数学建模复习

张恒鑫

2018.06.18

1 MATLAB 基础知识

1.1 线性代数在 MATLAB 中的实现

命令	意义
d=eig(A),[v,d]=eig(A)	**特征值和特征向量**
det(A)	**行列式计算**
Inv(A)	矩阵的逆
Orth(A)	正交化
Poly(A)	特征多项式
Rank(A)	**矩阵的秩**
Trace(A)	**矩阵的迹**
Zeros(m,n)	**m 行 n 列零矩阵**
Ones(m,n)	**m 行 n 列全 1 矩阵**
Eye(m,n)	n 阶单位矩阵
Rand(m,n)	m 行 n 列的均匀分布随机数矩阵
Randn(m,n)	m 行 n 列的正态分布随机数矩阵
Rref(A)	**简化矩阵为行最简形形式**
a=linspace(i,j,n)	生成有 n 个元素的行向量，在 i,j 间等分分布
N=length(A)	矩阵 A 的行数和列数的最大值

[m,n]=length(A)	**矩阵 A 的行数和列数**

1.2 微积分在 MATLAB 中的实现

命令	意义
Sym	**创建一个符号变量**
Syms	创建多个符号变量
Eval	**串演算指令**
Simplify	**符号计算中进行简化操作**
Limit(f,x,a)	**求表达式 f 当 x 趋向 a 时的极限**
Diff(A,x,n)	**对以 x 为变量的表达式进行 n 次微分**
Trapz(x,y)	梯形积分法
Z=quad('fun',a,b,tol)	变步长数值积分
r=dblquad('integral',xmin,xmax,ymin,ymax)	二重积分
Int(f)	符号积分
Dsolve('eqn1','eqn2',…,'x')	**求微分方程的解析解**
[t,y]=ode23('F',ts,y0,options)	龙格-库塔公式

1.3 数据插值、你和在 MATLAB 中的实现

命令	意义
Yi=interp1(x,y,xi,method)	**一维插值。nearest 最近插值;linear 线性插值;spline 三次样条插值;cubic 三次插值**
Yy=spline(x,y,xx)	三次样条插值
Zi=interp2(x,y,z,Xi,Yi,’method’)	高维插值
P=polyfit(x,y,n)	**最小二乘法曲线拟合，返回多项式的系数**
[p,s]=polyfit(x,y,n)	p 是多项式系数，s 是预测误差

2 微分方程及差分方程

2.1 基本概念

- ✓ 微分方程建模研究的对象是**连续变量**，差分方程建模研究的对象是**离散对象**；
- ✓ 微分方程中所出现的**未知函数的导数的最高阶数**，称为微分方程的阶。

2.2 解法

1.变量可分离方程

2.一阶线性微分方程

3.伯努利方程

4.常系数齐次线性微分方程

2.3 建模举例

2.3.1 人口预测模型（连续）

1.马尔萨斯(Malthus)人口模型、指数增长模型

设时刻 t 的人口为 N(t)，假设在 t 到 t+Δt 时间段人口增长量为

N(t+Δt)-N(t)=rN(t)Δt

并设 t=t0 时刻的人口为 N0，于是（两边同除Δt）

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

变量分离得到解为

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}$$

2.Logistic 模型、阻滞增长模型

引入常数 Vm(最大人口容量),用来表述自然条件所能容许的最大人口数。并假设增长率等于 $r(1-\dfrac{N(t)}{N_m})$.

那么模型改为

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = r\text{（}1 - \dfrac{N}{N_m}\text{）}N \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}$$

其解为

$$N(t) = \frac{N_m}{1 + \left(\dfrac{N_m}{N} - 1\right)e^{-r(t-t_0)}}$$

2.3.2 蛛网模型（离散）

许多商品的生产销售都是有周期性的，如何建立数学模型来表现和分析市场趋势？

1.模型假设与建立

将市场演变模式划分为若干段，用自然数 n 来表示。

设第 n 个时段商品的数量为 x_n，价格为 y_n。需求函数 $y_n = f(x_n)$,f 是单调减少的。因此差分方程为

$$x_{n+1} = h[f(x_n)], y_{n+1} = f[h(y_n)]$$

2.模型的几何表现与分析（变化规律、趋势和稳定点）

$$(x_n, y_n) = (x_n, f(x_n)), (x_{n+1}, y_n) = (x_{n+1}, g(x_{n+1}))$$

点列 $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_1)$，$p_3(x_2, y_2)$，$p_4(x_3, y_2)\cdots$连接起来，就会形成像蛛网一样的折线，这个图形被成为蛛网模型。

如果点列 $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_1)$，$p_3(x_2, y_2)$，$p_4(x_3, y_2)\cdots$最后收敛与点 p0，则 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$，并且 p0 就是两条曲线的交点，从而是稳定的。

几何上进一步分析：如果曲线 y=f(x)和 y=g(x)在交点 p0 处的切线斜率绝对值记为k_f, k_g，则当 kf<kg 时 p0 是稳定的；当 kf>kg 是 p0 是不稳定的。

2.4 真题

人工繁殖某种细菌，其增长速度和当时的细菌数成正比，已知在 3 个小时的时候，有细菌数 10^4 个，在 5 个小时有 4*10^4 个，请问在开始时有多少细菌。

解：设 t 时刻细菌数为 N(t)，则 dN/dt 表示其增长速度，根据题意有

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

又设 $N（0）= N_0$ 解得

$$N = N_0 e^{kt}$$

带入数据，即可求得。

3 最优化方法

3.1 线性规划

3.1.1 线性规划的基本概念

研究在一组线性约束之下，某个函数的最大值或最小值问题，这类问题被成为线性规划问题。

标准型如下：

$$\text{目标函数} \quad \min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\text{限制条件} s.t. \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le (=,\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \le (=,\ge) b_2 \\ \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \le (=,\ge) b_n \end{cases}$$

