Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 25, No 1. Agosto, 2024 – Febrero, 2024

ISSN 1659 -0643
DOI: 10.18845/meij.v25i1.7235

Desenvolvimento e Implementaçã de Sequências Didáticas para EDOs de Segunda Ordem: Aplicações Práticas com GeoGebra

| Development and Implementation of Didactic Sequences for Second Order ODEs: Practical Applications with GeoGebra |

Ana Carla Pimentel Paiva
carlapimentel00@gmail.com
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará-IFCE (campus Fortaleza)
Fortaleza, Brasil

Francisco Régis Vieira Alves
fregis@ifce.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará-IFCE (campus Fortaleza)
Fortaleza, Brasil

Helena Maria de Barros Campos
hcampos@utad.pt
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro-UTAD
Vila Real, Portugal

Recibido: 30 de octubre de 2023 Aceptado: 30 de mayo de 2024

Resumen: As Equações Diferenciais Ordinárias de Segunda Ordem se apresentam como um assunto considerado na abordagem tradicional da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias - EDO. Nesse artigo se descreve, de modo particular, duas etapas previstas pela Engenharia Didática – ED: as fases de análise prévias e análise a priori. Enfatizam-se atividades descritas/estruturadas com apoio da tecnologia. A mediação afetada pela exploração adequada de softwares possibilita evitar determinados elementos que atuam como entraves a um entendimento amplo, inerente a essas equações. Desse modo, indicamos e estruturamos de situações-problema no Geogebra, de modo a empregar a visualização no entendimento de propriedades qualitativas (gráfico-geométricas) e não apenas de natureza algorítmicas. Proporcionando assim, a descrição de fatores pertinentes à mediação didática das equações diferenciais de segunda ordem.

Palabras Clave: Equações Diferenciais Ordinárias, Engenharia Didática, Geogebra.

Abstract: Second Order Ordinary Differential Equations are a subject considered in the traditional approach to the theory of Ordinary Differential Equations - ODE. This article describes, in particular, two stages foreseen by Didactic Engineering – ED: the phases of preliminary analysis and a priori

[1]Ana Carla Pimentel Paiva. Doutoranda do Programa do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nosteste em Ensino- RENOEM- polo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE. Endereço Postal: IFCE- Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, Fortaleza – CE -Brasil. Código Postal: 60040-531. E-mail:carlapimentel00@gmail.com

[2]Francisco Régis Vieira Alves. Professor Titular e coordenador do Programa do Programa de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nosteste em Ensino- RENOEM- polo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE. Endereço Postal: IFCE- Av. Treze de Maio, 2081 - Benfica, Fortaleza – CE -Brasil. Código Postal: 60040-531 E-mail: fregis@ifce.edu.br.

[3]Helena Maria de Barros Campos. Professora Auxiliar na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro- Departamento de Matemática- Polo do Centro de Investigação em Didática e Tecnologia na Formação de Formadores -UA, Gabinete: F1.18. Quinta de Prados, Vila Real, Portugal . 5000-801 . E-mail: hcampos@utad.pt.

analysis. Activities described/structured with the support of technology are emphasized. Mediation affected by the appropriate exploitation of software makes it possible to avoid certain elements that act as obstacles to a broad understanding, inherent to these equations. In this way, we indicate and structure problem situations in Geogebra, in order to use visualization to understand qualitative properties (graphic-geometric) and not just algorithmic ones. Thus providing the description of factors relevant to the didactic mediation of second- order differential equations.

Keywords: Second Order Ordinary Differential Equations, Didactic Engineering, Geogebra.

1. Introdução

A disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias – EDO presente nos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática, Química, Física e Engenharias abrange o estudo de soluções para determinados problemas de modelagem matemática, que correlacionam processos físicos e que envolvem taxas de variações que matematicamente compreendem o conceito de derivada de funções reais.

Uma das razões da importância desse conteúdo matemático seriam os modelos físicos descritos por essas equações, como por exemplo: o crescimento e o decaimento exponenciais, os sistemas massa-mola ou circuitos elétricos (Boyce e Diprima, 2020).

De Oliveira e Igliori (2013) afirmam que nas universidades, em relação ao ensino de EDO e de Cálculo de Várias Variáveis se constata, devido ao elevado grau de complexidade e abstração envolvidas nos conceitos matemáticos, e por essa razão os alunos desenvolvem alguns entraves ao estudar determinados tópicos dessas matérias.

Em concordância, dispomos de estudos como Arslan e Laborde(2003), Dullius et al. (2011), Alves (2016a) que abordam a dificuldade dos alunos ao estudar equações diferenciais e a estratégia empregue para superar a dificuldade de compreensão dos conceitos matemáticos presentes no conteúdo matemático EDO, que concerne na utilização de softwares no ensino desse conteúdo matemático, e os diversos benefícios que podem ocorrer tanto da transmissão dos saberes quanto no processo de assimilação de conceitos pelos estudantes.

Isto é, de acordo com os estudos citados, as ferramentas dos softwares atuaram como agentes facilitadores na compreensão dos conceitos matemáticos. Conforme Alves (2016a) o emprego de softwares auxilia a resolução de situações problema e fornece recursos interativos que auxiliam os alunos a se engajarem de forma mais efetiva no processo de construção do conhecimento a respeito do conteúdo ministrado pelo professor em sala de aula.

Além disso, o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias é de suma importância não só devido a sua aplicabilidade em fenômenos presentes no cotidiano, mas também a sua utilização na própria matemática, na prova de lemas, teoremas e conjecturas (Alves, 2016a).

