Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 25, No 1. Agosto, 2024 – Febrero, 2025

ISSN 1659 -0643

Sobre las familias de ecuaciones cuadráticas diofánticas: teoremas, formación y características

On the families of diophantic quadratic equations: theorems, formation and characteristics

Alexander Villarroel Salazar
trabajos_alexvilla@hotmail.com
Investigador independiente
Carúpano - Venezuela

Francisco Villarroel Rosillo
fjvillr02@gmail.com
Investigador independiente
Carúpano - Venezuela

Recibido: 6 noviembre de 2023 Aceptado: 9 mayo 2024

Resumen: En este artículo, los autores insertan al mundo de la teoría de números su creación denominada "familia de ecuaciones cuadráticas diofánticas", las cuales surgen a partir de la idea de generalizar el comportamiento que tienen todas las parábolas de un mismo eje de simetría y cuyas raíces (puntos de corte sobre el eje x) sean valores enteros. Luego de hacer la verificación de las soluciones se llevan a cabo las verificaciones de generalización que provienen de la relación de las parábolas para su generación con números cuadrados u oblongos, según sea el coeficiente b que en la expresión $x^2 + bx = 0$. A lo largo del artículo, se presentan características de dichas familias, aspectos de su formación y se establecen ecuaciones para el coeficiente independiente $C(k)$ que dependen de sucesiones, así como para los valores de solución o raíces $x_1(k)$ y $x_2(k)$ que surgen de cada ecuación.

Palabras Clave: Ecuación cuadrática, soluciones diofánticas, sucesiones, números cuadrados, números oblongos.

Abstract: In this article, the authors insert into the world of number theory their creation called "family of Diophantine quadratic equations", which arise from the idea of generalizing the behavior of all parabolas of the same axis of symmetry, which is common and whose roots (cut points on the x axis) are integer values. After verifying the solutions, the generalization verifications are carried out that come from the relationship of the parabolas for their generation with square or oblong numbers, depending on the coefficient b in the expression $x^2 + bx = 0$. Throughout the article, characteristics of these families, aspects of their formation are presented and equations are established for the independent coefficient $C(k)$ that depend on sequences, as well as for the solution values or roots $x_1(k)$ and $x_2(k)$ that arise from each equation.

Keywords: Quadratic equation, Diophantine solutions, sequences, square numbers, oblong numbers

[1]Alexander José Villarroel Salazar. Estudiante del octavo semestre de matemáticas en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) sede Carúpano. Dirección postal: Urbanización Las Acacias, segunda calle, n° 5828, Carúpano. Código postal: 6150. Correo electrónico: alexvills76@gmail.com, trabajos_alexvilla@hotmail.com

[2]Francisco Javier Villarroel Rosillo. Estudiante del noveno semestre de ingeniería en sistema de la universidad nacional experimental de las fuerzas Armadas (UNEFA) sede Carúpano. Dirección postal: Urbanización Las Acacias, segunda calle, n° 5828, Carúpano. Código postal: 6150. Correo electrónico: fjvillr02@gmail.com

1. Introducción

El estudio de las ecuaciones cuadráticas es demasiado antiguo. Al respecto, Hergatacorzian y Alarcón (2015) señalan que:

> "El primer registro conocido de resolución de problemas que involucra lo que hoy llamamos ecuación de segundo grado data del 1700 a.C (lo que consta) en la tablilla BM 13901, que se encuentra en el Museo Británico. Siendo posteriormente usadas por Euclides En la proposición 28 del libro VI, encontramos lo siguiente: "Dividir una recta dada de manera que el rectángulo contenido por sus segmentos sea igual a un espacio dado. Ese espacio no debe ser mayor que el cuadrado de la bisección de la línea." (p.548-549)

Por otra parte, Camacho (2021) cita a Vosahlo (2009) quien expresa, que los babilonios conocían la representación gráfica del cuadrado de un binomio, y que es probable que esta civilización haya conocido también el método de completar el cuadrado y así resolver este tipo de ecuaciones, puesto que es posible deducir la fórmula a partir de una interpretación gráfica.

Desde el tiempo de los babilonios, las ecuaciones cuadráticas han sido objeto de estudio de matemáticos diversos que han avanzado en su forma de solución. Según Loh (2019), comenta que "la fórmula cuadrática ha sido un triunfo notable de los matemáticos, marcando la culminación de una larga búsqueda desde hace aproximadamente 4 mil años".

