Pflichtaufgabe 2: d-PCP

Blatt 4 – Theoretische Informatik 2 Sommersemester 2025

Einführung und Begriffe

Definition 0.1 (Post-Korrespondenzproblem (PCP))**.** Eine Instanz des klassischen PCP besteht aus einer endlichen Liste von Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ von Wörtern über einem Alphabet Σ. Die Frage ist, ob es eine Indexfolge $i_1, \dots, i_n$ gibt (mit $n \geq 1$), sodass gilt:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}.$$

Beispiel (klassisches PCP, positive Lösung):

Sei die Instanz gegeben durch die Paare:

$$(x_1, y_1) = (a, ab), \quad (x_2, y_2) = (ba, a)$$

Wir überprüfen die Indexfolge $1, 2$:

$$x_1 x_2 = a \cdot ba = aba, \quad y_1 y_2 = ab \cdot a = aba.$$

Lösung gefunden: Indexfolge $[1, 2]$.

Definition 0.2 (d-dimensionales PCP (d-PCP))**.** Eine Verallgemeinerung des PCP auf $d \geq 2$ Komponenten. Gegeben sind Tupel

$$(a_{1,1}, \dots, a_{1,d}) \ , \dots , \ (a_{m,1}, \dots, a_{m,d}) \in (\Sigma^+)^d.$$

Gesucht ist eine Indexfolge $i_1, \dots, i_n$, sodass für alle $s \neq t \in \{1, \dots, d\}$ gilt:

$$a_{i_1,s} \cdots a_{i_n,s} = a_{i_1,t} \cdots a_{i_n,t}.$$

Beispiel (3-PCP, positive Lösung):

Gegeben seien die Tupel:

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}) = (a, a, a), \ (a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}) = (b, b, b)$$

Für die Indexfolge $1, 2$:

$$\text{Zeile 1: } [a, b] \Rightarrow ab, \ \text{Zeile 2: } [a, b] \Rightarrow ab, \ \text{Zeile 3: } [a, b] \Rightarrow ab.$$

Gültige Lösung: Alle drei Reihen stimmen überein mit ab.

Motivation: Das d-PCP verallgemeinert die Idee des PCP auf mehrere Reihen und ist ein nützliches Werkzeug zur Konstruktion von Reduktionen auf Probleme mit mehrdimensionalen Gleichheitsbedingungen. Es wird in vielen Unentscheidbarkeitsbeweisen verwendet.

(a) d-PCP ist semi-entscheidbar für alle $d \geq 2$

Beweis: Es genügt, eine Turingmaschine M zu konstruieren, die im positiven Fall terminiert:

- M generiert systematisch alle möglichen Folgen von Indizes $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$, mit $n \geq 1$.
- Für jede Folge berechnet M die Konkatenationen $a_{i_1,s} \cdots a_{i_n,s}$ für alle $s = 1, \dots, d$.
- M prüft, ob alle d Ergebnisse gleich sind:

$$\forall s, t \in \{1, \dots, d\}, \ s \neq t : \quad a_{i_1,s} \cdots a_{i_n,s} = a_{i_1,t} \cdots a_{i_n,t}$$

- Falls ja, hält M an und akzeptiert.

Da M im positiven Fall hält und im negativen eventuell nie hält, ist d-PCP semi-entscheidbar.

□

(b) d-PCP ist unentscheidbar für alle $d \geq 2$

Beweis: Wir zeigen die Unentscheidbarkeit durch Reduktion von PCP (2-dimensional) auf d-PCP.

Sei eine Instanz des klassischen PCP gegeben:

$$(x_1, y_1), \; \ldots, \; (x_m, y_m), \quad \text{mit } x_i, y_i \in \Sigma^+.$$

Wir definieren daraus eine Instanz des d-PCP über Tupel $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,d})$, wobei:

$$a_{i,1} := x_i, \quad a_{i,2} := y_i, \quad a_{i,j} := x_i \text{ für alle } j = 3, \ldots, d.$$

Dann gilt:

- Falls $(i_1, \ldots, i_n)$ eine Lösung für PCP ist, dann ist:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n} \Rightarrow \text{Alle } d \text{ Reihen sind gleich in der d-PCP}$$

- Jede Lösung der d-PCP impliziert insbesondere Gleichheit von Zeile 1 und 2 $\Rightarrow$ PCP gelöst.

Da PCP unentscheidbar ist und die Reduktion berechenbar ist, folgt: d-PCP ist unentscheidbar. $\square$