Pg(2n-1) + n = Pg(2n), con \quad n \geq 1 \tag{21}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
Pg(1) = 1 &\rightarrow Pg(1) + 1 = Pg(2) \rightarrow 1 + 1 = 2 \\
Pg(3) = 5 &\rightarrow Pg(3) + 2 = Pg(4) \rightarrow 5 + 2 = 7 \\
Pg(5) = 12 &\rightarrow Pg(5) + 3 = Pg(6) \rightarrow 12 + 3 = 15 \\
Pg(7) = 22 &\rightarrow Pg(7) + 4 = Pg(8) \rightarrow 22 + 4 = 26 \\
Pg(9) = 35 &\rightarrow Pg(9) + 5 = Pg(10) \rightarrow 35 + 5 = 40
\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 5.1.9, Usando $Pg(2n-1) = dfrac3n^2 - n2$ y sustituyendo en la parte izquierda de la igualdad nos queda:

$$\begin{aligned}
Pg(2n-1)+n &= \frac{3n^2-n}{2}+n \\
Pg(2n-1)+n &= \frac{3n^2-n+2n}{2} \\
Pg(2n-1)+n &= \frac{3n^2+n}{2}
\end{aligned}$$

Pero los pentagonales generalizados de posición par según la ecuación 17 es:

$$Pg(2n) = \frac{3n^2+n}{2}$$

Entonces sustituyendo queda:

$$Pg(2n-1)+n = Pg(2n)$$

Así queda demostrada la propiedad 5.1.9.

5.1.10. Propiedad 10: Pentagonales generalizados impares a partir de los pares

Todo pentagonal de posición par más su posición aumentada en 1 genera el pentagonal impar siguiente:

$$Pg(2n)+2n+1 = Pg(2n+1), \text{ con } \geq 1 \tag{22}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
Pg(2) = 2 &\to Pg(2)+3 = Pg(3) \to 2+3 = 5 \\
Pg(4) = 7 &\to Pg(4)+5 = Pg(5) \to 7+5 = 12 \\
Pg(6) = 15 &\to Pg(6)+7 = Pg(7) \to 15+7 = 22 \\
Pg(8) = 26 &\to Pg(8)+9 = Pg(9) \to 26+9 = 35 \\
Pg(10) = 40 &\to Pg(10)+11 = Pg(11) \to 40+11 = 51
\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 5.1.10, se usa $Pg(2n) = \dfrac{3n^2+n}{2}$ y sustituyendo en la parte izquierda de la igualdad nos queda:

$$\begin{aligned}
Pg(2(n+1)-1) &= \frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2} \\
Pg(2n+2-1) &= \frac{3n^2+6n+3-(n+1)}{2} \\
Pg(2n+1) &= \frac{3n^2+5n+2}{2} \qquad \text{(p10.1)}
\end{aligned}$$

Para obtener a partir de $Pg(2n-1)$ el valor $Pg(2n+1)$ basta con cambiar n por n+1. En efecto, nos queda:

$$\begin{aligned}
Pg(2(n+1)-1) &= \frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2} \\
Pg(2n+2-1) &= \frac{3n^2+6n+3-(n+1)}{2} \\
Pg(2n+1) &= \frac{3n^2+5n+2}{2} \qquad \text{(p10.2)}
\end{aligned}$$

De las ecuaciones p10.1 y p10.2 es evidente que:

$$Pg(2n) + n = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = Pg(2n + 1)$$

