Capítulo 1: Modelos matemáticos y solución de problemas en ingeniería

Contenido:
- Un modelo matemático simple
- Leyes de conservación e ingeniería

Ejemplo 1.1: Solución analítica del paracaidista que cae

Un paracaidista con una masa de 68.1 kg salta de un globo aerostático fijo. Aplique la ecuación:

$$v(t) = \frac{gm}{c} \cdot \left(1 - e^{-(c/m)t}\right)$$

para calcular la velocidad antes de que se abra el paracaídas. Considere que el coeficiente de resistencia c es 12.5 kg/s

Sustituimos:

$$v(t) = \frac{9.8\ m/s^2 \cdot 68.1\ kg}{12.5\ kg/s} \cdot \left(1 - e^{-(12.5 kg/s / 68.1 kg)t}\right)$$

$$\left(\frac{\frac{m\,kg}{s^2}}{\frac{kg}{s}}\right)$$

$$v(t) = 53.39\ m/s \cdot \left(1 - e^{-0.18355t}\right)$$

sirve para calcular distintos tiempos sustituyendo t.

Tabulando

t (s)	v (m/s)
0	0.00
2	16.40
4	27.77
6	35.64
8	41.10
10	44.87
12	47.49
∞	53.39

Con la tabla, se ve que el paracaidista alcanza una velocidad de 44.87 m/s después de 10 s.

Ejemplo 1.2: Solución numérica al problema del paracaidista que cae

Realice el mismo cálculo que en el ejemplo 1.1 pero usando la ecuación:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m} \cdot v(t_i)\right](t_{i+1} - t_i)$$

para obtener la velocidad. Emplee un tamaño de paso de 2s para el cálculo

Empezando con $t_i = 0$, $v = 0$. Con esta información y los valores de los parámetros, sustituimos para calcular la velocidad en $t_{i+1} = 2s$:

$$v = 0 + \left[9.8 - \frac{12.5}{68.1} \cdot 0\right](2) = 19.60\ m/s$$

Para el siguiente intervalo, se repite el cálculo y se obtiene:

$$v = 19.60 + \left[9.8 - \frac{12.5}{68.1}(19.60)\right](2) = 32.00 \text{ m/s}$$

Se continúa con los cálculos para obtener los valores:

t (s)	v (m/s)
0	0.00
2	19.60
4	32.00
6	39.85
8	44.82
10	47.97
12	49.96
∞	53.39

El método númerico se aproxima bastante a la solución exacta.
Entre menor sea el tamaño de paso, la precisión aumentará

Problemas

1.1 - Aproximadamente, 60% del peso total del cuerpo corresponde a agua. Si se supone que es posible separarla en seis regiones, los porcentajes serían los que siguen. Al plasma corresponde 4.5% del peso corporal y 7.5% del total del agua en el cuerpo. Los tejidos conectivos densos y cartílagos ocupan 4.5% del peso total del cuerpo y 7.5% del total de agua. La linfa intersticial equivale a 12% del peso del cuerpo y 20% del total de agua en éste. El agua inaccesible en los huesos es aproximadamente 7.5% del total de agua corporal y 4.5% del peso del cuerpo. Si el agua intracelular equivale a 33% del peso total del cuerpo y el agua transcelular ocupa 2.5% del total de agua en el cuerpo ¿qué porcentaje del peso total corporal debe corresponder al agua transcelular y qué porcentaje del total de agua del cuerpo debe ser el del agua intracelular?

	Total	Agua sólo
Plasma	4.5%	7.5%
TCD y cartílagos	4.5%	7.5%
Linfa intersticial	12%	20%
Agua inaccesible	4.5%	7.5%
Agua intracelular	33%	y
Agua transcelular	x	2.5%
	60%	100%

