



Technische  
Universität  
Braunschweig



# Theoretische Informatik 2

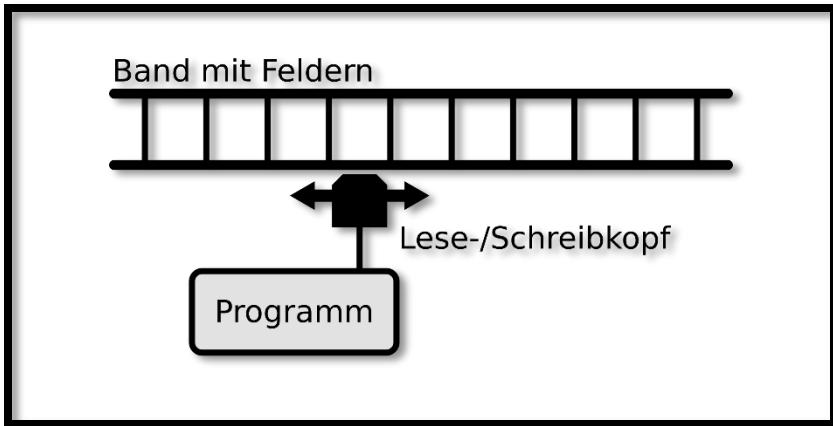
Arne Schmidt

# Kapitel 1.1 – Turing-Maschinen

# Alan Turing (1912-1954)

Logiker, Mathematiker, Kryptoanalytiker, Informatiker

Berechenbarkeitsmodell Turing-Maschine

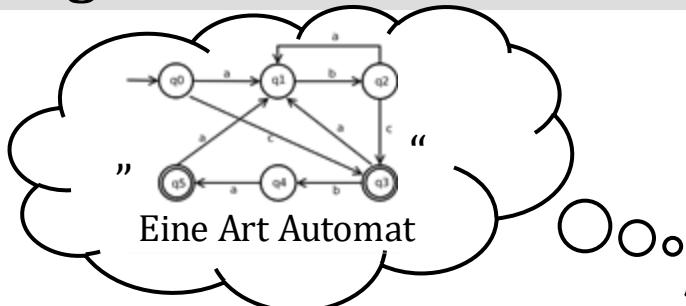


Church-Turing-These:

*„Alles, was sich intuitiv berechnen lässt, lässt sich mit einer Turing-Maschine berechnen.“*



# Turing-Maschine – Intuition



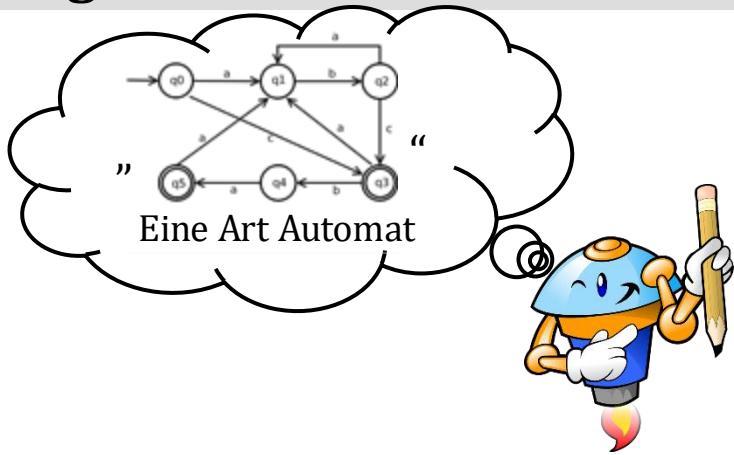
Aha! Eine **1**!

Der Zustand sagt mir, hier soll nun eine **0** stehen.

