



Modelación de sistemas positivos mediante distribuciones tipo fase

| Modeling positive systems using phase-type distributions |

| Modelagem de sistemas positivos por meio de distribuições do tipo fase |

Luz Judith Rodríguez Esparza¹

luz.rodriguez@edu.uaa.mx

Universidad Autónoma de Aguascalientes
Aguascalientes, México

Fernando Baltazar Larios²

fernandobaltazar@ciencias.unam.mx

Universidad Nacional Autónoma de México
Coyoacan, México

Recibido: 5 de junio de 2024

Aceptado: 30 de abril de 2025

Resumen: En este artículo se considera la relación entre las distribuciones tipo fase y sistemas positivos a través de ejemplos prácticos y aplicaciones. Las distribuciones tipo fase, comúnmente utilizadas en la modelación de sistemas dinámicos, representan la evolución temporal de un conjunto de variables en función de su fase. Por otro lado, los sistemas positivos, que prevalecen en una amplia gama de disciplinas, son aquellos en los que las variables involucradas mantienen valores no negativos a lo largo del tiempo. A través de aplicaciones como la dinámica de la trayectoria de estudiantes y la gestión de la cadena de suministro, se muestra cómo las distribuciones tipo fase pueden ser útiles para describir y analizar sistemas positivos, ofreciendo una perspectiva sobre su comportamiento dinámico. El principal objetivo de este trabajo es establecer conexiones claras entre estos conceptos aparentemente diferentes, destacando su relevancia y utilidad en diversos campos de estudio. Los resultados aquí presentados contribuyen a una mejor comprensión de la interacción entre la teoría de las distribuciones tipo fase y la teoría de sistemas positivos, abriendo nuevas oportunidades para futuras investigaciones en este campo interdisciplinario.

Palabras Clave: Distribución tipo fase, sistemas positivos, sistemas de control.

Abstract: In this paper, we consider the relationship between phase-type distributions and positive systems through practical examples and applications. Phase-type distributions, commonly used in modelling dynamic systems, represent the temporal evolution of a set of variables based on their phase. On the other hand, positive systems, prevalent in a wide range of disciplines, are those where the involved variables maintain non-negative values over time. Through applications such as student trajectory dynamics and supply chain management, it is shown how phase-type distributions can be useful for describing and analyzing positive systems, offering insight into their dynamic behavior.

¹Luz Judith Rodríguez Esparza. Investigadora por México en la Universidad Autónoma de Aguascalientes. Dirección postal: Av. Universidad 940, Ags., México, C.P. 20100. Correo: luz.rodriguez@edu.uaa.mx.

²Fernando Baltazar Larios. Profesor de Carrera Titular B en la Universidad Nacional Autónoma de México. Dirección postal: Avenida Universidad 3000, Ciudad Universitaria, Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México, México. Correo: fernandobaltazar@ciencias.unam.mx.

Our main objective is to establish clear connections between these seemingly different concepts, highlighting their relevance and utility in various fields of study. The findings presented here contribute to a better understanding of the interaction between phase-type distribution theory and positive system theory, opening new opportunities for future research in this exciting interdisciplinary field.

Keywords: Phase-type distribution, positive systems, control systems.

Resumo: Neste artigo, considera-se a relação entre distribuições do tipo fase e sistemas positivos por meio de exemplos práticos e aplicações. As distribuições do tipo fase, comumente utilizadas na modelagem de sistemas dinâmicos, representam a evolução temporal de um conjunto de variáveis em função de sua fase. Por outro lado, os sistemas positivos, que prevalecem em uma ampla gama de disciplinas, são aqueles nos quais as variáveis envolvidas mantêm valores não negativos ao longo do tempo. Através de aplicações como a dinâmica da trajetória de estudantes e a gestão da cadeia de suprimentos, mostra-se como as distribuições do tipo fase podem ser úteis para descrever e analisar sistemas positivos, oferecendo uma perspectiva sobre seu comportamento dinâmico. O principal objetivo deste trabalho é estabelecer conexões claras entre esses conceitos aparentemente diferentes, destacando sua relevância e utilidade em diversos campos de estudo. Os resultados aqui apresentados contribuem para uma melhor compreensão da interação entre a teoria das distribuições do tipo fase e a teoria de sistemas positivos, abrindo novas oportunidades para futuras pesquisas neste campo interdisciplinar.

Palavras-chave: Distribuição do tipo fase, sistemas positivos, sistemas de controle.

1. Introducción

Las representaciones positivas aparecen de forma natural en la modelación de diversos sistemas físicos, económicos y ecológicos (Farina & Rinaldi, 2000; Luenberger, 1979). Desde hace tiempo, ha existido un esfuerzo por unir a las comunidades de teoría de control y teoría de la probabilidad, ya que ambos campos han desarrollado sus propias teorías a partir de una raíz común: la teoría de Perron-Frobenius (Horn & Johnson, 2012; Seneta, 2006). En particular, la referencia Commault y Mocanu (2003) proporcionó un puente entre estas comunidades mediante el uso de distribuciones de tipo fase.

Las distribuciones tipo fase (PH por sus siglas en inglés *Phase-type*) representan el tiempo hasta la absorción en una cadena de Markov absorbente (Neuts, 1975, 1981b). Así pues, son usadas generalmente para modelar varios tiempos aleatorios, en particular, aquellos que aparecen en sistemas de manufactura, como tiempos de procesamiento, tiempos de falla, tiempos de reparación, etc. La propiedad Markoviana de estas distribuciones facilita el uso de métodos computacionales eficientes basados en matrices para evaluar su desempeño (Bladt & Nielsen, 2017).

Las distribuciones PH son una clase de distribución de probabilidad que son muy usadas en la modelación estocástica para representar fenómenos aleatorios a tiempo continuo —denotado por CPH— o a tiempo discreto —denotado por DPH— (Buchholz et al., 2014; Fackrell, 2009). Estas distribuciones están caracterizadas por su representación PH (Horváth y Telek, 2009; O'Cinneide, 1989), que describe la evolución de un proceso estocástico en términos de transiciones entre diferentes fases.

Como se destacó en la referencia Kim (2015), existe una conexión entre realizaciones positivas y una representación PH ya sea a tiempo continuo o a tiempo discreto. En las distribuciones PH, las variables aleatorias representan el tiempo hasta que cierto evento ocurre, por ejemplo, el tiempo que pasa hasta que el sistema falla o el tiempo hasta que un cliente llega a algún servicio. La distribución de cada una de estas variables aleatorias está especificada por una función matriz-exponencial, que describe la función de densidad o de distribución de probabilidad.

Estudiar o convertir un sistema positivo en una distribución PH puede ser benéfico por varias razones. Por ejemplo, se podría simplificar su complejidad y facilitar su análisis (Bladt & Nielsen, 2017); además, las distribuciones PH son conocidas por tener propiedades matemáticas favorables que pueden hacer el análisis de sistemas dinámicos más manejables (Esparza, 2011); pueden proveer una representación efectiva y compacta de la evolución temporal de un sistema positivo, permitiendo modelar y predecir el comportamiento del sistema en el tiempo, lo cual es crucial para planear y tomar decisiones en varias aplicaciones. Además, representar el sistema en términos de distribuciones PH puede ofrecer una interpretación intuitiva del comportamiento dinámico del sistema positivo, ayudando a los investigadores a tener un mejor entendimiento de cómo las variables del sistema evolucionan y se relacionan entre sí. Inclusive, es posible aprovechar la gran cantidad de herramientas tecnológicas disponibles para analizar distribuciones de probabilidad para evaluar el desempeño del sistema en términos de métricas tales como fiabilidad, disponibilidad y eficiencia.

Si bien el estudio de convertir sistemas positivos en distribuciones PH se ha abordado en algunos artículos (Commault & Mocanu, 2003; Kim, 2015), la literatura existente se mantiene limitada en alcance, dejando espacio significativo para más exploración e investigación. Es evidente que este tema no ha recibido una atención generalizada entre los investigadores, por ello, es importante considerar para más estudios de comprensión y un entendimiento más profundo de esta relación.