Por essa razão, nos propomos realizar uma fundamentação matemática desse assunto abordando as dimensões: cognitiva, epistemológica e didática. Para isso, iremos investigar o ensino de EDO por meio de uma metodologia de ensino, intitulada de Engenharia Didática - ED, que será responsável pela organização da atmosfera de pesquisa.

Desse modo, pretendemos identificar os principais problemas existentes no ensino de EDO, e elaborar, em seguida, alternativas metodológicas de trabalho com tais problemas encontrados.

Além da ED, optaremos em empregar a Teoria das Situações Didáticas-TSD, que é um modelo teórico desenvolvido na França, por Guy Brousseau, em 1970, que se refere a transmissão dos saberes matemáticos, ilustrando algumas situações fundamentais de aprendizagem, e que principiou uma fundamentação teórica para novos trabalhos de pesquisa em didática, e na prática de professores de matemática (Brousseau, 2008).

Portanto, também realizaremos um estudo aprofundado acerca do processo de uma transposição didática, readaptação do ensino científico apoiada na visualização, com amparo na tecnologia, especificamente, no Geogebra, que nos auxiliará como suporte metodológico, em que priorizamos explorar no decorrer da aplicação das nossas situações didáticas.

Esperamos no final da pesquisa, evidenciar potencialidades do software que auxiliam no processo de compreensão do conteúdo por meio da visualização dos conceitos, auxiliando desse modo em uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos de EDO durante as situações didáticas.

2. Bases teóricas

Fundamenta-se essa pesquisa em uma metodologia intitulada de Engenharia Didática - ED, que conforme Alves (2016b) se trata de uma metodologia para a análise de situações didáticas sendo composta por quatro fases (análise preliminar, análise a priori, experimentação e análise a posteriori).

E a estrutura dessa metodologia, essa divisão em quatro fases, permite compreender o nosso fenômeno de interesse possibilitando realizar de forma qualitativa a pesquisa e o encadeamento dos objetivos que pretendemos atingir ao longo dessa pesquisa.

Na primeira fase prevista pela ED, as análises preliminares, o professor deve compreender a estrutura atual de ensino, no caso o ensino de EDO, e seus efeitos, bem como, as limitações do Geogebra, para o uso didático. E, assim, determinar as principais dimensões que o problema deva ser estudado e como se relacionam com o sistema de ensino, por exemplo: as dimensões epistemológicas, cognitivas e didáticas (Almouloud, 2007).

De forma mais sucinta, Alves (2018), descreve que a dimensão epistemológica abrange as características do conteúdo que vai ser abordado desde sua evolução histórica, a sua fundamentação matemática. Enquanto a dimensão cognitiva as dificuldades que os alunos possam desenvolver ao estudar determinado assunto matemático e por fim a dimensão didática que averigua as características relacionadas ao funcionamento do sistema de ensino (Alves, 2018).

Em relação a essa perspectiva, dentre os possíveis obstáculos epistemológicos da EDO podemos elencar a dificuldade na compreensão de um conceito fundamental da EDO, a diferenciabilidade de funções, para alguns alunos, entender essa ideia abstrata pode ser desafiador (Alves, 2016a).

Por essa razão, e em vista aos estudos apresentados que dissertam acerca dos benefícios em empregar softwares, se optou para a aplicação do Geogebra. Assim devemos considerar os obstáculos epistemológicos relativos à compreensão dos conceitos de EDO descritos nos trabalhos de Arslan e Laborde (2003), Dullius et al. (2011), Alves (2016a) e ainda identificar as possíveis dificuldades que os alunos possam ter em relação ao software.

Nos estudos de Araújo et al. (2022) estam elencados as dificuldades que os alunos podem enfrentar para compreender o funcionamento do Geogebra, o que pode impedir que eles participem efetivamente da situação didática proposta, além de problemas em relação quanto à disponibilidade de máquinas e infraestrutura para o uso.

Na segunda fase da ED, as análises priori, o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações didáticas com a finalidade de responder os questionamentos da pesquisa e validar as hipóteses suscitadas na fase anterior (Almouloud, 2007).

Segundo Brousseau (1986), essas situações devem ser concebidas de maneira análogas às situações que originaram o conhecimento, de modo que o entendimento do saber matemático pelos alunos ocorra por adaptação, assimilação e equilibração.

Assim para o desenvolvimento dessas situações didáticas, em uma perspectiva teórica bem fundamentada, necessita-se de uma teoria de ensino que aponte uma sistematização da construção dessas situações, métodos para transmitir determinado conhecimento.

Em relação a essa pesquisa, recorda-se que em relação a essa teoria de ensino, a opção escolhida, foi a Teoria das Situações Didáticas - TSD. A escolha em empregar a TSD ocorreu devido a sua possível contribuição na elaboração de situações didáticas enfatizando a visualização dos conceitos de EDO no software Geogebra.

Além disso, compreende-se por meio de artigos acadêmicos que relacionam que a TSD e a ED, uma complementariedade que pode possibilitar a ruptura de determinados formatos de ensino (Paiva, 2019).

A terceira etapa da ED, a experimentação, pode ser definida como a etapa em que ocorre a aplicação da situação didática, ou seja, é a etapa para garantir os resultados práticos com a análise teórica (Almouloud, 2007). Assim, é nessa etapa que é colocado em prática todo o dispositivo planejado no momento anterior, na análise a priori.

Na pesquisa, serão convidados a participar na etapa da experimentação, os alunos do ensino superior que cursaram ou estejam cursando a disciplina de Equações Diferenciais do curso de Matemática.

