



Paul Erdős el mago de las matemáticas

| Paul Erdős the math wizard |

| Paul Erdős, o mago da matemática |

 **Luis Andrés Badilla Céspedes¹**

luis.badilla.cespedes@una.ac.cr
Universidad Nacional de Costa Rica
Heredia, Costa Rica

 **Wáagner Badilla-Céspedes²**

wagner@matmor.unam.mx
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, Campus Morelia
Morelia, México

Recibido: 29 de mayo de 2024

Aceptado: 10 de marzo de 2025

Resumen: En estas notas describimos ciertos aspectos relevantes sobre la vida de Paul Erdős. Mencionamos algunas de sus distinciones y premios, así como aportaciones matemáticas. Finalmente, damos una descripción histórica del teorema de los números primos.

Palabras Clave: Paul Erdős, teorema de los números primos, teoría de números, variable compleja.

Abstract: In these notes we describe certain relevant aspects about the life of Paul Erdős. We mention some of his honors and awards, as well as his mathematical contributions. Finally, we give a historical description of prime number theorem.

Keywords: Paul Erdős, prime number theorem, number theory, complex variable.

Resumo: Nestas notas, descrevemos alguns aspectos relevantes da vida de Paul Erdős. Mencionamos algumas de suas distinções e prêmios, bem como as suas contribuições matemáticas. Por fim, apresentamos uma descrição histórica do teorema dos números primos.

Palavras-chave: Paul Erdős, teorema dos números primos, teoria dos números, variável complexa.

1. Introducción

El área de las matemáticas ha tenido cientos de científicos dedicados y apasionados en la investigación y creación de nuevas líneas o tendencias en dicha disciplina. Eventualmente hay ciertos matemáticos que marcaron un antes y un después en diversas técnicas de resolución o temas de estudio, uno de

¹Luis Andrés Badilla Céspedes. Académico Universidad Nacional de Costa Rica, Sede Omar Dengo Heredia. Dirección: Avenida 1, calle 9, Heredia, código postal: 40101. Correo electrónico: luis.badilla.cespedes@una.ac.cr

²Wáagner Badilla-Céspedes. Investigador posdoctorante del Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, Campus Morelia. Dirección postal: Antigua Carretera a Pátzcuaro #8701 Col. Ex Hacienda San José de la Huerta, Morelia, Michoacán, México. C.P. 58089. Correo electrónico: wagner@matmor.unam.mx

ellos fue el genio Paul Erdős. Este prodigio revolucionó la forma de ver la matemática, buscando solo o en cooperación con otros científicos soluciones más sencillas a varios enunciados, donde muchas de esas soluciones eran complicadas o difíciles de entender.

Gracias a esa capacidad que tenía Erdős, sus amigos y colegas de trabajo le decían mago. Eventos tales como estudiar desde pequeño los libros de matemáticas de sus padres y su temprano doctorado, lo inspiraron a viajar por varios lugares fuera de su país natal con el fin de compartir conocimientos matemáticos, hacer amigos y nutrirse de nuevos juicios para sus investigaciones. Por estas razones Paul no tenía lugar ni oficina propia para trabajar, pues su forma nómada le impedía que adquiriese una. Uno de sus grandes aportes fue una nueva prueba para el teorema de los números primos basada en argumentos de propiedades elementales, dicha prueba la logró en 1949 junto a Atle Selberg (Erdős, 1949; Selberg, 1949), lo cual fue un exitoso y maravilloso acontecimiento en la comunidad.

Aparte de ser un excelente investigador le gustaba divulgar la ciencia, compartía con los niños y les enseñaba conocimientos básicos de matemáticas, por lo cual hacía varias donaciones para ayudarlos. Este gran ser humano por su arduo trabajo en la matemática tuvo el honor de ganar el Premio Wolf (1983 – 1984).

Aunque hay mucho que decir de Paul Erdős, solo nos enfocamos en algunos datos de su vida, pero invitamos al lector a consultar el libro de Hoffman (Hoffman, 1998) para profundizar más en la vida de este matemático.



Figura 1: Paul Erdős. Fuente: (Pomerance, 2014).

2. Biografía de Paul Erdős.

En el mundo de las Matemáticas han existido y existen científicos brillantes que se han ganado el respeto de ser reconocidos como genios o simplemente eruditos. Uno de estos brillantes profesionales fue Paul Erdős, matemático húngaro nacido el 26 de marzo de 1913, sus principales logros fueron en los campos de la teoría de números y la combinatoria. Desde la infancia este gran investigador estuvo enfocado en la matemática.

