# 重庆大学 2013 年暑期第一次模拟竞赛题

A 题:基于 CLSPSO 算法的嘉陵江(重庆段)梯级联合优化调度

					相关学科成绩						
					高	线	概	数	数	英	英
姓名	学院	年级专业	学号	联系电话	等	性	率	学	学	语	语
					数	代	统	模	实	四	六
				学	数	计	型	验	级	级	
杨阳	动力工程	2011核工程 与核技术	2011****	186*****	96	94	78	100	95	480	/
刘蛰	自动化	自动化	2011****	151******	89	83	69	100	95	/	/
熊莹	机械工程	2011机自	2011****	185*****	90	91	88	100	90	507	/

# 基于 CLSPSO 算法的嘉陵江(重庆段)梯级联合优化调度

## 摘要

嘉陵江(重庆段)梯级水利枢纽工程是一个典型的串并联混合型梯级水电系统,其中已建成投产的水电站有涪江渭沱航电枢纽工程、涪江富金坝航电枢纽工程、嘉陵江草街航电枢纽工程;在建的水电站有嘉陵江利泽航运枢纽工程、嘉陵江井口航电枢纽工程等。各水电站的水力、电力关系密切交织在一起,对其中任何一个电站的调度都不是一个孤立的过程,必将影响到另一个电站,同时由于嘉陵江梯级发电、防洪、航运、生态等调度目标间相互冲突、难以协调,因而其联合调度具有必然性、客观性、复杂性和矛盾性的特点。本文就是以此为背景提出的。

问题一:本文以总发电量最大为目标函数建立梯级水电站群联合优化调度模型,并采用混沌粒子群混合优化算法(CLSPSO)对模型进行求解。首先使用 CAD 做出各梯级水电站连接关系图,并将已知数据信息转换为图像信息进行直观分析。嘉陵江各梯级水电站流量数据分析表明:嘉陵江流域平、枯水期时间为 11 月~次年 4 月,丰水期为 5 月~10 月;渠江水量对草街水电站的影响不可忽略。由各水电站出力计算具有相似性,对单个水电站运用流体力学知识进行分析,推导出单个水电站出力计算公式。然后由水电站出力与发电量之间的关系得到梯级水电站以总发电量为目标函数的联合优化调度模型。运用优化理论和系统工程方法,结合径流预报,使用 Maple 对复杂的约束条件进行处理(见附录)。运用 matlab 软件编程对模型进行求解,得到最大年发电

量  $E_{total} = 2149036034.0207 KW \cdot h$ ,再根据出力与年发电量的关系,求解各水电站的出力。最后同实际发电量进行比较来检验模型的正确性。

问题二,在问题一梯级水电站联合优化调度模型的基础上对各已知参数进行修改并运用 CLSPS0 算法进行求解,得出在考虑富金坝和在利泽上游修建大型枢纽工程后梯级水电站的年发电量及各水电站的出力调度,最后与问题一所得解进行比较,定量分析,得出各因素对联合调度的影响。

问题二,同样在问题一梯级水电站优化调度模型的基础上对各已知参数进行修改并运用 CLSPS0 算法进行求解,得出在提高正常蓄水位和水轮机功率后梯级水电站的年发电量及各水电站的出力调度,最后与问题一所得解进行比较,定量分析,得出各因素对联合调度的影响。

本文的主要特点在于,采用 CLSPSO 优化搜索算法,对梯级水电站联合优化调度模型进行求解,其算法简单,参数较少,优化性能好。另外,本文所建立的模型简单,易于程序实现。

关键字: 联合优化调度模型 CLSPSO 算法 matlab 软件 CAD 软件 Maple 软件

# 目录

摘要	<u> </u>	1
<b>—</b> .	问题的重述	3
Ξ.	模型假设及符号说明	3
2.	1 模型的假设	3
2.	2 符号说明	4
Ξ.	问题分析	4
3.	1 数据处理与分析	4
3.	2 具体问题分析	7
四.	模型的建立和求解	8
4.	1 问题一模型的建立及求解	8
	4.1.1 模型的准备	8
	4.1.2 嘉陵江(重庆段)梯级水电站联合优化调度模型的建立	13
	4. 1. 3 基于 CLSPSO 的算法实现	13
4.	1.4 问题一模型的求解	15
4.	2 问题二的求解	19
4.	3 问题三的求解	22
五.	结果分析与检验	25
六.	模型的优缺点	26
6.	1 模型的优点	26
6.	2 模型的缺点	26
参考	·文献	26
附录		26
1.	1 梯级水电站水位~库容多项式拟合函数	26
	2 对草街一年的流量时间序列小波分析函数	
1.	3 草街与罗渡溪流量时间序列函数	29
1.	5 利泽、渭沱、草街、罗渡溪流量数据可视化	42
1.	6 嘉陵江流域梯级水库群水位~库容关系	44

## 一. 问题的重述

一座独立的水库运行,无论是防洪、用水,还是发电,只要在控制风险的前提下,必定要获取最大的效益。但当一座水库的运行对上、下游的水库产生影响时,这就要考虑怎样获取整体的最大效益。而且,随着我国人口的增长和经济社会发展以及城市化、工业化进程的加快,对水的需求进一步提高,水的供需矛盾和水环境问题愈发突出,水库由于具有调蓄功能,因此在水资源的优化配置中发挥着重要的作用。

随着水资源的不断开发利用,往往在一条河流上或一个流域内建成一批水库,形成了一个水库群。从保障流域可持续发展和维护河流健康出发,需要建立兴利、减灾与生态协调统一的水库综合调度运用方式,这些水库调度运用要纳入到全流域的统一调配,从而实现流域水资源的优化配置。原有的单库分散调度的方式在进行防洪和兴利调度的同时,没有考虑其对水库群以及整个流域的影响,不利于流域内水利综合效益的发挥。水库群的形成,改变了原来单库或少库的水力条件,各水库之间存在相互影响,这就需要站在全流域的高度,采取联合调度的方式,开展水库群优化调度,让它们在保证安全的基础上发挥最大的"群体"效益。

请根据重庆市已建成投产的水电站: 涪江渭沱航电枢纽工程、涪江富金坝航电枢纽工程、嘉陵江草街航电枢纽工程; 以及在建的水电站: 嘉陵江利泽航运枢纽工程、嘉陵江井口航电枢纽工程等。综合考虑水资源利用,运用优化理论、现代控制论和系统工程方法,结合径流预报,在站内优化调度的基础上实施嘉陵江(重庆段)水库(发电)联合优化调度,将草街枢纽及嘉陵江上下游梯级电站纳入统一优化调度,根据来水水情和负荷情况,考虑航运用水要求,优化协调各级枢纽电站问的负荷分配,合理化控制水位,尽可能使流域电站在最优流量区运行,有效解决不同来水条件下的航运和发电等问题,最大限度节约一次能源,优化航运和发电效益。

- 1. 综合考虑各种约束条件,以总出力最大为目标函数建立井口、草街、渭沱、 利泽航电枢纽工程联合优化调度模型,设计并实现你的算法,参考附件数据 计算最大出力和年发电量,并同实际发电量进行比较。
- 2. 利用模型定量分析富金坝和在利泽上游修建大型枢纽工程对联合调度的影响。
- 3. 利用模型定量分析提高正常蓄水位和水轮机功率对联合调度的影响。

## 二. 模型假设及符号说明

#### 2.1 模型的假设

- (1) 假设嘉陵江流域的各梯级水电站的供电系统正常供应;
- (2) 假设每个电站发电机的效率是个定值;
- (3) 假设水电站计算期的时间段长为一个月:
- (4) 假设嘉陵江流域各梯级水电站的发电策略符合规律;
- (5) 假设各梯级水电站水轮机均正常工作,未出现机器故障。

## 2.2 符号说明

符号	说明	单位
$N_t$	在t 时间段内电站出力	KW
$N_t^i$	第 <i>i</i> 个电站在 <i>t</i> 时间段出力	KW
$E_{total}$	梯级水电站在时段总发电量	K•VA
$S_t^i$	i 电站在t时间段的弃水量	KW
$oldsymbol{\eta_t^i}$	i电站的综合效率系数	
η	电站的综合效率系数	
ρ	江水密度	$kg/m^3$
g	重力加速度	$m/s^2$
$q_t^i$	i 电站在t时段的发电引用流量	$m^3/s$
$z_t^i$	i水库在t时段内的水面标高	m
$h_t^i$	i水库在t时段上下游水面高度差	m
$V_t^i$	i 水库在t 时段内的库容	$m^3$
$I_t^i$	i水库在t时段内的入库流量	$m^3/s$
$Q_t^i$	i水库在t时段内的下泄流量	$m^3/s$

# 三. 问题分析

## 3.1 数据处理与分析

## (1) 梯级水电站总体流量关系分析

井口、草街、渭沱、利泽航电枢纽构成嘉陵江(重庆段)梯级水电站群。其中,嘉陵江流域梯级水电站结构如图1所示。可知,该嘉陵江流域梯级水电站是串并联混合式水电站,各水电站之间存在极强的水力、电力联系。在此,从水电站流量图分析各水电站间的水力联系。

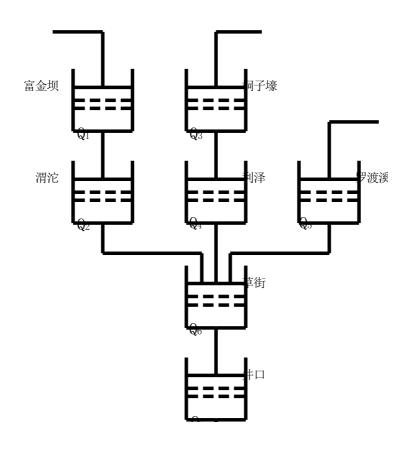


图 1 梯级水电站连接关系图

将利泽、渭沱、草街、罗渡溪流量原始Excel数据导入Matlab工作空间,分别取月平均量与日平均量,作出各水电站流量时间曲线图(见附录1.5)。由各梯级水电站流量图可知:

利泽水库11月~次年4月是平、枯水期;5月~10月为丰水期; 渭沱水库10月~次年5月是平、枯水期:6月~9月为丰水期:

草街水库11月~次年4月是平、枯水期;5月~10月为丰水期;

罗渡溪(二)站水库12月~次年5月是平、枯水期;6月~11月为丰水期。

由于嘉陵江流域各梯级水电站之间存在相互影响,在建立模型时可将平、枯水期时间视为11月~次年4月,丰水期为5月~10月。

## (2) 草街与罗渡溪流量关系分析

罗渡溪水电站不在重庆市管辖范围内,在进行梯级水电站联合调度时,罗渡溪水电站的流量情况对草街水电站的流量是否有影响,将关系到嘉陵江流域梯级水电站合理化优化调度的实现;并且草街与罗渡溪流量数据较详尽,有利于对嘉陵江流域(重庆段)丰水期降水量的大小以及降水频率进行分析,为各水电站来水预报提供参考,对水电站调度进行指导。因此有必要对草街与罗渡溪流量关系进行分析。为清晰直观得到罗渡溪水电站与草街水电站流量关系,将两水电站日平均流量在同一图中画出,如图2所示。同时做出草街水电站流量与罗渡溪水电站流量差图,如图3所示。

