

MEKANIKA KUANTUM

Teori Dasar dan Aplikasi

JOVAN ALFIAN DJAJA

Kata Pengantar

Buku ini berisi catatan fisika kuantum 2 penulis yang dirangkum dari berbagai literatur. Berawal dari catatan yang tidak terstruktur, buku ini disusun agar catatan tersebut dapat direpresentasikan dengan lebih terstruktur, lebih koheren, dan mudah dikembangkan. Buku ini dirancang untuk memiliki pembahasan yang lengkap dan formal, namun tetap mudah dipahami. Namun demikian, tentu saja penulis tidak dapat memasukkan semua topik fisika statistik dalam buku ini. Topik yang ada dalam buku ini hanyalah topik - topik fundamental yang penulis anggap esensial dalam memahami fisika statistik.

Penulis berharap buku ini dapat bermanfaat bagi seluruh pembacanya, khususnya untuk kalangan mahasiswa. Selain itu, buku ini juga diharapkan untuk semakin menumbuhkan ketertarikan pembacanya dalam bidang sains, khususnya fisika statistik.

Desain buku ini diadaptasi dari buku *Produksi Elektromagnetik Kaon : Teori Dasar dan Formalisme* karya Prof. Dr. Terry Mart.

JOVAN ALFIAN DJAJA

Daftar Isi

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	iv
Daftar Gambar	v
Daftar Tabel	v
1 MENGAPA MEKANIKA KUANTUM?	1
2 OSILATOR HARMONIK	2
2.1 Spektrum Energi dan Fungsi Gelombang	2
2.1.1 Metode Aljabar	3
2.1.2 Metode Operator : Operator Kreasi dan Anihilasi	9
2.2 Keadaan Koheren	11
3 MOMENTUM ANGULAR	12
3.1 Momentum Angular Orbital	12
3.1.1 Nilai <i>Eigen</i> dan Operator Tangga	13
3.1.2 Keadaan <i>Eigen</i>	14
3.2 Spin	14
3.2.1 Percobaan Stern-Gerlach	15
3.2.2 Percobaan Stern-Gerlach Berulang	16
3.2.3 Operator Spin	19
3.2.4 Aljabar Spin	23
3.2.5 Spinor	24
3.2.6 Spin dalam Medan Magnet	24
3.3 Penjumlahan Momentum Angular	24
4 MEKANIKA MATRIKS	25
4.1 Keadaan Basis	25
4.2 Representasi Matriks dari Operator	27

4.3	Perubahan Basis	28
4.4	Contoh Representasi Matriks	28
4.4.1	Operator Kreasi dan Anihilasi	28
4.4.2	Posisi dan Momentum dalam Osilator Harmonik	28
4.4.3	Momentum Sudut	28
5	ATOM HIDROGEN	29
5.1	Fungsi Gelombang	29
5.1.1	Persamaan Radial	30
5.1.2	Persamaan Angular	30
5.2	Spektrum Energi	30
6	INTERAKSI PARTIKEL DENGAN MEDAN	31
6.1	Persamaan Maxwell	31
6.2	Transformasi dan Invariansi Tera	32
6.2.1	Tera Coulomb dan Lorenz	33
6.3	Substitusi Minimal	34
6.3.1	Mengapa $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$?	36
6.4	Invariansi Tera Persamaan Schrödinger	38
6.5	Partikel dalam Medan Magnet Konstan	41
6.5.1	Tingkat-Tingkat Landau	43
6.6	Efek Hall Kuantum	46
6.6.1	Perhitungan Klasik	46
6.6.2	Perhitungan Kuantum	48
6.7	Monopol Magnet	49
6.8	Efek Aharonov-Bohm	51
6.9	Kuantisasi pada Superkonduktor	53
7	TEORI PERTURBASI TAK BERGANTUNG WAKTU	55
7.1	Konsep Perturbasi	55
7.2	Kasus <i>Nondegenerate</i>	55
7.2.1	Osilator Anharmonik	60
7.3	Kasus <i>Degenerate</i>	62
7.3.1	Efek Stark	67
7.3.2	Efek Zeeman	68
8	APROKSIMASI WKB	69
9	TEORI PERTURBASI BERGANTUNG WAKTU	70
9.1	Hamiltonian yang Bergantung Waktu	70
9.2	Amplitudo dan Peluang Transisi	70

9.3	Aturan Emas Fermi	73
9.3.1	Perturbasi Konstan	76
10	APROKSIMASI ADIABATIK	80
11	TEORI HAMBURAN	81
11.1	Konsep Hamburan Elastik	81
11.2	Persamaan Schrödinger untuk Hamburan Elastik	82
11.3	Penampang Lintang	83
11.4	Analisis Gelombang Parsial	83
11.5	Pergeseran Fase	83
11.6	Aproksimasi Born	83
11.7	Deret Born	83
	Daftar Pustaka	83
	Indeks	84

Daftar Gambar

3.1	<i>Setup</i> eksperimen Stern-Gerlach.	15
3.2	<i>Setup</i> eksperimen Stern-Gerlach berulang. Keadaan $ x-\rangle$ tidak kita perhitungkan sementara keadaan $ x+\rangle$ diukur lagi komponen z -nya. . .	17
6.1	Ilustrasi material dua dimensi berukuran $\ell_1 \times \ell_2$	45
6.2	<i>Setup</i> percobaan efek Hall.	47
6.3	Efek Aharonov-Bohm pada solenoid yang sangat panjang.	51
6.4	Tampak atas dari efek Aharonov-Bohm pada solenoid yang sangat panjang.	53
6.5	Partikel bermuatan q yang bergerak dalam lintasan lingkaran berjari-jari b mengelilingi solenoid panjang berdiameter $2a$ yang dialiri arus listrik I .	54
9.1	Plot peluang transisi sebagai fungsi ω_{fi} untuk kasus perturbasi konstan.	79
9.2	Plot peluang transisi sebagai fungsi waktu untuk kasus perturbasi konstan.	79
11.1	Ilustrasi proses hamburan sederhana	81
11.2	Partikel datang ke daerah dengan potensial $V(\mathbf{r})$ searah sumbu z positif.	83

Daftar Tabel

2.1	Tujuh polinomial Hermite pertama.	8
3.1	Nilai spin beberapa partikel fundamental.	23

Bab 1

MENGAPA MEKANIKA KUANTUM?

Bab 2

OSILATOR HARMONIK

Osilator harmonik adalah topik yang banyak dikaji dalam fisika karena muncul dalam banyak fenomena fisis. Umumnya, osilator harmonik diasosiasikan dengan sistem massa-pegas dimana balok bermassa m dipasang pada pegas dengan konstanta k . Namun, tentu saja ada banyak contoh lain, misalnya pada rangkaian RLC ataupun model ikatan *quark*.

Dalam mekanika kuantum, Hamiltonian osilator harmonik satu dimensi dalam ruang posisi diberikan oleh

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, \quad (2.1)$$

dimana ω adalah **frekuensi angular** dari osilator tersebut. Dengan demikian, tujuan kita adalah menyelesaikan persamaan Schrödinger bebas waktu untuk Hamiltonian (2.1). Persamaan tersebut diberikan oleh

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi, \quad (2.2)$$

dimana $\psi \equiv \psi(x)$. Untuk osilator harmonik dua atau tiga dimensi, generalisasi persamaan (2.2) dapat dilakukan dengan mudah.

2.1 Spektrum Energi dan Fungsi Gelombang

Umumnya, ada dua metode yang biasa digunakan untuk menyelesaikan persamaan (2.2), yaitu :

- **Metode Aljabar**

Dalam metode ini, kita menyelesaikan persamaan (2.2) tanpa mendefinisikan konsep baru. Artinya, kita mencari solusi persamaan (2.2) layaknya mencari solusi persamaan diferensial seperti biasa. Walaupun intuitif, kekurangan utama dari metode ini adalah kesulitan matematisnya.

- **Metode Operator**

Untuk mengatasi kesulitan yang ditemui pada metode aljabar, orang menggunakan metode lain yang sering disebut **metode operator**. Dalam metode ini, kita akan mendefinisikan dan menggunakan konsep **operator tangga** atau sering juga disebut **operator kreasi dan anihilasi**. Dengan menggunakan metode operator, kita akan jauh lebih mudah memperoleh spektrum energi osilator harmonik.

Sebagai catatan, kita hanya akan membahas osilator harmonik satu dimensi.

2.1.1 Metode Aljabar

Kita mulai dari persamaan Schrödinger untuk osilator harmonik satu dimensi, yaitu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi .$$

Persamaan ini jelas bukan persamaan diferensial yang mudah diselesaikan dan solusinya pun tidak mudah untuk ditebak. Oleh karena itu, langkah yang intuitif untuk kita ambil adalah menyelesaikan persamaan tersebut dengan **metode deret**. Namun, perhitungan akan lebih mudah untuk dilakukan jika kita menulis ulang persamaan (2.2) dalam variabel yang tidak berdimensi terlebih dahulu.

Pertama, kita akan mengganti koordinat x dengan suatu parameter tidak berdimensi u . Misalkan hubungan x dan u diberikan oleh

$$x = au , \quad (2.3)$$

dimana a adalah suatu besaran berdimensi panjang. Jelas bahwa a harus bisa dinyatakan dalam besaran yang relevan, yaitu \hbar , m , dan ω . Untuk menentukan bentuk a , kita cukup melakukan analisis dimensi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} [a] &= [\hbar]^\alpha [m]^\beta [\omega]^\gamma \\ &= ([M][L]^2[T]^{-1})^\alpha [M]^\beta ([T]^{-1})^\gamma \\ &= [M]^{\alpha+\beta} [L]^{2\alpha} [T]^{-\alpha-\gamma} \\ &= [L] . \end{aligned}$$

Dengan demikian, a dinyatakan dalam \hbar , m , dan ω adalah

$$a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \iff a^2 = \frac{\hbar}{m\omega} . \quad (2.4)$$

Dengan melakukan substitusi $x = au$ di persamaan (2.2), kita peroleh

$$-\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{d^2\psi}{du^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 u^2 \psi = E\psi , \quad (2.5)$$

dimana kita telah menggunakan aturan rantai

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\psi}{dx} \right) = \frac{du}{dx} \frac{d}{du} \left(\frac{du}{dx} \frac{d\psi}{dx} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{d^2\psi}{du^2} .$$

Dengan menggunakan definisi (2.4), persamaan (2.5) tereduksi menjadi

$$-\frac{1}{2}\hbar\omega \frac{d^2\psi}{du^2} + \frac{1}{2}\hbar\omega u^2\psi = E\psi \quad (2.6)$$

Definisikan parameter baru ε sebagai

$$\varepsilon \equiv \frac{E}{\frac{1}{2}\hbar\omega} = \frac{2E}{\hbar\omega} . \quad (2.7)$$

Dengan membagi kedua ruas persamaan (2.6) dengan $-\frac{1}{2}\hbar\omega$, kita peroleh persamaan

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{du^2} = (u^2 - \varepsilon) \psi} . \quad (2.8)$$

Persamaan (2.8) jelas jauh lebih sederhana untuk diselesaikan dibandingkan dengan persamaan (2.2) sehingga akan lebih mudah untuk diselesaikan.

Sebagai langkah pertama untuk mencari solusi persamaan (2.8), kita tinjau dulu perilaku asimtotiknya saat $u \rightarrow \infty$. Saat $u \rightarrow \infty$, maka $u^2 \gg \varepsilon$ dan persamaan (2.8) menjadi

$$\frac{d^2\psi}{du^2} \approx u^2\psi .$$

Walaupun tampak sederhana, persamaan diferensial tersebut tidak memiliki solusi yang trivial. *Ansatz* yang intuitif dan sekaligus sederhana untuk dicoba adalah polinomial, namun **tidak ada polinomial yang memenuhi persamaan diferensial tersebut**. Jika misalkan kita substitusikan *ansatz* $\psi(u) = u^k$ ke persamaan diferensial tersebut, kita peroleh

$$\psi(u) = u^k \iff k(k-1)u^k \not\approx u^{k+2} ,$$

yang jelas menunjukkan bahwa bentuk $\psi(u)$ tidak hanya polinomial saja. Artinya, kita membutuhkan suatu faktor tambahan yang dapat menghasilkan u ketika diturunkan namun juga tetap menghasilkan fungsi awalnya. Kita coba gunakan *ansatz*

$$\psi(u) \approx u^k e^{\lambda u^2/2} . \quad (2.9)$$

Turunan kedua *ansatz* $\psi(u)$ (2.9) terhadap u adalah

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{du^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{d\psi}{du} \right) = \frac{d}{du} \left(k u^{k-1} e^{\lambda u^2/2} + \lambda u^{k+1} e^{\lambda u^2/2} \right) \\ &= k(k-1) u^{k-2} e^{\lambda u^2/2} + \lambda k u^k e^{\lambda u^2/2} + \\ &\quad \lambda(k+1) u^k e^{\lambda u^2/2} + \lambda^2 u^{k+2} e^{\lambda u^2/2} \\ &= u^k e^{\lambda u^2/2} \left[k(k-1) u^{-2} + \lambda(2k+1) + \lambda^2 u^2 \right] \\ &\approx \lambda^2 u^2 \psi.\end{aligned}$$

Dengan demikian, jelas terlihat bahwa nilai λ yang diperbolehkan adalah $\lambda = \pm 1$. Artinya, *ansatz* (2.9) secara umum akan menjadi

$$\psi(u) \approx A u^k e^{u^2/2} + B u^k e^{-u^2/2}, \quad u \rightarrow \infty,$$

dimana A dan B adalah suatu konstanta. Namun, suku pertama jelas tidak akan menuju nol ketika $u \rightarrow \infty$ sehingga menyebabkan $\psi(u)$ **tidak dapat dinormalisasi**. Berhubung *ansatz* tersebut hanya valid saat $u \rightarrow \infty$, ini memotivasi kita untuk menuliskan *ansatz* secara umum, yaitu

$$\psi(u) = H(u) e^{-u^2/2}, \quad (2.10)$$

dimana $H(u)$ adalah suatu fungsi yang akan menuju u^k apabila $u \rightarrow \infty$. Tugas kita sekarang tereduksi menjadi mencari ekspresi dari $H(u)$. Substitusikan *ansatz* (2.10) ke persamaan (2.8) untuk memperoleh

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{du^2} &= \frac{d}{du} \left(\frac{d\psi}{du} \right) = \frac{d}{du} \left(H' e^{-u^2/2} - u H e^{-u^2/2} \right) \\ &= H'' e^{-u^2/2} - u H' e^{-u^2/2} - \\ &\quad H e^{-u^2/2} - u \left(H' e^{-u^2/2} - u H e^{-u^2/2} \right) \\ &= \left[H'' - 2u H' + (u^2 - 1) H \right] e^{-u^2/2} \\ &= (u^2 - \varepsilon) H e^{-u^2/2}.\end{aligned}$$

Dengan kata lain, kita memperoleh persamaan

$$\left[\frac{d^2 H}{du^2} - 2u \frac{dH}{du} + (\varepsilon - 1) H \right] e^{-u^2/2} = 0.$$

Karena $e^{-u^2/2} \neq 0$, persamaan yang harus kita selesaikan adalah

$$\frac{d^2 H}{du^2} - 2u \frac{dH}{du} + (\varepsilon - 1) H = 0. \quad (2.11)$$

Sayangnya, persamaan diferensial (2.11) tidak bisa diselesaikan dengan prosedur standar yang biasa digunakan untuk persamaan diferensial orde dua. Walau demikian, kita tahu bahwa $\psi(u)$ adalah fungsi yang *well-behaved*. Artinya, kita berharap bahwa $\psi(u)$ bisa dituliskan dalam bentuk polinomial atau dengan kata lain, $\psi(u)$ **memiliki ekspansi Taylor**.

Dengan motivasi tersebut, kita coba *ansatz* $H(u)$ sebagai berikut

$$H(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n. \quad (2.12)$$

Jika kita substitusikan *ansatz* (2.12) ke persamaan (2.11), kita peroleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2nc_n u^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon - 1)c_n u^n = 0. \quad (2.13)$$

Secara efektif, suku pertama dimulai dari $n = 2$. Artinya,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2} \implies \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2}.$$

Definisikan $j \equiv n - 2$. Kita peroleh perubahan

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n u^{n-2} \implies \sum_{j=0}^{\infty} (j+2)(j+1)c_{j+2} u^j.$$

Dalam sumasi tersebut, j hanya merupakan *dummy index*. Artinya, kita boleh mengganti j kembali menjadi n . Dengan demikian, persamaan (2.13) menjadi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1)c_{n+2} + (\varepsilon - 2n - 1)c_n \right\} u^n = 0. \quad (2.14)$$

Agar persamaan (2.14) berlaku, jelas bahwa haruslah

$$c_{n+2} = \frac{2n+1-\varepsilon}{(n+1)(n+2)} c_n. \quad (2.15)$$

Perhatikan relasi rekursi (2.15). Berdasarkan relasi rekursi ini, untuk membangun solusi $H(u)$ seperti *ansatz* (2.12), jelas bahwa kita membutuhkan nilai $c_0 = H(0)$ dan $c_1 = H'(0)$ sebagai keadaan awal. Ini tidak aneh mengingat persamaan yang sedang kita tinjau adalah persamaan diferensial orde dua.

Ingat bahwa *ansatz* $\psi(u)$ di persamaan (2.10) dikonstruksi berdasarkan perilaku $\psi(u)$ ketika $u \rightarrow \infty$ yang telah kita tinjau sebelumnya. Oleh karena itu, kita coba tinjau

perilaku relasi rekursi (2.15) ketika $n \rightarrow \infty$. Ketika $n \rightarrow \infty$, relasi rekursi (2.15) menjadi

$$c_{n+2} = \frac{2n+1-\varepsilon}{(n+1)(n+2)} c_n \approx \frac{2n}{n^2} c_n = \frac{2}{n} c_n.$$

Bagaimana bentuk c_n yang memenuhi relasi rekursi tersebut? Kita bisa terus mengulang pola rekursif tersebut untuk memperoleh

$$\begin{aligned} c_n &\approx \frac{2}{n-2} c_{n-2} \approx \frac{2}{(n-2)} \cdot \frac{2}{(n-4)} \cdot \frac{2}{(n-6)} \cdot \dots \cdot \alpha \\ &= \frac{1}{n/2-1} \cdot \frac{1}{n/2-2} \cdot \frac{1}{n/2-3} \cdot \dots \cdot \alpha \\ &= \frac{A}{n/2(n/2-1)(n/2-2)(n/2-3) \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \frac{A}{(n/2)!}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

dimana α dan A adalah suatu konstanta. Kita substitusikan c_n tersebut ke *ansatz* (2.12) untuk memperoleh

$$H(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u^n = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n/2)!} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{2n} = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (u^2)^n = A e^{u^2}. \quad (2.17)$$

Dengan demikian, jika kita menggunakan bentuk $H(u)$ tersebut untuk mengkonstruksi $\psi(u)$, kita akan mendapatkan

$$\psi(u) = H(u) e^{-u^2/2} = A e^{u^2} e^{-u^2/2} = A e^{u^2/2}$$

yang jelas menunjukkan $\psi(u)$ **tidak bisa dinormalisasi** karena $\psi(u) \rightarrow \infty$ ketika $u \rightarrow \infty$. Bagaimana cara mengatasi masalah ini? Solusinya adalah kita harus mensyaratkan bahwa **relasi rekursi (2.15) harus berhenti untuk suatu nilai c_n tertentu**. Ini akan memastikan $H(u)$ **merupakan suatu polinomial** sehingga $\psi(u)$ dapat dinormalisasi.

Jika kita syaratkan hal tersebut, haruslah $c_{n+2} = 0$ untuk suatu nilai c_n . Namun, jelas bahwa $c_n \neq 0$. Artinya, satu-satunya jalan agar solusi deret ini berhenti adalah haruslah berlaku

$$2n+1 = \varepsilon \quad (2.18)$$

untuk nilai n tertentu. Dengan mengingat bahwa $\varepsilon = 2E/\hbar\omega$, kita peroleh

$$E = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (2.19)$$

yang tidak lain merupakan **spektrum energi** dari osilator harmonik. Berdasarkan relasi rekursi (2.15), solusi fungsi gelombang osilator harmonik akan berbentuk

$$\psi_n(u) = H_n(u)e^{-u^2/2} = (c_n u^n + c_{n-2} u^{n-2} + c_{n-4} u^{n-4} + \dots)e^{-u^2/2}.$$

Ingat kembali bahwa $H_n(u)$ yang sekarang sudah dijustifikasi merupakan sebuah polinomial memenuhi persamaan diferensial (2.11). Sebenarnya, persamaan diferensial tersebut sudah diselesaikan¹ oleh matematikawan Perancis bernama **Charles Hermite** pada tahun 1864. Oleh karena itu, persamaan diferensial (2.11) sering juga disebut **persamaan diferensial Hermite** dan solusinya, yaitu $H_n(u)$ disebut **polinomial Hermite**.

Tabel 2.1: Tujuh polinomial Hermite pertama.

$H_0(x) = 1$
$H_1(x) = 2x$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$
$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$
$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$
$H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1680x$

Langkah terakhir yang akan kita tempuh adalah mencari **konstanta normalisasi** dari fungsi gelombang osilator harmonik. Misalkan konstanta normalisasinya \mathcal{N} sehingga fungsi gelombang osilator harmonik dapat dinyatakan sebagai

$$\psi_n(u) = \mathcal{N} H_n(u) e^{-u^2/2}.$$

¹Sebenarnya, Pierre-Simon Laplace dan Pafnuty Chebyshev juga ikut berkontribusi.