Erdős proviene de una familia judía y creció en la ciudad de Budapest. Desde su infancia presentaba gran inclinación hacia el área matemática, claramente se notaba que nació para esta ciencia. A la edad de cuatro años podía calcular mentalmente cuantos segundos había vivido una persona con solo conocer la fecha y hora del nacimiento dicho individuo (Chung & Graham, 1998).

Cuando tenía seis años de vida era capaz de resolver ejercicios complejos de matemáticas, lo increíble aparte de su gran talento, fue que a tan corta edad dominaba muchos conceptos los cuales para niños era casi impensable que sucediese. Deslumbrado al ser testigo que su hijo era un niño prodigio, su padre le regala un libro sobre las matemáticas de Gauss, con el objetivo que lo estudiase para fortalecer aun más el conocimiento que venía desarrollando este portento. Su habilidad a los 9 años era tan fuera de serie que Erdős ya había leído y comprendido todos los libros de matemática de la biblioteca de su padre, este gran interés nació también porque sus padres eran matemáticos, lo cual motivó al niño a leerlos y enamorarse de los números a temprana edad. Erdős menciona: “eran mis amigos. Podía depender que siempre estarían ahí y siempre se comportarían de la misma manera” (Hoffman, 1998).

Curiosamente cualquier persona que hubiese conocido a Erdős a la edad de 14 o menos años, diría que posiblemente resolvería cualquier problema que se inventara pero no podía amarrarse los cordones de los zapatos o untar mantequilla a dos rebanadas de pan. La razón de tal discordancia fue provocada por el estrés tan severo que sufrió su madre el día que nació Erdős, al ver morir por la fiebre escarlata a sus dos hijas de 3 y 5 años, episodio que marcó psicológicamente al matemático.

Su padre con el estallido de la Primera Guerra Mundial fue capturado y hecho prisionero por los rusos, regresando a Siberia seis años después. Por otro lado, su madre con el temor que su hijo contrajera cualquier enfermedad mortal, decidió educarlo en casa con ayuda de una institutriz, dedicándose a mimarlo y cuidarlo de los problemas cotidianos.

En 1930 a sus diecisiete años, Erdős ingresó a la Universidad de Pest, en dicha institución inició a estudiar matemáticas. En 1931 publicó su primer artículo, antes de aprender a untar mantequilla al pan. Esta publicación no sorprendió tanto al genio, porque tenía claro que niños prodigios de Hungría habían publicado a edades más tempranas a la que él tenía, pero aún no entendía la hazaña de presentar una solución a un problema matemático ante sus pares y consagrarse a sus 18 años. Cabe resaltar que en cuatro años obtuvo de manera simultánea tanto licenciatura como doctorado (Graham & Butler, 2013).

Algunos excompañeros y profesores recuerdan que cuando cursaba el segundo año de carrera universitaria, uno de sus trabajos era una asombrosa demostración simple del resultado de Chebyshev, el cual dice que siempre se puede encontrar un número primo entre cualquier número entero mayor a 1 y su doble, esta fue una de las demostraciones que dio hincapié para que en conjunto con colegas o solo encontrara las mejores soluciones, más simples, de cada problema matemático concebible. Para detalles del resultado de Chebyshev ver (Hardy & Wright, 2008).

Después de obtener su doctorado fue admitido en el Instituto de Matemáticas de Hungría trabajando en varios proyectos de investigación ganando a la vez destrezas y conocimientos en las matemáticas. En el año de 1938 se dificultó la estadía en Hungría para este gran científico, pues en ese año el régimen fascista complicaba cada vez más la estadía a los judíos, siendo él uno de ellos, en consecuencia de esto Erdős decide viajar a Inglaterra con el objetivo de seguir investigando varios trabajos posdoctorales que tenía pendientes. Todo esto lo hizo en Cambridge y Manchester. Esa primera experiencia fue muy poco agradable, solo por el hecho que no sabía hacer una maleta para viajar, donde decide que para él seguir siendo turista matemático lo haría solo con la condición que hubiese un evento o encuentro importante para compartir ideas y pensamientos con otros matemáticos (Erdős, 1973).