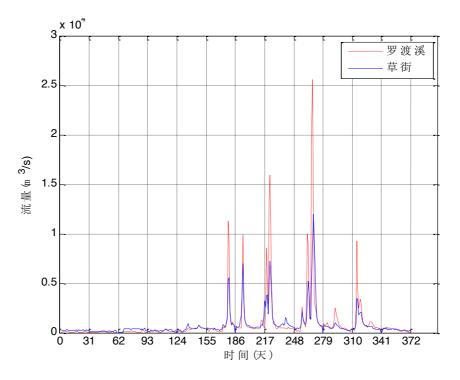


图 2 草街与罗渡溪流量(日平均)比较图

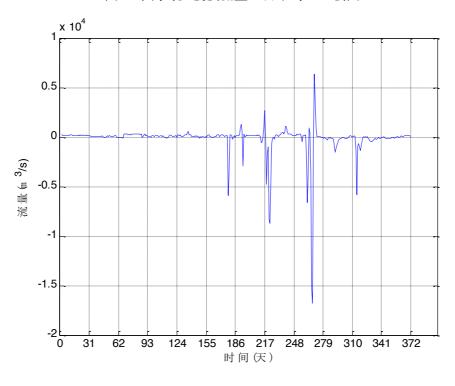


图 3 草街与罗渡溪流量(日平均)差图

从图2中可以直观看出,位于嘉陵江流域下游的草街水库日平均流量与上游渠江罗渡溪水库日平均流量变化步调一致,6月~11月常出现大降雨,使得两水库日平均流量频繁增大。图6为草街流量与罗渡溪流量日平均差,流量为负表示罗渡溪向草街放水,草街水库蓄水。罗渡溪向草街放水,一定程度上使得草街水库水量增大。所以在考虑优化模型的约束条件时,渠江水量对草街水电站的影响不可忽略。

#### (3) 草街流量时间序列小波分析

对草街一年的流量时间序列进行小波分析,可实现对草街流量时间序列的多尺度分析。图4(a)为草街一年流量的原始时间序列; (b)画出最剧烈波动,得到流量突然波动最大(最大的洪峰)发生的时间; (c)画出较为平缓的波动,大体能够反映洪峰时间序列整体的波动特性; (d)画出对时间序列的近似,反映了流量时间序列的整体走势。

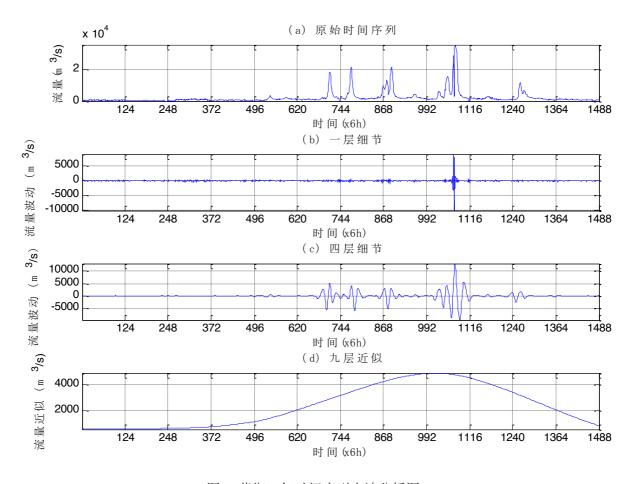


图 4 草街一年时间序列小波分析图

据图(4)b可知,草街最大洪峰发生时间为9月中旬,且洪峰时间段很短,停机泄流的时间在一年的时间里可忽略不计,由停机引起的弃水电量可忽略不计;由c图四层细节分析知,6~10月嘉陵江流域大降水量出现频繁,流量时间序列的近似整体走势也体现了这点。这对梯级联合调度长期最优控制各水库航运与发电效益具有指导意义。

### 3.2 具体问题分析

对于问题一, 梯级水库联合调度目的是追求总体而非单个机组或水库的效益最大,这里就涉及到来水预报,下泄流量和机组组合以及发电流量选择等问题,是一个复杂的动态连续最优控制问题<sup>[1]</sup>。在满足市场、电网负荷需求及水电系统约束和上下游防洪安全等各种约束条件的前提下,可建立以总发电量最大为目标函数的梯级水电站群联合优化调度模型。考虑到各水电站出力计算具有相似性,可先对单个水电站运用流体力学知识进行分析,推导出单个水电站出力计算公式,然后由水电站出力与发电量之间的关系得到梯级水电站以总发电量为目标函数的联合优化调度模型,运用优化

理论和系统工程方法,结合径流预报,对模型进行求解,得到最大年发电量,再根据出力与年发电量的关系,求解各水电站的出力。最后同实际发电量进行比较来检验模型的正确性。

对于问题二与问题三,只需要在问题一优化调度模型的基础上对各已知参数进行修改并运用 CLSPSO 算法进行求解,得出在考虑富金坝和在利泽上游修建大型枢纽工程后梯级水电站的年发电量及各水电站的出力调度,以及在提高正常蓄水位和水轮机功率后梯级水电站的年发电量及各水电站的出力调度,最后与问题一所得解进行比较,定量分析,得出各因素对联合调度的影响。

## 四. 模型的建立和求解

#### 4.1 问题一模型的建立及求解

#### 4.1.1 模型的准备

#### (1) 水位~库容

根据嘉陵江流域梯级水库群水位~库容关系(见附录 1.6),利用多项式曲线拟合得到井口、草街、渭沱、利泽水电站水位~库容函数关系式,并作出各水电站的水位~库容查表函数图,方便在已知库容的情况下,快速查找对应的水位。由于渭沱水电站为径流式水电站,无水库调节能力,其水位~库容曲线为线性曲线。井口、草街和利泽都具有水库调节能力,其水位~库容曲线为非线性曲线,通过比较,发现三次多项式拟合的误差小,在工程计算可接受范围内。

依据表 1 数据资料利用多项式拟合得井口水电站水位~库容查表函数图如下:

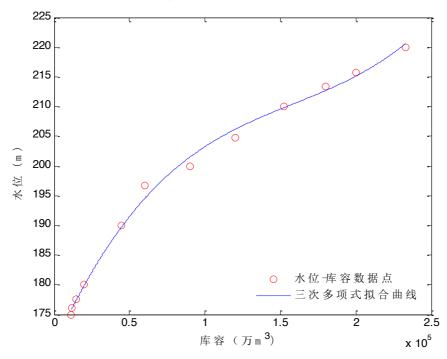


图 5 井口水库水位~库容三次多项式拟合曲线图

井口水电站水位~库容多项式拟合函数关系式:

 $Z_1 = 169.6579477 + 5.667546634 \times 10^{-4} V_1 - 2.928489463 \times 10^{-9} V_1^2 + 6.152201767 \times 10^{-15} V_1^3$ 

依据表 2 数据资料利用多项式拟合得草街水电站水位~库容查表函数图如下:

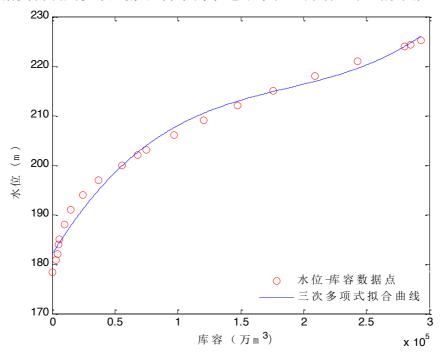


图 6 草街水库水位~库容三次多项式拟合曲线图

草街水电站水位~库容多项式拟合函数关系式:

 $Z_2 = 181.9231930 + 4.154782216 \times 10^{-4} V_2 - 1.890378906 \times 10^{-9} V_2^2 + 3.362104880 \times 10^{-15} V_2^3$  依据表 3 数据资料利用多项式拟合得渭沱水电站水位~库容查表函数图如下:

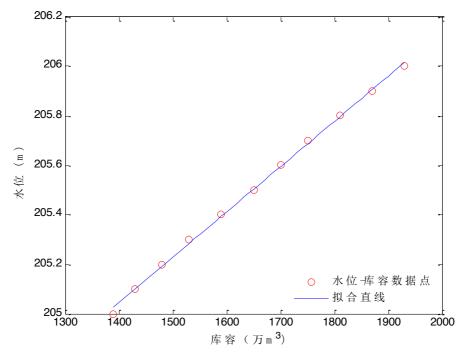


图 7 渭沱水库水位~库容多项式拟合曲线图

渭沱水电站水位~库容多项式拟合函数关系式:

$$Z_3 = 202.482859 + 1.830587452 \times 10^{-3} V_3$$

依据表 4 数据资料利用多项式拟合得利泽水电站水位~库容查表函数图如下:

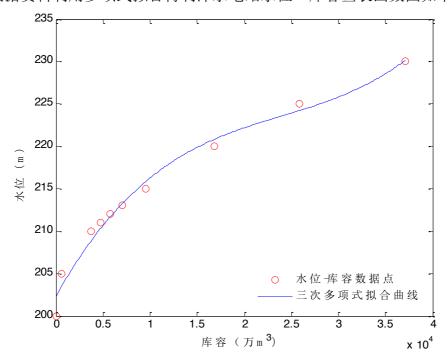


图 8 利泽水库水位~库容三次多项式拟合曲线图

利泽水电站水位~库容多项式拟合函数关系式:

 $Z_4 = 202.3282902 + 1.988639984 \times 10^{-3} V_4 - 6.896937851 \times 10^{-8} V_4^2 + 9.590483711 \times 10^{-13} V_4^3 + 10^{-13} V_4^2 + 10^{-13} V_4^2$ 

#### (2) 单个水电站的出力计算公式推导

梯级水电站是各水电站的组合,总出力由各单个水电站出力共同决定,各单个水电站在计算出力时具有相似性。可对单个水电站运用流体力学知识分析推导出其出力计算公式。其中,单个水电站沿水流方向的纵截面简图如图 9 所示。

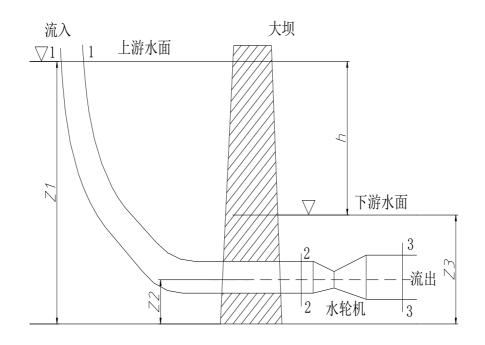


图 9 水电站纵截面简图

三个过水断面: 1-1 截面 2-2 截面 3-3 截面

上游水面标高:  $Z_1$ 

下游水面标高:  $Z_3$ 

水轮机中心线标高: Z,

对 1-1 断面与 2-2 断面由伯努利方程有:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + h_w$$