- ✓ **定理 1** 线性规划问题的**可行域是凸集**
- ✓ **定理 2** 线性规划问题的**基本可行解对应于可行域的定点**
- ✓ **定理 3** 若可行域有界，一定在可行域的某顶点达到最优；若可行域无解，可能有最优解，也可能无最优解；**若有最优解，必在某顶点**。

可行解（或可行点）：满足所有约束条件的向量 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{x}_n)^{\mathrm{T}}$

可行集（或可行域）：所有的可行解的全体

$$\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\}$$

最优解：在可行域中目标函数值最大（或最小）的可行解，最优解的全体称为最优解集合

$$\boldsymbol{O} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} | \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{D}\}$$

最优值：最优解的目标函数值

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{O}$$

3.1.2 例题（P78）

3.2 非线性规划

3.2.1 基本概念和极值条件

若目标函数或约束条件中包含非线性函数，则称这种规划问题为非线性规划。

令
$$g(x) = (g_1(x),\dots, g_p(x))^T$$
$$h(x) = (h_1(x),\dots, h_p(x))^T,$$

其中，$g: R^n \quad R^p, h: R^n \quad R^q$，那么(MP)可简记为

$$\begin{cases} \min \quad f(x) \\ s.t. \quad g(x) \le 0 \\ \qquad\ h(x) \le 0 \end{cases} \text{或者} \min_{x\in X} f(x)$$

定义 4.1 对于非线性规划(MP)，若 $x^* \in X$，并且有

$$f(x^*) \le f(x), \quad \forall\ x \in \mathrm{X}$$

则称 x^* 是(MP)的整体最优解或整体极小点，称 $f(x^*)$ 是(MP)的整体最优值或整体极小值。如果有

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall\ x \in X, x \ne x^*$$

则称 x^* 是(MP)的严格整体最优解或严格整体极小点，称 $f(x^*)$ 是(MP)的严格整体最优值或严格整体极小值。

3.3 整数规划

3.3.1 基本模型

在某些线性规划问题中，变量只有取整数值才有意义。

一般整数规划：

$$\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{s.t.} \begin{cases} \boldsymbol{Ax \geq b} \\ \boldsymbol{x_i = 0,1; i = 1,2,\ldots,n} \end{cases}$$

混合整数规划：

$$\min c^T x$$

$$s.t. \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ x_i \text{为整数}, i = 1,2,\ldots,p \end{cases}$$

3.3.2 常用求解方法

- **分支定界**：对有约束条件的最优化问题的可行解空间恰当地进行系统搜索。把全部可行解空间反复地分割为越来越小的子集，称为分支；并且对每个子集内的解集计算一个目标下界，这就是定界。在每次分支后，凡是界限不优于已知可行解集目标值的那些子集不再进一步分支。
- 割平面法：
- 隐枚举法
- 匈牙利法
- 蒙特卡罗法

3.3.3 例题

3.4 动态规划

3.4.1 基本概念

动态规划本质上是多阶段决策过程;

1.阶段：

把一个问题的过程，恰当地分为若干个相互联系的阶段，以便于按一定的次序去求解。

描述阶段的变量称为阶段变量。阶段的划分，一般是根据时间和空间的自然特征来进行的，但要便于问题转化为多阶段决策。、

2、状态：

表示每个阶段开始所处的自然状况或客观条件。通常一个阶段有若干个状态，描述过程状态的变量称为状态变量。

3、决策：

表示当过程处于某一阶段的某个状态时，可以作出不同的决定，从而确定下一阶段的状态，这种决定称为决策。

4、策略：

是一个按顺序排列的决策组成的集合。在实际问题中，可供选择的策略有一定的范围，称为允许策略集合。从允许策略集合中找出达到最优效果的策略称为最优策略。

5、状态转移方程：

是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程，描述了状态转移规律。

6、指标函数和最优值函数：

用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标，为指标函数。指标函数的最优值，称为最优值函数。在不同的问题中，指标函数的含义是不同的，它可能是距离、利润、成本、产量或资源消耗等。

3.4.2 例题

3.5 真题

1.（P88）

- ✧ **定理 1（必要条件）**设函数 f(x)定义在 S 属于 R^n 上且可导，x*是 S 的一个内点，若 x*是 f(x)的一个极小点，则梯度为零，满足的点称为稳定点或驻点。

- ✓ **定理 2（充分条件）**设函数 f(x)是定义上的二阶连续可微实函数，x*是 S 的一个内点，若梯度为零且在 x*的海塞矩阵正定，则 f(x)在 x*处取严格极小值。

2.（整数规划、背包问题）

某人出国留学整理行李，现有三个旅行包，容积大小分别为 10L，15L 和 20L。根据需要列出需带物品清单，其中必带物品有 7 件，其体积分别为 4、3、1.5、2.5、4.5、7.6、1.9。尚有 10 件可带可不带的物品，如果不带将在目的地购买，这些物品的体积和价格如下表。建立数学规划模型，以给出合理的安排方案把物品放在三个旅行包。（只写出建模过程以及模型，不要求具体求解）

物品	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
体积	2	3.5	5	4.3	3.2	1.2	7	4.2	2.5	1
价格	15	45	100	70	50	75	200	90	20	30

4 回归分析

4.1 线性回归分析

4.1.1 基本概念和前提条件

简单线性回归：只包含两个有“依存关系”的变量，一个变量（反应变量）随另一个变量（解释变量）的变化而变化，且呈直线变化趋势；当涉及多个自变量时称为多重线性回归。

前提条件：

1. 线性：X 依次增加或减少一个单位，Y 的平均改变量保持不变。（dY=c）
2. 独立性：任意两观察值相互独立
3. 正态性：给定 X，Y 的取值服从正态分布
4. 等方差性：对应不同 X 值，Y 值的总体变异相同

