Espacio de probabilidad

Def Un espacio de probabilidad es la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ relativa a un experimento aleatorio donde.

Ω = espacio muestral

$\mathcal{F}$ = σ-álgebra

$\mathbb{P}$ = medida de probabilidad.

Def Un espacio muestral (Ω) es el conjunto de todos los eventos relativos al exp aleatorio

Def Sea Ω un conjunto. Se dice q' una familia de subconjuntos de Ω $(\mathcal{F})$ es una σ-álgebra si

1) $\Omega \in \mathcal{F}$
2) Si $A \in \mathcal{F}$ ent. $A^c \in \mathcal{F}$
3) Si $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{F}$ ent. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Def Una medida de probabilidad en una función $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ tal que:

1) $\mathbb{P}[A] \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
2) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
3) Si $A, B \in \mathcal{F}$ ∋. $A \cap B \neq \emptyset$ ent $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
3') Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$ ∋ $A_i \cap A_j = \emptyset \; i \neq j$
$\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ σ-aditiva.

Ejemplo Lanzar un dado

22-9-21

① $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

② $\mathcal{F}_1 = \{ \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega \}$ ✗

$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$

$2^\Omega = \{\emptyset, \Omega, \{1\} \ldots \{6\},$
$\{1, 2\}, \ldots, \{5, 6\},$
$\{1, 2, 3\} \ldots \{4, 5, 6\},$
$\vdots$
$\{1, 2, 3, 4, 5\} \ldots \{2, \ldots, 6\}\}$

③ $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$

a) ¿si $A \in 2^\Omega$ ent $\mathbb{P}[A] \geq 0$?

b) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

c) Si $A, B \in 2^\Omega$ $\exists$. $A \cap B = \emptyset$

$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3\}$ $\mathbb{P}[A \cup B] = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}[A] = \frac{1}{3} = \mathbb{P}[B]$.

Proposición Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, entonces:

a) Si $A \in \mathcal{F}$, ent $\mathbb{P}[A] \le 1$ y $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$

b) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$

c) Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}[B \setminus A] = \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A]$

d) " " " " $\Rightarrow \mathbb{P}[A] \le \mathbb{P}[B]$

Dem

a) $A^c \in \mathcal{F}$, $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = \Omega$, $\mathbb{P}[A^c] \ge 0$

$$1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[A \cup A^c] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A^c]$$

b) $\emptyset = \Omega^c \Rightarrow \mathbb{P}[\emptyset] = 1 - \mathbb{P}[\Omega] = 1 - 1 = 0$

c) ¿$B \setminus A \in \mathcal{F}$? $\quad B \setminus A = B \cap A^c$

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A \cup (B \setminus A)] = \mathbb{P}[A] + \underbrace{\mathbb{P}[B \setminus A]}_{\ge 0}$$

y d)

Proposición Desigualdad de Boole.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un esp. de probabilidad y $\{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{F}$, ent $\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i]$

Dem $B_1 := A_1$; $B_2 := A_2 \setminus A_1$; $B_3 := A_3 \setminus \bigcup_{i=1}^{2} A_i$

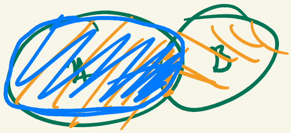
$B_i \subseteq A_i$ $\quad B_i := A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad i = 1, \dots, n.$

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[B_i] \le \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i]$$

Proposición Si $A, B \in \mathcal{F}$ ent.

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

Dem



$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B \setminus (A \cap B)]$$

$$= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

$$A \cup B = \underline{A} \cup \underline{(B \setminus A \cap B)}$$