E por fim, na Análises a Posteriori e Validação, ocorrerá uma investigação acerca da produção dos alunos, observando o comportamento deles durante o desenvolvimento da sequência didática e todos os dados construídos no decorrer da experimentação. Segundo Artigue (1996) esta etapa se apóia no conjunto de dados coletados a partir da experimentação.

Salientamos que a elaboração das situações didáticas ocorrerá na segunda fase da ED, análise a priori, utilizando-se recursos como: imagens, gravações e transcrições para coleta de dados.

A razão da utilização dos critérios sistemáticos e os pressupostos da ED, remete ao caráter de confronto que a mesma proporciona, isto é, o confronto dos dados previstos na segunda fase da ED com os dados recolhidos após a experimentação.

Dessa forma, com o intuito de garantir uma perspectiva teórica bem fundamentada para a discussão do nosso objeto de estudo, se utilizou a TSD na elaboração de situações didáticas, em que ocorreu uma previsão das das fases da teoria (ação, formulação, validação, institucionalização), tencionando a identificação da manifestação de um pensamento intuitivo do aluno. Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), trata da relação existente entre o aluno, professor e saber, bem como o meio (milieu) em que a situação didática ocorre, sendo esta chamada por Brousseau (2008) de Triângulo Didático. Os autores Batista, Barreto e Sousa (2021), reforçam que:

2.1. Teoria das Situações Didáticas (TSD)

A Teoria das Situações Didáticas (TSD), trata da relação existente entre o aluno, professor e saber, bem como o meio (milieu) em que a situação didática ocorre, sendo esta chamada por Brousseau (2008) de Triângulo Didático. Os autores Batista, Barreto e Sousa (2021), reforçam que:

> A Teoria propugna a interação entre o professor, os alunos e o saber matemático em um meio planejado pelo docente, para que seus discentes elaborem conhecimentos autonomamente, os quais serão retomados ao final da tarefa, de modo que seja possível aproximá-los do saber institucionalizado. (Batista, et al. 2021, p. 578).

De acordo com Brousseau (2008) para que aprendizagem do aluno ocorra deve existir uma interação entre o aluno e o conhecimento, a denominada situação didática, que ocasiona a apreensão do conhecimento.

Portanto podemos caracterizar a situação didática como "um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado" (Brousseau, 2008, p.20). A partir disso, os autores Batista, Barreto e Sousa (2021), afirmam que essa teoria:

> [...] priorizou a ação do estudante como produtor de seu conhecimento matemático, enquanto enfatizou o papel do professor como o responsável por criar o meio adequado, com condições para que os alunos, a partir de seus conhecimentos e experiências prévias, apropriem-se dos conceitos matemáticos. (Batista et al. 2021, p. 579).

Conforme Brousseau (2008) as situações de ensino devem ser elaboradas pelo professor para que o aluno seja capaz de construir e se apropriar do conhecimento. O processo de assimilação dos conceitos por meio da TSD é dividido em dialéticas que podem ser modeladas de acordo com as situações de ação, formulação, validação e institucionalização, possibilitando a aprendizagem do aluno. Deste modo, podemos sintetizamos na figura 1, como ocorre cada uma dessas situações.