Dado el incremento en la relevancia de las distribuciones PH (Ahmad & Bladt, 2023; Hobolth et al., 2024), aprovechar la existencia de algoritmos de estimación se vuelve cada vez más importante. Por ejemplo, utilizar algoritmos pre-programados disponibles en el paquete estadístico R para la estimación de distribuciones PH tiene varias ventajas (Bladt et al., 2022; Rivas-González et al., 2022). En primer lugar, R ofrece un amplio ecosistema de paquetes estadísticos diseñados para diversas tareas de estimación, incluyendo la estimación de máxima verosimilitud (MLE) y la inferencia Bayesiana. Al utilizar estos recursos, se puede agilizar el proceso de modelado y centrarse más en el análisis de datos y su interpretación. Además, la naturaleza de código abierto de R fomenta la transparencia y la reproducibilidad, asegurando que los procedimientos de estimación puedan ser fácilmente examinados y replicados. Adicionalmente, la disponibilidad de documentación y comunidades de usuarios facilita aún más la adopción e implementación de estos algoritmos. Por lo tanto, incorporar algoritmos de estimación basados en R para distribuciones PH mejora la eficiencia, fiabilidad y accesibilidad de los esfuerzos de modelado.

Así pues, el objetivo principal de este trabajo es proporcionar ejemplos prácticos y simulados utilizando el paquete R para establecer conexiones claras entre las distribuciones PH y los sistemas positivos, destacando su relevancia y utilidad en diversos campos de estudio.

La motivación principal de este trabajo radica en la necesidad de comprender y modelar sistemas dinámicos en los que las variables deben mantenerse no negativas, como ocurre en contextos de gestión de cadenas de suministro, población estudiantil o procesos de manufactura. Aunque las distribuciones PH se utilizan ampliamente para representar tiempos de espera y procesos estocásticos, su aplicación explícita en la modelación de sistemas positivos no ha sido explorada de manera sistemática. Este estudio busca llenar ese vacío, mostrando cómo las distribuciones PH pueden ofrecer una representación precisa y flexible de la evolución temporal de variables positivas, facilitando el análisis, la simulación y la predicción del comportamiento de sistemas reales en diversas disciplinas.

Este artículo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 2, se muestran los principales antecedentes sobre los sistemas lineales positivos y las distribuciones PH. La relación entre estos temas se presenta en la Sección 3. Los ejemplos numéricos se muestran en la Sección 4, tanto para el tiempo continuo como discreto. Comentarios finales se presentan en la Sección 5.

2. Antecedentes

En esta sección se proporciona información sobre tres componentes esenciales para este trabajo: los sistemas lineales positivos, las distribuciones CPH y las distribuciones DPH. Los sistemas lineales positivos representan una clase de sistemas dinámicos caracterizados por estados y parámetros no negativos, comúnmente encontrados en diversas aplicaciones en ingeniería y ciencia. Comprender su comportamiento y propiedades sienta las bases para nuestra investigación. Posteriormente, las distribuciones CPH y las distribuciones DPH sirven como modelos probabilísticos capaces de describir la evolución temporal de variables aleatorias a tiempo continuo y discreto, respectivamente. Así, se pretende esclarecer cómo la naturaleza estocástica inherente a la dinámica de los sistemas puede ser capturada y analizada de manera efectiva dentro del marco de las distribuciones PH.

2.1. Sistemas lineales positivos

Consideremos un sistema lineal invariante en el tiempo con entrada única y salida única de la siguiente forma

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times 1}$ y $C \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$ con $n \in \mathbb{N}$. Dada la condición inicial $x(0)$ y la secuencia de entrada $u(t)$ con $t \in \mathbb{R}_+$ para el caso continuo y $t \in \mathbb{N}$ para el caso discreto, es posible predecir toda la secuencia de estados $x(t)$ y salidas $y(t)$, $\forall t$. El estado $x(0)$ resume toda la historia pasada del sistema. La dimensión n del estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ se denomina el orden del sistema. La terna de matrices (A, B, C) denota una realización positiva.

Así, el sistema (1) se dice sistema lineal positivo si, para cualquier entrada no-negativa y estado inicial no-negativo, la trayectoria de estados y la salida son siempre no-negativas (ver Farina y Rinaldi (2000)). El problema de realización para sistemas positivos también ha sido considerado por Kaczorek y Sajewski (2014) y Kim (2013).

2.2. Distribuciones PH a tiempo continuo

Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un proceso de saltos de Markov con espacio de estados $E = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$ donde los estados $\{1, 2, \dots, n\}$ son transitorios y el estado $\{n+1\}$ es un estado absorbente. Entonces $\{X_t : t \geq 0\}$ tiene el generador infinitesimal de dimensión $(n+1) \times (n+1)$ dado por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} T & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde $T = (t_{ij})$ es una matriz cuadrada de $n \times n$, tal que $t_{ii} < 0$ y $t_{ij} \geq 0$, $i \neq j$; $0 \in \mathbb{R}^n$ es el vector renglón cuyas componentes son todas cero, y $t = -T\mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ es un vector de unos de dimensión apropiada. Los elementos de t , denotados como t_i , son las intensidades con las cuales el proceso salta al estado absorbente y son conocidos como las tasas de salida.

Ahora, denotaremos las probabilidades iniciales de $\{X_t : t \geq 0\}$ como $\alpha_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$ para $0 \leq i \leq n$, así $\alpha^* = (\alpha, \alpha_{n+1})$ donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Es común que $\alpha_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

El tiempo hasta la absorción dado por

$$\tau = \inf\{t \geq 0 | X_t = n+1\}$$

tiene distribución tipo fase continua (CPH) y escribimos $\tau \sim CPH_n(\alpha, T)$ donde el subíndice n se refiere al número de estados transitorios, y algunas veces es omitido.

La función de densidad de probabilidad (pdf), función de distribución acumulada (cdf) y la transformada de Laplace Stiltjes de τ , respectivamente, están definidas por

$$\begin{aligned} f_\tau(x) &= \alpha e^{Tx} t \\ F_\tau(x) &= 1 - \alpha e^{Tx} 1 \\ f^*(s) &= \alpha(sI - T)^{-1} t. \end{aligned} \tag{2}$$

La matriz de probabilidades de transición (tpm) al tiempo s de $\{X_t : t \geq 0\}$ se puede obtener a través de la siguiente fórmula

$$P(s) = e^{\Lambda s}. \tag{3}$$

2.3. Distribuciones PH a tiempo discreto

Las distribuciones tipo fase discretas (DPH, por sus siglas en inglés *Discrete Phase-type*) son una clase de distribuciones de probabilidad utilizadas para modelar el tiempo hasta la absorción en procesos de Markov en tiempo discreto (Neuts, 1981a). Son ampliamente empleadas en diversos campos, incluyendo la teoría de colas, el análisis de confiabilidad y la evaluación del rendimiento de sistemas informáticos y de comunicación (Asmussen, 2003).

Una distribución DPH se caracteriza por su matriz de probabilidad de transición y un vector de probabilidades iniciales. Sea $T = (t_{ij})$ la matriz de probabilidad de transición de dimensión $n \times n$, donde n es el número de fases en la distribución. La entrada t_{ij} representa la probabilidad de transitar de la fase i a la fase j en un paso de tiempo. Además, sea $\alpha = (\alpha_i)$ el vector de probabilidades iniciales, donde α_i representa la probabilidad de empezar en la fase o estado i .

La probabilidad de transitar de la fase i a la fase j en k pasos de tiempo, denotada como $\mathbb{P}(X_k = j | X_0 = i)$, está dada por la entrada (i, j) de la matriz T^k .

Las distribuciones DPH son versátiles y pueden modelar diversos procesos estocásticos con diferentes características. Su flexibilidad las hace valiosas en el análisis y simulación de sistemas con dinámica de eventos discretos (Asmussen et al., 1996; Bladt et al., 2011).

