Revista digital
Matemática, Educación e Internet
https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica
Vol 26, No 2. Marzo, 2026 – Agosto, 2026

ISSN 1659 -0643
DOI: XXX

Una introducción a los sistemas dinámicos discretos bidimensionales

| An introduction to two-dimensional discrete dynamical systems |

| Uma introdução aos sistemas dinâmicos discretos bidimensionais |

Alicia Santiago-Santos[1]
alicia@mixteco.utm.mx
Instituto de Física y matemáticas
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Huajuapan de León, Oaxaca, México

Isahi García-Ramos[2]
gari981027@gs.utm.mx
Instituto de Física y matemáticas
Universidad Tecnológica de la Mixteca
Huajuapan de León, Oaxaca, México

Recibido: 24 febrero de 2025 Aceptado: 1 agosto de 2025

Resumen: Un sistema dinámico se puede definir informalmente como un sistema cuyo estado está especificado de forma única por un conjunto de variables y cuyo comportamiento está descrito por reglas predefinidas. El objetivo de este artículo es proporcionar al lector una introducción a ciertos tipos de modelos matemáticos (también conocidos como sistemas dinámicos). En particular, hablar de modelos discretos unidimensionales y bidimensionales. Por último, se dan algunos ejemplos y su solución.

Palabras Clave: Modelos matemáticos, sistemas dinámicos discretos, sistemas dinámicos continuos, sistemas dinámicos discretos bidimensionales.

Abstract: A dynamical system can be informally defined as a system whose state is uniquely specified by a set of variables and whose behavior is described by predefined rules. The objective of this article is to present the reader with an introduction to certain types of mathematical models (also known as dynamical systems). In particular, to study one-dimensional and two-dimensional discrete models. Finally, some examples and their solutions are given.

Keywords: Mathematical models, discrete dynamical systems, continuous dynamical systems, two-dimensional discrete dynamical systems.

Resumo: Um sistema dinâmico pode ser definido informalmente como um sistema cujo estado está especificado de um jeito único por um conjunto de variáveis e cujo comportamento é descrito por regras predefinidas. O objetivo deste artigo é fornecer ao leitor uma introdução a certos tipos de modelos matemáticos (também conhecidos como sistemas dinâmicos). Em particular, falar de modelos discretos unidimensionais e bidimensionais. Por fim, apresentam-se alguns exemplos e sua solução.

[1]Alicia Santiago Santos. Profesora del Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Tecnológica. Dirección postal: Av. Dr. Modesto Seara Vázquez No.1, Localidad Acatlima Huajuapan de León, Oaxaca, México. Código Postal: 69004. Correo electrónico: alicia@mixteco.utm.mx.

[2]Isahi García Ramos. Estudiante de la Maestría en Modelación Matemática de la Universidad Tecnológica. Dirección postal: Av. Dr. Modesto Seara Vázquez No.1, Localidad Acatlima Huajuapan de León, Oaxaca, México. Código Postal: 69004. Correo electrónico: gari981027@gs.utm.mx.

Palavras-chave: Modelos matemáticos, sistemas dinâmicos discretos, sistemas dinâmicos contínuos, sistemas dinâmicos discretos bidimensionais.

1. Introducción

Un **modelo matemático** es un tipo de modelo científico que emplea formalismo matemático, que para los casos que nos ocupan serán funciones. Estas describen idealmente el comportamiento de un fenómeno el cual se construye a partir de datos obtenidos en un experimento o de la observación del fenómeno (Rondón Durán, 2013, p. 16).

Una motivación frecuente para hacer modelos matemáticos es la de hacer predicciones: ¿A que hora lloverá mañana? ¿Cuánta gente tendrá gripe el próximo invierno? ¿Cuánto valdrá una determinada inversión dentro de cierto número de años? o por ejemplo para predecir el tamaño de la población de una determinada región después de cierto tiempo, esto es por mencionar algo. Para ayudar a responder estas preguntas se han creado muchos modelos matemáticos desarrollados a lo largo de los últimos siglos. Hoy en día esos modelos son referidos comúnmente como sistemas dinámicos (Marotto, 2006).

Dentro del mundo de los sistemas dinámicos hay un sinnúmero de clasificaciones, y cada uno refiere a un aspecto distinto de los mismos, dos categorías generales son: los **modelos deterministas**, los cuales intentan hacer predicciones con un 100 % de certeza, y los **modelos estocásticos**, cuyo objetivo es presentar una gama de posibles resultados, cada uno con su propia probabilidad asociada de ocurrir. Además, se puede suponer que siempre que se modele un proceso que evoluciona con el tiempo, el sistema dinámico utilizado siempre debe ser uno que intente describir el estado de ese proceso durante todo el intervalo de tiempo de interés. Por lo cual, si uno considera la intervención del tiempo en el modelo matemático, estos pueden clasificarse en **modelos estáticos** o **modelos dinámicos**, siendo estos últimos normalmente referidos a aquellos modelos donde lo que interesa es la evolución en el tiempo de determinado sistema.

Dentro de los modelos dinámicos también pueden distinguirse otras dos clases: los **modelos discretos** y los **modelos continuos** según si la variable (usualmente el tiempo) es tomada en intervalos discretos (años, meses), o en forma continua. A nosotros nos interesa los sistemas dinámicos discretos bidimensionales. Algunos trabajos donde pueden revisar estudios sobre sistemas dinámicos conocidos como unidimensionales pueden ser Barragán et al. (2019), King Dávalos y Méndez Lango (2014), León-Torres y Santiago-Santos (2023), Muñoz et al. (2023) y Osorio-Castillo y Santiago-Santos (2024).

El objetivo de este trabajo es mostrar un estudio sobre algunos tipos de modelos matemáticos, en particular, hablar de modelos discretos bidimensionales y mostrar la solución de alguno de ellos. Este trabajo trata de despertar el interés en nuestros lectores para adentrarse en estos temas. Por tal motivo, la estructura de este trabajo es la siguiente. En la Sección 2, introducimos algunos tipos de modelos matemáticos y presentamos algunos ejemplos. Mencionamos que esta sección está inspirada en el Capítulo 1 del libro Introduction to Mathematical Modeling Using Discrete Dynamical Systems escrito por Frederick R. Marotto (Marotto, 2006). Posteriormente, en la Sección 3 iniciamos mencionando el conceptos de ecuación en diferencia y hacemos un repaso rápido de como resolver una ecuación en diferencias de segundo orden homogénea, esta sección está inspirada en Elaydi (2005). Finalmente, en la Sección 4, mostramos algunos ejemplos de sistemas bidimensionales, por tal razón empezamos la sección con el concepto de un sistema de ecuación en diferencias lineal. Este apartado está inspirado en Navas Ureña (2009a, 2009b).

2. Modelos matemáticos

Denotaremos por $\mathbb{N}, \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{R}^+$, y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números naturales, el conjunto de los números enteros no negativos, el conjunto de los números reales positivos, y el conjunto de los números reales, respectivamente.

2.1. Modelos deterministas y estocásticos

Dos categorías generales de modelos matemáticos, son los modelos deterministas y los modelos estocásticos. Los **modelos deterministas**, intentan hacer predicciones con un 100 % de certeza, y **modelos estocásticos**, cuyo objetivo es presentar una gama de posibles resultados, cada uno con su propia probabilidad asociada de ocurrir (Marotto, 2006).