Curiosamente Erdős nunca tuvo un trabajo formal y mucho menos una oficina o escritorio fijo, únicamente necesitaba lápiz, papel y una mente concentrada en su disciplina para empezar a redactar y resolver problemas y trabajos matemáticos. Este genio a pesar que le encantaban los niños apodándoseles con el nombre de épsilon por ser seres humanos pequeños y menudos, no tuvo una relación de pareja o hijos, y tampoco tarjetas bancarias ni posesiones materiales ya que las consideraba una molestia. Lo único permanente que tuvo fue la casa que le dejaron sus padres al morir en Hungría, pues hogar permanente nunca se le conoció. Estos motivos fueron en parte beneficiosos para emprender su aventura en diversos lugares compartiendo su sabiduría (Hoffman, 1998).

Su gran viaje lo impulsaba a buscar grandes desafíos, sus buenos amigos le daban posada cuando llegaba a su respectivo lugar, tenía la costumbre de llegar usualmente sin avisar, llamando a sus puertas y diciendo: “mi mente esta abierta” (Schechter, 1998). Toda esta ayuda brindada era fortificante porque sabían que el genio venía cargado de nuevos conocimientos para conjeturar y grandes soluciones que facilitaban el entendimiento de muchos problemas ya resueltos con anterioridad, pero con resoluciones difíciles o poco entendibles, él como por arte de magia encontraba una respuesta indicada y fácil de entender. A partir de esto se le apodó como Erdős el matemático viajero o el mago de Budapest (Hoffman, 1998).

Paul Erdős vivía de dotaciones y honorarios de diferentes instituciones educativas, aunque gastaba muy poco, su buen amigo Graham se encargaba de todo lo administrativo. Paul al tener un buen corazón se la pasaba haciendo donaciones u ofreciendo premios a las personas responsables de resolver algún problema matemático que encontraba o se le ocurría, muchos lo recuerdan como una persona muy sencilla y amigable, preocupado por el bienestar de los que lo rodeaban.

3. Obras memorables

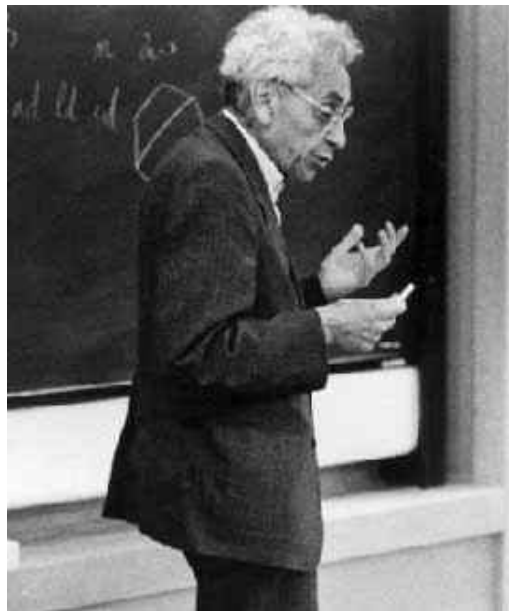


Figura 2: Paul Erdős en conferencia. Fuente: (Ibáñez, 2019).

Paul Erdős trabajó en una gran cantidad de resultados matemáticos, pero entre sus principales obras notables están: constante de Copeland-Erdős (Copeland & Erdős, 1946), número de Erdős-Woods (Cégielski et al., 2003; Dowe, 1989), modelo Erdős-Rényi (Erdős & Rényi, 1959), problema de Erdős-Graham (Erdős & Graham, 1980), número de Erdős-Nicolas (Erdős & Nicolas, 1975), teorema de Erdős-Stone (Erdős & Stone, 1946).

A lo largo de su vida Erdős publicó 1475 trabajos con 485 coautores (Hoffman, 1998). A pesar de tan basto trabajo, su verdadera pasión fue la teoría de números, que según él le gustaba por ser independiente del universo (Schechter, 1998). Una de sus grandes preocupaciones fue la distribución de los primos dentro de los enteros.

El teorema de los números primos es fundamental para entender la distribución asintótica de los números primos. Este ha llevado a numerosos desarrollos en la teoría analítica de números. Dicho teorema describe la distribución de los números primos en el conjunto de los números naturales. A finales del siglo XVIII el teorema de los números primos fue propuesto por primera vez por Gauss y Legendre. La primera persona que intentó demostrar este teorema con cierto éxito fue Chebyshev. A

mediados del siglo XIX, Riemann introdujo la teoría de funciones de variable compleja en el estudio de los números primos. Riemann hizo una serie de afirmaciones sobre el problema de demostrar este teorema, que investigadores posteriores demostrarían. Especialmente en 1896, Hadamard y de la Vallée-Poussin pudieron demostrar el teorema de los números primos. Sin embargo, esta prueba y otras simplificaciones posteriores se basaron en poderosos mecanismos de la teoría de funciones de variables complejas. Para ampliar el contexto histórico ver (Bateman & Diamond, 1996; Zaldívar, 2002).

