Limites

Jota

31 de janeiro de 2024

1 Limites

Considere a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. Não temos um valor de $f(x)$ quando $x = 2$, pois não é possível dividir por 0. O limite dessa função com x se aproximando de 2 é o valor que $f(x)$ tende conforme a aproximação de x chega mais próxima do 2, i.e. 4. É possível visualizar isto através da tabela:

x	$f(x)$
−2.1	4.1
−2.01	4.01
−2.001	4.001
−2.0001	4.0001

Conforme o x se aproxima de 2, $f(x)$ se aproxima de 4

Usando os símbolos de limite: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

Podemos ter funções sem limites definidos, e.g. $\sin(1/x)$. É possível visualizar isto usando a tabela:

x	$\sin(1/x)$
−0.1	0.54402111
−0.01	0.50636564
−0.001	−0.99388865
−0.0001	−0.99388865

Veja o link

1.1 Limites laterais

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x < 2 \Rightarrow x + 1 \\ x \geq 2 \Rightarrow x^2 - 4 \end{cases}$$

O limite $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe, pois se aproximarmos de 2 pelo "lado esquerdo" encontrariamos -1 e pelo "lado direito" encontrariamos 2, para essa função temos os chamados limites laterais:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)$$

representa a aproximação pela "esquerda" (negativo)

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)$$

representa a aproximação pela "direita" (positivo)

1.2 Limites infinitos

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$, ela tem limites infinitos:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

1.3 Leis do limite

Teorema: Limites básicos
Qualquer número real a ou constante c

1. $\lim_{x\to a} x = a$
2. $\lim_{x\to a} c = c$

Teorema: Leis do limite
Seja $f(x)$ e $g(x)$ definidas para todo $x \neq a$ em um intervalo aberto contendo a. Seja c uma constante. Então temos que:

1. **Lei da soma de limites**: $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. **Lei da diferença de limites**: $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. **Lei da multiplicação constante de limites**: $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$
4. **Lei do produto de limites**: $\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$
5. **Lei do quociente de limites**: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

6. **Lei da potência de limites**: $\lim_{x \to a}(f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$ para todo n positivo

7. **Lei da raiz de limites**: $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ para todo n positivo

Resolvendo um exemplo utilizando as leis acima:
Tente resolver o limite proposto: $\lim_{x \to -3}(4x + 2)$
Solução:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -3}(4x + 2) &= \lim_{x \to -3} 4x + \lim_{x \to -3} 2 && \text{(Lei da soma de limites)} \\
&= 4 \times \lim_{x \to -3} x + 2 && \text{(Lei da multiplicação constante de limites)} \\
&= 4 \times (-3) + 2 \\
&= -10
\end{aligned}$$

Avaliando funções polinomiais e racionais
É visível que dado uma função $f(x)$, seu limite se dará como: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Porém nem todos os casos isso é válido.
Perceba que dado duas funções $p(x)$ e $q(x)$, o limite se da como: $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$, quando $q(a) \neq 0$.

Técnicas adicionais para avaliar um limite
Considere a função $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, o limite $\lim_{x \to 1} f(x)$ não pode ser calculado utilizando as leis do limite citadas. Esse limite tem a forma de $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, onde $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Nesse caso falamos que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada de $\frac{0}{0}$. O passo a passo a seguir contém estratégias de como conseguir solucionar esse tipo de limite.

1. Identificar que não é possível utilizar apenas as leis do limite

2. Encontrar uma função igual a $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \forall x \neq a$ em algum intervalo que contém a

   (a) Se $f(x)$ e $g(x)$ forem polinomiais, devemos fatorar cada função e eliminar qualquer fator comum

   (b) Se o numerador ou o denominador contêm uma diferença envolvendo raiz quadrada, devemos tentar multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado da expressão contendo a raiz

   (c) Se $\frac{f(x)}{g(x)}$ é uma função complexa, devemos tentar simplificar-la

3. E depois, aplicamos as leis do limite

Resolva: $\lim\limits_{x\to 3}(\frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2-2x-3})$

Solução:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}(\frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2-2x-3}) &= \lim_{x\to 3}(\frac{x+1}{x+1}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{4}{x^2-2x-3}) \\
&= \lim_{x\to 3}(\frac{x+1}{x^2-2x-3} - \frac{4}{x^2-2x-3}) \\
&= \lim_{x\to 3}(\frac{x+1-4}{x^2-2x-3}) \\
&= \lim_{x\to 3}(\frac{x-3}{x^2-2x-3}) \\
&= \lim_{x\to 3}(\frac{x-3}{(x+1)(x-3)}) \\
&= \lim_{x\to 3}(\frac{1}{x+1}) \\
&= \frac{1}{3+1} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$