A continuación veamos un ejemplo de un modelo determinista.

Ejemplo 1

Supongamos que deseamos predecir qué tan rápido caerá un objeto en t segundos después de dejarlo caer desde una determinada altura inicial. Por lo que se conoce de física sabemos que cualquier objeto que cae libremente sufre la misma aceleración constante $-g$, la cual es aproximadamente $-9.8m/seg$, siempre que los efectos de la resistencia del aire sean insignificantes. Además, de cálculo diferencial se aprende que la aceleración es la primera derivada de la velocidad $v(t)$, lo que significa que esta función de velocidad debe satisfacer:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -g. \tag{1}$$

Si el objeto en realidad simplemente se deja caer en lugar de arrojarse, entonces su velocidad inicial en el tiempo $t \geq 0$ debe ser $v(0) = 0$, lo cual constituye un modelo matemático simple para la cantidad variable única $v(t)$. Observemos que la ecuación diferencial (1) es ordinaria y de primer orden. Este modelo es determinista ya que, para cualquier $t \in \mathbb{R}^+$, intentamos predecir el valor exacto de $v(t)$.
Utilizando cálculo integral se puede encontrar la solución de la ecuación diferencial (1) y obtener que:

$$v(t) = -gt + \mathrm{C}, \quad \text{donde } t \in \mathbb{R}^+ \text{ y C es una constante.} \tag{2}$$

Así, con esta solución ahora es posible predecir con gran precisión (excepto la resistencia del aire) la velocidad del objeto que cae en cualquier momento hasta que golpea el suelo.

Comparemos el Ejemplo 1 con el Ejemplo 2, el cual intenta hacer predicciones cuando no se conocen por completo factores subyacentes importantes.

Ejemplo 2

Supongamos que lanzamos una moneda y tratamos de predecir si el resultado será Cara o Cruz. Aunque la moneda ciertamente debe estar sujeta a algunas leyes físicas bien conocidas, para que su trayectoria completa pueda calcularse en teoría, hay otros factores que podrían influir en esa trayectoria y, por lo tanto, en el resultado final. Por mencionar algunas habría que saber de antemano cantidades tales como:

1. la dirección exacta en que se lanzó la moneda y su velocidad inicial;

2. su altura cuando se suelta y cuando la moneda cae; etc.

Incluso si tales cantidades estuvieran disponibles, escribir el conjunto de ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de la moneda no sería nada fácil, por no hablar de intentar resolverlas. En lugar de ello, se utiliza un enfoque completamente diferente y se emplean medios diferentes para describir el resultado. Por la Ley de los Grandes Números (Larson, 1992, p. 234) se ha llegado a la conclusión de que este efecto promedio hace que una moneda simétricamente equilibrada o justa arroje: Cara la mitad de las veces y Cruz la otra mitad del tiempo (generalmente no se considera la improbable posibilidad de que la moneda caiga en su borde). Otra forma de decir esto es:

$$P(H) = 0.5 \quad \text{y} \quad P(T) = 0.5, \tag{3}$$

donde $P(H)$ y $P(T)$ representan las probabilidades de que ocurra cara y cruz, respectivamente. La ecuación (3) se conoce como **distribución de probabilidad** para el conjunto de resultados del problema del lanzamiento de una moneda. Esto hace que el lanzamiento de una moneda y tratar de predecir si el resultado será Cara o Cruz, sea un modelo estocástico.

2.2. Modelos discretos y continuos

Cuando se modela un sistema que evoluciona con el tiempo, el sistema dinámico utilizado debe ser uno que intente describir el estado de ese proceso durante todo el intervalo de tiempo de interés. Si consideramos el Ejemplo 1, al resolver la ecuación diferencial (vea la ecuación (1)) se obtiene una función de velocidad $v(t)$ (vea la ecuación (2)), la cual se define para todo $t \in \mathbb{R}_+$, hasta que el objeto golpea el suelo. Observemos que la función de velocidad $v(t)$ puede evaluarse para cualquier elección de $t \in \mathbb{R}_+$, y puede usarse para calcular la velocidad exacta en ese momento. Este tipo de modelado, en el cual generalmente se implementa el uso de una ecuación diferencial, se le conoce como **modelado en tiempo continuo**. Sin embargo, este tipo de modelado en tiempo continuo, no siempre es el mejor enfoque. Existen numerosas situaciones en las que no es deseable intentar describir el estado de un proceso para todos los valores en tiempo real, debido a la complejidad que estaría asociada con el modelo resultante. En casos como estos, un **modelo de tiempo discreto** puede resultar una opción más inteligente. En este tipo de sistema dinámico, en lugar de tratar de describir un proceso para todos los valores reales de tiempo durante algún intervalo, el estado del proceso se determina sólo para una colección de valores de tiempo separados o discretos, que a menudo están igualmente espaciados en el eje del tiempo.

Los modelos de tiempo discreto o sistemas dinámicos discretos como se los conoce comúnmente hoy en día, en algunas situaciones que no es deseable intentar describir el estado de un proceso para todos los valores en tiempo real, debido a la complejidad que estaría asociada con el modelo resultante. En casos como estos, un modelo de tiempo discreto puede resultar una mejor opción (Marotto, 2006).

El siguiente problema trata de ilustrar lo anteriormente mencionado.

Problema 1. (*Marotto*, 2006) *Supongamos que intentamos trazar la trayectoria de una pelota que rebota. Además, con cada rebote, una pelota generalmente pierde parte de la energía que tenía justo antes de ese rebote. Para simplificar, supongamos que la pelota pierde* $\frac{1}{4}$ *de su energía con cada rebote y nuevamente no hay resistencia del aire. Esto significa que la velocidad de la pelota cada vez que deja el suelo, la altura máxima a la que luego se eleva y el tiempo total de vuelo hasta que vuelve a tocar el suelo, todo disminuye con cada rebote.*

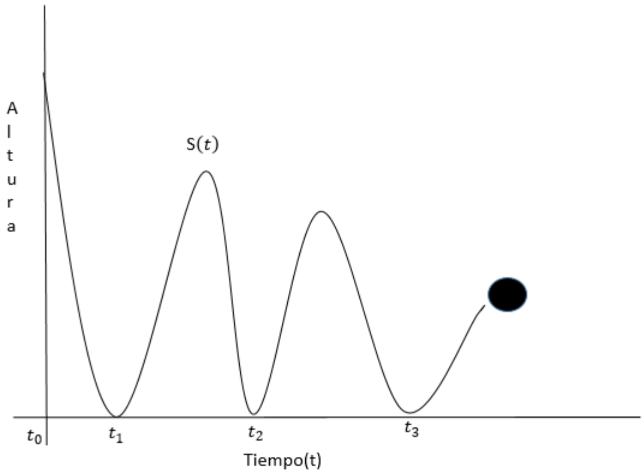

Figura 1: Recorrido de la pelota en tiempo continuo. Elaboración propia.

En el Ejemplo 3 se plantea un modelo del Problema 1 en tiempo continuo. Este ejemplo fue tomado de Marotto (2006, p. 18).