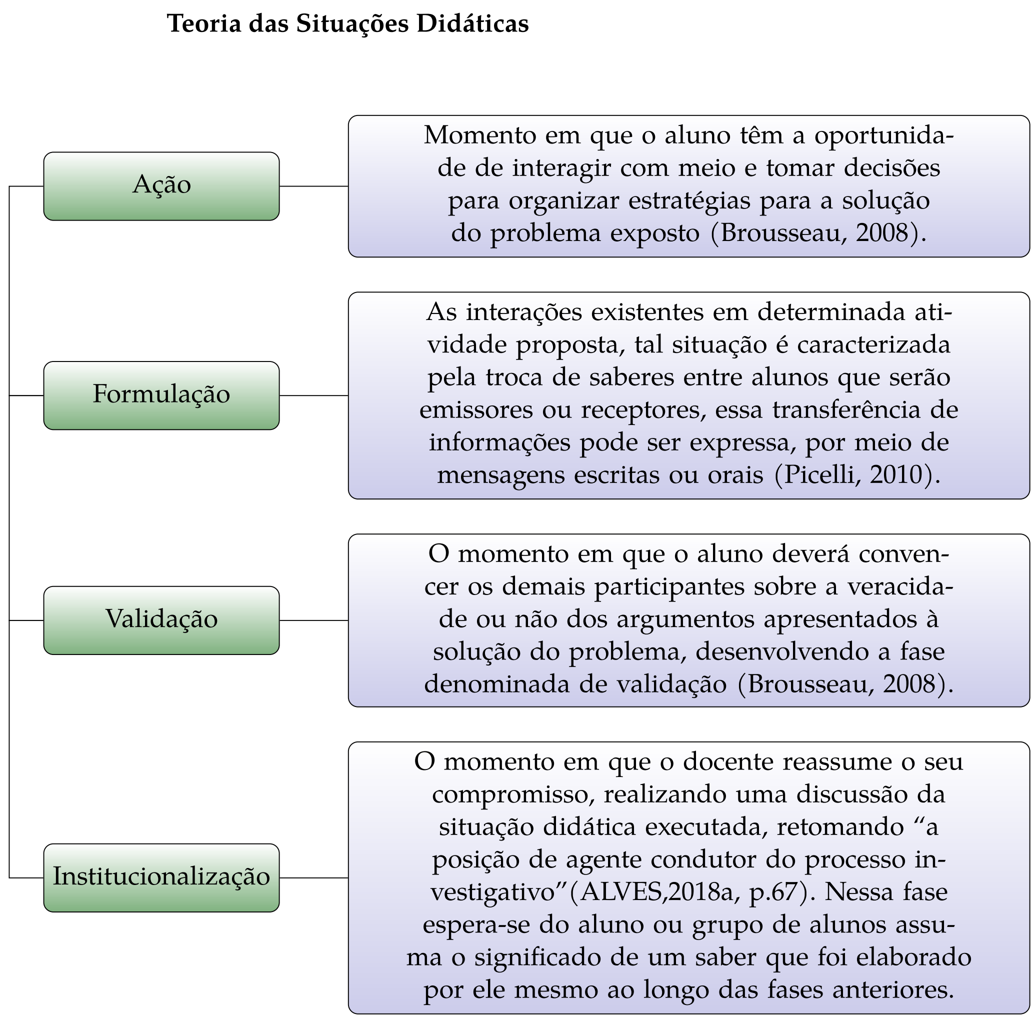

Figura 1: Descrição das quatro fases da Teoria da Situação Didática. Elaborado pelos autores

A partir do exposto, na figura 1, presentes nas dialéticas, percebemos que o aluno vivencia diretamente a construção do seu conhecimento. Portanto, confirmamos a predileção da TSD às necessidades deste trabalho e que será necessária para o momento de análise de dados.

3. O conteúdo matemático EDO

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação matemática que relaciona uma função desconhecida de uma variável (geralmente denotada por y) com suas derivadas em relação a essa variável. Essas derivadas representam as taxas de variação da função ao longo da variável independente (De Figueiredo e Neves, 1979).

A forma geral de uma EDO de ordem n, conforme De Figueiredo e Neves (1979) é dada por:

$$P_0(t)\frac{d^ny}{dt^n}+P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+P_n(t)y=G(t) \tag{1}$$

Em que $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t)$ e $P_n(t)$ são funções reais e contínuas em algum intervalo I aberto pertencente ao conjunto dos números reais. A ordem de uma EDO é determinada pelo maior grau de derivada presente na equação. Por exemplo, uma EDO de primeira ordem envolve apenas a derivada de primeira ordem $\frac{dy}{dx}$, enquanto uma EDO de segunda ordem envolve a derivada de segunda ordem $\frac{d^2y}{dx^2}$ e assim por diante.

Uma EDO é chamada de .ºrdinária"porque envolve apenas uma variável independente, em oposição às Equações Diferenciais Parciais (EDPs), que envolvem múltiplas variáveis independentes (De Figueiredo e Neves, 1979).

Conforme De Figueiredo e Neves (1979), nos pontos em que P_0 não se anula, podemos dividir a equação 1 por $P_0(t)$ e obter uma outra forma geral das EDO's:

$$\frac{d^ny}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+p_n(t)y=g(t) \tag{2}$$

$$y^{(n)}+p_1(t)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(t)y'+p_n(t)y=g(t) \tag{3}$$

Resolver uma EDO significa encontrar uma função que satisfaça as condições da equação diferencial. Isso geralmente envolve determinar as condições iniciais ou as condições de contorno, dependendo do problema em questão. Existem diversos métodos analíticos e numéricos disponíveis para resolver diferentes tipos de EDOs (De Figueiredo e Neves, 1979)

3.1. Resolvendo Equações Homogêneas de Ordem n com coeficientes constantes

Considere, a EDO linear homogênea de ordem n com coeficientes constantes:

$$a_0\frac{d^ny}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{dy}{dt}+a_ny=0 \tag{4}$$

Existem diferentes métodos para resolver EDOs, dependendo da natureza específica da equação e das condições associadas, podemos dividir a forma de encontrar as soluções das EDO's em Métodos Analíticos e Métodos Numéricos.

Dentre os Métodos Analíticos mais comuns estão o método da separação de variáveis que é Aplicável a equações diferenciais de primeira ordem que podem ser manipuladas para isolar as variáveis independentes e dependentes em lados opostos da equação; o método de integração direta em que algumas EDOs podem ser integradas diretamente para encontrar a solução, comumente empregue em EDOs de primeira ordem e por fim o método de substituição que envolve substituir uma expressão ou uma função relacionada para simplificar a equação diferencial (Boyce e Diprima, 2020).

Em relação aos Métodos Numéricos mais utilizados podemos indicar o método de Euler que aproxima a solução da EDO através de passos sucessivos; os métodos de Runge-Kutta que são métodos numéricos mais precisos e eficientes para resolver EDOs, como o método de Runge-Kutta de quarta ordem; o método de diferenças finitas: que transforma a EDO em um sistema de equações algébricas que podem ser resolvidas numericamente; e finalmente as transformadas de Laplace que podem ser utilizadas para resolver EDOs lineares com coeficientes constantes (Boyce e Diprima, 2020).

A escolha do método depende da complexidade da equação, das condições de contorno ou iniciais fornecidas e dos recursos computacionais disponíveis. Métodos analíticos são preferidos quando são aplicáveis, pois fornecem soluções exatas. No entanto, em muitos casos, métodos numéricos são necessários para encontrar soluções aproximadas (Boyce e Diprima, 2020).