Mengingat $u = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$, konstanta normalisasi \mathcal{N} dapat dicari sebagai berikut²

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx &= \mathcal{N}^2 \int_{-\infty}^{\infty} [H_n(u)]^2 e^{-u^2} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} du \\ &= \mathcal{N}^2 \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} [H_n(u)]^2 e^{-u^2} du \\ &= \mathcal{N}^2 \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} (\sqrt{\pi} 2^n n!) \\ &= \mathcal{N}^2 \left(\frac{\pi \hbar}{m\omega}\right)^{1/2} 2^n n! .\end{aligned}$$

Dengan demikian, konstanta normalisasi \mathcal{N} diberikan oleh

$$\mathcal{N} = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \quad (2.20)$$

sehingga fungsi gelombang osilator harmonik satu dimensi secara lengkap diberikan oleh

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) e^{-m\omega x^2/2} . \quad (2.21)$$

2.1.2 Metode Operator : Operator Kreasi dan Anihilasi

Tinjau kembali Hamiltonian osilator harmonik:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 .$$

Bentuk penjumlahan dua suku kuadrat tersebut mungkin akan mengingatkan kita kepada bentuk aljabar yang sering kita pelajari, yaitu

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) .$$

Sekilas mungkin terlihat bahwa

$$\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2 \stackrel{?}{=} \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + i\omega\sqrt{\frac{m}{2}}\hat{x}\right) \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} - i\omega\sqrt{\frac{m}{2}}\hat{x}\right) .$$

²Integral yang berwarna biru tidak perlu kita kerjakan secara eksplisit karena mudah ditemukan di banyak literatur, misalnya buku *Mathematical Methods in the Physical Sciences* edisi ketiga karangan Mary L. Boas halaman 608.

Sayangnya, **faktorisasi tersebut salah**. Ini karena operator posisi \hat{x} dan momentum \hat{p} tidak *commute* sehingga suku silang yang biasanya saling menghilangkan, sekarang tidak saling menghilangkan. Untuk membuktikan, kita coba hitung hasil perkalian kedua faktor di atas:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + i\omega\sqrt{\frac{m}{2}}\hat{x} \right) \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} - i\omega\sqrt{\frac{m}{2}}\hat{x} \right) &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{i\omega}{2}(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}) \\ &= \hat{H} + \frac{i\omega}{2} \times i\hbar \\ &= \hat{H} - \frac{\hbar\omega}{2} . \end{aligned}$$

Hasil perkalian tersebut ternyata menunjukkan sesuatu yang menarik. Hamiltonian osilator harmonik dapat kita tulis ulang sebagai

$$\hat{H} = \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} + i\omega\sqrt{\frac{m}{2}}\hat{x} \right) \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m}} - i\omega\sqrt{\frac{m}{2}}\hat{x} \right) + \frac{\hbar\omega}{2}$$

Kita akan menulis ulang Hamiltonian tersebut menjadi bentuk yang lebih bermakna lagi. Pertama, faktorkan $\hbar\omega$ dari kedua suku.

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hbar\omega \left[\left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} \right) \left(\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} \right) + \frac{1}{2} \right] \\ &= \hbar\omega \left[\left\{ i \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \right) \right\} \left\{ -i \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \right) \right\} + \frac{1}{2} \right] \\ &= \hbar\omega \left[\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \right) \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \right) + \frac{1}{2} \right] \\ &\equiv \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Kita definisikan **operator anihilasi** \hat{a} dan **operator kreasi** \hat{a}^\dagger sebagai

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \quad \& \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{\sqrt{2m\omega\hbar}} . \tag{2.23}$$

Operator kreasi dan anihilasi merupakan dua operator yang sangat penting dan banyak digunakan dalam fisika kuantum, misalnya dalam **kuantisasi kedua** (*second quantization*) yang dibahas dalam teori medan kuantum.

Walaupun operator kreasi dan anihilasi jelas tidak bersifat *Hermitian*, namun kita lihat bahwa $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ bersifat *Hermitian*. $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ didefinisikan sebagai **operator bilangan** \hat{N} :

$$\hat{N} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a} . \tag{2.24}$$

2.2 Keadaan Koheren

Bab 3

MOMENTUM ANGULAR

Dalam mekanika klasik, kita sudah tahu bahwa momentum angular didefinisikan oleh

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} , \quad (3.1)$$

dengan \mathbf{r} adalah vektor posisi dan \mathbf{p} adalah vektor momentum. Konsep momentum angular ternyata juga ditemukan dalam mekanika kuantum, khususnya dalam sistem tiga dimensi seperti **atom hidrogen**.

Pada tahun 1922, fisikawan Jerman Otto Stern dan Walter Gerlach menemukan jenis momentum angular lain berdasarkan hasil eksperimen. Momentum angular ini disebut **momentum angular spin S** atau seringkali hanya disebut **spin**. Secara fundamental, \mathbf{S} dan $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ berbeda walaupun keduanya sama-sama merupakan momentum angular. Inilah mengapa secara formal, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ disebut sebagai **momentum angular orbital**.

3.1 Momentum Angular Orbital

Untuk membawa konsep momentum angular orbital ke dalam mekanika kuantum, tentu saja langkah pertama yang harus kita lakukan adalah mencari bentuk **operator momentum angular orbital**. Dengan menggunakan bentuk operator posisi dan momentum linear dalam ruang posisi pada persamaan (3.1), kita peroleh bentuk operator momentum angular orbital sebagai

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}} &= \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} \\ &= (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) \times \frac{\hbar}{i} \nabla \\ &= \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{x}} + \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{z}} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dengan demikian, kita dapat mengidentifikasi operator momentum angular orbital pada sumbu x , y , dan z sebagai

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right). \quad (3.3)$$

3.1.1 Nilai *Eigen* dan Operator Tangga

Tinjau¹ komutator antara L_x dan L_y . $[L_x, L_y]$ diberikan oleh

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x - xp_z] - [zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= \underbrace{[yp_z, zp_x]}_{= y[p_z, zp_x]} - \underbrace{[yp_z, xp_z]}_{= 0} - \underbrace{[zp_y, zp_x]}_{= 0} + \underbrace{[zp_y, xp_z]}_{= [z, xp_z]p_y} \\ &= y[p_z, zp_x] + [z, xp_z]p_y \\ &= y[p_z, z]p_x + yz \underbrace{[p_z, p_x]}_{= 0} + \underbrace{[z, x]p_y p_z}_{= 0} + [z, p_z]xp_y \\ &= i\hbar xp_y - i\hbar yp_x \\ &= i\hbar (xp_y - yp_x) \\ &= i\hbar L_z. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Jelas terlihat bahwa operator L_x dan L_y tidak *commute*. Lebih umum lagi, **semua operator momentum angular pada arah yang berbeda tidak *commute***. Relasi komutasi untuk operator momentum angular orbital (3.4) dapat ditulis dalam bentuk yang lebih kompak dan umum sebagai

$$\boxed{[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3}, \quad (3.5)$$

dimana ε_{ijk} adalah **simbol Levi-Civita**². Karena ketiga operator momentum angular orbital tidak saling *commute*, ketiga operator tersebut tidak bisa memiliki keadaan *eigen* bersama.

Untuk mengatasi hal ini, tinjau operator L^2 yang diberikan oleh

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2. \quad (3.6)$$

¹Untuk mempermudah penulisan dan mencegah kerancuan dengan vektor satuan, lambang topi untuk operator tidak dituliskan lagi.

²Indeks $i, j, k = 1, 2, 3$ mengacu ke arah x, y , dan z secara berturut-turut.

Mudah dibuktikan bahwa **operator L^2 commute dengan seluruh operator momentum angular orbital**. Sebagai contoh, tinjau $[L^2, L_z]$. $[L^2, L_z]$ diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 [L^2, L_z] &= [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, L_z] \\
 &= [L_x^2, L_z] + [L_y^2, L_z] + \underbrace{[L_z^2, L_z]}_{=0} \\
 &= L_x [L_x, L_z] + [L_x, L_z] L_x + L_y [L_y, L_z] + [L_y, L_z] L_y \\
 &= -i\hbar L_x L_y - i\hbar L_y L_x + i\hbar L_y L_x + i\hbar L_x L_y \\
 &= 0 .
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Hal serupa dapat ditunjukkan untuk L_x dan L_y . Kita akan menggunakan fakta bahwa L^2 commute dengan seluruh operator L_x, L_y , ataupun L_z untuk mencari keadaan *eigen* bersama dari L^2 dan komponen \mathbf{L} . Umumnya, komponen yang dipilih adalah L_z , misalnya seperti di referensi [1] atau [2].

KLAIM

Ada sebuah fungsi Y sedemikian sehingga

$$L^2 Y = \alpha Y \quad \& \quad L_z Y = \beta Y ,$$

dimana α dan β adalah nilai *eigen* yang terasosiasi dengan L^2 dan L_z secara berturut-turut. Definisikan **operator tangga** $L_{\pm} \equiv L_x \pm iL_y$. Jika Y merupakan fungsi *eigen* L^2 dan L_z , maka $L_{\pm} Y$ pun **juga merupakan fungsi *eigen* L^2 dan L_z** .

Untuk mengonfirmasi klaim tersebut, kita tinjau $L^2(L_{\pm} Y)$ dan $L_z(L_{\pm} Y)$.

3.1.2 Keadaan *Eigen*

3.2 Spin

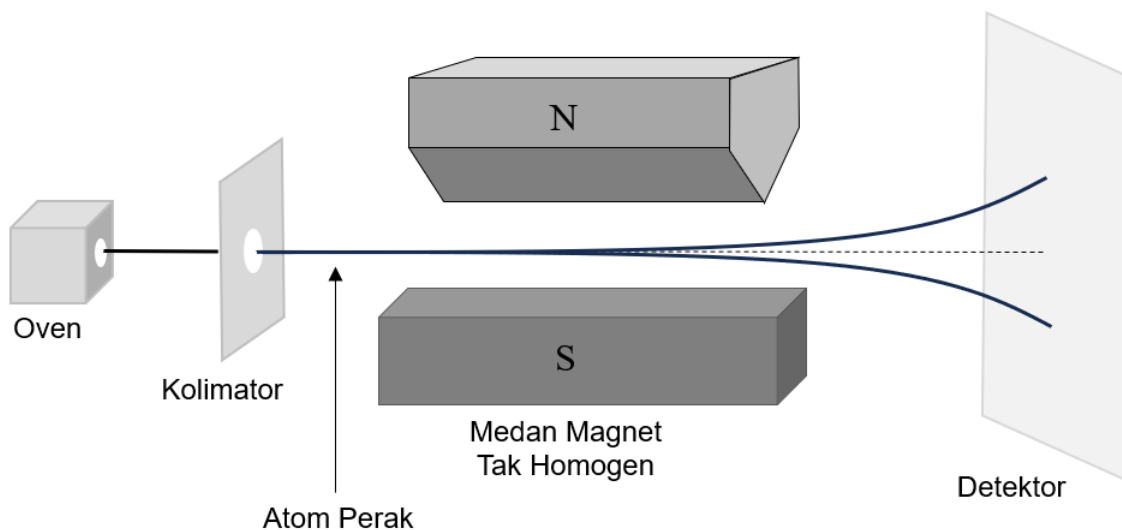
Selain momentum sudut orbital L , sebenarnya ada satu derajat kebebasan lagi dalam suatu partikel, yaitu **momentum sudut spin** S atau yang lebih sering disebut **spin**. Lain halnya dari momentum sudut orbital, **spin tidak memiliki besaran yang ekuivalen dalam mekanika klasik**.

Spin dapat dipahami sebagai **momentum sudut intrinsik** suatu partikel. Dalam mekanika klasik, konsep ini mungkin paling mudah dipahami dengan membayangkan Bumi yang berotasi terhadap porosnya sehingga muncul suatu momentum angular intrinsik $\mathbf{S} = I\boldsymbol{\omega}$ akibat rotasi tersebut [1]. Namun demikian, konsep ini tidak berlaku dalam mekanika kuantum. Dalam mekanika kuantum, **spin tidak memiliki hubungan dengan ruang koordinat sehingga hanya bisa direpresentasikan dengan matriks**. Operator spin dan fungsi *eigen*-nya memiliki ruang tersendiri yang disebut **ruang spin**.

Dalam buku ini, kita akan fokus pada pembahasan **spin 1/2**. Ini karena sistem dengan spin 1/2 merupakan sistem spin yang paling banyak dijumpai berhubung partikel pembentuk materi seperti proton, elektron, neutron, kuark, dan lainnya memiliki spin 1/2.

3.2.1 Percobaan Stern-Gerlach

Pada tahun 1922, Otto Stern dan Walther Gerlach melakukan eksperimen menggunakan atom perak dan medan magnet tak homogen³. Eksperimen Stern-Gerlach menjadi salah satu eksperimen paling terkenal yang berhasil menunjukkan bahwa ada fenomena yang tidak bisa dijelaskan oleh fisika klasik. *Setup* eksperimen Stern-Gerlach diberikan oleh gambar 3.1.



Gambar 3.1: *Setup* eksperimen Stern-Gerlach.

Dalam eksperimen ini, atom-atom perak dipanaskan dalam oven. Atom perak dapat keluar dari oven melalui suatu lubang kecil. Atom yang keluar kemudian diarahkan menggunakan kolimator menuju suatu medan magnet tak homogen. Berdasarkan observasi, medan magnet ini akan menyimpangkan lintasan atom perak sehingga dideteksi dua jenis penyimpangan seperti gambar 3.1. Padahal, menurut fisika klasik, seharusnya ada pola penyimpangan yang kontinu pada detektor.

Dengan mengingat bahwa energi interaksi momen magnet atom perak dan medan magnet adalah $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$, gaya yang bekerja pada atom perak jika diasumsikan hanya

³Untuk detail eksperimen Stern-Gerlach, lihat [arXiv:2301.11343v1\[physics.hist-ph\]](#).

ada medan magnet pada arah sumbu z adalah

$$F = -\nabla U = \nabla (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \cong \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.8), kita lihat bahwa untuk $\mu_z > 0$, atom perak akan terdefleksi ke atas sementara untuk $\mu_z < 0$, atom perak akan terdefleksi ke bawah. Karena eksperimen Stern-Gerlach menunjukkan hanya ada dua jenis defleksi, kita dapat mengambil kesimpulan bahwa **hanya ada dua nilai** μ_z pada atom perak.

Ingat kembali bahwa atom perak memiliki 47 elektron⁴. Dapat kita bayangkan dengan mudah bahwa elektron atom perak dari orbital $1s$ hingga $4d$ saling berpasangan sehingga momen magnetnya saling menghilangkan⁵. Artinya, momen magnet atom perak diwakili oleh momen magnet elektron ke 47 tersebut. Untuk menentukan momen magnet tersebut, tinjau sebuah muatan titik q yang bergerak melingkar beraturan dalam lintasan berjari-jari R dengan kelajuan v . Besar momen magnet muatan tersebut adalah

$$\mu = IA = \left(\frac{q}{T}\right) \pi R^2 = q\pi R^2 \left(\frac{v}{2\pi R}\right) = \frac{q}{2} vR = \frac{q}{2m} (mvR) = \frac{q}{2m} L \quad (3.9)$$

Untuk momen magnet spin, kita bisa langsung mengambil analogi berupa

$$\boldsymbol{\mu}_s = g_s \frac{q}{2m} \mathbf{S} \quad (3.10)$$

dimana $g_s \approx 2.002319304$ adalah **faktor- g** yang terasosiasi dengan spin elektron. Persamaan (3.10) menunjukkan bahwa $\boldsymbol{\mu} \propto \mathbf{S}$ sehingga dapat kita katakan bahwa atom perak menggambarkan sebuah elektron tunggal. **Artinya, elektron hanya memiliki dua kemungkinan spin pada sumbu z** , yaitu $+\hbar/2$ (spin *up*) dan $-\hbar/2$ (spin *down*).

Salah satu cara untuk memahami mengapa elektron memiliki dua kemungkinan spin tersebut adalah dengan mengingat bahwa nilai proyeksi momentum sudut pada sumbu z diberikan oleh

$$m_s = \underbrace{-s, -s+1, \dots, 0, \dots, s-1, s}_{2s+1}$$

Dalam kasus spin, kita menggunakan notasi s dan m_s sebagai ganti ℓ dan m_ℓ . Mengingat hasil eksperimen Stern-Gerlach yang memberikan dua kemungkinan proyeksi spin pada sumbu z , kita peroleh bahwa

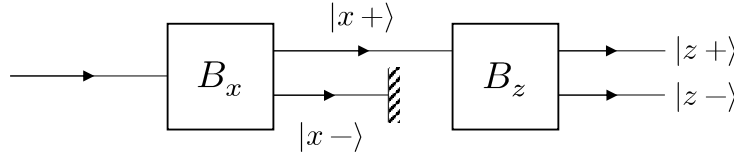
$$2s + 1 = 2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \quad (3.11)$$

3.2.2 Percobaan Stern-Gerlach Berulang

Misalkan sekarang kita melakukan dua pengukuran spin berurutan melalui percobaan Stern-Gerlach. *Setup* pengukuran yang akan kita lakukan diberikan oleh gambar berikut

⁴Konfigurasi elektron dari perak adalah $[\text{Kr}] 4d^{10} 5s^1$.

⁵Dalam hal ini, kita tidak memperhitungkan spin inti.



Gambar 3.2: *Setup* eksperimen Stern-Gerlach berulang. Keadaan $|x-\rangle$ tidak kita perhitungkan sementara keadaan $|x+\rangle$ diukur lagi komponen z -nya.

Tentu saja, peluang memperoleh $|z+\rangle$ dan $|z-\rangle$ dari pengukuran $|x+\rangle$ sama besar karena x dan z saling independen. Oleh karena itu, dapat kita katakan bahwa

$$|\langle z+ | x+ \rangle|^2 = |\langle z- | x+ \rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

Dari persamaan (3.12), kita bisa menuliskan $|x+\rangle$ sebagai

$$|x+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|z+\rangle + e^{i\delta_1} |z-\rangle \right] \quad (3.13)$$

dimana δ_1 adalah konstanta real. Penambahan suku $e^{i\delta_1}$ dilakukan untuk memperhitungkan adanya fase relatif antara $|z+\rangle$ dan $|z-\rangle$. Dapat dilihat dengan mudah bahwa penambahan suku ini tidak berpengaruh pada persamaan (3.12). Karena spin *up* dan spin *down* saling independen, maka haruslah $\langle x- | x+ \rangle = 0$. Artinya, $|x-\rangle$ dapat kita tulis sebagai

$$|x-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|z+\rangle - e^{i\delta_1} |z-\rangle \right] \quad (3.14)$$

Hal yang sama dapat kita lakukan untuk arah y karena sistem yang kita tinjau tidak memiliki preferensi arah. $|y\pm\rangle$ dapat kita tulis sebagai

$$|y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|z+\rangle \pm e^{i\delta_2} |z-\rangle \right] \quad (3.15)$$

dimana $\delta_2 \neq \delta_1$ adalah konstanta real. Peluang memperoleh $|y\pm\rangle$ dari hasil pengukuran keadaan $|x\pm\rangle$ juga analog dengan arah z , yaitu

$$|\langle y\pm | x+ \rangle|^2 = |\langle y\pm | x- \rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

Dengan memanfaatkan persamaan (3.16), kita akan mencari hubungan δ_1 dan δ_2 . Kita coba hitung $\langle y\pm | x+ \rangle$ dengan menggunakan ekspresi $|x+\rangle$ dari persamaan (3.13) $|y\pm\rangle$

dari persamaan (3.15)

$$\begin{aligned}
 \langle y \pm | x+ \rangle &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\langle z+ | \pm e^{-i\delta_2} \langle z- | \right] \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|z+ \rangle + e^{i\delta_1} |z- \rangle \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left[\langle z+ | \pm e^{-i\delta_2} \langle z- | \right] \left[|z+ \rangle + e^{i\delta_1} |z- \rangle \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\langle z+ | z+ \rangle + e^{i\delta_1} \langle z+ | z- \rangle \pm e^{-i\delta_2} \langle z- | z+ \rangle \pm e^{i(\delta_1-\delta_2)} \langle z- | z- \rangle \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + 0 \pm 0 \pm e^{i(\delta_1-\delta_2)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 \pm e^{i(\delta_1-\delta_2)} \right]
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dengan menggunakan ekspresi $\langle y \pm | x+ \rangle$ tersebut, kita hitung $|\langle y \pm | x+ \rangle|^2$

$$\begin{aligned}
 |\langle y \pm | x+ \rangle|^2 &= \frac{1}{4} \left[1 \pm e^{-i(\delta_1-\delta_2)} \right] \left[1 \pm e^{i(\delta_1-\delta_2)} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[1 \pm e^{i(\delta_1-\delta_2)} \pm e^{-i(\delta_1-\delta_2)} + 1 \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[2 \pm \left\{ e^{i(\delta_1-\delta_2)} + e^{-i(\delta_1-\delta_2)} \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[2 \pm 2 \cos (\delta_1 - \delta_2) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 \pm \cos (\delta_1 - \delta_2) \right]
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Berdasarkan persamaan (3.16), haruslah berlaku

$$1 \pm \cos (\delta_1 - \delta_2) = 1 \tag{3.19}$$

atau dengan kata lain

$$\delta_1 - \delta_2 = \pm \frac{\pi}{2} \tag{3.20}$$

Pilih $\delta_1 = 0$ dan $\delta_2 = \pi/2$ sehingga kita peroleh⁶

$$|x\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|z+\rangle \pm |z-\rangle \right] \tag{3.21}$$

$$|y\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|z+\rangle \pm i |z-\rangle \right] \tag{3.22}$$

⁶Lihat Bab 3 dari referensi [3] untuk penjelasan lebih detail.

3.2.3 Operator Spin

Sekarang, kita akan coba mengkonstruksi operator spin \hat{S}_i . Kita mulai dengan menyisipkan relasi kelengkapan ke operator spin

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_i &= \hat{S}_i \\
 &= \sum_n \hat{S}_i |n\rangle \langle n| \\
 &= \sum_n \sum_m |m\rangle \langle m| \hat{S}_i |n\rangle \langle n|
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Misalkan $|n\rangle$ merupakan fungsi *eigen* dari \hat{S}_i sedemikian sehingga $\hat{S}_i |n\rangle = S_n |n\rangle$ ⁷. Persamaan (3.23) dapat tereduksi menjadi

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_i &= \sum_n \sum_m |m\rangle \langle m| \hat{S}_i |n\rangle \langle n| \\
 &= \sum_n S_n \sum_m |m\rangle \langle m|n\rangle \langle n| \\
 &= \sum_n S_n \sum_m |m\rangle \delta_{mn} \langle n| \\
 &= \sum_n S_n |n\rangle \langle n|
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Sebagai contoh, untuk \hat{S}_z , kita akan mendapatkan bentuk

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_z &= S_{z+} |z+\rangle \langle z+| + S_{z-} |z-\rangle \langle z-| \\
 &= \frac{\hbar}{2} |z+\rangle \langle z+| - \frac{\hbar}{2} |z-\rangle \langle z-| \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[|z+\rangle \langle z+| - |z-\rangle \langle z-| \right]
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Misalkan kita mendefinisikan

$$|z+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |z-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

⁷Klaim ini valid karena relasi kelengkapan berlaku untuk sembarang keadaan $|n\rangle$.

Jika kita mensubstitusikan $|z+\rangle$ dan $|z-\rangle$ sesuai definisi (3.26) ke persamaan (3.25), kita peroleh

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_z &= \frac{\hbar}{2} \left[|z+\rangle \langle z+| - |z-\rangle \langle z-| \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Hal yang sama dapat kita lakukan untuk memperoleh bentuk operator \hat{S}_x dan \hat{S}_y . Menggunakan persamaan (3.21), (3.22), dan (3.24), kita peroleh

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_x &= \frac{\hbar}{2} |x+\rangle \langle x+| - \frac{\hbar}{2} |x-\rangle \langle x-| \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{2} \left(|z+\rangle + |z-\rangle \right) \left(\langle z+| + \langle z-| \right) - \frac{1}{2} \left(|z+\rangle - |z-\rangle \right) \left(\langle z+| - \langle z-| \right) \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[|z+\rangle \langle z-| + |z-\rangle \langle z+| \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0) \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_y &= \frac{\hbar}{2} |y+\rangle \langle y+| - \frac{\hbar}{2} |y-\rangle \langle y-| \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[\frac{1}{2} \left(|z+\rangle + i |z-\rangle \right) \left(\langle z+| - i \langle z-| \right) - \frac{1}{2} \left(|z+\rangle - i |z-\rangle \right) \left(\langle z+| + i \langle z-| \right) \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[-i |z+\rangle \langle z-| + i |z-\rangle \langle z+| \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[-i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1) + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0) \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \left[-i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Dengan demikian, representasi matriks operator spin 1/2 pada ketiga arah diberikan oleh

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

Perhatikan bahwa ketiganya memiliki faktor $\hbar/2$. Definisikan **matriks Pauli** σ_i sedemikian sehingga⁸

$$\hat{S}_1 = \frac{\hbar}{2} \sigma_1 \quad \hat{S}_2 = \frac{\hbar}{2} \sigma_2 \quad \hat{S}_3 = \frac{\hbar}{2} \sigma_3 \quad (3.31)$$

atau dalam notasi yang lebih sederhana

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.32)$$

Selain ketiga operator spin pada persamaan (3.30), kita juga bisa mengkonstruksi dua operator spin lainnya yang bermanfaat. Operator spin yang pertama adalah $\hat{\mathbf{S}}^2$ yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}^2 &= \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{S}} \\ &= \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \left\{ \sigma_1 \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_2 + \sigma_3 \sigma_3 \right\} \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{3}{4} \hbar^2 I \end{aligned} \quad (3.33)$$

dimana I adalah matriks identitas. Secara tidak langsung, kita juga telah membuktikan salah satu identitas matriks Pauli yang berguna

$$\sigma_i^2 = I, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.34)$$

Identitas ini dapat kita perluas dengan meninjau $\sigma_i \sigma_j$ dengan $i \neq j$. Kita coba tinjau untuk ketiga kemungkinan

KASUS 1 : $\sigma_1 \sigma_2$ dan $\sigma_2 \sigma_1$

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$\sigma_2 \sigma_1 = (\sigma_1 \sigma_2)^\dagger = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

⁸Untuk memudahkan perhitungan, kita mengganti indeks $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 2$, dan $z \rightarrow 3$.

KASUS II : $\sigma_1\sigma_3$ dan $\sigma_3\sigma_1$

$$\sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$\sigma_3\sigma_1 = (\sigma_1\sigma_3)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

KASUS III : $\sigma_2\sigma_3$ dan $\sigma_3\sigma_2$

$$\sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$\sigma_3\sigma_2 = (\sigma_2\sigma_3)^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Persamaan (3.35) - (3.40) dapat kita rangkum menjadi

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0, \quad i \neq j \quad (3.41)$$

Dengan menggabungkan persamaan (3.34) dan persamaan (3.41), kita peroleh relasi antikomutasi untuk matriks Pauli

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}I \quad (3.42)$$

Kembali ke mengkonstruksi operator spin, kita dapat mengkonstruksi operator spin kedua yang bermanfaat selain $\hat{\mathbf{S}}^2$. Operator yang dimaksud adalah operator tangga untuk spin, \hat{S}_\pm . Operator \hat{S}_\pm diberikan oleh

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y \quad (3.43)$$

Persamaan yang dipenuhi operator spin pun juga analog dengan operator momentum angular orbital⁹

$$\hat{S}_z |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle \quad (3.44)$$

$$\hat{\mathbf{S}}^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m_s\rangle \quad (3.45)$$

$$\hat{S}_\pm |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{(s \mp m_s)(s \pm m_s + 1)} |s, m_s \pm 1\rangle \quad (3.46)$$

dimana

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad m_s = -s, -s+1, \dots, 0, \dots, s-1, s \quad (3.47)$$

Perhatikan bahwa nilai **bilangan kuantum spin** s sedikit berbeda dari nilai bilangan kuantum orbital ℓ karena s dapat bernilai *half-odd* ($1/2, 3/2, \dots$). Setiap partikel terasosiasi dengan suatu nilai s yang **spesifik** dan **tetap**. Nilai s ini disebut sebagai **spin** dari partikel tersebut.

⁹Perlu diperhatikan bahwa persamaan (3.44), (3.45), dan (3.46) berlaku untuk semua nilai spin walaupun kita sedang fokus membahas spin 1/2.

Klasifikasi	Nama Partikel	Simbol	Spin
<i>Quark</i>	<i>Up</i>	u	$1/2$
	<i>Down</i>	d	$1/2$
<i>Lepton</i>	Elektron	e^-	$1/2$
	Muon	μ^-	$1/2$
	Tau	τ^-	$1/2$
Boson	Foton	γ	1
	Boson W	W^-	1
	Boson Z	Z^-	1
	<i>Gluon</i>	g	1
	Boson Higgs	H^0	0

Tabel 3.1: Nilai spin beberapa partikel fundamental.Sumber : https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles

3.2.4 Aljabar Spin

Aljabar yang dipenuhi oleh operator spin sama dengan aljabar yang dipenuhi oleh operator momentum angular orbital¹⁰. Artinya, komutator dan persamaan *eigenvalue* untuk operator spin memiliki bentuk yang sama dengan komutator dan persamaan *eigenvalue* momentum angular orbital. Relasi komutasi untuk operator spin diberikan oleh¹¹

$$[\hat{S}_1, \hat{S}_2] = i\hbar\hat{S}_3 \quad [\hat{S}_2, \hat{S}_3] = i\hbar\hat{S}_1 \quad [\hat{S}_3, \hat{S}_1] = i\hbar\hat{S}_2 \quad (3.48)$$

Ketiga relasi ini dapat dirangkum menjadi satu, yaitu

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.49)$$

dimana ε_{ijk} adalah simbol Levi-Civita. Dari relasi antikomutasi matriks Pauli (3.42), kita juga bisa memperoleh relasi antikomutasi untuk operator spin 1/2

$$\begin{aligned} \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 2\delta_{ij}I \\ \left\{ \frac{\hbar}{2}\sigma_i, \frac{\hbar}{2}\sigma_j \right\} &= \frac{\hbar^2}{4} \times 2\delta_{ij}I \\ \{\hat{S}_i, \hat{S}_j\} &= \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}I \end{aligned} \quad (3.50)$$

¹⁰Semua operator momentum angular memenuhi aljabar yang sama. Lihat Bab 6 referensi [1] untuk pembahasan lebih detail

¹¹Perlu diingat bahwa kita seringkali menggunakan penggantian indeks $x \rightarrow 1$, $y \rightarrow 2$, dan $z \rightarrow 3$ untuk memudahkan perhitungan.

3.2.5 Spinor

Keadaan spin dari suatu partikel¹² dapat direpresentasikan dengan suatu matriks kolom dua-komponen yang seringkali disebut **spinor**. Kita ingat bahwa ada dua keadaan basis dalam sistem spin 1/2, yaitu $|z+\rangle$ dan $|z-\rangle$. Umumnya, notasi yang digunakan dalam menulis dua keadaan ini bukan dengan *ket*, namun

$$\chi_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_- \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Semua spinor dapat dinyatakan dalam χ_+ dan χ_-

$$\chi = \alpha\chi_+ + \beta\chi_- = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

3.2.6 Spin dalam Medan Magnet

3.3 Penjumlahan Momentum Angular

¹²Untuk mendeskripsikan suatu partikel dengan lengkap, kita juga harus memperhitungkan fungsi gelombang posisinya, $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Lihat Bab 5 referensi [1] untuk pembahasan lebih lanjut.

Bab 4

MEKANIKA MATRIKS

Umumnya, mekanika kuantum dideskripsikan dengan **mekanika gelombang** melalui **persamaan Schrödinger** yang dikembangkan oleh Erwin Schrödinger pada sekitar tahun 1925. Namun, ada satu deskripsi mekanika kuantum lain yang **ekuivalen** dengan mekanika gelombang yang dikembangkan pada waktu yang sama oleh **Werner Heisenberg**, **Max Born**, dan **Pascual Jordan**. Metode ini disebut **mekanika matriks**.

4.1 Keadaan Basis

Tinjau suatu operator \hat{A} . Operator \hat{A} memenuhi persamaan nilai *eigen*

$$\hat{A}|n\rangle = a_n|n\rangle \quad (4.1)$$

dimana $|n\rangle$ adalah **keadaan eigen** dari \hat{A} dan a_n adalah **nilai eigen** yang terasosiasi dengan keadaan $|n\rangle$. Misalkan sekarang operator \hat{A} bersifat *Hermitian*. Karena \hat{A} bersifat *Hermitian*, maka dapat dilihat bahwa berlaku juga

$$\langle m|\hat{A} = a_m^* \langle m| \quad (4.2)$$

Kerjakan $\langle m|$ pada persamaan (4.1) dari kiri dan $|n\rangle$ pada persamaan (4.2) dari kanan

$$\begin{aligned} \langle m|\hat{A}|n\rangle &= a_n \langle m|n\rangle \\ \langle m|\hat{A}|n\rangle &= a_m^* \langle m|n\rangle \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dari kedua persamaan (4.3), kita lihat bahwa

$$(a_n - a_m^*) \langle m|n\rangle = 0 \quad (4.4)$$

Jika $|m\rangle = |n\rangle$, maka jelas bahwa

$$\boxed{a_n = a_n^*} \quad (4.5)$$

yang menunjukkan bahwa **nilai eigen operator Hermitian bersifat real**.

Jika $|m\rangle \neq |n\rangle$, maka persamaan (4.4) menjadi

$$(a_n - a_m) \langle m|n\rangle = 0 \quad (4.6)$$

Misalkan sekarang $|n\rangle$ dan $|m\rangle$ **terasosiasi dengan nilai eigen yang berbeda** ($a_n \neq a_m$). Dengan demikian, jelas bahwa haruslah

$$\boxed{\langle m|n\rangle = 0} \quad (4.7)$$

yang menunjukkan bahwa **keadaan eigen \hat{A} untuk nilai eigen yang berbeda bersifat ortogonal**. Kita juga dapat memilih sedemikian sehingga **keadaan eigen \hat{A} ternormalisasi**. Dengan menggabungkan keadaan ini dengan persamaan (4.7), kita peroleh sifat **ortonormalitas**

$$\boxed{\langle m|n\rangle = \delta_{mn}} \quad (4.8)$$

Selain ortonormal, kita juga **mengasumsikan bahwa keadaan eigen \hat{A} bersifat lengkap (complete)**. Artinya, suatu keadaan sembarang $|\psi\rangle$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $|n\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (4.9)$$

Untuk menentukan koefisien c_n yang tepat, kita coba kerjakan $\langle m|$ dari kiri pada persamaan (4.9)

$$\begin{aligned} \langle m|\psi\rangle &= \sum_n c_n \langle m|n\rangle \\ &= \sum_n c_n \delta_{mn} \\ &= c_m \end{aligned} \quad (4.10)$$

Kita substitusikan koefisien c_n ke persamaan (4.9)

$$|\psi\rangle = \sum_n \langle n|\psi\rangle |n\rangle \quad (4.11)$$

Karena $\langle n|\psi\rangle$ merupakan suatu bilangan, kita bisa mengubah urutan pada persamaan (4.11) menjadi

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\psi\rangle \quad (4.12)$$

Perhatikan bahwa persamaan (4.12) dapat diinterpretasikan sebagai

$$|\psi\rangle = \left(\sum_n |n\rangle \langle n| \right) |\psi\rangle \quad (4.13)$$

sehingga dapat kita identifikasi

$$\boxed{\sum_n |n\rangle \langle n| = \hat{I}} \quad (4.14)$$

dimana \hat{I} adalah **operator identitas**. Persamaan (4.14) disebut **relasi kelengkapan** (*completeness relation*) atau *closure relation*. Keadaan yang bersifat **ortonormal** dan **lengkap** (memenuhi persamaan (4.8) dan (4.14)) dapat digunakan sebagai **keadaan basis**.

Untuk basis kontinu seperti posisi dan momentum, sifat ortonormal dan relasi kelengkapan juga berlaku. Namun, bentuknya sedikit termodifikasi. Jika $|\alpha\rangle$ adalah suatu basis kontinu, maka ortonormalitas dan relasi kelengkapan basis $|\alpha\rangle$ diberikan oleh

$$\langle \alpha' | \alpha \rangle = \delta(\alpha' - \alpha) \quad (4.15)$$

$$\int d\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \hat{I} \quad (4.16)$$

4.2 Representasi Matriks dari Operator

Tinjau operator sembarang \hat{O} . Tentu saja kita bisa menyisipkan operator identitas pada operator \hat{O} sebagai

$$\hat{O} = \hat{I} \hat{O} \hat{I} \quad (4.17)$$

Misalkan kita menggunakan relasi kelengkapan (4.14) dimana keadaan yang digunakan merupakan **keadaan eigen** dari operator \hat{A}

$$\begin{aligned} \hat{O} &= \left(\sum_m |m\rangle \langle m| \right) \hat{O} \left(\sum_n |n\rangle \langle n| \right) \\ &= \sum_{m,n} |m\rangle \langle m| \hat{O} |n\rangle \langle n| \end{aligned} \quad (4.18)$$

Definisikan **elemen matriks** O_{mn} sebagai

$$\boxed{O_{mn} = \langle m | \hat{O} | n \rangle} \quad (4.19)$$

Semua kemungkinan $\langle m|\hat{O}|n\rangle$ dapat kita tulis menjadi sebuah **matriks**. Matriks tersebut diberikan oleh

$$O \doteq \begin{pmatrix} \langle 1|\hat{O}|1\rangle & \langle 1|\hat{O}|2\rangle & \langle 1|\hat{O}|3\rangle & \cdots \\ \langle 2|\hat{O}|1\rangle & \langle 2|\hat{O}|2\rangle & \langle 2|\hat{O}|3\rangle & \cdots \\ \langle 3|\hat{O}|1\rangle & \langle 3|\hat{O}|2\rangle & \langle 3|\hat{O}|3\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

dimana simbol \doteq menyatakan "direpresentasikan sebagai". Persamaan (4.20) disebut sebagai **representasi matriks** dari operator \hat{O} .

4.3 Perubahan Basis

Misalkan kita memiliki suatu operator sembarang \hat{A} yang dinyatakan dalam representasi matriks sebagai

$$A_{mn} = \langle a_m|\hat{A}|a_n\rangle$$

dimana $\hat{A}|a_m\rangle = \alpha_m|a_m\rangle$. Dengan kata lain, $|a_m\rangle$ merupakan keadaan *eigen* dari \hat{A} . Tentu saja, ini **bukan** satu-satunya representasi matriks \hat{A} . Misalkan kita memiliki satu set keadaan lainnya¹ yang dapat digunakan untuk merepresentasikan \hat{A} sehingga \hat{A} juga bisa direpresentasikan sebagai

$$\tilde{A}_{mn} = \langle b_m|\hat{A}|b_n\rangle \quad (4.21)$$

Bagaimana hubungan A_{mn} dan \tilde{A}_{mn} ? Dengan menyisipkan relasi kelengkapan (4.14) pada persamaan (4.21), kita bisa menuliskan

$$\tilde{A}_{mn} = \sum_{i,j} \langle b_m|a_i\rangle \langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle \langle a_j|b_n\rangle \equiv U_{mi}^\dagger A_{ij} U_{jn} \quad (4.22)$$

4.4 Contoh Representasi Matriks

4.4.1 Operator Kreasi dan Anihilasi

4.4.2 Posisi dan Momentum dalam Osilator Harmonik

4.4.3 Momentum Sudut

¹Biasanya, keadaan lain yang digunakan ini akan berupa keadaan *eigen* dari suatu operator.

Bab 5

ATOM HIDROGEN

Salah satu dari sebagian kecil sistem nyata yang dapat diselesaikan secara eksak menggunakan mekanika kuantum adalah **atom hidrogen**. Walaupun hidrogen merupakan atom paling sederhana, studi tentang atom hidrogen menjadi langkah awal yang penting untuk memahami struktur atom atau molekul yang lebih rumit.

Atom hidrogen terdiri dari **satu proton** dan **satu elektron**. Artinya, atom hidrogen sebenarnya merupakan sistem dua benda yang relatif sulit diselesaikan. Namun, dengan meninjau atom hidrogen dalam kerangka pusat massa dan menggunakan fakta bahwa proton jauh lebih masif daripada elektron, **atom hidrogen dapat ditinjau sebagai sebuah elektron yang bergerak dalam pengaruh potensial Coulomb**.

Dengan demikian, Hamiltonian atom hidrogen dalam kerangka pusat massa diberikan oleh

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (5.1)$$

dimana m adalah massa elektron, e adalah muatan elementer, dan ϵ_0 adalah permitivitas ruang vakum.

5.1 Fungsi Gelombang

Kita mulai dari persamaan Schrödinger bebas waktu untuk Hamiltonian (5.1), yaitu

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\Psi = E\Psi.$$

Sistem koordinat yang sebaiknya kita gunakan tentu saja adalah **koordinat bola** karena potensial Coulomb memiliki simetri bola. Dengan demikian, persamaan Schrödinger

yang harus kita selesaikan adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Psi = E\Psi, \quad (5.2)$$

dimana $\Psi \equiv \Psi(r, \theta, \varphi)$. Untuk mencari solusi dari persamaan diferensial parsial seperti persamaan (5.2), metode paling intuitif untuk kita coba tentu saja adalah **separasi variabel**. Kita misalkan fungsi gelombang $\Psi(r, \theta, \varphi)$ dapat dituliskan sebagai perkalian sebuah fungsi **radial** $R(r)$ dan sebuah fungsi **angular** $Y(\theta, \varphi)$:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi). \quad (5.3)$$

5.1.1 Persamaan Radial

5.1.2 Persamaan Angular

5.2 Spektrum Energi

Bab 6

INTERAKSI PARTIKEL DENGAN MEDAN

6.1 Persamaan Maxwell

Tinjau kembali persamaan Maxwell.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.4)$$

Umumnya, kita lebih sering tertarik dengan interaksi elektromagnetik dalam ruang vakum karena jauh lebih sederhana. Kita tidak perlu meninjau polarisasi atau magnetisasi yang terjadi di dalam medium jika kita meninjau ruang vakum. Untuk kasus vakum, persamaan Maxwell menjadi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (6.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.8)$$

Tinjau persamaan (6.6). Ingat bahwa dalam analisis vektor, setiap medan vektor yang bersifat *solenoidal* atau *divergence-less* (divergensinya bernilai nol) dapat dinyatakan sebagai *curl* dari suatu medan vektor lain.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (6.9)$$

dimana \mathbf{A} disebut **potensial vektor magnetik**. Substitusi hubungan $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ke persamaan (6.7)

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0\end{aligned}\tag{6.10}$$

Ingat bahwa jika suatu medan vektor bersifat konservatif atau *curl-less* (*curl* nya bernilai nol), maka medan vektor tersebut bisa dinyatakan sebagai **gradien dari suatu medan skalar**. Menurut konvensi, umumnya persamaan (6.10) ditulis ulang sebagai

$$\begin{aligned}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\nabla \varphi \\ \mathbf{E} &= -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}\tag{6.11}$$

dimana φ disebut sebagai **potensial skalar**.

6.2 Transformasi dan Invariansi Tera

Tinjau kembali persamaan (6.9) yang menyatakan bahwa $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Misalkan kita melakukan suatu transformasi sehingga diperoleh potensial vektor magnetik baru $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{V}$, dimana \mathbf{V} suatu medan vektor. Kita akan coba menghitung medan magnet yang terasosiasi dengan potensial vektor baru ini

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \times \mathbf{V}) = \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{V}\tag{6.12}$$

Jika kita menginginkan medan magnet yang terasosiasi tetap sama, yaitu \mathbf{B} , maka jelas haruslah $\nabla \times \mathbf{V} = 0$. Berdasarkan analisis vektor, kita bisa tuliskan bahwa

$$\nabla \times \mathbf{V} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{V} = \nabla \Lambda\tag{6.13}$$

dimana $\Lambda \equiv \Lambda(\mathbf{r}, t)$ suatu medan skalar. Artinya, jika kita lakukan transformasi

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda\tag{6.14}$$

maka medan magnet yang kita peroleh akan tetap sama. Namun, jika kita hanya melakukan transformasi (6.14), maka medan listrik \mathbf{E} akan tetap berubah. Untuk

mengatasinya, jelas bahwa potensial skalar φ juga harus bertransformasi. Misalkan kita lakukan transformasi $\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \Phi$. Kita substitusikan hubungan ini dan transformasi (6.14) ke persamaan (6.11) untuk memperoleh ekspresi Φ yang diperlukan

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}' &= -\nabla\varphi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} \\
 &= -\nabla(\varphi + \Phi) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\Lambda) \\
 &= -\nabla\varphi - \nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Lambda) \\
 &= \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) - \left\{\nabla\Phi + \nabla\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right)\right\} \\
 &= \mathbf{E} - \nabla\left\{\Phi + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right\}
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Berdasarkan persamaan (6.15), jelas bahwa agar invariansi \mathbf{E} tetap terjaga, maka ekspresi Φ yang diperlukan adalah

$$\Phi = -\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \tag{6.16}$$

Dengan demikian, jika kita lakukan transformasi

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\
 \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

secara simultan, maka medan elektromagnetik \mathbf{E} dan \mathbf{B} akan **invarian terhadap transformasi tersebut untuk semua medan skalar $\Lambda \equiv \Lambda(\mathbf{r}, t)$ yang tidak singular**. Hasil ini disebut sebagai **invariansi tera** (*gauge invariance*). Adapun transformasi (6.17) disebut sebagai **transformasi tera** (*gauge transformation*).

6.2.1 Tera Coulomb dan Lorenz

Kita coba substitusikan persamaan (6.9) dan (6.11) ke persamaan (6.4)

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) \\
 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

sehingga kita peroleh persamaan

$$\nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} \right) = \mu_0 \mathbf{J} \quad (6.18)$$

dimana $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ adalah kelajuan cahaya di ruang hampa. Di sisi lain, kita juga bisa mensubstitusikan persamaan (6.11) ke persamaan (6.1)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \cdot \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.19)$$

Persamaan (6.18) dan (6.19) adalah bentuk lain persamaan Maxwell dinyatakan dalam potensial skalar φ dan potensial vektor \mathbf{A} . Kita bisa menentukan φ dan \mathbf{A} sedemikian sehingga

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (6.20)$$

Kondisi ini disebut sebagai **tera Lorenz**¹ (*Lorentz gauge*). Selain itu, kita juga dapat mendefinisikan satu tera lainnya, yaitu **tera Coulomb** (*Coulomb gauge*)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (6.21)$$

6.3 Substitusi Minimal

Dalam meninjau interaksi partikel dengan medan elektromagnetik (\mathbf{E}, \mathbf{B}), tentu saja kita akan menggunakan persamaan Schrödinger. Namun, mungkin kita akan menemukan kesulitan dalam menentukan kemana kita akan memasukkan faktor potensial vektor \mathbf{A} . Prosedur termudah dan sekaligus yang paling banyak digunakan adalah dengan melakukan **substitusi minimal**. Substitusi minimal dilakukan dengan melakukan transformasi

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A} \quad (6.22)$$

¹Walaupun mirip, tapi kondisi ini bukan disebut **kondisi Lorenz**. Lorenz yang dimaksud adalah **Ludvig Valentin Lorenz**, seorang fisikawan berkebangsaan Denmark sementara Lorentz yang sering kita dengar (seperti pada gaya Lorentz) mengacu kepada **Hendrik Antoon Lorentz**, seorang fisikawan berkebangsaan Belanda. Untuk pembahasan lebih detail, baca J. D. Jackson dan L. B. Okun, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 663 (2001).

Untuk muatan negatif, maka q bertanda negatif. Contohnya adalah $q = -e$ untuk elektron. Dengan substitusi minimal, Hamiltonian partikel bebas menjadi

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\varphi \quad (6.23)$$

Untuk menunjukkan bahwa Hamiltonian (6.23) menggambarkan partikel yang bergerak dalam medan elektromagnetik, kita bisa menggunakan **persamaan gerak Hamilton**.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\nabla H \\ &= -\frac{1}{2m} \nabla \left\{ (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \right\} - q\nabla\varphi \end{aligned} \quad (6.24)$$

Untuk mengevaluasi ekspresi $\nabla \{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})\}$, kita gunakan identitas vektor

$$\nabla (\vec{\pi} \cdot \vec{\pi}) = 2 [(\vec{\pi} \cdot \nabla) \vec{\pi} + \vec{\pi} \times (\nabla \times \vec{\pi})] \quad (6.25)$$

dimana dalam hal ini $\vec{\pi} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$. Kita coba tinjau suku pertama

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m} \nabla \{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A})\} \\ &= -\frac{1}{2m} \left\{ 2 \left[\left\{ (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot \nabla \right\} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \times \left\{ \nabla \times (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \right\} \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{m} \left[\left\{ (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot \nabla \right\} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \times \left\{ \nabla \times (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.26)$$

Sekarang, ingat bahwa momentum kanonik² **p tidak bergantung** pada posisi. Kita dapat melakukan identifikasi

$$\mathbf{p} - q\mathbf{A} = m\mathbf{v} \quad (6.27)$$

Dengan demikian, kita bisa menyederhanakan persamaan (6.26) menjadi

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{m} \left[\left\{ (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot \nabla \right\} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \times \left\{ \nabla \times (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \right\} \right] \\ &= -\frac{1}{m} \left[\left\{ (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot \nabla \right\} (-q\mathbf{A}) + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \times \left\{ \nabla \times (-q\mathbf{A}) \right\} \right] \\ &= \frac{q}{m} \left[\left\{ (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot \nabla \right\} \mathbf{A} + (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \times \left\{ \nabla \times \mathbf{A} \right\} \right] \\ &= \frac{q}{m} \left[(m\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + m\mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] \\ &= q \left[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] \end{aligned} \quad (6.28)$$

²Momentum kanonik dapat dipahami sebagai momentum linear dalam mekanika klasik

Untuk menentukan ekspresi $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$, kita tinjau **turunan total** $d\mathbf{A}/dt$. Ekspresi $d\mathbf{A}/dt$ bisa kita tuliskan sebagai

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (v_x, v_y, v_z) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \\
 &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \left\{ (v_x, v_y, v_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} \mathbf{A} \\
 &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Dengan demikian, persamaan (6.28) menjadi

$$q \left[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right] = q \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)$$

Substitusikan kembali hasil tersebut ke persamaan (6.24)

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= q \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - q \nabla \varphi \\
 \frac{d}{dt} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) &= q \left(-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \\
 \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} &= q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\
 m\mathbf{a} &= q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Kita lihat bahwa persamaan (6.30) tiada lain merupakan **persamaan gaya Lorentz** (*Lorentz force law*) yang menjelaskan gerak partikel yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik. Artinya, substitusi minimal (6.22) terbukti mengubah persamaan gerak partikel bebas menjadi persamaan gerak partikel yang berinteraksi dengan medan elektromagnetik.

6.3.1 Mengapa $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$?

Untuk mengetahui mengapa kita menggunakan bentuk momentum $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$, kita mulai kembali dari gaya Lorentz

$$m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Substitusikan ekspresi \mathbf{E} dan \mathbf{B} yang dinyatakan dalam potensial skalar φ dan potensial vektor \mathbf{A} pada persamaan (6.11) dan (6.9) ke persamaan gaya Lorentz

$$m\mathbf{a} = q \left[-\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] \tag{6.31}$$

Tinjau suku $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$. Komponen $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$ pada sumbu x adalah

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big|_x = \left[v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \hat{\mathbf{x}} \quad (6.32)$$

Komponen $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$ pada sumbu y dan z dapat diperoleh dengan cara serupa

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big|_y = \left[v_z \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - v_x \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big|_z = \left[v_x \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] \hat{\mathbf{z}}$$

Tinjau kembali komponen sumbu x . Kita tulis ulang komponen sumbu x menjadi

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big|_x &= \left[v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \hat{\mathbf{x}} \\ &= \left[\left(v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \left(v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right] \hat{\mathbf{x}} \\ &= \left[\left(v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) - \left(v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \right] \hat{\mathbf{x}} \\ &= \left[\left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_x \right] \hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Dengan cara serupa, komponen pada sumbu y dan z kita tulis ulang menjadi

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big|_y = \left[\left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_y \right] \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \Big|_z = \left[\left(v_x \frac{\partial A_x}{\partial z} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial z} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_z \right] \hat{\mathbf{z}}$$

sehingga $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})$ secara keseluruhan dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = v_x \nabla A_x + v_y \nabla A_y + v_z \nabla A_z - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (6.34)$$

Jika kita asumsikan kecepatan partikel tidak bergantung pada posisi, maka kita dapat peroleh ekspresi yang lebih sederhana

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= v_x \nabla A_x + v_y \nabla A_y + v_z \nabla A_z - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \\ &= \nabla (v_x A_x) + \nabla (v_y A_y) + \nabla (v_z A_z) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \\ &= \nabla (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \\ &= \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} \end{aligned} \quad (6.35)$$

Substitusikan persamaan (6.35) ke persamaan (6.31)

$$m\mathbf{a} = q \left[-\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A} \right] \quad (6.36)$$

Dengan menggunakan identitas (6.29), persamaan (6.36) dapat kita reduksi lagi menjadi

$$m\mathbf{a} = -\nabla \left[q(\varphi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right] - \frac{d}{dt}(q\mathbf{A})$$

Kita ingat bahwa percepatan \mathbf{a} merupakan turunan pertama terhadap waktu dari kecepatan \mathbf{v} . Dengan mengasumsikan bahwa massa partikel konstan, kita peroleh persamaan

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} + q\mathbf{A}) = -\nabla \left[q(\varphi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) \right]} \quad (6.37)$$

dimana $m\mathbf{v}$ adalah **momentum fisis** yang biasa kita kenal dan $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$ adalah **momentum kanonik** dalam sistem ini. Dengan demikian, jelas terlihat bahwa momentum fisis dalam kasus interaksi partikel bermuatan dengan medan elektromagnetik adalah

$$\boxed{m\mathbf{v} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}} \quad (6.38)$$

sehingga jelas bahwa $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$ adalah ekspresi momentum fisis yang tepat digunakan untuk mendeskripsikan partikel bermuatan dalam medan elektromagnetik.

6.4 Invariansi Tera Persamaan Schrödinger

Tinjau kembali persamaan Schrödinger untuk partikel bebas

$$\frac{p^2}{2m}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (6.39)$$

Kita ingin meninjau apakah persamaan Schrödinger bersifat invarian tera (*gauge invariant*). Dengan substitusi minimal (6.22), kita peroleh persamaan

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \right] \Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (6.40)$$

Lakukan transformasi tera (6.17) pada ruas kiri

$$\left[\frac{1}{2m} \left\{ \frac{\hbar}{i}\nabla - q(\mathbf{A}' - \nabla\Lambda) \right\}^2 + q\left(\varphi' + \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\right) \right] \Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \quad (6.41)$$

Tinjau dulu suku pertama di ruas kiri. Kita bisa menguraikan suku tersebut sebagai

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right) + q\nabla\Lambda \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right)^2 + \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right) \cdot (q\nabla\Lambda) + (q\nabla\Lambda) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right) + (q\nabla\Lambda)^2 \right\} \end{aligned}$$

Kita kelompokkan suku yang mengandung Λ pada persamaan (6.41) menjadi satu

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right)^2 + q\varphi' \right] \Psi + \left\{ \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right) \cdot (q\nabla\Lambda) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. (q\nabla\Lambda) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right) + (q\nabla\Lambda)^2 \right] + q \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \right\} \Psi = i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} \end{aligned}$$

Agar persamaan Schrödinger invarian tera, jelas bahwa haruslah suku yang berwarna biru pada persamaan di atas bernilai nol. Namun demikian, ini tidak terjadi. Kuncinya adalah **kita juga harus melakukan transformasi tera pada Ψ** . Transformasi tera pada Ψ diberikan oleh

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{iq\Lambda/\hbar} \Psi \quad (6.42)$$

Sekarang, kita coba ulangi menerapkan transformasi tera pada persamaan (6.40). Kali ini, kita menerapkan (6.17) dan (6.42) secara simultan. Tinjau dulu suku $q\varphi\Psi$. Suku tersebut menjadi

$$q\varphi\Psi = q \left(\varphi' + \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \right) e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi' \quad (6.43)$$

Kemudian, kita tinjau suku $i\hbar \partial\Psi/\partial t$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial\Psi}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi') \\ &= i\hbar \left\{ -\frac{iq\Lambda}{\hbar} \frac{\partial\Lambda}{\partial t} e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi' + e^{-iq\Lambda/\hbar} \frac{\partial\Psi'}{\partial t} \right\} \\ &= q \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \right) e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi' + i\hbar e^{-iq\Lambda/\hbar} \left(\frac{\partial\Psi'}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (6.44)$$

Sekarang, kita tinjau suku pertama

$$\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 \Psi = \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' + q\nabla\Lambda \right)^2 e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi'$$

Untuk memudahkan, kita coba tinjau dulu untuk orde satu

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \Psi \\
&= \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' + q\nabla\Lambda \right) e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi' \\
&= \frac{\hbar}{i} (\nabla e^{-iq\Lambda/\hbar}) \Psi' + \frac{\hbar}{i} e^{-iq\Lambda/\hbar} \nabla \Psi' - q\mathbf{A}' e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi' + q\nabla\Lambda e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi' \\
&= \frac{\hbar}{i} \left(-\frac{iq}{\hbar} \nabla\Lambda e^{-iq\Lambda/\hbar} \right) \Psi' + \frac{\hbar}{i} e^{-iq\Lambda/\hbar} \nabla \Psi' - q\mathbf{A}' e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi' + q\nabla\Lambda e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi' \\
&= \cancel{-q\nabla\Lambda e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi'} + \frac{\hbar}{i} e^{-iq\Lambda/\hbar} \nabla \Psi' - q\mathbf{A}' e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi' + \cancel{q\nabla\Lambda e^{-iq\Lambda/\hbar} \Psi'} \\
&= e^{-iq\Lambda/\hbar} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right) \Psi' \tag{6.45}
\end{aligned}$$

Mengingat $\Psi' = e^{iq\Lambda/\hbar} \Psi$, kita dapat simpulkan bahwa

$$\boxed{\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) e^{-iq\Lambda/\hbar} = e^{-iq\Lambda/\hbar} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right)} \tag{6.46}$$

Dengan demikian, kita peroleh

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 \Psi &= \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \Psi \\
&= \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) e^{-iq\Lambda/\hbar} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right) \Psi' \\
&= e^{-iq\Lambda/\hbar} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right) \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right) \Psi' \\
&= e^{-iq\Lambda/\hbar} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right)^2 \Psi' \tag{6.47}
\end{aligned}$$

Kita substitusikan persamaan (6.43), (6.44), dan (6.47) ke persamaan (6.40)

$$\begin{aligned}
\cancel{e^{-iq\Lambda/\hbar}} \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right)^2 + q \left(\varphi' + \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \right) \right] \Psi' &= \cancel{e^{-iq\Lambda/\hbar}} \left[q \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \Psi' + i\hbar \frac{\partial\Psi'}{\partial t} \right] \\
\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right)^2 + q\varphi' \right] \Psi' + \cancel{q \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \Psi'} &= \cancel{q \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \Psi'} + i\hbar \frac{\partial\Psi'}{\partial t}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, kita peroleh persamaan

$$\boxed{\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A}' \right)^2 + q\varphi' \right] \Psi' = i\hbar \frac{\partial\Psi'}{\partial t}} \tag{6.48}$$

yang tiada lain merupakan persamaan Schrödinger untuk \mathbf{A}' , φ' , dan Ψ' . Hasil ini jelas menunjukkan bahwa **persamaan Schrödinger bersifat invarian tera (*gauge invariant*)**. Artinya, walaupun kita melakukan transformasi tera pada \mathbf{A} , φ , dan Ψ , kita tetap memperoleh fisika yang sama. Dalam kasus ini, ini ditunjukkan dengan diperolehnya persamaan Schrödinger untuk \mathbf{A}' , φ' , dan Ψ' .

6.5 Partikel dalam Medan Magnet Konstan

Tinjau sebuah partikel dalam medan magnet konstan \mathbf{B} dan potensial listrik statis $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{r})$. Persamaan Schrödinger untuk sistem ini adalah

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \right] \Psi = E\Psi \quad (6.49)$$

Tinjau dulu ruas kiri. Ekspresi di ruas kiri dapat kita jabarkan menjadi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \Psi \\ &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \Psi - q\mathbf{A}\Psi \right) \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ -\hbar^2 \nabla^2 \Psi + iq\hbar \nabla \cdot (\mathbf{A}\Psi) + iq\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi + q^2 A^2 \Psi \right\} \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ -\hbar^2 \nabla^2 \Psi + iq\hbar \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{A})}_{=0} \Psi + iq\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi + iq\hbar \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi + q^2 A^2 \Psi \right\} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + \frac{iq\hbar}{m} \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi + \frac{q^2}{2m} A^2 \Psi \end{aligned} \quad (6.50)$$

dimana $A^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ dan kita telah menggunakan tera Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Tentu saja, kita bebas memilih potensial vektor \mathbf{A} asalkan $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Dalam kasus ini, kita pilih \mathbf{A} yang diberikan oleh

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (6.51)$$

Potensial vektor (6.51) disebut *symmetric gauge*. Dengan potensial vektor ini, suku kedua persamaan (6.50) menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{iq\hbar}{m} \mathbf{A} \cdot \nabla \Psi &= -\frac{iq\hbar}{2m} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \Psi \\
 &= -\frac{iq\hbar}{2m} \left[-\mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla \Psi) \right] \\
 &= -\frac{iq\hbar}{2m} \left[-\mathbf{B} \cdot \frac{i}{\hbar} \left(\mathbf{r} \times \hbar \nabla \Psi \right) \right] \\
 &= \frac{q}{2m} \left[-\mathbf{B} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \Psi \right] \\
 &= -\frac{q}{2m} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B}) \Psi
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

dimana dari baris pertama ke baris kedua kita telah menggunakan identitas vektor

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

Sekarang, kita tinjau suku ketiga persamaan (6.50)

$$\begin{aligned}
 \frac{q^2}{2m} A^2 \Psi &= \frac{q^2}{2m} \left(-\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \right) \Psi \\
 &= \frac{q^2}{8m} (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{B}) \Psi \\
 &= \frac{q^2}{8m} \left[r^2 B^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \Psi
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

dimana kita telah menggunakan identitas vektor

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$$

Pilih medan magnet $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$ sehingga persamaan (6.53) menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{q^2}{8m} A^2 \Psi &= \frac{q^2}{8m} \left[r^2 B^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})^2 \right] \Psi \\
 &= \frac{q^2}{8m} \left[(x^2 + y^2 + z^2) B^2 - (zB)^2 \right] \Psi \\
 &= \frac{q^2 B^2}{8m} (x^2 + y^2) \Psi
 \end{aligned} \tag{6.54}$$

Substitusikan (6.52) dan (6.54) ke persamaan (6.50) untuk memperoleh persamaan

$$\frac{1}{2m} \left[-\hbar^2 \nabla^2 - q\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} + \frac{q^2 B^2}{4} (x^2 + y^2) + q\varphi \right] \Psi = E\Psi \tag{6.55}$$

Kita dapat menunjukkan bahwa suku kedua dan ketiga ruas kiri persamaan (6.55) **cukup kecil untuk nilai medan magnet yang dapat dihasilkan di laboratorium** (lihat halaman 250 di referensi [2]). Dengan demikian, partikel dalam medan magnet konstan akan cenderung bersifat seperti partikel bebas **kecuali dalam pengaruh medan magnet yang sangat besar**. Contohnya adalah pada **bintang neutron**.

6.5.1 Tingkat-Tingkat Landau

Tinjau kembali partikel dalam medan magnet konstan, namun sekarang kita hanya memperhitungkan medan magnet. Artinya, tidak ada potensial skalar dalam sistem yang kita tinjau. Mengacu ke persamaan (6.50), persamaan Schrödinger untuk sistem ini menjadi

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \frac{iq\hbar}{m} \mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{q^2}{2m} A^2 \right) \Psi = E \Psi \quad (6.56)$$

Sekarang, kita gunakan potensial vektor yang berbeda. Potensial vektor yang kita gunakan sekarang diberikan oleh

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = Bx \hat{\mathbf{y}} \quad (6.57)$$

Potensial vektor (6.57) sering juga disebut **Landau gauge**. Dengan mensubstitusikan potensial vektor (6.57) dan menggunakan $q = -e$ untuk elektron pada persamaan (6.56), kita identifikasi Hamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{ie\hbar}{m} Bx \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e^2}{2m} B^2 x^2 \quad (6.58)$$

Definisikan **frekuensi cyclotron** $\omega_c = eB/m$

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \left(\frac{eB}{m} \right) x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{m}{2} \left(\frac{eB}{m} \right)^2 x^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \omega_c x p_y + \frac{1}{2} m \omega_c^2 x^2 \end{aligned} \quad (6.59)$$

Sekarang, perhatikan bahwa

$$[H, p_y] = [H, p_z] = 0$$

Karena H commute dengan p_y dan p_z , maka kita bisa mengambil kebergantungan terhadap y dan z pada fungsi gelombang akan mirip dengan keadaan *eigen* p_y dan p_z , yaitu **gelombang bidang** (*plane wave*). Berdasarkan hal ini, kita mengambil *ansatz* fungsi gelombang sebagai

$$\Psi(x, y, z) = u(y, z) \phi(x) = e^{i(k_y y + k_z z)} \phi(x) \quad (6.60)$$

Substitusikan Hamiltonian (6.59) dan fungsi gelombang (6.60) ke persamaan Schrödinger untuk memperoleh

$$\begin{aligned}
 H\Psi &= E\Psi \\
 -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + \omega_c x \underbrace{p_y\Psi}_{=\hbar k_y\Psi} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 x^2\Psi &= E\Psi \\
 -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) + \hbar\omega_c k_y x\Psi + \frac{1}{2}m\omega_c^2 x^2\Psi &= E\Psi \\
 -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m}(-k_y^2 - k_z^2)\phi + \hbar\omega_c k_y x\phi + \frac{1}{2}m\omega_c^2 x^2\phi &= E\phi \\
 -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{2}m\omega_c^2 x^2 + \hbar\omega_c k_y x + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m}\right)\phi &= \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)\phi \\
 -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\left(x^2 + \frac{2\hbar k_y}{m\omega_c}x + \frac{\hbar^2 k_y^2}{m^2\omega_c^2}\right)\phi &= \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)\phi \\
 -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\left(x^2 + \frac{2\hbar k_y}{eB}x + \frac{\hbar^2 k_y^2}{e^2 B^2}\right)\phi &= \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)\phi \\
 -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\left(x + \frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2\phi &= \left(E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right)\phi
 \end{aligned}$$

Dengan mendefinisikan

$$x_0 \equiv \frac{\hbar k_y}{eB} \quad \text{dan} \quad E' \equiv E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

Kita peroleh persamaan

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(x + x_0)^2\phi = E'\phi} \quad (6.61)$$

yang tiada lain merupakan **persamaan Schrödinger untuk osilator harmonik** dengan frekuensi sudut ω_c , spektrum energi E' , dan titik kesetimbangan $x = x_0$. Solusi spektrum energinya sudah kita ketahui dengan baik, yaitu

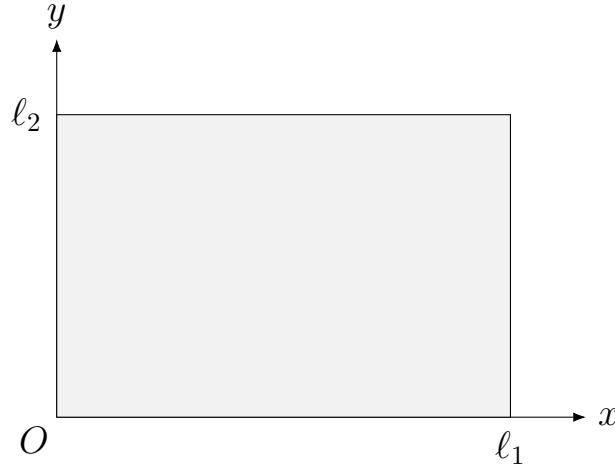
$$E' = E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c$$

atau dengan kata lain

$$\boxed{E = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c} \quad (6.62)$$

Spektrum energi (6.62) disebut sebagai **tingkat-tingkat Landau** (*Landau levels*).

Sekarang, misalkan sistem yang kita tinjau berupa material dua dimensi berukuran $\ell_1 \times \ell_2$ seperti gambar 6.1. Kita ingin menghitung seberapa banyak **keadaan terdegenerasi** yang mungkin berada dalam material ini.



Gambar 6.1: Ilustrasi material dua dimensi berukuran $\ell_1 \times \ell_2$.

Terapkan syarat batas periodik pada sumbu y

$$\begin{aligned}\Psi(y) &= \Psi(y + \ell_2) \\ e^{ik_y y} \phi(x) &= e^{ik_y (y + \ell_2)} \phi(x) \\ 1 &= e^{ik_y \ell_2}\end{aligned}$$

Dengan mengingat bahwa $e^{i(2\pi)} = 1$, kita peroleh bahwa k_y terkuantisasi mengikuti persamaan

$$k_y = \frac{2\pi n^*}{\ell_2} \quad (6.63)$$

dimana n^* adalah suatu bilangan bulat. Jelas bahwa karena material yang ditinjau memiliki ukuran yang berhingga, maka ada suatu nilai maksimum untuk n^* , misalkan n_{maks}^* . Ini dapat dilihat dari menggabungkan persamaan (6.63) dengan definisi $x_0 = \hbar k_y / eB$ yang digunakan pada persamaan (6.56)

$$x_0 = \frac{\hbar k_y}{eB} = \frac{\hbar}{eB} \left(\frac{2\pi n^*}{\ell_2} \right) = \frac{2\pi \hbar}{eB \ell_2} n^* = \frac{h}{eB \ell_2} n^* \quad (6.64)$$

sehingga jelas bahwa jika n^* semakin besar, x_0 juga semakin besar. Namun, x_0 **tidak mungkin lebih besar dari ℓ_1** karena **keadaan yang kita tinjau tentu saja berada di**

dalam material. Dengan demikian, kita dapat mencari nilai n_{maks}^* dengan menyamakan $x_{0 \text{ maks}}$ dan ℓ_1

$$\begin{aligned} x_{0 \text{ maks}} &= \ell_1 \\ \frac{h}{eB\ell_2} n_{\text{maks}}^* &= \ell_1 \\ n_{\text{maks}}^* &= \frac{eB\ell_1\ell_2}{h} \end{aligned} \quad (6.65)$$

atau dalam \hbar dinyatakan sebagai

$$n_{\text{maks}}^* = \frac{eB}{2\pi\hbar} \ell_1 \ell_2 \quad (6.66)$$

dimana n_{maks}^* adalah **jumlah keadaan terdegenerasi maksimum yang mungkin ada pada setiap tingkat Landau di material yang kita tinjau**. Sebagai contoh, tinjau suatu material seluas 1 cm^2 yang diberi medan magnet 0.25 Gauss (medan magnet Bumi). Jumlah keadaan terdegenerasi yang mungkin adalah

$$n_{\text{maks}}^* = \frac{eB}{2\pi\hbar} \ell_1 \ell_2 = \frac{1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \times 0.25 \times 10^{-4} \text{ T}}{6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}} \times 1 \text{ cm}^2 = 6.04 \times 10^5 \text{ keadaan}$$

6.6 Efek Hall Kuantum

Jika kita meninjau efek Hall pada skala kuantum, maka kita akan menemukan adanya **kuantisasi pada hambatan Hall** [5]. Namun demikian, perlu dipahami bahwa fenomena ini hanya muncul jika **medan magnet yang digunakan sangat besar**. Inilah yang disebut sebagai **efek Hall kuantum** (*quantum Hall effect*). Ada dua jenis efek Hall kuantum, yaitu

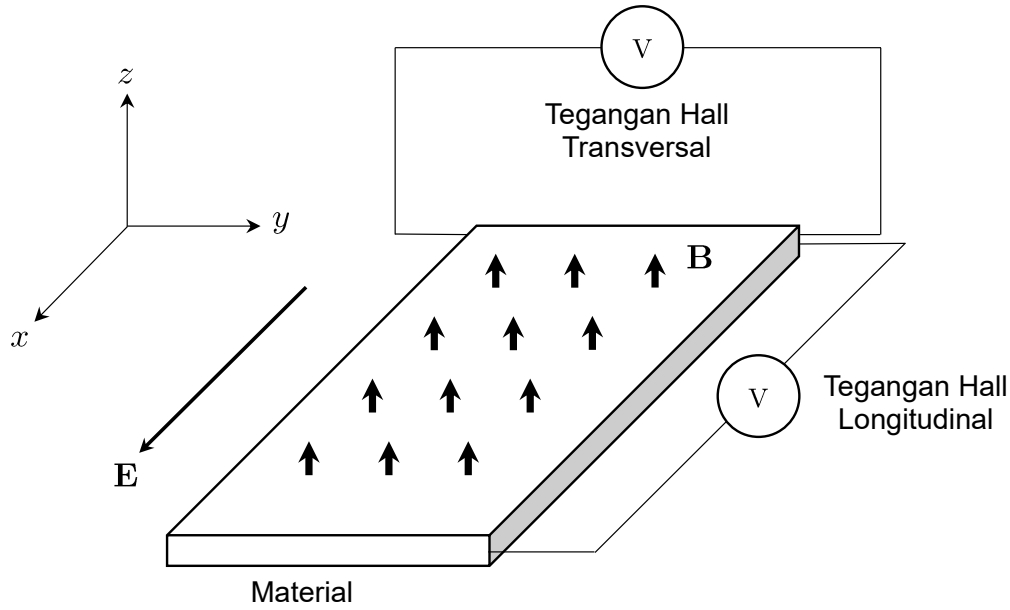
- *Integral quantum Hall effect*
- *Fractional quantum Hall effect*

Pada pembahasan ini, kita hanya akan meninjau *integral quantum Hall effect*.

6.6.1 Perhitungan Klasik

Tinjau *setup* sederhana percobaan efek Hall seperti gambar 6.2. Kita mulai dari hukum Newton untuk suatu partikel bermuatan q dan bermassa m^* ³. Menurut teori Drude,

³ m^* dipahami sebagai **massa efektif** partikel. Untuk pembahasan lebih lanjut mengenai massa efektif, lihat bagian 2.2 pada referensi [5].



Gambar 6.2: Setup percobaan efek Hall.

hukum Newton untuk partikel bermuatan q dan bermassa m^* diberikan oleh

$$q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{m^* \mathbf{v}}{\tau} = m^* \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (6.67)$$

dimana suku $m^* \mathbf{v} / \tau$ adalah suku **drift**⁴ dan τ adalah **waktu relaksasi**. Misalkan medan listrik dan magnet dalam sistem diberikan oleh $\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}}$ dan $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{z}}$. Tinjau dulu suku $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= (E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}}) + \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} \\ &= E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y \hat{\mathbf{y}} + B(v_y \hat{\mathbf{x}} - v_x \hat{\mathbf{y}}) \\ &= (E_x + v_y B) \hat{\mathbf{x}} + (E_y - v_x B) \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Pada keadaan *steady state* ($\mathbf{a} = 0$), hukum Newton pada ketiga sumbu menjadi
SUMBU x

$$qE_x + qv_y B = \frac{m^* v_x}{\tau} \Rightarrow E_x = \frac{m^*}{q\tau} v_x - Bv_y$$

⁴Lihat bagian 5.8 dari referensi [5] untuk penjelasan lebih lanjut,

SUMBU y

$$qE_y - qv_x B = \frac{m^* v_y}{\tau} \Rightarrow E_y = Bv_x + \frac{m^*}{q\tau} v_y$$

SUMBU z

$$0 - \frac{m^* v_z}{\tau} = 0 \Rightarrow v_z = 0$$

Dengan mengingat bahwa rapat arus \mathbf{J} dapat dinyatakan sebagai kecepatan dalam persamaan

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$$

dimana n adalah **rapat muatan**, maka ketiga persamaan di atas dapat dirangkum menjadi

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m^*}{nq^2\tau} & -\frac{B}{nq} \\ \frac{B}{nq} & \frac{m^*}{nq^2\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_x \\ \mathbf{J}_y \end{pmatrix} \quad (6.69)$$

Kita identifikasi **tensor resistivitas** sebagai

$$\rho \doteq \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & \rho_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m^*}{nq^2\tau} & -\frac{B}{nq} \\ \frac{B}{nq} & \frac{m^*}{nq^2\tau} \end{pmatrix} \quad (6.70)$$

dan **resistivitas transversal** sebagai

$$\rho_{\text{transversal}} = |\rho_{xy}| = \frac{B}{nq} \quad (6.71)$$

6.6.2 Perhitungan Kuantum

Dalam skala kuantum, resistivitas transversal akan mengalami kuantisasi. Ini berhubungan dengan tingkat Landau yang telah dibahas sebelumnya. Tinjau suatu material berdimensi $\ell_1 \times \ell_2 \times d$. Banyaknya tingkat Landau yang berada di bawah **energi Fermi** diberikan oleh

$$\nu = \frac{N}{n_{\text{maks}}^*} = \frac{n\ell_1\ell_2 d}{\frac{eB}{2\pi\hbar}\ell_1\ell_2} = \frac{hd}{eB}n \iff n = \frac{eB}{hd}\nu \quad (6.72)$$

dimana n adalah **konsentrasi muatan** dan d adalah tebal material. Dengan demikian, resistivitas transversal diberikan oleh

$$\rho_{\text{transversal}} = |\rho_{xy}| = \frac{B}{ne} = \frac{B}{\left(\frac{eB}{hd}\right)^\nu e} = \frac{h}{\nu e^2} d \quad (6.73)$$

Kita tahu bahwa **hambatan Hall transversal** R_{xy} dapat dinyatakan sebagai

$$R_{xy} = |\rho_{xy}| \frac{\ell_x}{A_y} = \frac{hd}{\nu e^2} \times \frac{\ell_1}{\ell_1 d} = \frac{h}{\nu e^2} \quad ; \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (6.74)$$

Dengan demikian, terlihat bahwa **hambatan Hall terkuantisasi**. Inilah yang disebut *integral quantum Hall effect*. Istilah *integral* mengacu pada ν yang bernilai **bilangan bulat**.

6.7 Monopol Magnet

Monopol magnet adalah suatu objek hipotetis yang hanya memiliki satu kutub magnet, tidak seperti magnet pada biasanya. Mekanika kuantum tidak memprediksi keberadaan monopol magnet, namun memberikan syarat bahwa **monopol magnet harus terkuantisasi** jika benar bahwa monopol magnet ada.

Ide awalnya dimulai dari pendefinisian **muatan magnetik** q_m dan **rapat muatan magnetik** ρ_m melalui hukum Gauss untuk medan magnet

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \iff \mathbf{B}(r) = \frac{q_m}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (6.75)$$

Potensial vektor yang terasosiasi dengan $\mathbf{B}(r)$ pada persamaan (6.75) diberikan oleh

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \frac{q_m (1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\phi} \quad (6.76)$$

Perhatikan bahwa $\theta = 0$ akan membuat potensial vektor tersebut bernilai **singular**. Kita coba tinjau **fluks magnet** $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ melalui dua cara

1. Dengan menggunakan permukaan Gauss berbentuk bola yang menutupi muatan magnetik q_m , kita peroleh

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B \times 4\pi r^2 = q_m$$

2. Dengan menggunakan teorema divergensi, kita peroleh

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \nabla \cdot \mathbf{B} dV$$

Mengingat $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ dan identitas vektor bahwa divergensi dari *curl* suatu vektor bernilai nol, kita peroleh

$$\int \nabla \cdot \mathbf{B} dV = \int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV = 0$$

Dengan demikian,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Sekarang, jelas bahwa terdapat **kontradiksi** pada fluks magnet. Solusinya adalah dengan **membagi** potensial vektor menjadi dua bagian, yaitu

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{q_m(1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\varphi} & , \theta < \pi - \delta \\ -\frac{q_m(1 + \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\varphi} & , \theta > \delta \end{cases} \quad (6.77)$$

dimana δ adalah suatu nilai yang kecil. Jelas terlihat bahwa ada diskontinuitas pada potensial vektor, yaitu

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{q_m(1 + \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\varphi} - \frac{q_m(1 - \cos \theta)}{4\pi r \sin \theta} \hat{\varphi} = -\frac{q_m}{2\pi r \sin \theta} \hat{\varphi} \quad (6.78)$$

Namun, kita tahu dari persamaan (6.17) bahwa **dua potensial vektor yang berbeda namun tetap menunjukkan fenomena fisis yang sama terhubung melalui transformasi tera**. Λ yang bersesuaian dalam hal ini adalah

$$\nabla \Lambda = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} \hat{\varphi} = -\frac{q_m}{2\pi r \sin \theta} \hat{\varphi} \iff \Lambda = -\frac{q_m \varphi}{2\pi} \quad (6.79)$$

Dengan menggunakan fungsi Λ pada persamaan (6.79), kita dapat melakukan transformasi tera pada fungsi gelombang di daerah $\theta < \pi - \delta$ (daerah I) sehingga menjadi terhubung dengan fungsi gelombang di daerah $\theta > \delta$ (daerah II).

$$\Psi^{\text{II}} = \exp \left\{ \left(\frac{iq\Lambda}{\hbar} \right) \right\} \Psi^{\text{I}} = \exp \left\{ \left(-\frac{iqq_m\varphi}{2\pi\hbar} \right) \right\} \Psi^{\text{I}} \quad (6.80)$$

Jelas bahwa fungsi gelombang harus periodik terhadap φ . Ini harus terjadi karena fungsi gelombang Ψ adalah fungsi yang *single-valued*. Dapat diperiksa dengan mudah bahwa

$$\frac{qq_m}{\hbar} = \pm n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.81)$$

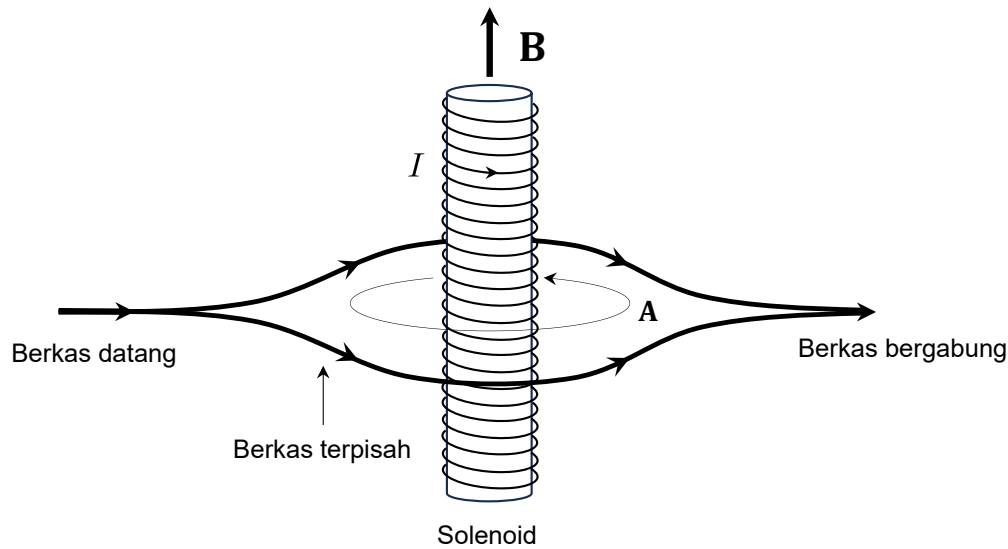
Kita tahu bahwa muatan elementer adalah $+e$. Dengan demikian, muatan magnetik e_m **haruslah terkuantisasi** menurut persamaan

$$\boxed{e_m = \pm \frac{\hbar}{e} n} \quad (6.82)$$

6.8 Efek Aharonov-Bohm

Walaupun $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, ada kasus dimana medan magnet \mathbf{B} tidak ada namun potensial vektor \mathbf{A} tetap ada dan **dapat mempengaruhi keadaan kuantum partikel bermuatan** walaupun partikel tersebut bergerak dalam daerah yang tidak memiliki medan magnet.

Kasus ini terjadi pada solenoid yang sangat panjang. Peristiwa ini pertama kali ditinjau oleh Yakir Aharonov dan David Bohm pada tahun 1959 sehingga peristiwa ini seringkali disebut **Efek Aharonov-Bohm**.



Gambar 6.3: Efek Aharonov-Bohm pada solenoid yang sangat panjang.

Tinjau suatu partikel bermuatan q yang bergerak dalam daerah yang memiliki potensial vektor \mathbf{A} namun **tidak memiliki medan magnet** atau dengan kata lain $\nabla \times \mathbf{A} = 0$. Persamaan Schrödinger untuk sistem ini yaitu

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right)^2 + q\varphi \right] \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (6.83)$$

Misalkan sekarang kita ingin melakukan transformasi tera pada Ψ agar persamaan yang kita tinjau menjadi lebih mudah. Asumsikan transformasi tera yang kita lakukan berbentuk

$$\Psi' = e^{-ig} \Psi \quad (6.84)$$

dimana $g(\mathbf{r})$ adalah suatu fungsi tertentu. Kita coba tinjau $(\mathbf{p} - q\mathbf{A})\Psi$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)\Psi &= \left(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)e^{ig}\Psi' \\
 &= \frac{\hbar}{i}\nabla(e^{ig}\Psi') - q\mathbf{A}e^{ig}\Psi' \\
 &= \frac{\hbar}{i}\left[i(\nabla g)e^{ig}\right]\Psi' + \frac{\hbar}{i}e^{ig}\nabla\Psi' - q\mathbf{A}e^{ig}\Psi' \\
 &= \hbar(\nabla g)e^{ig}\Psi' + \frac{\hbar}{i}e^{ig}\nabla\Psi' - q\mathbf{A}e^{ig}\Psi' \\
 &= \left[\hbar(\nabla g) - q\mathbf{A}\right]e^{ig}\Psi' + \frac{\hbar}{i}e^{ig}\nabla\Psi'
 \end{aligned}$$

Tentu saja kita bebas memilih fungsi $g(\mathbf{r})$. Agar mudah, kita pilih fungsi $g(\mathbf{r})$ sedemikian sehingga

$$\hbar(\nabla g) - q\mathbf{A} = 0 \iff \nabla g = \frac{q}{\hbar}\mathbf{A} \quad (6.85)$$

Dengan demikian, fungsi $g(\mathbf{r})$ yang kita cari adalah

$$g(\mathbf{r}) = \frac{q}{\hbar} \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \quad (6.86)$$

Langkah berikutnya adalah menentukan ekspresi potensial vektor $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Untuk menentukan potensial vektor $\mathbf{A}(r)$, tinjau fluks magnet Φ pada daerah $r > a$

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \pi a^2 B \quad (6.87)$$

dimana πa^2 adalah luas penampang silinder. Dengan **teorema Stokes**, kita peroleh

$$\begin{aligned}
 \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \\
 &= \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \\
 &= A \times 2\pi r
 \end{aligned} \quad (6.88)$$

sehingga ekspresi potensial vektor $\mathbf{A}(r)$ diberikan oleh

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\varphi} \quad (6.89)$$

Sekarang, asumsikan lintasan berkas pada gambar 6.3 berbentuk busur lingkaran seperti gambar 6.4. Untuk lintasan berkas yang atas, fungsi $g(\mathbf{r})$ diberikan oleh

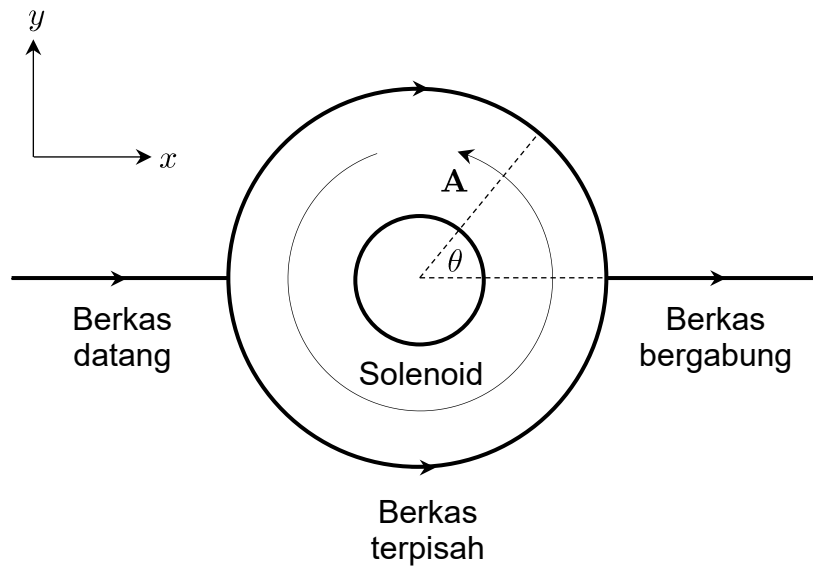
$$g_1(\mathbf{r}) = \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A}(r) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \frac{1}{r} \hat{\theta} \cdot (r d\theta \hat{\theta}) = -\frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int_0^\pi d\theta = -\frac{q\Phi}{2\hbar} \quad (6.90)$$

dimana tanda minus muncul karena arah $d\mathbf{r}$ berlawanan dengan arah potensial vektor \mathbf{A} . Fungsi $g(\mathbf{r})$ untuk lintasan berkas yang bawah diperoleh dengan cara serupa, yaitu

$$g_2(\mathbf{r}) = \frac{q}{\hbar} \int \mathbf{A}(r) \cdot d\mathbf{r} = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int \frac{1}{r} \hat{\theta} \cdot (r d\theta \hat{\theta}) = \frac{q\Phi}{2\pi\hbar} \int_{\pi}^{2\pi} d\theta = \frac{q\Phi}{2\hbar} \quad (6.91)$$

Perhatikan bahwa lintasan berkas yang searah dengan potensial vektor akan memiliki tanda positif sementara yang berlawanan akan memiliki tanda negatif. Artinya, kedua berkas mengalami **perbedaan fase** sebesar

$$\Delta = |g_1 - g_2| = \frac{q\Phi}{\hbar} \quad (6.92)$$



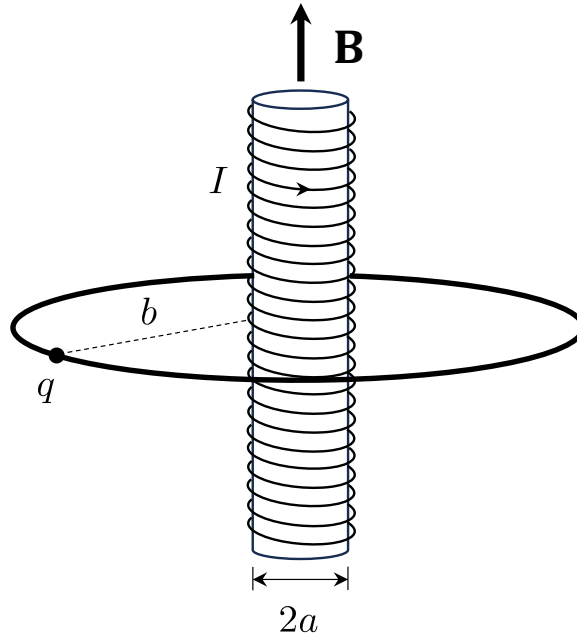
Gambar 6.4: Tampak atas dari efek Aharonov-Bohm pada solenoid yang sangat panjang.

Kesimpulannya adalah **walaupun tidak ada medan magnet, potensial vektor dapat mempengaruhi fase fungsi gelombang**. Perbedaan fase ini dapat diamati dalam bentuk pola interferensi. Salah satu ilmuwan yang telah melakukan eksperimen ini adalah Robert G. Chambers pada tahun 1960⁵.

6.9 Kuantisasi pada Superkonduktor

Tinjau suatu cincin superkonduktor. Berdasarkan persamaan (6.92), kita sudah mengetahui bahwa fungsi gelombang di dalam cincin superkonduktor haruslah *single-valued*

⁵R. G. Chambers, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 3 (1960).



Gambar 6.5: Partikel bermuatan q yang bergerak dalam lintasan lingkaran berjari-jari b mengelilingi solenoid panjang berdiameter $2a$ yang dialiri arus listrik I .

sehingga fluks dalam cincin superkonduktor mengikuti persamaan

$$\frac{e\Phi}{\hbar} = 2\pi n \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi = \frac{2\pi\hbar}{e}n = \frac{h}{e}n$$

Dalam cincin superkonduktor, fluks Φ ternyata juga mengalami kuantisasi. Namun, **pembawa muatan dalam superkonduktor bukanlah elektron tunggal**, melainkan **kondensat pasangan elektron**. Kuantisasi fluks dalam superkonduktor menjadi

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar}{2e}n \tag{6.93}$$

Kondensat pasangan elektron bermuatan $2e$ yang muncul pada persamaan (6.93) disebut *Cooper pair* berdasarkan nama fisikawan Amerika dan peraih hadiah Nobel dalam bidang fisika pada tahun 1972, Leon Cooper. Inilah yang menjadi salah satu dasar dari teori mikroskopik superkonduktivitas pertama yang diusulkan oleh John Bardeen, Leon Cooper, dan John Robert Schrieffer pada tahun 1957, yaitu **teori BCS** (Bardeen-Cooper-Schrieffer).

Bab 7

TEORI PERTURBASI TAK BERGANTUNG WAKTU

7.1 Konsep Perturbasi

Dalam kenyataan, seringkali sistem yang kita tinjau ternyata jauh lebih kompleks daripada sistem yang sudah kita pelajari dan ketahui dengan baik. Umumnya, ini akan mengakibatkan kesulitan dalam menyelesaikan persamaan Schrödinger secara eksak. Namun, seringkali Hamiltonian sistem yang kompleks tersebut dapat ditinjau sebagai Hamiltonian sistem yang sudah kita ketahui dengan baik ditambah suatu suku tambahan yang disebut sebagai **Hamiltonian perturbasi**.

Jika suku tambahan ini kecil dibandingkan dengan Hamiltonian sistem ideal, maka kita bisa memanfaatkan **teori perturbasi** untuk menganalisis sistem nyata tersebut. Selain itu, sistem ideal juga harus sudah diketahui dengan baik. Artinya, kita harus sudah mengetahui fungsi-fungsi eigennya dan energi eigennya.

7.2 Kasus *Nondegenerate*

Misalkan Hamiltonian sistem bisa dituliskan sebagai¹

$$H = H_0 + H' \tag{7.1}$$

¹Ada beberapa referensi yang menuliskan Hamiltonian perturbasi sebagai $\lambda H'$ dan mengekspansi $|\psi_n\rangle$ dan E_n dalam λ seperti referensi [7]. Walaupun notasi ini lebih intuitif secara matematika, notasi ini kurang intuitif secara fisis.

dimana H_0 adalah Hamiltonian sistem ideal dan H' adalah Hamiltonian perturbasi². Tujuan kita adalah untuk menyelesaikan persamaan Schrödinger untuk H

$$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (7.2)$$

Untuk melakukan hal ini, pertama kita ekspansikan $|\psi_n\rangle$ dalam basis H_0 , yaitu $|\phi_n\rangle$.

$$\begin{aligned} |\psi_n\rangle &= \sum_k c_{nk} |\phi_k\rangle \\ &= \underbrace{c_{nn}}_{\equiv 1} |\phi_n\rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk} |\phi_k\rangle \\ &= |\phi_n\rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk} |\phi_k\rangle \end{aligned} \quad (7.3)$$

dimana koefisien ekspansi c_{nk} diberikan oleh

$$c_{nk} = c_{nk}^{(1)} + c_{nk}^{(2)} + c_{nk}^{(3)} + \dots \quad (7.4)$$

dan energi diekspansikan sebagai

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots \quad (7.5)$$

Kita mengambil $c_{nn} = 1$ pada persamaan (7.3) agar normalisasi hanya menggunakan variabel c_{nk} . Indeks (0), (1), (2) dan seterusnya pada persamaan (7.4) menunjukkan orde perturbasi³. Substitusi persamaan (7.1), (7.3), (7.4), dan (7.5) ke persamaan (7.2)

$$\begin{aligned} (H_0 + H') \left\{ |\phi_n\rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} |\phi_k\rangle + \dots \right\} = \\ (E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + \dots) \left\{ |\phi_n\rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} |\phi_k\rangle + \dots \right\} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Jika kita menginginkan hasil yang eksak, maka kita perlu menyelesaikan persamaan (7.6) secara eksak. Hal ini jelas sangat sulit atau bahkan mustahil dilakukan. Oleh karena itu, kita cukup meninjau persamaan (7.6) hingga orde tertentu saja sesuai dengan keperluan kita. Tentu saja, orde yang tinggi akan menghasilkan gambaran yang semakin

²Dalam buku ini, perlu dipahami bahwa H' adalah Hamiltonian perturbasi berorde satu.

³Perlu dipahami bahwa perkalian suku berorde m dan n akan sebanding dengan suku berorde $m + n$.

$$O^{(m)} \times O^{(n)} \propto O^{(m+n)}$$

akurat. Namun, **umumnya dengan memperhatikan dua orde terendah pun kita sudah memperoleh hasil yang cukup akurat.**

Tinjau persamaan (7.6) untuk orde nol

$$H_0 |\phi_n\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n\rangle \quad (7.7)$$

Persamaan (7.7) tiada lain merupakan persamaan Schrödinger untuk sistem ideal yang sudah terpenuhi secara *trivial*. Sekarang, kita tinjau persamaan (7.6) orde pertama

$$H' |\phi_n\rangle + H_0 \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} |\phi_k\rangle = E_n^{(0)} \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} |\phi_k\rangle + E_n^{(1)} |\phi_n\rangle \quad (7.8)$$

dan orde dua

$$\begin{aligned} H_0 \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(2)} |\phi_k\rangle + H' \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} |\phi_k\rangle \\ = E_n^{(0)} \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(2)} |\phi_k\rangle + E_n^{(1)} \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} |\phi_k\rangle + E_n^{(2)} |\phi_n\rangle \end{aligned} \quad (7.9)$$

Dapat kita lihat bahwa persamaan (7.6) untuk sembarang orde m adalah⁴

$$H_0 \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(m)} |\phi_k\rangle + H' \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(m-1)} |\phi_k\rangle = E_n^{(0)} \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(m)} |\phi_k\rangle + \dots + E_n^{(m)} |\phi_n\rangle \quad (7.10)$$

Umumnya, kita cukup berhenti dengan perturbasi orde kedua karena perturbasi orde tinggi sudah terlalu kompleks dan tidak terlalu bermanfaat. Adapun yang menjadi tujuan kita dalam teori perturbasi tak bergantung waktu adalah **menentukan koreksi terhadap energi $E_n^{(m)}$ dan koreksi terhadap state yang ditentukan oleh koefisien ekspansi $c_{nk}^{(m)}$.**

Sekarang, kita akan mulai mencari koreksi terhadap energi dan *state* akibat Hamiltonian perturbasi H' dari orde pertama. Perhatikan bahwa persamaan (7.8) dapat kita tulis ulang menjadi

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} |\phi_n\rangle &= H' |\phi_n\rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} (H_0 - E_n^{(0)}) |\phi_k\rangle \\ &= H' |\phi_n\rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) |\phi_k\rangle \end{aligned} \quad (7.11)$$

⁴Dapat kita lihat dengan jelas salah satu kelemahan dari notasi c_{nk} yaitu meningkatkan kerumitan matematika dan memperbanyak indeks.

dimana telah kita gunakan persamaan orde nol (7.7) pada suku yang berwarna biru. Kerjakan $\langle \phi_n |$ dari kiri

$$\begin{aligned}\langle \phi_n | E_n^{(1)} | \phi_n \rangle &= \langle \phi_n | H' | \phi_n \rangle + \langle \phi_n | \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) | \phi_k \rangle \\ E_n^{(1)} \langle \phi_n | \phi_n \rangle &= \langle \phi_n | H' | \phi_n \rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) \langle \phi_n | \phi_k \rangle \\ E_n^{(1)} &= \langle \phi_n | H' | \phi_n \rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) \delta_{nk}\end{aligned}\quad (7.12)$$

Perhatikan bahwa δ_{nk} memaksa $n = k$ sedangkan sumasi dilakukan dengan syarat $k \neq n$. Artinya, **sumasi tersebut bernilai nol**. Dengan demikian, kita peroleh **koreksi orde pertama terhadap energi** pada keadaan $|\phi_n\rangle$

$$\boxed{E_n^{(1)} = \langle \phi_n | H' | \phi_n \rangle} \quad (7.13)$$

Sekarang, kita coba kerjakan $\langle \phi_n |$ dari kiri pada kedua ruas persamaan (7.10)

$$\begin{aligned}\sum_{k \neq n} c_{nk}^{(m)} \langle \phi_n | H_0 | \phi_k \rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(m-1)} \langle \phi_n | H' | \phi_k \rangle \\ = \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(m)} E_n^{(0)} \langle \phi_n | \phi_k \rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(m-1)} E_n^{(1)} \langle \phi_n | \phi_k \rangle + \cdots + E_n^{(m)} \langle \phi_n | \phi_n \rangle\end{aligned}\quad (7.14)$$

Seperti pada persamaan (7.12), karena $\langle \phi_n | \phi_k \rangle = \delta_{nk}$ sementara sumasi dilakukan dengan syarat $k \neq n$, maka suku di ruas kanan yang tidak bernilai nol hanya $E_n^{(m)} \langle \phi_n | \phi_n \rangle = E_n^{(m)}$. Dengan memanfaatkan persamaan (7.7), kita peroleh koreksi orde m terhadap energi

$$\boxed{E_n^{(m)} = \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(m-1)} \langle \phi_n | H' | \phi_k \rangle} \quad (7.15)$$

yang tiada lain menunjukkan suatu hubungan rekursif karena kita memerlukan $c_{nk}^{(m-1)}$ untuk menentukan $E_n^{(m)}$. Kita akan coba menggunakan rumus ini untuk menentukan $E_n^{(2)}$. Untuk mencari $c_{nk}^{(1)}$, kerjakan $\langle \phi_\ell |$ pada kedua ruas persamaan (7.11) dari kiri

dengan $\ell \neq n$

$$\begin{aligned}
E_n^{(1)} \langle \phi_\ell | \phi_n \rangle &= \langle \phi_\ell | H' | \phi_n \rangle + \langle \phi_\ell | \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) | \phi_k \rangle \\
E_n^{(1)} \delta_{\ell n} &= \langle \phi_\ell | H' | \phi_n \rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) \langle \phi_\ell | \phi_k \rangle \\
0 &= \langle \phi_\ell | H' | \phi_n \rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} (E_k^{(0)} - E_n^{(0)}) \delta_{\ell k} \\
0 &= \langle \phi_\ell | H' | \phi_n \rangle + c_{n\ell}^{(1)} (E_\ell^{(0)} - E_n^{(0)})
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Dengan demikian, kita peroleh *state* yang telah dikoreksi hingga orde pertama⁵

$$|\psi_n\rangle = |\phi_n\rangle + \sum_{k \neq n} \frac{\langle \phi_k | H' | \phi_n \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |\phi_k\rangle \tag{7.17}$$

dimana kita telah mengganti indeks ℓ menjadi k karena ℓ hanya merupakan *dummy index*. Karena kita telah memperoleh $c_{nk}^{(1)}$, kita bisa memperoleh $E_n^{(2)}$ dengan memanfaatkan persamaan (7.15)

$$\begin{aligned}
E_n^{(2)} &= \sum_{k \neq n} c_{nk}^{(1)} \langle \phi_n | H' | \phi_k \rangle \\
&= \sum_{k \neq n} \frac{\langle \phi_k | H' | \phi_n \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \langle \phi_n | H' | \phi_k \rangle \\
&= \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \phi_n | H' | \phi_k \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Dengan demikian, **koreksi orde kedua terhadap energi** adalah

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle \phi_n | H' | \phi_k \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \tag{7.19}$$

Umumnya, kita berhenti sampai koreksi orde pertama untuk *state* dan koreksi orde dua untuk energi. Namun, koreksi orde lebih tinggi dapat diperoleh dengan prosedur yang sama.

⁵Perhatikan bahwa $\langle \phi_k | H' | \phi_n \rangle$ adalah suatu elemen matriks. Dengan menggunakan notasi dalam referensi [7], ekspresi ini dapat disingkat sebagai H'_{kn} .

7.2.1 Osilator Anharmonik

Salah satu sistem yang banyak dipelajari menggunakan teori perturbasi adalah **osilator anharmonik**. Misalnya adalah penelitian Bender dan Wu (*Phys. Rev.* **184**, (1969) 1231.) yang mempelajari osilator harmonik dengan perturbasi $\propto x^4$. Tinjau Hamiltonian osilator anharmonik berikut

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \lambda\hat{x}^4 \quad (7.20)$$

dimana λ adalah konstanta real yang cukup kecil sehingga kita dapat menganggap suku λx^4 sebagai perturbasi. Kita akan mencari koreksi terhadap energi hingga orde dua pada *ground state* osilator harmonik. Untuk mencari koreksi orde pertama, kita dapat memanfaatkan operator tangga \hat{a} dan \hat{a}^\dagger . Ingat kembali bahwa operator posisi dalam osilator harmonik dapat dinyatakan dalam operator \hat{a} dan \hat{a}^\dagger

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (7.21)$$

Koreksi energi orde pertama diberikan oleh⁶

$$\begin{aligned} E_0^{(1)} &= \langle \phi_0 | \lambda \hat{x}^4 | \phi_0 \rangle \\ &= \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle \phi_0 | (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4 | \phi_0 \rangle \\ &= \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle \phi_0 | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | \phi_0 \rangle \\ &= \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle \phi_0 | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) | \phi_1 \rangle \\ &= \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle \phi_0 | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left[\sqrt{2} |\phi_2\rangle + |\phi_0\rangle \right] \\ &= \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle \phi_0 | (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \left[\sqrt{6} |\phi_3\rangle + |\phi_1\rangle + 2 |\phi_1\rangle \right] \\ &= \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^2 \langle \phi_0 | \left[3\sqrt{2} |\phi_2\rangle + 2\sqrt{6} |\phi_4\rangle + 3 |\phi_0\rangle + 3\sqrt{2} |\phi_2\rangle \right] \\ &= \frac{3}{4} \frac{\hbar^2 \lambda}{m^2 \omega^2} \end{aligned} \quad (7.22)$$

dimana kita telah menggunakan sifat ortonormalitas $\langle \phi_n | \phi_\ell \rangle = \delta_{n\ell}$. Sebenarnya, kita tidak perlu menjabarkan secara detail seperti penurunan di atas. Salah satu cara lain

⁶State berwarna biru dihasilkan oleh \hat{a}^\dagger sementara state berwarna merah dihasilkan oleh \hat{a} .

yang lebih singkat adalah dengan memperhatikan bahwa **kita harus menghasilkan state** $|\phi_0\rangle$ **agar hasilnya tidak nol ketika dikerjakan** $\langle\phi_0|$ **dari kiri**. Perhatikan juga bahwa kombinasi \hat{a} dan \hat{a}^\dagger agar tercapai hal tersebut haruslah memenuhi

- Jumlah \hat{a} dan \hat{a}^\dagger harus sama agar $|\phi_0\rangle$ tidak berubah.
- \hat{a} tidak boleh bekerja langsung ke $|\phi_0\rangle$ karena $\hat{a}|\phi_0\rangle = 0$.

