Représentation surfaciques

Polyèdres et quadriques

Marwan Ait Addi

Gamagora

Plan

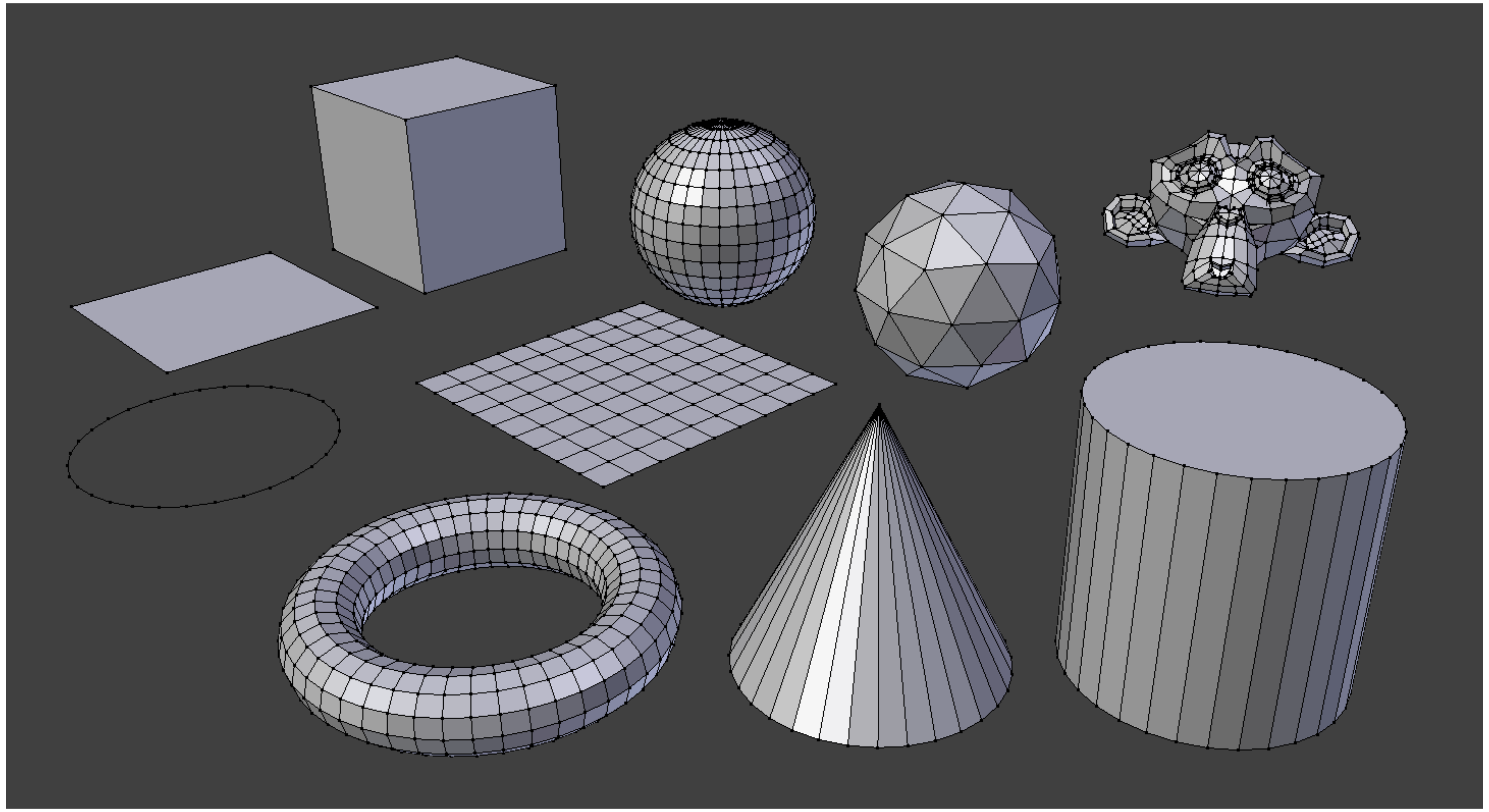
- Introduction
- Rappels de trigonométrie
  - Triangle rectangle
  - Cercle trigonométrique
  - Coordonnées sphériques
- Représentation continue et polyédrique
- Quadriques

Introduction

Représentation surfacique

- Dans une représentation surfacique, le modèle est défini par sa surface extérieure.

- Comment représenter la surface d'un objet ?



Rappels de trigonométrie

Propriétés du triangle rectangle

Propriétés du triangle rectangle pour un triangle ABC rectangle en A :

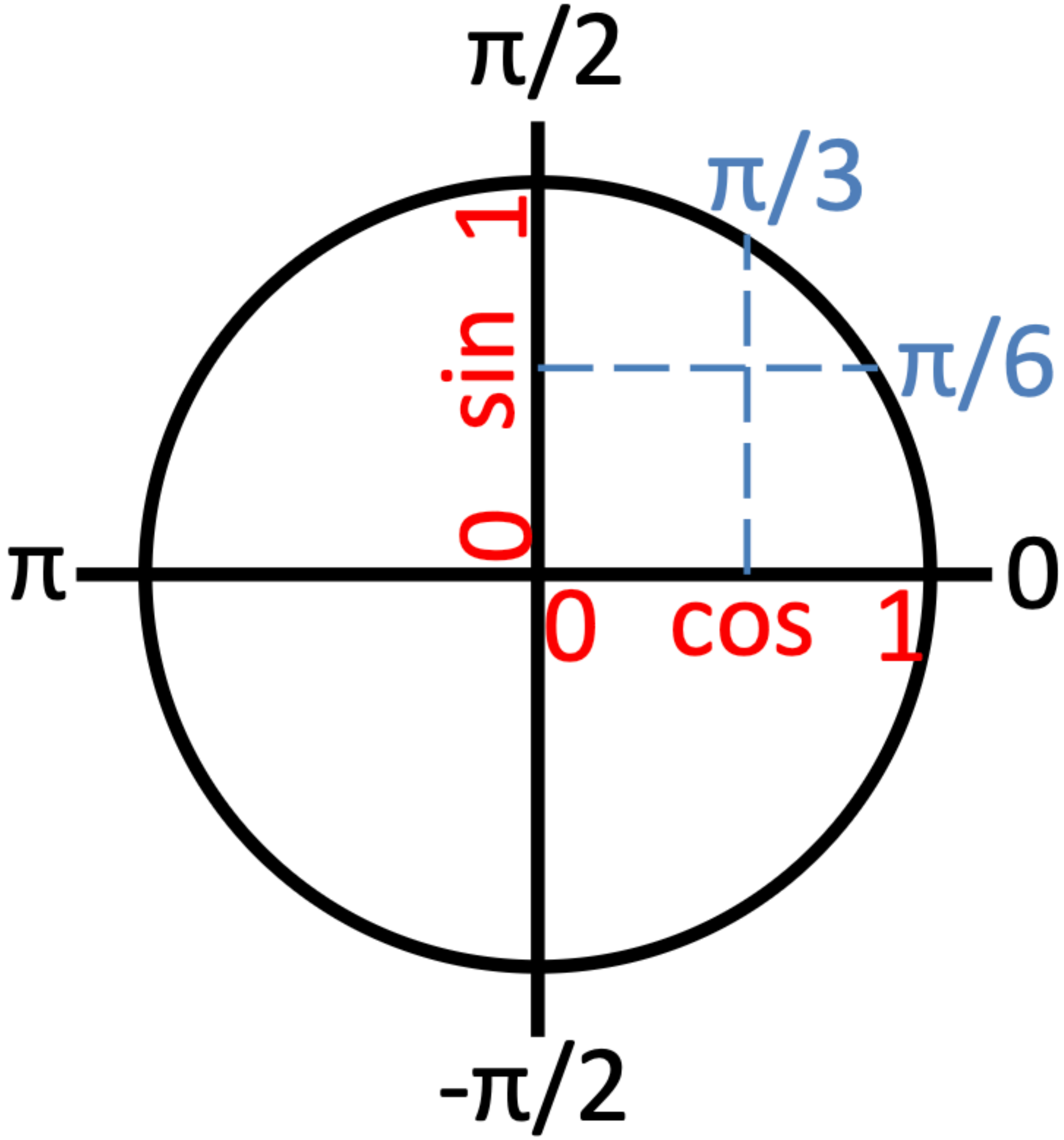
- BC est l'hypoténuse
- Pythagore : $BC^2 = AC^2 + AB^2$
- Pour l'angle ABC, entre les vecteurs BA et BC :
  - $Cos(ABC) = \dfrac{BA}{BC}$: adjacent/hypoténuse
  - $Cos(ABC) = \dfrac{BA}{BC}$: opposé/hypoténuse
  - $Tan(ABC) = \dfrac{AC}{BA}$: opposé/adjacent

Rappels de trigonométrie

Angles et Cercle trigonométrique

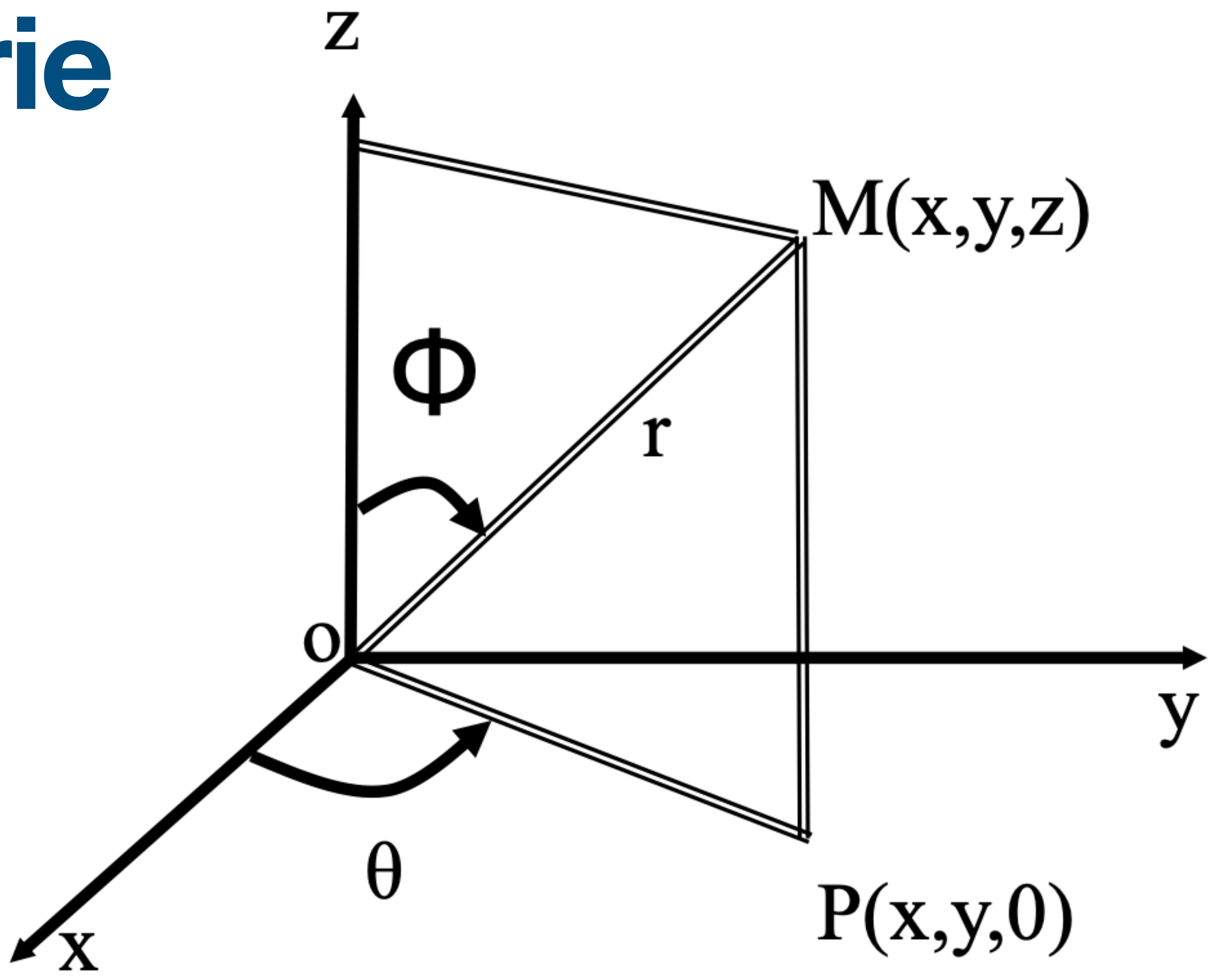
Angles et cercle trigonométrique :

- $Cos(0) = 1 \quad Cos(\pi) = -1$
- $Cos(\dfrac{\pi}{2}) = 0 \quad Cos(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{1}{2}$
- $Sin(\dfrac{\pi}{2}) = 1 \quad Sin(\dfrac{-\pi}{2}) = -1$
- $Sin(0) = 0 \quad Sin(\dfrac{\pi}{6}) = \dfrac{1}{2}$



Rappels de trigonométrie

Coordonnées sphériques



Coordonnées sphériques :

Soit M(x, y, z) un point de l'espace.

Soit r la distance entre M et O(0, 0, 0).

Soit ϕ l'angle entre l'axe Z et le vecteur

OM qui est compris entre 0 et π.

Soit P(x, y, 0) la projection orthogonale de M sur le plan xOy.

Soit θ l'angle entre l'axe X et le vecteur OP qui est compris entre 0 et 2π.

Le triplet (r, θ, ϕ) constitue les coordonnées sphériques de M.

Rappels de trigonométrie

Coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques :

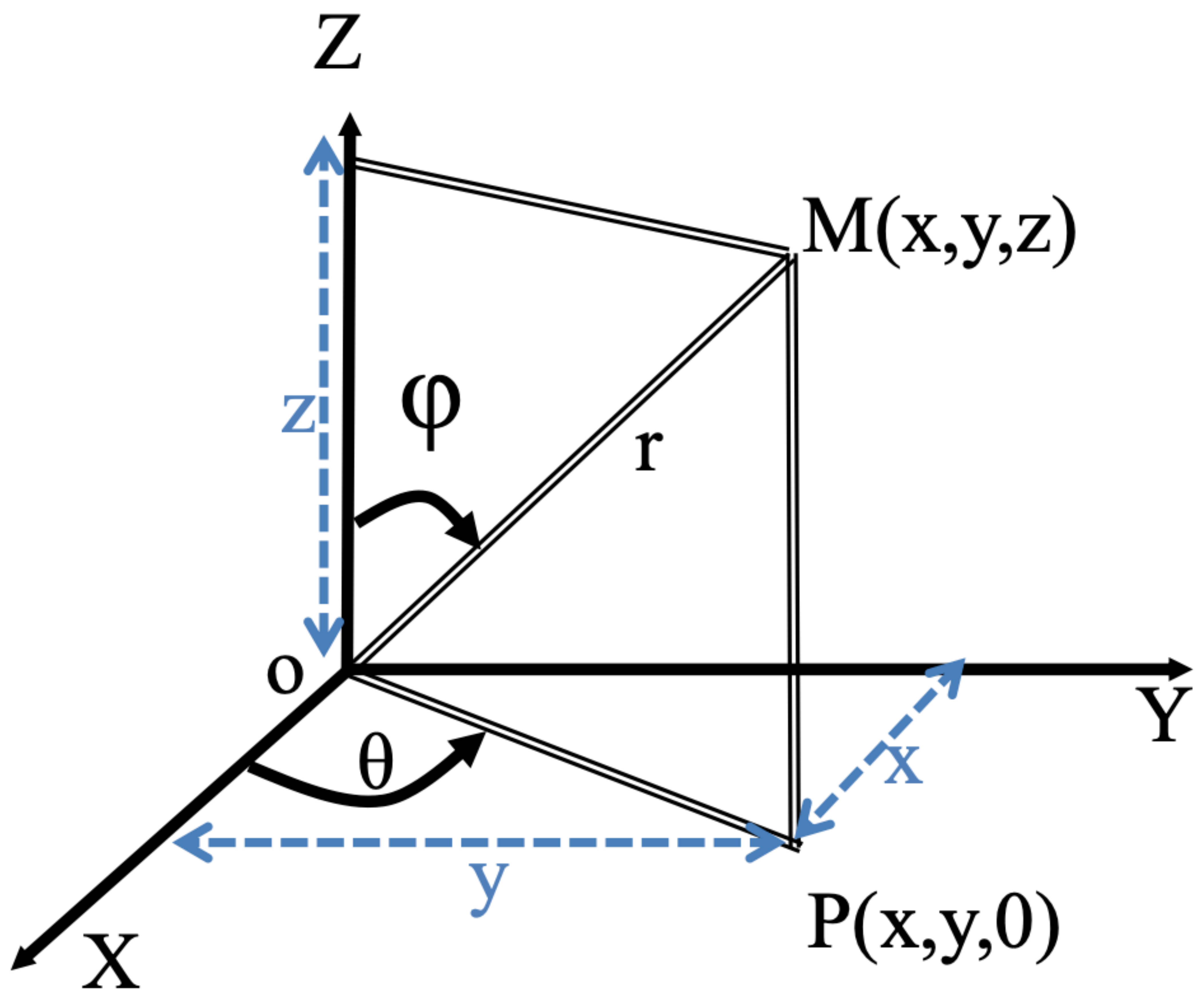
$Cos(\phi) = PM/OM$ $z = rCos(\phi)$

$Cos(90-\phi) = OP/OM$ $OP = rSin(\phi)$

$x/OP = Cos(\theta)$ $x = rSin(\phi)Cos(\theta)$

$y/OP = Sin(\theta)$ $y = rSin(\phi)Sin(\theta)$

$$x = rSin(\phi)Cos(\theta)$$
$$y = rSin(\phi)Sin(\theta)$$
$$z = rCos(\phi)$$



Représentation continue et polyédrique

Définition d'un polyèdre

- Un polyèdre est une surface définie de manière finie
- Deux ensembles le définisse :
    - Un ensemble de points de $\mathbb{R}^3$ appelés les sommets.
    - Un ensemble de faces, chacune définies par une suite de sommets

Représentation continue et polyédrique

Exemple du cube

L'ensemble de sommets :

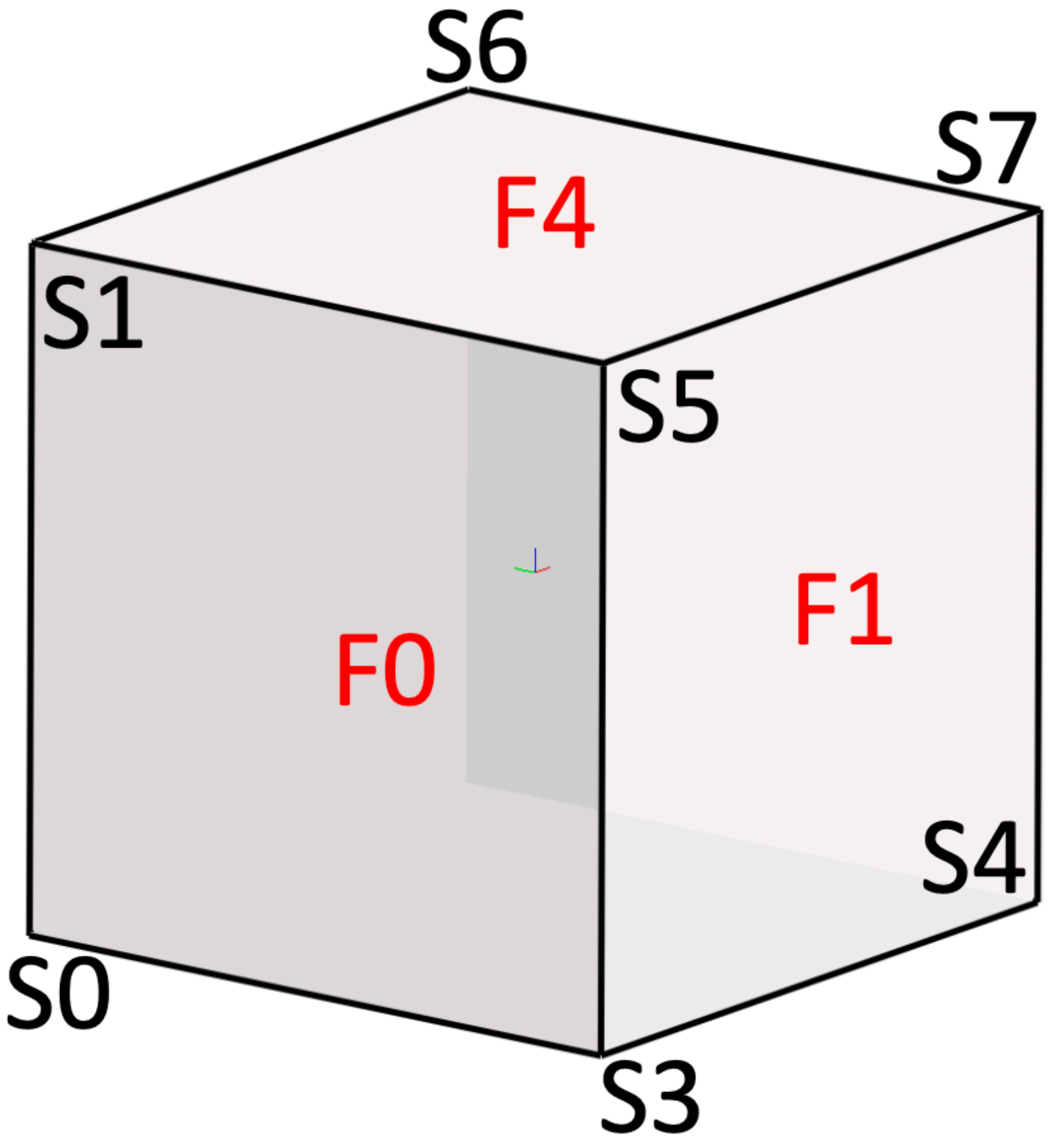
$[S0(-5,-5,-5); S1(-5,-5,5); S2(-5,5,-5), S3(5,-5,-5);$

$S4(5,5,-5); S5(5,-5,5) S6(-5,5,5); S7(5,5,5)]$

L'ensemble de faces :

$[F0(S0,S1,S5,S3); F1(S5,S7,S4,S3); F2(S7,S4,S2,S6);$

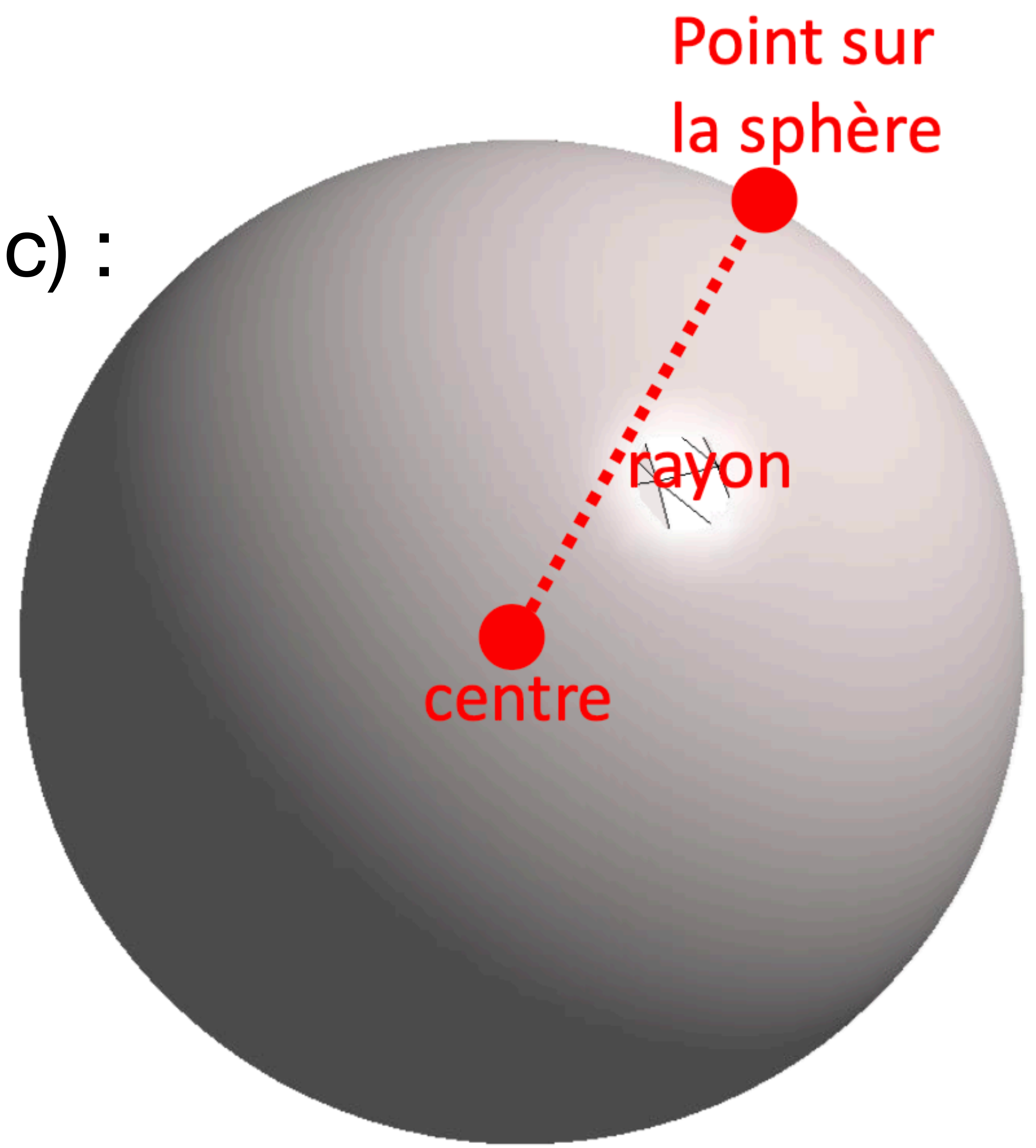
$F3(S6,S2,S0,S1); F4(S1,S5,S7,S6); F5(S0,S3,S4,S2)]$



Représentation continue et polyédrique

Définition d'une surface continue

- Une surface continue est définie par une équation
  - Par exemple pour une sphère de centre C = (a, b, c) :
    $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$
- L'objet est ainsi défini par un nombre infini de points sur sa surface, **contrairement au polyèdre**.



Quadriques

Définition

La classe des surfaces quadriques contient les cylindres, les cônes, les sphères, les ellipsoïdes, les paraboloïdes, les hyperboloïdes..

Une quadrique a une équation implicite de degré 2 de la forme $F(x, y, z) = 0$ avec :

$F(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + 2Dx + Ey2 + 2Fyz + 2Gy + Hz2 + 2Iz + J$

Pour une sphère d'équation $(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = r^2$:

$X^2 - 2Xa + Y^2 - 2Yb + Z^2 - 2c + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$

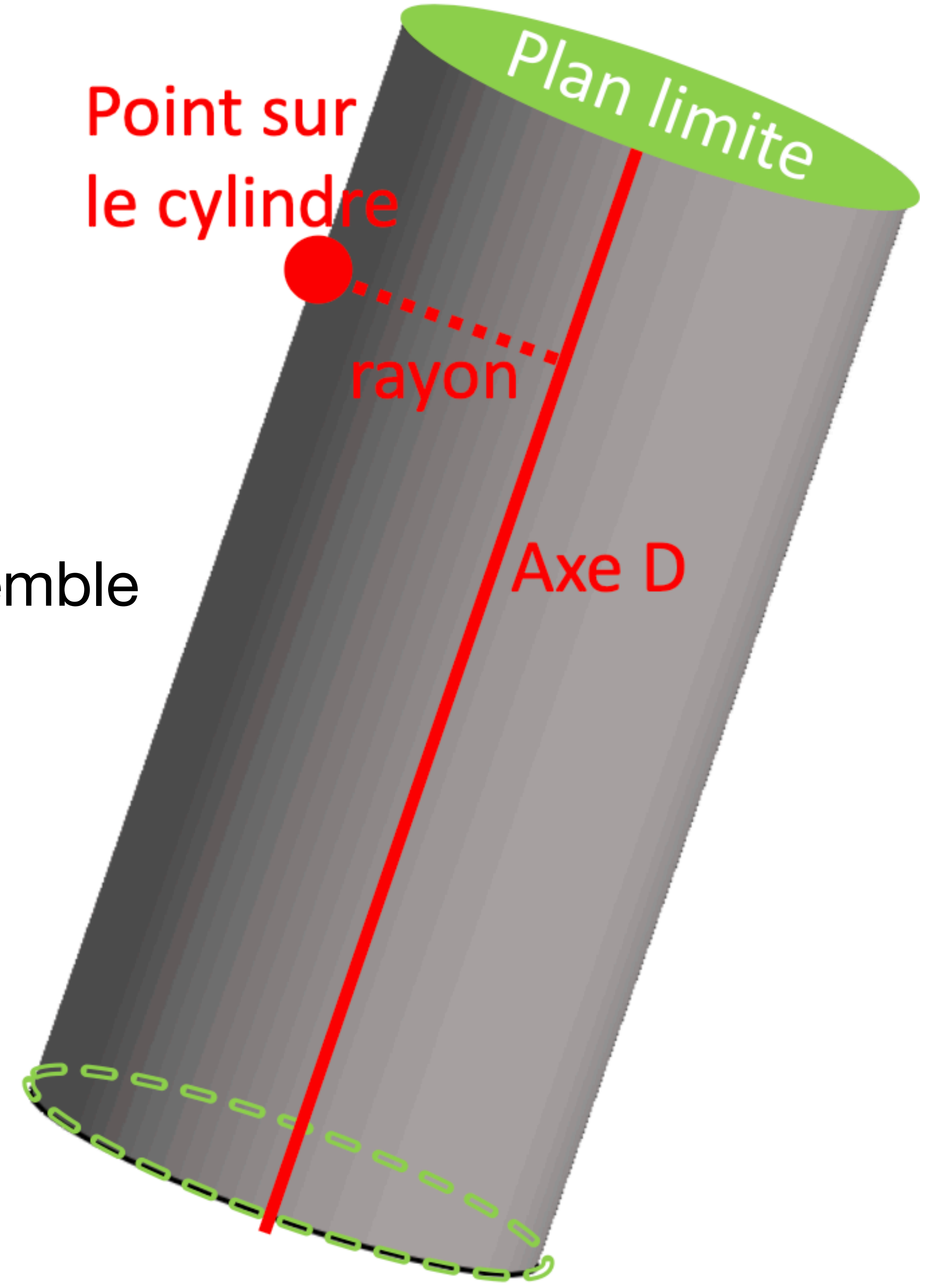
On retrouve $F(x, y, z)$ avec $A = 1, E = 1, H = 1$, $D = Xc, G = Yc, I = Zc$ et $J = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$

Quadriques

Cylindres

Un cylindre est défini:

- par une droite et un rayon,
- le cylindre de révolution d'axe D et de rayon r est constitué de l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ qui sont situés à distance r de la droite D.



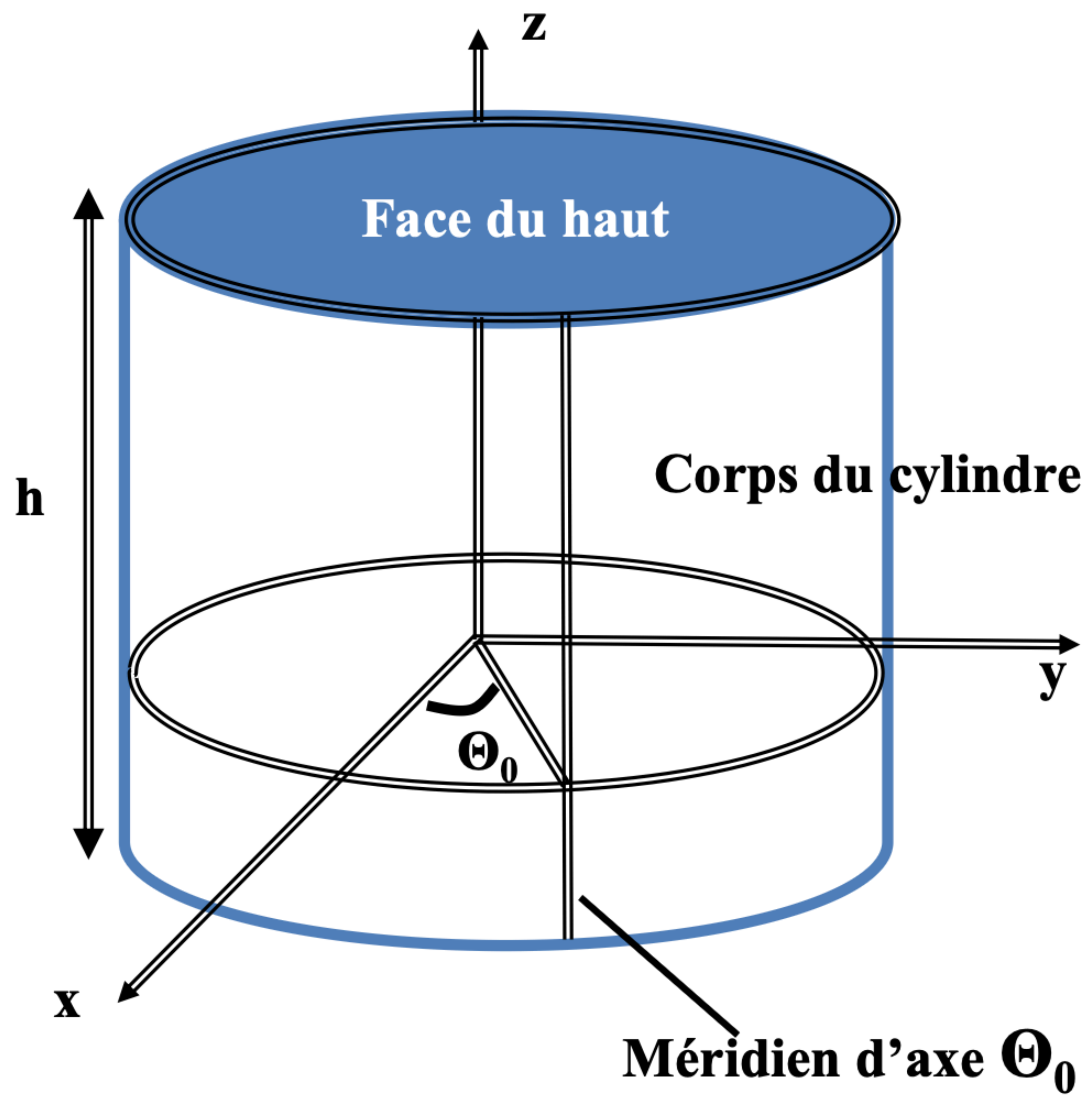
Le cylindre qui coïncide avec l'axe Oz:

- a pour équation $x^2 + y^2 = r^2$
- sa hauteur est définie par un nombre réel positif : h
- h permet de définir les deux plans limites du cylindres à $-\frac{h}{2}$ et $\frac{h}{2}$.

Quadriques

Cylindres : méridiens

Les méridiens sur un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h sont les segments de droites contenus dans le corps du cylindre, lui aussi de longueur h, parallèles à l'axe du cylindre.



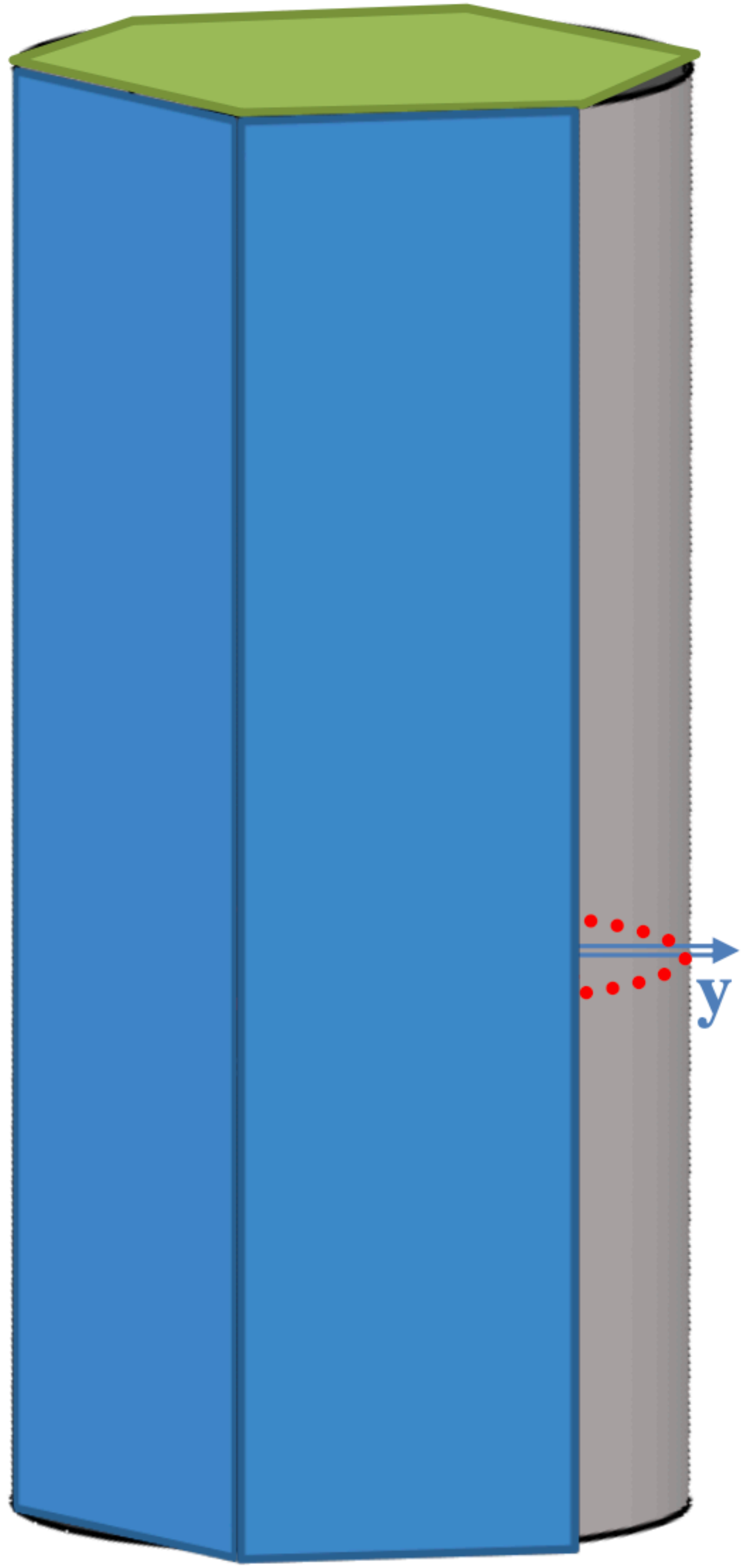
Quadriques

Cylindres : Facettisation

- Etant donné un nombre de méridien m, nous allons considérer des méridiens M_i d'angle θ_i ,pour $i = 0,\ldots,m$ régulièrement disposé sur le corps du cylindre.

- Construire ensuite des facettes rectangulaires entre les méridiens M_i et M_{i+1}, pour $i = 0,\ldots,m-1$.

- Construire ensuite deux facettes pour les faces du haut et du bas du cylindre.



Quadriques

Cylindres

Création du polyèdre correspondant (sommets):

- Les sommets peuvent être utilisés par plusieurs polyèdres, mais aussi par les plans limites.
- Pour les construire : on étudie chaque méridien dont les angles varient entre 0 et 2π tel que $\theta_i = 2\pi\frac{i}{m}$ avec $i = 0,\ldots,m-1$.
  Soit le méridien M_i d'angle θ_i : on définit deux sommets :
  - Coordonnées cartésiennes de P_i (en $-\frac{h}{2}$)
    - $x = rCos(\theta_i)$
    - $y = rSin(\theta_i)$
    - $z = -\frac{h}{2}$
  - Coordonnées cartésiennes de P_i' (en h/2)
    - $x = rCos(\theta_i)$
    - $y = rSin(\theta_i)$
    - $z = \frac{h}{2}$

Quadriques

Cylindres

Création du polyèdre correspondant (facettes):

- Facettes entre les méridiens:

  Pour $i = 0,\ldots,m-1$ la facette numéro i est composée des 2 sommets du méridien M_i et de ceux du méridien M_{i+1} soit : $F_i = [P_i, P'_i, P'_{i+1}, P_{i+1}]$

- Facette du bas :

  Une face $[P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}]$

- Facette du haut :

  Une face $[P'_{m-1}, \ldots, P'_1, P'_0]$
  (L' Ordre d'énumération est inversé pour garder une orientation cohérente).

Quadriques

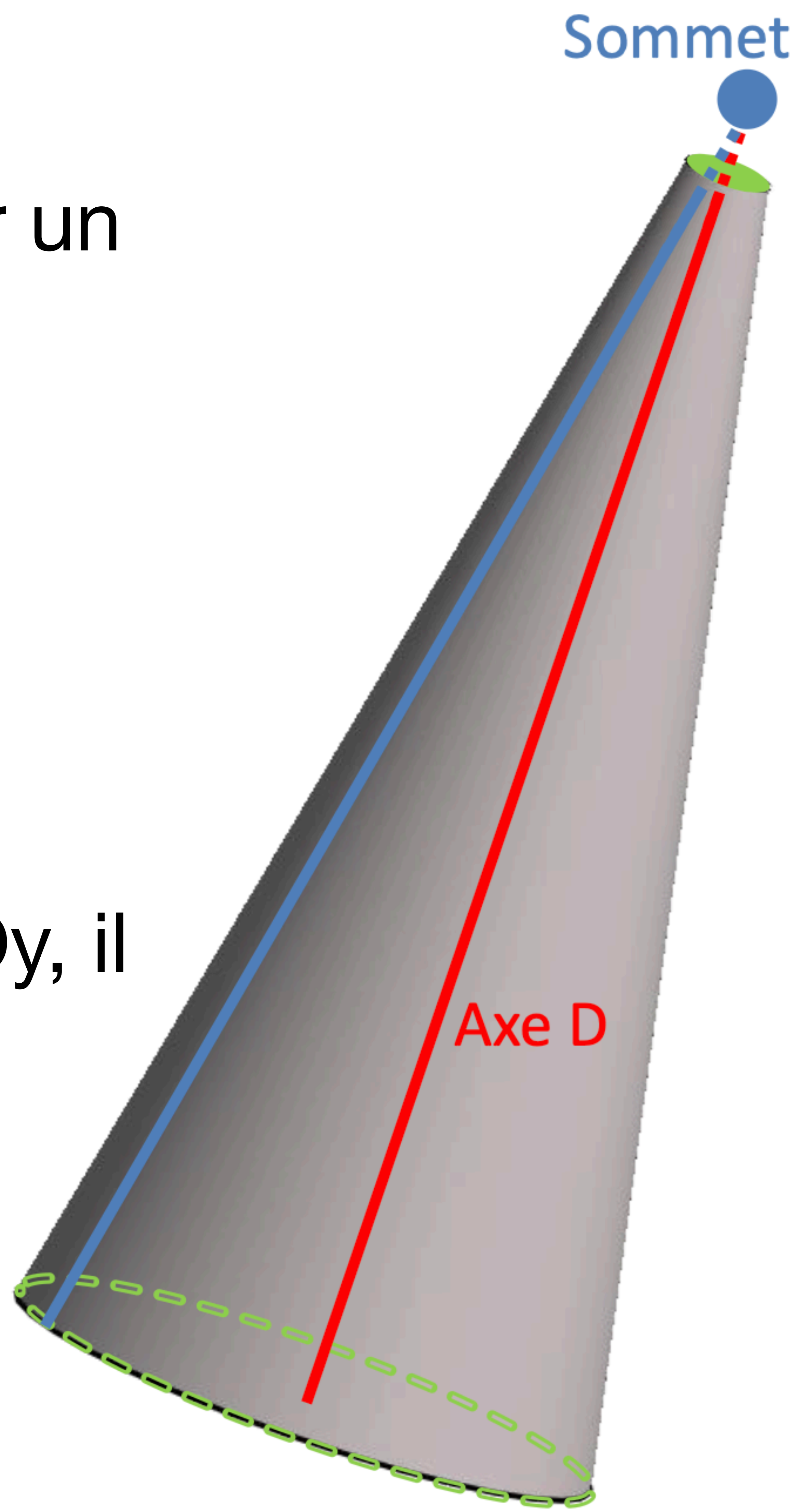
Cônes

Un cône est défini par un ensemble de droite passant toutes par un sommet (sommet du cône) et s'appuyant sur une courbe (base) dans le cas d'un cylindre de révolution, la base est un cercle.

Equation du cône d'axe Z :

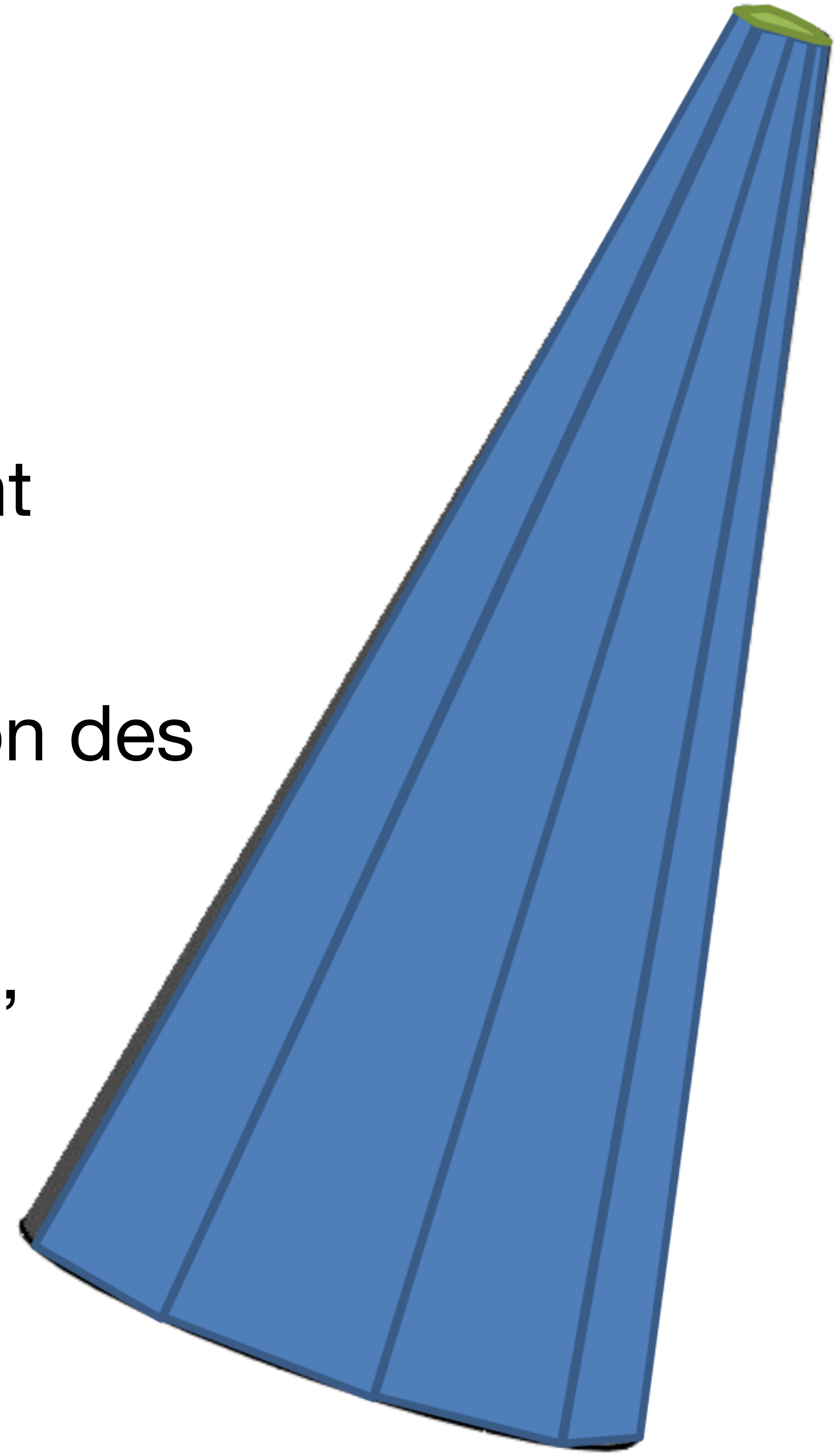
- le sommet $S = (0,0,Z_{sommet})$
- le cercle de rayon r est centré en O et appartient au plan xOy, il a pour équation :

$$(z - z_{sommet})^2 = \frac{z_{sommet}^2}{r^2(x^2 + y^2)}$$



Quadriques

Cônes : Facettisation



- À partir des méridiens définis par Θ_i, $2m$ sommets sont nécessaires
- leur construction est identique à celle de la construction des sommets du cylindres
- on construit des faces trapézoïdale entre les méridiens,
- construction de 2 faces pour les plans limites.

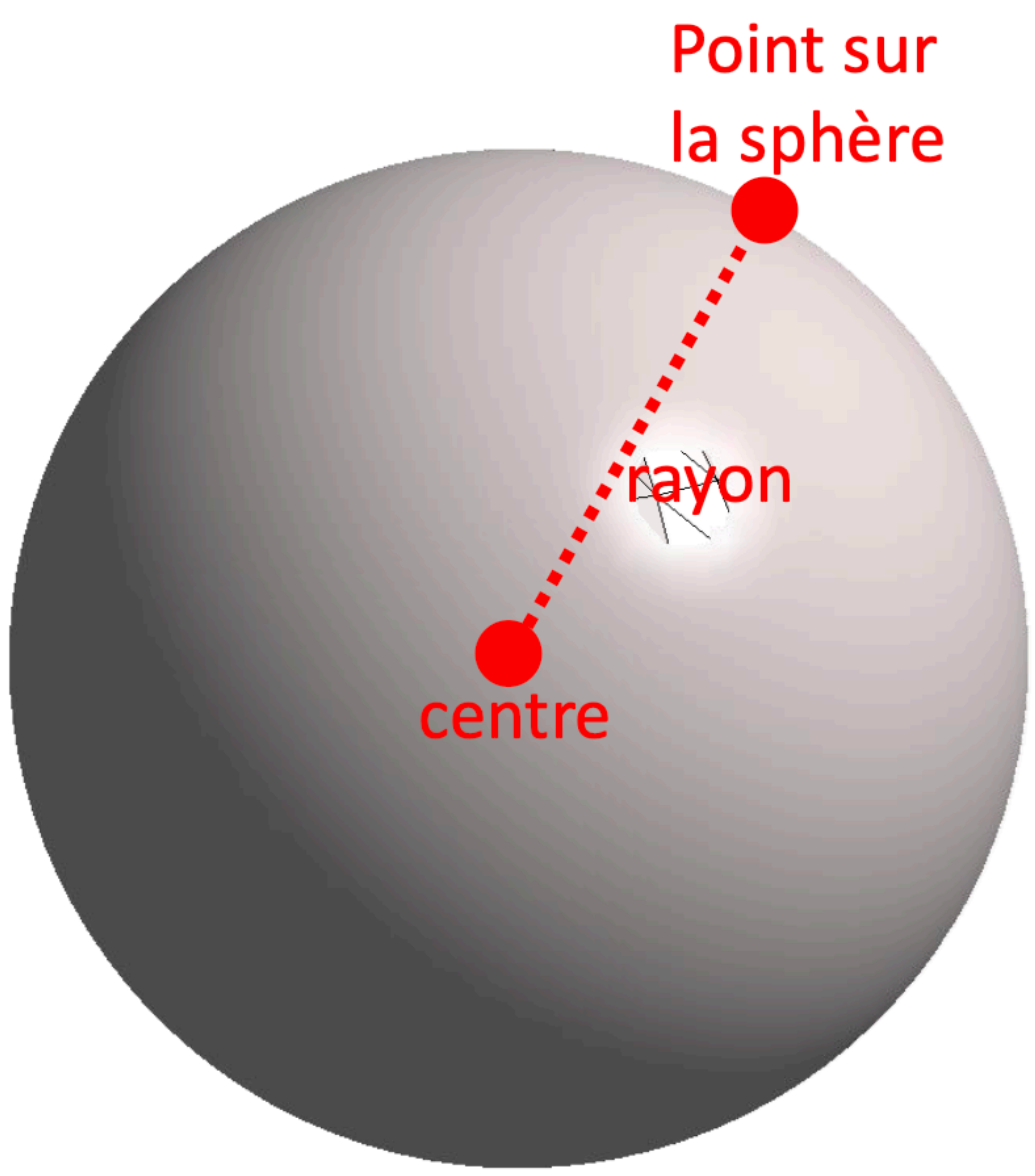
Quadriques

Sphères

Une sphère est définie par un centre et un rayon, elle est constituée d'un ensemble de points à distance r du centre.

Equation de la sphère de centre O :

- Le sommet $O = (0,0,0)$ est au centre de l'espace pour simplifier l'équation (On peut facilement translater).
- Il s'agit de l'ensemble des points $M = (x_m, y_m, z_m)$ de l'espace, de coordonnées sphériques $(r_m, \varphi_m, \theta_m)$
- Elle a pour équation $x_m^2 + y_m^2 + z_m^2 = r^2$

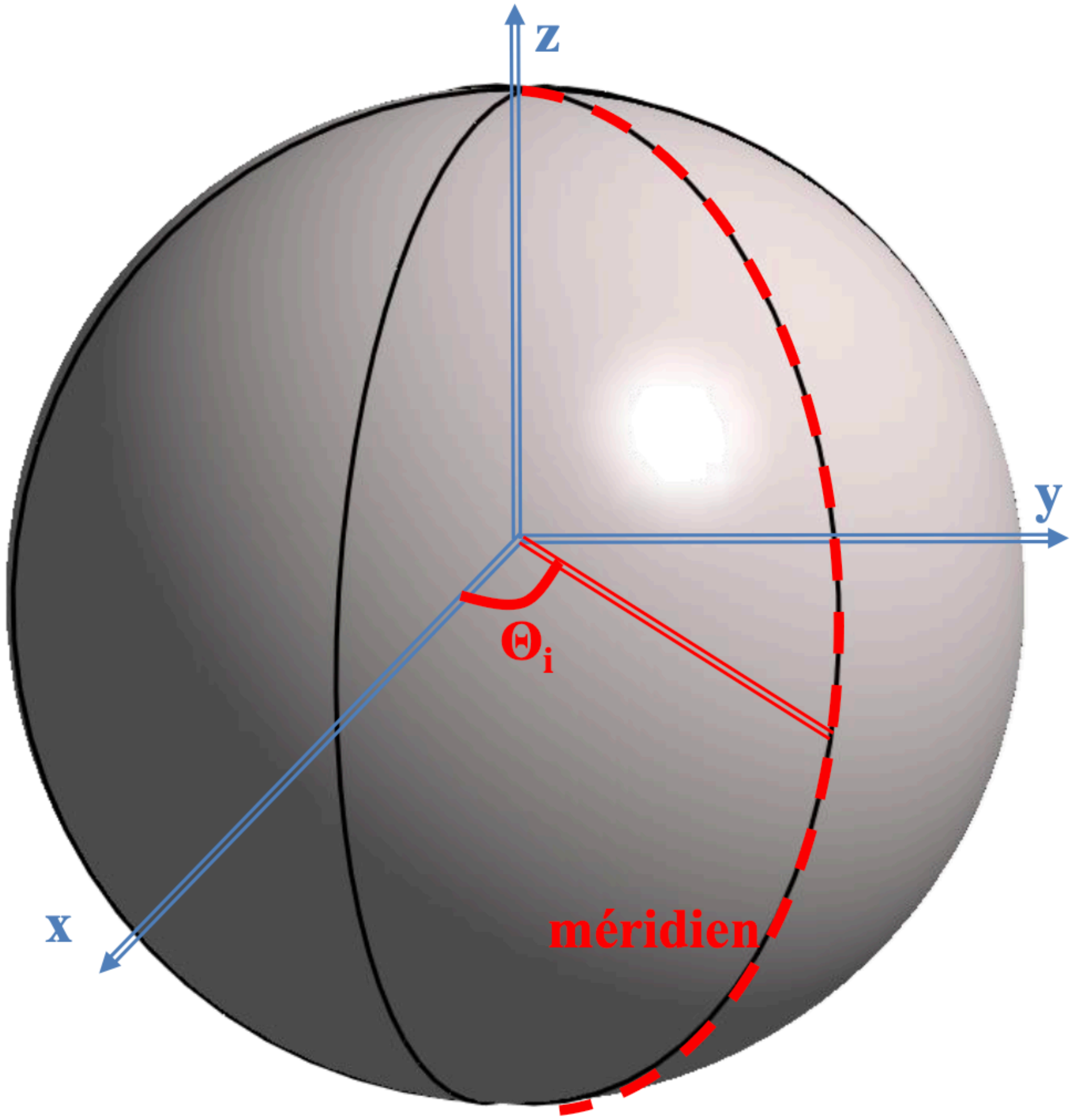


Quadriques

Sphères : Les méridiens

Un méridien sur la sphère S_r est un demi-cercle formé de l'ensemble des points Mde coordonnées sphériques (r, φ_m, θ_m) tels que l'angle θ_m soit fixé égal à une certaine valeur.

Soit $\theta_i \in [0,2\pi[$ le méridien i de S_r d'angle θ_i est constitué de l'ensemble des points M tels que $\theta_m = \theta_i$.