Afim de resolver a equação diferencial linear homogênea, com $n = 2$ empregamos o método analítico da substituição,e optamos por substituir y pela expressão e^{rx}, na EDO:

$$a_0 y^{''} + a_1 y^{'} + a_2 = 0 \tag{5}$$

Como $y' = re^{rx}$, e empregando a regra do produto, derivamos: $(y')' = (re^{rx})' = r^2 e^{rx}$ obtemos:

$$e^r x(a_0 r^2 + a_1 r + 1) = 0 \tag{6}$$

Uma vez que $e^{rx} \neq 0$ para termos o produto nulo, obrigatoriamente a equação:

$$a_0 r^2 + a_1 r + 1 = 0 \tag{7}$$

que intitularemos equação característica da equação diferencial de número 5 e suas raízes r relacionadas à natureza do delta Δ da equação do segundo grau em função de r (Boyce e DiPrima, 2020).

$$\begin{cases} \text{SE } \Delta > 0 \Rightarrow y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}; \\ \text{SE } \Delta = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x}; \\ \text{SE } \Delta < 0 \Rightarrow y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)). \end{cases}$$

Para um melhor entendimento acerca da resolução das EDO's, analisaremos inicialmente uma EDO de primeira ordem, em que a EDO é dada por $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ ou $y' = f(x, y)$. Dessa forma, y é a função desconhecida em relação a x e $f(x, y)$ é uma função conhecida que descreve a taxa de variação de y em relação a x. Para resolver uma EDO de primeira ordem, nem sempre é necessário empregar a equação característica, podendo em determinadas equações se aplicar o método da integração, ou seja, se isolar a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ no lado esquerdo, retornando a EDO na forma padrão. Isso significa que todos os termos que contenham y devem ficar no lado direito (De Figueiredo e Neves, 1979).

Posteriormente, um dos mecanismos possíveis é se integrar ambos os lados da equação em relação a x. A integração permitirá que se elimine a derivada e encontre a solução geral da EDO.

Por fim, se aplicar as condições iniciais, se fornecidas $y(x_0) = y_0$, em que x_0 e y_0 são valores conhecidos, desse modo essas informações determinam solução única da EDO (solução particular). Para isso, se substitui as condições iniciais na solução geral encontrada anteriormente e se resolve para quaisquer constantes desconhecidas que apareçam na equação (Figueiredo e Neves, 1979).

Ejemplo 1

Resolver a EDO $y' = x \cdot y$; ou seja, $\dfrac{dy}{dx} = x \cdot y$.

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = xdx, \text{ integrando cada termo}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int xdx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Se tivéssemos a condição inicial, por exemplo, $y(0) = 1$. Substituindo $x = 0$ e $y = 1$, na equação, como $\ln 1 = 0$, logo, $C_1 = 0$. Portanto, a solução particular da EDO é: $\ln|y| = \dfrac{x^2}{2}$.

Ejemplo 2

$\dfrac{dy}{dx} = xy^2$.

$$\frac{dy}{y^2} = xdx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int xdx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C_1.$$

Logo o valor de $y = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C_1}$ representa a solução geral da EDO.

Isto é, a família de curvas representadas por diferentes valores de C. Para encontrar uma solução particular, seria necessária uma condição inicial ou um ponto específico em que a solução passa. Com a condição inicial, pode-se resolver para C e obter a solução única para a EDO.

Na Figura 2, exibimos com o suporte do Geogebra a família das curvas que são soluções da equação $\frac{dy}{dx} = xy^2$, para auxiliar o entendimento da solução da equação diferencial.

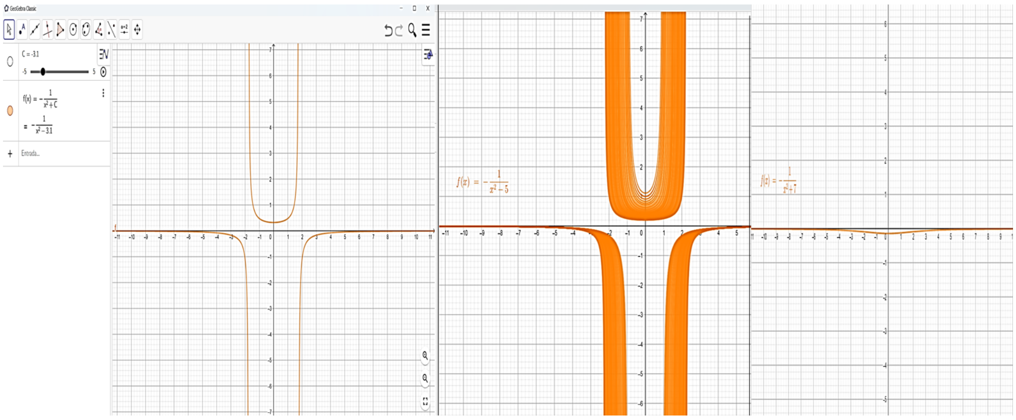

Figura 2: Exemplificação de uma solução de equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = xy^2$ de primeira ordem, na primeira imagem (á esqueda) temos a solução quando a constante $c = -8$, na segunda imagem exibimos o rastro para um controle deslizante para a constante C variando de -20 a 20, e por fim, na direita, temos a solução da equação quando $c = 7$. Elaborado pelos autores

Observe no exemplo da Figura 2, pode-se verificar o traço da curva que compreende a solução da EDO e uma infinidade de soluções de uma equação diferencial ordinária. Além disso, percebemos a solução quando $C = -8$, na primeira imagem dessa figura, na imagem seguinte evidencia-se cada solução encontrada, ao variarmos o valor da constante C.

Posteriormente, divisamos um fenômeno que ocorreu na solução dessa equação diferencial em particular à medida que a variável aumenta os valores, as soluções da equação diferencial tendem a ir para valores nulos. Tal fato acontece devido ao limite lateral tendendo a valores infinitos pela direita da função $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}$ que representa a função que se torna nula.

Através do software, podemos compreender visualmente o comportamento da função que representa a solução da EDO.

Retomando a solução da EDO de segunda ordem, temos que em alguns casos, o estudo das raízes da equação característica, que remete a uma equação do segundo grau, logo devemos analisar a natureza do Δ (delta) como parâmetro para decidir como serão as raízes da equação diferencial, como explicitado anteriormente. Na Figura 3, fizemos um esquema que simplifica a resolução.

Raízes da equação característica: $r_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Natureza de r_1 e r_2	Solução Geral
Caso 1: Reais e Desiguais $(r_1 \neq r_2)$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C e^{r_2 x}$
$b^2 - 4ac > 0$	
Caso 2: Reais e Desiguais $(r = r_1 = r_2)$	$y = C_1 e^{rx} + C e^{rx}$
$b^2 - 4ac = 0$	
Caso 3: Conjugados Complexos $(r_{1,2} = \alpha \pm i\beta)$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)$
$b^2 - 4ac < 0$	

Figura 3: Análise das raízes da equação característica da EDO de segundo grau. Elaborado pelos autores

Na seção seguinte, apresentamos o resultado das análises prévias da ED, o desenvolvimento de uma situação problema, se baseando no pressuposto de (Almouloud, 2007) que afirma: "garantir, minimamente, o alcance desses objetivos o pesquisador ou o construtor de situações-problema necessita escolher as variáveis didáticas que podem provocar as mudanças desejadas, no que diz respeito ao processo de ensino e de aprendizagem " (Almouloud, 2007, p.174). À vista da problemática apresentada nas primeiras sessões e da complexidade do conteúdo matemático, para o alcance dos objetivos, faremos uso da tecnologia explorando a visualização dos conceitos.

4. Resultados e discussão

Nessa seção realizamos a construção das situações e análises a priori: elaboramos e analisamos uma sequência de situações problema envolvendo o EDO's de segunda ordem, ressaltamos que não iremos validar essas hipóteses de investigação nesse artigo, posto que, não procederemos as análises a posteriori.

Para efeito de maior sistematização, assumiremos que uma situação problema envolve "a escolha de questões abertas ou fechadas numa situação matematizada ou menos matematizada, vinculada a um campo de problemas colocados em um ou vários domínios do saber. " (Almouloud, 2007, p. 174).

Além disso para à estruturação das situações problema, consideramos também as seguintes características apontadas por Almouloud (2007,p.174): situações que devem colocar em encontro um campo conceitual em que se deseja efetivamente explorar; os conhecimentos antigos não são suficientes para a resolução completa do problema; o problema envolve vários domínios do conhecimento.

5. Situações didáticas

As situações didáticas desenvolvidas tinham com o intuito analisar as raízes de equações diferenciais homogêneas de segunda ordem, ou seja, usar a tecnologia para visualizar os fenômenos matemáticos explanados .

Situação I

Resolver a EDO $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$ e realizar um estudo das equações características, posteriormente realizar a mesma análise com o software Geogebra.

Solução: Seja y uma função em relação à variável x, e a EDO $y'' - 5y' + 6y = 0$, inicia-se a resolução, substituindo $y(x)$ por e^{rx}, obtendo a seguinte expressão:

$$(e^{rx})'' - 5(e^{rx})' + 6(e^{rx}) = 0,$$

ou seja $e^{rx}(r^2 - 5r + 6) = 0$. Conforme já explicado anteriormente $e^{rx} \neq 0$, temos que:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \quad \text{e} \quad \Delta = 1 (\Delta > 0),$$

portanto $r = \dfrac{-(-5) \pm 1}{2}$, $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$.

$$\begin{cases} y_1 = e^{2x} \\ y_2 = e^{3x} \end{cases} \Rightarrow y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Por meio do Geogebra, podemos visualizar o comportamento da função $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, que é solução da equação $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$, ao longo de um intervalo ou domínio específico. No software, também podemos associar condições à solução envolvendo parâmetros arbitrários através de condições iniciais e assim, analisamos a solução da EDO. Nesse caso, ao realizar tal ação encontramos a solução $-19e^{2x} + 7e^{3x}$, obtendo a curva explanada na Figura 4.

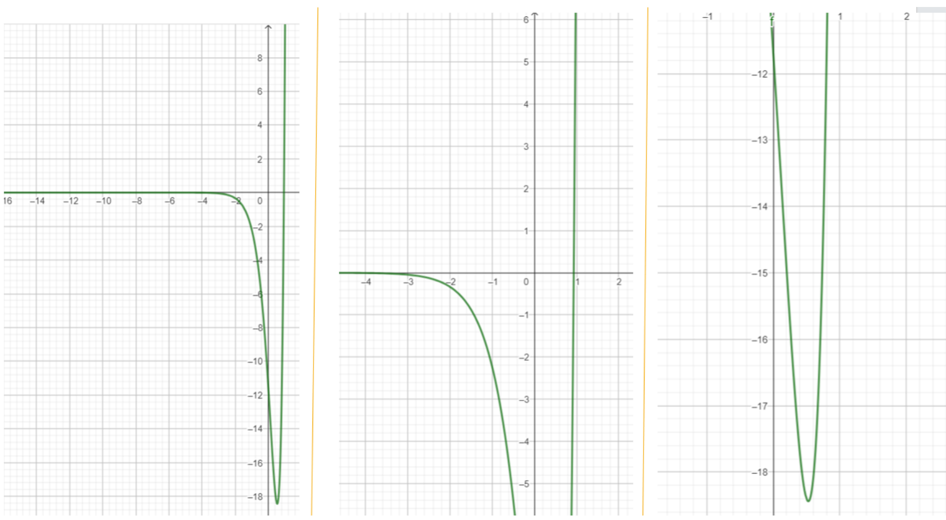

Figura 4: Visualização da solução da EDO $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$, à esquerda uma análise global da solução e à direita análises locais. Elaborado pelos autores

Além disso, o Geogebra permite compreender uma análise global da solução da EDO e uma análise local, inferindo outros aspectos como os zeros da função e o ponto de mínimo. Desse modo, ao se empregar o programa, espera-se, por meio da visualização, que os alunos possam compreender melhor o conceito de solução da EDO e possam estabelecer as raízes da equação diferencial de acordo com a equação característica.

