

练习 1：工作任务安排问题

假设有 m 个人，共同完成 n 项工作，($n > m \geq 2$)。每个人可以干任何一件工作，一段时间内每个人只能干一件工作，每项工作只能由一个人独立完成。第 i 人完成第 j 项工作的时间是 a_{ij} 分钟，我们用 n 维向量 $X_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ 表示第 i 人完成各项工作的时间。

如果这 m 个人任选一项工作同时开始干，每个人干完一件工作后，立即选一项还没有人干过的工作接着干，直到所有 n 项工作全部完成。从开始工作到最后一项工作完成的时间称为总完成时间，简称总时间，记为 T 。

为使总时间 T 尽量小，请对以下三种情况，分别确定每个人应干哪几项工作？顺序如何？并求出 T 。

- (1) $X_1 = (2, 3, 8, 9, 10, 7, 6)$, $X_2 = (3, 8, 5, 9, 7, 6, 4)$ 。
- (2) $X_1 = (44, 37, 39, 25, 26, 49, 11, 49, 51, 46, 13, 31, 11, 50, 29, 16, 54, 13, 58, 29, 37, 49, 13, 40, 34, 25, 42, 43, 24, 24, 52)$,
 $X_2 = (52, 37, 60, 56, 22, 45, 60, 23, 37, 16, 60, 44, 11, 39, 16, 16, 50, 25, 13, 25, 30, 26, 58, 59, 31, 24, 19, 19, 43, 31, 31)$ 。
- (3) $X_1 = (46, 27, 42, 21, 20, 40, 15, 33, 56, 24, 50, 29, 25, 56, 42, 42, 32, 15, 39, 45, 56, 52, 12, 38, 56, 32, 44, 36, 36, 34, 28, 31, 24, 13, 23, 59, 14, 30, 29, 35, 18, 34, 23, 42, 38, 18, 57, 43, 36, 30, 16, 50, 33, 48, 40, 52, 11, 21, 14, 16, 27, 17)$,
 $X_2 = (11, 37, 43, 38, 52, 15, 20, 44, 33, 28, 18, 46, 57, 37, 15, 48, 31, 34, 35, 21, 27, 15, 40, 19, 57, 15, 33, 24, 54, 48, 24, 44, 23, 15, 12, 27, 50, 25, 22, 35, 23, 28, 13, 35, 21, 54, 40, 48, 57, 27, 38, 15, 42, 31, 59, 16, 57, 42, 28, 18, 34, 21)$ 。
 $X_3 = (46, 37, 39, 25, 26, 49, 11, 49, 51, 46, 13, 31, 35, 50, 29, 59, 54, 13, 58, 29, 37, 15, 13, 40, 34, 25, 42, 43, 24, 24, 52, 52, 40, 60, 21, 22, 45, 60, 23, 37, 16, 60, 44, 11, 39, 16, 16, 50, 25, 13, 25, 30, 26, 58, 59, 31, 24, 19, 19, 43, 31, 31)$

最后，对一般情况进行讨论。

练习 2 卫星通信调度问题

卫星数字通信系统由一颗卫星和一组地面站组成。地面站即扮演与地基通信网络之间的接口角色。通过 SS-TDMA（卫星转发，时分复用）技术，卫星可以为每个地面站分配连接时间。考虑这样的例子，在 A 地有 4 个发射站，在 B 地有 4 个接收站，表 1 给出了一个 4×4 的数据传输矩阵。TRAF_{ij} 是在发射站 i 和接收站 j 之间传输的数据量。由于所有线路的传输速率都相同，因此数据量可以以单位为秒的传输时间计。

表 1. 数据传输矩阵 TRAF 及传输时间的下界 LB

TRAF	1	2	3	4	row _i
1	0	7	11	15	33
2	15	8	13	9	45
3	17	12	6	10	45
4	6	13	15	4	38
col _r	38	40	45	38	LB=45

在此卫星上有一个转发器，允许在四个发射器和四个接收器之间进行任意的排列组合。表 2 给出了一种排列组合方式，将发射站 1 到 4 分别连接到接收站 3, 4, 1, 2。这些连接即对数据传输矩阵中某个元素的一部分进行路由安排，称为一个工作模式。在一个模式中传输矩阵中某个元素的一部分就称为一个数据