Dapat dicek dengan mudah bahwa kedua syarat tersebut hanya akan menyisakan dua suku dari $(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4$ yang akan memberikan kontribusi

$$(\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4 \rightarrow \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger \quad (7.23)$$

Dapat kita cek dengan mudah bahwa hasilnya sama seperti penurunan (7.22)

$$\begin{aligned} \langle\phi_0| \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger |\phi_0\rangle &= \langle\phi_0| \hat{a}\hat{a}\hat{a}^\dagger |\phi_1\rangle + \langle\phi_0| \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} |\phi_1\rangle \\ &= \sqrt{2} \langle\phi_0| \hat{a}\hat{a} |\phi_2\rangle + \langle\phi_0| \hat{a}\hat{a}^\dagger |\phi_0\rangle \\ &= 2 \langle\phi_0| \hat{a} |\phi_1\rangle + \langle\phi_0| \hat{a} |\phi_1\rangle \\ &= 3 \langle\phi_0| \hat{a} |\phi_1\rangle \\ &= 3 \langle\phi_0| \phi_0\rangle \\ &= 3 \end{aligned} \quad (7.24)$$

Sekarang, kita akan menghitung koreksi energi pada *ground state* untuk orde dua. Koreksi energi orde dua pada *ground state* diberikan oleh

$$\begin{aligned} E_0^{(2)} &= \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle\phi_n| \lambda \hat{x}^4 |\phi_0\rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_n^{(0)}} \\ &= \lambda^2 \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^4 \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle\phi_n| (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4 |\phi_0\rangle|^2}{\frac{1}{2}\hbar\omega - (n + \frac{1}{2})\hbar\omega} \\ &= -\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^4 \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle\phi_n| (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4 |\phi_0\rangle|^2}{n} \end{aligned} \quad (7.25)$$

Sebelum kita bisa menghitung lebih jauh, kita harus menentukan terlebih dahulu nilai n berapa saja yang harus kita perhitungkan dalam sumasi. Berdasarkan penurunan (7.22), dapat kita lihat dengan mudah bahwa

$$\langle\phi_n| (\hat{a}^\dagger + \hat{a})^4 |\phi_0\rangle = 3\delta_{n,0} + 6\sqrt{2}\delta_{n,2} + 2\sqrt{6}\delta_{n,4} \quad (7.26)$$

yang artinya kita hanya perlu memperhitungkan $n = 2$ dan 4 dalam sumasi karena $n \neq 0$. Kembali ke persamaan (7.25), kita evaluasi sumasi tersebut untuk $n = 2$ dan 4

$$\begin{aligned}
 E_0^{(2)} &= -\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^4 \left[\frac{(6\sqrt{2})^2}{2} + \frac{(2\sqrt{6})^2}{4} \right] \\
 &= -\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar}{2m\omega} \right)^4 \left[\frac{72}{2} + \frac{24}{4} \right] \\
 &= -\frac{\lambda^2}{\hbar\omega} \times \frac{\hbar^4}{16m^4\omega^4} \times 42 \\
 &= -\frac{21}{8} \frac{\hbar^3\lambda^2}{m^4\omega^5}
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

Dengan demikian, energi *ground state* osilator anharmonik dengan Hamiltonian (7.20) adalah

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{3}{4}\frac{\hbar^2\lambda}{m^2\omega^2} - \frac{21}{8}\frac{\hbar^3\lambda^2}{m^4\omega^5} + O(\lambda^3) \tag{7.28}$$

Persamaan (7.28) masih bisa kita tingkatkan karena suku kedua dan ketiga kurang terlihat sebagai energi. Untuk itu, kita akan menentukan λ berdasarkan analisis dimensi. Kita akan mengkonstruksi λ berdasarkan \hbar , m , dan ω . Berdasarkan Hamiltonian (7.20), analisis dimensi λ diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 [\lambda] &= [H][L]^{-4} \\
 [\hbar]^\alpha [m]^\beta [\omega]^\gamma &= [L]^2 [M] [T]^{-2} [L]^{-4} \\
 [L]^{2\alpha} [M]^\alpha [T]^{-\alpha} [M]^\beta [T]^{-\gamma} &= [L]^{-2} [M] [T]^{-2} \\
 [L]^{2\alpha} [M]^{\alpha+\beta} [T]^{-\alpha-\gamma} &= [L]^{-2} [M] [T]^{-2}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan analisis dimensi tersebut, kita lihat dengan mudah bahwa $\alpha = -1$, $\beta = 2$, dan $\gamma = 3$. Artinya, kita bisa mengambil $\lambda = m^2\omega^3/\hbar$. Persamaan (7.28) menjadi

$$\begin{aligned}
 E_0 &= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{3}{4}\frac{\hbar^2\lambda}{m^2\omega^2} - \frac{21}{8}\frac{\hbar^3\lambda^2}{m^4\omega^5} + O(\lambda^3) \\
 &= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{3}{4}\frac{\hbar^2}{m^2\omega^2} \left(\frac{m^2\omega^3}{\hbar} \right) - \frac{21}{8}\frac{\hbar^3}{m^4\omega^5} \left(\frac{m^4\omega^6}{\hbar^2} \right) + O(\lambda^3) \\
 &= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{3}{4}\hbar\omega - \frac{21}{8}\hbar\omega + O(\lambda^3)
 \end{aligned} \tag{7.29}$$

7.3 Kasus *Degenerate*

Jika terdapat **degenerasi** pada keadaan yang kita tinjau, maka tentu saja kita membutuhkan metode baru yang memperhitungkan degenerasi keadaan yang kita tinjau.

Salah satu cara untuk memahami mengapa kita memerlukan teori baru adalah dengan melihat persamaan (7.19). Jika $n = k$, maka jelas penyebut pada persamaan (7.19) akan menyebabkan $E_n^{(2)}$ singular. Artinya, kita memerlukan suatu metode lain untuk menghitung koreksi pada energi dan fungsi gelombang jika ada degenerasi.

Misalkan ada N buah keadaan *eigen* H_0 , yaitu $|\phi_n^{(0)}; i\rangle$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$ yang terasosiasi dengan energi *eigen* $E_n^{(0)}$. Keadaan ini⁷ memenuhi persamaan Schrödinger

$$H_0 |\phi_n^{(0)}; i\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n^{(0)}; i\rangle$$

Keadaan tersebut juga memenuhi sifat ortonormalitas

$$\langle \phi_m^{(0)}; i | \phi_n^{(0)}; j \rangle = \delta_{mn} \delta_{ij} \quad (7.30)$$

Namun demikian, **kombinasi linear** dari $|\phi_n^{(0)}; i\rangle$ juga memenuhi persamaan Schrödinger sehingga kita tidak bisa mengetahui keadaan awal sistem sebelum diberikan perturbasi. Persamaan Schrödinger yang ingin kita selesaikan adalah

$$(H_0 + H') |\psi_n\rangle = E |\psi_n\rangle \quad (7.31)$$

dimana $|\psi_n\rangle$ dan E diekspansikan dengan cara serupa seperti persamaan (7.3), (7.4), dan (7.5). Namun, sekarang ekspansi $|\psi_n\rangle$ sedikit dimodifikasi menjadi

$$|\psi_n\rangle = \mathcal{N} \left\{ \sum_i \alpha_i |\phi_n^{(0)}; i\rangle + \sum_{k \neq n} c_{nk} \sum_i \beta_i |\phi_k^{(0)}; i\rangle \right\} \quad (7.32)$$

dimana \mathcal{N} adalah faktor normalisasi. Sekarang, coba tinjau kedua ruas persamaan (7.31) untuk orde pertama

$$\begin{aligned} H_0 \sum_{k \neq n} c_{nk} \sum_i \beta_i |\phi_k^{(0)}; i\rangle + H' \sum_i \alpha_i |\phi_n^{(0)}; i\rangle \\ = E_n^{(0)} \sum_{k \neq n} c_{nk} \sum_i \beta_i |\phi_k^{(0)}; i\rangle + E_n^{(1)} \sum_i \alpha_i |\phi_n^{(0)}; i\rangle \end{aligned} \quad (7.33)$$

Karena $H_0 |\phi_k^{(0)}; i\rangle = E_n^{(0)} |\phi_k^{(0)}; i\rangle$, maka jelas suku yang berwarna biru akan saling menghilangkan. Kerjakan $\langle \phi_n^{(0)}; j |$ dari kiri pada kedua ruas persamaan (7.33) untuk memperoleh

$$\sum_i \alpha_i \langle \phi_n^{(0)}; j | H' | \phi_n^{(0)}; i \rangle = E_n^{(1)} \sum_i \alpha_i \underbrace{\langle \phi_n^{(0)}; j | \phi_n^{(0)}; i \rangle}_{= \delta_{ij}} \quad (7.34)$$

⁷Perlu dipahami bahwa keadaan ini bisa saja hanya **sebagian kecil** dari keadaan yang mungkin. Artinya, tidak semua keadaan *eigen* H_0 harus memiliki degenerasi.

Dengan memperhatikan bahwa $\alpha_i \langle \phi_n^{(0)}; j | H' | \phi_n^{(0)}; i \rangle = \alpha_j$, kita peroleh persamaan

$$\sum_i \langle \phi_n^{(0)}; j | H' | \phi_n^{(0)}; i \rangle \alpha_i = E_n^{(1)} \alpha_j \quad (7.35)$$

yang tiada lain merupakan persamaan untuk **koreksi orde pertama terhadap energi** $E_n^{(1)}$. Persamaan (7.35) menyatakan bahwa

Koreksi orde pertama terhadap energi diperoleh dengan mendiagonalisasikan submatriks H' untuk keadaan yang *degenerate*.

CONTOH : POTENSIAL SUMUR TAK HINGGA DUA DIMENSI

(Diadaptasi dari referensi [3], *Problem 5.6*)

Tinjau sebuah partikel bermassa m dalam potensial

$$V_0 = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L \\ \infty & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Sistem ini kemudian diberikan perturbasi berupa

$$V_1 = \begin{cases} \lambda xy & , 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L \\ \infty & , \text{lainnya} \end{cases}$$

Tentukan

- Fungsi *eigen* untuk **keadaan dasar** dan **tereksitasi pertama** sebelum sistem diberikan perturbasi.
- Energi keadaan dasar dan tereksitasi pertama **setelah sistem diberikan perturbasi**. Hitung hingga koreksi orde pertama.

Solusi

- Fungsi *eigen* untuk partikel dalam potensial sumur tak hingga satu dimensi diberikan oleh

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Pada dua dimensi, fungsi *eigen*-nya adalah perkalian dari dua fungsi *eigen* satu dimensi

$$\Psi_{n,m}(x, y) = \psi_n(x) \psi_m(y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{L}\right)$$

Dengan demikian, fungsi *eigen* keadaan dasar untuk sistem sebelum diberikan perturbasi adalah

$$\Psi_{1,1}(x, y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

sementara fungsi *eigen* keadaan tereksitasi pertama adalah

$$\Psi_{1,2}(x, y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)$$

$$\Psi_{2,1}(x, y) = \frac{2}{L} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$$

- (b) Keadaan dasar bersifat *nondegenerate*. Koreksi orde pertama untuk energi keadaan dasar diberikan oleh

$$\begin{aligned} E_0^{(1)} &= \langle 1, 1 | V_1 | 1, 1 \rangle = \iint \Psi_{1,1}(x, y) V_1 \Psi_{1,1}(x, y) dx dy \\ &= \frac{4\lambda}{L^2} \left[\int_0^L x \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \right] \left[\int_0^L y \sin^2\left(\frac{\pi y}{L}\right) dy \right] \\ &= \frac{4\lambda}{L^2} \left[\int_0^L x \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \right]^2 \\ &= \frac{4\lambda}{L^2} \left(\frac{L^2}{4} \right)^2 \\ &= \frac{\lambda L^2}{4} \end{aligned}$$

Sekarang, kita tinjau keadaan tereksitasi pertama. Jelas terlihat bahwa keadaan tersebut memiliki dua degenerasi. Oleh karena itu, kita bentuk dulu representasi matriks dari V_1

$$\begin{aligned} V_{1,11} &= \langle 1, 2 | V_1 | 1, 2 \rangle = \iint \Psi_{1,2}(x, y) V_1 \Psi_{1,2}(x, y) dx dy \\ &= \frac{4\lambda}{L^2} \left[\int_0^L x \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \right] \left[\int_0^L y \sin^2\left(\frac{2\pi y}{L}\right) dy \right] \\ &= \frac{4\pi}{L^2} \times \frac{L^2}{4} \times \frac{L^2}{4} \\ &= \frac{\lambda L^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{1,12} &= \langle 1, 2 | V_1 | 2, 1 \rangle = \iint \Psi_{1,2}(x, y) V_1 \Psi_{2,1}(x, y) dx dy \\
&= \frac{4\lambda}{L^2} \left[\int_0^L x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx \right]^2 \\
&= \frac{4\lambda}{L^2} \left(-\frac{8L^2}{9\pi^2} \right)^2 \\
&= \frac{256\lambda L^2}{81\pi^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{1,21} &= \langle 2, 1 | V_1 | 1, 2 \rangle = \iint \Psi_{2,1}(x, y) V_1 \Psi_{1,2}(x, y) dx dy \\
&= \frac{4\lambda}{L^2} \left[\int_0^L x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx \right]^2 \\
&= \frac{4\lambda}{L^2} \left(-\frac{8L^2}{9\pi^2} \right)^2 \\
&= \frac{256\lambda L^2}{81\pi^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{1,22} &= \langle 2, 1 | V_1 | 2, 1 \rangle = \iint \Psi_{2,1}(x, y) V_1 \Psi_{2,1}(x, y) dx dy \\
&= \frac{4\lambda}{L^2} \left[\int_0^L x \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx \right] \left[\int_0^L y \sin^2\left(\frac{\pi y}{L}\right) dy \right] \\
&= \frac{4\lambda}{L^2} \times \frac{L^2}{4} \times \frac{L^2}{4} \\
&= \frac{\lambda L^2}{4}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, representasi matriks V_1 adalah

$$V_1 = \frac{\lambda L^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1024/81\pi^4 \\ 1024/81\pi^4 & 1 \end{pmatrix}$$

Koreksi orde pertama diperoleh dengan cara mendiagonalisasikan V_1 . Dengan kata lain, kita harus mencari nilai *eigen* dari V_1 . Jika nilai *eigen*-nya adalah $E_1^{(1)}$,

maka

$$\begin{aligned} \det(V_1 - E_1^{(1)} I) &= 0 \\ \begin{vmatrix} \frac{\lambda L^2}{4} - E_1^{(1)} & \frac{256\lambda L^2}{81\pi^4} \\ \frac{256\lambda L^2}{81\pi^4} & \frac{\lambda L^2}{4} - E_1^{(1)} \end{vmatrix} &= 0 \\ \left(\frac{\lambda L^2}{4} - E_1^{(1)}\right)^2 - \left(\frac{256\lambda L^2}{81\pi^4}\right)^2 &= 0 \\ \frac{\lambda L^2}{4} - E_1^{(1)} &= \pm \frac{256\lambda L^2}{81\pi^4} \end{aligned}$$

Dengan demikian, kita peroleh koreksi orde pertama terhadap energi keadaan tereksitasi pertama

$$E_1^{(1)} = \lambda L^2 \left(\frac{1}{4} \mp \frac{256}{81\pi^4} \right) \approx 0.218\lambda L^2 \text{ dan } 0.282\lambda L^2$$

Mudah kita lihat bahwa spektrum energi untuk sistem yang belum diberikan perturbasi adalah

$$E_n^{(0)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2)$$

sehingga energi keadaan dasar yang sudah dikoreksi hingga orde pertama adalah

$$E_0 = E_0^{(0)} + E_0^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (1^2 + 1^2) + \frac{\lambda L^2}{4} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} + \frac{\lambda L^2}{4}$$

dan energi keadaan tereksitasi pertama yang sudah dikoreksi hingga orde pertama adalah

$$E_1 = E_1^{(0)} + E_1^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (1^2 + 2^2) + E_1^{(1)} = \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} + E_1^{(1)}$$

Dengan menggunakan kedua nilai $E_1^{(1)}$, kita peroleh

$$E_{1+} = \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} + 0.282\lambda L^2 \quad E_{1-} = \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} - 0.218\lambda L^2$$

7.3.1 Efek Stark

Salah satu penerapan teori perturbasi untuk sistem dengan degenerasi yang paling terkenal adalah pada **atom dalam medan elektromagnetik**. Salah satunya adalah **efek**

Stark, yaitu pergeseran spektrum energi atom akibat medan listrik. Tinjau Hamiltonian atom hidrogen yang berada dalam medan listrik $\mathbf{E} = \mathcal{E}\hat{z}$

$$H = H_0 + H' = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + e\mathcal{E}z \quad (7.36)$$

Kita akan meninjau pengaruh medan listrik ini ke spektrum energi atom hidrogen. Koreksi orde pertama untuk keadaan dasar ($n = 1$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$) diberikan oleh

$$\begin{aligned} E_{100}^{(1)} &= \langle 100|H'|100\rangle = e\mathcal{E} \langle 100|z|100\rangle \\ &= e\mathcal{E} \int d^3\mathbf{r} \Psi_{100}^* z \Psi_{100} \\ &= e\mathcal{E} \int d^3\mathbf{r} |\Psi_{100}|^2 z \end{aligned} \quad (7.37)$$

7.3.2 Efek Zeeman

Bab 8

APROKSIMASI WKB

Bab 9

TEORI PERTURBASI BERGANTUNG WAKTU

9.1 Hamiltonian yang Bergantung Waktu

Dalam mekanika kuantum, umumnya kita berhadapan dengan Hamiltonian yang tidak bergantung waktu. Walaupun Hamiltonian yang tidak bergantung waktu banyak dipelajari, Hamiltonian ini membatasi kita sehingga kita hanya bisa bekerja di keadaan stasioner. Untuk mengatasi hal ini, kita bisa memasukkan kebergantungan terhadap waktu pada Hamiltonian yang kita miliki.

Konsekuensi dari Hamiltonian yang bergantung waktu adalah dimungkinkan terjadinya **transisi antar keadaan**. Dalam konteks teori perturbasi, transisi antar keadaan kuantum dibangkitkan dengan cara menambahkan suatu potensial yang bergantung waktu pada sistem yang kita tinjau. Secara matematis, Hamiltonian yang akan kita tinjau berbentuk

$$H(t) = H_0 + H'(t) \quad (9.1)$$

dimana H_0 adalah Hamiltonian sistem ideal yang tidak bergantung waktu dan persamaan $H_0 |\phi_n\rangle = E_n^{(0)} |\phi_n\rangle$ sudah kita ketahui solusinya.

9.2 Amplitudo dan Peluang Transisi

Karena sekarang Hamiltonian yang kita tinjau bergantung waktu, maka tentu saja kita harus menyelesaikan persamaan Schrödinger yang bergantung waktu. Persamaan Schrödinger untuk Hamiltonian (9.1) adalah

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \left[H_0 + H'(t) \right] |\Psi(t)\rangle \quad (9.2)$$

Solusi $|\Psi(t)\rangle$ untuk persamaan (9.2) berbentuk¹

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle \quad (9.3)$$

dimana $|\phi_n\rangle$ adalah fungsi *eigen* H_0 dan koefisien ekspansi $c_n(t)$ dapat diekspansikan menjadi

$$c_n(t) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)}(t) + c_n^{(2)}(t) + \dots \quad (9.4)$$

Tujuan kita adalah mencari koefisien $c_n(t)$. Substitusikan persamaan (9.3) ke persamaan (9.2)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_n c_n(t) e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle &= \left[H_0 + H'(t) \right] \sum_n c_n(t) e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle \\ i\hbar \sum_n \left\{ \frac{dc_n}{dt} - \frac{iE_n^{(0)}}{\hbar} c_n \right\} e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle &= \sum_n \left\{ E_n^{(0)} + H' \right\} c_n e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle \\ \sum_n \left(i\hbar \dot{c}_n + \cancel{E_n^{(0)} c_n} \right) e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle &= \sum_n \left\{ \cancel{E_n^{(0)} c_n} + H' c_n \right\} e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle \\ i\hbar \sum_n \dot{c}_n e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle &= \sum_n H' c_n e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle \end{aligned} \quad (9.5)$$

Untuk mengatasi sumasi tersebut, kerjakan $\langle \phi_m |$ dari kiri

$$\begin{aligned} i\hbar \langle \phi_m | \sum_n \dot{c}_n(t) e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle &= \langle \phi_m | \sum_n H'(t) c_n(t) e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} |\phi_n\rangle \\ i\hbar \sum_n \dot{c}_n(t) e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} \langle \phi_m | \phi_n \rangle &= \sum_n c_n(t) \langle \phi_m | H'(t) | \phi_n \rangle e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} \\ i\hbar \sum_n \dot{c}_n(t) e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} \delta_{mn} &= \sum_n c_n(t) \langle \phi_m | H'(t) | \phi_n \rangle e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} \\ i\hbar \dot{c}_m(t) e^{-iE_m^{(0)}t/\hbar} &= \sum_n c_n(t) \langle \phi_m | H'(t) | \phi_n \rangle e^{-iE_n^{(0)}t/\hbar} \\ i\hbar \dot{c}_m(t) &= \sum_n c_n(t) \langle \phi_m | H'(t) | \phi_n \rangle e^{i(E_m^{(0)} - E_n^{(0)})t/\hbar} \end{aligned} \quad (9.6)$$

Dengan mendefinisikan $\omega_{mn} \equiv (E_m^{(0)} - E_n^{(0)})/\hbar$, kita peroleh persamaan diferensial untuk $c_n(t)$

$$\dot{c}_m(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n(t) \langle \phi_m | H'(t) | \phi_n \rangle e^{i\omega_{mn}t} \quad (9.7)$$

¹Ekspansi $|\Psi(t)\rangle$ pada persamaan (9.3) diperoleh dengan menggunakan **gambaran interaksi** (*interaction picture*). Lihat referensi [7] untuk pembahasan lebih detail mengenai gambaran interaksi.

Sekarang, kita substitusikan ekspansi (9.4) ke persamaan (9.7)

$$\dot{c}_m^{(1)}(t) + \dot{c}_m^{(2)}(t) + \dots = -\frac{i}{\hbar} \sum_n (c_n^{(0)} + c_n^{(1)}(t) + \dots) \langle \phi_m | H'(t) | \phi_n \rangle e^{i\omega_{mn}t} \quad (9.8)$$

Dapat dengan mudah kita identifikasi bahwa

$$\dot{c}_m^{(s+1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_n c_n^{(s)}(t) \langle \phi_m | H'(t) | \phi_n \rangle e^{i\omega_{mn}t} \quad (9.9)$$

Dalam teori perturbasi bergantung waktu, umumnya kita hanya meninjau hingga perturbasi orde pertama. Misalkan sistem yang kita tinjau mula-mula berada pada keadaan ke- k . Secara matematis, ini berarti $c_n^{(0)} = \delta_{nk}$. Substitusikan $c_n^{(0)} = \delta_{nk}$ ke persamaan (9.9) untuk $s = 0$

$$\begin{aligned} \dot{c}_m^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \sum_n \delta_{nk} \langle \phi_m | H'(t) | \phi_n \rangle e^{i\omega_{mn}t} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \langle \phi_m | H'(t) | \phi_k \rangle e^{i\omega_{mk}t} \end{aligned} \quad (9.10)$$

atau dengan kata lain

$$c_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \langle \phi_n | H'(\tau) | \phi_k \rangle e^{i\omega_{nk}\tau} \quad (9.11)$$

dimana kita telah mengganti indeks m menjadi n . Dengan demikian, ekspresi c_n hingga orde pertama diberikan oleh

$$c_n(t) = \delta_{nk} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \langle \phi_n | H'(\tau) | \phi_k \rangle e^{i\omega_{nk}\tau} \quad (9.12)$$

dimana $|\phi_i\rangle$ adalah keadaan awal dan $|\phi_n\rangle$ adalah keadaan akhir.