Situação II

Resolver a EDO $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$, em seguida, faça a análise e o gráfico dessa solução dessa EDO.

Solução: $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$, substituindo y por e^{rx}, temos:

$(e^{rx})'' - 2(e^{rx})' + (e^{rx}) = 0,$

ou seja $e^{rx}(r^2 - 2r + 1) = 0.$

Como $e^{rx} \neq 0$ e $\Delta = 0$, $r_1 = r_2 = 1 \Rightarrow y(x) = C_1e^x + C_2xe^x$.

Por meio dessa segunda situação, podemos trabalhar com os alunos a fórmula da equação geral da solução da EDO homogênea de segunda ordem com base na natureza do Δ. Além disso, podemos utilizar os mecanismos dinâmicos do Geogebra para estabelecer condições iniciais a EDO trabalhada e estabelecer assim, soluções singulares, que trata-se exatamente da função $g(x)$ exibida na Figura 5.

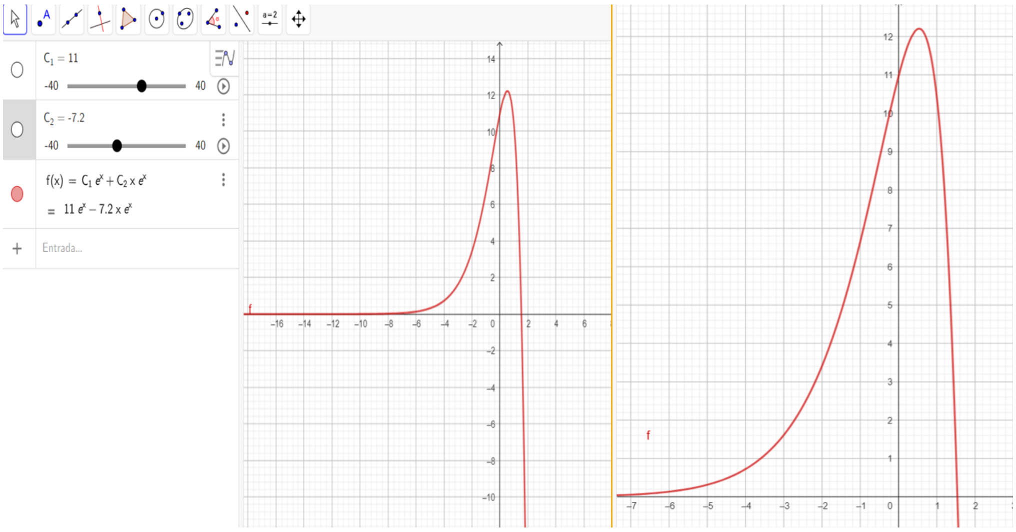

Figura 5: Representação gráfica da solução da EDO $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$: À esquerda uma análise global da solução e à direita a análise local. Elaborado pelos autores

Situação III

Resolver a EDO $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$, em seguida, faça a análise e o gráfico dessa solução dessa EDO.

Solução: $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$, substituindo y por e^{rx}, temos:

$(e^{rx})'' - 2(e^{rx})' + 2(e^{rx}) = 0,$

ou seja $e^{rx}(r^2 - 2r + 2) = 0$. Como $e^{rx} \neq 0$ e $\Delta = -4 < 0$,

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i \Rightarrow \alpha \pm \beta$$

em que $\alpha = 1$ e $\beta = 1$.

$y(x) = e^x(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$

Nesse caso, teremos $y(x) = e^x(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$.

Por fim, o caso em que $\Delta < 0$. Observe que nessa última situação didática, a solução da EDO não pertence mais aos números reais, nesse caso, a solução da equação diferencial passa a compor o corpo dos números complexos, o que justifica a periodicidade da solução das funções, conforme exibido na Figura 6. Nesse caso, a visualização se torna um fator fundamental para a compreensão e diferenciação das soluções de uma equação diferencial de segunda ordem.

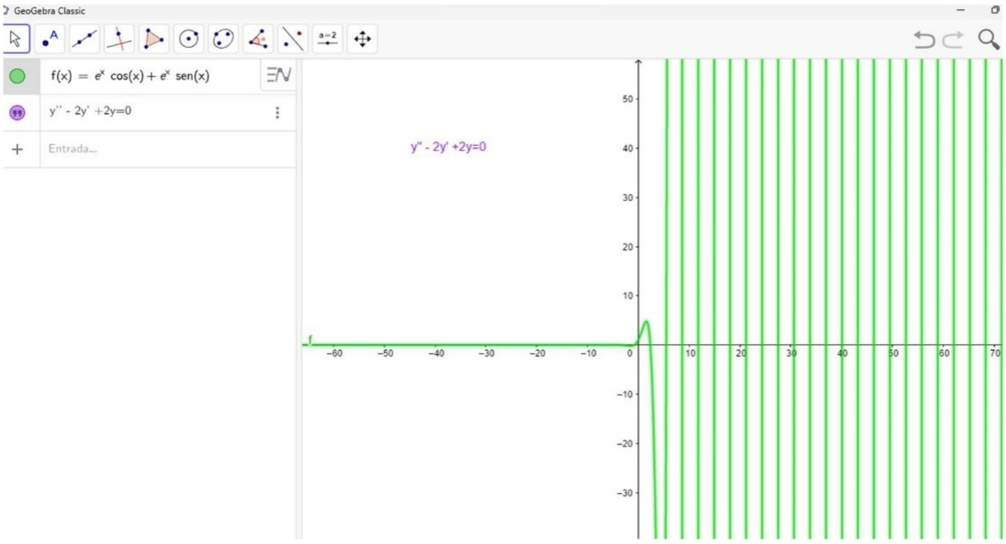

Figura 6: Representação gráfica da solução da EDO $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x)$. Elaborado pelos autores

Note que essas situações didáticas possuem soluções de natureza algébrica, sendo solucionadas através de algoritmos mecanizados. No entanto, sem a visualização geométrica, o conteúdo se torna abstrato, predominando uma concepção limitada, sem estímulo à criatividade do aluno.

6. Considerações finais

Ao final dessa pesquisa, esperamos que nosso trabalho possa contribuir no sentido de detalhar, sistematizar, identificar, e discutir elementos inerentes ao ensino de EDO de segunda ordem, dado a pouca visibilidade, tanto no contexto nacional quanto internacional, de pesquisas de ensino/aprendizagem em relação a essa área. Por conseguinte, espera-se que esta pesquisa oportunize aos alunos e professores em formação, do ponto de vista acadêmico, a ampliação de seu repertório de conhecimentos relativo a área de EDO. Além disso, possibilite o desenvolvimento de uma concepção epistemológico-matemática do ensino de EDO, isso é, do ponto de vista de ordem didática, fornecemos indicações e descrevemos procedimentos que permitem o uso e a exploração, sobretudo em sala de aula, do software Geogebra no campo de saberes de EDO, de modo complementar.

Agradecimentos: Trabalho financiado por Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico é uma entidade ligada ao Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações- CNPQ para incentivo à pesquisa no Brasil

Trabalho financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia,I.P.,no âmbito dos projetos UIDB/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDB/00194/2020) e UIDP/00194/2020 (https://doi.org/10.54499/UIDP/00194/2020) (CIDTFF).

Contribuição dos autores: Conceitualização: A.C.P.P; F.R.V.A.; H.M.D.C. Metodologia: A.C.P.P; F. R.V.A. Análise formal: A.C.P.P; F. R.V.A.; H.M.D.C. Redação (rascunho original): A.C.P.P; F.R.V.A.; H.M.D.C. Redação (revisão e edição): A.C.P.P; H.M.D.C.

Acessibilidade de dados: Não se aplica.

7. Bibliografía

[1] Almouloud, Saddo Ag. Didática e Concepção de dispositivos informáticos educacionais. Revista de Informática Aplicada, v. 3, n. 1, 2007.

[2] Alves, Francisco Regis Vieira. Engenharia didática (análises preliminares e análise a priori): o caso das equações diferenciais de segunda ordem. Revista ENCITEC, v. 6, n. 2, p. 1-22, 2016a.

[3] Alves, Francisco Vieira. Didática de matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. Interfaces da Educação, v. 7, n. 21, p. 131-150, 2016b.

[4] Alves, Francisco Regis Vieira; Catarino, Paula Maria Machado Cruz. Engenharia Didática de Formação (EDF): Repercussões para a formação do professor de Matemática no Brasil. EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA–RS, v. 2, n. 18, 2018.

[5] Araújo, Dâmaris Souza; Silva, Kamilly Victoria da; Miranda, Lays Vitoria de Sousa; Ferreira, Yara Almeida da Silva; Silva, Hutson Roger. O uso do GeoGebra e de ferramentas digitais na aprendizagem de Geometria Plana e resolução de problemas: uma experiência de sala de aula. Revista Educação Pública, Rio de Janeiro, v. 22, nº 29, 9 de agosto de 2022. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/29/o-uso-do-geogebra-e-de-ferramentas-digitais-na-aprendizagem-de-geometria-plana-e-resolucao-de-problemas-uma-experiencia-de-sala-de-aula.

[6] Asrlan, Selahattin; Laborde, Colette. Un outil favorisant le jeu de cadres: Cabri. Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles. Actes du Colloque Européen ITEM, 2003, Reims France. Disponível em: http://edutice.archivesouvertes.fr/docs/00/05/41/73/PDF/co26th1.pdf. Acesso em 03 de Agosto de 2023

[7] Artigue, Michelle. Ingénierie didactique. In: BRUN, J. Didactiques des Mathématiques, Paris: Delachaux et Niestlé, 1996, p. 243-264.

[8] Batista, Paulo César Da Silva; Barreto, Marcilia Chagas; De Sousa, Ana Cláudia Gouveia. Teoria das situações didáticas presentes na prática pedagógica em matemática a partir da formação e reflexão docente. Debates em Educação, v. 13, n. 31, p. 577-602, 2021.

[9] Boyce, William E.; DiPrima, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 11 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

[10] Brousseau, Guy. Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Recherches en didactique des mathematiques, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.

[11] Brousseau, Guy. Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. Ática, 2008.

[12] De Figueiredo, Djairo Guedes; Neves, Aloisio Freiria. Equações diferenciais aplicadas. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[13] De Oliveira, Eliane Alves; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Ensino e aprendizagem de equações diferenciais: um levantamento preliminar da produção científica. EM TEIA-Revista de Educaçao Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 4, n. 2, p. 1-24, 2013.

[14] Dullius, M. M.; Araújo, I. S.; Veit, E. A. Ensino e Aprendizagem de equações Diferenciais com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica: uma experiência em cursos de Engenharia. Bolema, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 17 a 42, Abr, 2011.

[15] Paiva, Ana Carla Pimentel. Engenharia didática sobre o estudo e ensino de conceitos de geometria