Consideremos una cadena de Markov absorbente finita $\{Y_k\}_{k \geq 0}$ con espacio de estados $E = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$, con tpm dada por

$$P = \begin{bmatrix} T & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $T = (T_{ij})_{n \times n}$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)_{n \times 1}$, tal que $t = (I - T)1$, y $0 = (0, 0, \dots, 0)_{1 \times n}$. Supondremos que $(I - T)^{-1}$ existe y que los estados $\{1, 2, \dots, n\}$ son transitorios, además, la absorción en el estado $\{n+1\}$, comenzando desde cualquiera estado transitorio, es segura. Como en el caso continuo, denotemos a la distribución de probabilidad inicial de la cadena de Markov $\{Y_k\}_{k \geq 0}$ por $\alpha^* = (\alpha, \alpha_{n+1})$, donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

La función de masa de probabilidad (pmf) de una variable aleatoria τ que sigue una DPH de orden n —denotada por $\tau \sim DPH(\alpha, T)$ —está dada por

$$f_\tau(k) = \begin{cases} \alpha T^{k-1} t, & \text{if } k \geq 1 \\ \alpha_{n+1}, & \text{if } k = 0. \end{cases}$$

La correspondiente cdf se obtiene como

$$F_\tau(k) = 1 - \alpha T^k 1. \quad (4)$$

Dado que las distribuciones PH son muy importantes hoy en día en diversas áreas de investigación, su simulación (véase Asmussen et al. (1996), Esparza (2011)) no ha sido dejada de lado. Particularmente, considerando el paquete estadístico R, existen dos paquetes que abordan la estimación de parámetros (y mucho más) de las distribuciones PH de manera muy eficiente: *PhaseTypeR* de Rivas-González et al. (2022) y *matrixdist* de Bladt et al. (2022).

El paquete de R llamado *PhaseTypeR* contiene todas las funciones clave—media, (co)varianza, pdf, cdf, función cuantil, muestreo aleatorio y transformaciones de recompensa—tanto para CPH como para DPH. El paquete llamado *matrixdist*¹ ajusta distribuciones de PH no homogéneas (IPH) utilizando el algoritmo Esperanza-Maximización (EM) para estimar los parámetros del modelo. Este paquete también proporciona la densidad, cdf, función cuantil, momentos y la posibilidad de simular desde la distribución. En este trabajo, se utilizará *PhaseTypeR*.

3. Relación entre distribuciones PH y sistemas positivos

Una realización positiva implica que las matrices que definen el sistema en (1), dadas por A , B y C , tienen entradas no negativas. Además, la excitabilidad del par (A, B) significa que el sistema puede ser influenciado mediante una entrada adecuada, permitiendo su control o estabilización. Por ejemplo, supongamos que tenemos el modelo (1), donde $x(t)$ es el estado del sistema y $u(t)$ es la entrada o control, supongamos que las matrices A y B están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para verificar la excitabilidad, construimos la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

cuyo determinante es $\det(\mathcal{C}) = -1 \neq 0$. Dado que la matriz \mathcal{C} tiene rango completo, el sistema es controlable y excitable. Esto significa que es posible influir en cualquier estado $x(t)$ mediante una entrada adecuada $u(t)$, permitiendo su control o estabilización.

Por otro lado, la matriz A se considera asintóticamente estable si el sistema converge hacia un estado de equilibrio estable conforme el tiempo tiende a infinito. Es decir, las soluciones del sistema se acercan a un valor constante en el largo plazo. La matriz A se considera asintóticamente estable si todas sus autovalores (eigenvalores) tienen módulo menor que 1 en el caso discreto, o parte real negativa en el caso continuo. Por ejemplo, si la matriz A en el sistema (1) está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{bmatrix},$$

sus eigenvalores están dados por

$$\lambda_1 = 0.6, \quad \lambda_2 = 0.3.$$

Así pues, como $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, el sistema es asintóticamente estable, lo que significa que cualquier estado inicial $x(0)$ eventualmente converge a un estado de equilibrio conforme $t \rightarrow \infty$. Se recomienda

¹<https://cran.r-project.org/web/packages/matrixdist/index.html>

la referencia De Leenheer y Aeyels (2001) para más detalles sobre la estabilidad en sistemas lineales positivos.

Otro concepto importante en este estudio es la matriz de Metzler. Una matriz es de Metzler si es una matriz cuadrada y todos sus elementos fuera de la diagonal principal son no negativos. Este concepto es relevante en el análisis de estabilidad de sistemas dinámicos, especialmente en modelos de sistemas con tasas de transición. Por ejemplo, consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

podemos observar que todos los elementos fuera de la diagonal principal son mayores o iguales a cero, es decir

$$A_{ij} \geq 0, \quad \text{para } i \neq j.$$

Esta propiedad es fundamental en la teoría de sistemas positivos, donde la evolución del sistema preserva la no negatividad de las variables de estado.

Un caso común donde aparecen matrices de Metzler es en modelos de sistemas dinámicos lineales de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

donde A es una matriz de Metzler y $x(t)$ representa un estado del sistema en el tiempo t . En estos casos, la no negatividad de los elementos fuera de la diagonal principal permite garantizar que las trayectorias del sistema sean no negativas si las condiciones iniciales también lo son.

En particular Cvetković (2019) estudió la estabilización de matrices de Metzler y su aplicación en sistemas dinámicos, proporcionando métodos para encontrar la matriz de Metzler estable más cercana a una inestable.

En el análisis de sistemas positivos, la irreducibilidad también juega un papel fundamental. Una matriz A se considera irreducible si su grafo dirigido asociado es fuertemente conexo, lo que implica que todos los estados del sistema están interconectados de alguna manera. Esto garantiza que ninguna subestructura del sistema evolucione de manera completamente independiente.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz de Metzler, así, su eigenvalor real dominante $\lambda_{\max}(A)$ cumple con las siguientes propiedades: si A es irreducible, el teorema de Perron-Frobenius garantiza que $\lambda_{\max}(A)$ es real y tiene un vector propio asociado estrictamente positivo; si A es reducible, el eigenvalor dominante aún es real, pero pueden existir otros eigenvalores de igual magnitud. La estabilidad del sistema depende de $\lambda_{\max}(A)$, si $\lambda_{\max}(A) < 0$, el sistema es asintóticamente estable; si $\lambda_{\max}(A) = 0$, el sistema es marginalmente estable y si $\lambda_{\max}(A) > 0$, el sistema es inestable. Recientemente, la referencia Cui et al. (2025) extiende el concepto de matrices de Metzler a tensores de Metzler y analiza sistemas positivos en hipergrafos, incluyendo discusiones sobre estabilidad e irreducibilidad.

Con todo lo anterior, la referencia Commault y Mocanu (2003) mostró que la irreducibilidad permite asegurar que el sistema positivo puede ser descrito mediante una realización PH que, además de ser positiva, cumple con una condición adicional de excitabilidad. Es decir, el sistema no solo mantiene la no negatividad de sus estados, sino que también puede ser influenciado de manera controlada mediante una entrada adecuada.

3.1. Tiempo continuo

Consideré el sistema dado en (1). Sea

$$\Delta = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

una matriz de dimensión $(n+1) \times (n+1)$, llamada la realización aumentada.

Asumiendo que (A, B) es excitante, y que A es asintóticamente estable y es una matriz de Metzler (i.e., el eigenvalor real dominante de A satisface $\lambda_{\max}(A) < 0$), entonces hay un eigenvector positivo $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_{n+1})$ de Δ , i.e., $\Delta\nu = 0$, tal que ν es estrictamente positivo (i.e., $\nu > 0$) (ver Lema 3 de Kim (2015)).

Teorema 1

(Kim, 2015) Consideré el sistema positivo a tiempo continuo con la realización positiva (A, B, C) tal que (A, B) es excitante, y A es asintóticamente estable y una matriz de Metzler. Entonces, el sistema positivo es transformado en un generador infinitesimal CPH tal que

$$\begin{cases} \tilde{\alpha} = CU \\ \tilde{T} = U^{-1}AU \\ \tilde{t} = U^{-1}B = -\tilde{T}\mathbf{1} \end{cases} \quad (6)$$

donde

$$U = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_n)/\nu_{n+1}. \quad (7)$$

Por lo tanto, una realización positiva excitante puede ser transformada en la forma de $CPH(\tilde{\alpha}, \tilde{T})$, i.e., la realización positiva es un superconjunto de las representaciones PH.

3.2. Tiempo discreto

En la referencia Kim (2015), también se presenta el siguiente teorema que muestra que una realización positiva puede ser transformada en una representación $DPH(\tilde{\alpha}, \tilde{T})$ multiplicada por un escalar positivo (i.e., $\tilde{\alpha}$ no necesariamente es un vector de probabilidad).

Teorema 2

Consideré el sistema positivo a tiempo discreto con la realización positiva (A, B, C) tal que (A, B) es excitante y estable. Entonces, existe una matriz no singular M dada por

$$M = \text{diag}(z) \text{ donde } z = (I - A)^{-1}B \text{ son positivos,} \quad (8)$$

tal que la realización $(\tilde{\alpha}, \tilde{T}, \tilde{t})$ que está definida por

$$\begin{cases} \tilde{\alpha} = CM \\ \tilde{T} = M^{-1}AM \\ \tilde{t} = M^{-1}B \end{cases} \quad (9)$$

tiene las propiedades de una representación DPH tal que $\tilde{t} = (I - \tilde{T})\mathbf{1}$ y $\tilde{\alpha} \geq 0$.