式中, $\frac{P_1}{\rho g}$ 为压力水头,即单位重量流体的压强势能

 $\frac{v_1^2}{2g}$ 为动水头,即单位重量流体所具有的的动能

 $z_1$ 为位置水头,即单位重量( $\rho g$ )流体所具有的的重力势能

 $h_{w}$ 为水头损失,即单位重量流体流过各管道、管件、阀门等损失的总能量此处可理想化考虑,忽略水头损失,上游入口流速为0,且上游入口压强为大气压强。上式可写作:

$$\frac{P_a}{\rho g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2$$

对 2-2 断面与 3-3 断面由伯努利方程有:

$$\frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 = \frac{P_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} + z_2 + H_t$$

此处认为水轮机入口与出口中心线标高相同。其中, $H_{\iota}$ 为水轮机从单位流体吸收的能量。由该式可得到水轮机工作水头:

$$H_{t} = \left(\frac{P_{2}}{\rho g} + \frac{v_{2}^{2}}{2g} + Z_{2}\right) - \left(\frac{P_{3}}{\rho g} + \frac{v_{3}^{2}}{2g} + Z_{2}\right)$$

3-3 断面与下游水面满足伯努利方程:

$$\frac{P_3}{\rho g} = \frac{P_a}{\rho g} + (z_3 - z_2)$$
 (3)

联立方程①②③化简方程组可得:

$$z_1 - z_3 = H_t + \frac{v_3^2}{2g}$$

质量守恒方程:  $\beta \rho v_3 A_3 = q_m$ , 由于水近似可认为是不可压缩流体  $\rho = const$ , 可得:

$$\beta v_3 A_3 = \frac{q_m}{\rho} = q_v \tag{4}$$

其中, $q_m$ 为质量流量, $q_v$ 为体积流量。对于同一截面流量修正系数  $\beta=const$ 。同样存在动能修正系数  $\alpha$  ,使得  $z_1-z_3=H_t+\alpha\frac{v_3^2}{2g}$ ,但由于工业管中多数为湍流,断面上流速分布均匀  $\alpha\approx 1$  。且有水位差  $z_1-z_3=h$ ,可得:

$$h = H_t + \frac{V_3^2}{2g} \tag{5}$$

联立方程4 ⑤ 得水轮机工作水头:

$$H_t = h - const \ q_v^2$$

已知出力计算公式为:  $N_t = \rho g \eta H_t q_v$ , 则可推导出该单个水电站的出力计算公式为:

$$N_t = \rho g \eta \left( h - const \ q_v^2 \right) q_v$$

其中 $const = \frac{1}{2g\beta^2 A_3^2}$ ,在工况发生微小变化时,const 可以认为是定值。 $\eta$ 为水电站的

综合效率系数

#### 4.1.2 嘉陵江(重庆段)梯级水电站联合优化调度模型的建立

在确定预报来水的情况下,由发电量与出力的关系建立梯级水电站以发电量最大为目标的联合优化调度模型。嘉陵江(重庆段)梯级电站优化调度目标函数采用如下形式表示:

目标函数: 
$$\max \quad \mathbf{E}_{total} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{M} \rho g \eta^{i} \left( h_{t}^{i} - const \ q_{t}^{i} \right) q_{t}^{i} \tau_{i}$$

$$N_t^i = 9.81 \eta^i \left( h_t^i - const \ q_t^i \right) q_t^i$$

其中,i表示第i个电站,t表示第t时段,M为流域梯级水电站个数,T为调度时段总数, $E_{total}$  表示梯级总发电量, $h_{\iota}^{i}$ 为i水库在t时段上下游水面高度差, $q_{\iota}^{i}$ 为i电站在t时段的发电引用流量 , $\tau^{i}$ 为t时段长度  $\eta_{\iota}^{i}$ 为第i电站综合效率系数。

约束条件主要考虑以下几种约束:

水量平衡约束:  $V_t^i = V_{t-1}^i + (\mathbf{I}_t^i - q_t^i)\tau - \mathbf{S}_t^i$ 

电站出力约束:  $N_{\min}^{i} \leq N_{t}^{i} \leq N_{\max}^{i}$ 

水库库水位约束:  $z_{\min}^i < z_t^i < z_{\max}^i, V_{\min}^i < V_t^i < V_{\max}^i$ 

水库水头约束:  $H_{\min}^{i} \leq H_{t}^{i} \leq H_{\max}^{i}$ 

发电流量约束:  $q_t^i \leq Q_t^i$ 

边界条件约束:  $z_0^i = z_{begin}^i$ ,  $z_{365}^i = z_{end}^i$ 

#### 4.1.3 基于 CLSPSO 的算法实现

(1) 混沌粒子群混合优化算法 (CLSPSO) 是在对标准的 PSO 算法改进的基础上,将混沌理论引进粒子群算法中,利用混沌的伪随机性、对初始值的敏感和遍历性来引导粒子搜索的遍历性,是一种非常有效的优化算法。其迭代过程见文献[2],其算法的迭代步骤如图 10。

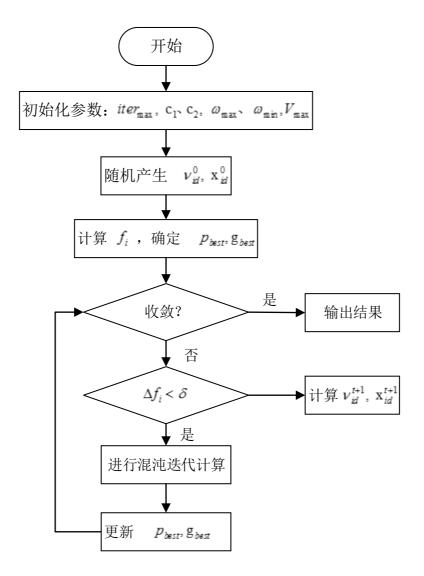


图 10 混沌粒子群算法迭代步骤

其中,假设搜索空间是D 维的,搜索空间有 i个微粒,每个微粒的位置表示一个潜在的解, $V_{id}$ 、 $x_{id}$  分别为第i个微粒在其d 维( $1 \le d \le D$ )的速度和位置, $p_{\max}$ 、 $g_{\max}$  分别为个体极值和全局极值。  $\omega$  为惯性因子;  $c_1$ 、 $c_2$ 为学习因子; $V_{\max}$  为粒子飞行的最大速度, $iter_{\max}$  为最大迭代步数, $f_i$  表示每个粒子的适应度。

## (2) 约束的处理

采用CLSPSO算法求解该调度模型时,由于梯级上下游之间水力因素的相互影响以及流量、出力等约束条件的限制,使得粒子在初始化和更新过程中,难以保证水位过程线满足所有的约束条件,容易产生大量的不可行解,影响算法的收敛性能。而要获得满足所有约束条件的可行个体,需要以花费大量的计算时间和计算资源为代价。因此,针对这一问题,本节提出构造水位约束廊道和罚函数相结合的形式处理复杂的约束条件。

由能量转换公式和水量平衡方程可知电站出力和下泄流量是库水位的隐函数。因此,结合时段流量和出力约束,在不确定调度期末水位情况下,从起调水位开始正向递

推,得到时段末的水位上限  $Z_{t,up}^i$  (下限  $Z_{t,down}^i$ ),并以此水位递推得到下一时段水位的上限  $Z_{t,up+1}^i$  (下限  $Z_{t,down+1}^i$ ),直到调度期末,形成水位约束正向朗道  $[RZ_{t,down}^i,RZ_{t,up}^i]$ , t=[1,T]:同时,在不确定起调水位情况下,从调度期末水位反向递推,得到时段初的水位上限  $Z_{t,up}^i$  下限( $Z_{t,down}^i$ ),并以此水位递推得到前一时段水位的上限  $Z_{t,up+1}^i$  (下限  $Z_{t,down+1}^i$ ),直到起调时刻,形成水位约束反向朗道  $[RZ_{t,down}^i,RZ_{t,up}^i]$ , t=[0,T-1]。然后对正反向廊道取交集,形成库水位约束廊道  $[RZ_{t,down}^i,RZ_{t,up}^i]$ , t=[0,L,T],从而确定各时段库水位变化最大可行范围。

$$Z_{t,up}^{i} = \begin{cases} \min(PZ_{t,up}^{i}, RZ_{t,up}^{i}), t = [1, T - 1] \\ Z_{begin}^{i}, t = 0 \\ Z_{end}^{i}, t = T \end{cases}$$

$$Z_{t,down}^{i} = \begin{cases} \max(PZ_{t,down}^{i}, RZ_{t,down}^{i}), t = [1, T - 1] \\ Z_{begin}^{i}, t = 0 \\ Z_{end}^{i}, t = T \end{cases}$$

在水位约束廊道内进行初始化和寻优操作,缩小了个体在解空间的搜索范围,提高了算法的收敛速度。然而,并不是约束廊道范围内生成的所有解都是可行的。因此,进一步采用罚函数方法进行处理,处理原则为:当生成的解不满足出力或流量约束条件时,分别将模型的两个目标值  $f_1$ 和  $f_2$ 减去一个极大数  $F_{punish}$ ,确保生成的解为劣解,不被选入精英集中。n是违反约束个数,  $|\Delta R_j|$  是违反约束j个约束的大小的绝对值

$$F_{punish} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \Delta R_{j} \right| + n \right) \times 10^{8}$$

#### 4.1.4 问题一模型的求解

由于问题维数比较高,故粒子数目选择 200 个 N,个体学习因子 c1 取得是 1,群体学习因子取得也是 1, 自变量搜索范围就选的库容的变化范围, 最大迭代次数为 500次,其实到 300次就已经较好的收敛了,惩罚系数 r 为10<sup>8</sup> 这里的权重是变化权重按下列公式这样选取:

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_{start} - (\omega_{start} - \omega_{end})(\frac{k}{T_{max}})^2$$

 $\omega$ 为权重,起始权重,终止权重, $T_{\max}$  最大迭代次数 k当前迭代次数。 $M_{\max}$ 为最大混沌搜索迭代次数选择为 100 次下图为迭代收敛过程:

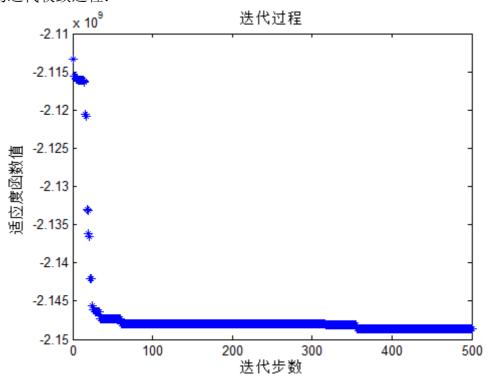


图 11 迭代函数图

其中 Elapsed time is 73.420506 seconds.即:程序运行了一圈 500 步,花了 73.420506 秒。通过比较发现 500 步和 1000 步的结果差不多,估计应该是全局最优。