Ejemplo 3

Supongamos que la altura de la pelota es denotada por $s(t)$ entre dos rebotes consecutivos. Recordemos que de cálculo diferencial sabemos que la aceleración de la pelota entre rebotes consecutivos es la segunda derivada de su altura $s(t)$ (Giancoli, 2008, p. 34). Dado que, como vimos antes, todos los objetos que caen libremente y sin resistencia del aire tienen una aceleración de $-g$. Se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -g. \tag{4}$$

La ecuación (4) es una ecuación diferencial de segundo orden para $s(t)$. Para determinar $s(t)$ para todo $t \geq 0$, primero se debemos resolver la ecuación diferencial que aparece en la ecuación (4), para $t_0 \leq t \leq t_1$, donde $t_0 = 0$ y t_1 representan el momento en que la pelota golpea el suelo por primera vez (vea Figura 1).
Se puede verificar que la solución de la ecuación diferencial (4) tiene la forma:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0,$$

para $t_0 \leq t \leq t_1$, donde v_0 y s_0 son constantes que pueden determinarse haciendo uso de la altura inicial y la velocidad de la pelota, que se supone son conocidas. Una vez hecho esto, también se puede calcular el valor de t_1, que depende de ellos.
A continuación, se encuentra $s(t)$ para $t_1 \leq t \leq t_2$, donde t_2, como se muestra en la Figura 1 representa la segunda vez que la pelota toca el suelo, la ecuación (4) debe resolverse nuevamente. La solución ahora es:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_1 t + s_1,$$

para $t_1 \leq t \leq t_2$, donde v_1 y s_1 son constantes por determinar, que dependen no sólo de v_0, s_0 y t_1, sino también de que la pelota haya perdido $\frac{1}{4}$ de su energía durante el primer rebote. Una vez que se encuentran v_1 y s_1, se puede calcular t_2. De manera similar, la altura de la pelota desde t_2 hasta el momento t_3 cuando vuelve a tocar el suelo, nuevamente como se muestra en la Figura 1, debe ser

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t + s_2,$$

para $t_2 \leq t \leq t_3$, donde v_2 y v_0 son nuevamente constantes desconocidas. Estos, junto con t_3, tendrían que determinarse utilizando datos encontrados previamente y teniendo en cuenta la mayor pérdida de energía de la pelota después del segundo rebote. En general, dado $n \in \mathbb{Z}_+$, vemos que la altura de la pelota para todo tiempo continuo $t \in \mathbb{R}^+$ está dada por

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_n t + s_n,$$

$t_n \leq t \leq t_{n+1}$, donde t_n, representa la n-ésima vez que la pelota toca el suelo. Así, los tres valores t_n, v_n y s_n, necesitarían calcularse a su vez para tener una descripción completa de $s(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}^+$.
Finalmente, para obtener $s(t)$ para todo tiempo real $t \in \mathbb{R}_+$ requeriría un conjunto sustancial de cálculos.

A continuación mostraremos un modelo del Problema 1 en tiempo discreto. Este ejemplo fue tomado de Marotto (2006, p. 19).

Ejemplo 4

Supongamos que la altura de la pelota es denotada por $s(t)$ entre dos rebotes consecutivos. Además, supongamos que dejamos que $s_0 = s(0)$ represente la altura inicial de la pelota cuando se deja caer (con una velocidad inicial de 0).
Dado que suponemos, como antes, que la pelota pierde $\frac{1}{4}$ de su energía con cada rebote y que no hay resistencia del aire, la pelota debe retener $\frac{3}{4}$ de su energía de una altura máxima a la siguiente. Desde el punto de vista físico, esto significa que debe volver a elevarse hasta una altura máxima de

$$s_1 = s(1) = \frac{3}{4}S_0$$

después del primer rebote (vea Figura 2). Por la misma razón, la pelota debe elevarse hasta una altura máxima de

$$s_2 = s(2) = \frac{3}{4}S_1,$$

después del segundo rebote, y una altura máxima de

$$s_3 = s(3) = \frac{3}{4}S_3,$$

después del tercero, como se muestra en la Figura 2. En general, dada $n \in \mathbb{Z}^+$, cada altura máxima s_n, está relacionada con la siguiente s_{n+1} por la ecuación:

$$s_{n+1} = s(n+1) = \frac{3}{4}S_n. \tag{5}$$

La ecuación iterativa (5) representa el modelo para el problema de la pelota que rebota el estado del proceso se determina sólo para una colección de valores de tiempo discretos. Con s_0 conocido, se puede iterar esta ecuación repetidamente para determinar una sucesión única de iteraciones $s_1, s_2, s_3, \ldots$. Por ejemplo, si $s_0 = 4$ unidades, entonces, sustituyendo en la ecuación (5) obtenemos que :

$$s_1 = \frac{3}{4}s_0 = \frac{3}{4}(4) = 3.$$

Ahora, para $n = 1$ se obtiene que:

$$s_2 = \frac{3}{4}s_1 = \frac{3}{4}(3) = 2.25.$$

Para $n = 2$ tenemos que:

$$s_3 = \frac{3}{4}s_2 = \frac{3}{4}(2.25) = 1.6875.$$

etc.
Por otro lado, si $s_0 = 6$ unidades, entonces sustituyendo en la ecuación (5) se obtiene que:

$$s_1 = \frac{3}{4}s_0 = \frac{3}{4}(6) = 4.5.$$

Para $n = 1$

$$s_2 = \frac{3}{4}s_1 = \frac{3}{4}(4.5) = 3.375.$$

Para $n = 2$

$$s_3 = \frac{3}{4}s_2 = \frac{3}{4}(3.375) = 2.53125.$$

etc.
Cualquier sucesión completa de tales iteraciones s_n, para $n \in \mathbb{Z}^+$, constituye una solución de (5). Notemos que la ecuación (5) tiene una cantidad infinita de soluciones, dependiendo del valor elegido para s_0.
Cabe señalar que es mucho más sencillo generar una solución en tiempo discreto S, del problema de la pelota que rebota que obtener una solución en tiempo continuo $s(t)$. A diferencia de los modelos de tiempo continuo, cuya frecuente dependencia de ecuaciones diferenciales significa que puede ser difícil encontrar soluciones precisas, soluciones muy precisas de sistemas dinámicos discretos como (5) siempre están disponibles, especialmente si se puede emplear algún tipo de dispositivo informático para realizar los cálculos.

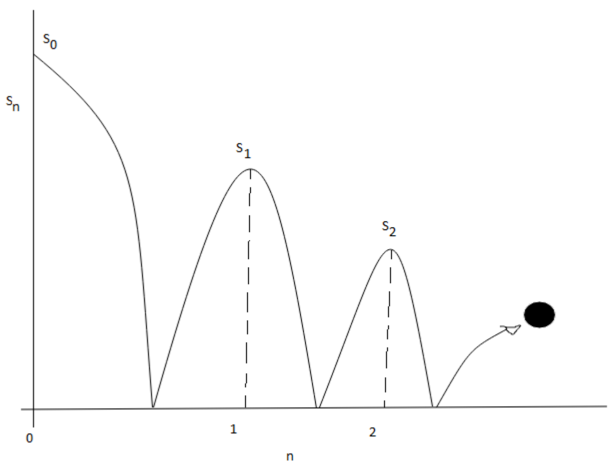

Figura 2: Recorrido de la pelota en tiempo discreto. Elaboración propia.