Menurut definisi, peluang transisi dari keadaan $|\phi_k\rangle$ ke keadaan $|\phi_n\rangle$ diberikan oleh

$$P(k \rightarrow n) = |\langle \phi_n | \Psi(t) \rangle|^2 \quad (9.13)$$

Dengan menggunakan bentuk $|\Psi(t)\rangle$ seperti persamaan (9.3), peluang transisi dapat

ditulis ulang menjadi

$$\begin{aligned}
 P(k \rightarrow n) &= |\langle \phi_n | \Psi(t) \rangle|^2 \\
 &= \left| \langle \phi_n | \sum_k c_k(t) e^{iE_k^{(0)}(t)/\hbar} | \phi_k \rangle \right|^2 \\
 &= \left| \sum_k c_k(t) e^{iE_k^{(0)}(t)/\hbar} \langle \phi_n | \phi_k \rangle \right|^2 \\
 &= \left| \sum_k c_k(t) e^{iE_k^{(0)}(t)/\hbar} \delta_{nk} \right|^2 \\
 &= \left| c_n(t) e^{iE_n^{(0)}(t)/\hbar} \right|^2 \\
 &= \left(c_n^*(t) e^{-iE_n^{(0)}(t)/\hbar} \right) \left(c_n(t) e^{iE_n^{(0)}(t)/\hbar} \right) \\
 &= |c_n(t)|^2
 \end{aligned} \tag{9.14}$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan peluang transisi $P(k \rightarrow n)$ dalam $c_n(t)$ sebagai

$$\boxed{P(k \rightarrow n) = |c_n(t)|^2} \tag{9.15}$$

Oleh karena itu, $c_n(t)$ seringkali disebut **amplitudo transisi** (*transition amplitude*).

9.3 Aturan Emas Fermi

Transisi antara keadaan terikat (*bound state*) cukup mudah untuk dianalisis. Namun, seringkali kita akan menemukan transisi dari suatu keadaan terikat ke keadaan terhambur (*scattering state*) dalam fenomena di alam, misalnya **ionisasi atom**. Ada dua jenis kasus yang sering menjadi perhatian, yaitu

- Perturbasi konstan

$$H' = \begin{cases} V & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \tag{9.16}$$

- Perturbasi harmonik

$$H' = \begin{cases} 2V \cos \omega t & , t \in [0, t_0] \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases} \tag{9.17}$$

Langkah pertama yang harus kita lakukan tentu saja adalah **mendeskripsikan keadaan akhir transisi** yang bersifat kontinu dengan konsep **rapat keadaan** (*density of states*). Misalkan keadaan akhir yang kita tinjau merupakan **partikel bebas yang berada di kubus berukuran** $L \times L \times L$. Mudah dilihat bahwa fungsi gelombang yang memenuhi diberikan oleh

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (9.18)$$

dimana $k = p/\hbar$ adalah **bilangan gelombang**. Dapat kita cek dengan mudah bahwa fungsi gelombang tersebut ternormalisasi

$$\begin{aligned} \int \Psi^*(x, y, z) \Psi(x, y, z) d^3\mathbf{r} &= \int \left(\frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right) d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{L^3} \int d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{L^3} \times L^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sekarang, kita terapkan **syarat batas periodik** pada kubus tersebut. Syarat batas tersebut diberikan oleh

$$\Psi(x + L, y, z) = \Psi(x, y + L, z) = \Psi(x, y, z + L) = \Psi(x, y, z) \quad (9.19)$$

Coba kita tinjau bagian $\Psi(x + L, y, z) = \Psi(x, y, z)$. Kita peroleh

$$\begin{aligned} \Psi(x + L, y, z) &= \Psi(x, y, z) \\ \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{ik_x(x+L)} e^{ik_y y} e^{ik_z z} &= \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} \\ e^{ik_x(x+L)} &= e^{ik_x x} \\ e^{ik_x L} &= 1 \end{aligned} \quad (9.20)$$

Mengingat relasi Euler $e^{i\pi} = -1$, kita simpulkan bahwa

$$k_x L = 2\pi n_x$$

dimana n_x adalah suatu bilangan bulat. Dengan cara serupa, kita peroleh

$$\begin{aligned} k_x L &= 2\pi n_x \\ k_y L &= 2\pi n_y \\ k_z L &= 2\pi n_z \end{aligned} \quad (9.21)$$

dimana n_x, n_y , dan n_z adalah bilangan bulat. **Jumlah keadaan** dn diberikan oleh

$$dn = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{2\pi} dk_x \right) \left(\frac{L}{2\pi} dk_y \right) \left(\frac{L}{2\pi} dk_z \right) = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 d^3\mathbf{k} \quad (9.22)$$

Namun demikian, kita akan lebih sering membutuhkan dn sebagai fungsi energi. Misalkan dn dapat dituliskan dalam energi sebagai

$$dn = \rho(E) dE$$

dimana $\rho(E)$ disebut **rapat keadaan** (*density of states*). Untuk menghubungkan k dengan E , ingat kembali bahwa energi partikel bebas diberikan oleh

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (9.23)$$

sehingga jelas bahwa

$$dE = \frac{\hbar^2}{m} k dk \quad (9.24)$$

Langkah berikutnya adalah mencari hubungan $d^3\mathbf{k}$ dan dE . Untuk melakukan hal ini, perhatikan bahwa $d^3\mathbf{k}$ adalah **elemen volume dalam ruang momentum**. Kita tahu bahwa elemen volume dapat dinyatakan dalam koordinat bola sebagai

$$d^3\mathbf{k} = k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi = k^2 dk d\Omega \quad (9.25)$$

dimana $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ adalah **elemen sudut ruang**. Dengan demikian, dn sebagai fungsi energi diberikan oleh

$$\begin{aligned} dn &= \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 d^3\mathbf{k} \\ &= \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 k^2 dk d\Omega \\ &= \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{mk}{\hbar^2} dE d\Omega \\ &= \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{m\sqrt{2mE}}{\hbar^3} d\Omega dE \\ &= \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 m\sqrt{2mE} d\Omega dE \end{aligned} \quad (9.26)$$

Rapat keadaan dapat kita identifikasi dengan mudah sebagai

$$\boxed{\rho(E) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right)^3 m\sqrt{2mE} d\Omega} \quad (9.27)$$

Adapun makna dari rapat keadaan $\rho(E)$ adalah **jumlah keadaan per satuan energi di sekitar energi E dan momentum dalam sudut ruang $d\Omega$** .

9.3.1 Perturbasi Konstan

Tinjau suatu sistem dengan Hamiltonian H_0 yang diberikan perturbasi V seperti persamaan (9.16) sehingga Hamiltonian sistem menjadi

$$H = H_0 + H' = \begin{cases} H_0 & , t < 0 \\ H_0 + V & , t \geq 0 \end{cases} \quad (9.28)$$

dimana $V \equiv V(\mathbf{r})$ adalah suatu fungsi yang hanya bergantung terhadap posisi. Kita ingin meninjau **peluang transisi dari keadaan awal² $|i\rangle$ ke keadaan akhir $|f\rangle$ pada suatu waktu t sembarang**. Berdasarkan persamaan (9.12), amplitudo transisi dalam kasus ini diberikan oleh

$$\begin{aligned} c_f^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \langle f | H'(\tau) | i \rangle e^{i\omega_{fi}\tau} = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \langle f | V | i \rangle e^{i\omega_{fi}\tau} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \langle f | V | i \rangle \int_0^t d\tau e^{i\omega_{fi}\tau} \\ &= -\frac{i}{\hbar} \langle f | V | i \rangle \left[\frac{1}{i\omega_{fi}} e^{i\omega_{fi}\tau} \right]_0^t \\ &= -\frac{\langle f | V | i \rangle}{\hbar\omega_{fi}} (e^{i\omega_{fi}t} - 1) \\ &= \frac{\langle f | V | i \rangle}{E_f - E_i} (1 - e^{i\omega_{fi}t}) \end{aligned} \quad (9.29)$$

²Perlu diperhatikan bahwa i dalam $|i\rangle$ berarti *initial*, yang menunjukkan keadaan awal sedangkan i yang ditulis sendiri merupakan bilangan imajiner.

Peluang transisinya diberikan oleh

$$\begin{aligned}
 P(i \rightarrow f) &= \left| c_f^{(1)}(t) \right|^2 = \left| \frac{\langle f|V|i\rangle}{E_f - E_i} (1 - e^{i\omega_{fi}t}) \right|^2 \\
 &= \frac{|\langle f|V|i\rangle|^2}{(E_f - E_i)^2} (1 - e^{-i\omega_{fi}t}) (1 - e^{i\omega_{fi}t}) \\
 &= \frac{|\langle f|V|i\rangle|^2}{(E_f - E_i)^2} \left[1 - e^{i\omega_{fi}t} - e^{-i\omega_{fi}t} + 1 \right] \\
 &= \frac{|\langle f|V|i\rangle|^2}{(E_f - E_i)^2} \left[2 - 2 \left(\frac{e^{i\omega_{fi}t} + e^{-i\omega_{fi}t}}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{|\langle f|V|i\rangle|^2}{(E_f - E_i)^2} \left[2 - 2 \cos \omega_{fi}t \right] \\
 &= \frac{|\langle f|V|i\rangle|^2}{(E_f - E_i)^2} \left[4 \sin^2 \left(\frac{\omega_{fi}t}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{|\langle f|V|i\rangle|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 (\omega_{fi}t/2)}{(\omega_{fi}/2)^2} \tag{9.30}
 \end{aligned}$$

Dengan mendefinisikan notasi $V_{fi} \equiv \langle f|V|i\rangle$, kita peroleh ekspresi peluang transisi sebagai

$$P(i \rightarrow f) = \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2 (\omega_{fi}t/2)}{(\omega_{fi}/2)^2} \tag{9.31}$$

Jika kita membuat grafik peluang transisi $P(i \rightarrow f)$ sebagai fungsi ω_{fi} dan waktu t , kita akan memperoleh plot seperti gambar 9.1 dan 9.2. Dari gambar 9.1, perhatikan bahwa **transisi paling mungkin terjadi ketika $\omega_{fi} \rightarrow 0$** . Artinya,

Untuk perturbasi konstan, transisi yang paling mungkin terjadi adalah transisi dimana energi keadaan akhir hampir sama atau sama dengan keadaan awal.

Kita tinjau peluang transisi $P(i \rightarrow f)$ pada persamaan (9.31) untuk limit $\omega_{fi} \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega_{fi} \rightarrow 0} P(i \rightarrow f) = \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} \lim_{\omega_{fi} \rightarrow 0} \frac{\sin^2 (\omega_{fi}t/2)}{(\omega_{fi}/2)^2} = \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} t^2 \tag{9.32}$$

dimana kita telah menggunakan identitas

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin^2 ax}{a^2} = x^2$$

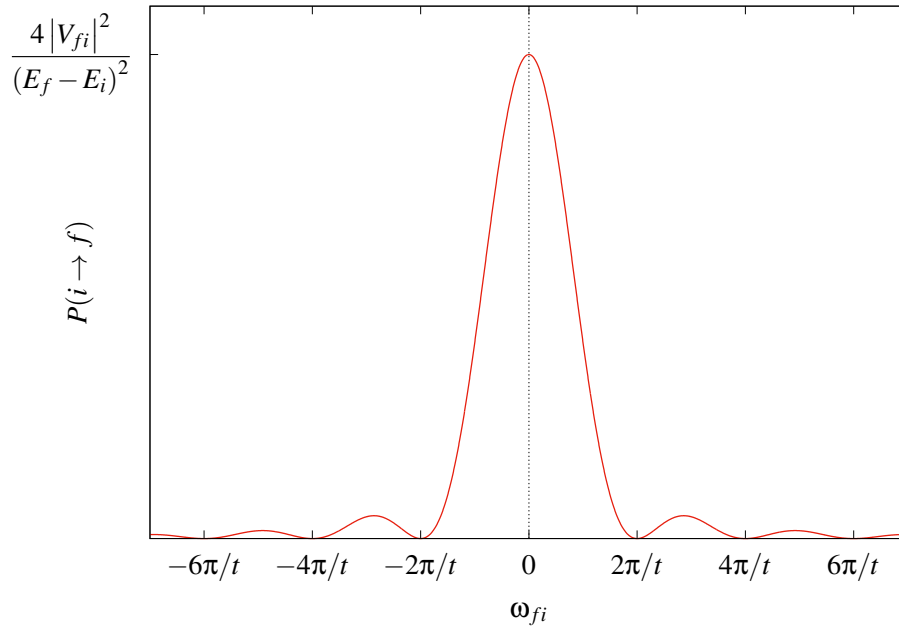
Namun demikian, jelas bahwa **peluang transisi yang meningkat secara kuadratik seperti persamaan (9.32) tidak valid untuk waktu yang lama karena peluang tidak bisa lebih dari satu sementara fungsi t^2 akan meningkat tanpa batas.**

Solusinya adalah dengan meninjau **peluang transisi total**, yaitu jumlah peluang transisi untuk semua keadaan akhir yang energinya hampir sama dengan energi keadaan awal. Peluang transisi total diberikan oleh

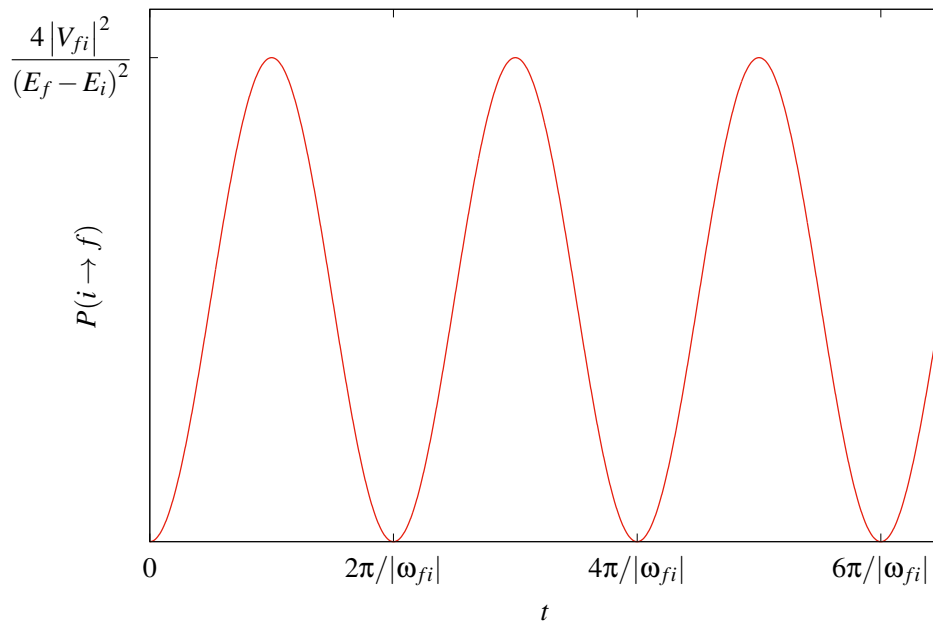
$$\sum_{f \text{ dimana } E_f \approx E_i} P(i \rightarrow f)$$

Namun, karena keadaan akhir bersifat **kontinu**, maka sumasi tersebut berubah menjadi

$$\sum_{f \text{ dimana } E_f \approx E_i} P(i \rightarrow f) \Rightarrow \int P(i \rightarrow f) \rho(E_f) dE_f \quad (9.33)$$



Gambar 9.1: Plot peluang transisi sebagai fungsi ω_{fi} untuk kasus perturbasi konstan.



Gambar 9.2: Plot peluang transisi sebagai fungsi waktu untuk kasus perturbasi konstan.

Bab 10

APROKSIMASI ADIABATIK

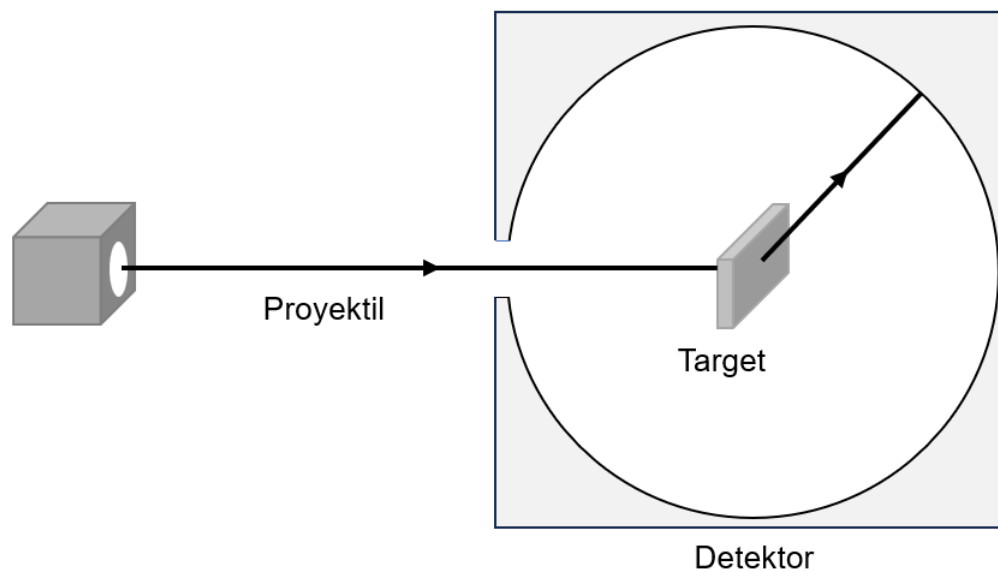
Bab 11

TEORI HAMBURAN

11.1 Konsep Hamburan Elastik

Dalam fisika energi tinggi (*high energy physics*), seringkali kita ingin memahami interaksi yang ada antar partikel atau struktur dari suatu partikel subatomik. Namun, jelas bahwa hal ini mustahil untuk diamati secara langsung. Salah satu metode yang banyak digunakan untuk mengamati kedua hal tersebut adalah melalui **hamburan**.

Secara sederhana, suatu proses hamburan terdiri dari tiga komponen, yaitu **proyektil**, **target**, dan **detektor**. Ilustrasi sederhananya diberikan oleh gambar 11.1.



Gambar 11.1: Ilustrasi proses hamburan sederhana

Ada banyak contoh hamburan partikel yang dapat terjadi, misalnya

$$\begin{aligned} e^+ + e^- &\rightarrow e^+ + e^- && \text{(Hamburan Bhabha)} \\ e^- + e^- &\rightarrow e^- + e^- && \text{(Hamburan Møller)} \\ e^- + \gamma &\rightarrow e^- + \gamma && \text{(Hamburan Compton)} \end{aligned}$$

Namun, ada juga kasus dimana **identitas partikel berubah**. Contohnya adalah

$$\begin{aligned} e^+ + e^- &\rightarrow \mu^+ + \mu^- \\ e^+ + e^- &\rightarrow \gamma + \gamma \end{aligned}$$

Pada pembahasan hamburan dalam mekanika kuantum non-relativistik, umumnya kita mendefinisikan **hamburan** untuk **kasus dimana keadaan awal dan akhir tidak berubah**.

$$a + b \rightarrow a + b$$

Tidak hanya itu, kita juga membatasi pembahasan pada **hamburan elastik**. Artinya, kita tidak akan memperhitungkan **perubahan keadaan internal partikel**. Untuk menyederhanakan perhitungan, kita mengambil asumsi

- Spin partikel **tidak diperhitungkan**
- Hamburan terjadi pada energi yang cukup rendah (**non-relativistik**)
- Interaksi partikel cukup sederhana sehingga hanya merupakan fungsi dari **vektor posisi antar partikel** ataupun **jarak antar partikel**

11.2 Persamaan Schrödinger untuk Hamburan Elastik

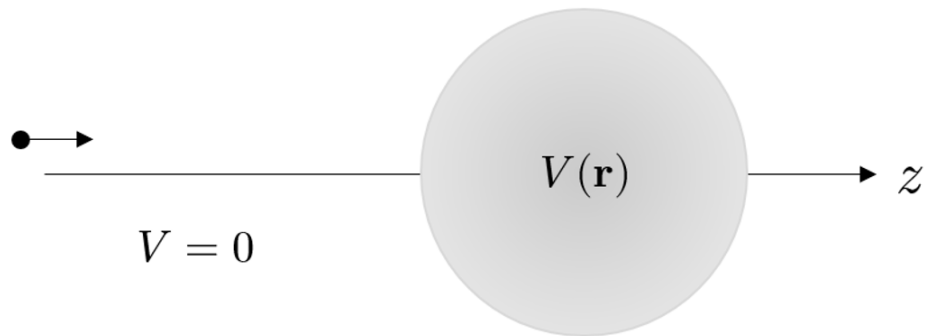
Kita mulai dengan menuliskan persamaan Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (11.1)$$

dimana m adalah **massa tereduksi**. Persamaan (11.1) sudah kita bawa ke kerangka pusat massa. Artinya, sistem yang kita tinjau sekarang tereduksi menjadi **hamburan partikel oleh suatu potensial $V(\mathbf{r})$** . Kita mengasumsikan bahwa proyektil datang dari **jauh tak berhingga** sehingga kita boleh mengambil energi E sebagai **energi partikel bebas** seperti persamaan (9.23).

Dengan mensubstitusikan (9.23) ke persamaan (11.1), kita peroleh

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 + k^2) + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (11.2)$$



Gambar 11.2: Partikel datang ke daerah dengan potensial $V(\mathbf{r})$ searah sumbu z positif.

Sekarang, misalkan partikel datang searah sumbu z positif menuju daerah dengan potensial $V(\mathbf{r})$ seperti gambar 11.2. Selama partikel masih di luar potensial $V(\mathbf{r})$, jelas bahwa fungsi gelombang partikel diberikan oleh

$$\phi(\mathbf{r}) = e^{ikz} \quad (11.3)$$

11.3 Penampang Lintang

11.4 Analisis Gelombang Parsial

11.5 Pergeseran Fase

11.6 Aproksimasi Born

11.7 Deret Born

Daftar Pustaka

- [1] David J. Griffiths dan Darrel F. Schroeter. *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2018.
- [2] Stephen Gasiorowicz. *Quantum Physics*. John Wiley & Sons, 2007.
- [3] J. J. Sakurai dan Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2021.
- [4] Richard L. Liboff. *Introductory Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 2003.
- [5] David W. Snoke. *Solid State Physics : Essential Concepts*. Cambridge University Press, 2020.
- [6] John S. Townsend. *A Modern Approach to Quantum Mechanics*. University Science Books, 2012.
- [7] Barton Zwiebach. *Mastering Quantum Mechanics: Essentials, Theory, and Applications*. MIT Press, 2022.