3.3. Relación general

Suponga que se tiene la representación $PH(\tilde{\alpha}, \tilde{T})$ obtenida como en el sistema (6) para el caso continuo y como en (9) para el caso discreto. Como el vector $\tilde{\alpha}$ podría no ser un vector de probabilidad (sus componentes podrían no sumar 1), por lo tanto, definimos el siguiente vector de probabilidad inicial

$$\tilde{\alpha}^* := \tilde{\alpha}/\psi$$

donde $\psi \in \mathbb{R}_+$ denota la constante de normalización, i.e., $\psi = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i$.

Consideremos una nueva variable aleatoria $X^* \sim PH(\tilde{\alpha}^*, \tilde{T})$ y definamos

$$y_{PH}(t) = F_{X^*}(t) \cdot \psi \cdot u(t) \quad (10)$$

donde $F_{X^*}(\cdot)$ es la cdf obtenida mediante la fórmula (2) para el caso continuo, o mediante la fórmula (4) para el caso discreto, y $u(t)$ está definido en (1). Entonces, la realización (A, B, C) del modelo (1) está relacionada con la distribución PH (ver Teorema 4 de Commault y Mocanu (2003), y Teorema 4 de Kim (2013)) por

$$y(t) = y_{PH}(t),$$

donde $y(t)$ está dado en el sistema (1) y $y_{PH}(t)$ está dado en la ecuación (10).

La formulación combina elementos tanto del modelado probabilístico (a través de $F_{X^*}(t)$) como de la teoría de control (a través de $u(t)$). El producto $F_{X^*}(t) \cdot \psi \cdot u(t)$ captura así la probabilidad acumulativa de absorción, escalada por ψ para la normalización, y además modificada por $u(t)$ para permitir un control dinámico sobre la salida del sistema.

En particular, si $0 < \psi < 1$, y si $X \sim PH(\tilde{\alpha}, \tilde{T})$, la realización entre sistemas positivos y esta variable aleatoria está dada por:

$$y_{CPH}(t) = \frac{(F_X(t) - (1 - \psi))}{f_X(0)} \cdot u(t), \quad \text{con } f_X(0) = \tilde{\alpha}\tilde{T} > 0,$$

$$y_{DPH}(t) = (F_X(t) - (1 - \psi)) \cdot u(t), \quad \text{tal que } f_X(0) = 1 - \psi > 0,$$

donde a su vez, $f_X(0) = \alpha_{n+1}$ representa la probabilidad de que la cadena de Markov inicie en el estado absorbente.

Aunque la relación entre distribuciones tipo fase y sistemas positivos ha sido explorada ampliamente desde la perspectiva teórica (Kim, 2015; Commault y Mocanu, 2003), la literatura carece de estudios que profundicen en aplicaciones prácticas que ejemplifiquen esta conexión. En este sentido, la presente investigación aporta de manera original al presentar casos concretos que ilustran la utilidad de estas teorías en contextos reales, cubriendo un vacío identificado en los estudios previos.

4. Ejemplos numéricos

A continuación, se presenta un ejemplo numérico para el caso continuo y dos aplicaciones para el caso discreto.

4.1. Caso continuo

Suponga que tenemos un sistema con los siguientes parámetros

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \ 0 \ 0].$$

Sea $\eta > |x|$ para todo $x \in \sigma(A)$ (espectro de A), y ν un eigenvector asociado con el máximo eigenvalor de $\Delta + \eta I$, donde Δ es como en la ecuación (5). En este ejemplo, $\eta = 2$,

$$\nu = [0.5222330, \ 0.6963106, \ 0.3481553, \ 0.3481553]$$

y la matriz U , usando la ecuación (7) está dada por

$$U = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando (6) se obtienen los parámetros CPH los cuales están dados por

$$\tilde{\alpha} = [1.5 \ 0 \ 0]; \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} -2 & 1.3\bar{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \tilde{t} = \begin{bmatrix} 0.6\bar{6} \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se define $\tilde{\alpha}^* = [1 \ 0 \ 0]$; y $\psi = 1.5$. Por lo tanto, sea $X^* \sim CPH(\tilde{\alpha}^*, \tilde{T})$. La matriz \tilde{T} describe las tasas de transición entre fases, mientras que el vector \tilde{t} representa las tasas de absorción hacia el estado final. Se observa que la primera fase tiene una alta probabilidad de transición a la segunda fase, mientras que la segunda fase presenta una absorción moderada, indicando que parte del proceso permanece más tiempo en esta fase antes de completarse. En la Figura 1a se presenta la gráfica de la cadena de Markov a tiempo continuo (CTMC) de X^* , sus pdf y cdf son presentadas en la Figura 1b.

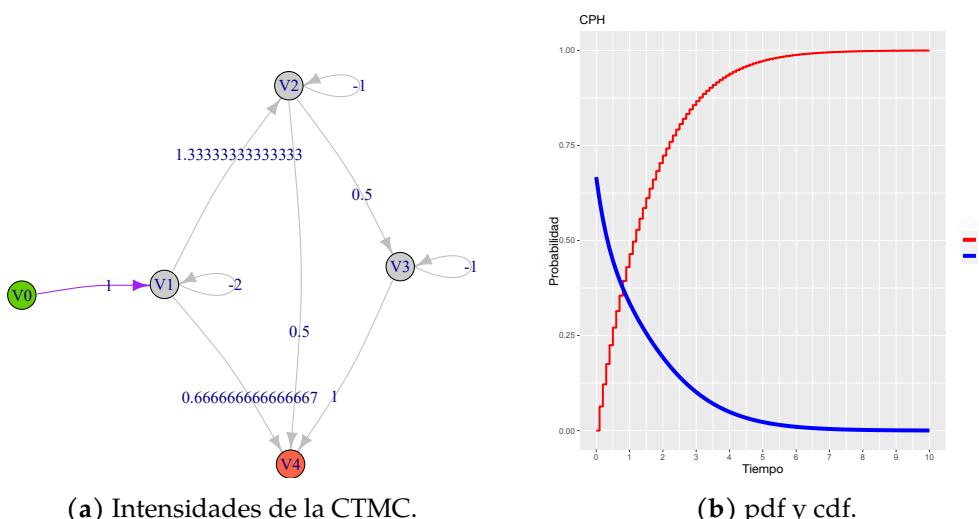


Figura 1: Ejemplo de las intensidades de una variable aleatoria CPH, además de su pdf y cdf. Elaboración propia.

Esta última muestra que la mayor densidad se concentra en la primera fase, lo que indica que la mayoría de los eventos completan rápidamente la primera transición. La cdf refleja que aproximadamente el 50 % de los procesos se absorben antes del tiempo t_1 , mientras que una fracción significativa permanece más tiempo en el sistema, mostrando la heterogeneidad en la duración de las fases.

En aplicaciones prácticas, como la modelación de tiempos de espera en sistemas de atención médica, las fases del CPH pueden interpretarse como etapas del proceso de atención de un paciente: registro, diagnóstico, tratamiento y recuperación. La matriz \tilde{T} refleja las tasas de transición entre etapas, mientras que el vector \tilde{t} indica la probabilidad de que un paciente complete el proceso en cada fase. La pdf de X^* permite identificar tiempos críticos donde los pacientes tienden a permanecer más tiempo, lo que ayuda a optimizar la asignación de recursos médicos y reducir los tiempos de espera. La cdf proporciona estimaciones acumuladas del tiempo total de atención, útiles para la planificación hospitalaria, la programación de citas y la distribución del personal.

Se establece una relación entre la cdf de X^* y la realización del sistema positivo a través de la fórmula (10), empleando $u(t) = 50$ para todo $t \in [0, 10]$. Ambas realizaciones se ilustran en la Figura 2. Como se puede observar en dicha figura, ambas realizaciones coinciden.