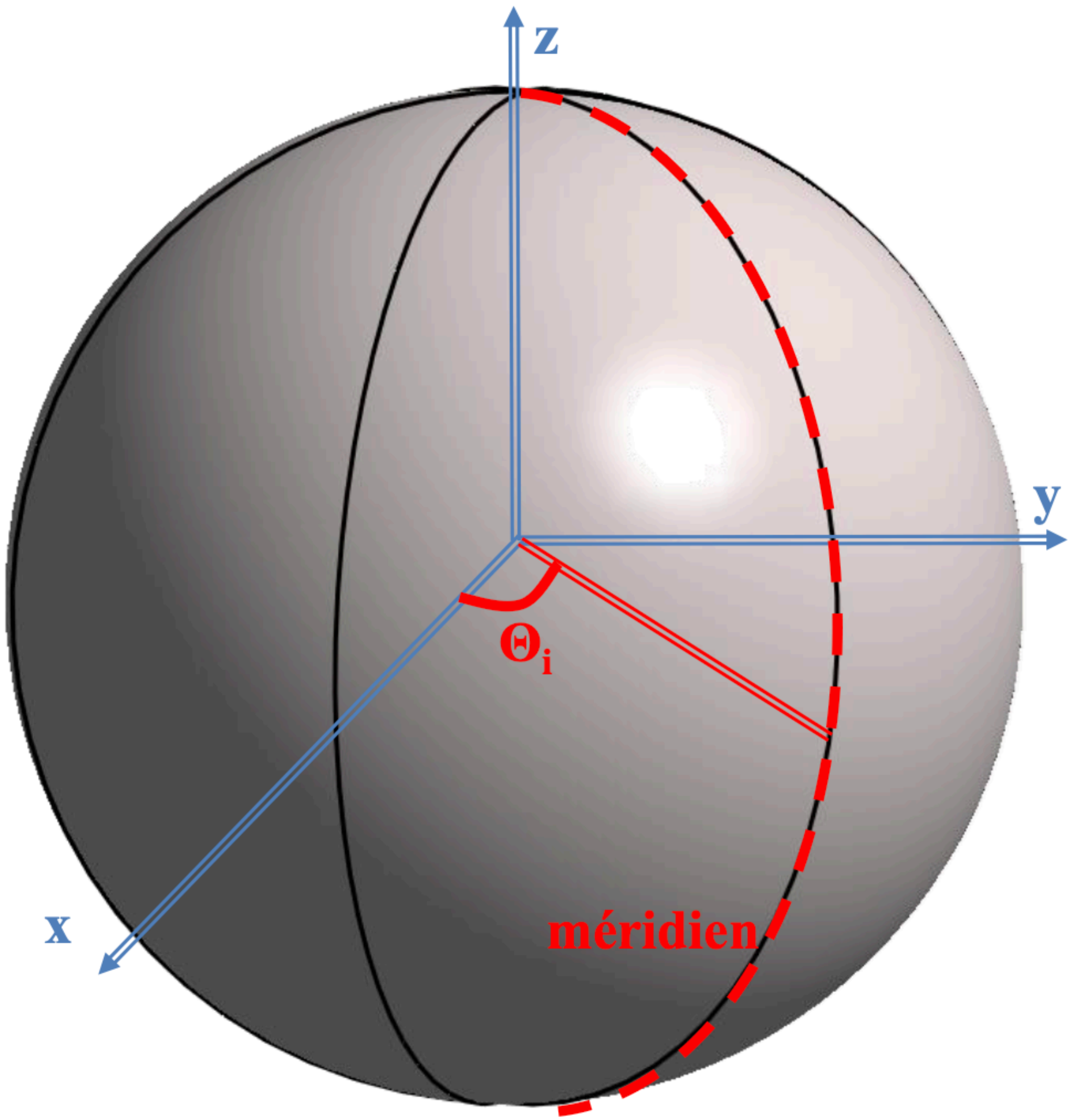


Quadriques

Sphères : Les parallèles

Etant donné $\Phi_i \in]0,\pi[$:

Le parallèle d'angle Φ_i de la sphère S_r est le cercle constitué de l'ensemble des points $M = (r, \Phi_m, \theta_m)$ de S_r tels que $\Phi_m = \Phi_i$.

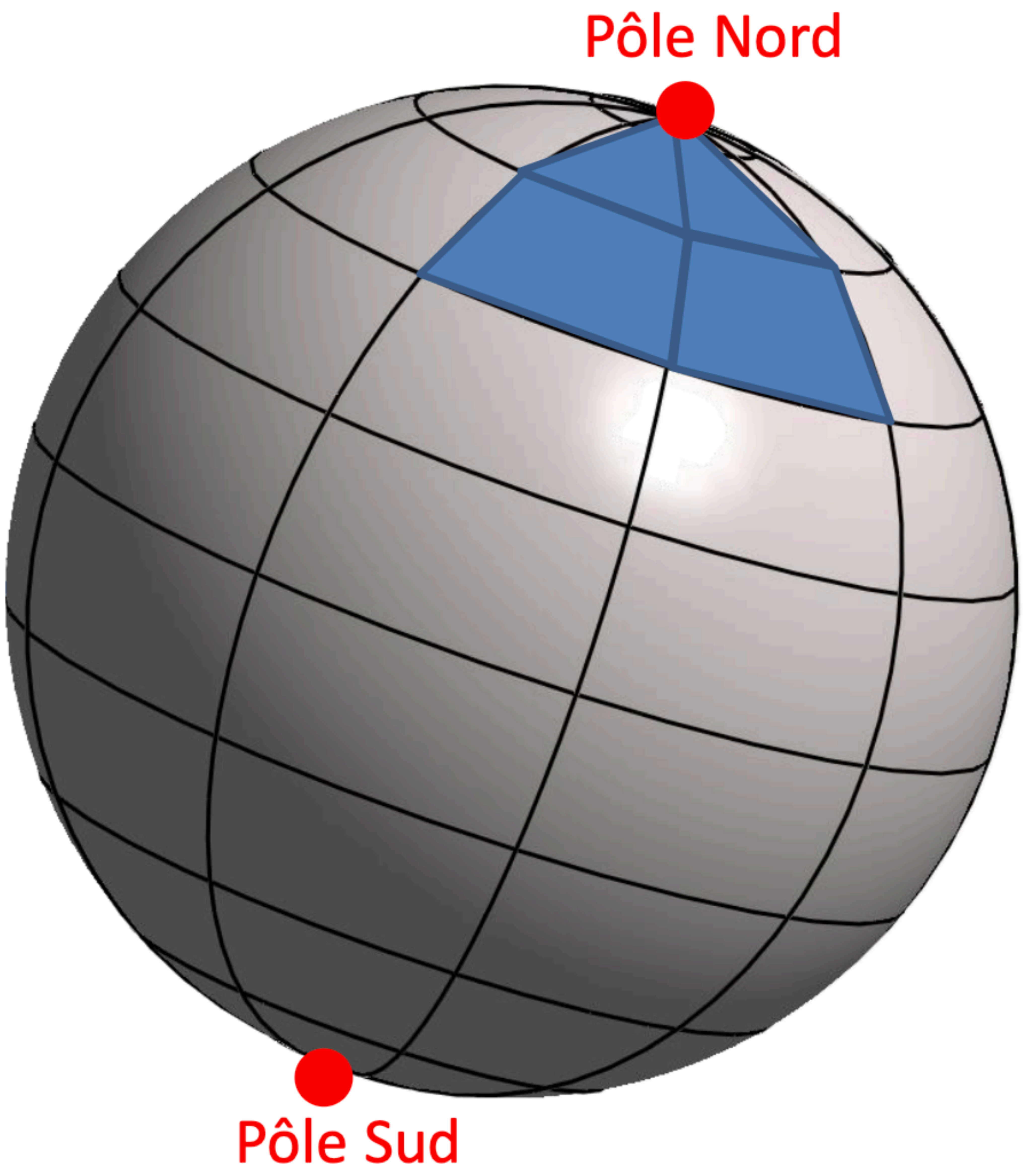


Quadriques

Sphères : Facettisation

On découpe la sphère en m méridiens et p parallèles :

- Avec $m \geq 3$ et $p \geq 2$
- $N = (0,0,r)$ est appelé le pôle nord
- $S = (0,0,-r)$ est appelé le pôle sud
- Des faces à 3 ou 4 sommets sont créées.



Conclusion

Représentation surfacique :

- Soit de manière continue
- Soit de manière polyédrique

Transformation de surface continue à surface facettée :

- À partir de l'équation d'une surface, on peut construire une facettisation de la surface
- L'équation mathématique sous-jacente peut permettre de faire varier la résolution du modèle facettisé.