Revista digital
**Matemática, Educación e Internet**
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 26, No 2. Marzo, 2026 – Agosto, 2026
ISSN 1659 -0643
DOI: XXX

# Explorando el origen histórico de las funciones trigonométricas

| Exploring the historical origin of trigonometric functions |

| Explorando a origem histórica das funções trigonométricas |

Estefanía Micol Bendersky Vieyra[1]
estefaniabendersky@gmail.com
Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.
Neuquén, Argentina

Blanca Muñoz Santis[2]
blamusa78@yahoo.com.ar
Universidad Nacional del Comahue. Neuquén
Neuquén, Argentina

María Laura Santori[3]
mlausantori@yahoo.com.ar
Universidad Nacional del Comahue. Neuquén
Neuquén, Argentina

Recibido: 26 noviembre de 2024 Aceptado: 8 agosto de 2025

**Resumen:** En el presente trabajo se describen, en base a diferentes fuentes bibliográficas, los desarrollos matemáticos que generaron, a lo largo de la historia, la construcción del objeto matemático llamado funciones trigonométricas. En primer lugar, se aborda el surgimiento de las razones trigonométricas. Luego se desarrolla la construcción de la noción de función para poder visualizar el marco en el que las distintas civilizaciones interpretaron al objeto en cuestión. Posteriormente, se detallan los aportes a la construcción de las funciones trigonométricas por parte de India. Además, se analiza el por qué los árabes fueron los interesados en su época en desarrollar la trigonometría sin perder de vista la influencia de la geometría esférica y las series en la consolidación de este objeto matemático.

**Palabras Clave:** Historia de la Matemática, trigonometría, funciones trigonométricas.

**Abstract:** This paper describes, based on various bibliographic sources, the mathematical developments that led to the construction of the mathematical object known as trigonometric functions throughout history. First, it addresses the emergence of trigonometric ratios. It then develops the construction of the notion of a function to visualize the framework within which different civilizations interpreted the object in question. Subsequently, it details the contributions to the construction of

[1]Estefanía Micol Bendersky Vieyra. Profesora Universitaria en Matemática. Universidad Nacional del Comahue. Facultad de Economía y Administración. Departamento de Matemática. Neuquén. Argentina. Código Postal: 8300. Correo: estefaniabendersky@gmail.com.

[2]Blanca Muñoz Santis. Profesora en Matemática. Universidad Nacional del Comahue. Facultad de Economía y Administración. Departamento de Matemática. Neuquén. Argentina. Código Postal: 8300. Correo: blamusa78@yahoo.com.ar.

[3]María Laura Santori. Licenciada y Magister en Matemática. Universidad Nacional del Comahue. Facultad de Economía y Administración. Departamento de Matemática. Neuquén. Argentina. Código Postal: 8300. Correo: mlausantori@yahoo.com.ar.

trigonometric functions from India. It also analyzes why the Arabs were interested in developing trigonometry during their time, without losing sight of the influence of spherical geometry and series in the consolidation of this mathematical object.

**Keywords:** History of Mathematics, trigonometry, trigonometric functions.

**Resumo:** No presente trabalho descrevem-se, com base em diferentes fontes bibliográficas, os desenvolvimentos matemáticos que geraram, ao longo da história, a construção do objeto matemático denominado funções trigonométricas. Em primeiro lugar, aborda-se o surgimento das razões trigonométricas. Em seguida, desenvolve-se a construção da noção de função para poder visualizar o contexto em que as diferentes civilizações interpretaram o objeto em questão. Posteriormente, detalham-se as contribuições para a construção das funções trigonométricas por parte da Índia. Além disso, analisa-se por que os árabes foram, em sua época, os interessados em desenvolver a trigonometria, sem perder de vista a influência da geometria esférica e das séries na consolidação desse objeto matemático.

**Palavras-chave:** História da Matemática, trigonometria, funções Trigonométricas.

## 1. Introducción

Las funciones trigonométricas, fundamentales en el estudio de la matemática y la física, poseen un origen que se remonta a miles de años atrás. Los conocimientos matemáticos que hoy se estudian en niveles educativos diversos, desde el Nivel Medio hasta el Universitario, no surgieron de forma aislada, sino que son el resultado de un proceso evolutivo y de acumulación de saberes que han perdurado a través del tiempo. La trigonometría, en particular, ha desempeñado un rol esencial en esta evolución, permitiendo la transición desde una comprensión meramente descriptiva e intuitiva de ciertos fenómenos hacia un entendimiento estructurado y formalizado en términos matemáticos.

Como señala Kline (1972), el desarrollo de la trigonometría fue impulsado inicialmente por las necesidades de los matemáticos y astrónomos griegos, quienes aspiraban a construir una astronomía cuantitativa. La creación de estas herramientas matemáticas no sólo permitió predecir trayectorias y posiciones de cuerpos celestes, sino que también facilitó la medición del tiempo, así como el desarrollo de la navegación y la geografía. Estos usos iniciales de la trigonometría evidencian cómo el desarrollo de esta disciplina ha estado estrechamente vinculada a las demandas socioculturales y tecnológicas de cada época.

Este trabajo tiene como objetivo describir, en base a diferentes fuentes bibliográficas, los desarrollos matemáticos que generaron, a lo largo de la historia, la construcción del objeto matemático llamado funciones trigonométricas. Al trazar un recorrido histórico, se busca comprender no solo cómo estas funciones han llegado a ser lo que son hoy, sino también cómo han influido en el desarrollo de la ciencia y la tecnología desde sus primeros usos hasta nuestros días.

## 2. El surgimiento de las razones trigonométricas

Buendía y Montiel (2009) sostienen que los objetos matemáticos deben ser comprendidos en el contexto de las condiciones socioculturales específicas en las que surgieron. Esto implica analizar las necesidades y desafíos que cada civilización ha enfrentado a lo largo de la historia, desde las culturas antiguas hasta la contemporaneidad (p. 1287). En este sentido, a continuación se presenta una breve descripción del origen de la trigonometría, con el objetivo de comprender cómo surgieron las razones trigonométricas y por qué, en particular, los árabes recurrieron uso de tablas para trabajar con lo que hoy conocemos como funciones trigonométricas.

## 2.1. La trigonometría en las primeras civilizaciones

Las primeras civilizaciones, como los babilonios, utilizaron conocimientos geométricos y matemáticos para explicar fenómenos celestes, como determinar las horas de la noche y las estaciones del año, y se estima que la división del círculo en 360 grados tiene su origen en la astronomía, ya que el zodíaco se había dividido en 12 signos o 36 decanos (Sapag, 2021, p. 13). En este contexto, se atribuye a los babilonios la creación del sistema de medición angular, probablemente influenciado por la duración aproximada del año (365 días) y su sistema numérico sexagesimal.

Los griegos fueron de los primeros en realizar un estudio sistemático y organizado de las relaciones entre los ángulos centrales de una circunferencia y las longitudes de las cuerdas que las subtienden, sentando las bases de la trigonometría moderna (Boyer, 1986, p. 211). Entre los matemáticos más influyentes en el desarrollo de la trigonometría, se destacan Thales de Mileto, Eratóstenes, Hiparco de Nicea, Menelao de Alejandría y Ptolomeo. Sus contribuciones fueron fundamentales para el surgimiento de esta disciplina al vincular la geometría con la medición de ángulos y distancias, especialmente en contextos astronómicos y terrestres. A continuación, se describen brevemente algunos de sus aportes más destacados al conocimiento trigonométrico.

*Thales de Mileto* (625 a.C. - 546 a.C.), filósofo y matemático griego de Mileto (hoy la actual Turquía), logró medir la altura de una pirámide mediante la comparación de la sombra que proyecta dicha pirámide con la sombra de un gnomon, que es un dispositivo simple para decir la hora a partir de la sombra proyectada por una vara vertical. Se estima que este dispositivo fue construido por los babilonios y es un instrumento que luego se utilizó para determinar los valores de la función cotangente (Sapag, 2021, p. 17).