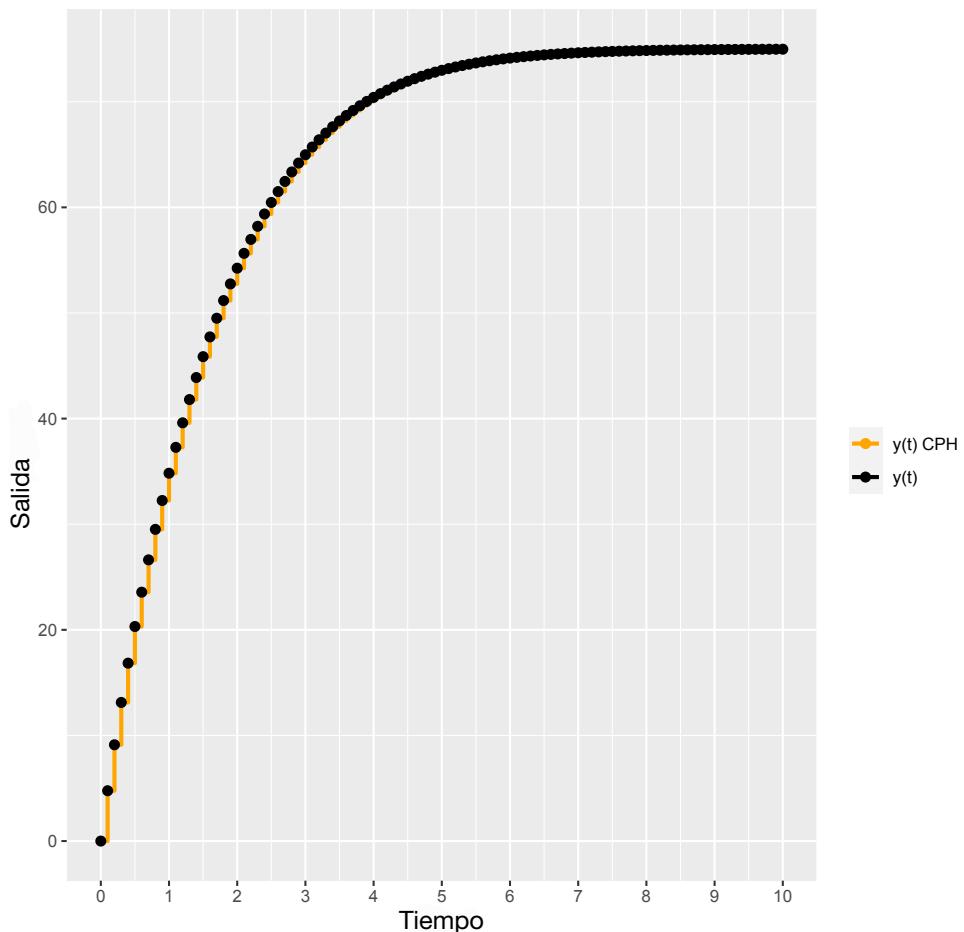


Figura 2: Realizaciones tanto de una variable aleatoria CPH transformada como del sistema positivo. Elaboración propia.

Usando la ecuación (3), se calculan las probabilidades de transición en diferentes momentos: de 0 a 8. En la Figura 3 se presentan estas probabilidades de transición.

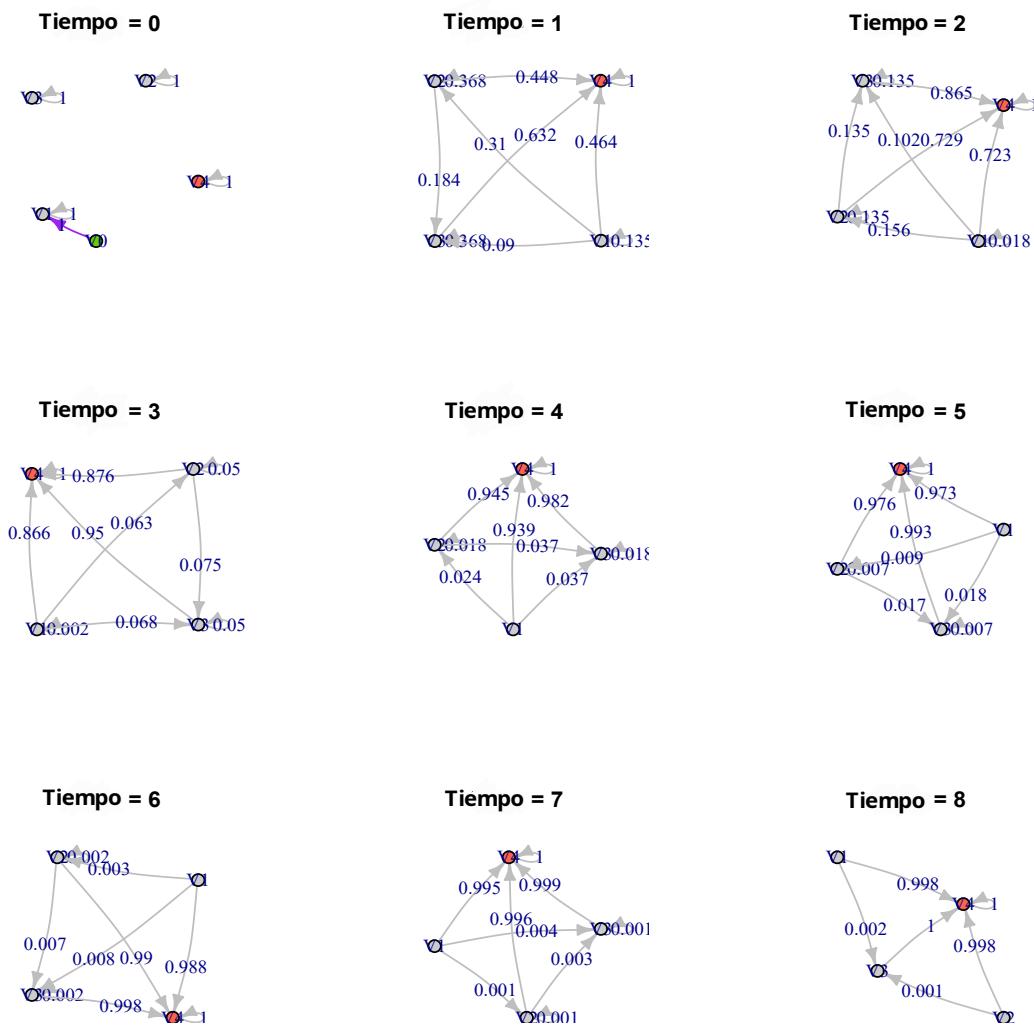


Figura 3: Probabilidades de transición de una variable aleatoria CPH en tiempos diferentes. Elaboración propia.

4.2. Caso discreto

4.2.1. Dinámica de estudiantes

Se considera una aplicación enfocada en la dinámica de estudiantes². El enunciado del problema gira en torno a un curso de pregrado de 3 años con varias restricciones clave. En primer lugar, las tasas de aprobación, reprobación y abandono de los estudiantes permanecen relativamente constantes. Además, la inscripción directa en el 2º y 3º año académico está prohibida, lo que impone una progresión secuencial a lo largo del curso. Asimismo, los estudiantes tienen una restricción de no poder inscribirse por más de 3 años, lo que añade una limitación temporal a su trayectoria académica. Estas restricciones, en conjunto, configuran el panorama educativo, influyendo en la progresión de los estudiantes y en los resultados académicos dentro del marco del programa de pregrado. La notación es la siguiente:

- k : Año.
- $x_i(k)$: Número de estudiantes en el grado i , $i = 1, 2, 3$ al año k .
- $u(k)$: Número de estudiantes de nuevo ingreso al año k .

²http://cse.lab.imtlucca.it/~bemporad/teaching/ac/pdf/04a-TD_sys.pdf

- $y(k)$: Número de graduados al año k .
- ξ_i : Tasa de aprobación en el grado i , donde $0 \leq \xi_i \leq 1$.
- β_i : Tasa de reprobación en el grado i , donde $0 \leq \beta_i \leq 1$.
- γ_i : Tasa de abandono en el grado i , donde $\gamma_i = 1 - \xi_i - \beta_i \geq 0$.