四个水电站的年发电量为:  $E_{total} = 2148667234.7011$ 

以库容为决策变量,得到最优调度方案如下表:

表 1 各电站库容最优调度方案

渭沱 (m³)	利泽 (m³)	草街 (m³)	井口 (m³)
19300000	49220000	746670000	120950000
19300000	49220000	683330000	149520000
13900000	57730000	746670000	149520000
13900000	57730000	746670000	120950000
13900000	49220000	746670000	120950000
13900000	57730000	746670000	120950000
19300000	57730000	746670000	120950000
19300000	49220000	746670000	120950000
13900000	57730000	746670000	149520000
13900000	49220000	746670000	120950000
19300000	49220000	746670000	149520000
13900000	49220000	683330000	120950000

各水电站时段库容变化曲线及来水量与弃水量曲线如下:

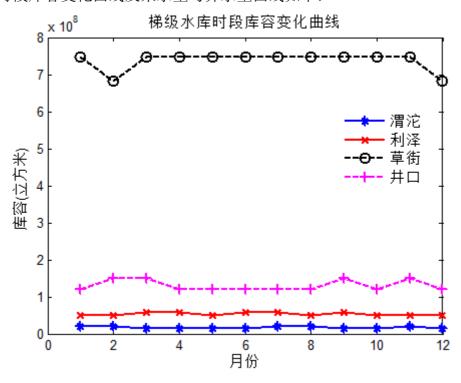


图 12 梯级水库时段库容变化曲线

由图 12 可见,草街处于汇流的地段,来水量充足,库容曲线变化较小;井口位于草街下游,受草街水库影响,在 4~8 月库容基本不变化,渭沱、利泽各月库容都有明显变化。

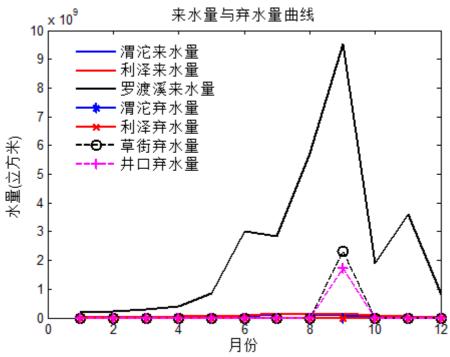


图 13 来水量与其水量曲线图

小电站可能弃水量太小,以至于被计算机舍入,但是图上还是能看出细微差别的。 12月~次年4月为枯水季,各水电站基本不弃水。到了5月以后各电站都有弃水。6 月份到10月份间,渭沱利泽有一定的弃水,草街和井口在来水量最多的9月份有集中的弃水。

各电站月出力:

表 2 各电站月出力

渭沱(MW)	利泽 (MW)	草街(MW)	井口 (MW)
0.0425325230127	0.4728007783399	15.9505108592378	4.5804067870085
0.0756298187577	0.3365447292199	18.4137465729352	5.6455613070555
0.0444932729873	0.2204078822340	16.4306335846192	5.3059050069678
0.0516249611259	0.6972205691228	30.0896030902976	8.1910438063778
0.1003373678073	1.1973253015293	66.0882020397799	16.8265732449417
0.1409328340366	1.4622101199934	205.241868840147	49.4134742308967
0.6343562838147	3.1159841764169	206.045744553614	49.5793980435168
0.6225753893840	2.4074746073821	356.341936034388	68.9866115322698
0.3189898892318	2.9176433401730	382.650522790805	82.1581840206949
0.1468713709721	1.6763664853483	138.441204326852	34.9778234207382
0.1105500554297	0.7662278183252	224.802876998568	67.9392923040775
0.1229206256526	0.5150117782876	59.9020087858666	16.4670705408402

## 各月发电量变化曲线如下:

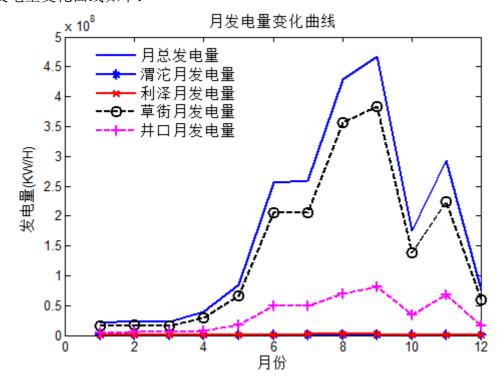


图 14 各电站月发电量图

分析图 14 并结合图 12、13 知,库容基本没变,都是正常水位,即保持在高水头运行状态。渭沱、利泽月发电量很少,井口、草街月发电量相对很大。

## 4.2 问题二的求解

假定渭沱电站库容上限被提高了 10%,其他参数不变,结果分析如下:解的迭代收敛过程如下图所示:

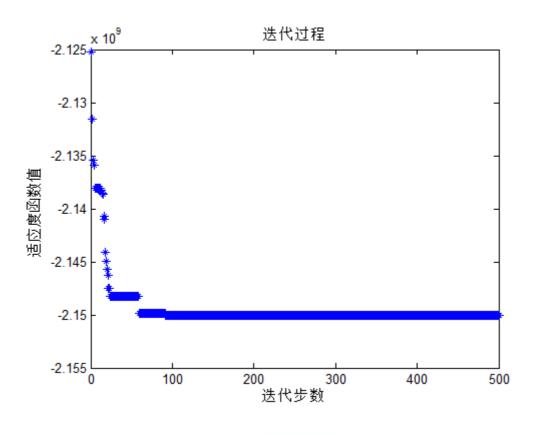


图 15 迭代收敛图

其中, Elapsed time is 247.667838 seconds.即程序运行了一圈 500 步, 花了 247.667838 秒。

四个水电电站的年发电量:  $E_{total} = 2150089557.311$ , 与问题一的结果比较年发电量增大了 1422322.609899998KW·h,提高了 0.066%。

以库容为约束的最优调度方案如下表所示:

表 3 各电站库容最优调度方案

渭沱 (m³)	利泽 (m³)	草街 (m³)	井口 (m³)
19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	149520000

19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	120950000
19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	49220000	683330000	149520000

各水电站时段库容变化曲线及来水量与弃水量曲线如下:

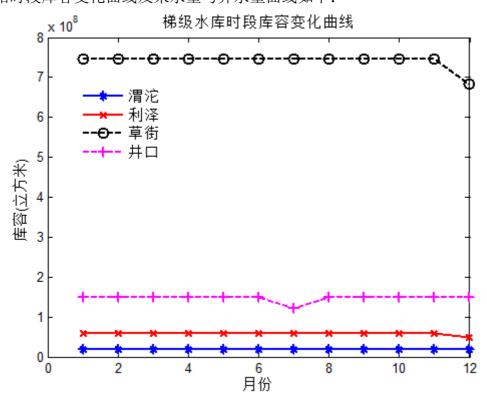


图 16 梯级水库时段库容变化曲线

由图 16 可见,与问题一图 12 相差不大,草街处于汇流的地段,来水量充足,库容曲线变化较小;井口位于草街下游,受草街水库影响,在 8~次年 6 月库容基本不变化,渭沱、利泽各月库容都无明显变化。

来水量与其水量曲线图如下:

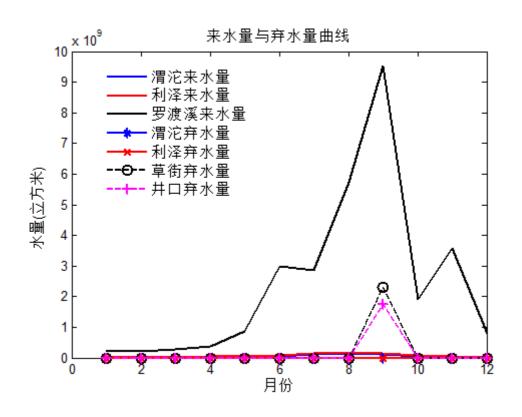


图 17 梯级水库时段库容变化曲线

分析图 17,结合图 13 可知,还是 6 月份到 10 月份间,渭沱利泽有一定的弃水,而草街和井口仅仅在来水量最多的 9 月份有集中的弃水。

各电站月出力如下:

表 4 各电站月出力

渭沱(MW)	利泽(MW)	草街(MW)	井口(MW)
0.0425325230127	0.3871648525637	14.5927812955557	4.7126800096968
0.0483573631631	0.3318562281596	15.2352449404383	4.9200669484287
0.0511741053547	0.3854888384590	20.7255939028936	6.6917993506797
0.0934203313767	0.6972205691228	28.5655380159648	9.2195641486774
0.1816178114608	1.2334821123418	62.1870601592343	20.0090852815648
0.2551875145211	1.6272359386799	194.9720096767172	60.3102804638934
0.6631997703121	3.1159841764169	206.3752002934605	50.0049787977836
0.6225753893840	2.6472588940190	335.3408956989007	89.5401310025856
0.5503526821206	3.0825100702780	382.6505227908057	82.1581840206949
0.2659566721389	1.7930942367829	130.8020617951655	41.4952547078230
0.1398755118728	0.8949761923380	225.0997289026973	68.4252113173677
0.1262899448200	0.6824188665743	56.9068915693505	19.2295616253309

各月发电量变化曲线如下:

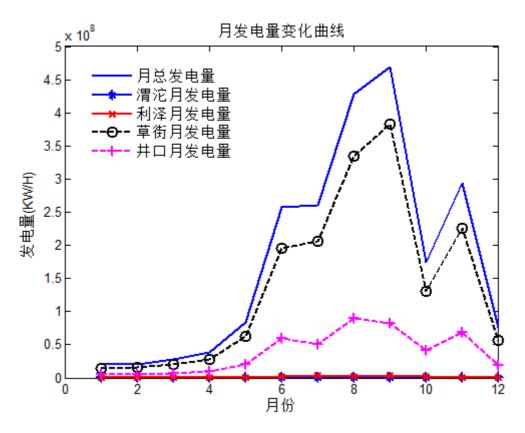


图 18 各电站月发电量图

分析图 18 渭沱、利泽月发电量很少,井口、草街月发电量相对很大。

## 4.3 问题三的求解

解得迭代收敛过程如下:

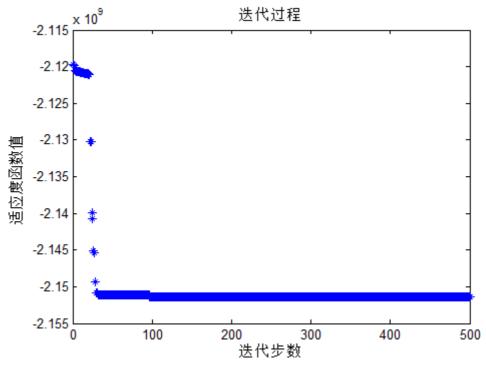


图 19 解的迭代收敛图

分析上图可知:解得收敛速度很快,算法效果不错。

问题三中要求提高水轮机的功率,根据公式就相当于要提高水轮机的水头和流量。将水轮机的流量提高 5%和水轮机水头限制的上限提高 5%进行再度优化。

四个电站年发电总量提高到 $E_{total}$  = 2151329105.2073,与问题一中的年发电量,即未提高水

轮机功率时相比,提高了 2661870.506200314KW·h,约 0.12%。

以库容为约束的最优调度方案如下表所示:

表 4 各电站库容最优调度方案

渭沱 (m³)	利泽 (m³)	草街(m³)	井口 (m³)
19300000	57730000	683330000	120950000
19300000	49220000	746670000	120950000
13900000	49220000	746670000	120950000
13900000	49220000	746670000	149520000
19300000	49220000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	120950000
19300000	49220000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	57730000	746670000	149520000
19300000	49220000	746670000	120950000
13900000	57730000	746670000	120950000
13900000	49220000	683330000	149520000

各水电站时段库容变化曲线如下:

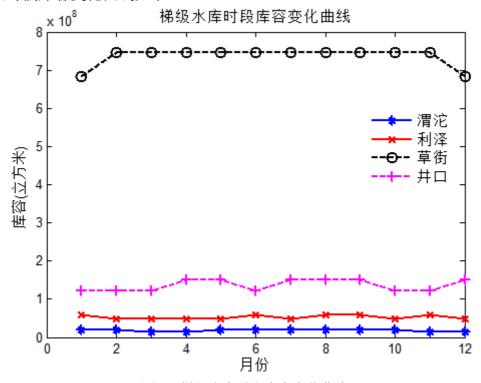


图 20 梯级水库时段库容变化曲线

由图 20 可见,与问题一图 12 相差不大,草街处于汇流的地段,来水量充足,库容曲线变化较小仅枯水期 12 月~次年 1 月库容有所变化;井口、渭沱、利泽各月库容都有明显变化。

来水量与其水量曲线图如下:

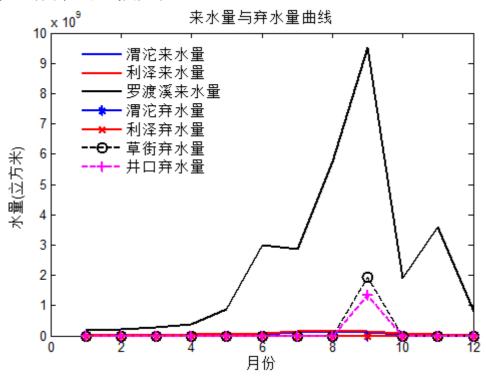


图 21 梯级水库时段库容变化曲线

分析图 21, 结合图 13 可知, 还是 6 月份到 10 月份间, 渭沱利泽有一定的弃水, 而草街和井口仅仅在来水量最多的 9 月份有集中的弃水。

各电站月出力如下表所示:

表 5 各电站月出力

渭沱(MW)	利泽(MW)	草街(MW)	井口(MW)
0.0665197313495	0.4483292918100	18.7985958685658	5.5347937810962
0.0483573631631	0.4254496889746	12.3130815234509	3.1521440163853
0.0444932729873	0.3300354189404	22.1985566196688	5.6803439839207
0.0516249611259	0.5969222103413	28.5655380159648	8.6251194913985
0.1523067091890	1.0560311698822	61.8413344694025	19.8987175387677
0.2551875145211	1.4622101199934	205.241868840147	49.7728160471030
0.6631997703121	2.8086245099724	196.040582502710	60.1496295373866
0.6225753893840	2.4823338788933	335.011194062779	89.6052222639581
0.5503526821206	3.0825100702780	390.897668719553	77.0366245072563
0.2659566721389	1.6763664853483	138.441204326852	34.9778234207382
0.0934765887357	0.7299088905378	237.552937764208	55.7567438689111
0.0901653031962	0.6824188665743	56.906891569350	18.6443159079302

各月发电量变化曲线如下:

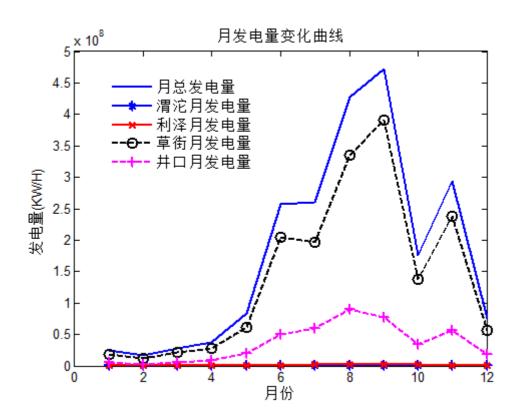


图 21 各电站月发电量图

分析图 21 并结合图 20、19 知,库容基本没变,都是正常水位,即保持在高水头运行状态。渭沱、利泽月发电量很少,井口、草街月发电量相对很大。

## 五. 结果分析与检验

对以上模型所求结果与已知各参量对比,可检验结果是否正确。其中,嘉陵江流域梯级电站基本参数如下表所示:

指标	井口	草街	渭沱	利泽
装机容量/(万KW)	12. 5	50	0.66	9. 2
装机台数/(台)	6	4	2	4
保证出力/(万KW)	2.632	/	0. 214	2. 25
额定水头/(m)	4. 16	20	6.8	2
正常蓄水位/(m)	177. 5	203	206	212. 3
水库调节能力	日调节	日、周调节	无	日调节
调节库容/(亿 m³)	0. 23	0.65	/	0. 055

表 7 嘉陵江流域梯级电站基本参数

结合表 7 与各电站月出力值,可知该模型及 CLSPSO 算法是可靠的。并且由对迭代收敛情况的分析可知,算法是相当可靠的。

在提高提高水轮机的功率后,年发电总量提高了 0.12%,与预期其会增长一致。检验了所建模型极其算法的正确性。

## 六. 模型的优缺点

#### 6.1 模型的优点

本文模型建立、推导合理缜密,考虑各约束比较完备,所求年发电量更接近真实值。求解模型所采用的 CLSPSO 算法是在对标准的 PSO 算法改进的基础上,将混沌理论引进粒子群算法中,利用混沌的伪随机性、对初始值的敏感和遍历性来引导粒子搜索的遍历性,是一种非常有效的优化算法。所求解的结果也说明了这点。

此外,本文在模型的建立过程中,使用了很多图表,清晰明了。模型的求解采用计算机软件编程实现,精度高,可拓展性强。

#### 6.2 模型的缺点

求解模型所采用的 CLSPSO 算法虽能再有效时效内找到全局最优解,但仍有不够稳定的缺陷,希望在这方面能多做研究。

## 参考文献

- [1] 匡翠芸. 梯级水库优化调度的动态最优化模型及应用[D]. 武汉: 武汉科技学, 2009
- [2]王大均. 李华平等. 混沌粒子群混合优化算法[C]. 四川: 四川蜀渝石油建筑安装工程有限责任公司,2010
- [3]李英涛. 梯级水电站群联合优化调度及其决策方法[D], 湖北. 华中科技大学, 2009
- [4]《运筹学》教材编写组,运筹学[M],北京:清华大学出版社,2005.6

## 附录

## 1.1 梯级水电站水位~库容多项式拟合函数

# dianzhancharacter.m %库容水位查表函数绘制函数 %通过互动拟合界面已经得到各拟合曲线的系数结构体 %保存在 dianzhancharacter.mat 文件中 load dianzhancharacter.mat format rat %% jinkou figure('Color',[1 1 1]); plot(jinkou(:,2),jinkou(:,1),'ro');hold on; xx=jinkou(1,2):100:jinkou(length(jinkou(:,2)),2);yy=polyval(jinkoufit.coeff,(xx-94873)/80252); plot(xx,yy,'b'); title('井口水库水位-库容拟合曲线'); xlabel('库容(万立方米)'); ylabel('水位(米)'); legend('水位-库容数据点','拟合曲线'); grid on; syms X x

```
jinkou=vpa(poly2sym(jinkoufit.coeff),10);
x=(X-94873)/80252;
jinkou=subs(jinkou,x)
%% caojie
figure('Color',[1 1 1]);
plot(caojie(:,2),caojie(:,1),'ro');hold on;
xx=caojie(1,2):100:caojie(length(caojie(:,2)),2);
yy=polyval(caojiefit.coeff,(xx-1.0267e+05)/ 1.0481e+05);
plot(xx,yy,'b');
title('草街水库水位-库容拟合曲线');
xlabel('库容(万立方米)');
ylabel('水位(米)');
grid on;
caojie=vpa(poly2sym(caojiefit.coeff),10);
x=(X-1.0267e+05)/1.0481e+05;
caojie=subs(caojie,x)
%% weituo
figure('Color',[1 1 1]);
plot(weituo(:,2),weituo(:,1),'ro');hold on;
xx=weituo(1,2):10:weituo(length(weituo(:,2)),2);
yy=polyval(weituofit.coeff,xx);
plot(xx,yy,'b');
title('渭沱水库水位-库容拟合曲线');
xlabel('库容(万立方米)');
ylabel('水位(米)');
grid on;
weituo=vpa(poly2sym(weituofit.coeff),10);
weituo=subs(weituo,X)
%% lize
figure('Color',[1 1 1]);
plot(lize(:,2),lize(:,1),'ro');hold on;
xx=lize(1,2):100:lize(length(lize(:,2)),2);
yy=polyval(lizefit.coeff,(xx-11124)/12032);
plot(xx,yy,'b');
title('利泽水库水位-库容拟合曲线');
xlabel('库容(万立方米)');
ylabel('水位(米)');
grid on;
lize=vpa(poly2sym(lizefit.coeff),10);
x=(X-11124)/12032;
lize=subs(lize,x)
%%
clear
```