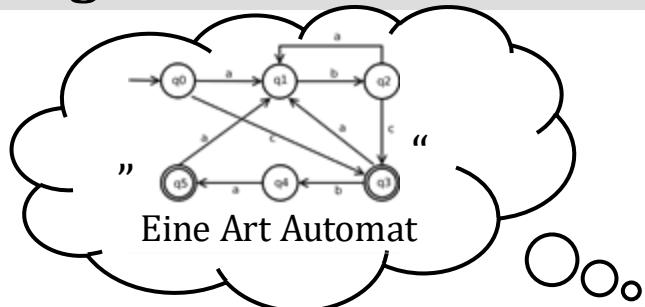
Danach schaue ich mir die Zelle **links** daneben an.

	?	?	?	?	1	?	?	?	?	
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

# Turing-Maschine – Intuition



# Turing-Maschine – Intuition



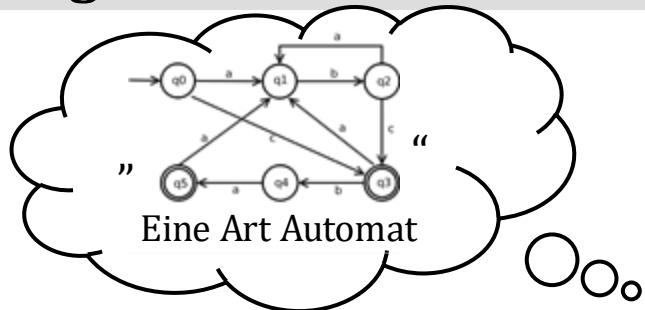
Aha! Eine **0**!

Der Zustand sagt mir, hier  
soll nun eine **1** stehen.

Danach **halte** ich an.

	?	?	?	1	0	?	?	?	?	
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

# Turing-Maschine – Intuition



---

	?	?	?	1	1	?	?	?	?	
--	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

---

Der „Roboter“ kann also: Lesen, schreiben, bewegen und seinen Zustand ändern!