El teorema de los números primos es uno de los resultados primordiales en la teoría de números. Afirma que la cantidad de números primos menores que un número real positivo x , denotada por $\pi(x)$, es aproximadamente $\frac{x}{\log(x)}$. Formalmente, el teorema se expresa como:

Teorema 1 (Números primos)

Sea x un número real positivo. Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x} = 1,$$

donde $\pi(x)$ es la cantidad de números primos menores o iguales a x .

Aunque el teorema 1 no ofrece información precisa sobre la posición exacta de los números primos, proporciona una visión valiosa de su distribución a medida que exploramos números cada vez más grandes.

Con base en la historia, las pruebas efectuadas del teorema de los números primos estaban basadas en estrategias y métodos conocidos en el área del análisis complejo (Ingham, 1990). Sin embargo, durante el siglo XX, se pretendía hacer grandes esfuerzos entre los matemáticos de la época para encontrar una demostración, la cual no involucrara teoría del análisis complejo, es decir realizar una demostración más elemental (Hardy & Wright, 2008). Lograr este objetivo se volvió un gran problema abierto que causó mucho interés en el gremio matemático. Para sorpresa de la comunidad, en 1949 Paul Erdős y Atle Selberg (Medalla Fields en 1950) logran proponer una nueva prueba del teorema de los números primos que utilizaba por primera vez solo argumentos de propiedades elementales (Erdős, 1949; Selberg, 1949). Necesitamos remontarnos a los inicios de las matemáticas, rastrear la historia de los números primos y disfrutar de este gran acontecimiento que representa una nueva prueba de carácter elemental, evitando usar todo tipo de métodos analíticos. Este tipo de demostraciones elementales que no recurrían a los métodos superiores de variable compleja, sino que se mantenía en los terrenos de la teoría de números, eran las que consideraba Erdős las ideales y a las que se dedicó mayormente (Erdős, 1965).

En el contexto de la demostración del teorema de los números primos, un resultado fundamental que marcó el inicio de su prueba elemental fue la identidad de Selberg. De acuerdo con Paul Erdős, esta identidad sirvió como base para la exploración de métodos alternativos a los enfoques analíticos tradicionales. La identidad de Selberg, junto con su demostración elemental y diferente a las ya existentes, evitó aplicar herramientas de vanguardia utilizadas en el análisis complejo, dando inicio a un camino alternativo que llevó a una prueba limpia y concisa del teorema de los números primos (Erdős, 1949; Selberg, 1949).

La identidad de Selberg se presenta de la siguiente manera:

$$\sum_{p < x} (\log(p))^2 + \sum_{pq < x} \log(p) \log(q) = x \log(x) + O(x),$$

donde p y q son números primos y $O(x)$ denota el término de error asintótico. Selberg había deducido esta identidad de manera independiente y formulado una prueba que evitaba el teorema de los números primos (Selberg, 1949), una hazaña notable que reveló la posibilidad de avanzar en esta dirección sin el uso de análisis complejo.

La identidad de Selberg estaba muy relacionada con el teorema de los números primos, tanto que su demostración elemental alentó a ambos matemáticos a buscar una demostración completa del teorema mediante métodos elementales. Erdős percibió esta posibilidad y en colaboración con Selberg, avanzaron en esta dirección.

Erdős captó la potencia que englobaba esta identidad para desarrollar una prueba elemental y además contribuir con un resultado adicional. Según su enunciado, para todo $\delta > 0$, existe una constante $K_\delta > 0$ tal que si x es suficientemente grande, entonces hay más de $\frac{x}{\log(x)} K_\delta$ primos en el intervalo $(x, x + \delta x)$ (Erdős, 1949). Este resultado, derivado también de la identidad de Selberg, le permitió a él y a Selberg formular, de manera independiente, demostraciones elementales del teorema de los números primos.