#### 1.2 对草街一年的流量时间序列小波分析函数

```
time series wavelet.m
%% 函数用于实现对时间序列的多尺度分析
%从 mat 文件中读入数据
load flow time series
%调用 MATLAB 工具箱分解信号对草街一年的流量时间序列进行小波分析
%% 小波的一维分解
[c,l]=wavedec(full time series caojie,10,'bior6.8');
%% 重构第 1~10 层逼近信号
a10=wrcoef('a',c,l,'bior6.8',10);
a9=wrcoef('a',c,l,'bior6.8',9);
a8=wrcoef('a',c,1,'bior6.8',8);
a7=wrcoef('a',c,l,'bior6.8',7);
a6=wrcoef('a',c,1,'bior6.8',6);
a5=wrcoef('a',c,l,'bior6.8',5);
a4=wrcoef('a',c,l,'bior6.8',4);
a3=wrcoef('a',c,1,'bior6.8',3);
a2=wrcoef('a',c,1,'bior6.8',2);
a1=wrcoef('a',c,1,'bior6.8',1);
%% 重构第 1~10 层细节信号
d10=wrcoef('d',c,l,'bior6.8',10);
d9=wrcoef('d',c,l,'bior6.8',9);
d8=wrcoef('d',c,l,'bior6.8',8);
d7=wrcoef('d',c,l,'bior6.8',7);
d6=wrcoef('d',c,l,'bior6.8',6);
d5=wrcoef('d',c,l,'bior6.8',5);
d4=wrcoef('d',c,l,'bior6.8',4);
d3=wrcoef('d',c,l,'bior6.8',3);
d2=wrcoef('d',c,l,'bior6.8',2);
d1=wrcoef('d',c,l,'bior6.8',1);
%% 画图显示结果
figure('Color',[1 1 1]);
%画出原始时间序列
subplot(4,1,1);
plot(full_time_series_caojie,'LineWidth',2);
set(gca,'xtick',0:124:1488);
grid on;
axis tight;
xlabel('时间(x6 小时)','fontsize',11);
ylabel('流量(立方米/秒)','fontsize',11);
title('(a)原始时间序列','fontsize',11);
%画出最剧烈的波动说明突然流量波动最大(最大的洪峰)发生在什么时间
%figure('Color',[1 1 1]);
subplot(4,1,2);
```

```
plot(d1,'LineWidth',2);
set(gca,'xtick',0:124:1488);
axis tight;
grid on;
xlabel('时间(x6 小时)','fontsize',11);
ylabel('流量波动(立方米/秒)','fontsize',11);
title('(b)一层细节','fontsize',11);
%画出较为平缓的波动,大体能够反映时间序列整体的波动特性(洪峰)
%figure('Color',[1 1 1]);
subplot(4,1,3);
plot(d4,'LineWidth',2);
set(gca,'xtick',0:124:1488);
axis tight;
grid on;
xlabel('时间(x6 小时)','fontsize',11);
ylabel('流量波动(立方米/秒)','fontsize',11);
title('(c)四层细节','fontsize',11);
%画出对时间序列的近似,反映了时间序列的整体走势
%figure('Color',[1 1 1]);
subplot(4,1,4);
plot(a9,'LineWidth',2);
set(gca,'xtick',0:124:1488);
axis tight;
grid on;
xlabel('时间(x6 小时)','fontsize',11);
ylabel('流量近似(立方米/秒)','fontsize',11);
title('(d) 九层近似','fontsize',11);
%%
clear
```

#### 1.3 草街与罗渡溪流量时间序列函数

```
time_series_plot.m

%用于对流量时间序列进行显示分析

load flow_time_series
%% caojie day
figure('Color',[1 1 1]);
bar(full_time_series_caojie1);
set(gca,'xtick',0:31:372);
xlabel('时间(天)');

ylabel('流量(立方米/秒)');
```

```
title('草街日平均流量时间序列');
grid on;
%% luoduxi day
figure('Color',[1 1 1]);
bar(full time series luoduxi);
set(gca,'xtick',0:31:372);
xlabel('时间(天)');
ylabel('流量(立方米/秒)');
title('罗渡溪日平均流量时间序列');
grid on;
%% caojie minus luoduxi
figure('Color',[1 1 1]);
bar(full time series caojie1-full time series luoduxi);
set(gca,'xtick',0:31:372);
xlabel('时间(天)');
ylabel('流量(立方米/秒)');
title('草街罗渡溪日平均流量差时间序列');
grid on;
%% caojie&luoduxi
figure('Color',[1 1 1]);
plot(full time series luoduxi,'r')
hold on;
plot(full time series caojie1,'b')
set(gca,'xtick',0:31:372);
legend('luoduxi','caojie')
grid on;
xlabel('时间(天)');
ylabel('流量(立方米/秒)');
title('草街与罗渡溪日平均流量时间序列');
%% caojie
figure('Color',[1 1 1])
plot(full time series caojie)
hold on;
set(gca,'xtick',0:124:1488);
```

```
ezplot('6000',[0 1488]);
ezplot('9000',[0 1488]);
ezplot('13000',[0 1488]);
ezplot('28000',[0 1488]);
ezplot('57300',[0 1488]);
axis([0 1488 0 60000]);
legend('流量时间序列','闸门运行方式一上限','闸门运行方式二上限','全厂停机',...
'设计校核洪水位','设计洪水位');
xlabel('时间(x6小时)');
ylabel('流量(立方米/秒)');
title('草街6小时平均流量时间序列');
clear;
```

## 1.4 ………(程序文件说明)

```
程序名
function xm=CLSPSO
%待优化函数: target maxf
%粒子数目: N
%惯性权重: w
%学习因子 1: c1
%学习因子 2: c2
%自变量搜索域的最大值: xmax
%自变量搜索域的最小值: xmin
%最大迭代次数:M
%混沌搜索的最大步数:MaxC
%问题的维数: D
%惩罚系数 r
%目标函数取最小值时的自变量值: x
tic:
N=200;
D=48;
w=0.8;
c1=1;
c2=1;
M=500;
MaxC=100;
```

```
r=1e8;
format long;
x=zeros(N,D); %记录种群位置
v=x;
         %记录种群速度
p=zeros(1,N); %记录粒子局部最佳适应度
         %记录粒子局部最佳位置
y=x;
Iteration=0; %记录迭代步数
for i=1:N
  for j=1:4:D
     x(i,j) = unifrnd(0.1390e8,0.193e8);
     x(i,j+1)=unifrnd(0.4922e8,0.5773e8);
     x(i,j+2)=unifrnd(6.8333e8,7.4667e8);
     x(i,j+3)=unifrnd(1.2095e8,1.4952e8);
  end
end
for i=1:N
  for j=1:4:D
     v(i,j) = unifrnd(0.0090e8,0.0093e8);
     v(i,j+1)=unifrnd(0.004922e8,0.00773e8);
     v(i,j+2) = unifrnd(0.08333e8, 0.04667e8);
     v(i,j+3)=unifrnd(0.02095e8,0.04952e8);
  end
end
for i=1:N
  p(i)=fitness(x(i,:),r);
  y(i,:)=x(i,:);
end
                  %pg 为全局最优对应的粒子
pg=x(N,:);
for i=1:(N-1)
  if fitness(x(i,:),r) < fitness(pg,r)
     pg=x(i,:);
  end
end
vmax=zeros(1,D);
vmin=zeros(1,D);
for j=1:4:D
     vmin(j)=0.2* (0.1390e8-0.193e8);
     vmin(j+1)=0.2*(0.4922e8-0.5773e8);
```

```
vmin(j+2)=0.2*(6.8333e8-7.4667e8);
       vmin(j+3)=0.2*(1.2095e8-1.4952e8);
       vmax(j)=-vmin(j);
       vmax(j+1)=-vmin(j+1);
       vmax(j+2)=-vmin(j+2);
       vmax(j+3)=-vmin(j+3);
end
lb=zeros(1,D);
ub=zeros(1,D);
for j=1:4:D
       lb(j) = 0.1390e8;
       1b(j+1)=0.4922e8;
       1b(j+2)=6.8333e8;
       lb(j+3)=1.2095e8;
       ub(i) = 0.1930e8;
       ub(j+1)=0.5773e8;
       ub(j+2)=7.4667e8;
       ub(j+3)=1.4952e8;
end
xmax=ub;
xmin=lb;
figure('Color',[1 1 1]);
for t=1:M
   for i=1:N
       v(i,:)=w*v(i,:)+c1*rand*(y(i,:)-x(i,:))+c2*rand*(pg-x(i,:)); %更新速度
       for k=1:D
          if v(i,k) > vmax(k)
                                        %速度限制
                v(i,k)=vmax(k);
          end
          if v(i,k) < vmin(k)
                v(i,k)=vmin(k);
          end
       end
                                                            %更新位置
       x(i,:)=x(i,:)+v(i,:);
       for k=1:D
           if x(i,k)>ub(k)
               x(i,k)=ub(k);
                             %位置限制
           end
           if x(i,k) < lb(k)
               x(i,k)=lb(k);
           end
       end
```

```
fv(i)=fitness(x(i,:),r);
                                                                                                                                                                      %更新适应度
end
[sort_fv,index]=sort(fv);
                                                                                              %保留群体中 20%的最佳粒子
Nbest=floor(N*0.2);
%对群体中 20%的最佳粒子进行混沌搜索
for n=1:Nbest
           tmpx=x(index(n),:);
           for k=1:MaxC
                                                                                                    %混沌搜索的最大步数
                                                                                                  %混沌搜索的迭代公式
                      for dim=1:D
                                 cx(dim)=(tmpx(1,dim)-xmin(dim))/(tmpx(1,dim)-xmax(dim));
                                 cx(dim)=4*cx(dim)*(1-cx(dim));
                                  tmpx(1,dim)=tmpx(1,dim)+cx(dim)*(xmax(dim)-xmin(dim));
                      end
                      fcs=fitness(tmpx,r);
                                                                                          %对混沌搜索后的决策变量值进行评估
                      if fcs<sort_fv(n)
                                  x(index(n),:)=tmpx;
                                  break;
                      end
           end
           x(index(n),:)=tmpx;
end
\( \frac{0}{0} \\ \frac{0} \\ \frac{0}{0} \\ \frac{0} \\ \frac{0}{0} \\ \frac{0} \\ \frac{0} \\ \frac{0}{0} \\ \frac{0} 
for i=1:N
        for k=1:D
                      if x(i,k)>ub(k)
                                                                               %位置限制
                                  x(i,k)=ub(k);
                      end
                      if x(i,k) < lb(k)
                                  x(i,k)=lb(k);
                      end
        end
end
r=rand();
%收缩搜索区域
for s=1:D
          xmin(s)=max(xmin(s),pg(s)-r*(xmax(s)-xmin(s)));
           xmax(s)=min(xmax(s),pg(s)+r*(xmax(s)-xmin(s)));
end
x(1:Nbest,:)=x(index(1:Nbest),:);
for i=(Nbest+1):N
                                                                                                               %随机产生剩余的80%微粒
           for j=1:D
                      x(i,j)=xmin(j)+rand*(xmax(j)-xmin(j));
                                                                                                                                %随机初始化位置
                      v(i,j)=0.2*rand*(xmax(j)-xmin(j));
                                                                                                                                 %随机初始化速度
```

```
end
    end
  for i=1:N
       for k=1:D
             if v(i,k) > vmax(k)
                    v(i,k)=vmax(k);
                                                 %速度限制
            end
             if v(i,k) < vmin(k)
                   v(i,k)=vmin(k);
             end
       end
       for k=1:D
             if x(i,k)>ub(k)
                                    %位置限制
                  x(i,k)=ub(k);
            end
             if x(i,k) < lb(k)
                  x(i,k)=lb(k);
             end
      end
  end
    Pbest(t)=fitness(pg,r);
    for i=1:N
         if fitness(x(i,:),r)<p(i)
              p(i)=fitness(x(i,:),r);
              y(i,:)=x(i,:);
         end
         if p(i)<fitness(pg,r)
              pg=y(i,:);
         end
    end
    Iteration=Iteration+1;
                                       %算法步数计数器自增
    plot(Iteration,fitness(pg,r),'b*');
    hold on;
                                                                    %调节权重
    w=0.9-(0.9-0.4)*(Iteration/M)^2;
end
hold off;
xm=pg;
save x_best xm
toc;
  备注
```