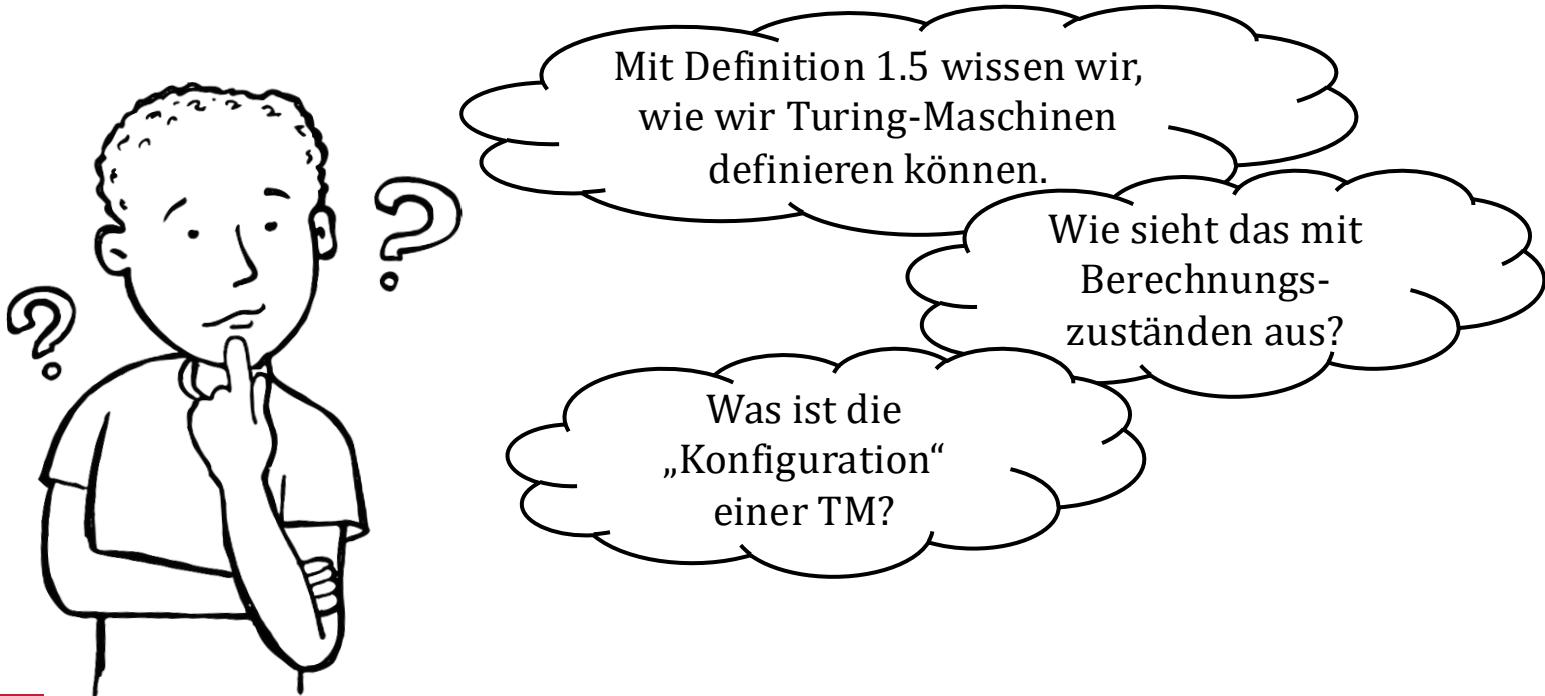
# Turing-Maschine – Defintion

## Definition 1.5

Eine **Turing-Maschine (TM)**  $M$  ist ein Tupel  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, q_0, \delta, Q_F)$  mit

- $Q$  ist eine endliche Menge von **Kontrollzuständen**,
  - $q_0 \in Q$  ist der **Startzustand**
  - $Q_F \subseteq Q$  ist die Menge der **Endzustände**
- $\Sigma$  ist das endliche, nicht-leere Eingabealphabet
- $\Gamma$  ist das endliche, nicht-leere Bandalphabet mit
  - $\Sigma \subset \Gamma$ ,
  - $\sqcup \in \Gamma$  ist das **Leerzeichen** bzw. **Blank-Symbol**,
  - Es gilt  $\sqcup \notin \Sigma$
- Falls  $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ , sprechen wir von einer **deterministischen Turing-Maschine (DTM)**. Dabei sind  $L, R, N$  die Bewegungen des Schreib- und Lesekopfs (Links, Rechts, Neutral)
- Falls  $\delta \subseteq Q \times \Gamma \times Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ , sprechen wir von einer **nicht-deterministischen Turing-Maschine (NTM)**.

# Fragen



# Konfiguration - Intuitiv

Intuitiv:

Was ist der Gesamtzustand der TM?

- In welchem Zustand befinden wir uns?
- Wo steht welches Zeichen?
- Wo steht der Kopf?

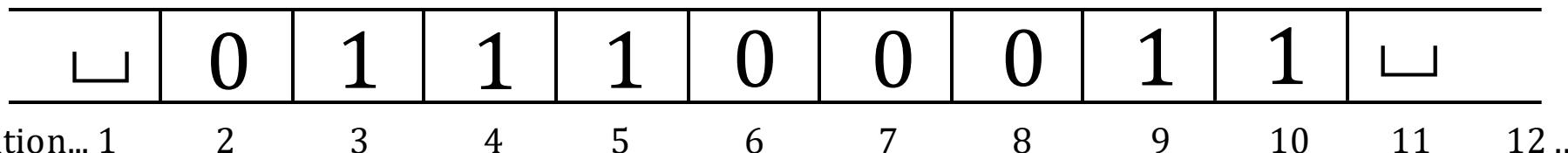


Aha! Eine 0!

Der Zustand sagt mir, hier soll nun eine 1 stehen.

Danach halte ich an.

$$\delta(q, 0) = (q_F, 1, N) \text{ mit } q_F \in Q_F$$



# Konfiguration – Definition

## Definition 1.6

Sei  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, q_0, \delta, Q_F)$  eine TM

- a) Eine **Konfiguration** von  $M$  ist ein Tripel  $u \ q \ v \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$

Dabei ist  $u$  der Bandinhalt links vom Kopf,  $q$  der aktuelle Kontrollzustand und  $v$  der Bandinhalt ab dem Kopf.

