Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 23, No 2. Marzo, 2023 – Agosto, 2023
ISSN 1659 -0643

Biyección entre $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$ utilizando el árbol de Calkin–Wilf: Un ejemplo gráfico

| Bijection between $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ and $\mathbb{N}$ using the Calkin-Wilf tree: A graphic example |

Arturo Salico
arturo.nardi@bue.edu.ar
IES N°1 -“Dra. Alicia Moreau de Justo”
Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

Recibido: 26 abril 2022 Aceptado: 2 Agosto 2022

Resumen: Hay tantos pares de números racionales como números naturales. ¿Cómo mostramos a nuestros estudiantes de topología este hecho tan contraintuitivo? En este breve artículo, haremos una demostración gráfica de la coordinabilidad entre $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}_0$, por ende también con $\mathbb{N}$, es decir, la coordinabilidad entre el plano racional y los números naturales.

Palabras Clave: coordinabilidad, conjuntos numerables, topología.

Abstract: There are as many pairs of rational numbers as there are natural numbers. How do we show our topology students this very counterintuitive fact? In this brief article, we will make a graphic demonstration of the coordinability between $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ and $\mathbb{N}_0$, therefore also with $\mathbb{N}$, that is, the rational plane has the same cardinality of the natural numbers.

Keywords: coordinability, countable sets, topology.

1. Objetivos

Los objetivos de este artículo son:

- Expandir los conocimientos de los estudiantes de matemáticas y/o del profesorado de matemáticas.
- Brindar un ejemplo interesante que despierte el interés por este cuerpo de conocimientos matemáticos.
- Hacer más accesibles este tipo de conocimentos abstractos de la topología y pensarlos desde un punto de vista gráfico.

2. Introducción

El concepto de enumerar en su forma más fundamental es establecer una relación de correspondencia biunívoca entre elementos de dos conjuntos. Esta correlación es biunívoca porque a cada elemento de un conjunto le corresponde un único elemento del otro conjunto. Es interesante para el estudiante poder conocer la forma de contar productos cartesianos ya que esto le permite establecer biyecciones entre estos productos y los números naturales.

En este caso, trabajaremos con el conjunto de los números naturales (números que permiten representar la cantidad de elementos de un conjunto) y el conjunto de los pares ordenados con ambas coordenadas racionales. Los números racionales son aquellos números que pueden expresarse como fracción mediante el cociente de dos números enteros, un numerador a y un divisor b (distinto de cero) de tal forma que un número racional q es igual a $\frac{a}{b}$. El término "racional" proviene de razón. Cada número racional se puede representar con infinitas fracciones equivalentes. Por ejemplo, el número racional $\frac{1}{3}$ se puede representar también por ejemplo como $\frac{2}{6}$. Si el numerador y el divisor son coprimos entonces decimos que la fracción se encuentra en forma reducida.

A continuación formalizaremos la idea intuitiva de *tener la misma cantidad de elementos*, con la siguiente definición [3]:

Definición 1 (Coordinabilidad)
Dos conjuntos A y B son coordinables si y sólo sí existe una función $f : A \to B$ biyectiva.

Aclararemos que la notación "A es coordinable con B" lo indicamos como $A \sim B$.

Ya se ha mostrado de varias formas la coordinabilidad entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}$, un ejemplo gráfico de ello es, el árbol de Calkin–Wilf (ver Figura 1). Es un árbol binario que tiene un número racional en cada nodo del mismo. En el artículo antes citado se ha demostrado que todo número racional positivo se le asigna un único número natural n, de manera que existe una biyección entre ambos conjuntos mencionados.

