Espacio de probabilidad

Def Un espacio de probabilidad es la terna $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ relativa a un experimento aleatorio donde.

Ω = espacio muestral

$\mathfrak{F}$ = σ-álgebra

$\mathbb{P}$ = medida de probabilidad.

Def Un espacio muestral (Ω) es el conjunto de todos los eventos relativos al exp aleatorio

Def Sea Ω un conjunto. Se dice q' una familia de subconjuntos de Ω $(\mathfrak{F})$ es una σ-álgebra si

1) $\Omega \in \mathfrak{F}$
2) Si $A \in \mathfrak{F}$ ent. $A^c \in \mathfrak{F}$
3) Si $A_1, A_2, \ldots, \in \mathfrak{F}$ ent. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$

Def Una medida de probabilidad en una función $\mathbb{P}: \mathfrak{F} \to [0,1]$ tal que:

1) $\mathbb{P}[A] \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{F}$
2) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
3) Si $A, B \in \mathfrak{F} \ni A \cap B \neq 0$ ent $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
3') Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{F} \ni A_i \cap A_j = \emptyset \; i \neq j$

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$$ σ-aditiva.

Ejemplo Lanzar un dado 22-9-21

① $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

② $\mathcal{F}_1 = \{ \{1\}, \{2,3,4,5,6\}, \Omega \}$ ✗

$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$

$$2^{\Omega} = \{ \emptyset, \Omega, \{1\} \dots \{6\}, \{1,2\}, \dots, \{5,6\}, \{1,2,3\} \dots \{4,5,6\}, \vdots, \{1,2,3,4,5\} \dots \{2,\dots,6\} \}$$

③ $(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbb{P})$

a) ¿si $A \in 2^{\Omega}$ ent $\mathbb{P}[A] \geq 0$?

b) $\mathbb{P}[\Omega] = \underline{1}$

c) si $A, B \in 2^{\Omega}$ $\ni$. $A \cap B = \emptyset$

$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3\}$ $\mathbb{P}[A \cup B] = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}[A] = \frac{1}{3} = \mathbb{P}[B]$.

Proposición Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, entonces:

a) Si $A \in \mathcal{F}$, ent $\underline{\mathbb{P}[A] \leq 1}$ y $\underline{\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]}$

b) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$

c) Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}[B \setminus A] = \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A]$

d) " " " " $\Rightarrow \underline{\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]}$

Dem

a) $\underline{A^c \in \mathcal{F}}$, $A \cap A^c = \emptyset$, $\underline{A \cup A^c = \Omega}$, $\mathbb{P}[A^c] \geq 0$

$$1 = \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[A \cup A^c] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[A^c]$$

b) $\emptyset = \Omega^c \Rightarrow \mathbb{P}[\emptyset] = 1 - \mathbb{P}[\Omega] = 1 - 1 = 0$

c) ¿$B \setminus A \in \mathcal{F}$? $\quad B \setminus A = \underline{B} \cap \underline{A}^c$

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A \cup (B \setminus A)] = \mathbb{P}[A] + \underbrace{\mathbb{P}[B \setminus A]}_{\geq 0}$$

y d)

Proposición Desigualdad de Boole.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un esp. de probabilidad y $\{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathcal{F}$, ent $\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i]$

Dem $\quad B_1 := A_1$; $B_2 := A_2 \setminus A_1$; $B_3 := A_3 \setminus \bigcup_{i=1}^{2} A_i$

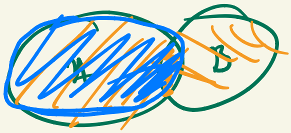
$B_i \subseteq A_i \quad B_i := A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad i = 1, \dots, n.$

$$\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] = \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} B_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[B_i] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i]$$

Proposición Si $A, B \in \mathfrak{F}$ ent.

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

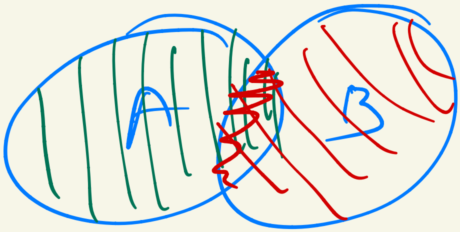
Dem



$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B \setminus (A \cap B)]$$

$$= \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

$$A \cup B = \underline{A} \cup \underline{(B \setminus A \cap B)}$$



T.E.1.1

Proposición Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. y $\{A_i\}_{i=1}^{n} \in \mathfrak{F}$ entonces

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{\{i \neq j\}} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + \sum_{\{i \neq j, j \neq k, i \neq k\}} \mathbb{P}[A_i \cap A_j \cap A_k]$$

$$+ \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right]$$

Teorema (Continuidad de $\mathbb{P}$) 23-09-21

Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente o decreciente ent. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[\lim_{n\to\infty} A_n]$

Obs 1) Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es creciente ent.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

2) Si $\{A_n\}$ es decreciente ent.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

Dem Caso 1

(1)
$B_1 := A_1$
$B_2 = A_2 \cap A_1^c$
$B_3 = A_3 \cap A_2^c$
$\vdots$
$B_n = A_n \cap A_{n-1}^c$

$B_i \cap B_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

(2)
$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \lim_{n\to\infty} A_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$\mathbb{P}\Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big] = \mathbb{P}\Big[\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[B_i]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[B_i] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big[\bigcup_{i=1}^{n} B_i\Big]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] \quad //$$

Caso 2 $\searrow$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

Rec

$\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$

Si $A_n \searrow \Rightarrow A_n^c \nearrow$

por caso 1

$$\lim_{n\to\infty}(1-\mathbb{P}[A_n]) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n^c] = \mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} A_n^c\right]$$

$$= \mathbb{P}\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right]$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\mathbb{P}[A_n]) = 1 - \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right]$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} A_n\right]$$

$$A_n \cup A_n^c = \Omega$$

$$A_n^c = \Omega \setminus A_n$$

Probabilidad Geométrica

Supongamos que existe una región R en el plano y que contiene a otra región r. Un punto es colocado aleatoriamente en R y estamos interesados en saber la probabilidad de que ese punto esté en r.

p := probabilidad de caer en r ent

$$p = \frac{\text{área “}r\text{”}}{\text{área “}R\text{”}}$$

Ejemplo. El problema del encuentro

Las personas A y B, se quedan de ver en algún lugar entre las 12:00 y 13:00 hrs. La persona q' llega primero espera 20 min a la otra y luego se va.

¿Cuál es la probabilidad de q' se encuentren si llegan aleatoriamente en el transcurso de la hora?