En este artículo no se procura establecer un método para hallar las soluciones de una ecuación cuadrática, en una forma particular, como hace la fórmula de resolvente o la forma de solución que fue aportada por Loh. El objetivo principal es mostrar que a partir del valor de b (par o impar) y a partir de las soluciones de la ecuación cuadrática (las cuales son iguales si b es par o separadas por una unidad si b es impar) se crea una teoría que permite evidenciar cuáles son los valores de c que al sustituirse en la ecuación cuadrática completa del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ permiten obtener ecuaciones cuadráticas de soluciones diofánticas, es decir, solo aquellas cuyas soluciones son valores enteros positivos y negativos.

2. Definiciones importantes

A continuación, se presentan una serie de definiciones y conceptos que constituyen aspectos clarificadores acerca de los temas que son necesarios conocer para posteriormente entender en qué consisten las familias de ecuaciones cuadráticas diofánticas. Es por ello, que es pertinente hablar de las ecuaciones cuadráticas, que cumplen con ser ecuaciones diofánticas, es decir, que tienen soluciones enteras. También es necesario explicar cómo los números pares tienen una relación con los números cuadrados y como los números impares se relacionan con los números oblongos, así como el concepto de sucesiones infinitas. Estas definiciones son importantes para comprender como en general los valores de c, x_1 y x_2 forman tres sucesiones infinitas.

2.1. Ecuaciones cuadráticas

Según De León y Timón (2014) y Hernández (2021) afirman que las ecuaciones cuadráticas o ecuaciones de segundo grado son aquellas en donde el exponente del término desconocido está elevado al cuadrado, es decir, la incógnita está elevada al exponente 2. Estos autores señalan que dichas ecuaciones tienen la forma general de un trinomio:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

donde a, b y c son números reales y se conocen como coeficientes. Así, a es el coeficiente de x^2, b es el coeficiente de x y c es el término independiente. Según los autores antes citados, la receta (fórmula)

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

da fácilmente las soluciones o valores de x, es decir, x_1 y x_2, que cumplen con ser soluciones de la ecuación 1. Se puede conceptualizar a partir de la ecuación 1 que hay dos tipos de ecuaciones cuadráticas, ya que las mismas pueden ser completas o incompletas, dependiendo de si existen el término dependiente de x (b) o independiente (c).

Entonces, una ecuación cuadrática es completa cuando sus tres coeficientes a, b y c son todos diferentes a cero ($a \neq 0,\ b \neq 0\ \text{ y }\ c \neq 0$) y puede ser incompleta en dos posibles casos para los cuales:

- Si $b = 0$ entonces queda la ecuación cuadrática de la forma $x^2 + c = 0$, en la cual se cumple siempre una de dos posibilidades:
  - si c es positivo, da soluciones complejas, y
  - si c es negativo, siempre es generador de dos raíces reales iguales (o con signo contrario).
- Si $c = 0$, entonces queda la ecuación cuadrática de la forma $x^2 + bx = 0$, la cual para todo valor de $b \in \mathbb{N}$ da dos soluciones enteras donde una es $x_1 = 0$ y $x_2 = -b$.

2.2. Ecuaciones diofánticas

Para Morales (2009) una ecuación diofántica es una ecuación algebraica en la que aparecen varias variables cuyas soluciones son números enteros. Es decir, resolver una ecuación diofántica, consiste en determinar qué números enteros la cumplen. Su nombre lo toman del matemático Diofanto de Alejandría, quien, además de ser uno de los primeros en utilizar simbolismo en álgebra, se dedicó entre otras cosas al estudio de estas ecuaciones.

Lo anterior significa que en una ecuación diofántica aparecen una o varias variables cuyas soluciones son números enteros. Estas ecuaciones pueden ser de dos, tres o más variables, así como de primer, segundo o mayor grado, existiendo también de tipo exponencial. Es decir, que resolver una ecuación diofántica consiste en determinar qué números enteros la satisfacen o verifican que se cumpla la igualdad.

La ecuación diofántica se caracteriza porque todos los coeficientes pertenecen al conjunto de los números enteros, de las que se buscan soluciones positivas o negativas, pero enteras, esto es, que pertenezcan al conjunto de los números enteros.

2.3. Sucesiones

Según libropedia (2020) una sucesión es un conjunto de elementos ordenados de forma ascendente o descendente. Los elementos de este conjunto se denominan términos y estos siguen una regla, la cual permite calcular cada uno de ellos. Los términos de una sucesión se expresan con subíndices: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5..., los cuales indican la posición de cada uno dentro de la secuencia, por ejemplo, el término a_1 ocupa la primera posición de la secuencia, el término a_2 corresponde al segundo lugar y así sucesivamente con cada uno.

Se puede considerar que una sucesión es una lista de números escritos en un orden definido. El número a_1 recibe el nombre de primer término, a_2 es el segundo término y, en general, a_n es el n-ésimo término. Aquí se trata exclusivamente con sucesiones infinitas, por lo que cada término a_n tiene un sucesor $a_{(n+1)}$.