El sistema lineal de tercer orden a tiempo discreto está dado por:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= \beta_1 x_1(k) + u(k) \\x_2(k+1) &= \xi_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k) \\x_3(k+1) &= \xi_2 x_2(k) + \beta_3 x_3(k) \\y(k) &= \xi_3 x_3(k).\end{aligned}$$

Escrito en forma matricial queda como sigue:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \xi_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \xi_2 & \beta_3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\y(k) &= [0 \ 0 \ \xi_3] x(k).\end{aligned}$$

Así, el sistema queda representado por las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \xi_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \xi_2 & \beta_3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 0 \ \xi_3].$$

Usando (8) se obtiene que la matriz M está dada por:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_1}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\xi_1 \xi_2}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)(1-\beta_3)} \end{bmatrix};$$

usando (9) los parámetros DPH están dados por

$$\tilde{\alpha} = \left[0 \ 0 \ \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)(1-\beta_3)} \right]; \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 1-\beta_2 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 1-\beta_3 & \beta_3 \end{bmatrix}; \quad \tilde{t} = \begin{bmatrix} 1-\beta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Note que $\psi = \frac{\xi_1 \xi_2 \xi_3}{(1-\beta_1)(1-\beta_2)(1-\beta_3)} \leq 1$, así que el vector $\tilde{\alpha}$ definido en (9) podría no ser un vector de probabilidad. De hecho, en tal caso, $(1-\psi) \times 100$ representaría el porcentaje de abandono de los estudiantes. En particular, cuando $\psi = 1$, la representación dada en (11) corresponde a una distribución binomial negativa generalizada (Varmazyar et al., 2019).

Esta representación DPH de la dinámica de los estudiantes tiene aplicaciones prácticas en el ámbito educativo y de gestión académica. Por ejemplo, permite estimar la probabilidad de que un estudiante abandone, permanezca o avance en cada fase de su trayectoria, lo cual puede ser utilizado para identificar etapas críticas donde se requiere intervención. Asimismo, facilita la simulación de distintos escenarios educativos, como cambios en políticas de apoyo, tutorías o programas de retención, permitiendo a los administradores y responsables de planificación académica anticipar efectos sobre la permanencia y éxito de los estudiantes. De esta manera, los resultados numéricos obtenidos mediante

la modelación DPH ofrecen una herramienta cuantitativa para la toma de decisiones y la mejora de estrategias educativas.

Supongamos por ejemplo que $\xi_1 = 0.60$, $\xi_2 = 0.80$, $\xi_3 = 0.9$, $\beta_1 = 0.20$, $\beta_2 = 0.15$, $\beta_3 = 0.08$, y $u(k) = 50$, para $k = 0, 1, 2, \dots, 10$, entonces la constante de normalización está dada por $\psi = 0.6905371$. Tomando $\tilde{\alpha}^* = [0 \ 0 \ 1]$, \tilde{T} y \tilde{t} , en la Figura 4 presentamos la cdf, pmf y una muestra aleatoria de tamaño 1000 de la variable aleatoria $X^* \sim DPH(\tilde{\alpha}^*, \tilde{T})$. La media de la muestra aleatoria fue 3.482; es decir, en promedio, los estudiantes tardan aproximadamente tres años y medio en graduarse.

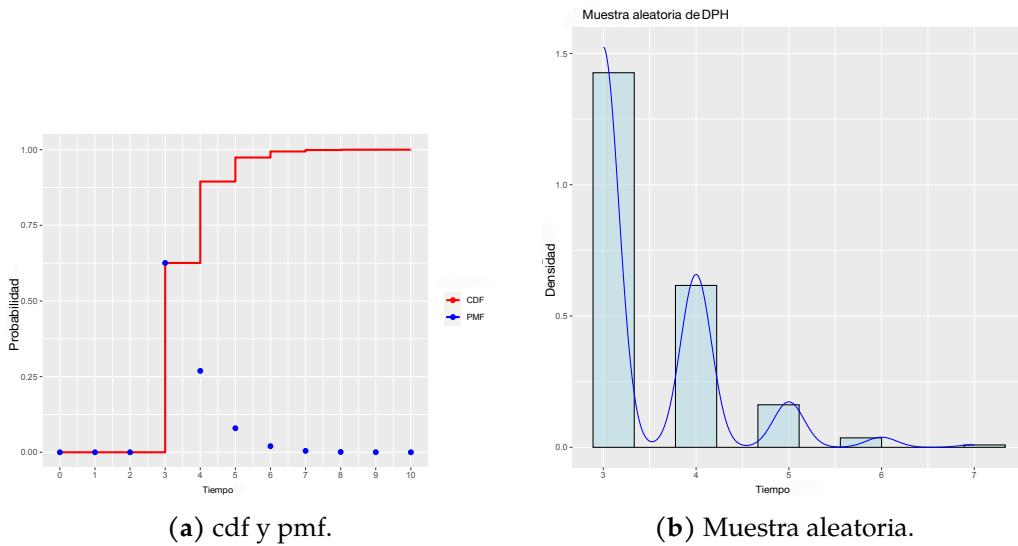


Figura 4: Ejemplo de las funciones cdf y pmf de una variable aleatoria $DPH(\tilde{\alpha}^*, \tilde{T})$. Elaboración propia.

En la Figura 5 se presentan las realizaciones del modelo (1) y la realización de la variable aleatoria $X^* \sim DPH(\tilde{\alpha}^*, \tilde{T})$ usando la formula (10), las cuales efectivamente coinciden.

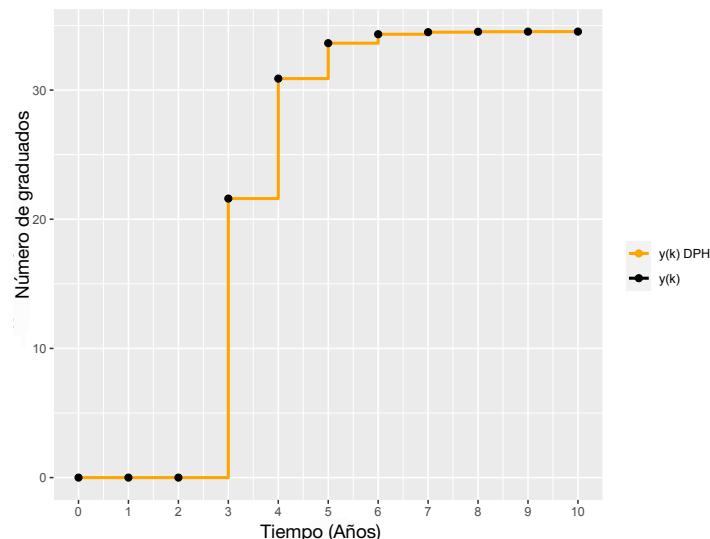


Figura 5: Realizaciones tanto del sistema positivo ($y(k)$) como de la variable aleatoria DPH ($y_{DPH}(k)$). Elaboración propia.

Basándonos en los datos presentados en las Figuras 4b y 5, se puede observar que aproximadamente el 63 % de los estudiantes completan sus estudios al final de su tercer año, mientras que el 27 % de los estudiantes finalizan al final de su cuarto año. Sin embargo, la realización del sistema no proporciona información sobre el porcentaje de estudiantes que abandonan sus estudios. Así pues, para conocer

este porcentaje, en la Figura 6 se presenta la pmf de $X^* \sim DPH(\tilde{\alpha}^*, \tilde{T})$ y $X \sim DPH(\tilde{\alpha}, \tilde{T})$.

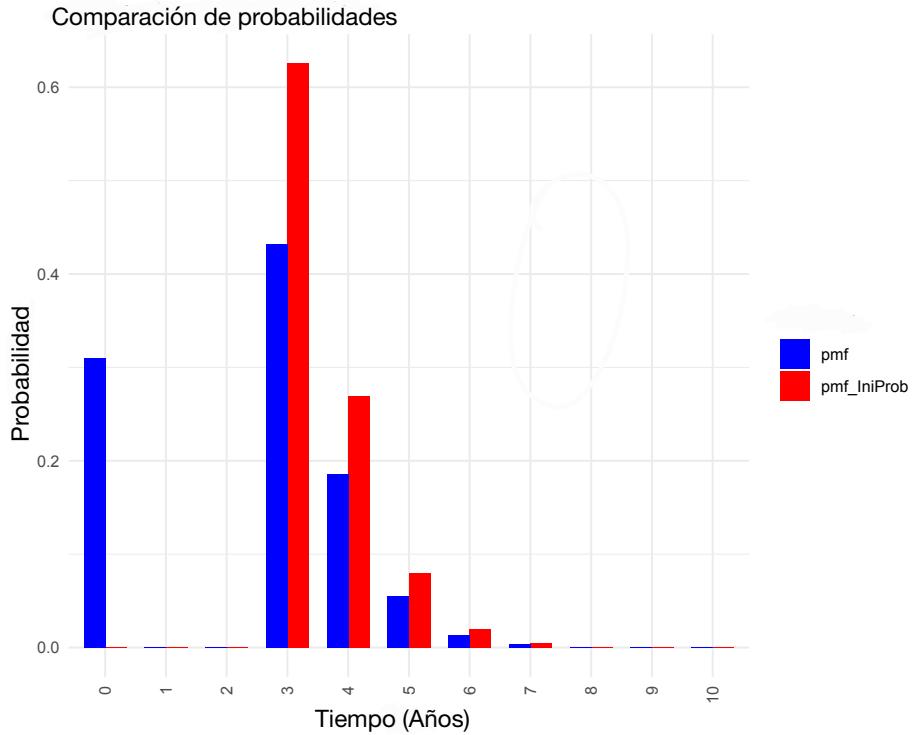


Figura 6: pmf considerando un vector inicial normalizado y sin normalizar. Elaboración propia.

