

# Limites

Jota

January 31, 2024

## 1 Limites

Considere a função  $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ . Não temos um valor de  $f(x)$  quando  $x = 2$ , pois não é possível dividir por 0. O limite dessa função com  $x$  se aproximando de 2 é o valor que  $f(x)$  tende conforme a aproximação de  $x$  chega mais próxima de 2, i.e. 4. É possível visualizar isto através da tabela:

$x$	$f(x)$
-2.1	4.1
-2.01	4.01
-2.001	4.001
-2.0001	4.0001

Conforme o  $x$  se aproxima de 2,  $f(x)$  se aproxima de 4

Usando os símbolos de limite:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

Podemos ter funções sem limites definidos, e.g.  $\sin(1/x)$ . É possível visualizar isto usando a tabela:

$x$	$\sin(1/x)$
-0.1	0.54402111
-0.01	0.50636564
-0.001	-0.99388865
-0.0001	-0.99388865

Veja o [link](#)

### 1.1 Limites laterais

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x < 2 \Rightarrow x + 1 \\ x \geq 2 \Rightarrow x^2 - 4 \end{cases}$$

O limite  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  não existe, pois se aproximarmos de 2 pelo “lado esquerdo” encontraríamos  $-1$  e pelo “lado direito” encontraríamos 2, para essa função temos os chamados limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

representa a aproximação pela “esquerda” (negativo)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

representa a aproximação pela “direita” (positivo)

## 1.2 Limites infinitos

Considere a função  $f(x) = \frac{1}{x}$ , ela tem limites infinitos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

## 1.3 Leis do limite

Teorema: Limites básicos

Qualquer número real  $a$  ou constante  $c$

1.  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} c = c$

Teorema: Leis do limite

Seja  $f(x)$  e  $g(x)$  definidas para todo  $x \neq a$  em um intervalo aberto contendo  $a$ . Seja  $c$  uma constante. Então temos que:

1. **Lei da soma de limites:**  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. **Lei da diferença de limites:**  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. **Lei da multiplicação constante de limites:**  $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
4. **Lei do produto de limites:**  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5. **Lei do quociente de limites:**  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

6. **Lei da potência de limites:**  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$  para todo  $n$  positivo

7. **Lei da raiz de limites:**  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$  para todo  $n$  positivo

**Resolvendo um exemplo utilizando as leis acima:**

Tente resolver o limite proposto:  $\lim_{x \rightarrow -3} (4x + 2)$

**Solução:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} (4x + 2) &= \lim_{x \rightarrow -3} 4x + \lim_{x \rightarrow -3} 2 \quad (\text{Lei da soma de limites}) \\ &= 4 \times \lim_{x \rightarrow -3} x + 2 \quad (\text{Lei da multiplicação constante de limites}) \\ &= 4 \times (-3) + 2 \\ &= -10\end{aligned}$$

**Avaliando funções polinomiais e racionais**

É visível que dado uma função  $f(x)$ , seu limite se dará como:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Porém nem todos os casos isso é válido.

Perceba que dado duas funções  $p(x)$  e  $q(x)$ , o limite se dá como:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$ , quando  $q(a) \neq 0$ .

**Técnicas adicionais para avaliar um limite**

Considere a função  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ , o limite  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  não pode ser calculado utilizando as leis do limite citadas. Esse limite tem a forma de  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , onde  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . Nesse caso falamos que  $\frac{f(x)}{g(x)}$  tem a forma indeterminada de  $\frac{0}{0}$ . O passo a passo a seguir contém estratégias de como conseguir solucionar esse tipo de limite.

1. Identificar que não é possível utilizar apenas as leis do limite
2. Encontrar uma função igual a  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \forall x \neq a$  em algum intervalo que contém  $a$ 
  - (a) Se  $f(x)$  e  $g(x)$  forem polinomiais, devemos fatorar cada função e eliminar qualquer fator comum
  - (b) Se o numerador ou o denominador contêm uma diferença envolvendo raiz quadrada, devemos tentar multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado da expressão contendo a raiz
  - (c) Se  $\frac{f(x)}{g(x)}$  é uma função complexa, devemos tentar simplificá-la
3. E depois, aplicamos as leis do limite