4.1.2 简单线性回归模型

总体线性回归方程一般表达式为：

$$\mu_{Y|X} = \alpha + \beta X$$

α 为回归直线在 Y 轴上的**截距**，统计学意义为 X=0 时所估计出 Y 的平均水平；β 为在**总体回归系数**，即**直线斜率**。

样本线性回归方程：

$$\hat{Y} = a + bX$$

简单线性回归方程：

$$Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$$

其中 $\varepsilon \sim N(0,\sigma^2)$,并称 $Y-\hat{Y}$为残差

4.1.3 最小二乘估计

找一条直线，使得实测点至该直线的纵向距离（残差$Y-\hat{Y}$）的平方和最小，此平方和称为残差平方和，记为$SS_{残差}$

$$b=\frac{\sum(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})}{\sum(X-\overline{X})^2}, a=\overline{Y}-b\overline{X}$$

4.1.4 回归系数的假设检验

①检验回归模型是否成立（方差分析）②检验总体回归系数β是否为零（t 分布）

1）总变异的分解：

$$v_{总}=n-1, v_{回归}=1, v_{残差}=n-2$$

$SS_{总}=\sum(Y-\overline{Y})^2$

$SS_{残差}=\sum(Y-\hat{Y})^2$

$SS_{回归}=\sum(\hat{Y}-\overline{Y})^2$，回归平方和越大，回归效果越好

2）回归模型的假设检验(F 检验)

$$F=\frac{SS_{回归}/v_{回归}}{SS_{残差}/v_{残差}}=\frac{MS_{回归}}{MS_{残差}}$$

3）回归系数的假设检验(t 统计量)

$$H_0:\beta=0; H_1:\beta\neq 0; \alpha=0.05$$
$$t=\frac{b-0}{S_b}, v=n-2$$
$$S_b=\frac{S_{Y,X}}{\sum(X-\overline{X})^2}$$
$$S_{Y,X}=\sqrt{\frac{SS_{残差}}{n-2}}$$

在简单线性回归模型中，$t=\sqrt{F}$

4)总体回归系数的区间估计

$$b \pm t_{\alpha/2,v} S_b$$

5)决定系数

$$R^2=\frac{SS_{回归}}{SS_{总}}$$

6）预测个体的容许区间

$$\hat{Y} \pm t_{\alpha/2,n-2} S_Y$$

$$S_Y=S_{Y,\ X}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sum(X-\overline{X})^2}}$$

7）预测均数的置信区间

$$\hat{Y} \pm t_{\alpha/2,n-2} S_{\hat{Y}}$$

$$S_{\hat{Y}}=S_{Y,\ X}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(X_i-\overline{X})^2}{\sum(X-\overline{X})^2}}$$

4.1.5 多重线性回归与相关分析

1.多种线性回归模型

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\ldots+\beta_k x_{ki}+\varepsilon_i$$

2.多种线性回归方程

$$\hat{y}=b_0+b_1 x_1+b_2 x_2+\ldots+b_k x_k$$

3.数据标准化

$$X_i^{*}=\frac{X_i-\overline{X}_i}{S_i}$$

4.标准化偏回归系数

指消除了因变量 y 和自变量 x1，x2，…xn 所取单位的影响之后的回归系数，其绝对值的大小直接反映了 xi 对 y 的影响程度。

4.2 二分类 logistic 回归模型

4.3 真题

（1）线性回归分析的前提条件是什么？

（2）在多重线性回归分析中，当自变量存在较强的相关性时，发现多重共线性现象，如何判断和处理多重共线性？

5 模糊数学

1965 年，美国控制论专家（考）**<u>扎德 Zadeh(LotfiA． Zadeh)教授</u>**在 InformationandControl 杂志上发表了题为 FuzzySets 的论文，提出用“隶属函数”来描述现象差异的中间过渡，从而突破了经典集合论中属于或不属于的绝对关系。Zadeh 教授这一开创性的工作，标志着数学的一个新分支——模糊数学的诞生。

5.1 模糊集的基本概念

5.1.1 模糊子集和隶属函数

设 U 是论域，称映射

$$A(x)：U\rightarrow[0,1]$$

确定了一个 U 上的模糊子集 A，映射 A(x)称为 A 的隶属函数，它表示 x 对 A 隶属程度.（隶属函数求的是论域元素的隶属度）

使 A(x)=0.5 的点 x 称为 A 的过渡点，此点最具模糊性.当映射 A(x)只取 0 或 1 时，模糊子集 A 就是经典子集。

模糊集合 A 可以表示为：

$$A=\frac{\mu A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu A(x_2)}{x_2}+\ldots\ldots+\frac{\mu A(x_n)}{x_n}$$

5.1.2 隶属函数的确定方法（写三种）

- ✓ **模糊统计方法**
- ✓ **三分法**
- ✓ **德尔菲法（专家评分法）**
- ✓ **指派方法**
- ✓ 其他方法

5.2 模糊矩阵及运算性质

5.2.1 模糊矩阵

设 R=(r_{ij})m×n，若 0≤ r_{ij} ≤1，则称 R 为模糊矩阵.当 r_{ij} 只取 0 或 1 时，称 R

为布尔(Boole)矩阵.当模糊方阵 R=(r_{ij})n×n 的对角线上的元素 r_{ij} 都为 1 时，称 R 为模糊自反矩阵.

5.2.2 模糊矩阵间的关系及并、交、余运算

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$都是模糊矩阵，定义

相等：$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$;

包含：$A\leq B \Leftrightarrow a_{ij}\leq b_{ij}$;

并：$A\cup B=(a_{ij}\vee b_{ij})_{m\times n}$;

交：$A\cap B=(a_{ij}\wedge b_{ij})_{m\times n}$;

余：$A^{c}=(1-a_{ij})_{m\times n}$.