$x = 1.5\%$

$y = 55\%$

Aunque también podemos ver que

$$A = \frac{5T}{3} \quad \therefore \quad 55 = \frac{5(33)}{3} \quad y \quad 2.5 = \frac{5(1.5)}{3}$$

agua total

1.2 - Un grupo de 30 estudiantes asiste a clase en un salón que mide 10 m por 8 m por 3 m. Cada estudiante ocupa alrededor de 0.075 m^3 y genera cerca de 80 W de calor (1 W = 1 J/s). Calcule el incremento de la temperatura del aire durante los primeros 15 minutos de la clase, si el salón está sellado y aislado por completo. Suponga que la capacidad calorífica del aire C_v es de 0.718 kJ/(kg K). Suponga que el aire es un gas ideal a 20°C y 101.325 kPa. Obsérvese que el calor absorbido por el aire Q está relacionado con la masa de aire m, la capacidad calorífica y el cambio en la temperatura por medio de la relación siguiente:

$$Q = m\int_{T_1}^{T_2} C_v \, dT = m C_v (T_2 - T_1)$$

La masa del aire se obtiene de la ley del gas ideal:

$$PV = \frac{m}{Mwt} RT$$

donde P es la presión del gas, V es el volumen de éste, Mwt es el peso molecular del gas (para el aire, 28.97 kg/kmol) y R es la constante del gas ideal que es 8.314 kPa m^3/(kmol K)

Sustituyendo la segunda fórmula con los datos:

$$(101.325 \text{ kPa})(240 \text{ m}^3) = \frac{x \text{ kg}}{28.97 \text{ kg/kmol}} \cdot (8.314 \text{ kPa m}^3/(\text{kmol K}))(20°C)$$

$$(101.325 \text{ kPa})(240 \text{ m}^3) = \frac{x \text{ kg}}{\left(28.97 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}\right)} \cdot \left(8.314 \frac{\text{kPa m}^3}{\text{kmol K}}\right) \cdot (293.15 \text{ K})$$

Como la igualdad es dimensionalmente correcta, procedemos omitiendo las unidades:

$$24{,}318 = \frac{x}{28.97} \cdot 2{,}437.2491$$

$$\frac{(24{,}318)(28.97)}{2{,}437.2491} = x \Rightarrow x = 289.0523 \text{ kg}$$

Ahora con la primera ecuación

$$Q = (289.0523 \text{ kg})\left(0.718 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}\right)(T_2 - T_1)$$

Para obtener Q

Todos generan 2,400 W = 2,400 J/s ⇒ esto en un seg

En 15 minutos generan 2,160,000 J y así

$$2{,}160 \text{ kJ} = (289.0523 \text{ kg})\left(0.718 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}\right)(x - 293.15 \text{ K})$$

$$2{,}160 = 207.5396\,(x - 293.15)$$

$$10.40765 = x - 293.15$$

$$x = 303.5577 \text{ K} = 30.4077°C$$

Por tanto, incrementó en unos 10°C aproximadamente

1.3.- Se dispone de la información siguiente de una cuenta bancaria:

Fecha	Depósitos	Retiros	Balance
5/1			1512.33
	220.13	327.26	
6/1			1405.2
	216.80	378.61	
7/1			1243.39
	450.25	106.80	
8/1			1586.84
	127.31	350.61	
9/1			1363.54

Utilice la conservación del efectivo para calcular el balance al 6/1, 7/1, 8/1, 9/1. Demuestre cada pase del cálculo. ¿Este cálculo es de estado estacionario o transitorio?

El cálculo se hace con la fórmula:

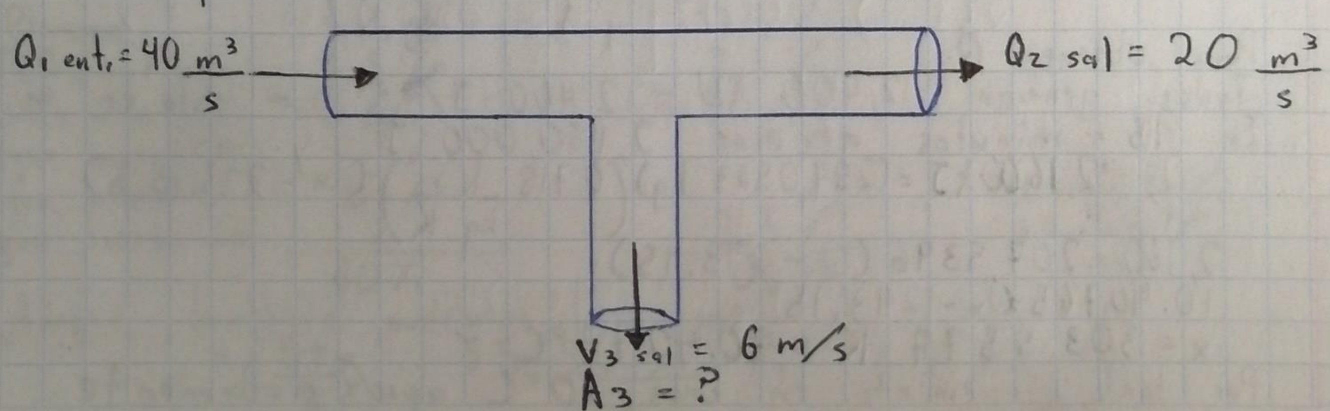
$$B_{t+1} = B_t + (D_t - R_t)$$

Así:

$$B_1 = 1512.33 + (220.13 - 327.26)$$
$$B_1 = 1405.2$$
$$B_2 = 1,405.2 + (216.80 - 378.61)$$
$$B_2 = 1,243.39$$
$$B_3 = 1,243.39 + (450.25 - 106.80)$$
$$B_3 = 1,586.84$$
$$B_4 = 1,586.84 + (127.31 - 350.61)$$
$$B_4 = 1,363.54$$

Es un cálculo transitorio por ser de tipo cambio = incremento - decremento

1.4.- La tasa de flujo volumétrico a través de un tubo está dado por la ecuación $Q = vA$, donde v es la velocidad promedio y A es el área de la sección transversal. Utilice la continuidad volumétrica para resolver cuál es el área requerida en el tubo 3



$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$40\ \frac{m^3}{s} = 20\ \frac{m^3}{s} + x\ \frac{m^3}{s}$$

$$\therefore\ Q_3 = 20\ \frac{m^3}{s}$$

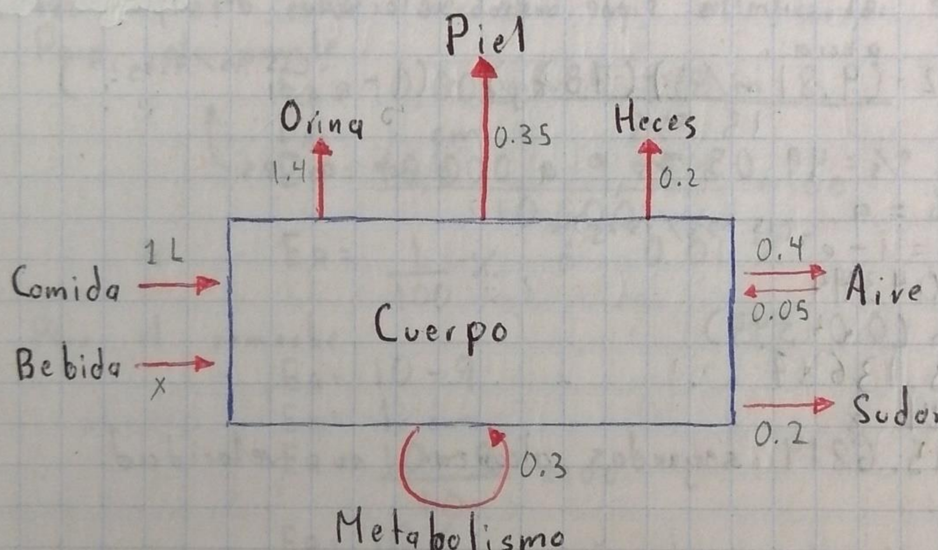
Ahora

$$Q_3 = v_3 A_3$$

$$20\ \frac{m^3}{s} = 6\ \frac{m}{s} \times x\ m^2$$

$$\therefore\ A_3 = \frac{10}{3}\ m^2$$

1.5.- En la siguiente figura se ilustran formas distintas en las que un hombre promedio gana o pierde agua durante el día.



Se ingiere un litro en forma de comida y el cuerpo produce en forma metabólica 0.3 L. Al respirar aire, el intercambio es de 0.05 L al inhalar y 0.4 L al exhalar durante el periodo de un día. El cuerpo también pierde 0.2, 1.4, 0.2 y 0.35 L a través del sudor, la orina, las heces y por la piel respectivamente. Con objeto de mantener la condición de estado estacionario ¿cuánta agua debe tomarse por día?

$$1 + 0.3 + 0.05 + x - (1.4 + 0.35 + 0.2 + 0.4 + 0.2) = 0$$

$$1.35 + x - 2.95 = 0$$

$$1.35 + x = 2.95$$

$$x = 2.95 - 1.35$$

$$\therefore\ x = 1.6$$

Debe tomarse 1.6 L de agua para mantener el estado estacionario.

1.6.- Para el paracaidista en caída libre con arrastre lineal suponga un primer saltador de 70 kg con coeficiente de arrastre de 12 kg/s. Si un segundo saltador tiene un coeficiente de arrastre de 15 kg/s y una masa de 75 kg, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar la misma velocidad que el primero adquiera en 10 s?

Usando la ecuación para el ejemplo 1.1:

$$v(t) = \frac{g\,m}{c} \cdot \left(1 - e^{-(c/m)t}\right)$$

sustituimos

$$v(t) = \frac{(9.81\ m/s^2)(70\ kg)}{12\ kg/s} \cdot \left(1 - e^{-(12\ kg/s / 70\ kg)\,10\,s}\right)$$

$$v(t) = 57.225\ m/s \cdot 0.8199$$

$$v(10) = 46.9192\ m/s$$

Sabemos entonces que el primero tiene una velocidad de aproximadamente 47 m/s, así que ahora:

$$46.9192 = \frac{(9.81\ m/s^2)(75\ kg)}{15\ kg/s} \cdot \left(1 - e^{-(15\ kg/s / 75\ kg)\,x}\right)$$

$$46.9192\ m/s = 49.05\ m/s \cdot a$$

donde a es

$$0.95656 = a$$

$$\rightarrow 0.95656 = 1 - e^{-(15\ kg/s / 75\ kg)\,x}$$

$$e^{-0.2x} = 0.04344$$

$$-0.2x = \ln(0.04344)$$

$$-0.2x = -3.13637$$

$$x = 15.6819$$

$\therefore$ Le tomará 15.6819 segundos alcanzar su velocidad

Capítulo 3: Aproximaciones y errores de redondeo

Contenido:
- Cifras significativas
- Exactitud y precisión
- Definiciones de error
- Errores de redondeo

Ejemplo 3.1: Cálculo de errores

Suponga que se tiene que medir la longitud de un puente y la de un remache y se obtiene 9999 y 9 cm respectivamente. Si los valores verdaderos son 10'000 y 10 cm calcule el error verdadero y el error relativo para cada caso

Para el puente

$$E_A = 10{,}000 - 9{,}999$$
$$E_A = 1 \text{ cm}$$
$$E_R = \frac{10{,}000 - 9{,}999}{10{,}000} \times 100$$
$$E_R = \frac{1}{100}\% \text{ ó } 0.01\%$$

Para el remache

$$E_A = 10 - 9$$
$$E_A = 1 \text{ cm}$$
$$E_R = \frac{10-9}{10} \times 100$$
$$E_R = 10\%$$

Ejemplo 3.2: Estimación del error con métodos iterativos

En matemáticas con frecuencia las funciones se representan mediante series infinitas. Por ejemplo la función exponencial se calcula usando

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Así, cuanto más términos se le agreguen a la serie, la aproximación será cada vez más una mejor estimación del valor verdadero de e^x. La ecuación anterior se le conoce como serie de Maclaurin.

Empezando con el primer término $e^x = 1$ y agregando término por término, estime el valor de $e^{0.5}$. Calcular los errores.

Note que $e^{0.5} = 1.648721$

Términos	Resultado	E. Absoluto	E. Relativo
1	1	0.648	39.3%
2	1.5	0.148	9.02%
3	1.625	0.023	1.44%
4	1.645833	0.0028	0.175%
5	1.648437	0.0028	0.0172%
6	1.648697	0.0028	0.00142%

Ejemplo 3.3: Rango de enteros

Determine el rango de enteros de base 10 que pueda representarse con una computadora de 16 bits

De los 16 bits, el primero es para el signo, así

$$2^{14} + 2^{13} + 2^{12} + 2^{11} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0$$
$$= 2^{15} - 1$$
$$= 32767$$

Representando un negativo adicional (para no hacer redundante el cero) el rango va de -32768 a 32767

Ejemplo 3.8 Evaluación de e^x usando series infinitas

La función exponencial $y = e^x$ está dada por la serie infinita

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Evalúe esta función para $x = 10$ y $x = -10$; esté atento al problema del error de redondeo

Usando el programa para el ejemplo 3.2 encontramos:

$x = 10$	Error relativo
0	99.99%
2	99.72%
4	97.07%
6	86.98%
8	66.71%
10	41.69%
12	20.84%
14	357.63%