Así queda demostrada la propiedad 5.1.10

5.1.11. Propiedad 11: Propiedad iterativa de pentagonales generalizados pares

Sean $Pg(2) = 2$ y $Pg(4) = 7$ entonces para generar las siguientes posiciones pares se puede usar la expresión:

$$Pg(6 + 2n) = 2Pg(4 + 2n) - Pg(2 + 2n) + 3; \quad n \geq 0 \tag{23}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
n = 0 \to Pg(6) =& 2Pg(4) - Pg(2) + 3 = 2(7) - 2 + 3 = 15\\
n = 1 \to Pg(8) =& 2Pg(6) - Pg(4) + 3 = 2(15) - 7 + 3 = 26\\
n = 2 \to Pg(10) =& 2Pg(8) - Pg(6) + 3 = 2(26) - 15 + 3 = 40\\
n = 3 \to Pg(12) =& 2Pg(10) - Pg(8) + 3 = 2(40) - 26 + 3 = 57\\
n = 4 \to Pg(14) =& 2Pg(12) - Pg(10) + 3 = 2(57) - 40 + 3 = 77
\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 5.1.11, por fórmula tenemos que:

$$Pg(2n) = \frac{3n^2 + n}{2} \tag{24}$$

Para obtener a partir de $Pg(2n)$ el valor $Pg(2n+2)$ basta con cambiar n por $n+1$. En efecto, tomando la fórmula 24 nos queda:

$$\begin{aligned}
Pg(2(n + 1)) =& \frac{3(n + 1)^2 + (n + 1)}{2}\\
Pg(2n + 2) =& \frac{3n^2 + 6n + 3 + (n + 1)}{2}\\
Pg(2n + 2) =& \frac{3n^2 + 7n + 4}{2}
\end{aligned} \tag{25}$$

De forma similar $Pg(2n + 4)$ se obtiene de la fórmula 24 cambiando n por $n + 2$ entonces

$$\begin{aligned}
Pg(2(n + 2)) =& \frac{3(n + 2)^2 + (n + 2)}{2}\\
Pg(2n + 4) =& \frac{3n^2 + 12n + 12 + (n + 2)}{2}\\
Pg(2n + 4) =& \frac{3n^2 + 13n + 14}{2}
\end{aligned} \tag{26}$$

Del mismo modo $Pg(2n + 6)$ se obtiene de la fórmula 24 cambiando n por $n + 3$ entonces

$$\begin{aligned} Pg(2(n+3)) =& \frac{3(n+3)^2+(n+3)}{2} \\ Pg(2n+6) =& \frac{3n^2+18n+27+(n+3)}{2} \\ Pg(2n+6) =& \frac{3n^2+19n+30}{2} \end{aligned} \tag{27}$$

Ahora bien, para demostrar la propiedad se parte del lado derecho de la igualdad sustituyendo los valores encontrados para las ecuaciones 25 y 26. Entonces nos queda:

$$\begin{aligned} 2Pg(4+2n)-Pg(2+2n)+3 &= 2\left[\frac{3n^2+13n+14}{2}\right]-\frac{3n^2+7n+4}{2}+3 \\ 2Pg(4+2n)-Pg(2+2n)+3 &= \frac{6n^2+26n+28-3n^2-7n-4+6}{2} \\ 2Pg(4+2n)-Pg(2+2n)+3 &= \frac{(6-3)n^2+(26-7)n+(28-4+6)}{2} \\ 2Pg(4+2n)-Pg(2+2n)+3 &= \frac{3n^2+19n+30}{2} \end{aligned}$$

Se puede apreciar que el último resultado corresponde a la expresión 27 con lo cual es evidente el cumplimiento de la propiedad 5.1.11, es decir, que se cumple que

$$2Pg(4+2n)-Pg(2+2n)+3 = Pg(6+2n), \quad n \geq 0$$

5.1.12. Propiedad 12: Propiedad iterativa de pentagonales generalizados impares

Sean $Pg(1) = 1$ y $Pg(3) = 5$ entonces para generar las siguientes posiciones pares se puede usar la expresión:

$$Pg(5+2n) = 2Pg(3+2n) - Pg(1+2n) + 3; \quad n \geq 0 \tag{28}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} n=0 \to Pg(5) =& 2Pg(3)-Pg(1)+3 = 2(5)-1+3 = 12 \\ n=1 \to Pg(7) =& 2Pg(5)-Pg(3)+3 = 2(12)-5+3 = 22 \\ n=2 \to Pg(9) =& 2Pg(7)-Pg(5)+3 = 2(22)-12+3 = 35 \\ n=3 \to Pg(11) =& 2Pg(9)-Pg(7)+3 = 2(35)-22+3 = 51 \\ n=4 \to Pg(13) =& 2Pg(11)-Pg(9)+3 = 2(51)-35+3 = 70 \end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 5.1.12, por fórmula tenemos que:

$$Pg(2n-1) = \frac{3n^2-n}{2} \tag{29}$$

Para obtener a partir de $Pg(2n-1)$ el valor $Pg(2n+1)$ basta con cambiar n por $n+1$. En efecto, nos queda:

$$\begin{aligned} Pg(2(n+1)-1) =& \frac{3(n+1)^2-(n+1)}{2} \\ Pg(2n+2-1) =& \frac{3n^2+6n+3-(n+1)}{2} \\ Pg(2n+1) =& \frac{3n^2+5n+2}{2} \end{aligned} \tag{30}$$

De forma similar $Pg(2n+3)$ se obtiene de la ecuación 29 cambiando n por $n+2$ entonces

$$\begin{aligned}
Pg(2(n+2)-1) =& \frac{3(n+2)^2-(n+2)}{2} \\
Pg(2n+4-1) =& \frac{3n^2+12n+12-(n+2)}{2} \\
Pg(2n+3) =& \frac{3n^2+11n+10}{2}
\end{aligned} \tag{31}$$

Del mismo modo $Pg(2n+5)$ se obtiene de la ecuación 29 cambiando n por $n+3$ entonces

$$\begin{aligned}
Pg(2(n+3)-1) =& \frac{3(n+3)^2-(n+3)}{2} \\
Pg(2n+6-1) =& \frac{3n^2+18n+27-(n+3)}{2} \\
Pg(2n+5) =& \frac{3n^2+17n+24}{2}
\end{aligned} \tag{32}$$

Ahora bien, para demostrar la propiedad se parte del lado derecho de la igualdad sustituyendo los valores encontrados para las ecuaciones 30 y 31. Entonces nos queda:

$$\begin{aligned}
2Pg(3+2n)-Pg(1+2n)+3 =& 2\left[\frac{3n^2+11n+10}{2}\right]-\frac{3n^2+5n+2}{2}+3 \\
2Pg(3+2n)-Pg(1+2n)+3 =& \frac{6n^2+22n+20-3n^2-5n-2+6}{2} \\
2Pg(3+2n)-Pg(1+2n)+3 =& \frac{(6-3)n^2+(22-5)n+(20-2+6)}{2} \\
2Pg(3+2n)-Pg(1+2n)+3 =& \frac{3n^2+17n+24}{2}
\end{aligned}$$

Se puede apreciar que el último resultado corresponde a la expresión 32 con lo cual es evidente el cumplimiento de la propiedad 5.1.12, es decir, que se cumple que

$$2Pg(3+2n)-Pg(1+2n)+3 = Pg(5+2n), n \geq 0$$

5.1.13. Propiedad 13: Cocientes de la sucesión 3n

Todo suma de un par de pentagonales (sin repeticiones) es divisible entre el número del par. La sucesión de los cocientes que se obtienen de dicho proceso es 3n con $n > 0$. En efecto:

$$\frac{[Pg(2n)+Pg(2n-1)]}{n} = 3n, \text{ con } n \geq 1 \tag{33}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1+2}{1} = 3, \\
&\frac{5+7}{2} = 6, \\
&\frac{12+15}{3} = 9, \\
&\frac{22+26}{3} = 12
\end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Para demostrar la propiedad 5.1.13 se usan las expresiones 3 y 4 tenemos que:

$$\begin{aligned}
Pg(2n) + Pg(2n-1) &= \left[\frac{3n^2+n}{2}\right] + \left[\frac{3n^2-n}{2}\right] \\
Pg(2n) + Pg(2n-1) &= 3n^2 \\
Pg(2n) + Pg(2n-1) &= 3n \cdot n
\end{aligned}$$

Entonces queda demostrada la propiedad 5.1.13 al pasar dividiendo n como sigue:

$$\frac{[Pg(2n) + Pg(2n-1)]}{n} = 3n$$

5.1.14. Propiedad 14: Cuadrados de pares 1

Los pentagonales generalizados para las posiciones impares cumplen que su doble producto más el oblongo para cada valor de n generan el cuadrado de los pares.

$$2Pg(2n-1) + (n+1)(n) = (2n)^2, \quad \forall n \geq 1 \tag{34}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
2(1) + 2(1) &= 4 = 2^2 \\
2(5) + 3(2) &= 16 = 4^2 \\
2(12) + 4(3) &= 36 = 6^2 \\
2(22) + 5(4) &= 64 = 8^2 \\
2(35) + 6(5) &= 100 = 10^2
\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 5.1.14, Basta verificar que al despejar $Pg(2n-1)$ se obtiene una igualdad. En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
2Pg(2n-1) + (n+1)(n) &= (2n)^2 \\
2Pg(2n-1) &= (2n)^2 - (n+1)(n) \\
2Pg(2n-1) &= 4n^2 - n^2 - n \\
\\
2Pg(2n-1) &= 3n^2 - n \\
Pg(2n-1) &= \frac{3n^2-n}{2}
\end{aligned}$$

5.1.15. Propiedad 15: Cuadrado de pares 2

Los pentagonales generalizados para las posiciones pares cumplen que su doble producto más el oblongo de la posición n-1 genera el cuadrado de la misma posición par del pentagonal

$$2Pg(2n) + (n)(n-1) = (2n)^2, \forall n \geq 1 \tag{35}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
&2(2)+(1)(0)=4=2^2\\
&2(7)+(2)(1)=16=4^2\\
&2(15)+(3)(2)=36=6^2\\
&2(26)+(4)(3)=64=8^2\\
&2(40)+(5)(4)=100=10^2
\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 5.1.15, basta despejar $Pg(2n)$ de la expresión dada. En efecto, se puede ver que:

$$\begin{aligned}
2Pg(2n)+(n)(n-1)&=[(2n)]^2\\
2Pg(2n)&=[(2n)]^2-(n)(n-1)\\
2Pg(2n)&=4n^2-n^2+n\\
2Pg(2n)&=3n^2+n\\
Pg(2n)&=\frac{3n^2+n}{2}
\end{aligned}$$

Esta expresión corresponde a la ecuación 17. De esta forma queda demostrada la propiedad 5.1.15,

5.1.16. Propiedad 16: Cuadrado de pares 3

Al separar los números pentagonales generalizados en pares: par 1 $(1 \text{ y } 2)$, par 2 $(5 \text{ y } 7)$, par 3 $(12 \text{ y } 15)$, par 4 $(22 \text{ y } 26)$, par 5 $(35 \text{ y } 40)$ y continuar así con todos los pentagonales generalizados hasta infinito se cumple que:

$$\text{Suma}(\text{par}(n))+n^2=(2n)^2 \tag{36}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
&1+2+1^2=2^2\\
&5+7+2^2=4^2\\
&12+15+3^2=6^2\\
&22+26+4^2=8^2\\
&35+40+5^2=10^2
\end{aligned}$$

Para demostrar la propiedad 5.1.16, se tiene que la suma $(\text{par }(n))$ puede definirse como la suma de dos pentagonales generalizados en posiciones consecutivas, es decir, que puede expresarse:

$$\text{suma}(\text{par}(n))=Pg(2n)+Pg(2n-1)$$

Pero se sabe que:

$$Pg(2n)+Pg(2n-1)=\left[\frac{3n^2+n}{2}\right]+\left[\frac{3n^2-n}{2}\right]=3n^2$$

Es decir, que

$$\text{suma}(\text{par}(n))=3n^2$$

Entonces se puede expresar que:

$$\text{Suma}(\text{par}(n)) + n^2 = Pg(2n) + Pg(2n-1) + n^2$$
$$\text{Suma}(\text{par}(n)) + n^2 = \left[\frac{3n^2+n}{2}\right] + \left[\frac{3n^2-n}{2}\right] + n^2$$
$$\text{Suma}(\text{par}(n)) + n^2 = 3n^2 + n^2$$

Entonces es evidente que se cumple que:

$$\text{Suma}(\text{par}(n)) + n^2 = 4n^2$$

Entonces queda demostrado que se cumple la propiedad 5.1.16.

6. Conclusiones

El desarrollo de las propiedades aquí presentadas evidencia la capacidad creativa que permiten los números poligonales en general y que en este caso se particulariza al estudio de las propiedades de los pentagonales generalizados, lo cual es importante para el desarrollo de nuevas ecuaciones y expresiones matemáticas, que posteriormente pueden ser usadas desde la geometría, la teoría de números y otras áreas de la matemática para ver la belleza de las matemáticas.

Es fundamental establecer relaciones numéricas donde se establezcan conexiones con grupos numéricos como por ejemplo las sucesiones numéricas, las capacidades de generación de cuadrados, cubos y otros números que han sido históricamente de gran importancia en el quehacer matemático.

Por otra parte, las propiedades pueden ser usadas por los docentes para impulsar planes de una educación dirigida al aprendizaje por descubrimiento, planteando algunas propiedades y animando a los alumnos a la creatividad y a la búsqueda de nuevas relaciones entre los números, eso es importante en la búsqueda de un desarrollo del potencial matemático de los estudiantes, más allá de la repetición de fórmulas y de conceptos que son muy conocidos.

7. Bibliografía

[1] Calmaestra, Luis Barrios (2020). Números pentagonales. consultado el 08-06-2021 en https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/recursosdematematicas/ números-pentagonales/

[2] García Cruz, J. A. & Martinón A. (1998) números poligonales. Artículo de la Revista Educación Matemática Vol. 10 No. 3. Diciembre de 1998. PP. 103-108.

[3] González Urbaneja, Pedro Miguel (2021). Divulgamat. Historia de las matemáticas. centro virtual de divulgación de las matemáticas. citado en https: //virtual.uptc.edu.co/ova/estadística/docs/autores/pag/mat/pitagoras11.asp.htm

[4] Johari, M. A. M., Atan, K. A. M., & Sapar, S. H. (2012). Relation between square and centered pentagonal numbers. Malaysian Journal of Mathematical Sciences, 6(2), 165-175.

[5] Jon Perry (2004) una colaboración sobre los números pentagonales. Ver https://oeis.org/A000326

[6] Kapoor Divye (2012). ¿Cómo se determina si un número N es un número pentagonal? Consultado en https://yjp2fcud3s4fhvj3xuunfjf3ee–www-divye-in.translate.goog/2012/07/how-do-you-determine-if-number-n-is.html

[7] Kline, Morris (1992) el pensamiento matemático Parte I: de la antigüedad a nuestros días. Alianza Editorial. España. ISBN: 84-206-2957-X

[8] López, G. y López J. (2014). Un acercamiento histórico al concepto de sucesión: el momento de los números poligonales. Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

[9] MathPages. (n.d.). On Euler's Pentagonal Theorem. MathPages. Consultado el 27-03-2022, from https://www.mathpages.com/home/kmath623/kmath623.htm

[10] Neil James, Alexander Sloane (s.f.a). A000326. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Consultado en https://oeis.org/A000326

[11] Neil James, Alexander Sloane (s.f.b). A001318. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Consultado en https://oeis.org/A001318

[12] Ortiz, A. (2009). Lógica Y Pensamiento Aritmético. PNA, 3(2)

[13] Roldán Martínez, Antonio (2020). Números Pentagonales. Consultado el 08-06-2021 en http://hojaynumeros.blogspot.com/2020/11/numeros-pentagonales-1.html

[14] Temple Bell, E. (1949). Historia de las matemáticas. (Traducción R. Ortiz) México: Fondo de cultura económica.