- b) Die Startkonfiguration von  $M$  für die Eingabe  $w \in \Sigma^*$  ist die Konfiguration  $q_0 w$ .  
Für  $w = \varepsilon$  ist die Startkonfiguration  $q_0 \sqcup$ .

# Konfiguration – Definition (forts.)

## Definition 1.6

Sei  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, q_0, \delta, Q_F)$  eine TM

- c) Die Transitionsfunktion  $\delta$  induziert eine **Transitionsrelation** zwischen Konfigurationen, die wie folgt definiert ist:

- $u. a \ q \ b. v \rightarrow u. q' a. c. v$ , falls  $(q', c, L) \in \delta(q, b)$ ,
- $u. a \ q \ b. v \rightarrow u. a. c \ q' v$ , falls  $(q', c, R) \in \delta(q, b)$  und  $v \neq \varepsilon$ ,
- $u. a \ q \ b. v \rightarrow u. a \ q' c. v$ , falls  $(q', c, N) \in \delta(q, b)$ ,
- $u. q \ b \rightarrow u. c \ q'$  falls  $(q', c, R) \in \delta(q, b)$ ,
- $q \ b. v \rightarrow q'. c. v$ , falls  $(q', c, L) \in \delta(q, b)$ .

Für  $a, b, c \in \Gamma$ ,  $q, q' \in Q$ ,  $u, v \in \Gamma^*$ .

Wir verwenden  $\rightarrow^*$ , um die reflexive, transitive Hülle von  $\rightarrow$  darzustellen.

# Konfiguration – Definition (forts.)

## Definition 1.6

Sei  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, q_0, \delta, Q_F)$  eine TM

- d) Eine Konfiguration  $u \ q \ v$  heißt akzeptierend, falls sie in  $\Gamma^* \times Q_F \times \Gamma^*$  enthalten ist, also ein akzeptierender Zustand erreicht wurde.
- e) Eine **Berechnung** von  $M$  auf Eingabe  $w \in \Sigma^*$  ist die unendliche Sequenz von Konfigurationen  $c_0 = q_0 w \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow \dots$ , die sich von der Startkonfiguration zu  $w$  aus ergibt.

In einer DTM sind die Nachfolger einer Konfiguration immer eindeutig.

Oftmals interessiert man sich nur für einen endlichen Präfix  $c_0 \xrightarrow{*} c_k$  einer Berechnung.

Dies ist vor allem der Fall wenn die letzte Konfiguration des Präfixes akzeptierend ist.

- f) Die Sprache  $L(M)$  der Maschine  $M$  ist die Menge aller Wörter  $w$ , so dass eine Berechnung von der Startkonfiguration  $q_0 w$  zu einer akzeptierenden Konfiguration existiert.

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\} = \{w \in \Sigma^* \mid q_0 w \xrightarrow{*} uq'v \in \Gamma^* Q_F \Gamma^*\} .$$

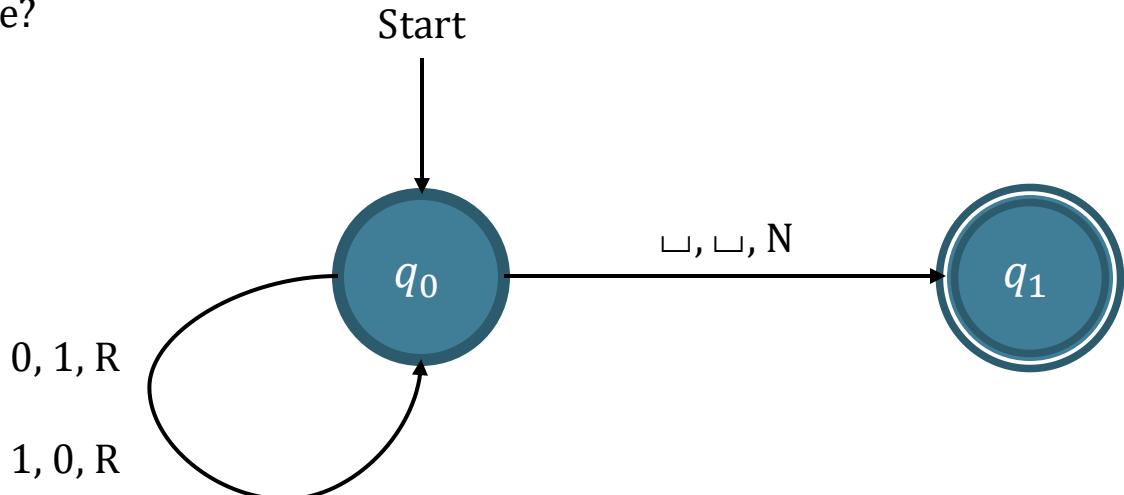
# Turing-Maschine – Beispiel

Wie bei anderen Automaten:

- Zustände werden durch Kreise markiert
- Transitionsfunktion  $\delta$  durch gerichtete Kanten
- Die Beschriftung ist dabei immer <Lesen, Schreiben, Bewegen>

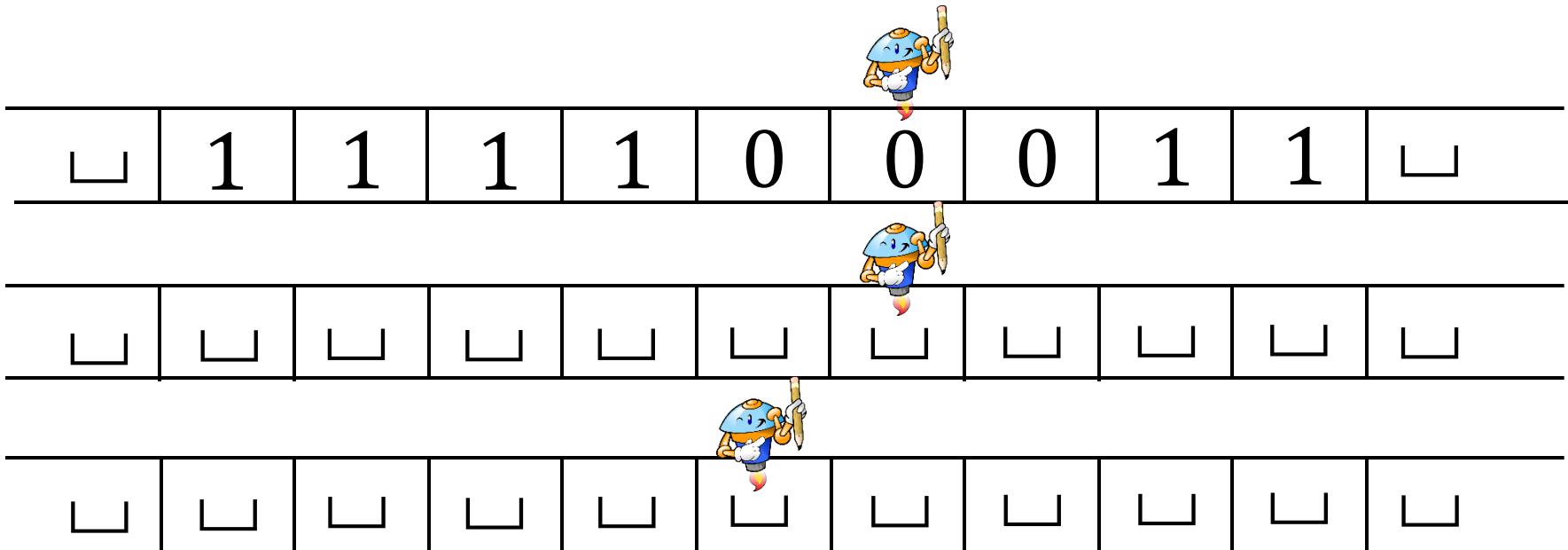
Was tut diese Turing-Maschine?