*Eratóstenes* (276 a.C. - 194 a.C.) nacido en Cirene (antigua ciudad griega), pasó su juventud en Atenas donde pudo desarrollar conocimientos relacionados con la poesía y astronomía, entre otros (Boyer, 1986, p. 214). Hacia la mitad de su vida se dirigió a Alejandría donde consiguió llevar a cabo las primeras mediciones del tamaño de la Tierra, estableciendo la longitud de la circunferencia de la Tierra con un error de 90 km. Asimismo, fue el primero en calcular el ángulo de inclinación que presenta el eje de rotación de la tierra (oblicuidad de la elíptica) y siguió con la invención de los mapas por lo que proporcionó la base técnica para las grandes navegaciones (Sapag, 2021, p. 16).

*Hiparco de Nicea* (190 a.C. - 120 a.C.), considerado “el padre de la trigonometría”, nació en Nicea y murió en Rodas, Grecia. Realizó una tabla de valores de arcos y cuerdas para usarla en sus teorías astronómicas. Esta tabla se cree fue el inicio de la trigonometría plana la cual permitió obtener fórmulas de gran importancia. Así, Hiparco fue la figura de transición entre la astronomía babilónica y la de Ptolomeo (Boyer, 1986, p. 215).

*Menelao de Alejandría* (70 d.C. - 140 d.C.) fue un geómetra griego, al que se lo considera, según Fernandez (2005) “el fundador de la trigonometría esférica por sus importantes trabajos sobre el triángulo esférico” (p. 321). Algunas de sus obras se han perdido, como sucedió con varias de este tiempo. De su obra “Esférica” se preservan tres libros (en versión árabe), y en el Libro I se establecen las bases para un estudio de triángulos esféricos análogos al que hace Euclides para triángulos planos. En el Libro II, se exploran las aplicaciones de la geometría esférica en el contexto de los fenómenos astronómicos. El tercer libro, presenta el célebre Teorema de Menelao, que es esencialmente un resultado de trigonometría esférica (Fernandez, 2005, p. 322). Este teorema generaliza en términos esféricos la idea de que, en el plano, si cortamos las rectas que contienen a los lados AB, BC, CA de un triángulo ABC por una recta transversal, en los puntos D, E y F respectivamente (como muestra la Figura 1), entonces se verifica que:

$$AD \cdot BE \cdot CF = BD \cdot CE \cdot AF$$

*Claudio Ptolomeo* (astrónomo y matemático griego que vivió alrededor del año 150 dC.) nació en Egipto, pero su vida transcurrió en Alejandría, ciudad que era considerada como el centro cultural e in-

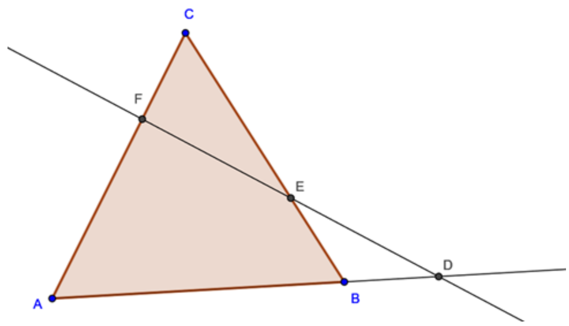


**Figura 1:** Representación geométrica del Teorema de Menelao en el Plano. Elaboración propia

telectual de la época. Uno de los mayores aportes de es su obra *Almagesto*, un tratado astronómico dividido en 13 libros, que constituye la primera obra completa de trigonometría conocida. Este texto no solo logró sobrevivir al paso del tiempo, sino que también conserva las tablas trigonométricas utilizadas en la antigüedad, junto con la explicación detallada de los métodos empleados para su elaboración. La tabla de cuerdas que aparece en el *Almagesto* es la más antigua que se conserva de forma completa, y representa un testimonio clave del desarrollo temprano de la trigonometría en el contexto de la astronomía griega. Diversos estudios históricos, como los de Toomer (1984), respaldan esta afirmación al señalar que, aunque existieron desarrollos previos en Babilonia o Egipto, no se conservan registros tan sistemáticos ni completos como los del *Almagesto*.

Según Ostermann y Wanner (2012), Ptolomeo fue el primer matemático en utilizar un sistema de proyección para elaborar un mapa del mundo, el cual se mantuvo como referencia hasta la edad media. Además, todas sus mediciones astronómicas se basaron en la función cuerda, que consiste en determinar la longitud de la cuerda de un círculo a partir del ángulo central correspondiente (ver Figura 2). Recio (2021) afirma que “en sus tablas, y por una cuestión de practicidad para el cómputo, Ptolomeo asume un valor de 120 partes para el diámetro de la circunferencia, o 60 para el radio” (p. 108).

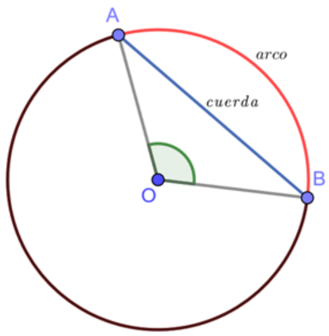


**Figura 2:** Relación entre arco, cuerda y ángulo central de un círculo. Elaboración propia

En el Almagesto, Ptolomeo tabuló la longitud de una serie de cuerdas cuyos puntos finales estaban separados por un arco de n grados, para valores de n que van de $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ a $180^{\circ}$, con incrementos de $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$. Dichos cálculos se realizaron a partir de la división de la circunferencia en 360 partes (grados), las cuales a su vez fueron subdivididas en 60 partes (partes minutae primae, de aquí la procedencia del término minuto) y cada una de estas también fue dividida en otras 60 partes (partes minutae secundae, y, de aquí la procedencia de segundo). El hecho de tomar subdivisiones de 60 partes se debe al sistema de numeración sexagesimal que utilizaban los babilónicos en aquella época.

Como lo expresa Recio (2021), la construcción de la tabla de cuerdas surgió a partir de argumentos geométricos y algunos teoremas de los “Elementos de Euclides”, a través de los cuales Ptolomeo fue capaz de calcular el valor de una cuerda determinada a partir de un arco determinado (pp. 107-109). Uno de los argumentos utilizados por Ptolomeo se relaciona con los polígonos regulares inscritos en una circunferencia, y es el siguiente:

*Los lados de un polígono regular de n lados inscritos en un círculo son iguales a la cuerda del arco* $\frac{360}{n}$ *en ese círculo.*

> Esto puede demostrarse fácilmente: primero, determinar el círculo en el cual el polígono está inscrito. Si se unen los vértices del polígono con su centro, entonces todos los triángulos determinados son necesariamente congruentes, ya que, dado que el polígono es regular, entonces todos tienen bases iguales, y además los restantes lados son también iguales, pues todos son radios del círculo en el cual el polígono está inscrito. Si todos los triángulos son congruentes, entonces sus arcos correspondientes serán iguales. Por último, dado que a cada ángulo con vértice en el centro del polígono (que es también centro del círculo en el cual el polígono está inscrito) le corresponde un lado del polígono, entonces el valor de los arcos con vértice en el centro del polígono puede obtenerse como $360°$/*cantidad de lados del polígono* (Recio, 2021, p. 113).

Por ejemplo, para obtener la cuerda de $60°$ se utiliza un hexágono regular inscrito en la circunferencia (Ver Figura 3). La característica de esta construcción es que el polígono se subdivide en seis triángulos equiláteros ya que el ángulo de $360°$ se divide por seis (cantidad de lados del hexágono). De esta manera la cuerda correspondiente a $60°$ coincide con el radio de la circunferencia.

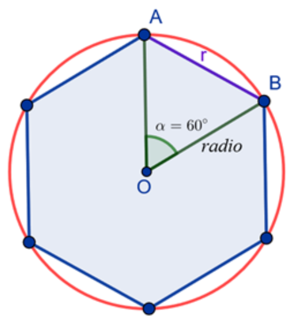


**Figura 3:** Determinación de la cuerda para un ángulo de $60°$. Fuente: Elaboración propia

Con esta idea y argumentos geométricos Ptolomeo también determinó los valores de crd$(36°)$, crd$(72°)$ y crd$(90°)$, donde la notación crd(a) hace referencia a la longitud de la cuerda correspondiente a un ángulo central a. A partir de estos valores y una ingeniosa aplicación de los Elementos de Euclides, Ptolomeo logró determinar las cuerdas de otros ángulos, como crd$(108°)$ y crd$(144°)$, ampliando así progresivamente su tabla trigonométrica (Recio, 2021, p. 119).

Para la construcción de la tabla de cuerdas para ángulos menores, el cálculo se basó en la demostración de un teorema, luego llamado Teorema de Ptolomeo, que permite obtener el valor de la cuerda de un arco, siendo este la diferencia entre dos arcos cuyas cuerdas ya son conocidas. Esto es: si conocemos $\mathrm{crd}(\beta)$ y $\mathrm{crd}(\gamma)$ podemos conocer $\mathrm{crd}(\beta - \gamma)$. En el cálculo de las cuerdas por Ptolomeo, el siguiente lema desempeñó un papel central:

*Lema de Ptolomeo:* Si ABCD es un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia entonces:

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$$

Es decir, la suma de los productos de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia es igual al producto de las dos diagonales (ver Figura 4). Basándose en este lema Ptolomeo deduce las primeras identidades para la suma y diferencia de dos ángulos las cuales son usadas con mucha frecuencia dentro de la trigonometría.

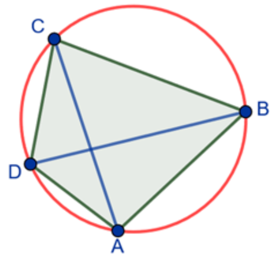


**Figura 4:** Representación gráfica del Lema de Ptolomeo. Elaboración propia

Si se tiene una circunferencia de centro O y radio R, considerando $2\alpha$ y $2\beta$ las medidas de los ángulos centrales AOC y AOB respectivamente, como muestra la Figura 5, el lema de Ptolomeo en base a cuerdas queda expresado de la siguiente manera:

$$\mathrm{crd}(2\beta)\cdot\mathrm{crd}(180^\circ-2\alpha)+\mathrm{crd}(2\alpha-2\beta)\cdot 2R=\mathrm{crd}(2\alpha)\cdot\mathrm{crd}(180^\circ-2\beta)$$

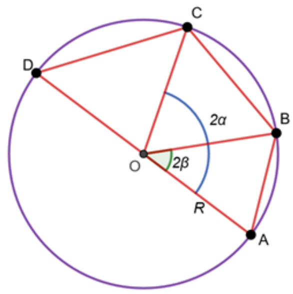


**Figura 5:** Deducción de la cuerda para la diferencia de arcos. Elaboración propia

Por otro lado, es posible relacionar la longitud de la cuerda con lo que actualmente utilizamos como la razón trigonométrica seno. Como se puede observar en la Figura 6, si r denota el radio, $\alpha$ el ángulo central, y d la cuerda del ángulo $\alpha$ ($d = crd(\alpha)$), la longitud de la cuerda, según la notación utilizada actualmente, es $\mathrm{crd}(\alpha)=d=2r\cdot\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

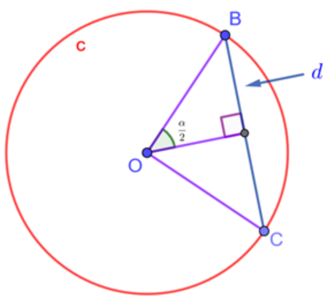


**Figura 6:** Longitud de la cuerda de Ptolomeo. Elaboración propia

Esta relación permite expresar el Lema de Ptolomeo utilizando la terminología actual, como:

$$2r\cdot\sin(\beta)\cdot 2r\cdot\sin(90^\circ-\alpha)+2r\cdot\sin(\alpha-\beta)\cdot 2r=2r\cdot\sin(\alpha)\cdot 2r\cdot\sin(90^\circ-\beta)$$

Lo que es equivalente a: $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cdot\sin(90^\circ-\beta)-\sin(\beta)\cdot\sin(90^\circ-\alpha)$ y, a partir de la identidad $\sin(90^\circ-\theta)=\cos(\theta)$ obtenemos la fórmula para el seno de la resta de ángulos: $\sin(\alpha-\beta)=$

$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$

Como se detalla en Recio (2021), Ptolomeo continuó con sus cálculos y logró obtener una fórmula para determinar la cuerda de un ángulo medio, que en la notación actual se puede expresar de la siguiente manera: $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$

Finalmente, luego de un trabajo exhaustivo para determinar cuerdas de sumas y diferencias de arcos, de la mitad de un arco, y el arco de $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$, Ptolomeo construyó su tabla, con una precisión asombrosa, lo que es equivalente para nosotros a una tabla de senos desde un ángulo de $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ a $90^\circ$ con incrementos de $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$.

Los aspectos de la matemática griega desarrollados hasta el momento fueron, según Boyer (1986) "los que más interesaron a los sabios árabes e hindúes que iban a servir de puente entre la matemática antigua y el mundo moderno" (p. 231).

## 2.2. La Trigonometría India

Según Boyer (1986, p. 272), hacia finales del siglo IV y comienzos del siglo V surge la época de los tratados de astronomía hindúes denominados Siddhantas o sistemas astronómicos. Es de destacar que hay una marcada diferencia entre los aportes de Ptolomeo respecto a los desarrollos de los hindúes. Por un lado, Ptolomeo se basó en la relación funcional entre las cuerdas y los correspondientes arcos o ángulos centrales en una circunferencia, mientras que los escritores de los Siddhantas transformaron este estudio poniendo foco en la mitad de la cuerda y la mitad del arco o ángulo central subtendido por la cuerda total, como se puede ver en la Figura 7 (Boyer, 1986, p. 273).

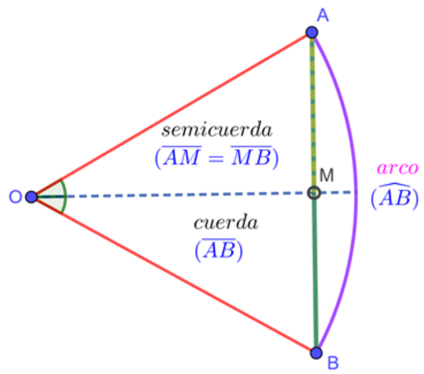


**Figura 7:** Arco, cuerda y semicuerda. Elaboración propia

Así surgió, aparentemente en la India, el antepasado de la función trigonométrica moderna que conocemos como el seno de un ángulo. La introducción de esta función es probablemente la contribución principal de los Siddhantas a la historia de la matemática. No cabe duda que el uso de la semicuerda que nosotros hemos heredado se extendió a través de los hindúes, y no de los griegos, y además la palabra "seno" que usamos actualmente se deriva del nombre hindú Jiva, luego de pasar por una accidentada historia en su traducción al árabe, como se verá a continuación.

De los matemáticos hindúes se destaca Aryabhata (476 d.c.) cuyo libro más conocido es el Aryabhatiya. Dicho libro, tal como señala Boyer (1986, p. 273), detalla diversos temas de astronomía y de matemática, entre ellos, trata de la medida, cálculo de tiempos y trigonometría esférica, por lo que nos encontramos con el sistema de numeración con la que trabajaban, el sistema posicional decimal. Según Vargas (2019, pp. 48-49), los hindúes usaron la palabra jya-ardha para semicuerda, y su abreviatura (jya o jiva) se empleó para denominar lo que actualmente conocemos como razón seno. Cuando los árabes tradujeron la Aryabhatiya, se mantuvo la palabra jiva sin traducir su significado, que podía pronunciarse como jiba o jaib, sin embargo, cuando se tradujo al latín, jaib fue traducido como sinus que significa pecho, bahía o curva; luego en Europa se abrevió como sin.

Además, los hindúes desarrollaron la teoría de otras razones trigonométricas a partir de resolución de triángulos rectángulos, que en la actualidad se expresan de la siguiente manera, considerando la Figura 8.

$$\text{jya}(\alpha) = AM = r \cdot \sin(\alpha)$$
$$\text{kotijya}(\alpha) = OM = r \cdot \cos(\alpha)$$
$$\text{ukramajya}(\alpha) = MC = OC - OM = r \cdot (1 - \cos(\alpha))$$

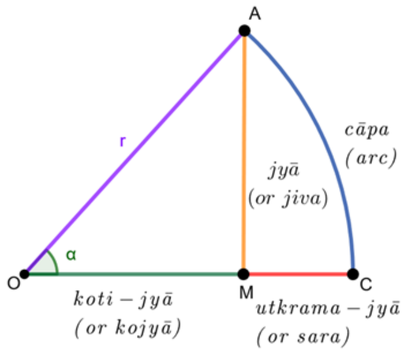


**Figura 8:** Representación hindú de las razones trigonométricas. Elaboración propia

El término "coseno" se originó a partir de la necesidad de calcular el complemento del seno, al que Aryabhata denominaba kotijya. Con el tiempo, Edmund Gunter lo abrevió como co.sinus, hasta que John Newton introdujo la forma "coseno", que finalmente fue reducida a "cos" por Jonas Moore en 1674 (Vargas, 2019, p. 49).

Boyer destaca que una de las contribuciones más importantes de la India a la historia de la matemática fue la introducción de lo equivalente a la función seno en trigonometría (Boyer, 1986, p. 279). Para expresar la longitud del arco y la del seno en términos de la misma unidad, los hindúes tomaban como radio $3438$ unidades y la circunferencia correspondiente como $360 \times 60$, es decir, $21600$ unidades. Estos valores llevan a determinar un valor de $\pi$ que coincide con el propuesto por Ptolomeo hasta la cuarta cifra significativa. Sin embargo, Aryabhata utiliza, en otros contextos, el valor $\sqrt{10}$ para $\pi$. Este valor aparece frecuentemente entre la sociedad matemática de la India y se lo conoce como el valor hindú de $\pi$ (Boyer, 1986, p. 279).

Un astrónomo matemático hindú que ocupa un lugar especial en la historia de la matemática es Brahmagupta, quien, en el año 665 d.C., escribió un tratado astronómico titulado Khanda Khadyaka, en el que se "indica cómo interpolar los senos de los ángulos intermedios a partir de una tabla de senos" (Joseph, 1996, p. 386).

Joseph (1996, p. 388) afirma que entre los siglos XIV y XVII se desarrollaron trabajos relacionados con la trigonometría en la "Escuela de Kerala", que fue un centro de estudios ubicado a lo largo de la costa sudoeste de la península indostánica. Joseph (1996) destaca que "se creía por lo general hasta hace muy poco que las matemáticas indias no progresaron después de Bhaskaracharya" (p. 388), sin embargo, por muy cierto que ésto pudiera ser para el resto de la India, Kerala ha jugado un papel central en la reconstrucción de las matemáticas medievales de la India.

La astronomía proporcionó el motivo principal para los desarrollos de series infinitas y aproximaciones de diferentes funciones trigonométricas (Joseph, 1996, p. 390), es por ello que los matemáticos de Kerala lograron desarrollar las series de potencia de la tangente inversa (comúnmente atribuida a Gregory y Leibniz), las series de potencia de $\pi$ (comúnmente atribuídas a Leibniz) y aproximaciones racionales a $\pi$, las series de potencia del seno y del coseno (comúnmente atribuidas a Newton) y aproximaciones a las funciones seno y coseno (atribuidas a Taylor).

Por otra parte, como lo indica Boyer (1986, p. 309), a lo largo de la historia hubo transmisión del conocimiento de los griegos a los hindúes y luego a los árabes; porque si bien las teorías astronómicas principales son griegas, aparecen mezcladas con el conocimiento que los hindúes disponían y, a su vez, estos últimos influenciaron al sabio árabe Al-Biruni (973-1048). Así, Al-Biruni se le reconoce el mérito de haber familiarizado a los árabes con la matemática y la cultura hindúes por medio de su libro muy conocido y titulado La India.

## 2.3. La Trigonometría Árabe

Entre los siglos VIII y XI el imperio musulmán o árabe logra importantes avances en las ciencias y en las artes, debido a la difusión de la lengua árabe, que sustituye al griego como lengua universal. sostiene que en Arabia convivían, en un principio, dos tipos de trigonometría que surgieron para los cálculos astronómicos, una relacionada a la geometría griega de las cuerdas (tal como figura en el Almagesto de Ptolomeo) y la otra basada en las tablas de senos hindúes. Sin embargo, la mayor parte de la trigonometría árabe se construyó basada en la función seno, por lo tanto, fue gracias a los árabes y no los hindúes que se trasladó la trigonometría del seno a Europa (Boyer, 1986, p. 308).

Joseph (1996) afirma que durante el siglo IX el astrónomo árabe al-Hasib "examinó la longitud de la sombra de una varilla de longitud unidad, montada horizontalmente en una pared cuando el sol incidía con un ángulo dado sobre la horizontal" (p. 455). De esta forma dedujo lo que actualmente conocemos como tangente y cotangente de un ángulo, como se muestra en la Figura 9, donde $\mathrm{tang}(\alpha) = s$, $\mathrm{cotg}(\beta) = t$.

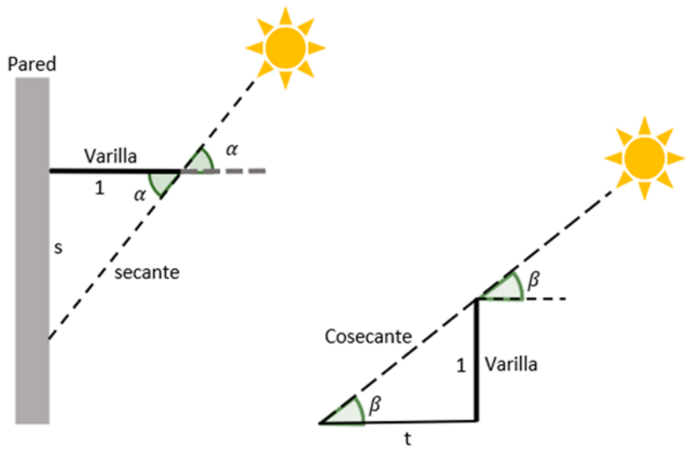


**Figura 9:** Longitudes de sombras que representan la tangente y la cotangente. Elaboración propia.

En las obras de Abul Wafa y al-Tusi hay referencias sobre Las funciones secante y cosecante, las que eran conocidas, respectivamente, como la "hipotenusa de la sombra" y la "hipotenusa de la sombra invertida" (Joseph, 1996, p. 456). En este sentido, la tradición trigonométrica estuvo basada en longitudes de sombras que se pueden encontrar tanto en las matemáticas indias como en las árabes.

Como se mencionó anteriormente, la trigonometría del seno pasó a Europa a través de los árabes (Boyer, 1986, p. 308), y se cree que la astronomía de Al-Battani (850-929), conocido como Albategnius, fue el vehículo de transmisión, aunque Thabit Ibn-Qurra (826-901) fue el mayor traductor de conocimiento matemático al árabe.

En el libro de Albategnius, *El movimiento de las estrellas*, se encuentran fórmulas en las que aparecen las funciones seno y seno verso de un ángulo ($\text{senver}(\alpha) = 1 - \cos(\alpha)$). Un siglo más tarde, Abul-Wafa (939–998) establece tablas trigonométricas considerando el círculo de radio uno, y propone las siguientes relaciones para un ángulo $\alpha$:

$$\tan(\alpha) : 1 = \sin(\alpha) : \cos(\alpha) \quad ; \quad \cot(\alpha) : 1 = \cos(\alpha) : \sin(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) : \sec(\alpha) = \sin(\alpha) : 1$$

Estas identidades abrieron camino para obtener las actuales fórmulas trigonométricas.

Según (Boyer, 1986, p. 308), es gracias a Abu'l-Wefa y la trigonometría árabe que nos aproximamos a las ideas básicas de la trigonometría moderna, puesto que la función tangente se daba en general para el círculo unitario (de radio igual a la unidad), lo cual no ocurría con la función seno de los hindúes. Con este matemático árabe la trigonometría se desarrolla en forma más sistemática ya que demostró teoremas como las fórmulas del ángulo doble y del ángulo medio, y formuló el teorema de los senos en forma clara y precisa para triángulos esféricos. Asimismo, construyó una nueva tabla de senos de ángulos de cuarto en cuarto de grado con ocho cifras decimales, una tabla de tangente, e hizo uso en sus cálculos de las seis funciones trigonométricas junto a las relaciones matemáticas que se presentan entre ellas.

La matemática árabe se puede clasificar en cuatro áreas (Boyer, 1986, p. 310): una aritmética que provenía de la India basada en el principio posicional; un álgebra que, si bien sus orígenes fueron en Grecia, la India y la antigua Babilonia, adoptó una forma nueva y sistemática; una trigonometría cuyo contenido sustancial provenía de Grecia, pero a la que los árabes dieron la forma típica hindú y ampliaron con nuevas funciones y relaciones entre ellas; y una geometría heredada de Grecia enriquecida con con generalizaciones y estudios basados mayormente en el axioma del paralelismo de Euclides. En relación a esto, Nasir Eddin Al-Tusi (1201-1274) continuó los intentos por demostrar el quinto postulado de Euclides. Fue el último de los tres precursores árabes de la geometría no euclidiana, su obra fue publicada recién en el siglo XVII.

Se otorga a Nasir al-Din al-Tusi el mérito de haber elaborado el primer tratado sistemático dedicado exclusivamente a la trigonometría plana y esférica. En esta obra, denominada Tratado sobre el cuadrilátero, la trigonometría se presenta por primera vez como una disciplina autónoma, separada de su tradicional dependencia de la astronomía, situación que había caracterizado a los desarrollos previos tanto en la tradición griega como en la india.

### 2.4. La Trigonometría esférica en el oriente medieval y en Europa

En la narrativa histórica de la matemática se suele destacar una continuidad entre una época y la siguiente, y la transición del renacimiento al mundo moderno se caracterizó en este sentido por la influencia de numerosas figuras intermedias. Una de ellas fue Johann Müller (1436 - 1476), astrónomo y matemático alemán más conocido como Regiomontano. En 1464 presenta su obra titulada De triangulis omnimodis, donde expone de forma sistematizada los métodos de resolución de triángulos, tomando como base las propiedades de la resolución de triángulos rectángulos. Además, incluye el teorema de los senos para la superficie esférica (Boyer, 1986, p. 319).

Regiomontano no fue el primero en exponer la trigonometría plana y esférica pues el "Libro de los arcos desconocidos de una esfera" fue escrito cuatro siglos antes por el matemático hispano-árabe del siglo XI Abu' Abdallah Muhammad ibn Mu'adh Al-Yayyani (989-1093), al que nombraremos en forma breve como Al-Yayyani. Este libro se considera el primer tratado conocido sobre trigonometría esférica (Quesada & Ródenas, 2009, p. 130), y recoge todas las novedades sobre trigonometría que los matemáticos orientales habían ido introduciendo, en el siglo precedente.

Dentro de este tratado se exponen, desde el teorema de Menelao, pasando por las relaciones de los arcos de círculos máximos de la esfera y las relaciones entre los arcos y sus cuerdas, llegando hasta la demostración del Teorema del seno, y algunas consecuencias derivadas de las fórmulas que va sucesivamente utilizando. La finalidad de la obra es resolver todos los casos posibles de triángulos esféricos, conocidos cuatro de sus elementos, para que los triángulos no queden indeterminados.

En la Figura 10 se presenta un triángulo esférico formado por la intersección de tres círculos máximos sobre la superficie de una esfera.

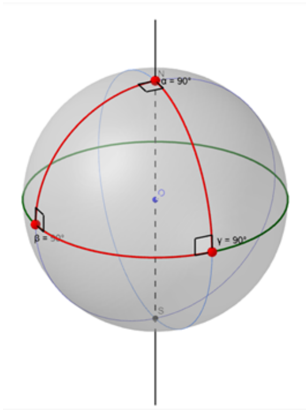


**Figura 10:** Triángulo Esférico. Elaboración Propia

Según Quesada y Ródenas (2009, p. 129) los escritos de Al-Yayyani llegaron a repercutir en la matemática europea y su trabajo pudo haber influido en matemáticos posteriores como Regiomontano. Aunque la trigonometría esférica pudo haber sido abordada por matemáticos antiguos como Menelao de Alejandría, el enfoque de Al-Yayyani ofreció soluciones prácticas a problemas complejos que antes resultaban difíciles de manejar; su definición de proporciones como números y su método para resolver triángulos esféricos cuando todos los lados son desconocidos, son particularmente notables por su originalidad y utilidad práctica, independiente de lo que hasta el momento estaba desarrollado (Quesada & Ródenas, 2009, p. 131).

Una figura destacada en el avance de la matemática en los países de Europa occidental fue, sin lugar a dudas, el francés François Viète (1540 - 1603). La trigonometría de Viète, así como su álgebra, tienen como característica principal la generalización. Viète fue el fundador del enfoque analítico para la trigonometría, e introdujo la noción del triángulo polar en el estudio de la trigonometría esférica. Con su trabajo Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus publicado en 1579, fue uno de los primeros en hacer un tratamiento sistémico en la resolución de triángulos planos y esféricos, utilizando tablas de las seis funciones trigonométricas (Boyer, 1986, p. 391).

El surgimiento del álgebra simbólica, impulsado por François Viète, junto con el desarrollo de la geometría analítica por parte de figuras como Pierre de Fermat y René Descartes, transformó en el siglo XVII la naturaleza geométrica de la trigonometría. Esta comenzó a orientar progresivamente hacia enfoques más algebraicos y analíticos. En particular, Viète extendió la aplicación de la trigonometría a la resolución de ecuaciones algebraicas, ampliando así su campo de acción (Boyer, 1986, p. 394).

## 2.5. ¿Por qué los árabes estuvieron tan interesados en la trigonometría esférica?

Para los musulmanes, quienes profesan el Islam como su religión, es de gran importancia la práctica diaria de la oración tal como lo establece el Coran, libro sagrado del Islam, considerado por los musulmanes como la palabra literal de Dios (Alá). En el lugar del mundo donde se encuentren es importante, al realizar la oración islámica, orientar su cuerpo y su espíritu hacia el punto de convergencia de su comunidad de fe. Es necesario para ellos determinar el Azimut o Qibla (dirección sagrada en el islam) hacia la Kaaba, que es un edificio en forma de cubo en el centro de la mezquita sagrada, ubicada en la ciudad de La Meca, en la actual Arabia Saudita. Determinar con precisión la Qibla fue un desafío científico importante, y para encontrarla desde cualquier punto del planeta, fue necesario aplicar principios de trigonometría esférica, lo que impulsó notablemente el desarrollo de esta rama de las matemáticas en el mundo islámico.

Según King (2018) antes del siglo IX, la determinación de la Qibla se basaba más en criterios religiosos simbólicos que en cálculos. Con el tiempo, en el mundo islámico oriental se desarrollaron métodos astronómicos y trigonométricos precisos para hallarla. "Posteriormente algunos astrónomos andalusíes medievales utilizando las matemáticas, por un lado, y estudiosos de la ley utilizando la geografía sagrada y las salidas y ocasos astronómicos, por otro, propusieron varios procedimientos diferentes para hallar la alquibla" (King, 2018, p. 188). El cálculo de la Qibla requería conocimientos de coordenadas geográficas e implicaba el cálculo de la dirección de una localidad respecto de otra, mediante procedimientos de geometría y trigonometría. La importancia fundamental dentro del islam del concepto de Qibla llevó al desarrollo de tablas, mapas, instrumentos y métodos cartográficos. Según King y Lorch (1992) citado por Almakky y Snyder (1996, p. 29), se desarrolló una geografía sagrada en la que el mundo estaba dividido en secciones alrededor de la Kaaba, y la Qibla en cada sección estaba determinada por los procedimientos de la astronomía popular.

El ángulo exacto de la Qibla depende de la ubicación de la persona en oración; el método que se plantea en Almakky y Snyder (1996, p. 31) toma en consideración la forma real de la Tierra para proporcionar una fórmula con la que una persona, independientemente de dónde esté ubicada, pueda determinar el Azimut exacto. Asimismo, King (2018) plantea el problema básico, ilustrado en la Figura 11, que es determinar la dirección a la Meca (indicada por M en la Figura 11) desde cualquier localidad X, dadas las latitudes de ambas localidades medidas por $MB(\varphi_M)$ y $XA(\varphi)$, y la diferencia de longitud $AB(\Delta L)$. La Qibla se mide por el ángulo $AXM(q)$, el punto $P$ en la figura representa el Polo Norte. En ocasiones se utiliza la diferencia entre latitudes ($\Delta\varphi = \varphi - \varphi_M$) y la distancia a la Meca $XM$. Una vez disponibles los datos geográficos, es necesario un procedimiento matemático para determinar la Qibla, que utiliza trigonometría esférica.

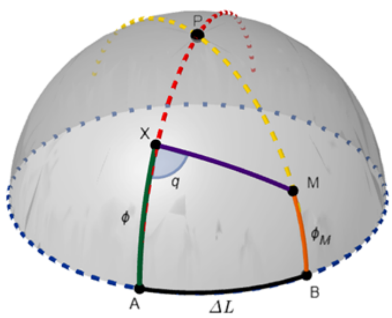


**Figura 11:** Representación geométrica para determinar la dirección de la Qibla. Elaboración propia

A los efectos de la determinación de la Qibla, se puede considerar que la Tierra es una esfera, ya que esta suposición no afecta de forma significativa la precisión del resultado. En general, se utiliza un círculo máximo de una esfera (siendo la esfera, la Tierra) para determinar el camino más corto que conecta cualquier par de puntos a lo largo del círculo, particularmente desde la localidad donde se esté hacia La Meca.

Este modelo del círculo máximo, se aplica mediante trigonometría esférica para calcular la Qibla y permite establecer relaciones entre lados y ángulos de triángulos formados por tres círculos máximos de la Tierra. Para establecer la dirección de la oración se consideran 3 puntos: el Polo Norte (punto $P$), la ubicación de la Kaaba (punto $M$) y la ubicación donde se encuentren los oradores (punto $X$).

Es importante destacar que, de los 3 puntos para formar un triángulo esférico, uno de ellos siempre se va al Polo Norte porque la ciudad de la Meca se encuentra donde el sol cruza el meridiano, estando al mismo tiempo en la latitud local. Es decir, en términos astronómicos, el sol alcanza el cenit de la Kaaba, por lo que cualquier objeto vertical en la tierra que reciba luz solar proyecta una sombra que indica la Qibla.

King (2018) afirma que, hasta donde se sabe, "en los doscientos primeros años del islam no hubo nadie que fuera capaz de calcular la dirección hacia un punto concreto mediante un método matemático utilizando para ello los datos geográficos necesarios" (p. 201). Todo esto cambió en Bagdad a comienzos del siglo IX, ya que se disponía de las coordenadas geográficas de Ptolomeo, y además surgieron nuevos procedimientos para calcular la Qibla, ya fueran simples aproximaciones geométricas o complejos y precisos cálculos matemáticos

En la actualidad, existen numerosas aplicaciones móviles y sitios web que permiten encontrar la dirección de La Meca de manera precisa. Estas herramientas utilizan la tecnología GPS para calcular la Qibla desde cualquier lugar del mundo.

# 3. La Consolidación de las Funciones Trigonométricas

La trigonometría comenzó a consolidarse como una disciplina independiente dentro de las matemáticas hacia mediados del siglo XV, cuando matemáticos como Regiomontano comenzaron a desarrollar métodos sistemáticos para el estudio de triángulos, separándola de la astronomía y dándole un carácter más general. Según lo expresado en Maldonado et al. (2012), "la función trigonométrica abstrae propiedades de las tablas trigonométricas y del estudio de los triángulos, pero obedece a prácticas de naturaleza distinta que la trigonometría como rama de la geometría" (p. 376). Este cambio refleja un proceso de formalización en el que las razones trigonométricas dejaron de ser meras herramientas geométricas para convertirse en objetos de estudio en sí mismos.

## 3.1. La influencia de las series de potencia

Como se mencionó anteriormente, los matemáticos de Kerala, entre los siglos XIV y XVII, influenciaron, a través de desarrollos de series de potencias de la tangente inversa y luego del seno y coseno, en una mejor aproximación para las tablas de seno y coseno. Particularmente se le atribuye al astrónomo hindú Madhava el avance desde los procedimientos finitos hacia el paso al límite con procesos infinitos, estableciendo el nexo entre la matemática antigua y el análisis clásico moderno (Joseph, 1996, p. 367).

Se conocen al menos dos trabajos de matemáticos hindúes del siglo XVI acerca de series de potencias, uno de ellos escrito alrededor de 1530 por Kerala Gargya Nilakantha (1445-1545) llamado Tantrasangraha-Vyakhya, y otro escrito tiempo después por Jyesthadeva (1500-1610) llamado Yuktibhasa, en este último se exponen los resultados del trabajo realizado por Madhava en el siglo XIV. A su vez Nilakantha atribuye a Madhava, en su trabajo Aryabhatiyabhasya, el descubrimiento de la serie para seno. Según Joseph (1996), Madhava fue el primer matemático en expresar las funciones trigonométricas de seno y coseno por medio de series.

Las series correspondientes al seno y al coseno se encuentran en *Yuktibhasa* en forma de verso (Katz, 1995). A continuación, se muestra una traducción de lo que expresa el seno, o en el lenguaje hindú, la *jiva*, que indica $r \cdot \sin(\theta)$:

> *Multiplique el arco por el cuadrado del arco y tome el resultado de repetir eso (cualquier número de veces). Divida (cada uno de los numeradores anteriores) por los cuadrados de los números pares sucesivos aumentados por ese número y multiplicados por el cuadrado del radio. Coloque el arco y*

*los resultados sucesivos así obtenidos uno debajo del otro, y reste cada uno del anterior. Estos juntos dan la jiva, con cierto grado de aproximación.*

Para explicarlo en términos actuales, se puede considerar $r$ el radio de un círculo y $s$ la longitud del arco correspondiente al ángulo $\theta$. Los numeradores tendrán la forma: $s, s\cdot s^2, s\cdot s^2\cdot s^2, s\cdot s^2\cdot s^2\cdot s^2, \ldots$

Estos se dividen por las cantidades indicadas en el verso:

$$\frac{s}{(2^2+2)r^2}, \quad \frac{s}{(2^2+2)r^2}\frac{s^2}{(4^2+4)r^2}, \quad \frac{s}{(2^2+2)r^2}\frac{s^2}{(4^2+4)r^2}\frac{s^2}{(6^2+6)r^2}, \ldots$$

Finalmente se realizan las restas indicadas, obteniendo:

$$\text{Jiva} = s - \left[\frac{s^2}{(2^2+2)r^2}\left[s - \left[\frac{s^2}{(2^2+2)r^2}\left[\frac{s^2}{(4^2+4)r^2}\left[s - \left[\frac{s^2}{(2^2+2)r^2}\frac{s^2}{(4^2+4)r^2}\frac{s^2}{(6^2+6)r^2}\ldots\right]\right]\right]\right]\right]\right]$$

En términos del ángulo $\theta$, considerando $s = r\theta$ y $Jiva = r\text{sen}(\theta)$, la expresión anterior simplificada se puede escribir como: $\text{sen}(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$, que es la expresión de la serie de potencia infinita de la función seno.

Los métodos empleados por los matemáticos indios de Kerala en el área de los desarrollos de series infinitas de potencias nos permiten sugerir que su civilización se anticipó, en casi dos siglos, a un cambio de pensamiento caracterizado por el estudio de los infinitesimales, estudio que en Europa aún no había empezado.

Asimismo, en Europa, Descartes (1596-1650) buscaba liberar a la Geometría del exceso de figuras, pero también buscaba darle sentido al Álgebra por medio de la Geometría. Según Sastre Vázquez et al. (2008), Descartes fue revolucionario al establecer que una curva se construye solamente con ofrecer una ecuación algebraica, contradiciendo a la idea antigua de que para que una curva existiera, era necesario construirla por medio de un procedimiento con regla y compás (p. 5).

Las series de potencias permitieron dar un tratamiento matemático a las llamadas curvas mecánicas que, según la clasificación de Descartes, son curvas generadas por un movimiento continuo de un punto según una regla o mecanismo específico, que no puede ser completamente descrito por una relación algebraica. Estas curvas se consideraban "mecánicas" porque, en la práctica, se dibujaban mediante dispositivos mecánicos o a través de movimientos físicos, en lugar de resolverse algebraicamente.

Según Mendoza (2017), a mediados del siglo XVII los desarrollos en series de potencias "eran algo que asombraba y cautivaba el interés de Isaac Newton (1643–1727)" (p. 49), pues a través de estos desarrollos era posible asignar una expresión analítica a curvas que aparentemente no se podían representar a través de ecuaciones algebraicas en el sentido cartesiano. En consecuencia, Newton desarrolló en 1669 el primer tratado sobre cálculo infinitesimal, denominado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. Allí expone un método para resolver problemas referentes a cuadraturas, lo que originó una expresión infinita de la función seno, dando además origen a las cantidades trascendentes trigonométricas.

Aunque Newton manejaba el seno a través de su serie de potencias, lo seguía mirando como una línea del círculo, él no tenía aún un reconocimiento de las propiedades de la función trigonométrica, como por ejemplo la periodicidad, pero se puede observar que, al tomar la variable independiente en el desarrollo de la serie, no se toma en grados, sino en radianes.

En este sentido, "se estaba realizando la primera transición de las funciones trigonométricas sobre ángulos a las funciones trigonométricas sobre números reales" (Tello Fernandez, 2017, p. 48). Con esto, Newton estaba dirigiendo la noción de los números sen(x) y cos(x) para que no dependieran de ningún tipo de idea geométrica.

## 3.2. El Origen de las Funciones Trigonométricas como Objeto Matemático

La noción de función se encuentra implícita en las tablillas astronómicas creadas por los Babilonios entre los años 2000 a.C. y 500 a.C. En Sastre Vázquez et al. (2008) se menciona que estas tablillas "reflejaban observaciones directas de fenómenos enlazados por una relación aritmética, como, por ejemplo, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol" (p. 3).

Además, si bien Ptolomeo, en la construcción de su tabla de cuerdas, usa algunas expresiones que pueden ser equivalentes a las actuales fórmulas trigonométricas, no incorpora explícitamente la noción de función (Tello Fernandez, 2017, p. 84). Es así, que la función trigonométrica adquirirá un primer significado cuando la atención ya no esté puesta en los ángulos sino en la medida del arco que se genera.

La aparición de la geometría analítica de la mano de Descartes permitió avanzar en el desarrollo del cálculo diferencial e integral, produciendo una revolución en el pensamiento matemático. Newton y Leibniz dan inicio a la creación de una de las herramientas matemáticas más potentes y al nacimiento de un nuevo paradigma científico: la naturaleza puede ser explicada a partir de ecuaciones diferenciales (Sastre Vázquez et al., 2008).

Entre los años 1660 y 1700, tanto Newton como Leibniz desarrollaron su estudio al cálculo de las curvas, entre sus estudios estaba el análisis de encontrar la velocidad de puntos moviéndose a través de curvas. Por un lado, Leibniz fue el primer matemático en utilizar la palabra "función" en 1692 haciendo referencia a cualquier cantidad que varía de un punto a otro en una curva dada. Sastre Vázquez et al. (2008, p. 147) señala que Leibniz no utilizaba el concepto de función como lo entendemos en la actualidad, sino que, para él, una curva estaba formada por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños.

Como se mencionó anteriormente, Newton y Leibniz amplían el concepto de función desarrollándolas en series de potencias. Sin embargo, las funciones trigonométricas seno y coseno no adquirieron importancia dentro del trabajo matemático de la época, pues después de la aparición de la expresión en serie de potencias para el seno, no se presentaron discusiones claras de las propiedades de esta función en los textos de cálculo que se escribieron en ese entonces (Katz, 1987).

En 1739, Euler (1707-1783) presenta el trabajo *De novo genere oscillationum* sobre descripción de fenómenos con movimientos periódicos, como por ejemplo la cuerda vibrante, las ondas de sonido que produce una campana, las ondulaciones del agua, los flujos de corrientes marinas, etc., denominados actualmente movimientos de un oscilador armónico. En esta búsqueda de descripción de fenómenos, Euler cambia el foco de lo periódico del tiempo a lo periódico del movimiento, en este sentido, "la matemática surgía de la física, pero no para la física" (Velasco Hernandez, 2007, p. 99).

Las funciones trigonométricas tuvieron un papel clave en el estudio general de las funciones desarrollado por Euler, quien sustituye el concepto de variable aplicada a objetos geométricos por el concepto de función como una fórmula algebraica. El estudio, desarrollado en su trabajo *Introductio in Analysin Infinitorum*, en el año 1748, se basó en la representación de las funciones por medio de series de potencias. Euler sin duda amplió considerablemente el concepto de función, elevándolo de una mera herramienta para resolver problemas, comúnmente asociados con la Física, a un objeto de estudio matemático en sí mismo. Con esta perspectiva, abrió nuevas vías para investigar las funciones como entidades matemáticas autónomas, contribuyendo significativamente al desarrollo del análisis moderno.

En esta obra se puede analizar la proyección conceptual de Euler respecto a las funciones trigonométricas. En el capítulo VIII titulado *On Trascendental Quantities Which Arise from the Circle*, Euler proporciona un tratamiento de lo que se puede llamar el pre-cálculo de la función trigonométrica, la define numéricamente, no como líneas en un círculo, y discute sus diversas propiedades. La importancia del trabajo de Euler alcanza un valor histórico significativo, porque es el primero que trata la función trigonométrica sistemáticamente como una cantidad adimensional (Tello Fernandez, 2017). A Euler le debemos la notación utilizada actualmente, y es quien hace explícita la naturaleza de la variable independiente. A partir de este momento, la función trigonométrica alcanza el mismo estatus que las demás clases de funciones, convirtiéndose formalmente en un objeto de estudio del cálculo.

El concepto de función evolucionó a partir de la controversia ocurrida entre matemáticos del siglo XVIII como Euler, Bernoulli, D'Alembert, etc., al intentar dar respuesta al problema de la cuerda vibrante. Como menciona Tello Fernandez (2017), de acuerdo a la cultura dominante de la matematización newtoniana de la física, entendieron que describir matemáticamente el movimiento de la cuerda no era otra cosa que determinar la función que definía tal movimiento, tomada idealmente como una curva ubicada en un plano cartesiano. El problema consistía básicamente, en buscar soluciones de la ecuación diferencial parcial $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ donde $y = y(x,t)$ representa el desplazamiento de la cuerda desde su posición de equilibrio a una distancia $x$ en un tiempo $t$, y donde $c$ es una constante que depende de los parámetros físicos de la cuerda (su tensión y densidad lineal).

Como consecuencia de las discusiones entre estos grandes matemáticos sobre la solución al problema de la cuerda vibrante, se amplió el concepto de función para incluir las funciones definidas en expresiones analíticas a trozos, y las funciones que tenían un gráfico sin expresión analítica.

Entre 1720 y 1820 se empezaron a estudiar las funciones desde un punto de vista analítico, es decir, se cuestionaba si las funciones se debían representar a través de la forma de una curva (enfoque geométrico), por una fórmula (enfoque analítico) o por una definición (enfoque lógico-algebraico). Por su parte, Fourier (1768-1830) estudió el flujo de calor en los cuerpos materiales por lo que evolucionó el concepto de función al ser el primero en proponer la temperatura como una función de dos variables, el tiempo y el espacio. Conjeturó que era posible desarrollar una función en un intervalo mediante una serie trigonométrica, sin embargo, no lo demostró. Fourier reabrió el debate afirmando categóricamente que cualquier solución a la ecuación de calor, podría escribirse como una suma infinita de senos y cosenos.

La teoría de Fourier indica que cualquier función periódica $f(t)$ se puede descomponer en suma de funciones simples, cuya frecuencia es múltiplo de la función periódica (Hsu, 1970). Esto es, dicha función se puede descomponer en una serie armónica infinita expresada como:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)] = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

donde $\omega_0$ es la frecuencia de la función periódica llamada frecuencia fundamental, y $a_n, b_n, C_n$ y $\theta_n$ son los coeficientes de la Serie de Fourier que definen las senoides cuya frecuencia es múltiplo de la fundamental.

Joseph Fourier integró la trigonometría con el álgebra y el análisis conocido hasta su época, consolidando definitivamente a la trigonometría dentro del análisis matemático. En palabras de Tello Fernandez (2017) "Fourier al reforzar el uso de la serie trigonométrica para la representación de funciones y otras aplicaciones lleva a la trigonometría a su punto más alto." (p. 72).

Desde este punto de vista, Fourier pone al mismo nivel la expresión analítica y la interpretación geométrica de una curva para representar una función. Además, pone en evidencia que dos funciones dadas por diferentes expresiones analíticas pueden coincidir en un intervalo y ser diferentes. Por otro lado, Dirichlet (1805-1859) fue el primero en considerar la noción de función como una correspondencia arbitraria, es decir, ahora la función adquiere un significado independiente de la expresión analítica (Sastre Vázquez et al., 2008).

Era importante saber, para los matemáticos de esa época, exactamente las condiciones en que una función real admite la representación como serie armónica. Buscaban conocer si esa representación es única, cuándo existe, o si, por el contrario, una misma función puede representarse mediante dos o más series trigonométricas diferentes. Esta cuestión fue abordada y resuelta por Georg Cantor (1845-1918) en varios artículos publicados entre 1870 y 1872, y fue el punto de partida para la creación de la teoría de conjuntos (Torretti, 1998).

## 4. Conclusiones

El recorrido histórico presentado demuestra que el desarrollo de las funciones trigonométricas es el resultado de una larga y compleja evolución cultural y matemática, que abarca desde las civilizaciones babilónicas hasta la época moderna. Las civilizaciones antiguas, como los babilonios, establecieron las bases mediante la creación del sistema sexagesimal y el reconocimiento de relaciones angulares. Posteriormente, en la India, se perfeccionaron las razones trigonométricas y se desarrollaron tablas y series que facilitaron su aplicación en astronomía y navegación, inspirando avances que atravesaron el tiempo y las culturas.

Los matemáticos árabes jugaron un rol clave al integrar conocimientos geométricos, trigonométricos y esféricos, ampliando la comprensión y uso de las funciones trigonométricas, y transmitiendo estos saberes a Europa, lo que impulsó su consolidación en la matemática occidental. Además, el avance hacia una interpretación algebraica y analítica en el siglo XVII, con figuras como Viète, Fermat y Descartes, consolidó las funciones trigonométricas como objetos matemáticos fundamentales en diversas ramas de la ciencia. Este análisis evidencia que el desarrollo de las funciones trigonométricas está estrechamente ligado a las necesidades prácticas y culturales de cada época, y que su historia refleja la interacción entre diferentes civilizaciones, géneros de conocimiento y las demandas socioeconómicas, configurando un importante patrimonio científico que sigue vigente en la actualidad.

Lejos de constituirse como un saber puramente abstracto, la trigonometría se fue configurando históricamente como una herramienta clave para dar respuesta a problemas concretos en campos como la Astronomía, la Arquitectura, la Navegación, la Cartografía o la Topografía. Esta reconstrucción histórica de las funciones trigonométricas que aquí presentamos permite no solo comprender su evolución como saber, sino también interpelar críticamente el modo en que se introduce hoy en la escuela, muchas veces desprovisto de sentido y desconectado de sus raíces problemáticas. Integrar la dimensión histórica de la trigonometría con propuestas interdisciplinarias no solo favorece la reconstrucción de su génesis, sino que habilita nuevas posibilidades didácticas: diseñar propuestas de enseñanza que promuevan la formulación de preguntas, la exploración de problemas reales y la modelización de fenómenos del mundo, recuperando así el carácter profundamente instrumental y contextual de este conocimiento.

**Agradecimientos:** Este trabajo ha sido realizado en el marco de la beca "Estímulo a las Vocaciones Científicas", otorgada a los autores por el Consejo Interuniversitario Nacional (CIN) y desarrollada en la Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina..

**Contribución de las personas autoras:** Conceptualización: E.M.B.V, B.M.S, M.L.S. Curación de datos: E.M.B.V, B.M.S, M.L.S. Investigación: E.M.B.V, B.M.S, M.L.S. Metodología: E.M.B.V, B.M.S, M.L.S. Administración del proyecto: B.M.S, M.L.S. Escritura (borrador original): E.M.B.V. Escritura (revisión y edición) E.M.B.V, B.M.S, M.L.S.

**Accesibilidad de datos:** No aplica.

# Referencias


Almakky, G., & Snyder, J. (1996). Calculating an Azimuth from One Location to Another A Case Study in Determining the Qibla to Makkah. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, *33*(2), 29-36. https://doi.org/10.3138/C567-3003-1225-M204

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial.

Buendía, G., & Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1287-1296, Vol. 22). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Fernandez, A. O. (2005). *Historia de la Matemática* (Vol. 1). Pontificia Universidade Catolica del Peru.

Hsu, H. (1970). *Fourier Analysis* (revised edition). Simon and Schuster. New York, NY.

Joseph, G. G. (1996). *La Cresta del Pavo Real: Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Pirámide.

Katz, V. J. (1987). The calculus of the trigonometric functions. *Historia Mathematica*, *14*(4), 311-324. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0315-0860(87)90064-4

Katz, V. J. (1995). Ideas of Calculus in Islam and India. *Mathematics Magazine*, *68*(3), 163-174. https://doi.org/10.1080/0025570X.1995.11996307

King, D. A. (2018). La alquibla en la Córdoba medieval y la orientación de la Gran Mezquita. *Awraq: Estudios sobre el mundo árabe e islámico contemporáneo*, (17), 187-227.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Maldonado, S., Montiel, G., Cantoral, R., & México, C. I. (2012). Construyendo la noción de función trigonométrica. Estrategias de aprendizaje. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*, 371-376.

Mendoza, J. (2017). *Las series de potencias en el proceso de formalización de lo trascendente en matemáticas* [Tesis de Maestría]. Universidad del Valle.

Ostermann, A., & Wanner, G. (2012). *Geometry by Its History*. Springer Berlin Heidelberg.

Quesada, J. M., & Ródenas, M. d. C. E. (2009). Vida y obra del matemático giennense del siglo XI Ibn Mu'Ad Al-Yayyani. *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses*, (198), 117-138.

Recio, G. L. (2021). Orígenes de la trigonometría griega: la composición de la tabla de cuerdas de Ptolomeo. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, *6*(1), 105-138. https://doi.org/10.61377/ehc.32258

Sapag, R. (2021). *Enseñanza de la Trigonometría en la Escuela Secundaria*. https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/2946

Sastre Vázquez, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *4*(16), 141-155. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/1167

Tello Fernandez, J. F. (2017). *Surgimiento de la función trigonométrica: Aspectos Históricos-Epistemológicos* [[Trabajo de Tesis no publicado]], Universidad del Valle. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/entities/publication/2d78fa3e-3f3d-43c8-9f4d-79fa807bb198

Toomer, G. J. (1984). *Ptolemy's Almagest*. Princeton University Press.

Torretti, R. (1998). *El paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en filosofía de la matemática*. Universitaria.

Vargas, G. (2019). *Propuesta de un modelo Praxeológico de Referencia para la enseñanza del seno y coseno en quinto de secundaria* [Tesis de Maestría]. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Velasco Hernandez, J. (2007). Daniel Bernoulli y Leonardo Euler o el encuentro de dos formas de ver la matemática. *Miscelánea Matemática*, *45*, 97-104.