Limites

Jota

29 de janeiro de 2024

Limites

Considere a função $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$. Não temos um valor de $f(x)$ quando $x = 2$, pois não é possível dividir por 0. O limite dessa função com x se aproximando de 2 é o valor que $f(x)$ tende conforme a aproximação de x chega mais próxima do 2, i.e. 4. Usando os símbolos de limite: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$

Podemos ter funções sem limites definidos, e.g. $\sin(1/x)$. É possível visualizar isto usando a tabela:

x	$\sin(x)$
-0.1	0.54402111
-0.01	0.50636564
-0.001	-0.99388865
-0.0001	-0.99388865

Veja o link

Limites laterais

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x < 2 \Rightarrow x + 1 \\ x \geq 2 \Rightarrow x^2 - 4 \end{cases}$$

O limite $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ não existe, pois se aproximarmos de 2 pelo "lado esquerdo" encontrariamos -1 e pelo "lado direito" encontrariamos 2, para essa função temos os chamados limites laterais:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)$$

representa a aproximação pela "esquerda" (negativo)

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)$$

representa a aproximação pela "direita" (positivo)

Limites infinitos

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$, ela tem limites infinitos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Leis do limite

Teorema: Limites básicos
Qualquer número real a ou constante c

1. $\lim_{x \to a} x = a$
2. $\lim_{x \to a} c = c$

Teorema: Leis do limite Seja $f(x)$ e $g(x)$ definidas para todo $x \neq a$ em um intervalo aberto contendo a. Seja c uma constante. Então temos que:

1. **Lei das somas de limites**: $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. **Lei das diferença de limites**: $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
3. **Lei da multiplicação constante de limites**: $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$
4. **Lei do produto de limites**: $\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$
5. **Lei do quociente de limites**: $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$
6. **Lei da potência de limites**: $\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} f(x))^n$ para todo n positivo
7. **Lei da raiz de limites**: $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{(f(x))} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ para todo n positivo