Laboratorio 4

Juan Diego Sique Martínez

Agosto 2018

1 Primer inciso

1.1 T(n) = T(n-1) + n

Procediendo con la sustitución, se utiliza la suposición para plantear que el tiempo de ejecución de la recursión verdaderamente es $O(n^2)$. Por lo tanto en la ecuación

$$T(n) = T(n-1) + n \tag{1}$$

en cada ocurrencia de $T(n)$ se coloca nuestra ecuación hipótesis, en este caso n^2, respetando las variables de ingreso de la función T.

$$T(n) = (n-1)^2 + n \tag{2}$$

Expandiendo el binomio cuadrado tendremos,

$$T(n) = n^2 - 2n + 1 + n \tag{3}$$

Reduciendo términos semejantes y ordenando,

$$T(n) = n^2 - n + 1 \tag{4}$$

De lo que podemos decir que el término dominante es n^2, quedando una ecuación de la familia

$$O(n^2) \tag{5}$$

1.2 T(n) = T(n/2) + 1

Procediendo con la sustitución, se utiliza la suposición para plantear que el tiempo de ejecución de la recursión verdaderamente es $O(n \times log(n))$. Por lo tanto en la ecuación

$$T(n) = T(n/2) + 1 \tag{1}$$

en cada ocurrencia de $T(n)$ se coloca nuestra ecuación hipótesis, en este caso $n \times log(n)$, respetando las variables de ingreso de la función T.

$$T(n) = (n/2)(log(n/2)) + 1 \tag{2}$$

Tras aplicar propiedades de los logaritmos se puede expander ligeramente,

$$T(n) = (n/2)(log(n) - log(2)) + 1 \tag{3}$$

Ahora se procede a realizar un factor común,

$$T(n) = (n/2)log(n) - (n/2)log(2) + 1 \tag{4}$$

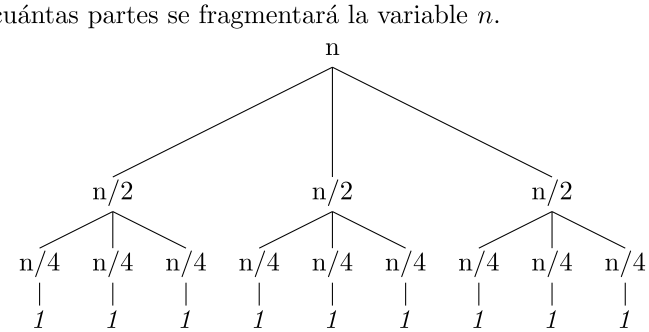
Donde tomamos el factor dominante, el cual despojado de las constantes nombra a una familia de funciones, que coincide con nuestra hipótesis inicial.

$$(n/2)log(n) \to (n)log(n) \to O(n \times log(n)) \tag{5}$$

2 Segundo inciso

$$T(n) = 3T(n/2) + n \tag{Ecuación}$$

Al realizar un análisis utilizando árboles se toma en cuenta el número de ramas, que es el coeficiente previo a nuestra función y el valor divisor que nos muestra en cuántas partes se fragmentará la variable n.



La altura del árbol crecerá en función logarítmica con la base de nuestro divisor, es decir, $\log_2(n)$, mientras que horizontalmente crecerá exponencialmente, donde el exponente poseerá forma logarítimica utilizando como base nuevamente el divisor, pero como argumento tomará el coeficiente multiplicador, dando como resultado $n^{\log_2(3)}$. Tras operar el logaritmo concluimos que $\log_2(3) \approx 1.58496 \approx 2$ es decir, el tiempo de ejecución será del orden de $O(n^2)$.

Para comprobarlo utilizando la sustitución,

$$T(n) = 3T(n/2) + n \tag{1}$$

Se procede a implantar nuestra hipótesis

$$T(n) = 3(n/2)^2 + n \tag{2}$$

Se reducen términos,

$$T(n) = (3/4)n^2 + n \tag{3}$$

Y al despojarlo de sus constantes y obtener el término dominante podemos decir que,

$$(3/4)n^2 \rightarrow n^2 \rightarrow O(n^2) \tag{4}$$

3 Tercer inciso

3.1 T(n) = 2T(n/4) + 1

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/4) + 1 \\ a &= 2 \\ b &= 4 \\ f(n) &= 1 \end{aligned}$$

Ahora se procede a aplicar la regla del Teorema Maestro.

$$\begin{aligned} &n^{log_b(a)} \\ &n^{log_4(2)} = n^{0.5} \end{aligned}$$

Es apreciable que se cumple el primer caso del Teorema.

$$\begin{aligned} O(n^{log_b(a)-e}) &= f(n) \\ n^{log_4(2)-e} &= 1 \\ e &= 0.5 \\ &\therefore \Theta(n^{0.5}) \end{aligned}$$

3.2 T(n) = 2T(n/4) + $\sqrt{n}$

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n/4) + \sqrt{n} \\ a &= 2 \\ b &= 4 \\ f(n) &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

Ahora se procede a aplicar la regla del Teorema Maestro.

$$n^{log_b(a)}$$
$$n^{log_4(2)} = n^{0.5}$$

Es apreciable que se cumple el segundo caso del Teorema.

$$O(n^{log_b(a)}) = f(n)$$
$$n^{log_4(2)} = \sqrt{n}$$
$$\therefore \Theta(n^{0.5} \times log_2(n))$$

3.3 T(n) = 2T(n/4) + n

$$T(n) = 2T(n/4) + n$$
$$a = 2$$
$$b = 4$$
$$f(n) = n$$

Ahora se procede a aplicar la regla del Teorema Maestro.

$$n^{log_b(a)}$$
$$n^{log_4(2)} = n^{0.5}$$

Es apreciable que se cumple el tercer caso del Teorema.

$$O(n^{log_b(a)+e}) = f(n)$$
$$n^{log_4(2)+e} = n$$
$$e = 0.5$$
$$\therefore \Theta(n)$$

3.4 T(n) = 2T(n/4) + n^2

$$T(n) = 2T(n/4) + n^2$$
$$a = 2$$
$$b = 4$$
$$f(n) = n^2$$

Ahora se procede a aplicar la regla del Teorema Maestro.

$$n^{log_b(a)}$$
$$n^{log_4(2)} = n^{0.5}$$

Es apreciable que se cumple el tercer caso del Teorema.

$$\begin{aligned}
O(n^{log_b(a)+e}) &= f(n) \\
n^{log_4(2)+e} &= n^2 \\
e &= 1.5 \\
&\therefore \Theta(n^2)
\end{aligned}$$