A partir de aquí, tanto Erdős como Selberg decidieron trabajar de manera independiente, donde lograron llegar cada uno a una demostración propia y elemental del teorema de los números primos, aunque el proceso no estuvo exento de tensiones. Originalmente, parecía que ambos matemáticos publicarían sus hallazgos conjuntamente, pero debido a una serie de malentendidos y desencuentros, ambos decidieron finalmente publicar sus resultados por separado (Dunham, 1991).

La discordia surgió en parte debido a que Selberg halló una forma de evitar un paso intermedio propuesto inicialmente por Erdős, lo cual provocó una separación en sus caminos y dejó una sombra sobre este notable logro en la historia de las matemáticas (Goldfeld, 2004). No obstante, ambos artículos han dejado un legado fundamental en la teoría de números, y su método elemental continúa siendo una piedra angular en el estudio de los números primos, libre de la controversia personal entre los autores. Este desacuerdo los distanció, y aunque este incidente marcó sus relaciones personales, no opacó las brillantes carreras matemáticas de ambos. (Hoffman, 1998)

Para detalles de la prueba del teorema 1 ver los trabajos de Erdős y Selberg (Erdős, 1949; Selberg, 1949).

4. Premios y distinciones

Gracias a los aportes y su impacto en la comunidad matemática y científica Paul Erdős se ganó el honor de ser miembro de la Academia Estadounidense de las Artes y las Ciencias, la Real Academia de Artes y Ciencias de los Países Bajos, la Academia de Ciencias de Polonia, la Academia de Ciencias de Hungría, la Academia Nacional de Ciencias de los Estados Unidos (desde 1980) y Royal Society.

Entre las distinciones que obtuvo se destaca el Premio Wolf (1983-1984). Desde 1978, el Premio Wolf se otorga anualmente a científicos y artistas en reconocimiento a sus logros en interés de la humanidad y la hermandad de las naciones, independientemente de su nacionalidad, raza, color, religión, sexo o afiliación política. El premio se entrega en Israel por la Fundación Wolf, fundada por el Dr. Ricardo Wolf, inventor alemán y exembajador cubano en Israel. Se otorga en seis campos: Premio Wolf en Agricultura, Premio Wolf en Química, Premio Wolf en Matemáticas, Premio Wolf en Medicina, Premio Wolf en Física, y un Premio de la Fundación Wolf de las Artes que rota anualmente entre arquitectura, música, pintura y escultura. Cada premio consiste en un diploma y 100000 dólares (Wolf Foundation, n.d.). Otra distinción otorgada a Paul Erdős por sus aportes a la teoría de números fue el Premio Cole (1951). Este es uno de los premios otorgados a matemáticos por la Sociedad Americana de Matemáticas, uno por contribuciones destacadas al álgebra y el otro por contribuciones destacadas a la teoría de números. El premio lleva el nombre de Frank Nelson Cole, quien durante 25 años trabajó en la Sociedad (American Mathematical Society, n.d.).

Los premios y las condecoraciones no tuvieron importancia para él, de modo que las ganancias eran donadas a personas necesitadas, se dice que en una de sus visitas a la India dejó sus ganancias a la empobrecida viuda del genial matemático hindú Srinivasa Ramanujan (Hoffman, 1998). Vivió la

mayor parte de su vida como un vagabundo, viajando entre conferencias matemáticas y casas de amigos matemáticos, por todo el mundo. Llegaba a casa de sus amigos y hasta que no se producía una colaboración, un artículo en una revista, no emprendía el camino hacia otro lugar, decía que “la propiedad perjudica” (Schechter, 1998). Dejando entender que la fama y lo gloria nunca fue su interés, sino el aporte a la ciencia que más amó.

Nunca contrajo matrimonio ni tuvo hijos y amó las matemáticas hasta la muerte, tanto así que este mágico genio fallece en el 20 de setiembre de 1996 a sus 83 años, debido a un infarto agudo de miocardio mientras daba una conferencia en Varsovia Polonia.

Agradecimientos: Agradecemos a los árbitros anónimos por sus útiles comentarios y sugerencias. El segundo autor hizo este trabajo durante una estancia posdoctoral realizada gracias al Programa de Becas Posdoctorales en la UNAM (POSDOC).

Contribución de las personas autoras: Conceptualización: L.A.B.C, W.B.C. Análisis formal: L.A.B.C, W.B.C. Investigación: L.A.B.C, W.B.C. Metodología: L.A.B.C, W.B.C. Supervisión: L.A.B.C, W.B.C. Validación: L.A.B.C, W.B.C. Visualización: L.A.B.C, W.B.C. Escritura - borrador original: L.A.B.C, W.B.C. Escritura - revisión y edición: L.A.B.C, W.B.C.