这个函数是整个算法的核心也就是混沌混合 PSO 算法的程序 其中的参数是这样取取得

由于问题维数比较高,故粒子数目选择 200 个 N,个体学习因子 c1 取得是 1,群体学习因子取得也是 1, 自变量搜索范围就选的库容的变化范围, 最大迭代次数为 500 次,其实到 300 次就已经较好的收敛了,惩罚系数 r 为10<sup>8</sup> 这里的权重是变化权重按下列公式这样选取:

$$\omega(k) = \omega_{start} - (\omega_{start} - \omega_{end}) \left(\frac{k}{T_{max}}\right)^{2}$$

w 为权重 起始权重,终止权重, Tmax 最大迭代次数 k 当前迭代次数 Maxc 为最大混沌搜索迭代次数选择为 100 次

# 1.5 目标函数和惩罚函数

## 程序名

function [result,violent,n,discharge,Em,Es]= target\_maxf(x,r)

%四水电站混联 联合调度目标函数与罚函数

%默认 x 向量的编码方式为:

%x(j)代表库容 其中 4 个电站一个时间段为一个单元 共 12 个单元 48 个元素 一行排列 %函数返回三个数据分别为 目标函数值 result 约束违反程度 violent 与弃水量 discharge

%-----

%------基本数据------

%%%%%%%%%%%%%%%% 每月来水量, 丰水年情况

lize month=[7.45161290322581,6.38709677419355,7.41935483870968,...

13.4193548387097,23.7419354838710,31.3225806451613,...

34.5161290322581,17.2258064516129,9.77419354838710];%利泽月来水量

weituo month=[3.96774193548387,3.32258064516129,3.51612903225807,...

 $6.41935483870968, 12.4838709677419, 17.5483870967742, \dots$ 

45.8387096774194,43.000000000000037.9677419354839,...

18.2903225806452,9.61290322580645,5.54838709677419];%渭沱月来水量

luoduxi month=[73.8580645161291,78.2322580645161,108.719354838710,...

145.135483870968,323.912903225806,1119.05161290323,...

 $1065.83870967742, 2140.51612903226, 3556.06451612903, \dots$ 

714.161290322581,1340.83870967742,303.761290322581];%罗渡溪月来水量

%%%%%%%%%%%%每月秒数

## t=31\*24\*60\*60;

% 各电站最大发电引用流量

gm1=2\*200; % 渭沱两台机组

qm2=4\*388.9; % 利泽 4 台机组

qm3=4\*698; % 草街 4 台机组

gm4=6\*500; % 井口 4 台机组

% 边界条件水库初始库容

v01=1650e4;

v02=5773e4;

v03=74667e4;

```
v04=14952e4;
%-----
                                   % 记录库容对应的水位
z=zeros(size(x));
                                   % 记录个水库的弃水量
discharge=z;
                                          % 记录水库发电引用流量
q=z;
                                          % 记录上下游水位差
h=z;
                                          % 记录水轮机水头
H=z;
Em=zeros(1,12); % 记录月总发电量
                                          %记录各电站每月发电量
E_{S}=z;
                                             %%%%%% 库容推求水位 利用 cubic curve fitting
          for j=1:4:48
                  %%%%% 渭沱上游水位对应的库容
                  z(j)=0.0018305874521551467135754842630035*x(j)/1e4+...
                                 202.48285904476608720869990065694;
                     \(\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gamma_0\gam
%%%%% 利泽上游对应的水位
                  z(j+1)=0.1988639984e-2*x(j+1)/1e4-0.6896937851e-7*(x(j+1)/1e4)^2+...
                  0.2023282902e3+0.9590483713e-12*(x(j+1)/1e4)^3;
                  %%%%% 草街上游对应水位
                  z(j+2)=0.3362104882e1*(x(j+2)/1e4)^3/0.10000000000000000e16+(-0.1e1)*...
                                 0.1890378905e1*(x(j+2)/1e4)^2/0.1000000000010+0.4154782216e-3*...
                                 (x(j+2)/1e4)+0.1819231930e3;
                  %%%%% 井口上游对应的水位
                  z(j+3)=0.6152201768e1*(x(j+3)/1e4)^3/0.10000000000000000e16+(-0.1e1)*...
                                 0.2928489463e1*(x(j+3)/1e4)^2/0.1000000000e10+0.5667546633e-3*...
                                 (x(j+3)/1e4)+0.1696579477e3;
          end
          %计算第一个月的
          discharge(1)=((v01 - x(1)) / t + weituo_month(1)-qm1)*t;
          if discharge(1)<0
                   discharge(1)=0;
          end
          discharge(2)=((v02-x(2)) / t + lize\_month(1)-qm2)*t;
          if discharge(2)<0
                   discharge(2)=0;
          end
          discharge(3)=((v03 - x(3) + v01 - x(1) + weituo month(1) *...
                  t + v02 - x(2) + lize_month(1) * t + luoduxi_month(1) * t)-qm3*t);
          if discharge(3)<0
```

```
discharge(3)=0;
end
discharge(4) = ((v04 - x(4) + v03 - x(3) + v01 - x(1) + weituo_month(1)...
    * t + v02 - x(2) + lize month(1) * <math>t + luoduxi month(1) * t)-qm4*t);
if discharge(4)<0
    discharge(4)=0;
end
%计算 2 到 12 月
for j=5:4:48
     discharge(j)=((x(j-4)-x(j))/t + weituo_month((j-1)/4+1)-qm1)*t;
     if discharge(j)<0
                                               % 渭沱弃水量
            discharge(j)=0;
     end
    discharge(j+1)=((x(j-3)-x(j+1))/t + lize month((j-1)/4+1)-qm2)*t;
        if discharge(j+1)<0
                                               % 利泽弃水量
             discharge(j+1)=0;
        end
    discharge(j+2)=((x(j-2) - x(j+2) + x(j-4) - x(j) + weituo month((j-1)/4+1) *...
    t + x(j-3) - x(j+1) + lize_month((j-1)/4+1) * t + luoduxi_month((j-1)/4+1) * t)-qm3*t);
    if discharge(j+2)<0
                                               % 草街弃水量
            discharge(j+2)=0;
    end
    discharge(j+3)=((x(j-1)-x(j+3)+x(j-2)-x(j+2)+x(j-4)-x(j)+weituo\ month((j-1)/4+1)...
    * t + x(j-3) - x(j+1) + lize_month((j-1)/4+1) * t + luoduxi_month((j-1)/4+1) * t)-qm4*t);
    if discharge(j+3)<0
           discharge(j+3)=0;
                                               % 井口弃水量
    end
end
%计算第一个月的
q(1)=(v01-x(1)-discharge(1))/t+weituo month(1);
if q(1) < 0
    q(1)=0;
end
q(2)=(v02-x(2)-discharge(2))/t+lize month(1);
if q(2) < 0
    q(2)=0;
end
q(3)=(v03-x(3)-discharge(3))/t+q(1)+discharge(1)/t+q(2)+discharge(2)/t+luoduxi_month(1);
if q(3) < 0
    q(3)=0;
end
q(4)=(v04-x(4)-discharge(4))/t+q(3)+discharge(3)/t;
if q(4) < 0
```

```
q(4)=0;
end
%计算 2 到 12 月
for j=5:4:48
   q(j)=(x(j-4)-x(j)-discharge(j))/t+weituo month((j-1)/4+1);
   if q(j) < 0
                                       % 渭沱发电引用流量
       q(j)=0;
   end
   q(j+1)=(x(j-3)-x(j+1)-discharge(j+1))/t+lize month((j-1)/4+1);
   if q(j+1) < 0
                                       % 利泽发电引用流量
       q(j+1)=0;
   end
   q(j+2)=(x(j-2)-x(j+2)-discharge(j+2))/t+q(j+1)+discharge(j+1)/t+...
       q(j)+discharge(j)/t+luoduxi month((j-1)/4+1);
   if q(j+2) < 0
                                       % 草街发电引用流量
       q(j+2)=0;
   end
   q(j+3)=(x(j-1)-x(j+3)-discharge(j+3))/t+q(j+2)+discharge(j+2)/t;
   if q(j+3) < 0
       q(j+3)=0;
                                       % 井口发电引用流量
   end
end
for j=1:4:48
                                  % 渭沱草街水位差
    h(j)=z(j)-z(j+2);
                                  % 利泽草街水位差
    h(j+1)=z(j+1)-z(j+2);
                                  % 草街井口水位差
    h(j+2)=z(j+2)-z(j+3);
                                   % 井口嘉陵江水位差
    h(j+3)=z(j+3)-169;
end
for j=1:4:48
    H(j) = h(j) -(2.5e-5)*(q(j)/2)^2;
    H(j+1)=h(j+1)-(1.652967e-5)*(q(j+1)/4)^2;
    H(j+2)=h(j+2)-(1.12889e-5)*(q(j+2)/4)^2;
    H(j+3)=h(j+3)-(1.736e-5)*(q(j+3)/6)^2;
end
for j=1:4:48
                            % 出力系数取为 8.8263, 可以改进, 求每个月出力值
      Em((j-1)/4+1)=1003*(8.8263*H(j)*q(j)+8.8263*H(j+1)*q(j+1)+...
          8.8263*H(j+2)*q(j+2)+8.8263*H(j+3)*q(j+3))*t;
      Es(j) = 1003*8.8263*H(j)*q(j)*t;
      Es(j+1)=1003*8.8263*H(j+1)*q(j+1)*t;
      Es(j+2)=1003*8.8263*H(j+2)*q(j+2)*t;
```