包。

工作模式也是一个 4×4 的矩阵 M ，其中每一行每一列都至多有一个非零的数据包。

表 2. 工作模式实例与对应调度方案

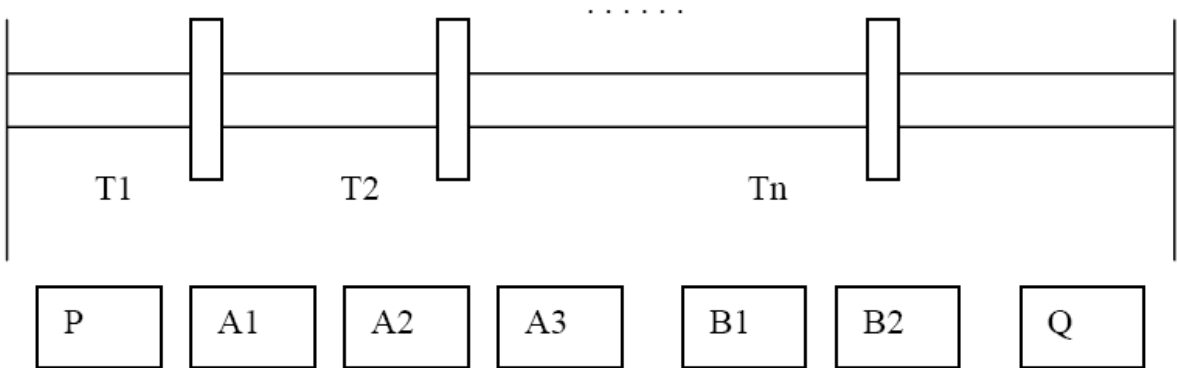
	1	2	3	4		站点	数据包
1	0	0	11	0		1 到 3	11
2	0	0	0	9		2 到 4	9
3	15	0	0	0		3 到 1	15
4	0	13	0	0		4 到 2	13
col	38	40	45	38	LB=45		

正确的传输调度方案为星载转发器定义了一系列传输排列组合方式，以为矩阵 TRAF 中的通信量设计路由。也就是说，需要将 TRAF 分解为一系列的工作模式矩阵。可以将 TRAF 中的元素拆解开，例如在表 2 所示的模式中只传输了 $TRAF_{31}$ 的部分内容。一个被分解的元素将分布于多个数据包和多个传输模式中进行发送。一个工作模式的长度即其中最长的数据包的长度。那么：

1. 请找出此问题的具有最短传输时间的调度方案；
2. 给出一个一般情况下的具有最短传输时间调度方案或者求解具有最短传输时间的调度方案的一般方法（或算法）；
3. 如果传输时会以概率 α 发生错误，此时传输的数据包中的数据有丢失（即没有传输完），且传输的丢失量服从中心为 5，标准差为 1 的正态分布，则情况如何。

练习3 全国数学建模竞赛1995年B题 天车与冶炼炉的作业调度

某钢铁厂冶炼车间的厂房布局是，地面沿一直线依次安置7个工作点：辅料供应处P；A组3座转炉（冶炼成品钢）A1，A2，A3；B组2座冶炼炉（冶炼半成品钢，简称半钢）B1，B2；原料供应处Q。这些设备的上方贯通着一条运送物料的天车轨道，上面布置着若干天车T1，T2，。。。，Tn为炉子作业服务。布局示意图如下。



天车与冶炼炉的作业过程与工序为：天车从Q处吊起原料一罐（吊罐时间 t_y ）运至B1或B2处放下（放罐时间 t_i ），并将上一炉的原料空罐吊起（吊空罐时间 t_o ）返回Q处放下（放空罐时间 t_k ）。B组炉在原

料罐放下后即可在辅助作业下开始冶炼（冶炼时间 t_b ），冶炼后将半钢倒入空半钢罐（时间记入 t_b ），由天车吊起半钢罐（吊罐时间 t_d ）运至A1 或A2、A3 处将半钢倒入转炉（倒入时间 t_e ），并将空罐返回B1 或B2 处放下（放空罐时间 t_c ）。再由天车从P 处吊起辅料一槽（吊槽时间 t_g ）运至A1 或A2，A3 处加入转炉（加入时间 t_f ），并将空槽返回P 处放下（放空槽时间 t_h ）。A 组 炉在半钢和辅料加入后即可开始冶炼（冶炼时间 t_a ），冶炼后成品钢的输出不用天车（输出时间记入 t_a ）。天车通过相邻两个工作点的运行时间都相同，记为 t_x 。

由于各台天车在同一条轨道上运行，因此其顺序位置 T_1, T_2, \dots, T_n 不可交换。在同一时间同一炉子上只能允许一台天车作业；但P、Q 两处可以允许多台天车同时作业。在P，A1， \dots ，Q 每两个相邻工作点之间最多只能容纳2 台天车同时停放。

天车与冶炼炉作业调度的要求为：（1）成品钢产量尽量高；（2）各台天车的作业率（天车作业时间所占比例）尽量均衡（考虑到设备及人员安全等因素，一般天车作业率不超过70%）；（3）绝不允许出现天车相撞等事故；（4）调度规则尽量简明，以便于现场人员使用。

现设定： $t_a=48, t_b=27, t_i=3, t_o=2, t_c=2, t_d=3, t_e=5, t_f=2, t_g=2, t_h=1, t_y=3, t_k=2$ （单位：分钟）， $t_x=15$ 秒；A 组炉平均每天每炉产量 $W_e=120$ 吨。在不超过5 台天车的条件下，设计一种满足上述要求的天车与冶炼炉的作业调度方案：

- （1） 个台天车负责哪些作业（列出《工序清单》）；
- （2） 在所给方案的一个运行周期内，每一时刻天车和冶炼炉处于什么状态（画出《天车—炉子作业运行图》）；
- （3） 一份供现场人员使用的《调度规则说明书》；
- （4） 在所给方案下计算个台天车的作业率。

并按每天冶炼炉估计该车间成品钢的年产量（扣除设备维修日，每台转炉作业日每年300 天计算）

实际生产过程中， t_a, t_b, \dots, t_k 都是随机的（上面设定的数值可视为平均值），讨论你的调度方案如何适用于实际生产过程。试提出该车间提高钢产量到年产300 万吨以上的建议。