En general, para cualquier pelota que rebote que retiene la fracción r de su energía después de cada rebote, donde $0 \leq r \leq 1$ y la resistencia al aire nuevamente se supone que es insignificante, se puede obtener un modelo discreto el cual se coloca en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5

Supongamos que una pelota que rebota retiene la fracción r de su energía después de cada rebote, donde $0 \leq r \leq 1$ y la resistencia al aire nuevamente se supone que es insignificante. Denotemos por s_0 es la altura inicial de la pelota cuando se deja caer, y para cada $n \in \mathbb{N}$, s_n representemos la altura máxima después del n-ésimo rebote. La siguiente ecuación modela la altura de una pelota que rebota y que retiene la fracción de su energía después de cada rebote.

$$s_{n+1} = rs_n,$$

donde $0 \leq r \leq 1$.

A la ecuación (5) algunas veces se le conoce como **ecuación iterativa** o como **ecuación recursiva**, y al proceso de resolverlos algunas veces se le conoce como **recursividad**. Es importante mencionar que en este tipo de modelado, generalmente se implementa el uso de una ecuación en diferencias. En el siguiente apartado ahondaremos más en este tema.

2.3. Modelos lineales y no lineales

Una clasificación más de los modelos matemáticos, son los modelos lineales o modelos no lineales. Los **modelos lineales** son representados mediante ecuaciones lineales y los **modelos no lineales**, se representan mediante ecuaciones no lineales.

Ejemplo 6

Consideremos el Ejemplo 5. El modelo de la pelota que rebota se denomina sistema dinámico discreto lineal ya que su ecuación que la representa es lineal. Por ejemplo, si en el modelo $s_{n+1} = rs_n$ reemplazamos s_n por x y s_{n+1} por y, entonces $s_{n+1} = rs_n$ se convierte en $y = rx$, puesto que r es una constante o parámetro que no depende de $x = s_n$ o $y = s_{n+1}$. Esto significa que $y = rx$ es una ecuación lineal que involucra las dos variables x e y únicamente, o de manera equivalente, y es una función lineal de x. Por tanto, el modelo se clasifica como lineal.

Un ejemplo de un sistema dinámico discreto no lineal es el Ejemplo 7.

Ejemplo 7

(Merino & Kulenovic, 2002, p. 6) La ecuación

$$y_{n+1} = 4y_n(1 - y_n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}^+.$$

se le llama ecuación logística.

2.4. Modelos unidimensionales y multidimensionales

Los **modelos unidimensionales** son modelos que se ocupan de la evolución de una única población o grupo homogéneo de seres vivos. Para ello utilizan una única variable que representa el número de individuos de la población en cada instante. En este caso el sistema se obtiene a partir de una sola ecuación. Los ejemplos 6 y 7 son ejemplos de modelos unidimensionales.

Los **modelos multidimensionales** son modelos que se ocupan de varias poblaciones o grupos de seres vivos que interactúan entre ellos, afectando a su evolución. Para ello se utilizarán varias variables, representando cada una de ellas el número de individuos de cada una de las poblaciones o grupos. En este caso el estado del sistema vendrá dado por un sistema de ecuaciones ya sea *ecuaciones diferenciales o en diferencias* (vea apartado 3.1). En el apartado 4.1 presentaremos algunos ejemplos de este tipo de modelos matemáticos.

3. Sistemas dinámicos discretos unidimensionales: ańalisis cuantitativo

En este trabajo en los modelos que estamos interesados son en los modelos de tiempo discreto. En este apartado abordaremos los sistemas dinámicos discretos unidimensionales, los cuales se escriben en términos de *ecuaciones en diferencias* (vea apartado 3.1). Por este motivo empezaremos esta sección con dicho concepto.

3.1. Ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias o también llamadas "ecuaciones de recurrencia", "ecuaciones recursivas" o "ecuaciones iterativas", surgen como modelo matemático de un cierto fenómeno que evoluciona en el tiempo cuando la medida y que describe el sistema se realiza en instantes t_n, donde $n \in \mathbb{Z}_+$, separados por un intervalo o periodo de tiempo de amplitud constante (un año, un mes, etc.). Algunas veces escribimos y_0, o bien $y(0)$, para representar el estado inicial del sistema, y_1 mide el estado del sistema en el primer periodo t_1, y_2 mide el estado del sistema en el segundo periodo t_2, y así, sucesivamente. Es el tipo de modelado, en el cual generalmente se implementa el uso de una ecuación en diferencias, se le conoce como **modelado en tiempo discreto o sistema dinámico discreto**. A continuación escribimos el concepto abstracto de una ecuación en diferencias.

Definición 1

(Levy & Lessman, 2011) Una **ecuación en diferencias** es una expresión del tipo:

$$y_{n+t} = F(n, y_{n+t-1}, y_{n+t-2}, \dots, y_n) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Una clase especial de ecuaciones en diferencias, son las llamadas ecuaciones lineales y ecuaciones no lineales. Cabe mencionar que el uso de los términos lineal y no lineal es completamente análogo a su uso en el campo de las ecuaciones diferenciales. A continuación damos la definición formal.

Definición 2

Una **ecuación en diferencias será lineal con coeficientes constantes de orden** t cuando su expresión sea

$$y_{n+t} + a_{t-1}y_{n+t-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = g(n),$$

para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, $g(n) \neq \emptyset$ y para cada $i \in \{t-1, \dots, 1, 0\}$, $a_i \in \mathbb{R}$. Se dirá que es una **ecuación en diferencias lineal homogénea de orden** t cuando $g(n) = 0$. Es decir, cuando su expresión sea

$$y_{n+t} + a_{t-1}y_{n+t-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplo 8

Ejemplos de una ecuación en diferencias lineal de primer orden.

1. $8y_{n+1} = 2y_n, \quad$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.
2. $y_{n+1} = y_n \quad$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplo 9

Ejemplos de una ecuación en diferencias lineal de segundo orden.

1. $y_{n+2} + 3y_{n+1} - 5y_n = n, \quad$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.
2. $y_{n+2} + y_{n+1} - y_n = 0 \quad$ para cada $n \in \mathbb{Z}^+$.

En general, dado X un espacio métrico, un sistema dinámico discreto se define por la iteración de una función continua y suprayectiva $f\colon X \to X$, y toma la forma

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad \in \mathbb{Z}^+.$$

Algunos libros donde puede encontrar trabajos que analizan propiedades cualitativas sobre estos tipos de sistemas dinámicos discretos son los siguientes: Birkhoff (1927), Brin y Struck (2003), King Dávalos y Méndez Lango (2014), León-Torres y Santiago-Santos (2023), Muñoz et al. (2023) y Osorio-Castillo y Santiago-Santos (2024). En la siguiente sección nuestra intención es abordar sistemas dinámicos discretos para los cuales se pueda determinar su solución explícita.

3.2. Solución general de una ecuación en diferencias de segundo orden

Consideremos una ecuación en diferencias lineal de orden n con coeficientes constantes.

$$y_{n+t} + a_{t-1}y_{n+t-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = g(n), \tag{6}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ y para cada $i \in \{t-1, \ldots, 1, 0\}$, $a_i \in \mathbb{R}$. Por Elaydi (2005, p. 84, Teorema 2.30) se sabe que cualquier solución $y(n)$ de (6) es de la forma:

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n),$$

donde $y_h(n)$ representa la solución de la ecuación en diferencias lineal homogénea y $y_p(n)$ una solución particular de la ecuación en diferencias (Elaydi, 2005).

Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. En lo que sigue desarrollaremos la teoría básica para determinar la forma de la solución de la ecuación en diferencias lineal homogénea de segundo orden de la forma:

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0. \tag{7}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos una solución de la forma $y_n = r^n$ con $r \neq 0$ como la solución de la ecuación. Luego $y_n = r^n$ debe de satisfacer la ecuación (7). Esto es

$$\begin{aligned} r^{n+2} + a_1 r^{n+1} + a_2 r^n &= 0 \\ r^n(r^2 + a_1 r + a_2) &= 0. \end{aligned}$$

Dado que $r^n \neq \emptyset$, se obtiene que:

$$P(r) = r^2 + a_1 r + a_2 = 0. \tag{8}$$

La ecuación (8) recibe el nombre de **ecuación característica** de la ecuación en diferencias. Dicha ecuación es cuadrática y sus raíces son:

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{(a_1)^2 - 4a_2}}{2} \quad y \quad r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{(a_1)^2 - 4a_2}}{2}.$$

Consideremos los siguientes casos:

- *Caso 1.* $(a_1)^2 - 4a_2 > 0$.

  En este caso las raíces r_1 y r_2 son reales y distintas. Así, la ecuación característica tiene dos raíces reales diferentes r_1 y r_2 por lo que:

  $$y_n^1 = r_1^n \quad y \quad y_n^2 = r_2^n$$

  Esto implica que

  $$W(n) = det \begin{pmatrix} r_1^n & r_2^n \\ r_1^{n+1} & r_2^{n+1} \end{pmatrix}$$

  En consecuencia,

  $$W(0) = det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0.$$

  Por lo tanto, de Elaydi (2005, p. 71, 2.15) obtenemos que $y_n^1 = r_1^n$ y y_n^2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias. Lo cual implica que la combinación lineal de estas soluciones forman la solución general para la ecuación (7).

- *Caso 2.* $(a_1)^2 - 4a_2 = 0$.

  En este caso, las raíces son reales e iguales y la ecuación característica tiene una sola raíz real r de multiplicidad dos. Por lo que

  $$y_n^1 = r^n \quad y \quad y_n^2 = nr^n$$

  Esto implica que

  $$W(n) = det \begin{pmatrix} r^n & nr^n \\ r^{n+1} & (n+1)r^{n+1} \end{pmatrix}$$

  En consecuencia,

  $$W(0) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & r \end{pmatrix} = r \neq \emptyset$$

  Por lo tanto, de Elaydi (2005, p. 71, 2.15) obtenemos que $y_n^1 = r^n$ y $y_n^2 = nr^n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias. La combinación lineal de estas soluciones forman la solución general para la ecuación (7).

- *Caso 3.* $(a_1)^2 - 4a_2 < 0$.

  Las raíces son complejas. Así, la ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas

  $$r_1 = a + ib \quad y \quad r_2 = a - ib.$$

Luego,

$$y_n^1 = r_1^n \quad y \quad y_n^2 = r_2^n$$

son soluciones de la ecuación (7). La combinación lineal de estas forman la solución general de la ecuación (7).

$$y_h(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, \quad \text{donde } C_1 \text{ y } C_2 \text{ son constantes.} \tag{9}$$

Expresando los números complejos r_1, r_2 en su forma trigonométrica y teniendo en cuenta que poseen el mismo módulo y argumentos opuestos se obtiene que:

$$r_1 = a + ib = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)) \qquad r_2 = a - ib = \rho(cos(\theta) - isen(\theta)).$$

Luego,

$$r_1^n = \rho^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) \qquad r_2^n = \rho^n(cos(n\theta) - isen(n\theta).)$$

Nuevamente, como en el Caso 1 y Caso 2, determinando $W(n)$ y $W(0)$, uno puede verificar que las soluciones son linealmente independientes. Así, la ecuación (9) se puede reescribir de la siguiente manera

$$y_h(n) = C_1\rho^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) + C_2\rho^n(cos(n\theta) - isen(n\theta)).$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación (7) es:

$$y_h(n) = C_1\rho^n cos(n\theta) + C_2\rho^n sen(n\theta).$$

3.3. Solución de una ecuación en diferencias lineal no homogénea

En esta sección se expondrá el método de coeficientes indeterminados para calcular la solución particular de una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes. Básicamente, el método consiste en hacer una suposición sobre la forma de la solución particular. Posteriormente, se sustituye esta función en la ecuación en diferencias (Elaydi, 2005, p. 85).

Para esto empecemos esta sección considerando una ecuación en diferencias lineal de orden t (Elaydi, 2005, p. 83).

$$y_{n+t} + a_{t-1}y_{n+t-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = g(n), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}^+. \tag{10}$$

Los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales. Para un término no homogéneo completamente arbitrario $g(n)$, este método no es efectivo (Elaydi, 2005, p. 85). Sin embargo, se pueden establecer reglas definidas para la determinación de una solución particular por este método si $g(n)$ es una combinación de términos, cada uno de los cuales tiene una de las formas

$$a^n, \quad sen(bn), \quad cos(bn) \text{ o } n^t$$

o productos de estas formas

$$a^n sen(bn), \quad a^n n^t, \quad a^n n^t cos(bn), \ldots$$

Sea $k \in \mathbb{Z}^+$. Consideremos un polinomio de grado k en E .

$$p(E) = a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_kI.$$

La acción de un polinomio de grado k en el operador de desplazamiento E en el término b^t, para cualquier constante b consiste en (Elaydi, 2005, p. 59):

$$\begin{aligned} p(E)b^t &= (a_0E^k + a_1E^{k-1} + \cdots + a_kI)b^t \\ &= a_0E^kb^t + a_1E^{k-1}b^t + \cdots + a_kIb^t \\ &= a_0b^{t+k} + a_1b^{t+k-1} + \cdots + a_kb^t \\ &= (a_0b^k + a_1b^{k-1} + \cdots + a_k)b^t \\ &= p(b)b^t. \end{aligned}$$

Definición 3

Un operador polinomio $N(E)$, donde E es el operador desplazamiento, se dice que anula a g si

$$N(E)g(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{Z}^+.$$

Escribiendo la ecuación (10) en términos del operador dezplazamiento E se obtiene:

$$p(E)y(n) = g(n), \tag{11}$$

donde $p(E) = E^t + a_{t-1}E^{t-1} + \cdots + a_0I$. Supongamos que $N(E)$ es un anulador de $g(n)$ en (11). Aplicando $N(E)$ en ambos lados de (11), obtenemos:

$$N(E)p(E)y(n) = 0, \tag{12}$$

Sea $t \in \mathbb{N}$. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ las raíces características de la ecuación homogénea.

$$p(E)y(n) = 0,$$

Sean $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_t$ las raíces características de la ecuación homogénea.

$$N(E)y(n) = 0, \tag{13}$$

Debemos considerar dos casos.

1. *Caso 1.* Ninguno de los λ_i es igual a ninguno de los μ_i. En este caso, se sugiere escribir $y_p(n)$ como la solución general de (13) con constantes indeterminadas. Posteriormente, se sustituye esta solución particular "estimada" en (10), posteriormente, encontramos los valores de las constantes.