Si recorremos el árbol de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, la secuencia generada comienza con los siguientes números racionales:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \ldots$$

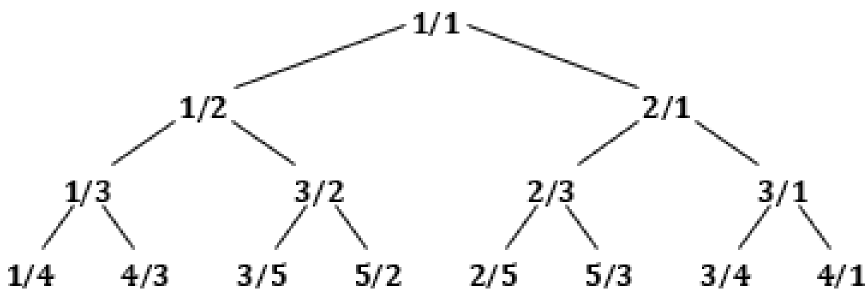

Figura 1: Los primeros cuatro niveles del árbol de Calkin–Wilf [4].

La secuencia de Calkin–Wilf puede generarse directamente con la fórmula ya demostrada en [1]:

$$q_{i+1} = \frac{1}{\lfloor q_i \rfloor + 1 - q_i}$$

Donde q_i denota el i-ésimo número en la secuencia, a partir de $q_1 = 1$, y $\lfloor q_i \rfloor$ representa la parte entera. Esta secuencia contiene a todo racional positivo exactamente una vez y en forma reducida. Otra forma de generar todo el árbol es mediante las reglas que generan los nodos "a izquierda" y "a derecha" del nodo padre [4]. Si comenzamos con el número racional $\frac{a}{b}$ que será nuestro nodo inicial, entonces su hijo izquierdo será el número $\frac{a}{a+b}$ y su hijo derecho será $\frac{a+b}{b}$, todos los numeradores con respecto a los denominadores son coprimos, es decir, su máximo común divisor es el 1. Además de este hecho, también ocurre que las fracciones no se repiten en el árbol ya que, en caso de hacerlo, también se repetiría el nodo padre y el padre del padre, etc, hasta llegar a $\frac{1}{1}$. Pero esto no es posible porque dicha fracción aparece por única vez dado que $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1$ es siempre mayor a $\frac{1}{1}$ y, por otro lado, $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{\frac{a+b}{a}} = \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$ es siempre menor a $\frac{1}{1}$ (con a y b positivos).

Para extender el árbol hacia los racionales negativos podemos reescribir las reglas de izquierda y derecha en sentido inverso (ver Figura 2), y por lo tanto, a izquierda $\frac{a}{b}$ tendremos $\frac{a-b}{b}$ y a la derecha tendremos $\frac{a}{b-a}$. Análogamente, cada racional negativo es único y se encuentra en forma de fracción reducida.

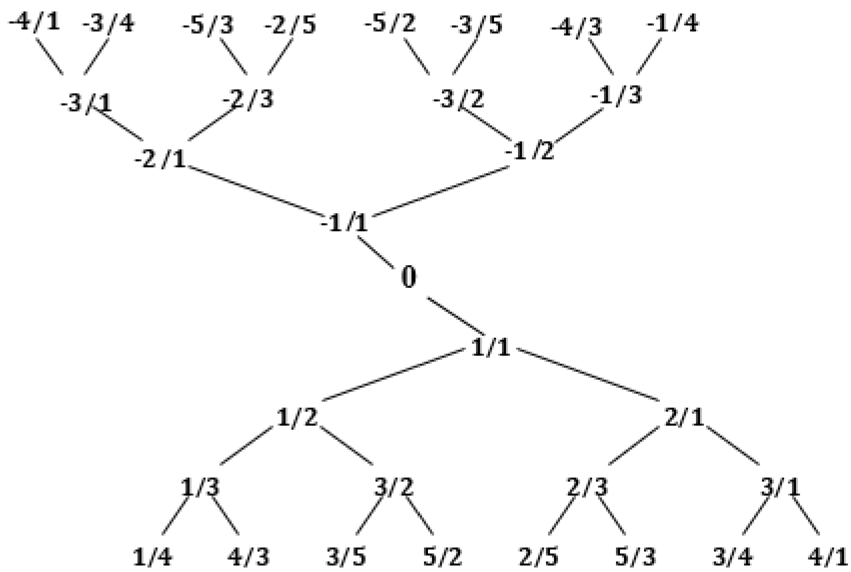

Figura 2: Extensión del árbol de Calkin-wilf hacia los racionales negativos.

3. Conteo de los nodos del árbol de Calkin-Wilf en un camino lineal

Para poder demostrar que existe una biyección en la manera que se propone en este artículo, primero haremos un gráfico de los números racionales positivos y negativos, siguiendo la secuencia de Calkin-Wilf a cada uno de los lados del 0; pero en lugar de utilizar la forma de árbol, lo haremos en forma de cadena dispuesta en zigzag. Cada vez que la cadena cambia de dirección, tendremos los números racionales del nivel subsiguiente del árbol de Calkin-Wilf. De esta manera el árbol se transforma en un camino lineal (ver Figura 3).

Previo a la demostración gráfica haremos algunas aclaraciones. En general, se suele definir a los números naturales a partir del número 1 debido a razones históricas, en occidente no fue introducido el cero hasta el siglo XII, aunque en las culturas Mayas e Hindúes hay registros de su utilización dentro de $\mathbb{N}$.

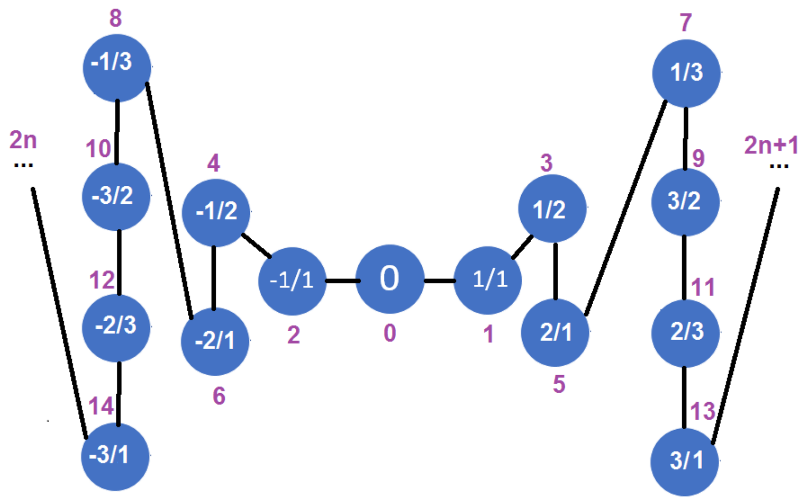

Figura 3: Representación gráfica del árbol de Calkin-Wilf transformado en camino lineal. Elaboración propia.

Para distinguir ambas definiciones a veces se introducen símbolos distintos. Por ejemplo, si se incluye el cero en los naturales, se denota como $\mathbb{N}_0$. Aclaramos esta sutileza debido a que es importante el cero en nuestro esquema. El cero es el eje de simetría del árbol extendido a los racionales negativos y también del árbol extendido transformado en un camino lineal.

Por otro lado, definiremos el producto cartesiano de dos conjuntos. Se trata de una operación que genera otro conjunto, cuyos elementos son todos los pares ordenados que pueden formarse de forma que el primer elemento del par ordenado pertenezca al primer conjunto y el segundo elemento pertenezca al segundo conjunto.

Definición 2 (Producto cartesiano)

$$A_1 \times A_2 = \{a = (a_1, a_2) : a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2\}$$

En nuestro caso tenemos el conjunto $A_1 = \mathbb{Q}$ y el conjunto $A_2 = \mathbb{Q}$, por lo tanto, $A_1 \times A_2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Los elementos $a \in A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^2$ son de la forma $a = (a_1, a_2)$, es decir pares ordenados de números racionales.

Llamemos a cada nodo n_i y n_j de la cadena propuesta en la figura 2, con $i, j \in \mathbb{N}_0$ y con $n \in \mathbb{Q}$ y por lo tanto,$(n_i, n_j) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Por cada $(n_i, n_j) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, tendremos el correspondiente par ordenado (i, j), que pertenecen a $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (ver Figura 4).

En el gráfico se representa una conocida biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, ya se ha mostrado en [5] que también existe biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, por lo tanto, también $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ es coordinable con $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Este hecho es fundamental para nuestra demostración, ya que, dado un par ordenado $(n_i, n_j) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tal que $i, j \in \mathbb{N}_0$, existe un par ordenado $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ y también existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que es posible ir enumerando los pares ordenados del plano en zigzag asignado un número natural a cada uno de ellos.

Entonces por ejemplo dado $(a_1, a_2) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tal que $(a_1, a_2) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, los valores de i y j (los nodos

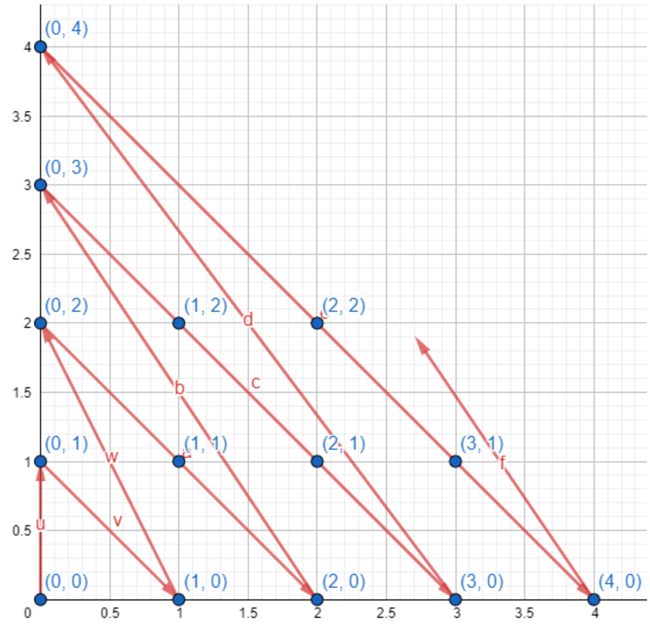

Figura 4: Representación de los nodos $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ en un plano cartesiano, similar a la vista en [5], pero incluyendo los ejes. Estos nodos se pueden contar en diagonales, por lo tanto representa una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Elaboración propia

numerados de la cadena) serán 4 y 3 respectivamente, por lo tanto, tendremos el correspondiente par ordenado $(4, 3)$; y para este, un número natural n asignado por conteo, que será el número 32 si contamos los pares del plano $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ en zig-zag. Este número natural es la cantidad de puntos en el plano $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ que hay que recorrer en zigzag para llegar a $(4, 3)$ partiendo desde el par ordenado $(0, 0)$. En la Figura 5, se muestra una imagen que ilustra este procedimiento gráfico.

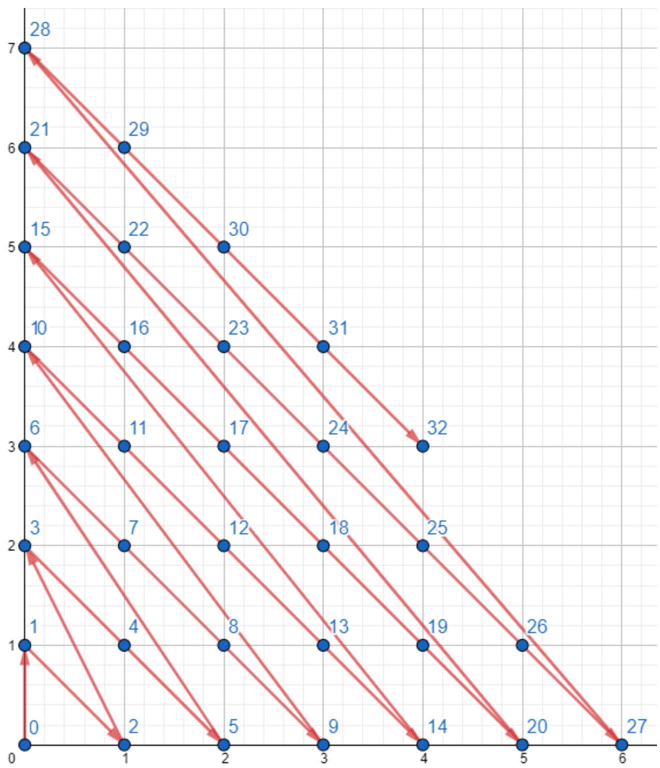

Figura 5: Conteo de los nodos a partir desde el par ordenado (0,0) hasta (4,3). La cantidad de nodos recorridos es de 32. Elaboración propia

El conjunto $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ es numerable y también se puede escribir como la unión de las sucesivas diagonales decrecientes, $D_s = (x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / x + y = s$, para $s = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

Los conjuntos resultantes $D_0, D_1, D_2, \ldots$ son disjuntos y su unión es $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

Observación: si tomamos $s = 1, 2, 3, 4 \ldots$ y unimos las diagonales, tendremos el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. [7]

Por teorema visto en [3]:

Teorema 1

La unión de una cantidad numerable de conjuntos numerables es numerable.

Es decir, si $(A_n)_{n \geq 0}$ son todos conjuntos numerables entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ es numerable.

Es decir que entonces $\bigcup_{s=0}^{\infty} D_s$ para $s = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ es un conjunto numerable.

Nota: Otra manera de contar los nodos en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, es utilizando *función de emparejamiento de Cantor* utilizada en [2] y [8].

Para poder asegurarnos una biyección entre $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ y $\mathbb{N}_0$, utilizamos la definición vista en [3]: Dos conjuntos A y B son coordinables si y sólo sí existe una función $f : A \to B$ biyectiva.

La definición citada exige que, para tener una biyección, debe existir la función inversa f^{-1} de nuestro algoritmo. El algoritmo inverso para cada número natural n, se basa en contar uno por uno los nodos para encontrar en el plano (Fig. 4) el par ordenado $(i;\ j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; este par ordenado nos dará la ubicación del nodo $(n_i;\ n_j) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$,este nodo corresponde a un par de fracciones de la secuencia de Calkin-Wilf transformada en camino lineal (Fig. 3).

Por lo tanto, existe una función inversa f^{-1} que realiza el camino desde $\mathbb{N}_0$ hasta $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Y luego, dado que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. y que también $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$,

Entonces $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, por teorema visto en [3]:

Teorema 2 (Propiedades de la coordinabilidad)

Sean A, B y C conjuntos cualesquiera; entonces:

1. $A \sim A$.
2. Si $A \sim B$ entonces $B \sim A$.
3. Si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.

Es decir, la coordinabilidad es una relación de equivalencia.

Demostración. Hay que demostrar que:

1. Existe una función biyectiva de A en A; una función así es la función identidad, $id : A \to A$, $id(x) = x$.
2. Si $A \sim B$ entonces existe $f : A \to B$ biyectiva, luego $f^{-1} : B \to A$ es biyectiva y entonces $B \sim A$.
3. Si $A \sim B$ entonces existe $f : A \to B$ biyectiva; si $B \sim C$ entonces existe $g : B \to C$ biyectiva. Luego $g \circ f : A \to C$ también es biyectiva y entonces $A \sim C$.

Para finalizar mostraremos una biyección entre $\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}$, por ejemplo, con la función:

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N} : j = i + 1$$

$$f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 : i = j - 1$$

Por lo tanto, se concluye que:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}$$

Y finalmente, por propiedad transitiva de la relación de coordinabilidad [3]:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$$

□

4. Conclusiones

Generalmente resulta muy contraintuitivo para los estudiantes de matemáticas el hecho de que un plano de coordenadas racionales con infinitos puntos tenga la misma cardinalidad que los números naturales, y aún más, que siendo $\mathbb{Q}$ un conjunto denso; (entre dos números racionales hay infinitos números racionales) ya que es otra propiedad que diferencia a los números racionales de los naturales. En este trabajo hemos procurado trabajar de forma alternativa, utilizando elementos de diferentes áreas de las matemáticas, como la Teoría de Conjuntos y la Matemática Discreta, de manera tal que resulte una experiencia enriquecedora y despierte curiosidad en el alumnado de matemáticas. Con respecto al árbol de Calkin-Wilf, de manera similar al Triángulo de Pascal, las propiedades que posee el árbol son muy abundantes. En este artículo nos enfocamos en aquellas que se vinculan en gran medida con la teoría de conjuntos.