En la gráfica de esta última variable se puede observar que alrededor del 31 % de los estudiantes no se gradúan (porcentaje que se obtiene de $1 - \psi = 1 - 0.6905371$), mientras que el 43 % completa sus estudios en tres años y el 19 % lo hace en cuatro años.

4.2.2. Cadena de suministro

Supongamos que en cada mes k , la entidad S compra una cantidad $u(k)$ de materia prima. Posteriormente, una fracción δ_1 de la materia prima adquirida es descartada, mientras que otra fracción ξ_1 se dirige al productor P . Al recibirla, el productor P procesa la materia prima, obteniendo un producto del cual una fracción ξ_2 se vende al minorista R , mientras que la fracción restante δ_2 se considera inutilizable y se descarta. El minorista R interactúa con los clientes, vendiendo una fracción γ_3 de los productos recibidos del productor P , mientras que también experimenta devoluciones de productos defectuosos, con una fracción β_3 siendo devueltos cada mes. Así pues, el diagrama de flujo de este modelo se puede ver como en la Figura 7.

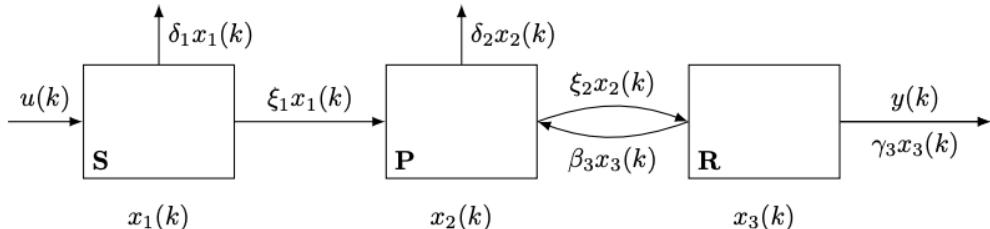


Figura 7: Diagrama de flujo del modelo de cadena de suministro. Elaboración propia con base en Bemporad (2010).

El modelo matemático está dado por:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1 - \xi_1 - \delta_1)x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = \xi_1x_1(k) + (1 - \xi_2 - \delta_2)x_2(k) + \beta_3x_3(k) \\ x_3(k+1) = \xi_2x_2(k) + (1 - \beta_3\gamma_3)x_3(k) \\ y(k) = \gamma_3x_3(k) \end{cases} \quad (12)$$

donde

- k : Mes.
- $x_1(k)$: Materia prima en la entidad S al mes k .
- $x_2(k)$: Productos del productor P al mes k .
- $x_3(k)$: Productos del minorista R al mes k .
- $y(k)$: Productos vendidos a los clientes al mes k .

Tomando los valores $\delta_1 = 0.15$, $\delta_2 = 0.08$, $\xi_1 = 0.6$, $\xi_2 = 0.8$, $\beta_3 = 0.05$, $\gamma_3 = 0.8$, y $u(k) = 100$, para $k = 0, 1, 2, \dots, 13$; y siguiendo la misma metodología que en la aplicación anterior, se obtienen los parámetros DPH usando la ecuación (9):

$$\tilde{\alpha} = [0 \ 0 \ 0.72] ; \quad \tilde{T} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.00 & 0.00 \\ 0.83 & 0.12 & 0.05 \\ 0.00 & 0.85 & 0.15 \end{bmatrix} ; \quad \tilde{t} = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Si $\tilde{\alpha}^* = [0 \ 0 \ 1]$ y $X^* \sim DPH(\tilde{\alpha}^*, \tilde{T})$, la interpretación es como sigue: nos referiremos al estado absorbente como “Cliente”, y X^* medirá el tiempo (en meses) que le toma al producto llegar al cliente.

La representación DPH obtenida permite analizar de manera detallada la dinámica del producto dentro de la cadena de suministro. Cada fase del proceso representa una etapa de producción o distribución, y la matriz \tilde{T} describe las probabilidades de transición entre estas etapas, mientras que \tilde{t} indica la probabilidad de que el producto avance hacia el estado absorbente, identificado como “Cliente”. La variable aleatoria X^* representa el tiempo que tarda un producto en llegar al cliente final. Esta información es útil para identificar posibles cuellos de botella en la cadena de suministro, estimar tiempos de entrega y planificar inventarios. Además, permite simular distintos escenarios, como cambios en las tasas de producción o retrasos en el transporte, proporcionando una herramienta cuantitativa para optimizar la logística y mejorar la eficiencia del sistema.

Tomando una muestra aleatoria de X^* de tamaño 1000, se obtiene una media de 3.855. Más aún, de su función pmf se obtiene que el 53 % de los productos llegan al cliente en 3 meses, 29 % en 4 meses, 12 % en 5 meses, 5 % en 6 meses, y 1 % en más de 7 meses.

En la Figura 8a se presentan las realizaciones del sistema (12) y la variable aleatoria DPH. En la Figura 8b se presentan las probabilidades de las variables aleatorias DPH sin y con la probabilidad de que la absorción ocurra en el primer instante de tiempo que es 0.28. Esto quiere decir que aproximadamente el 72 % de los productos se vende a los clientes, mientras que el restante 28 % no está llegando a ellos (por diversas cuestiones).

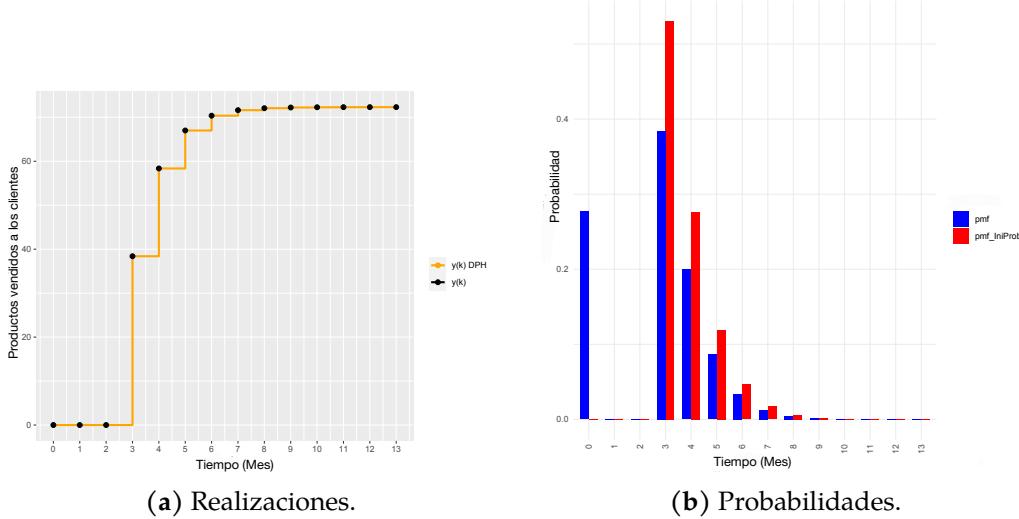


Figura 8: Aplicación de sistemas positivos y DPH a la cadena de suministro. Elaboración propia.

5. Conclusiones

Estudiar o convertir un sistema positivo en una distribución PH puede proporcionar una variedad de beneficios, incluyendo la simplificación del modelo, capacidades de modelado y predicción, interpretación intuitiva, análisis de rendimiento, facilitación de aplicaciones interdisciplinarias, entre muchos otros. Estas ventajas hacen que este enfoque sea valioso en una amplia gama de contextos de investigación y aplicaciones prácticas.

Este trabajo ha mostrado la compleja relación entre los sistemas lineales positivos y las distribuciones PH, tanto continuas como discretas. A través de nuestro análisis, se ha mostrado la utilidad de las distribuciones PH para capturar de manera efectiva el comportamiento estocástico de la dinámica del sistema, proporcionando información valiosa sobre sus características probabilísticas.

Además, los resultados obtenidos subrayan la importancia de incorporar la incertidumbre inherente en el modelado y análisis de sistemas, especialmente en el contexto de sistemas dinámicos complejos. Al aprovechar el robusto marco teórico que ofrecen las distribuciones PH, este trabajo avanza en la comprensión de la dinámica de dichos sistemas y sienta las bases para futuras investigaciones en esta área interdisciplinaria.

La integración de modelos probabilísticos como las distribuciones PH en aplicaciones prácticas tiene el potencial de mejorar significativamente la confiabilidad, eficiencia y robustez de diversos sistemas en áreas científicas y de ingeniería. En conjunto, este estudio enriquece el discurso sobre modelado y análisis estocástico, ofreciendo nuevas perspectivas y oportunidades para explorar la dinámica de sistemas complejos desde una visión innovadora y aplicada.

Aunque las distribuciones PH ofrecen una poderosa herramienta para modelar y analizar sistemas positivos debido a su flexibilidad y raíces en procesos de Markov, también presentan limitaciones importantes. En particular, las distribuciones PH pueden volverse computacionalmente complejas a medida que aumenta la dimensión del sistema, dificultando su aplicación práctica en casos con un gran número de estados o variables. Además, existen situaciones donde otros enfoques podrían ser más apropiados, como métodos basados en procesos de Lévy o modelos no paramétricos, especialmente cuando se requiere captar dinámicas no markovianas o dependencias a largo plazo. Por último, la necesidad de calibrar cuidadosamente los parámetros para representar adecuadamente fenómenos reales implica desafíos metodológicos que deben ser considerados. Reconocer estas limitaciones abre

oportunidades para el desarrollo de metodologías híbridas o extensiones del marco PH que amplíen su aplicabilidad en futuros trabajos.

Agradecimientos: Los autores agradecen cordialmente a los revisores y editores por sus valiosas observaciones, que contribuyeron significativamente a mejorar la claridad y calidad de este trabajo. También agradecemos el apoyo institucional y académico recibido durante el desarrollo de esta investigación a través del proyecto PIM23-3.

Contribución de las personas autoras: Conceptualización: LJRE, FBL. Metodología: LJRE, FBL. Análisis formal: LJRE. Investigación: LJRE, FBL. Escritura - Original: LJRE. Escritura - Revisión y Edición: LJRE, FBL. Visualización: FBL. Supervisión: LJRE.

Accesibilidad de datos: Todo el código utilizado para la implementación de los modelos y la reproducción de los resultados de este trabajo está disponible en el repositorio de GitHub del primer autor: <https://github.com/judithr19/PhaseType-and-Positive-systems.git>.

Referencias

- Ahmad, J., & Bladt, M. (2023). Phase-type representations of stochastic interest rates with applications to life insurance. *European Actuarial Journal*, 13(2), 571-606. <https://doi.org/10.1007/s13385-023-00346-4>
- Asmussen, S. (2003). *Applied Probability and Queues* (2nd). Springer.
- Asmussen, S., Nerman, O., & Olsson, M. (1996). Fitting phase-type distributions via the EM algorithm. *Scandinavian Journal of Statistics*, 23, 419-441. <https://www.jstor.org/stable/4616418>
- Bemporad, A. (2010). Automatic Control 1: Discrete-time linear systems [Archivo PDF]. https://cse.lab.imtlucca.it/~bemporad/teaching/ac/pdf/04a-TD_sys.pdf
- Bladt, M., Yslas, J., & Müller, A. (2022). Matrixdist: Statistics for Matrix Distributions. *R package version*, 1(5).
- Bladt, M., Esparza, L. J. R., & Nielsen, B. F. (2011). Bilateral matrix-exponential distributions. *Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models*, 27, 41-56. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4909-6_3
- Bladt, M., & Nielsen, B. F. (2017). *Matrix-exponential distributions in applied probability* (Vol. 81). Springer.
- Buchholz, P., Kriege, J., & Felko, I. (2014). *Input modeling with phase-type distributions and Markov models: theory and applications*. Springer.
- Commault, C., & Mocanu, S. (2003). Phase-type distributions and representations: some results and open problems for system theory. *International Journal of Control*, 76(6), 566-580. <https://doi.org/10.1080/0020717031000114986>
- Cui, S., Zhang, G., Jardón-Kojakhmetov, H., & Cao, M. (2025). On Metzler Positive Systems on Hypergraphs. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 12(3), 1980-1991. <https://doi.org/10.1109/TCNS.2025.3548300>

- Cvetković, A. (2019). Stabilizing the Metzler matrices with applications to dynamical systems. *Calcolo*, 57(1), 1. <https://doi.org/10.1007/s10092-019-0350-3>
- De Leenheer, P., & Aeyels, D. (2001). Stabilization of positive linear systems. *Systems & control letters*, 44(4), 259-271. [https://doi.org/10.1016/S0167-6911\(01\)00146-3](https://doi.org/10.1016/S0167-6911(01)00146-3)
- Esparza, L. J. R. (2011). *Maximum likelihood estimation of phase-type distributions* [PhD thesis]. Technical University of Denmark [IMM-PHD-2010-245].
- Fackrell, M. (2009). Modelling healthcare systems with phase-type distributions. *Health care management science*, 12, 11-26. <https://doi.org/10.1007/s10729-008-9070-y>
- Farina, L., & Rinaldi, S. (2000). *Positive linear systems: theory and applications* (Vol. 50). John Wiley & Sons.
- Hobolth, A., Rivas-González, I., Bladt, M., & Futschik, A. (2024). Phase-type distributions in mathematical population genetics: An emerging framework. *Theoretical Population Biology*, 157, 14-32. <https://doi.org/10.1016/j.tpb.2024.03.001>
- Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2012). *Matrix analysis*. Cambridge University Press.
- Horváth, G., & Telek, M. (2009). On the canonical representation of phase type distributions. *Performance Evaluation*, 66(8), 396-409. <https://doi.org/10.1016/j.peva.2008.11.002>
- Kaczorek, T., & Sajewski, L. (2014). *The realization problem for positive and fractional systems*. Springer.
- Kim, K. (2013). A Constructive Positive Realization with Sparse Matrices for a Continuous-Time Positive Linear System. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013(1), 878146. <https://doi.org/10.1155/2013/878146>
- Kim, K. (2015). On the Relation between Phase-Type Distributions and Positive Systems. *Abstract and Applied Analysis*, 2015(1), 731261. <https://doi.org/10.1155/2015/731261>
- Luenberger, D. G. (1979). *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models and Applications*. New York: J. Wiley Sons.
- Neuts, M. F. (1975). Probability distributions of phase type. *Liber Amicorum Prof. Emeritus H. Florin*.
- Neuts, M. F. (1981a). *Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*. Johns Hopkins University Press.
- Neuts, M. F. (1981b). *Matrix-geometric solutions in stochastic models: an algorithmic approach*. The John Hopkins University Press.
- O'Cinneide, C. A. (1989). On non-uniqueness of representations of phase-type distributions. *Communications in Statistics. Stochastic Models*, 5(2), 247-259. <https://doi.org/10.1080/15326348908807108>
- Rivas-González, I., Nørvang Andersen, L., & Hobolth, A. (2022). PhaseTypeR: phase-type distributions in R with reward transformations and a view towards population genetics. *BioRxiv*, 1-24. <https://doi.org/10.1101/2022.06.16.496381>
- Seneta, E. (2006). *Non-negative matrices and Markov chains*. Springer Science & Business Media.

- Varmazyar, M., Akhavan-Tabatabaei, R., Salmasi, N., & Modarres, M. (2019). Classification and properties of acyclic discrete phase-type distributions based on geometric and shifted geometric distributions. *Journal of Industrial Engineering International*, 15(4), 651-665. <https://doi.org/10.1007/s40092-018-0299-x>