例 3（P292）

例3 设$A=\begin{pmatrix}0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$，则

$$A\cup B=\begin{pmatrix}0.2 & 0.3\\ 0.3 & 0.2\end{pmatrix}, A\cap B=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.2 & 0.1\end{pmatrix}, A^{c}=\begin{pmatrix}0.9 & 0.7\\ 0.8 & 0.9\end{pmatrix}$$

5.2.3 模糊矩阵的合成(考)

设$A=(a_{ik})_{m\times s}$，$B=(b_{kj})_{s\times n}$，称模糊矩阵

$$A\circ B=(c_{ij})_{m\times n},$$

为A与B的合成，其中$c_{ij}=\vee\{(a_{ik}\wedge b_{kj})\mid 1\le k\le s\}$.

例 4（P293）

设$A=\begin{pmatrix}0.4 & 0.7 & 0\\ 1 & 0.8 & 0.5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0.7\\ 0.4 & 0.6\\ 0 & 0.3\end{pmatrix}$,则

$$A\circ B=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6\\ 1 & 0.7\end{pmatrix}, B\circ A=\begin{pmatrix}0.7 & 0.7 & 0.5\\ 0.6 & 0.6 & 0.5\\ 0.3 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$$

5.2.4 模糊矩阵的λ-截矩阵（考）

设$A=(a_{ij})_{m\times n}$,对任意的$\lambda\in[0,1]$，称

$A_\lambda=(a_{ij}^{(\lambda)})_{m\times n}$,为模糊矩阵$A$的$\lambda$-截矩阵，其中

当$a_{ij}\geq\lambda$时，$a_{ij}^{(\lambda)}=1$;

当$a_{ij}<\lambda$时，$a_{ij}^{(\lambda)}=0$.

显然，A的λ-截矩阵为布尔矩阵.

例（P294）

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0.2 & 0\\0.5 & 1 & 0.1 & 0.3\\0.2 & 0.1 & 1 & 0.8\\0 & 0.3 & 0.8 & 1\end{pmatrix},\quad A_{0.3}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

5.3 模糊综合评价模型

（1）首先要求出模糊评价矩阵 P，其中 P_{ij} 表示方案 X 在第 i 个目标处于第 j 级评语的隶属度，当对多个目标进行综合评价时，还要对各个目标分别加权，设第 i 个目标权系数为 W_i，则可得权系数向量：

$$A=(W_1, W_2, \ldots, W_n)$$

（2）综合评判

利用矩阵的模糊乘法得到综合模糊评价向量B
$B=A\odot P$（其中 $\odot$ 为模糊乘法），根据运算 $\odot$ 的不同定义，可得到不同的模型

模型1 M（∧，∨）——主因素决定型

$$b_j=\max\{(a_i\wedge p_{ij})\,|\,1\le i\le n\}(j=1,2,\cdots,n)$$

模型2 M（·，∨）——主因素突出型`

$$b_j=\max\{(a_i\cdot p_{ij})1\le i\le n\}(j=1,2,\cdots,m)$$

模型3 M（·，+）——加权平均型

$$b_j=\sum(a_i\cdot p_{ij})(j=1,2\cdots m)$$

例1：对某品牌电视机进行综合模糊评价

- 设评价指标集合：

  U = {图像，声音，价格}；

- 评语集合：

  V = {很好，较好，一般，不好}；

首先对图像进行评价:

假设有30%的人认为很好，50%的人认为较好，20%的人认为一般，没有人认为不好，这样得到图像的评价结果为

（0.3, 0.5, 0.2 , 0)

同样对声音有：（0.4, 0.3, 0.2 , 0.1)

对价格为：（0.1, 0.1, 0.3 , 0.5)

所以有模糊评价矩阵:

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

设三个指标的权系数向量:

A = {图像评价，声音评价，价格评价}

= （0.5, 0.3, 0.2)

应用模型1，$b_j = \max\{(a_i \wedge r_{ij})$有综合评价结果为:

$B = A \odot P$

= （0.3, 0.5, 0.2, 0.2)

归一化，得：（即将每分量除以分量总和）

C = （0.25, 0.42, 0.17, 0.17)

所以综合而言，电视机还是比较好的比重大。

5.4 模糊聚类分析

模糊聚类的基本步骤（课本P300）：

第一步：确定分类对象，标定相关的数据，数据标准化。（P300~301）

第二步：根据原始矩阵建立与其相应的模糊相似矩阵。（P301~303）

第三步：在模糊相似关系的基础上建立模糊等价关系，并进行聚类。（P303~305）

例3：环境单位的分类模型（课本P305）

1. 问题的提出

已知环境质量的好坏是通过空气、水分、土壤、植被四个方面来反映的。现假设有 5 个单位的环境质量数据如下：

$$X=\{I,II,III,IV,V\}$$

其中，$I=(5,5,3,2)$，$II=(2,3,4,5)$，$III=(5,5,2,3)$，$IV=(1,5,3,1)$，$V=(2,4,5,1)$。请你根据这 5 个单位的环境质量，对这五个地方进行分类。

2. 利用模糊聚类方法建立环境单位的分类模型

为了解决本问题，课本给出了三种不同的方法，即等价闭包法、最大树法和编网法。

这里只介绍利用“等价闭包法”

首先取 $c=0.1$，用绝对值减数法（P303 第 1 行）来建立模糊相似矩阵 $R=\left(r_{ij}\right)_{5\times 5}$，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 1-0.1\cdot\sum\limits_{k=1}^{4}\left|x_{ik}-x_{jk}\right|, & i\neq j.\end{cases}\qquad (i,j=1,2,3,4,5)$$

用绝对值减数法得到的模糊相似矩阵如下:

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 0.8 & 0.5 & 0.3\\ 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.4\\ 0.8 & 0.1 & 1 & 0.3 & 0.1\\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 1 & 0.6\\ 0.3 & 0.4 & 0.1 & 0.6 & 1\end{bmatrix}$$

下面利用平方法来求传递闭包（模糊等价矩阵）$t(R)$:

（理论依据见课本 P297 定理 5 以及最后一段）

$$R^2=\begin{bmatrix}1 & 0.3 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\ 0.3 & 1 & 0.2 & 0.4 & 0.4\\ 0.8 & 0.2 & 1 & 0.5 & 0.3\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6\\ 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow R^4=\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4\\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R^8=\begin{bmatrix}1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4\\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1\end{bmatrix}$$

这说明，$t(R)=R^4$。

$0.6<\alpha\le 0.8$: $t(R)_\alpha=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & 0 & 0\\ & & 1 & 0 & 0\\ & & & 1 & 0\\ & & & & 1\end{bmatrix}$

此时，X 分为 4 类：$\{I,III\}$，$\{II\}$，$\{IV\}$，$\{V\}$。

$0.5<\alpha\le 0.6$: $t(R)_\alpha=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & 0 & 0\\ & & 1 & 0 & 0\\ & & & 1 & 1\\ & & & & 1\end{bmatrix}$

此时，X 分为 3 类：$\{I,III\}$，$\{II\}$，$\{IV,V\}$。

λ 值	分类数	聚类结果
$0.8<\alpha\le 1$	5	$\{I\}$，$\{II\}$，$\{III\}$，$\{IV\}$，$\{V\}$
$0.6<\alpha\le 0.8$	4	$\{I,III\}$，$\{II\}$，$\{IV\}$，$\{V\}$
$0.5<\alpha\le 0.6$	3	$\{I,III\}$，$\{II\}$，$\{IV,V\}$
$0.4<\alpha\le 0.5$	2	$\{I,III,IV,V\}$，$\{II\}$
$0<\alpha\le 0.4$	1	$\{I,II,III,IV,V\}$

5.4 真题

设论域 $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$，且 U 上的模糊集合 A 和 B 分别为

$$A = \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.3}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.2}{x_4}, B = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{1}{x_4}$$

求出 $A \cup B$，$A \quad B$，A^C

6 神经网络

人工神经元网络，简称神经网络，是一种旨在模仿人脑结构及其功能的信息处理系统，是由大量的人工神经元按照一定的拓扑结构广泛互连形成的，并按照一定的学习规则，通过对大量样本数据的学习和训练，把网络掌握的人工神经元网络，简称神经网络，是一种旨在模仿人脑结构及其功能的信息处理系统，是由大量的人工神经元按照一定的拓扑结构广泛互连形成的，并按照一定的学习规则，通过对大量样本数据的学习和训练，把网络掌握的“知识”以神经元之间的连接权值和阈值的形式储存下来，利用这些以神经元之间的连接权值和阈值的形式储存下来，利用这些“知识”可以实现某种人脑功能的推理机。

6.1 神经网络三要素（考）

（1）构成神经网络的基本单元——**神经元**；

（2）神经元之间的连接方式——神经网络的**拓扑结构**

（3）用于神经网络学习和训练，修正神经元之间的连接权值和阈值的用于神经网络学习和训练，修正神经元之间的连接权值和阈值的**学习规则**。

常用的转移函数有：

（1）阈值函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

（2）线性函数

$$f(x)=kx$$

（3）对数Sigmoid函数

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

（4）对数Sigmoid函数

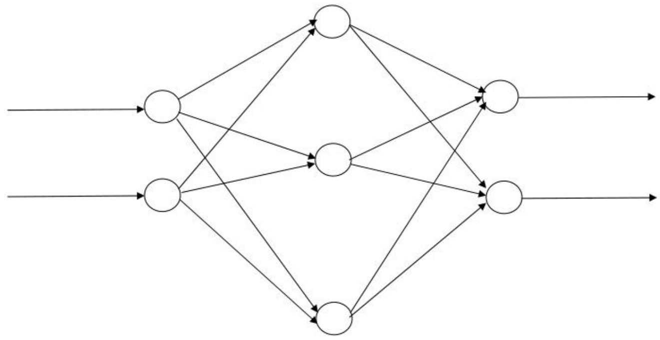
$$f(x)=\tanh(x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

（5）高斯函数

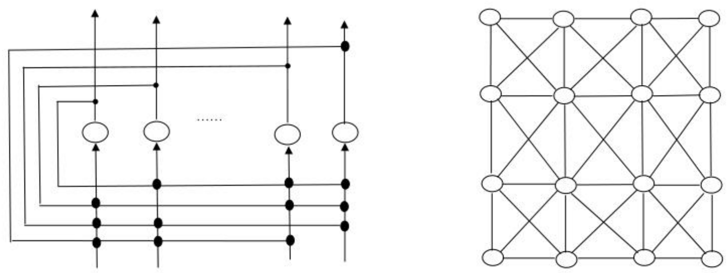
$$f(x)=e^{-x^2/\delta^2}$$

6.2 拓扑结构（考）

（1）层次型拓扑结构



（2）互连型拓扑结构



6.3 学习规则（考）

- ✓ 有导师学习（有监督学习）
- ✓ 无导师学习（无监督学习）
- ✓ 死记式学习

6.4 常用神经网络

一种是基于误差反传算法的前馈神经网络，即 BP 神经网络，主要用来实现非线性映射；(有监督学习)

另一种是自组织神经网络，例如，主要用来实现非线性映射；另一种是自组织神经网络，例如自组织特征映射（SOM）主要用来聚类和模式识别。（无监督学习）

真题：论述 BP 神经网络和 SOM 神经网络的主要功能和应用领域。

7 图论

7.1 真题

1.具有 n 个顶点的有向图至少应有 <u>n</u> 条边才能确保是强连通图。

2.某个城市有 V1,V2，V3 和 V4 共 4 个区，如图所示，现在要在该城建一个消防站为 4 个区服务，问应设在那个区使得 4 个区离消防站之和最近。

7.2 定义和术语

无向图

路径：在无向图 G=(V,{E})中由顶点 v 至 v‘’的顶点序列。

回路或环：第一个顶点和最后一个顶点相同的路径。

简单回路或简单环：除第一个顶点和最后一个顶点之外，其余顶点不重复出现的回路。

连通：顶点 v 至 v‘’之间有路径存在

连通图：无向图图 G 的任意两点之间都是连通的，则称 G 是连通图。

连通分量：极大连通子图

有向图

路径：在有向图 G=(V,{E})中由顶点 v 经有向边至 v‘’的顶点序列。

回路或环：第一个顶点和最后一个顶点相同的路径。

简单回路或简单环：除第一个顶点和最后一个顶点之外，其余顶点不重复出现的回路。

连通：顶点 v 至 v‘’之间有路径存在

强连通图：有向图图 G 的任意两点之间都是连通的，则称 G 是强连通图。

强连通分量：极大连通子图

生成树：极小连通子图。包含图的所有 n 个结点，但只含图的 n-1 条边。在生成树中添 加一条边之后，必定会形成回路或环，但是含有 n-1 条边的图不一定是生成树

完全 图：有 n(n-1)/2 条边的无向图。其中 n 是结点个数。

有向完全图：有 n(n-1) 条边的有向图。其中 n 是结点个数。

边的权值，边有权的图称之为网络。

邻接点：边用顶点的无序偶对（vi, vj）来表示，称顶点 vi 和顶点 vj 互为邻接

点

稠密图、稀疏图。若一个图接近完全图，称为稠密图；称边数很少的图为稀疏图

无向图结点的度:指依附于某顶点 v 的边数 记为 TD (v)

有向图结点的出度和入度 :顶点 v 的入度是指以顶点 为终点的弧的数目。记为 ID (v)

n 个顶点的图中顶点度和边的关系：

$$\boxed{2e = \sum_{i=1}^{n} TD(v_i)}$$

7.3 最短路径算法

7.3.1 Dijkstra 算法

按距 u 从近到远为顺序，依次求得 u0 到图 G 的各顶点的最短路和距离，直至顶点 v(或直至图 G 的所有顶点)。

步骤①:把结点集 V 分割为二子集 S,T.开始时 S={a},T=V-S.

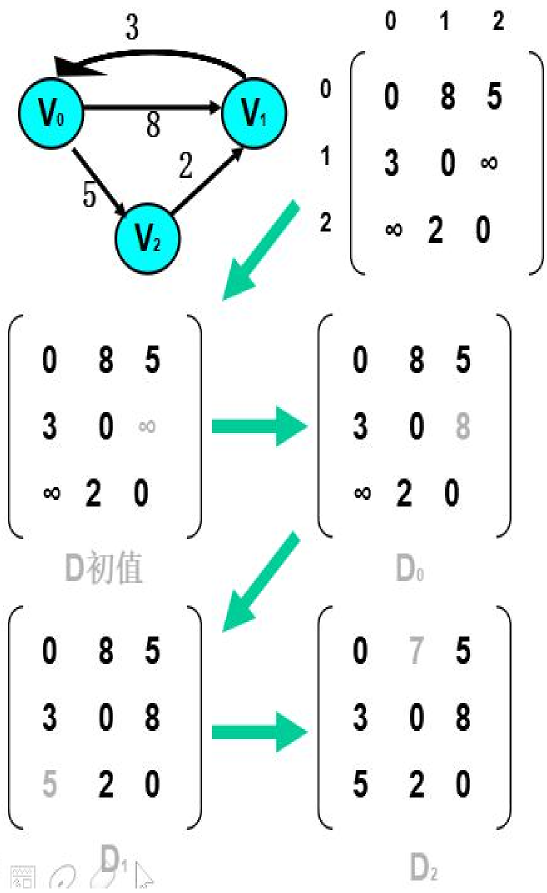
步骤②:对每结点 t 属于 T,求出 D(t)之后再定出 x 属于 T 使得 D(x)= min{D(x)|t 属于 T}.

步骤③:置 S 为 S∪{x}置 T 为T-{x}.若 T=空集 则停止,否则转步骤②作下一次循环.

7.3.2 Floyed 算法

2、每一对顶点之间的最短路径：Floyd 算法

- 实例及求解过程:



Floyd 算法的求解过程

设 C 为 n 行 n 列的代价矩阵，c[i, j] 为 i ---> j 的权值。如果 i=j ；那么 c[i, j] = 0。如果 i 和 j 之间无有向边；则 c[i, j] = ∞

1、使用 n 行 n 列的矩阵 D 用于计算最短路径。

初始时，D[i, j] = c[i, j]

2、进行 n 次迭代

在进行第 k 次迭代时，我们将使用如下的公式：

$$D_k[i,j] = MIN \begin{cases} D_{k-1}[i,j] \\ d_{k-1}[i,k] + d_{k-1}[k,j] \end{cases}$$

注意：第 k 次迭代时，针对结点 k 进行。原 d_{k-1} 矩阵的第 k 行，第 k 列保持不变。左上至右下的对角线元素也不变。

请看实例: 注意：k = 0 ~ (n-1)。如在由 D初值得到D_0时，原D初值的第0行，第0列不变，仍反应在D_0中。

7.4 例题

中心问题：有些公共服务设施（例如一些紧急服务型设施如急救中心、消防战等）的选址，要求网络中最远的被服务点距离服务设施的距离尽可能小。例如：某城市要建立一个消防站，为该市所属的七个区服务，如下图所示。问应设在那个区，才能使它至最远区的路径最短。

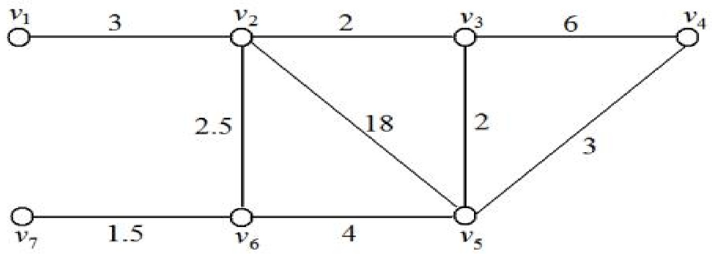


图6.3

解：(1) 用 Floyd 算法求出距离矩阵 $D=(d_{ij})_{v\times v}$：

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 10 & 7 & 5.5 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 7 & 4 & 2.5 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 2 & 4.5 & 6 \\ 10 & 7 & 5 & 0 & 3 & 7 & 8.5 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 0 & 4 & 5.5 \\ 5.5 & 2.5 & 4.5 & 7 & 4 & 0 & 1.5 \\ 7 & 4 & 6 & 8.5 & 5.5 & 1.5 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 计算在各点 v_i 设立服务设施的最大服务距离 $S(v_i)$

$$S(v_i)=\max_{1\le j\le v}\{d_{ij}\},\quad i=1, 2, \dots, v$$

有：$S(v_1)=10$，$S(v_2)=7$，$S(v_3)=6$，$S(v_4)=8.5$，$S(v_5)=7$，$S(v_6)=7$，$S(v_7)=8.5$。

(3) 求出顶点 v_k，使 $S(v_k)=\min_{1\le i\le v}\{S(v_i)\}$，则 v_k 就是要求的建立消防站的地点。因为 $S(v_3)=6$ 最小，故应将消防站设在 v_3 处。此点称为图的**中心点**。

8 层次分析法

运用层次分析法构造系统模型时，大体可以分为以下四个步骤：

1. 建立层次结构模型
2. 构造判断(成对比较)矩阵
3. 层次单排序及其一致性检验
4. 层次总排序及其一致性检验

8.1 建立层次结构模型

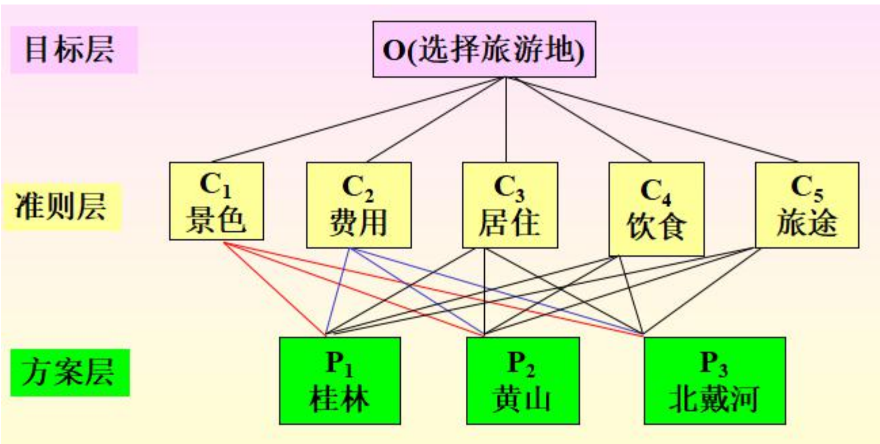
将决策的目标、考虑的因素（决策准则）和决策对象按它们之间的相互关系分为最高层、中间层和最低层，绘出层次结构图。

最高层：决策的目的、要解决的问题。

最低层：决策时的备选方案。

中间层：考虑的因素、决策的准则。

对于相邻的两层，称高层为目标层，低层为因素层。



8.2 构造判断(成对比较)矩阵

判断矩阵元素a_{ij}的标度方法

标度	含义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2，4，6，8	上述两相邻判断的中值
倒数	因素i与j比较的判断a_{ij}，则因素j与i比较的判断$a_{ji}=1/a_{ij}$

设要比较各准则$C_1,C_2,\ldots,C_n$对目标O的重要性

$$C_i:C_j \Rightarrow a_{ij} \qquad A=(a_{ij})_{n\times n},\ a_{ij}>0,\ a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$$

选择旅游地

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} & A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A~成对比较阵

*A*是正互反阵

稍加分析就发现上述成对比较矩阵有问题

要由*A*确定$C_1,\ldots,C_n$对O的权向量

满足

$$a_{ij}\cdot a_{jk}=a_{ik},\quad i,j,k=1,2,\quad ,n$$

的正互反阵 *A* 称**一致阵。**

一致阵性质:

1.A 的秩为 1，A 的唯一非零特征根为 n

2.非零特征根 n 所对应的特征向量归一化后可作为权向量

$$Aw=nw$$

对于不一致(但在允许范围内)的成对比较阵 A， Saaty 等人建议用对应于最大特征根 的特征向量作为权向量 w ，即

$$Aw = \lambda w$$

8.3 层次单排序及其一致性检验

定理：

1.n 阶一致阵的唯一非零特征根为 n

2.n 阶正互反阵 A 的最大特征根 >=n, 当且仅当 =n 时 A 为一致阵

定义一致性指标:

$$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1}$$

CI=0，有完全的一致性

CI 接近于 0，有满意的一致性

CI 越大，不一致越严重

随机一致性指标 RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

定义一致性比率 ：

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

一般，当一致性比率 CR<0.1，不一致程度在容许范围之内。

例：

"选择旅游地"中准则层对目标的权向量及一致性检验

准则层对目标的成对比较阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最大特征根 $\lambda=5.073$

权向量(特征向量) $w=(0.263,0.475,0.055,0.090,0.110)^T$

一致性指标 $CI=\dfrac{5.073-5}{5-1}=0.018$

随机一致性指标 $RI=1.12$ (查表)