Para todo entero positivo n hay un número correspondiente a_n, por lo que una sucesión se puede definir como una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos. Por lo regular, se escribe a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

Una sucesión es definida o establecida si y sólo si existe una regla dada que determina el término n-ésimo (léase enésimo) correspondiente a un n entero positivo; esta regla puede estar dada por la fórmula del término n-ésimo que se le denomina también término general de la sucesión o ley de formación de la sucesión. Es la regla que permite calcular un término cualquiera de la sucesión.

2.4. Números cuadrados

Anfossi y Flores (2006) definieron que, en álgebra, el cuadrado de un número n se expresa como n^2, y equivale a $n \times n$. La operación algebraica de elevar al cuadrado un número n proporciona el área de un cuadrado geométrico cuyo lado mide n. Por esta razón, tal operación se conoce como elevar al cuadrado.

Por su parte, Barrios (2020) indica que un número cuadrado perfecto es un número que se obtiene al elevar al cuadrado cualquier número natural. Es decir, que los cuadrados resultan de tomar cualquier número natural y hacer la multiplicación por sí mismo, de lo cual se obtiene lo que se llama un cuadrado, pues según los pitagóricos resulta exactamente una figura cuadrada cuyo lado mide el valor del natural que se use.

2.5. Números oblongos

Según Alonso (2017) y los autores Pérez y Merino (2020) se llama número oblongo, prónico o rectangular a aquel que es el resultado de la multiplicación de dos números naturales consecutivos. Por lo tanto, si n es un número natural, un número oblongo que denotará $Ob(n)$ está dado por

$$Ob(n) = n \cdot (n+1) \tag{3}$$

Los autores señalan que 12 es un número oblongo, lo cual es correcto, ya que 3 y 4 son números naturales consecutivos y 12 es su producto, Los primeros números oblongos son:

$$0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 132, 156, 182, 210, 240, 272, 306, 342, 380, 420, 462, \ldots$$

(sucesión A0002378 en OEIS)

El n-ésimo número oblongo es dos veces el n-ésimo número triangular, que se denota por $T(n)$ donde n es su posición u orden y se puede definir, que la fórmula para hallar un triangular de cualquier orden está dada por:

$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2},\ \forall n \geq 1 \tag{4}$$

Por otra parte, todos los oblongos son pares y el único que es primo es el 2, lo que se debe a que todo producto de dos números consecutivos es par y solo hay un primo par que es el número 2.

2.6. Relación de pares con números cuadrados

Todo número par es representable en la forma $2n$ para algún valor de n cualquiera. En el caso de que b sea par, siempre la solución inicial (que corresponde a $x_1(0)$ y $x_2(0)$ respectivamente) de la ecuación cuadrática se corresponde a aquella que tenga las dos raíces o soluciones iguales (o con signo contrario), la cual se obtiene al hacer la completación del cuadrado en la ecuación 2 .

2.7. Relación de impares con números oblongos

Todo número impar es representable en la forma $2n + 1$ para algún valor de n cualquiera. En el caso de que b sea impar, siempre la solución inicial de la ecuación cuadrática se corresponde a aquella que tenga las dos raíces o soluciones separadas una unidad la cual se obtiene al hacer la multiplicación de los dos números consecutivos que suman b, es decir, que si $b = 2n + 1$ entonces deben multiplicarse los valores de n y $n + 1$.

3. Resultados

3.1. Origen de las familias de ecuaciones cuadráticas diofánticas

Las familias de ecuaciones cuadráticas diofánticas surgieron de estudiar con curiosidad el comportamiento que siguen las ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, cuando se dejan los dos primeros coeficientes fijos, en cada caso, es decir, para $a = 1$ (siempre) y b con un valor par o impar fijo, de lo cual se dedujo que hay un conjunto de parábolas con el mismo eje de simetría, pero de vértice distinto esto es que tienen el mismo eje de simetría $V_x = \frac{-b}{2}$ y se obtienen valores de $V_y = \frac{-b^2 + 4c}{4}$ al cambiar el valor de c, de manera que se obtengan siempre soluciones enteras (positivas o negativas).

3.2. Características de las familias de ecuaciones cuadráticas diofánticas

Al estudiar los valores de b se pudo observar un comportamiento que es estándar respecto a la consideración de los valores de c como términos de una sucesión. Es decir, que el valor de C se puede llevar a una fórmula o expresión por constituir un término enésimo $C(k)$ de una sucesión y en consecuencia los valores de x_1 y x_2 también pueden expresarse como sucesiones $x_1(k)$ y $x_2(k)$ respectivamente y esto permite generalizar el comportamiento de las ecuaciones cuadráticas con base en familias.

3.3. Formación de las familias de ecuaciones cuadráticas diofánticas.

$$x^2 + bx = 0 \tag{5}$$

Se puede afirmar que una familia de ecuaciones cuadráticas diofánticas que se representa por una ecuación cuadrática general de la forma:

$$x^2 + bx + C(n) = 0 \tag{6}$$

Donde el coeficiente de x^2 es siempre 1, b es un valor fijo y donde $C(n)$ es una sucesión de valores que obedece a una fórmula o regla de formación, para la cual al buscar sus raíces siempre se obtienen valores enteros, es decir, que ambas soluciones x_1 y x_2 pertenecen al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.

En una familia de ecuaciones cuadráticas diofánticas todas las ecuaciones generan parábolas que tienen el mismo eje de simetría, mientras que la abertura de las parábolas resultantes es mucho mayor a medida que va cambiando el valor de c.

3.4. Clasificación de las familias de ecuaciones cuadráticas.

A partir de los posibles valores que puede tener b (sea par o impar) se pueden encontrar dos tipos de familias de ecuaciones cuadráticas diofánticas.

Ello establece que para cada par hay una familia de ecuaciones cuadráticas diofánticas, cuya solución inicial es variante según el valor de b, que siempre se pueden definir por $x_1(0)$ y $x_2(0)$, dependiendo del cuadrado que resulte para el valor de b, pero donde el posterior comportamiento de las soluciones tiende a ser muy similar tanto si se trabaja para $b = 2$, con $b = 20$ o con cualquier otro valor que sea par.

En el caso de b impar se aplica un procedimiento de completación con un oblongo que corresponda de acuerdo al valor de b y el posterior comportamiento de las soluciones tiende a ser muy similar tanto si se trabaja para $b = 1$, con $b = 17$ o con cualquier otro valor que sea impar.

3.5. Caso 1: para valores de b par

A partir de la ecuación 5 dado que b es par, siempre se cumple que al completar cuadrados se obtiene que:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0 \tag{7}$$

De la ecuación 7 las dos soluciones son iguales y vienen dadas por $x_1 = -\dfrac{b}{2}$ y $x_2 = -\dfrac{b}{2}$, ya que se tiene el caso de un trinomio cuadrado perfecto. Así, de comparar la ecuación 6 con la ecuación 5 y tomando $n = 0$ se obtiene $C(0)$ y debe ocurrir que $C(0) = \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$. Al tratar las soluciones de cada ecuación x_1 y x_2 como dos sucesiones se tiene que las soluciones iniciales son $x_1(0) = -\dfrac{b}{2}$ y $x_2(0) = -\dfrac{b}{2}$.

En este caso, dado que la completación de cuadrados hace obvia la generación de dos soluciones iguales x_1 y x_2, no es necesario verificar con la ecuación 2 que en efecto se obtienen los valores previamente encontrados.

Como fue presentada anteriormente la relación entre números pares y números cuadrados entonces ocurre que luego las demás ecuaciones de la mencionada familia de ecuaciones cuadráticas, quedan con los dos primeros términos fijos, y siempre tienen como tercer término un valor que será:

$$c(k) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - k^2 \quad \text{con} \quad k \geq 0 \tag{8}$$

3.6. Verificación de generalidad 1

Al sustituir la ecuación 8 en la ecuación 6 nos queda una ecuación general de la forma:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - k^2 = 0 \tag{9}$$

Al resolver según lo planteado en la ecuación 2 nos queda con $a = 1$, $b = b$ y $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - k^2$ la siguiente solución:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 - k^2\right)}}{2}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - b^2 + 4k^2}}{2}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4k^2}}{2}$$
$$x = \frac{-b \pm 2k}{2}$$

De lo anterior obtenemos la siguiente expresión:

$$x = \frac{-b \pm 2k}{2}$$

Entonces al resolver, por el doble signo pueden expresarse dos soluciones que son:

$$x_1 = \frac{-b + 2k}{2} = -\frac{b}{2} - k$$

y

$$x_1 = \frac{-b - 2k}{2} = -\frac{b}{2} + k$$

Es importante señalar que para los valores de x_1 y x_2 siempre se cumple que $x_1 + x_2 = -b$ sin importar el valor de k. El lector puede apreciar que de la sustitución del valor general de $C(k)$ se pueden obtener dos soluciones que dependen tanto del valor de b como del de k que sea asumido. Lo anterior permite apreciar que en cada caso las soluciones x_1 y x_2 también experimentan un comportamiento en forma de sucesiones, cuya fórmula general para hallar dichas raíces están dadas por las ecuaciones:

$$x_1(k) = -\frac{b}{2} - k \; con \; k \geq 0 \tag{10}$$

$$x_2(k) = -\frac{b}{2} + k \; con \; k \geq 0 \tag{11}$$

Lo anterior indica que para toda familia de ecuaciones cuadráticas diofánticas en la ecuación con b par, los valores de $C(k)$ van variando en relación con los cuadrados de los números naturales, es decir, que van haciendo que de una parábola con las dos raíces iguales se pase a nuevas parábolas donde sus cortes con el eje x se van abriendo a medida que aumenta el valor de k tanto en la ecuación 8 como en las ecuaciones 10 y 11.

Nota: la verificación de generalidad 1 permite apreciar el cumplimiento general de la ecuación 8 y cómo obtener en cada caso los valores de $C(k)$ así como los valores de $x_1(k)$ y $x_2(k)$.

3.7. Algunos ejemplos de aplicación

A continuación, se presentan ejemplos del 1 al 5 de la aplicación de las ecuaciones 8, 10 y 11.

3.7.1. Ejemplo 1

Para $x^2 + 2x = 0$ se tiene que $b = 2$, $c = 1$. Al usar la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$, se obtiene que $x_1(0) = x_2(0) = -1$. En la tabla 1 se presenta la familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 2$.

Tabla 1: Familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 2$. Elaboración propia.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(k)$	1	0	-3	-8	-15	-24	-35	-48	-63	-80
$x_1(k)$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
$x_2(k)$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

3.7.2. Ejemplo 2

Para $x^2 + 4x = 0$ se tiene que $b = 2$, $c = 4$. Al usar la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$, se obtiene que $x_1(0) = x_2(0) = -2$. En la tabla 2 se presenta la familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 4$.

Tabla 2: Familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 4$. Elaboración propia

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(k)$	4	3	0	-5	-12	-21	-32	-45	-60	-77
$x_1(k)$	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11
$x_2(k)$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

3.7.3. Ejemplo 3

Para $x^2 + 6x = 0$ se tiene que $b = 3$, $c = 9$. Al usar la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$, se obtiene que $x_1(0) = x_2(0) = -3$. En la tabla 3 se presenta la familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 6$.

Tabla 3: Familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 6$. Elaboración propia

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(k)$	9	8	5	0	-7	-16	-27	-40	-55	-72
$x_1(k)$	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
$x_2(k)$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

3.7.4. Ejemplo 4

Para $x^2 + 8x = 0$ se tiene que $b = 4$, $c = 16$. Al usar la ecuación $x^2 + 8x + 16 = 0$, se obtiene que $x_1(0) = x_2(0) = -4$. En la tabla 4 se presenta la familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 8$.

Tabla 4: Familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 8$. Elaboración propia

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(k)$	16	15	12	7	0	-9	-20	-33	-48	-65
$x_1(k)$	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13
$x_2(k)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

3.7.5. Ejemplo 5

Para $x^2 + 10x = 0$ se tiene que $b = 5$, $c = 25$. Al usar la ecuación $x^2 + 10x + 25 = 0$, se obtiene que $x_1(0) = x_2(0) = -5$. En la tabla 5 se presenta la familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 10$.

Tabla 5: Familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 10$. Elaboración propia

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(k)$	25	24	21	16	9	0	-11	-24	-39	-56
$x_1(k)$	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14
$x_2(k)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Nota: En los ejemplos del 1 al 5 anteriormente indicados, el lector puede apreciar la efectividad de las fórmulas 8, 10, y 11. De hecho, puede verse que la suma de los valores de x_1 y x_2 es siempre igual a $-2b$, lo que evidencia que al pasar de raíz a términos se logra la verificación 1.

4. Caso 2: para valores de b impar

En el caso de que b sea impar, es decir, si $b = 2n + 1$, se busca el valor de c a partir de $2n + 1$, donde se obtienen las dos soluciones (que están separadas una unidad), las cuales se dan cuando $c = n(n+1)$. En efecto, puede verse que para la ecuación de la forma:

$$x^2 + (2n+1)x + n(n+1) = 0 \tag{12}$$

Al resolver la ecuación 12 por medio de la ecuación 2 al tomar $a = 1$, $b = 2n + 1$, y $c = n(n + 1)$, nos queda lo siguiente:

$$x = \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{(2n+1)^2 - 4(n)(n+1)}}{2}$$
$$x = \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 4n}}{2}$$
$$x = \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{1}}{2}$$

De lo anterior obtenemos la siguiente expresión: $x = \dfrac{-2n-1\pm 1}{2}$

De donde al buscar las dos soluciones que resultan por el doble signo se obtienen las soluciones: $x = \dfrac{-2n-1+1}{2} = \dfrac{-2n}{2} = -n$

y

$x = \dfrac{-2n-1-1}{2} = \dfrac{-2n-1}{2} = -n-1$

De observar los valores de x_1 y x_2 obtenidos previamente puede verse que las soluciones difieren en una unidad como fue asumida inicialmente.

Como fue vista la relación de impares con oblongos entonces ocurre que luego las demás ecuaciones de la mencionada familia de ecuaciones cuadráticas diofánticas quedan con los dos primeros términos iguales y tienen como tercer término:

$$c(k) = n(n+1) - k(k+1) \quad \text{con} \quad k \geq 1 \tag{13}$$

Que puede reescribirse como sigue a continuación:

$$\begin{aligned} c(k) &= n^2 + n - k^2 - k \\ c(k) &= (n^2 - k^2) + (n-k) \\ c(k) &= (n-k)(n+k) + (n-k) \end{aligned}$$

Así, se tiene:

$$c(k) = (n-k)(n+k+1) \tag{14}$$

4.1. Verificación de generalidad 2

Al sustituir la ecuación 13 en la ecuación 5

nos queda una ecuación general de la forma:

$$x^2 + x(2n+1) + n^2 + n - k^2 - k = 0 \tag{15}$$

Al resolver según lo planteado en la ecuación 2 nos queda con $a = 1$, $b = 2n+1$ y $c = n^2 + n - k^2 - k$ la siguiente solución:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{(2n+1)^2 - 4(n^2+n-k^2-k)}}{2} \\ x &= \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{4n^2+4n+1-4n^2-4n+4k^2+4k}}{2} \\ x &= \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{4k^2+4k+1}}{2} \\ x &= \frac{-(2n+1) \pm (2k+1)}{2} \end{aligned}$$

De lo anterior, al resolver, por el doble signo pueden expresarse dos soluciones que son:

$$x_1 = \frac{-2n - 1 + 2k + 1}{2} = \frac{-2n + 2k}{2} = -n + k$$

y

$$x_2 = \frac{-2n - 1 - 2k - 1}{2} = \frac{-2n - 2k - 2}{2} = -n - k - 1$$

Como puede verse de la sustitución del valor general de $c(k)$ se pueden obtener dos soluciones x_1 y x_2, que dependen tanto del valor de b como del de k que sea asumido.

Lo anterior permite apreciar que en cada caso las soluciones x_1 y $x_2$también experimentan un comportamiento en forma de sucesiones, cuya fórmula general para hallar dichas raíces están dadas por las ecuaciones:

$$x_1(k) = -n + k \text{ con } k \geq 0 \tag{16}$$

$$x_2(k) = -n - k - 1 \text{ con } k \geq 0 \tag{17}$$

Lo anterior indica que para toda familia de ecuaciones cuadráticas diofánticas en la ecuación con b impar los valores de $c(k)$ van variando en relación a los oblongos de los números naturales, es decir, que van haciendo que de una parábola con las dos raíces separadas apenas por una unidad se pase a nuevas parábolas, donde sus cortes con el eje x se van abriendo a medida que aumenta el valor de k tanto en la ecuación 14 como en las ecuaciones 16 y 17.

Nota: La verificación de generalidad 2 permite apreciar el cumplimiento general de la ecuación 15 y cómo obtener en cada caso los valores de $c(k)$ así como $x_1(k)$ y $x_2(k)$.

4.2. Algunos ejemplos de aplicación

A continuación, se presentan ejemplos del 6 al 10 de la aplicación de las ecuaciones 14, 16 y 17.

4.2.1. Ejemplo 6

Para $x^2 + x = 0$, se tiene que $n = 0$, $b = 1$, $c = 0 \cdot 1 = 0$. Al usar la ecuación $x^2 + x = 0$, se obtiene que $x_1(0) = -1$ y $x_2(0) = 0$. En la tabla 6 se presenta la familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 1$.

Tabla 6: Familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 1$. Elaboración propia

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(k) = n(n+1) - (k)(k+1)$	0	-2	-6	-12	-20	-30	-42	-56	-72	-90
$x_2(n) = -n - k - 1$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
$x_1(n) = -n + k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

4.2.2. Ejemplo 7

Para $x^2 + 3x = 0$, se tiene que $n = 1$, $b = 3$, $c = 1 \cdot 2 = 2$. Al usar la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$, se obtiene que $x_1(0) = -2$ y $x_2(0) = -1$. En la tabla 7 se presenta la familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 3$.

Tabla 7: Familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 3$. Elaboración propia

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(k) = 2 - k(k+1)$	2	0	-4	-10	-18	-28	-40	-54	-70	-88
$x_2(k) = -2 - k$	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11
$x_1(k) = -1 + k$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

4.2.3. Ejemplo 8

Para $x^2 + 5x = 0$, se tiene que $n = 2$, $b = 5$, $c = 2 \cdot 3 = 6$. Al usar la ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$, se obtiene que $x_1(0) = -3$ y $x_2(0) = -2$. En la tabla 8 se presenta la familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 5$.

Tabla 8: Familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 5$. Elaboración propia

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(k) = 6 - k(k+1)$	6	4	0	-6	-14	-24	-36	-50	-66	-84
$x_1(k) = -3 - n$	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
$x_2(k) = -2 + n$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

4.2.4. Ejemplo 9

Para $x^2 + 7x = 0$, se tiene que $n = 3$, $b = 7$, $c = 3 \cdot 4 = 12$. Al usar la ecuación $x^2 + 7x + 12 = 0$, se obtiene que $x_1(0) = -4$ y $x_2(0) = -3$. En la tabla 9 se presenta la familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 7$.

Tabla 9: Familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 7$. Elaboración propia

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(k) = 12 - k^2$	12	10	6	0	-8	-18	-30	-44	-60	-78
$x_1(k) = -4 - k$	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13
$x_2(k) = -3 + k$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

4.2.5. Ejemplo 10

Para $x^2 + 9x = 0$, se tiene que $n = 4$, $b = 9$, $c = 4 \cdot 5 = 20$. Al usar la ecuación $x^2 + 9x + 20 = 0$, se obtiene que $x_1(0) = -5$ y $x_2(0) = -4$. En la tabla 10 se presenta la familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 9$.

Tabla 10: Familia de ecuaciones para $a = 1$ y $b = 9$. Elaboración propia

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$c(k) = 20 - k(k+1)$	20	18	14	8	0	-10	-22	-36	-52	-70
$x_2(k) = -5 - k$	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14
$x_1(k) = -4 + k$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Nota: En los ejemplos del 6 al 10 anteriormente indicados, el lector puede apreciar la efectividad de las fórmulas 14, 16 y 17. De hecho, se puede observar que la suma de los valores de x_1 y x_2 es siempre igual a $-b$, lo que evidencia que al pasar de raíz a términos se logra la verificación 2.

Teorema 1 familia de ecuaciones cuadráticas diofánticas con b par

Si se parte de la ecuación cuadrática incompleta $x^2 + bx = 0$, para todo valor de b par se cumple que se completa la ecuación cuadrados y se obtiene $x^2 + bx + c(k) = 0$ con soluciones enteras siempre que $c(0) = \frac{b^2}{4}$. Entonces, $x_1(0) = -\frac{b}{2}$ y $x_2(0) = -\frac{b}{2}$. Para todo $k \geq 1$, entonces $c(k) = \frac{b^2}{4} - k^2$ y se obtiene $x_1(k) = -\frac{b}{2} + k$ y $x_2(k) = -\frac{b}{2} - k$.

Demostración. Se sustenta en la completación de cuadrados para hallar los valores de $c(0)$, $x_1(0)$ y $x_2(0)$ y luego en la verificación 1 para determinar las soluciones para $c(k)$, $x_1(k)$ y $x_2(k)$ para todo valor de $k \geq 1$ según las ecuaciones 8, 10 y 11. □

Teorema 2 familia de ecuaciones cuadráticas diofánticas con b impar

Si se parte de la ecuación cuadrática incompleta $x^2 + bx = 0$, para todo valor de b impar se cumple que se completa con un oblongo la ecuación $x^2 + bx + c(k) = 0$ con soluciones enteras siempre que $c(0) = n(n + 1)$. Entonces, $x_1(0) = -n$ y $x_2(0) = -n - 1$. Para todo $k \geq 1$, entonces $c(k) = n^2 + n - k^2 - k$ y se obtiene $x_1(k) = -n + k$ y $x_2(k) = -n - 1 - k$.

Demostración. Se sustenta en la completación de cuadrados para hallar los valores de $c(0)$, $x_1(0)$ y $x_2(0)$ y luego en la verificación 2 para determinar las soluciones para $c(k)$, $x_1(k)$ y $x_2(k)$ para todo valor de $k \geq 1$ según las ecuaciones 14, 16 y 17. □

5. Conclusiones

El lector puede apreciar a partir de las definiciones anteriores, de las ecuaciones formuladas, de las 2 verificaciones realizadas y de los 10 ejemplos usados, así como de los 2 teoremas formulados, que las familias de ecuaciones cuadráticas diofánticas representan un método o dinámica de generalización de las parábolas de un mismo eje de simetría, que surgen a partir de un mismo valor de $a = 1$ y de un mismo valor de b, resultando dos tipos de familias cuyas ecuaciones son válidas independientemente del valor de b (par o impar) que sea usado y donde se comprueban varios elementos de importancia, entre los cuales se pueden enlistar los siguientes:

1. Tanto el término independiente $C(k)$ como las dos soluciones o raíces, $x_1(k)$ y $x_2(k)$, son todas expresables en forma de sucesiones infinitas.

2. Por otra parte, las explicaciones y ecuaciones desarrolladas hacen ver la dependencia que tienen los términos independientes $C(k)$ de la siguiente manera:

   - Se verifica la relación de los valores de b par, primero con el cuadrado que resulta de hacer la completación de cuadrado para hallar dos raíces iguales y luego con una resta de dos cuadrados que corresponde a la forma de $C(k)$ de cuya factorización se obtienen los valores de $x_1(k)$ y $x_2(k)$.

- Se verifica la relación de los valores de b impar, primero con el oblongo $n(n+1)$ ya que su suma es $b = 2n+1$ y luego con la diferencia de oblongos, que corresponde a la forma de $C(k)$ de cuya factorización se obtienen los valores de $x_1(k)$ y $x_2(k)$.

3. Los valores de $x_1(k)$ y $x_2(k)$ independientemente del valor de b que sean usados tienen un comportamiento que es demasiado sencillo, ya que siempre que se genera un nuevo valor de c ocurre que $x_1(k)$ disminuye o aumenta una unidad, mientras que $x_2(k)$ se comporta al contrario.

4. La teoría presentada evidencia que los valores que producen soluciones en los enteros no se dan al azar conociendo un par de ellas, x_1 y x_2, sino que los demás valores tienen una dependencia estricta de las soluciones $x_1(n) = x_1(0) - k$ y $x_2(n) = x_2(0) + k$ y esto sucede para los casos en los que b es par o impar.

5. La teoría permite apreciar que en el caso de valores de b pares los valores que se generan para el término independiente puede ser ocupado por valores pares o impares, mientras que, si b es impar, es imposible obtener una ecuación de raíces enteras cuando se tenga c impar, es decir, si b es impar se requiere que el tercer valor en la ecuación cuadrática sea siempre par, para que pueda pertenecer a alguna familia de ecuaciones cuadráticas diofánticas, ya que cuando b es impar siempre se debe tener como tercer valor un número oblongo o en su defecto la resta de dos oblongos y dado que los oblongos son pares es siempre imposible obtener algún valor de c que sea impar.

6. Bibliografía

[1] Alonso, J. (2017). *Números Oblongos*. Exercitium. Recuperado de https://www.glc.us.es/~jalonso/exercitium/numeros-oblongos/

[2] Anfossi, y Flores, M. (2006). Lenguaje algebraico. En *Álgebra* (p. 20). Cuauhtémoc, México: Editorial desconocida. ISBN 968-436-213-7.

[3] Barrios, L. (2020). *Números cuadrados perfectos*. Adicción Matemática. Recuperado de https://blogsaverroes.juntadeandalucia.es/recursosdematematicas/numeros-cuadrados-perfectos/

[4] Camacho, J. (2021). *El León no es como lo pintan: Un método simple para resolver ecuaciones de segundo grado*. Recuperado de https://www.masscience.com/el-leon-no-es-como-lo-pintan-un-metodo-simple-para-resolver-ecuaciones-de-segundo-grado/

[5] De León, M., y Timón, A. (2014). *El origen de la fórmula de la ecuación de segundo grado*. Matemáticas y sus fronteras. Recuperado de https://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/2014/05/22/13815

[6] Hergatacorzian, A., y Alarcón, C. (2015). Resolución de la ecuación de segundo grado: una alternativa a Bhaskara. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), *Actas del 5° Congreso Uruguayo de Educación Matemática* (pp. 547-554). Montevideo: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.

[7] Hernández, R. (2021). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas: Ecuaciones de segundo grado y sistemas lineales*. España. Recuperado de https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3A/05_Ec2grado_3A.pdf

[8] Libropedia. (2020). Recuperado de https://elbibliote.com/libro-pedia/manual_matematica/?tag=finitas

[9] Loh, P. (2019). *A Simple Proof of the Quadratic Formula*. Recuperado de https://arxiv.org/pdf/1910.06709.pdf

[10] Morales, M. (2009). *Cómo resolver ecuaciones diofánticas*. Recuperado de https://www.gaussianos.com/como-resolver-ecuaciones-diofanticas/

[11] Pérez, J., y Merino, M. (2020). *Número Oblongo - Qué es, definición y concepto*. Recuperado de https://definicion.de/oblongo/

[12] Vosahlo, G. (2009). *Algunos métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado completas, desde los babilonios hasta Descartes*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/17700/1/Vosahlo%202009Algunos.pdf