Accesibilidad de datos: No aplica.

5. Referencias

- American Mathematical Society. (n.d.). *Frank Nelson Cole Prize in Number Theory*. Recuperado de <https://www.ams.org/cole-prize-number-theory>
- Bateman, P. T. y Diamond, H. G. (1996). A hundred years of prime numbers. *American Mathematical Monthly*, 103(9), 729–741. <https://doi.org/10.2307/2974443>
- Cégielski, P., Heroult, F. y Richard, D. (2003). On the amplitude of intervals of natural numbers whose every element has a common prime divisor with at least an extremity. *Theoretical Computer Science*, 303(1), 53–62. [https://doi.org/10.1016/S0304-3975\(02\)00444-9](https://doi.org/10.1016/S0304-3975(02)00444-9)
- Chung, F. y Graham, R. (1998). *Erdős on graphs: His legacy of unsolved problems*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA.
- Copeland, A. H. y Erdős, P. (1946). Note on normal numbers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52, 857–860. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1946-08657-7>
- Dowe, D. L. (1989). On the existence of sequences of co-prime pairs of integers. *Journal of the Australian Mathematical Society, Series A*, 47(1), 84–89.
- Dunham, W. (1991). *Journey through genius: The great theorems of mathematics*. Penguin Books.
- Erdős, P. (1949). On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 35(7), 374–384. <https://doi.org/10.1073/pnas.35.7.374>
- Erdős, P. (1965). Some remarks on number theory. *Israel Journal of Mathematics*, 3, 6–12. <https://doi.org/10.1007/BF02760020>
- Erdős, P. y Graham, R. L. (1980). *Old and new problems and results in combinatorial number theory*. Université de Genève.
- Erdős, P. y Rényi, A. (1959). On random graphs. I. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 6, 290–297. <https://doi.org/10.5486/PMD.1959.6.3-4.12>

- Erdős, P. y Stone, A. H. (1946). On the structure of linear graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52, 1087–1091. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1946-08715-7>
- Erdős, P. (1973). *The art of counting: Selected writings* (J. Spencer y R. Rado, Eds.). MIT Press.
- Erdős, P. y Nicolas, J.-L. (1975). Répartition des nombres superabondants. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 103(1), 65–90. http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__65_0
- Goldfeld, D. (2004). The elementary proof of the prime number theorem: An historical perspective. En D. Chudnovsky, G. Chudnovsky y M. Nathanson (Eds.), *Number Theory: New York Seminar 2003* (pp. 179–192). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9060-0_10
- Graham, R. L. y Butler, S. (Eds.). (2013). *The mathematics of Paul Erdős I* (2.^a ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7258-2>
- Hardy, G. H. y Wright, E. M. (2008). *An introduction to the theory of numbers* (6.^a ed.). Oxford University Press.
- Hoffman, P. (1998). *The man who loved only numbers: The story of Paul Erdős and the search for mathematical truth*. Hyperion Books.
- Ibáñez, R. (2019). Un dulce problema de Paul Erdős. *Cuaderno de Cultura Científica*. <https://culturacientifica.com/2019/01/23/un-dulce-problema-de-paul-erdos/>
- Ingham, A. E. (1990). *The distribution of prime numbers* (Repr. de la ed. de 1932). Cambridge University Press.
- Pomerance, C. (2014). *The statistics of elementary number theory*. Conferencia presentada en NCTS Conference on The Impact of Computation in Number Theory, Dartmouth College. <https://math.dartmouth.edu/~carlp/nctstalk.pdf>
- Schechter, B. (1998). *My brain is open: The mathematical journeys of Paul Erdős*. Simon & Schuster.
- Selberg, A. (1949). An elementary proof of the prime-number theorem. *Annals of Mathematics*, 50(2), 305–313. <https://doi.org/10.2307/1969455>
- Wolf Foundation. (n.d.). *The Wolf Prize*. Recuperado de <https://wolffund.org.il/the-wolf-prize/>
- Zaldívar, F. (2002). La función zeta de Riemann. *Miscelánea Matemática*, 36, 63–82. https://miscelaneamatematica.org/download/tbl_articulos.pdf2.acdf789d7f8f82d5.667a616c64697661722e706466.pdf