2. *Caso 2.* $\lambda_i = \mu_j$ para algunos $i, j \in \mathbb{N}$. En este caso, el conjunto de raíces características de (12) es igual a la unión de los conjuntos $\{\lambda_i\}$, $\{\mu_j\}$ y, en consecuencia, contiene raíces de mayor multiplicidad que los dos conjuntos individuales de raíces características. Para determinar una solución particular $y_p(n)$, primero encontramos la solución general de (12) y luego se elimina todos los términos que aparecen en $y_h(n)$. Posteriormente, se procede como en el Caso 1 para calcular los valores de las constantes.

Dado que a nosotros nos interesa los sistemas dinámicos discretos bidimensionales, en la siguiente sección discutiremos este tema y una forma de solución de un tipo particular de sistemas dinámicos discretos.

4. Sistemas dinámicos discretos multidimensionales

En este sección abordaremos los modelos discretos multidimensionales o sistemas dinámicos discretos multidimensiones, como se comentó en el apartado 2.4, estos modelos se ocupan de varias poblaciones o grupos de seres vivos que interactúan entre ellos, afectando a su evolucióne, estos se escriben en términos de un sistema de ecuaciones en diferencias. Por este motivo empezaremos la siguiente sección con el tema de sistema de ecuaciones en diferencias lineal .

4.1. Sistema de ecuaciones en diferencias lineal

Este apartado lo iniciamos colocamos el concepto de un sistema en diferencias lineal.

Definición 4

Sea $m \in \mathbb{N}$. Un **sistema de ecuaciones en diferencias lineal** con coeficientes constantes de m ecuaciones y m variables, es una expresión que podemos escribir matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} y_{t+1}^1 \\ y_{t+1}^2 \\ \vdots \\ y_{t+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \vdots \\ y_t^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{pmatrix}$$

Para cada $i, j \in \mathbb{N}$, los coeficientes a_{ij} son constantes reales y las funciones $f_1, f_2 : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ están definidas para $t \in \mathbb{Z}^+$.

Uno de los casos que nos interesará para este trabajo consiste en dos ecuaciones y dos variables, es decir, uno de la forma:

$$\begin{aligned} y_{t+1}^1 &= a_{11}y_t^1 + a_{12}y_t^2 + f_1(t) \\ y_{t+1}^2 &= a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t) \end{aligned} \tag{14}$$

En esta sección estamos interesados, entre otras cosas, en estudiar un método para hallar soluciones de dichos sistemas. Un procedimiento para resolver este tipo de sistemas, es expresarlo como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes (Navas Ureña, 2009b).

Considerando la ecuación (14) en el tiempo $t+1$ obtenemos:

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}y_{t+1}^2 + f_1(t+1). \tag{15}$$

Sustituyendo el valor de la segunda de las ecuaciones del sistema en (15) se tiene:

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}(a_{21}y_t^1 + a_{22}y_t^2 + f_2(t)) + f_1(t+1),$$

En consecuencia,

$$y_{t+2}^1 = a_{11}y_{t+1}^1 + a_{12}a_{21}y_t^1 + a_{12}a_{22}y_t^2 + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1), \tag{16}$$

Por otro lado, despejando $a_{12}y_t^2$ de (14) en el sistema se obtiene:

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t). \tag{17}$$

Sustituyendo (17) en (16) se tiene:

$$y^1_{t+2} = a_{11}y^1_{t+1} + a_{12}a_{21}y^1_t + a_{22}(y^1_{t+1} - a_{11}y^1_t - f_1(t)) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1),$$

Nuevamente, distribuyendo obtenemos:

$$y^1_{t+2} = a_{11}y^1_{t+1} + a_{12}a_{21}y^1_t + a_{22}y^1_{t+1} - a_{22}a_{11}y^1_t - a_{22}f_1(t)) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1).$$

Sacando como factor común y^1_{t+1} y y^1_t, se tiene:

$$y^1_{t+2} = (a_{11} + a_{22})y^1_{t+1} + (a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11})y^1_t + a_{22}f_1(t) + a_{12}f_2(t) + f_1(t+1). \tag{18}$$

Notemos que (18) es una ecuación en diferencias lineal de segundo orden no homogénea, cuya forma de encontrar su solución se planteó en el apartado 3.

4.2. Análisis cuantitativo de algunos sistemas dinámicos discretos bidimensionales

En esta sección analizaremos algunos sistemas particulares bidimensionales, cabe mencionar que los siguientes ejercicios surgieron apartir de ejercicios de la Sección 9 de Navas Ureña (2009b). Empezaremos con el primero ejemplo el cual es un ejercicio no resuelto de Navas Ureña (2009b, p. 277). Es importante mencionar que nuestra aportación en este ejemplo, además de plantear su solución, es agregarle condiciones iniciales al problema para su análisis.

Ejemplo 10

La evolución de dos especies que comparten un mismo territorio viene dada por el sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t - 3y_t \\ y_{t+1} = x_t - 2y_t. \end{cases}$$

donde x_t, y_t representan al número de animales de la primera y segunda especie en el año t, con $t \in \mathbb{Z}_+$. Supongamos que inicialmente el número de individuos de cada especie es $x_0 = 150$ y $y_0 = 70$. Analizar el comportamiento a largo plazo de las dos especies.

Solución. Evaluando la primera ecuación del sistema de ecuaciones en el momento $t+2$ se obtiene que:

$$x_{t+2} = 2x_{t+1} - 3y_{t+1}. \tag{19}$$

Sustituyendo la segunda ecuación del sistema de ecuaciones en diferencias en la ecuación (19) se obtiene:

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= 2x_{t+1} - 3\,(x_t - 2y_t) \\ &= 2x_{t+1} - 3x_t + 6y_t. \end{aligned} \tag{20}$$

Por otro lado, de la primera ecuación del sistema se tiene que:

$$y_t = \frac{2x_t - x_{t+1}}{3}. \tag{21}$$

Sustituyendo (21) en (20) obtenemos:

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= 2x_{t+1} - 3x_t + 6\left(\frac{2x_t - x_{t+1}}{3}\right) \\ &= 2x_{t+1} - 3x_t + 4x_t - 2x_{t+1}. \end{aligned}$$

Así, obtenemos la ecuación en diferencias lineal de segundo orden

$$x_{t+2} - x_t = 0. \tag{22}$$

Esto implica que la ecuación característica asociada a la ecuación en diferencias (22) es:

$$r^2 - 1 = 0. \tag{23}$$

Observemos que la ecuación (23) tiene como raíces a $r = 1$ y $r = -1$. Así, $y_1^t = (1)^t$ y $y_2^t = (-1)^t$ son soluciones de la ecuación en diferencias. Por lo tanto, la solución general a la ecuación homogénea (22) es:

$$x_{t_h} = k_1 \cdot (1)^t + k_2 \cdot (-1)^t = k_1 + k_2 \cdot (-1)^t, \quad \text{donde } k_1 \in \mathbb{R} \text{ y } k_2 \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Para determinar y_t, consideremos (21) y sustituimos el valor encontrado de x_{t_h} en obtenemos.