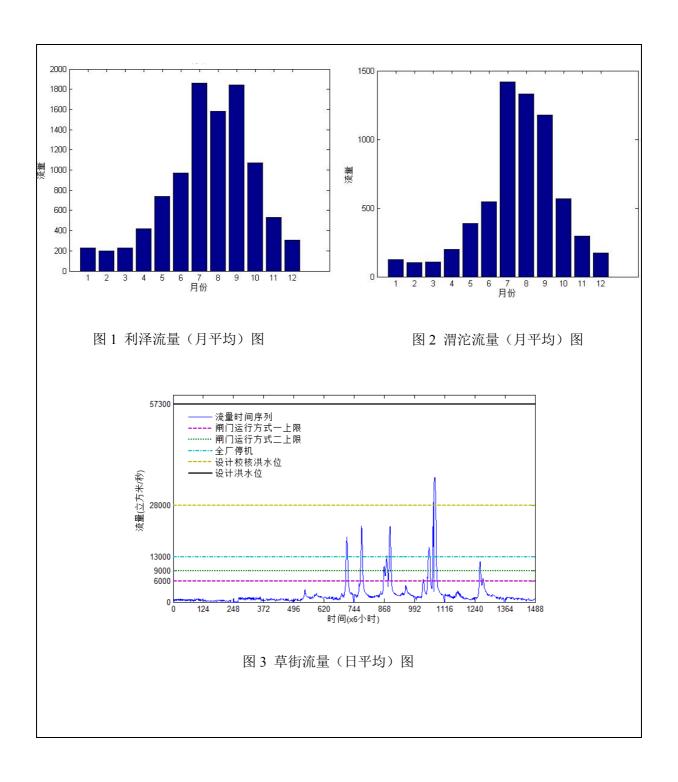
```
Es(j+3)=1003*8.8263*H(j+3)*q(j+3)*t;
   end
   年发电量
   result=0;
   for j=1:12
      result=result+Em(j); % 月电量累计求和
   end
   成千瓦时
   result=result/3600000;
   G1=zeros(size(x));
   G2=zeros(size(x));
           % 水轮机水头上界约束
   for i=1:4:48
      G1(i) = max([H(i)-3.4,0]);
      G1(i+1)=max([H(i+1)-8.8,0]);
      G1(i+2)=max([H(i+2)-26.7,0]);
      G1(i+3)=max([H(i+3)-8.04,0]);
   end
   for i=1:4:48 % 水轮机水头下界约束
      G2(i) = max([-H(i)+2,0]);
      G2(i+1)=max([-H(i+1)+6.8,0]);
      G2(i+2)=max([-H(i+2)+20,0]);
      G2(i+3)=max([-H(i+3)+4.16,0]);
   end
   G=[G1 G2];
   n=length(find(G~=0)); % 违反约束的个数
              %输出违反约束的程度与个数
   violent=r*sum(G);
   % 库水位的约束在主函数中通过设置粒子边界来实现
备注
```

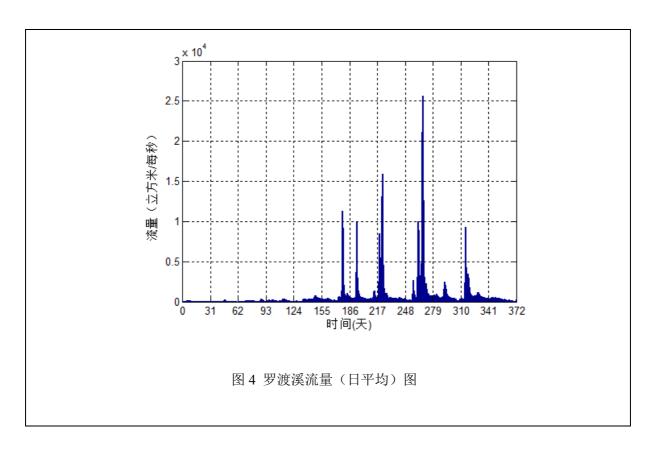
# 1.6 ………(程序文件说明)

```
[result, violent, n, discharge, Em, Es]=target maxf(x,r);
result=num2str(result);
disp(strcat('年发电量: ','=',result));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 展示优化调度方案(库容为决策变
量 12*4)
%(编码方式) 渭沱->利泽->草街->井口
fprintf('最优调度方案:\n');
x=zeros(12,4);
for i=1:12
   for j=1:4
      x(i,j)=xm((i-1)*4+j);
   end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 展示每个电站每个月的弃水
d=discharge;
discharge=zeros(12,4);
fprintf('弃水情况:\n');
for i=1:12
   for j=1:4
      discharge(i,j)=d((i-1)*4+j);
   end
end
discharge
c = 3600000;
es=Es/c;
Es=zeros(12,4);
fprintf('各电站月出力:\n');
for i=1:12
   for j=1:4
      Es(i,j)=es((i-1)*4+j);
   end
end
Es
figure('Color',[1 1 1]);
plot(x(:,1),'b-*','linewidth',2,'markersize',8);
hold on;
plot(x(:,2),'r-x','linewidth',2,'markersize',8);
plot(x(:,3),'k--o','linewidth',2,'markersize',8);
plot(x(:,4),'m--+','linewidth',2,'markersize',8);
```

```
xlabel('月份');
ylabel('库容(立方米)');
legend('渭沱','利泽','草街','井口');
title('梯级水库时段库容变化曲线');
hold off;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 画图展示每个月的发电量 和个电
站的月发电量
figure('Color',[1 1 1]);
plot(Em/c,'b-','linewidth',2);
hold on;
plot(Es(:,1),'b-*','linewidth',2,'markersize',8);
plot(Es(:,2),'r-x','linewidth',2,'markersize',8);
plot(Es(:,3),'k--o','linewidth',2,'markersize',8);
plot(Es(:,4),'m--+','linewidth',2,'markersize',8);
xlabel('月份');
ylabel('发电量(KW/H)')
legend('月总发电量','渭沱月发电量','利泽月发电量','草街月发电量','井口月发电量');
title('月发电量变化曲线');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 画图展示每个月的来水量和各电
站的弃水量
t=31*24*60*60;
figure('Color',[1 1 1]);
plot(weituo month*t,'b','linewidth',2);
hold on;
plot(lize month*t,'r','linewidth',2);
plot(luoduxi month*t,'k','linewidth',2);
plot(discharge(:,1),'b-*','linewidth',2,'markersize',8);
plot(discharge(:,2),'r-x','linewidth',2,'markersize',8);
plot(discharge(:,3),'k--o','linewidth',2,'markersize',8);
plot(discharge(:,4),'m--+','linewidth',2,'markersize',8);
xlabel('月份');
ylabel('水量(立方米)');
legend('渭沱来水量','利泽来水量','罗渡溪来水量','渭沱弃水量','利泽弃水量','草街弃水量','井口弃水
量');
title('来水量与弃水量曲线');
hold off;
备注
```

# 1.5 利泽、渭沱、草街、罗渡溪流量数据可视化





# 1.6 嘉陵江流域梯级水库群水位~库容关系

表 1.1 井口水电站水位~库

水位(米)	库容(万立方米)
175	11349
176. 04	12095
177. 5	14952
180	20000
190	44930
196. 7	60000
200	90037
204. 7	120000
210	152093
213. 4	180000
215. 7	200000
220	233023

表 1.2 草街水电站水位~库

水位(米)	库容 (万立方米)
178. 28	0
180. 8	3333

182	4167
183. 92	5000
185	5833
188	10000
191	15167
194	24667
197	37167
200	55833
202	68333
203	74667
206	97000
209	120833
212	147500
215	175833
218	209000
221	243000
224	280000
224. 3	285333
225. 2	293333

表 1.3 渭沱水电站水位~库容关系

水位(米)	库容 (万立方米)
205	1390
205. 1	1430
205. 2	1480
205. 3	1530
205. 4	1590
205. 5	1650
205. 6	1700
205. 7	1750
205. 8	1810
205. 9	1870
206	1930

表 1.4 利泽水电站水位~库容关系

水位(米)	库容 (万立方米)
200	0
205	576
210	3774

211	4722
212	5773
213	7054
215	9545
220	16835
225	25829
230	37132

### 一. 目标函数及其基本关系:

#### 1. 水位库容关系:

 $f1 := x \rightarrow 0.001830587452 \ x + 202.482859$ 

$$x \to 0.001830587452 \ x + 202.482859$$
 (1)

 $f2 := x \rightarrow 9.590483711 \cdot 10^{-13} \cdot x^3 - 6.896937851 \cdot 10^{-8} \cdot x^2 + 0.001988639985 \cdot x + 202.3283$ 

 $f3 := x \rightarrow 3.362104882 \cdot 10^{-15} \cdot x^3 - 1.890378905 \cdot 10^{-9} \cdot x^2 + 0.0004154782216 \cdot x + 181.9231930$ 

$$x \to \frac{3.362104882 \ x^3}{100000000000000000} + \frac{(-1) \cdot 1.890378905 \ x^2}{10000000000} + 0.0004154782216 \ x + 181.9231930$$
 (3)

 $f4 := x \rightarrow 6.152201768 \cdot 10^{-15} \cdot x^3 - 2.928489463 \cdot 10^{-9} \cdot x^2 + 0.0005667546633 \cdot x + 169.6579477$ 

$$x \to \frac{6.152201768 \ x^3}{10000000000000000} + \frac{(-1) \cdot 2.928489463 \ x^2}{1000000000} + 0.0005667546633 \ x + 169.6579477$$
 (4)

## 2. 水库上下高程差与库容关系:

ht1 := f1(vt1) - f3(vt3)

 $ht2 \coloneqq f2(vt2) - f3(vt3)$ 

9. 
$$590483711 ext{ } 10^{-13} ext{ } vt2^3 - 6.896937851 ext{ } 10^{-8} ext{ } vt2^2 + 0.001988639985 ext{ } vt2 + 20.4051070$$
 (5)  $-3.362104882 ext{ } 10^{-15} ext{ } vt3^3 + 1.890378905 ext{ } 10^{-9} ext{ } vt3^2 - 0.0004154782216 ext{ } vt3$ 

 $ht3 \coloneqq f3(vt3) - f4(vt4)$ 

3. 
$$362104882 ext{ } 10^{-15} ext{ } vt3^3 - 1.890378905 ext{ } 10^{-9} ext{ } vt3^2 + 0.0004154782216 ext{ } vt3 + 12.  $2652453 - 6.152201768 ext{ } 10^{-15} ext{ } vt4^3 + 2.928489463 ext{ } 10^{-9} ext{ } vt4^2 - 0.0005667546633 ext{ } vt4$  (6)$$

ht4 := f4(vt4) - 169

6. 
$$152201768 \ 10^{-15} \ vt4^3 - 2.928489463 \ 10^{-9} \ vt4^2 + 0.0005667546633 \ vt4 + 0.6579477$$
 (7)

## 3. 流量与库容下泄流量入库量关系:

$$qt1 \coloneqq \frac{(vtb1 - vt1 - st1)}{t} + It1$$

$$\frac{vtb1 - vt1 - st1}{t} + It1 \tag{8}$$

asymptotic series in st1

$$-\frac{stI}{t} + \frac{vtbI - vtI}{t} + ItI \tag{9}$$

$$qt2 \coloneqq \frac{(vtb2 - vt2 - st2)}{t} + It2$$

$$\frac{vtb2 - vt2 - st2}{t} + It2 \tag{10}$$

asymptotic series in st2

$$-\frac{st2}{t} + \frac{vtb2 - vt2}{t} + It2 \tag{11}$$