一致性比率 $CR=0.018/1.12=0.016<0.1$

通过一致性检验

正互反阵最大特征根和特征向量的简化计算：

简化计算的思路——一致阵的任一列向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。

和法——取列向量的算术平均

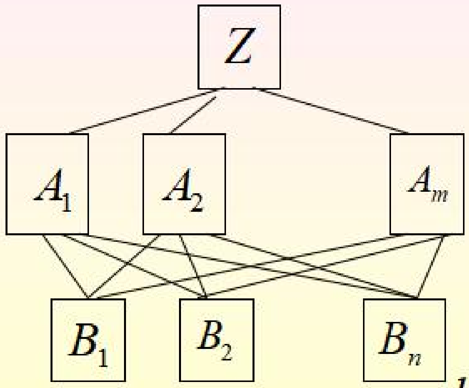
例 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{列向量归一化}}$ $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.615 & 0.545 \\ 0.3 & 0.308 & 0.364 \\ 0.1 & 0.077 & 0.091 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{求行和归一化}}$ $\begin{bmatrix} 0.587 \\ 0.324 \\ 0.089 \end{bmatrix}=w$

$Aw=\begin{bmatrix} 1.769 \\ 0.974 \\ 0.268 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{Aw=\lambda w}$ $\lambda=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1.769}{0.587}+\dfrac{0.974}{0.324}+\dfrac{0.268}{0.089}\right)=3.009$

精确结果：$w=(0.588,0.322,0.090)^T$, $\lambda=3.010$

8.4 层次总排序及其一致性检验

计算某一层次所有因素对于最高层(总目标)相对重要性的权值，称为层次总排序。这一过程是从最高层次到最低层次依次进行的。



A层m个因素$A_1, A_2, \quad , A_m$，对总目标Z的排序为 $a_1, a_2, \quad , a_m$

B层n个因素对上层A中因素为A_j的层次单排序为

$b_{1j}, b_{2j}, \quad , b_{nj} \quad (j = 1,2, \quad , m)$

B 层的层次总排序为：

即 B 层第 i 个因素对总目标的权值为：$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{ij}$

$B_1 : a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + \quad a_m b_{1m}$

$B_2 : a_1 b_{21} + a_2 b_{22} + \quad a_m b_{2m}$

$B_n : a_1 b_{n1} + a_2 b_{n2} + \quad a_m b_{nm}$

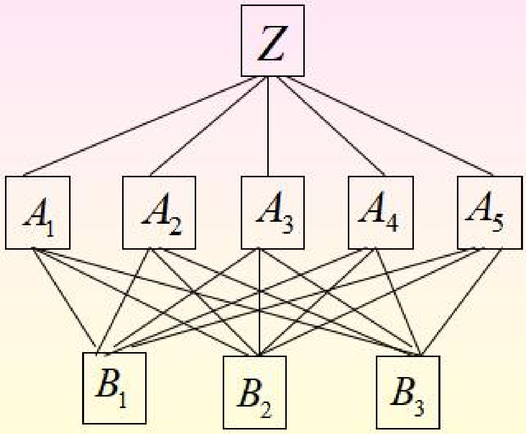
A / B	A_1, a_1	A_2, a_2	A_m, a_m	B层的层次总排序
B_1	b_{11}	b_{12}	b_{1m}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{1j} = b_1$
B_2	b_{21}	b_{22}	b_{2m}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{2j} = b_2$
B_n	b_{n1}	b_{n2}	b_{nm}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{nj} = b_n$

$$CR = \frac{a_1 CI_1 + a_2 CI_2 + \quad + a_m CI_m}{a_1 RI_1 + a_2 RI_2 + \quad + a_m RI_m}$$

8.5 例题

旅游问题

(1)建模



A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 分别分别表示景色、费用、居住、饮食、旅途。

B_1, B_2, B_3 分别表示苏杭、北戴河、桂林。

（2）构造成对比较矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad B_4=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_5=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)计算层次单排序的权向量和一致性检验

成对比较矩阵 A 的最大特征值 $\lambda = 5.073$

该特征值对应的归一化特征向量

$$\omega = \{0.263,\ 0.475,\ 0.055,\ 0.099,\ 0.110\}$$

则 $$CI = \frac{5.073-5}{5-1} = 0.018$$

$$RI = 1.12$$

故 $$CR = \frac{0.018}{1.12} = 0.016 < 0.1$$

表明 A 通过了一致性验证。

对成对比较矩阵 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 可以求层次总排序的权向量并进行一致性检验，结果如下：

k	1	2	3	4	5
ω_{k1}	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166
ω_{k2}	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166
ω_{k3}	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0
RI_k	0.58	0.58	0.58	0.58	0.58

计算 CR_k 可知 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 通过一致性检验。

（4）计算层次总排序权值和一致性检验

B_1 对总目标的权值为：

$$0.595\times0.263+0.082\times0.475+0.429\times0.055$$
$$+0.633\times0.099+0.166\times0.110=0.3$$

同理得，B_2,B_3 对总目标的权值分别为：0.246，0.456，

决策层对总目标的权向量为：$\{0.3,\ 0.246,\ 0.456\}$

又 $$CR=(0.263\times0.003+0.475\times0.001$$
$$+0.055\times0+0.099\times0.005+0.110\times0)$$
$$/0.58=0.015<0.1$$

故，层次总排序通过一致性检验。

$\{0.3,\ 0.246,\ 0.456\}$ 可作为最后的决策依据。

即各方案的权重排序为 $B_3>B_1>B_2$

又 B_1,B_2,B_3 分别表示苏杭、北戴河、桂林

故最后的决策应为去**桂林**。

8.6 真题

建立了如下的准则层对目标层 O 的成对比较矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1/2 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

（1）已知矩阵 A 的最大特征值对应的归一化的特征向量为：

$$W\text{（}0.223,0.0.648,0.122\text{）}$$

判断 A 的一致性是否可以接受（已知 RI=0。58）

（2）已知方案层 C1，C2,C3 对准则层 B1,B2,B3 的权向量分别为(0.105,0.258,0.637),(0.592,0.333,0.075),(0.149,0.066,0.785),据此计算选择何种方案.