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{2\left[k_1 + k_2(-1)^t\right] - \left[k_1 + k_2(-1)^{t+1}\right]}{3} \\ &= \frac{2k_1 + 2k_2(-1)^t - k_1 - k_2(-1)^{t+1}}{3} \\ &= \frac{2k_1 + 2k_2(-1)^t - k_1 + k_2(-1)^t}{3} \\ &= \frac{k_1 + 3k_2(-1)^t}{3}. \end{aligned} \tag{25}$$

Finalmente, encontremos la solución particular del sistema correspondiente a las condiciones iniciales, $x_0 = 150$ y $y_0 = 70$. Sustituyendo en las ecuaciones (24) y (25) obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 150 &= k_1 + k_2(-1)^0 = k_1 + k_2 \\ 70 &= \frac{k_1 + 3k_2(-1)^0}{3} = \frac{k_1 + 3k_2}{3}. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema determinamos que $k_1 = 120$ y $k_2 = 30$. En consecuencia, la solución particular del sistema correspondiente a las condiciones iniciales es:

$$\begin{aligned} x_t &= 120 + 30(-1)^t \\ y_t &= \frac{120 + 3(30)(-1)^t}{3} = 40 + 30(-1)^t. \end{aligned}$$

Sea $t \in \mathbb{Z}^+$. Dado que $120 > 30(-1)^t$ y $40 > 30(-1)^t$ se concluye que las poblaciones de las especies x_t y y_t no pueden desaparecer.

El siguiente ejemplo es un ejercicio no resuelto de Navas Ureña (2009a, p. 1vii). De manera similar, es importante mencionar que nuestra aportación en este ejemplo, además de plantear su solución, es agregarle condiciones iniciales al problema para su análisis.

Ejemplo 11

Dos especies conviven de acuerdo con el siguiente modelo discreto:

$$\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + y_t + 3^t \\ y_{t+1} = 4x_t + 2y_t + 3^t. \end{cases}$$

donde el tiempo $t \in \mathbb{Z}_+$ se encuentra expresado en años. Supongamos que inicialmente el número de individuos de cada especie es $x_0 = 200$ y $y_0 = 300$. Analizar el comportamiento a la larga de las dos especies.

Solución. Sabemos que un procedimiento para resolver este tipo de sistemas, es expresarlo como una ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Así, considerando $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 2$, $f_1(t) = 3^t$ y $f_2(t) = 3^t$ de la ecuación (18) el sistema se transforma en:

$$\begin{aligned} x_{t+2} &= x_{t+1} + 6x_t + 2\left(3^t\right) + 3^t + 3^{t+1} \\ &= x_{t+1} + 6x_t + 3^{t+1} + 3^{t+1} \\ &= x_{t+1} + 6x_t + 2\left(3^{t+1}\right). \end{aligned}$$

Equivalentemente

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 6x_t = 2\left(3^{t+1}\right) = 6\left(3^t\right). \tag{26}$$

Observemos que se trata de una ecuación en diferencias de segundo orden no homogénea. La ecuación característica asociada a la ecuación homogénea $x_{t+2} - x_{t+1} - 6x_t = 0$ es:

$$r^2 - r - 6 = 0. \tag{27}$$

La ecuación (27) tiene por soluciones $r_1 = 3$ y $r_2 = -2$. Así, $x_1^t = (3)^t$ y $x_2^t = (-2)^t$ son soluciones de la ecuación en diferencias. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_h^t = k_1(3)^t + k_2(-2)^t, \quad \text{donde } k_1 \in \mathbb{R} \text{ y } k_2 \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

En lo que resta determinemos una solución particular de la ecuación en diferencias (26). Se tiene que un anulador de $6(3^t)$ es $N(E) = E - 3$. Ahora $N(E)x(t) = 0$ si y sólo si:

$$\begin{aligned} N(E)x(t) &= (E-3)x(t) = Ex(t) - 3x(t) \\ &= x(t+1) - 3x(t) = 6(3^{t+1}) - 3(6(3^t)) \\ &= 2 \cdot 3^{t+2} - 2 \cdot 3^{t+2} = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Así, la ecuación característica asociada de (29) es:

$$\mu - 3 = 0. \tag{30}$$

Esto implica que $\mu = 3$. Por otro lado, observemos que:

$$x_{t+2} - x_{t+1} - 6x_t = (E^2 - E - 6)x(t) = (E-3)(E+2)x(t) = p(E)x(t). \tag{31}$$

Así, la ecuación $x_{t+2} - x_{t+1} - 6x_t = 6(3^t)$ se puede reescribir en términos del operador shift E como $(E-3)(E+2)x(n) = 6(3^t)$. Luego,

$$N(E)p(E)x(t) = (E-3)(E-3)(E-2)x(t) = (E-3)^2(E-2)x(t) = 0. \tag{32}$$

Por lo tanto, el conjunto de las raíces de la ecuación (32) es igual a $\{3, 3, -2\}$. Así, una solución general de (32) es:

$$x(t) = a_1 3^t + a_2 t 3^t + a_3(-2)^t.$$

Omitiendo de $x(t)$, los términos 3^t y $(-2)^t$ que aparecen en (28) se obtiene que

$$x_p^t = x_p(t) = a_2 t 3^t. \tag{33}$$

Sustituyendo el valor de x_p^t (vea (33)) en (26) obtenemos:

$$\begin{aligned} a_2(t+2)3^{t+2} - a_2(t+1)3^{t+1} - 6a_2 t 3^t &= 6(3^t) \\ a_2(t+2)3^t \cdot 3^2 - a_2(t+1)3^t \cdot 3 - 6a_2 t 3^t &= 6(3^t) \\ \left[a_2(t+2)3^2 - a_2(t+1) \cdot 3 - 6a_2 t\right] 3^t &= 6(3^t). \end{aligned}$$

Esto implica que:

$$\begin{aligned} a_2\left[(t+2)3^2-(t+1)3-6t\right] &= 6 \\ a_2\left[(t+2)9-(t+1)3-6t\right] &= 6. \end{aligned}$$

Desarrollando obtenemos que:

$$\begin{aligned} a_2\left[9t+18-3t-3-6t\right] &= 6 \\ a_2\left[15\right] &= 6 \\ a_2 &= \frac{6}{15}=\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$x_p^t = x_p(t) = \frac{2}{5}t3^t.$$

Esto implica que la solución general de la ecuación en diferencias es:

$$x_t = k_1(3^t)+k_2(-2^t)+\frac{2}{5}t3^t, \quad k_1,k_2\in\mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$x_t = k_1(3)^t+k_2(-2)^t+\frac{2}{5}t3^t.$$

Por otra parte, de la ecuación (17) se sabe que:

$$a_{12}y_t^2 = y_{t+1}^1 - a_{11}y_t^1 - f_1(t).$$

Dado que $a_{11}=-1$ y $a_{12}=1$, se obtiene que:

$$y_t = \left[k_1\,(3)^{t+1}+k_2(-2)^{t+1}+\frac{2}{5}(t+1)3^{t+1}\right]+\left[k_1(3^t)+k_2(-2)^t+\frac{2}{3}t(3^t)\right]-3^t.$$

Para encontrar las constantes k_1 y k_2 usamos las condiciones iniciales $x_0=200, y_0=300$ y las sustituimos en las soluciones x_t y y_t.