Entre otras propiedades curiosas, puede demostrarse utilizando las reglas de "hijo derecho" e "hijo izquierdo" que $\sqrt{2}$ es un número irracional, intentado llegar a una contradicción. Esto se demuestra suponiendo que se puede escribir como una fracción y arribando a la conclusión de que $\sqrt{2}$ aparecería dos veces en el árbol, lo cual contradice el teorema [4] que establece que todo racional aparece en el árbol en forma única y reducida.

Este mismo razonamiento puede efectuarse para cualquier raíz irracional, por ejemplo $\sqrt{5}$, o cualquier número de la forma $\alpha = \dfrac{N+p}{q}$ donde N es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto, P es un número racional tal que $p^2 < N$ y q es un número entero positivo que divide a $N - p^2$ [6]. Lionel Ponton (2019), ha demostrado este hecho. George Cantor en su época con el "Argumento de la Diagonal" demostró que existe un número que no se encuentra en la lista ordenada de irracionales; y por lo tanto, que existen más números irracionales que racionales. Debido a este hecho, no podemos establecer una biyección entre ellos y los números racionales o bien los naturales.

En consecuencia, si $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}$ entonces los números irracionales no son coordinables con ninguno de estos conjuntos.

De manera análoga los números reales no son coordinables con ellos dado que contienen a los irracionales.

Con respecto a los conjuntos infinitos y sus propiedades, son variadas las dificultades en su comprensión por parte de los estudiantes debido a que muchos conceptos que implica este trabajo no resultan intuitivos y exigen una profundidad en su estudio que se va adquiriendo a medida que se avanza en la carrera de matemáticas o profesorados de esta disciplina. Los conceptos que se enseñan en el nivel secundario y en los primeros años de la carrera mencionada precisan una profundización que problematice y genere preguntas acerca la naturaleza de los conjuntos numéricos. En este trabajo apuntamos a poner en movimiento los conocimientos adquiridos y despertar una curiosidad que permita ampliar los horizontes del saber que se encuentra limitado en los planes de estudio y programas de las materias.

5. Agradecimientos

A mi profesor de Topología y escritor, el Lic. Gustavo Piñeiro y a toda la comunidad educativa del instituto de formación docente IES N°1 "Dra. Alicia Moreau de Justo".

6. Bibliografía

[1] Aigner, Martin; Ziegler, Günter M. (2004), Proofs from THE BOOK (3rd ed.), Berlin; New York: Springer, p. 104–107, ISBN 978-3-540-40460-6. https://doi.org/10.1007/978-3-662-04315-8.

[2] Cantor, G. (1878). Ein beitrag zur mannigfaltigkeitslehre. Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 1878(84), 242-258. https://doi.org/10.1515/crelle-1878-18788413.

[3] G. Piñeiro, El Análisis y Más Allá, La teoría de conjuntos de Georg Cantor.

[4] Calkin, N., & Wilf, H. S. (2000). Recounting the rationals. The American Mathematical Monthly, 107(4), 360-363. https://doi.org/10.1080/00029890.2000.12005205.

[5] Nivotko (2012), On bijection of NxN to N. https://nivotko.wordpress.com/2012/12/28/on-bijection-of-nxn-to-n/

[6] Ponton, L. (2019). The Calkin–Wilf Tree of a Quadratic Surd. The American Mathematical Monthly, 126(9), 771-785. https://doi.org/10.1080/00029890.2019.1644123.

[7] René Adad (2017), Articles de vulgarisation, Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$. https://math-os.com/quest-quune-bijection/

[8] Szudzik, M. (2006). An elegant pairing function. In Wolfram Research (ed.) Special NKS 2006 Wolfram Science Conference (pp. 1-12). http://www.szudzik.com/ElegantPairing.pdf.