Sie flippt alle 1en und 0en.



## Kapitel 1.2 – Varianten von Turing-Maschinen

# Mehrband Turing-Maschinen



# Mehrband Turing-Maschinen

## Definition 1.7

Sei  $k \in \mathbb{N}, k > 0$ .  $k$ -Band-Turing-Maschinen sind analog zu Turing-Maschinen definiert, besitzen allerdings  $k$  Bänder mit einem Kopf pro Band. Damit gilt für die Transitionsfunktion:

$$\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k \text{ für det. } k\text{-Band-Turing-Maschinen}$$

Bzw.

$$\delta: Q \times \Gamma^k \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k) \text{ für nicht det. } k\text{-Band-Turing-Maschinen}$$

Die Maschine liest in jedem Schritt jedes Band ein, modifiziert die Zellen und bewegt die Köpfe unabhängig voneinander.

In der Initialkonfiguration sind alle Bänder außer dem ersten leer, d.h. gefüllt mit ... □□□□ ...

# Mächtigkeit von Mehr-Band-Turing-Maschinen



# Mächtigkeit von Mehr-Band-Turing-Maschinen



# Bandreduktion

## Lemma 1.8 (Bandreduktion)

Zu jeder  $k$ -Band-Turing-Maschine  $M_k$  gibt es eine Turing-Maschine  $M$ , die  $M_k$  effizient simuliert. Insbesondere gilt  $\mathcal{L}(M_k) = \mathcal{L}(M)$ . Falls  $M_k$  deterministisch ist, dann ist auch  $M$  deterministisch.

Beweisskizze: Tafel.

# Alphabetsreduktion

## Lemma 1.9 (Alphabetsreduktion)

Sei  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \sqcup, q_0, \delta, Q_F)$  eine TM. Es gibt eine Abbildung

$$\text{bin}: \Gamma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$$

und eine TM  $M_{\text{bin}} = (Q', \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, \sqcup, q'_0, \delta', Q'_F)$  mit

$$w \in \mathcal{L}(M) \subseteq \Sigma^* \Leftrightarrow \text{bin}(w) \in \mathcal{L}(M_{\text{bin}}) \subseteq \{0, 1\}^*$$

Wenn  $M$  ein Entscheider ist, dann ist auch  $M_{\text{bin}}$  ein Entscheider.

Beweisskizze: Tafel.

# Einseitig beschränktes Band

## Definition 1.10

Turing-Maschinen mit rechts unendlichem Band sind weitestgehend definiert wie Turing-Maschinen mit beidseitig unendlichem Band, mit folgenden Ausnahmen:

- Das Bandalphabet enthält ein zusätzliches Symbol  $\$ \in \Gamma$ , den (linken) Endmarker, mit  $\$ \notin \Sigma$  und  $\$ \neq \sqcup$ .
- Der Endmarker darf weder nach links überschritten werden, noch darf er überschrieben werden:

$$\forall q \in Q \ \forall q' \in Q : \delta(q, \$) = (q', \$, R)$$

- Die Startkonfiguration bei Eingabe  $w \in \Sigma^*$  ist  $q_0\$w$ , wenn  $q_0$  der Startzustand ist. Der Kopf zeigt also bei der Startkonfiguration auf den Endmarker.

Insbesondere sind die Sprachen von TMs mit rechts unendlichem Band analog definiert wie bei TMs mit beidseitig unendlichem Band.

# Einseitig beschränktes Band

## Lemma 1.11

Zu jeder TM  $M_{\leftrightarrow}$  mit beidseitig unendlichem Band gibt es eine TM  $M$  mit rechts unendlichem Band, die  $M_{\leftrightarrow}$  effizient simuliert. Insbesondere gilt  $\mathcal{L}(M_{\leftrightarrow}) = \mathcal{L}(M)$ .

Beweisskizze: Selbst.

# Nächstes Kapitel