$$\begin{aligned} x_0 &= k_13^0+k_2(-2)^0+\frac{2}{5}(0)3^0 = k_1+k_2. \\ y_0 &= \left[k_13^{0+1}+k_2(-2)^{0+1}+\frac{2}{5}(0+1)3^{0+1}\right]+\left[k_13^0+k_2(-2)^0+\frac{2}{3}(0)3^0\right]-3^0 \\ &= \left[3k_1-2k_2+\frac{6}{5}\right]+\left[k_1+k_2\right]-1 = 4k_1-k_2+\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Así, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} k_1+k_2=200 \\ 20k_1-5k_2=1499. \end{cases}$$

El cual tiene como solución $k_1=\frac{2499}{25}, k_2=\frac{2501}{25}$. Por lo tanto, la solución particular del sistema con sus respectivas condiciones iniciales es

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{2499}{25}\left(3^t\right)+\frac{2501}{25}(-2)^t+\frac{2}{5}t3^t \\ y_t &= \left[\frac{2499}{25}\left(3^{t+1}\right)+\frac{2501}{25}(-2)^{t+1}+\frac{2}{5}(t+1)3^{t+1}\right]+\left[\frac{2499}{25}\left(3^t\right)+\frac{2501}{25}(-2)^t\right. \\ &\quad \left.+\frac{2}{5}t\left(3^t\right)\right]-3^t. \end{aligned}$$

Simplificando las soluciones obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
x_t =& \frac{2499}{25}\left(3^t\right) + \frac{2501}{25}(-2)^t + \frac{2}{5}t3^t = \left(\frac{2499}{25} + \frac{2}{5}t\right)3^t + \frac{2501}{25}(-2)^t \\
=& \left(\frac{2499 + 10t}{25}\right)3^t + \frac{2501}{25}(-2)^t.
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
y_t =& \frac{2499}{25}\left(3^{t+1}\right) + \frac{2501}{25}(-2)^{t+1} + \frac{2}{5}(t+1)3^{t+1} + \frac{2499}{25}\left(3^t\right) + \frac{2501}{25}(-2)^t + \frac{2}{5}t\left(3^t\right) \\
& - 3^t \\
=& \frac{3(2499)}{25}\left(3^t\right) + \frac{2499}{25}\left(3^t\right) - \frac{2(2501)}{25}(-2)^t + \frac{2501}{25}(-2)^t + \frac{6}{5}t(3^t) + \frac{6}{5}(3^t) - 3^t \\
& + \frac{2}{5}t(3^t) \\
=& \frac{4(2499)}{25}\left(3^t\right) - \frac{2501}{25}(-2)^t + \frac{8}{5}t3^t + \frac{1}{5}3^t = \frac{10001}{25}\left(3^t\right) + \frac{8}{5}t\left(3^t\right) - \frac{2501}{25}(-2)^t.
\end{aligned}
$$

Finalmente, Para analizar el comportamiento en el tiempo de la especie x_t consideremos que para todo $t \geq 1$ se cumple:

$$
\left(\frac{2499 + 10t}{25}\right)3^t \geq \frac{2501}{25}(-2)^t.
$$

Así, para valores grandes de t, x_t tiende a infinito.
Ahora para analizar al comportamiento en el tiempo de la especie y_t notemos que para todo $t \geq 1$ se cumple que

$$
y_t = \frac{10001}{25}\left(3^t\right) + \frac{8}{5}t\left(3^t\right) - \frac{2501}{25}(-2)^t \geq \frac{10001}{25}\left(3^t\right) + \frac{8}{5}t(3^t) - \frac{2501}{25}2^t,
$$

y dado que para valores de t grandes se tiene que la expresión $\frac{10001}{25}\left(3^t\right) + \frac{8}{5}t3^t - \frac{2501}{25}2^t$ tiende a infinito. Se puede concluir que y_t tiende a infinito.

5. Conclusiones

La realización de este trabajo puede ser considerado como una invitación para adentrarse al mundo modelos matemáticos. En particular, se abordan los sistemas dinámicos discretos unidimensionales y bidimensionalesn, se presenta la teoría básica sobre estos modelos dinámicos así como algunas de sus aplicaciones. Para esto, se planteó una metodología para solucionar de forma analítica los sistemas dinámicos bidimensionales lineales. Finalmente, esperamos que este trabajo sea útil y despierte el interés en nuestros lectores para interesarse en el área de sistemas dinámicos discretos.

AgradecimientosLos autores agradecemos a la revisora o a el revisor por sus valiosas sugerencias, las cuales, una vez realizadas, mejoraron nuestro trabajo.

Contribucion de las personas autoras. Conceptualización: A.S.S, I.G.R. Metodología: A.S.S, I.G.R. Análisis formal: A. S. S. Escritura (borrador original): A. S. S. Escritura (revisión y edición): A. S. S.

Accesibilidad de datos: Se concede la disponibilidad de los datos a traves de una solicitud por correo electrónico al correo: alicia@mixteco.utm.mx.

Referencias

Barragán, F., Santiago-Santos, A., Tenorio, J. F., & King Dávalos, J. (2019). Órbitas y periodicidad en sistemas dinámicos. En J. J. Angoa Amador, R. Escobedo Conde, M. Ibarra Contreras & A. Contreras Carreto (Eds.), *Topología y sus Aplicaciones 7* (Capítulo 4). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Birkhoff, G. D. (1927). *Dynamical Systems*. American Mathematical Society.

Brin, M., & Struck, G. (2003). *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press.

Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations*. Springer.

Giancoli, D. (2008). *Física para ciencias e ingeniería*. Pearson.

King Dávalos, J. E., & Méndez Lango, H. (2014). *Sistemas dinámicos discretos*. Facultad de Ciencias, UNAM.

Larson, H. J. (1992). *Introducción a la Teoría de Probabilidades e Inferencias Estadísticas*. Limusa.

León-Torres, I., & Santiago-Santos, A. (2023). Una introducción a los sistemas dinámicos compacto transitivos. En J. J. Angoa Amador, A. Contreras, R. Escobedo Conde & M. d. J. López Toriz (Eds.), *Topología y sus aplicaciones 9*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Levy, H., & Lessman, F. (2011). *Finite Difference Equations*. Dover Publications.

Marotto, F. R. (2006). *Introduction to Mathematical Modeling Using Discrete Dynamical Systems*. Thomson Brooks/Cole.

Merino, O., & Kulenovic, M. R. S. (2002). *Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica*. Taylor & Francis.

Muñoz, V. M., Santiago-Santos, A., & Tenorio, J. F. (2023). Sobre la dinámica individual de algunas funciones del tipo mezclante. En J. J. Angoa Amador, A. Contreras, R. Escobedo Conde & M. d. J. López Toriz (Eds.), *Topología y sus aplicaciones 9*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Navas Ureña, J. (2009a). *Ejercicios Resueltos y Propuestos relacionados con los Modelos Matemáticos en Biología*. Universidad de Jaén, Departamento de Matemáticas.

Navas Ureña, J. (2009b). *Modelos matemáticos en biología*. Universidad de Jaén, Departamento de Matemáticas.

Osorio-Castillo, D. E., & Santiago-Santos, A. (2024). Un estudio sobre algunas familias de Furstenberg. En J. J. Angoa Amador, A. Contreras, R. Escobedo Conde & M. d. J. López Toriz (Eds.), *Topología y sus aplicaciones 10*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Rondón Durán, J. E. (2013). *Una introducción al modelamiento de fenómenos físicos a través de funciones*. Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas.