

HAMBURAN ELEKTRON-PROTON

Jovan Alfian Djaja (2106633771)

Departemen Fisika, Universitas Indonesia

ABSTRAK:

Proton adalah barion stabil bermuatan $+e$ yang terdiri dari tiga *quark* valensi (dua *up* dan satu *down*), *gluon*, dan pasangan *quark-antiquark* (*sea quarks*). Karena proton merupakan penyusun inti atom, sifat fisis dan struktur proton menjadi menarik untuk diteliti lebih lanjut. Salah satu metode modern yang banyak digunakan untuk meneliti struktur proton adalah **hamburan elektron-proton**. Pada *paper* ini, hamburan elektron-proton ditinjau secara detail melalui mekanika kuantum relativistik untuk memperoleh **penampang lintang diferensial** hamburan serta **faktor bentuk elektromagnetik** proton yang mendeskripsikan struktur elektromagnetik proton.

Daftar Isi

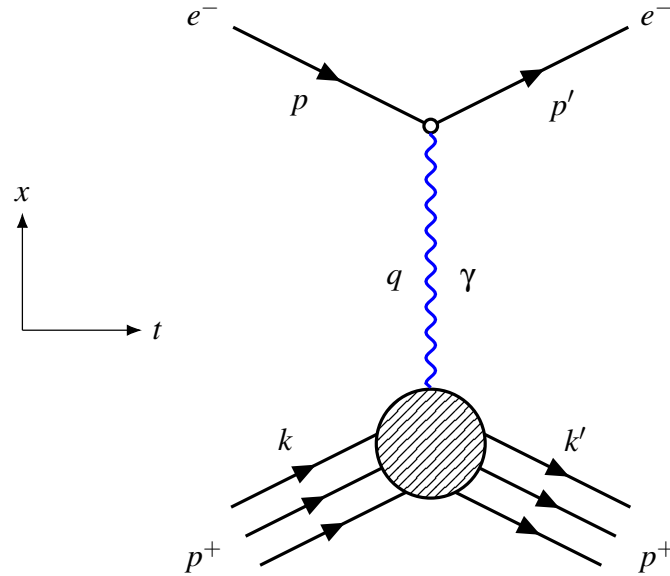
1	Pendahuluan : Reaksi dan Diagram Feynman	2
2	Arus dan Amplitudo Transisi	4
2.1	Arus Leptonik dan Hadronik	4
2.2	Faktor Verteks Proton : Struktur Γ^μ	5
2.3	Amplitudo Transisi	7
3	Amplitudo Invarian Reaksi	8
3.1	Aljabar <i>Trace</i>	9
3.1.1	Tensor Leptonik	9
3.1.2	Tensor Hadronik	10
3.2	Bentuk $ \mathcal{M} ^2$	13
4	Penampang Lintang Diferensial	20
4.1	Laju Transisi	20
4.2	Perhitungan Penampang Lintang Diferensial : Formula Rosenbluth	21
5	Kasus Khusus	25
5.1	Limit Proton Titik : Hamburan Elektron-Muon	25
5.2	Limit Hamburan Non-Relativistik Tanpa Spin : Hamburan Rutherford	25
6	Struktur Elektromagnetik Proton : G_E dan G_M	26
A	Persamaan-Persamaan untuk Spinor Dirac	29
A.1	Persamaan Dirac	29
A.2	Dekomposisi Gordon	29
A.3	Relasi Kelengkapan	29
B	Identitas Matriks Dirac dan Teorema <i>Trace</i>	29
B.1	Identitas Matriks Dirac	29
B.2	Teorema <i>Trace</i>	29
C	Persamaan-Persamaan Lain yang Berguna	30
	Daftar Pustaka	31

1 Pendahuluan : Reaksi dan Diagram Feynman

Reaksi hamburan elektron-proton elastik diberikan oleh

$$e^- + p^+ \rightarrow e^- + p^+$$

Diagram Feynman¹ orde terendah dari reaksi ini diberikan pada gambar 1.



Gambar 1. Diagram Feynman hamburan elektron-proton elastik orde terendah.

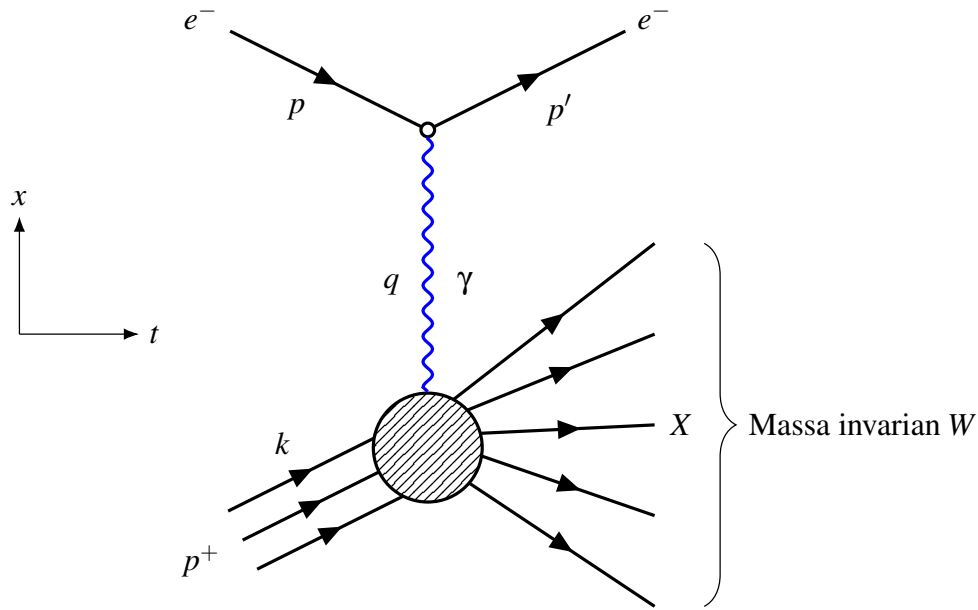
Umumnya, tujuan dari eksperimen hamburan elektron-proton adalah untuk menganalisis struktur proton, khususnya struktur elektromagnetik proton. Untuk melakukan hal ini, hamburan elektron-proton dilakukan pada berbagai energi. Energi elektron yang tidak terlalu tinggi akan menghasilkan hamburan elastik seperti gambar 1. Namun, jika energi elektron cukup tinggi, maka hamburan akan menjadi inelastik seperti gambar 2.

Bagaimana kebergantungan proses hamburan elektron-proton terhadap energi elektron? Berdasarkan [3], ada empat kasus yang dapat terjadi (misalkan λ adalah panjang gelombang de Broglie elektron dan r_p adalah jari-jari proton)

- Pada energi sangat rendah ($\lambda \gg r_p$), proton akan menjadi seperti muatan titik yang tidak memiliki spin. Inilah hamburan Rutherford yang banyak dipelajari dalam mekanika kuantum non-relativistik ataupun mekanika klasik.
- Pada energi rendah ($\lambda \sim r_p$), proton akan menjadi seperti suatu distribusi muatan kontinu. Namun, struktur internalnya masih belum terdeteksi.

¹Lingkaran yang diarsir menggambarkan struktur internal proton yang belum dipahami dengan baik sehingga kita tidak bisa menggambarkan interaksi apa yang terjadi antara foton virtual dengan *quark* penyusun proton.

- Pada energi tinggi ($\lambda < r_p$), struktur internal proton sudah bisa dideteksi oleh elektron. Pengaruh *quark* konstituen proton sudah mulai terlihat dalam proses hamburan.
- Pada energi sangat tinggi ($\lambda \ll r_p$), struktur internal proton memberikan pengaruh yang sangat signifikan. Pengaruh *gluon* dalam proton sudah harus diperhitungkan. Proton dimungkinkan untuk pecah menjadi partikel-partikel baru sehingga identitas awal proton hilang seluruhnya sehingga hamburan sudah tidak elastik lagi [2]. Inilah yang disebut sebagai *deep inelastic scattering*.



Gambar 2. Diagram Feynman hamburan elektron-proton inelastik orde terendah. Reaksi yang berlangsung direpresentasikan oleh $e^- + p^+ \rightarrow e^- + X$, dimana X adalah partikel yang dihasilkan dari p

Sebelum kita melangkah lebih lanjut untuk menghitung penampang lintang hamburan elektron-proton, kita tinjau beberapa asumsi yang akan kita gunakan beserta justifikasinya terlebih dahulu.

1. Pertama, kita akan meninjau hamburan elektron-proton elastik dimana spin awal dan akhir kedua partikel tidak diukur.
2. Kedua, kita hanya akan memperhitungkan diagram orde terendah. Walaupun menghitung diagram orde tinggi dapat memberikan kita hasil yang lebih akurat, langkah ini tetap valid untuk kita ambil. Mengapa? Dalam elektrodinamika kuantum, penampang lintang σ dan muatan elementer e yang merupakan *coupling constant* dalam teori ini memenuhi kesebandingan² $\sigma \propto e^{2N}$ dimana N adalah jumlah verteks.

²Ini mudah dilihat dari fakta bahwa setiap suku verteks akan menyumbang satu buah faktor e . Karena $\mathcal{M} \propto e^N$, maka jelas bahwa $\sigma \propto |\mathcal{M}|^2 \propto e^{2N}$.

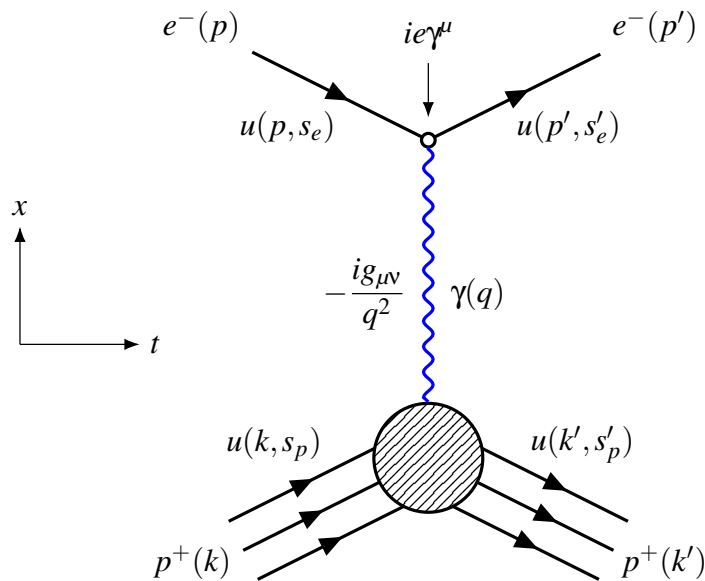
Kita dapat melihat dengan jelas bahwa semakin tinggi orde diagram, semakin kecil juga kontribusinya³ terhadap perhitungan penampang lintang. Artinya, kita bisa mengabaikan diagram dengan orde tinggi.

3. Ketiga, kita tidak perlu memperhitungkan interaksi kuat. Ini karena elektron merupakan lepton yang tidak berinteraksi kuat sementara proton merupakan hadron yang berinteraksi kuat.
4. Keempat, kita akan menerapkan **aproksimasi Born**. Artinya, kita menganggap interaksi elektromagnetik antara elektron-proton cukup lemah sehingga fungsi gelombang akhir dapat tetap dianggap sebagai perkalian antara spinor Dirac $u(p, s)$ dan faktor *plane wave* $e^{-ip \cdot x}$.

2 Arus dan Amplitudo Transisi

2.1 Arus Leptonik dan Hadronik

Tinjau kembali diagram Feynman orde terendah untuk hamburan elektron-proton elastik.



Gambar 3. Diagram Feynman hamburan elektron-proton elastik orde terendah dengan keterangan spinor Dirac, suku verteks, dan suku propagator foton.

Pada hamburan ini, elektron datang dengan momentum-4 $p = (E, \mathbf{p})$ menuju proton yang memiliki momentum-4 $k = (E_p, \mathbf{k})$. Elektron dan proton akan berinteraksi secara elektromagnetik melalui pertukaran foton virtual γ yang memiliki momentum-4 $q = p - p'$.

³Ingat kembali bahwa dalam satuan alami atau Lorentz-Heaviside, muatan elementer e bernilai sekitar 0.303.

Elektron kemudian akan terhambur dengan momentum-4 $p' = (E', \mathbf{p}')$ sementara proton terhambur dengan momentum-4 $k' = (E'_p, \mathbf{k}')$. Misalkan spinor yang merepresentasikan elektron datang, elektron terhambur, proton datang, dan proton terhambur adalah $u(p, s_e)$, $u(p', s'_e)$, $u(k, s_p)$, dan $u(k', s'_p)$ secara berturut-turut.

Sebagaimana pada hamburan elastik, langkah pertama yang akan kita lakukan tentu saja adalah menentukan amplitudo transisi. Berdasarkan [1] dan [2], amplitudo transisi diberikan oleh

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_\mu A^\mu = -i \int d^4x j_\mu \left(-\frac{1}{q^2} \right) J^\mu, \quad (2.1)$$

dimana j_μ adalah **arus transisi elektron** (arus leptonik) dan J^μ adalah **arus transisi proton** (arus hadronik).

Arus leptonik sudah kita ketahui dengan baik. Arus leptonik diberikan oleh

$$j_\mu = -e \mathcal{N}_e \mathcal{N}'_e \bar{u}(p', s'_e) \gamma_\mu u(p, s_e) e^{i(p'-p) \cdot x}, \quad (2.2)$$

dimana \mathcal{N}_e dan \mathcal{N}'_e adalah faktor normalisasi. Untuk arus hadronik, intuisi kita mungkin mengatakan bahwa arus hadronik memiliki bentuk yang serupa dengan arus leptonik, yaitu

$$J^\mu = e \mathcal{N}_p \mathcal{N}'_p \bar{u}(k', s'_p) \gamma^\mu u(k, s_p) e^{i(k'-k) \cdot x}.$$

Jika kita tidak memperhitungkan struktur proton, maka bentuk tersebut dapat digunakan. Namun, jika kita ingin memperhitungkan struktur proton, maka kita harus mencari bentuk arus hadronik lain. Solusi paling mudah adalah dengan mengganti vektor γ^μ menjadi suatu vektor lain Γ^μ sehingga J^μ dapat dituliskan menjadi

$$J^\mu = e \mathcal{N}_p \mathcal{N}'_p \bar{u}(k', s'_p) \Gamma^\mu u(k, s_p) e^{i(k'-k) \cdot x}. \quad (2.3)$$

2.2 Faktor Verteks Proton : Struktur Γ^μ

Bagaimana bentuk Γ^μ ? Dengan mengingat bahwa J^μ adalah vektor, maka jelas Γ^μ juga haruslah berupa vektor. Menurut [5], Γ^μ dapat dikonstruksi dari kombinasi linear momentum-4 awal dan akhir proton serta matriks Dirac γ^μ sehingga dapat dituliskan sebagai

$$\Gamma^\mu \equiv a k + b k' + c \gamma^\mu, \quad (2.4)$$

dimana a , b , dan c adalah fungsi skalar⁴ dari q^2 . Terapkan **identitas Ward** pada arus hadronik (2.3) dimana faktor Γ^μ diberikan oleh persamaan (2.4) sehingga kita peroleh

$$\begin{aligned} q_\mu J^\mu &= 0 \\ q_\mu \bar{u}(k', s'_p) \Gamma^\mu u(k, s_p) &= 0 \\ q_\mu \bar{u}(k', s'_p) (a k + b k' + c \gamma^\mu) u(k, s_p) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

⁴Walaupun k , k' , dan γ^μ sama-sama merupakan vektor-4, komponen γ^μ adalah matriks 4×4 sementara komponen k dan k' adalah skalar. Artinya, a , b , dan c jelas bukanlah konstanta biasa.

$$q_\mu (am + bm) \bar{u}(k', s'_p) u(k, s_p) + c \bar{u}(k', s'_p) q_\mu \gamma^\mu u(k, s_p) = 0. \quad (2.6)$$

Perhatikan persamaan (2.6). Karena proton bersifat *on-shell*, maka $k_\mu k^\mu = k'_\mu k'^\mu = m^2$ dimana m adalah massa proton. Oleh karena itu, persamaan (2.6) bisa ditulis ulang menjadi

$$\underbrace{q_\mu (ak^\mu + bk'^\mu) \bar{u}(k', s'_p) u(k, s_p)}_I + c \underbrace{\bar{u}(k', s'_p) \not{q} u(k, s_p)}_{II} = 0. \quad (2.7)$$

Tinjau suku II terlebih dahulu. Dengan mengingat bahwa $q = k' - k$, kita peroleh

$$\begin{aligned} \bar{u}(k', s'_p) \not{q} u(k, s_p) &= \bar{u}(k', s'_p) (\not{k}' - \not{k}) u(k, s_p) \\ &= \bar{u}(k', s'_p) \not{k}' u(k, s_p) - \bar{u}(k', s'_p) \not{k} u(k, s_p) \\ &= m \bar{u}(k', s'_p) u(k, s_p) - m \bar{u}(k', s'_p) u(k, s_p) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Kita sudah menunjukkan bahwa suku II dari persamaan (2.7) bernilai nol. Artinya, agar persamaan (2.7), kita harus membuat agar $q_\mu (ak^\mu + bk'^\mu) = 0$. Sebagai langkah awal, perhatikan bahwa

$$q_\mu (k' + k)^\mu = (k' - k)_\mu (k' + k)^\mu = k'^2 - k^2 = m^2 - m^2 = 0, \quad (2.9)$$

dimana kita telah menggunakan kondisi *on-shell* $k^2 = k'^2 = m^2$. Secara intuitif, ini membuat kita ingin menyatakan $q_\mu (ak^\mu + bk'^\mu)$ dalam $q_\mu (k' + k)^\mu$. Misalkan kita menyatakan $q_\mu (ak^\mu + bk'^\mu)$ sebagai

$$q_\mu (ak^\mu + bk'^\mu) = a q_\mu (k' + k)^\mu + X,$$

dimana X adalah suku yang belum diketahui untuk membuat persamaan tersebut berlaku. Dengan aljabar linear sederhana, kita dapat dengan mudah menunjukkan bahwa

$$q_\mu (ak^\mu + bk'^\mu) = a q_\mu (k' + k)^\mu + (b - a) q_\mu k'^\mu. \quad (2.10)$$

Dengan demikian, jika kita ingin $q_\mu (ak^\mu + bk'^\mu) = 0$ berlaku, maka **haruslah** $a = b$. Ini membuat bentuk Γ^μ pada persamaan (2.4) menjadi

$$\Gamma^\mu = a(k + k')^\mu + c\gamma^\mu. \quad (2.11)$$

Bentuk $(k + k')^\mu$ mengingatkan kita pada arus transisi untuk partikel Klein-Gordon. Bentuk ini dapat kita manipulasi dengan dekomposisi Gordon (A.3) sehingga kita peroleh transformasi

$$(k + k')^\mu \longrightarrow 2m\gamma^\mu - i\sigma^{\mu\nu} q_\nu. \quad (2.12)$$

Substitusikan (2.12) ke persamaan (2.11) untuk memperoleh

$$\Gamma^\mu = (2ma + c)\gamma^\mu - ia\sigma^{\mu\nu} q_\nu. \quad (2.13)$$

Definisikan⁵ [4]

$$F_1(q^2) \equiv 2ma + c \quad \& \quad F_2(q^2) \equiv -\frac{2m}{\kappa}a. \quad (2.14)$$

Dengan mensubstitusikan definisi (2.14) ke persamaan (2.13), kita peroleh definisi akhir untuk Γ^μ , yaitu

$$\Gamma^\mu = F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{i\kappa}{2m}F_2(q^2)\sigma^{\mu\nu}q_\nu. \quad (2.15)$$

dimana $F_1 \equiv F_1(q^2)$ dan $F_2 \equiv F_2(q^2)$ adalah **faktor bentuk Dirac dan Pauli** yang saling independen, m adalah massa proton, dan $\kappa \approx 1.79$ adalah **momen magnetik anomali** dari proton.

Walaupun bentuk Γ^μ pada persamaan (2.15) sudah valid, bentuk tersebut sulit untuk dimanipulasi karena keberadaan tensor $\sigma^{\mu\nu}$. Oleh karena itu, kita bisa peroleh bentuk alternatif Γ^μ dengan mengubah suku $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$ menggunakan dekomposisi Gordon sekali lagi. Bentuk Γ^μ yang baru diberikan oleh

$$\Gamma^\mu = (F_1 + \kappa F_2)\gamma^\mu - \frac{\kappa}{2m}F_2(k + k')^\mu. \quad (2.16)$$

2.3 Amplitudo Transisi

Substitusikan arus leptonik (2.2), arus hadronik (2.3) dan persamaan (2.16) ke persamaan untuk amplitudo transisi untuk memperoleh⁶ (2.1)

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int d^4x j_\mu \left(-\frac{1}{q^2} \right) J^\mu \\ &= -i \int d^4x \left[-e\mathcal{N}_e\mathcal{N}'_e\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p)e^{i(p'-p)\cdot x} \right] \left(-\frac{1}{q^2} \right) \left[e\mathcal{N}_p\mathcal{N}'_p\bar{u}(k')\Gamma^\mu u(k)e^{i(k'-k)\cdot x} \right] \\ &= -\frac{ie^2}{q^2}\mathcal{N}_e\mathcal{N}'_e\mathcal{N}_p\mathcal{N}'_p \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(k')\Gamma^\mu u(k) \right] \int d^4x e^{i(p'+k'-p-k)\cdot x} \\ &= -\frac{ie^2}{q^2\sqrt{16V^4E_eE'_eE_pE'_p}} \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(k')\Gamma^\mu u(k) \right] \int d^4x e^{-i(p+k-p'-k')\cdot x} \\ &= -\frac{ie^2}{4q^2V^2\sqrt{E_eE'_eE_pE'_p}} \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(k')\Gamma^\mu u(k) \right] \left[(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k') \right] \\ &= -\frac{i(2\pi)^4\delta^{(4)}(p+k-p'-k')}{4V^2\sqrt{E_eE'_eE_pE'_p}} \left\{ \frac{e^2}{q^2} \left[\bar{u}(p')\gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(k')\Gamma^\mu u(k) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

⁵Definisi ini sebenarnya tidak unik. Literatur yang berbeda kemungkinan besar menggunakan definisi yang berbeda juga. Dalam *paper* ini, digunakan konvensi yang ada di referensi [4].

⁶Untuk mempersingkat penulisan, keterangan mengenai spin tidak dituliskan. Artinya,

$$\bar{u}(p') \equiv \bar{u}(p', s'_e) \quad u(p) \equiv u(p, s_e) \quad \bar{u}(k') \equiv \bar{u}(k', s'_p) \quad u(k) \equiv u(k, s_p).$$

Kita identifikasi **amplitudo invarian reaksi** \mathcal{M} sebagai

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(k') \Gamma^\mu u(k) \right]. \quad (2.18)$$

Dengan demikian, amplitudo transisi untuk hamburan elektron-proton elastik diberikan oleh

$$T_{fi} = - \frac{i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k')}{4V^2 \sqrt{E_e E'_e E_p E'_p}} \mathcal{M}, \quad (2.19)$$

dimana \mathcal{M} diberikan pada persamaan (2.18).

3 Amplitudo Invarian Reaksi

Untuk mempermudah perhitungan selanjutnya, kita tinjau dulu kuadrat amplitudo invarian reaksi $|\mathcal{M}|^2$ yang diberikan oleh

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} |\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)|^2 |\bar{u}(k') \Gamma^\mu u(k)|^2.$$

Sesuai asumsi yang kita ambil, spin awal dan akhir dari elektron maupun proton **tidak kita ukur**. Dengan demikian, kita harus **merata-ratakan terhadap keadaan spin awal dan menjumlahkan terhadap keadaan spin akhir hamburan** [1]. Artinya, ekspresi $|\mathcal{M}|^2$ menjadi

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \left(\frac{1}{(2s_e + 1)} \sum_{s_e, s'_e} |\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)|^2 \right) \left(\frac{1}{(2s_p + 1)} \sum_{s_p, s'_p} |\bar{u}(k') \Gamma^\mu u(k)|^2 \right), \quad (3.1)$$

dimana faktor $1/(2s + 1)$ adalah **multiplisitas keadaan awal**. Karena elektron dan proton merupakan fermion, jelas bahwa $s_e = s_p = 1/2$. Untuk mempersingkat penulisan, definisikan **tensor leptonik** $L_{\mu\nu}$ dan **tensor hadronik** $H^{\mu\nu}$ sebagai

$$L_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{s_e, s'_e} |\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)|^2, \quad (3.2)$$

$$H^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{s_p, s'_p} |\bar{u}(k') \Gamma^\mu u(k)|^2. \quad (3.3)$$

Dengan demikian, kuadrat amplitudo invarian reaksi menjadi

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu} H^{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Kita akan menentukan bentuk eksplisit dari $|\mathcal{M}|^2$ dengan **aljabar trace**.

3.1 Aljabar Trace

3.1.1 Tensor Leptonik

Tinjau tensor leptonik $L_{\mu\nu}$. Pertama, kita akan menyatakan tensor leptonik sebagai *trace* sebuah matriks ataupun operasi dari beberapa *trace*.

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s_e, s'_e} |\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s_e, s'_e} \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(p') \gamma_\nu u(p) \right]^\dagger \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s_e, s'_e} \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[u^\dagger(p) \gamma_\nu^\dagger \bar{u}^\dagger(p') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s_e, s'_e} \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[u^\dagger(p) \gamma_0 \gamma_\nu \gamma_0 \bar{u}^\dagger(p') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s_e, s'_e} \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(p) \gamma_\nu \gamma_0 \gamma_0 u(p') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s_e, s'_e} \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right] \left[\bar{u}(p) \gamma_\nu u(p') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s_e, s'_e} \sum_{\alpha\beta\lambda\sigma} \left[\bar{u}_\alpha(p') (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(p) \right] \left[\bar{u}_\lambda(p) (\gamma_\nu)_{\lambda\sigma} u_\sigma(p') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\lambda\sigma} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \left[\sum_{s_e} u_\beta(p) \bar{u}_\lambda(p) \right] (\gamma_\nu)_{\lambda\sigma} \left[\sum_{s'_e} u_\sigma(p') \bar{u}_\alpha(p') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\lambda\sigma} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\not{p} + m_e)_{\beta\lambda} (\gamma_\nu)_{\lambda\sigma} (\not{p}' + m_e)_{\sigma\alpha} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left[\gamma_\mu (\not{p} + m_e) \gamma_\nu (\not{p}' + m_e) \right]_{\alpha\alpha} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{p} + m_e) \gamma_\nu (\not{p}' + m_e) \right]. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita akan menghitung ekspresi eksplisit dari *trace* pada persamaan (3.5) dengan teorema *trace*. Bentuk eksplisit dari $L_{\mu\nu}$ diberikan oleh

$$\begin{aligned}
L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{p} + m_e) \gamma_\nu (\not{p}' + m_e) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\text{Tr} (\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p}') + \text{Tr} (\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu m_e) + \text{Tr} (\gamma_\mu m_e \gamma_\nu \not{p}') + \text{Tr} (\gamma_\mu \gamma_\nu m_e^2) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\text{Tr} (\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \not{p}') + m_e \underbrace{\text{Tr} (\gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu)}_{=0} + m_e \underbrace{\text{Tr} (\gamma_\mu \gamma_\nu \not{p}')}_{=0} + m_e^2 \text{Tr} (\gamma_\mu \gamma_\nu) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[p^\alpha p'^\beta \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta) + m_e^2 \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[4p^\alpha p'^\beta \left\{ g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} \right\} + 4m_e^2 g_{\mu\nu} \right] \\
&= 2 \left[p_\mu p'_\nu - g_{\mu\nu} (p \cdot p') + p_\nu p'_\mu + m_e^2 g_{\mu\nu} \right] \\
&= 2 \left[p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu + g_{\mu\nu} (m_e^2 - p \cdot p') \right], \tag{3.6}
\end{aligned}$$

dimana kita telah menggunakan identitas (B.5), (B.6), (B.7), dan (B.8).

3.1.2 Tensor Hadronik

Tinjau tensor hadronik $H^{\mu\nu}$. Pertama, kita akan menyatakan tensor hadronik sebagai *trace* sebuah matriks ataupun operasi dari beberapa *trace*.

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s_p, s'_p} |\bar{u}(k') \Gamma^\mu u(k)|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s_p, s'_p} \left[\bar{u}(k') \Gamma^\mu u(k) \right] \left[\bar{u}(k') \Gamma^\nu u(k) \right]^\dagger \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s_p, s'_p} \left[\bar{u}(k') \Gamma^\mu u(k) \right] \left[u^\dagger(k) \Gamma^{\nu\dagger} \bar{u}^\dagger(k') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s_p, s'_p} \left[\bar{u}(k') \Gamma^\mu u(k) \right] \left[\bar{u}(k) \gamma^0 \Gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 u(k') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s_p, s'_p} \left[\bar{u}(k') \Gamma^\mu u(k) \right] \left[\bar{u}(k) \Gamma^\nu u(k') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{s_p, s'_p \\ \alpha\beta\lambda\sigma}} \left[\bar{u}_\alpha(k') (\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} u_\beta(k) \right] \left[\bar{u}_\lambda(k) (\Gamma^\nu)_{\lambda\sigma} u_\sigma(k') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\lambda\sigma} (\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} \left[\sum_{s_p} u_\beta(k) \bar{u}_\lambda(k) \right] (\Gamma^\nu)_{\lambda\sigma} \left[\sum_{s'_p} u_\sigma(k') \bar{u}_\alpha(k') \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\lambda\sigma} (\Gamma^\mu)_{\alpha\beta} (\not{k} + m)_{\beta\lambda} (\Gamma^\nu)_{\lambda\sigma} (\not{k}' + m)_{\sigma\alpha} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left[\Gamma^\mu (\not{k} + m) \Gamma^\nu (\not{k}' + m) \right]_{\alpha\alpha} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\Gamma^\mu (\not{k} + m) \Gamma^\nu (\not{k}' + m) \right]. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita akan menghitung ekspresi eksplisit dari *trace* pada persamaan (3.7) dengan teorema *trace*. Bentuk eksplisit dari $H^{\mu\nu}$ diberikan oleh

$$\begin{aligned}
H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\Gamma^\mu (\not{k} + m) \Gamma^\nu (\not{k}' + m) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\text{Tr} (\Gamma^\mu \not{k} \Gamma^\nu \not{k}') + \text{Tr} (\Gamma^\mu \not{k} \Gamma^\nu m) + \text{Tr} (\Gamma^\mu m \Gamma^\nu \not{k}') + \text{Tr} (\Gamma^\mu m \Gamma^\nu m) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\text{Tr} (\Gamma^\mu \not{k} \Gamma^\nu \not{k}')}_{\text{I}} + m \underbrace{\text{Tr} (\Gamma^\mu \not{k} \Gamma^\nu)}_{\text{II}} + m \underbrace{\text{Tr} (\Gamma^\mu \Gamma^\nu \not{k}')}_{\text{III}} + m^2 \underbrace{\text{Tr} (\Gamma^\mu \Gamma^\nu)}_{\text{IV}} \right]. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Karena Γ^μ memiliki bentuk yang tidak *trivial*, kita harus meninjau keempat *trace* pada persamaan (3.8) satu per satu. Tinjau *trace* I. *Trace* I diberikan oleh

$$\begin{aligned}
&\text{Tr} (\Gamma^\mu \not{k} \Gamma^\nu \not{k}') \\
&= \text{Tr} \left[\left\{ (F_1 + \kappa F_2) \gamma^\mu - \frac{\kappa}{2m} F_2 (k + k')^\mu \right\} \not{k} \left\{ (F_1 + \kappa F_2) \gamma^\nu - \frac{\kappa}{2m} F_2 (k + k')^\nu \right\} \not{k}' \right] \\
&= (F_1 + \kappa F_2)^2 \text{Tr} (\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k}') - \frac{\kappa}{2m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \not{k} (k + k')^\nu \not{k}' \right] \\
&\quad - \frac{\kappa}{2m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) \text{Tr} \left[(k + k')^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k}' \right] + \frac{\kappa^2}{4m^2} F_2^2 \text{Tr} \left[(k + k')^\mu \not{k} (k + k')^\nu \not{k}' \right] \\
&= (F_1 + \kappa F_2)^2 k_\alpha k'_\beta \text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta) - \frac{\kappa}{2m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) \left\{ k_\alpha k'_\beta (k + k')^\nu \text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta) \right. \\
&\quad \left. + k_\alpha k'_\beta (k + k')^\mu \text{Tr} (\gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta) \right\} + \frac{\kappa^2}{4m^2} F_2^2 k_\alpha k'_\beta (k + k')^\mu (k + k')^\nu \text{Tr} (\gamma^\alpha \gamma^\beta)
\end{aligned}$$

Gunakan identitas (B.7), (B.9), dan (B.10)

$$\begin{aligned}
&= 4 (F_1 + \kappa F_2)^2 k_\alpha k'_\beta (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu}) - \frac{\kappa}{2m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) k_\alpha k'_\beta \times \\
&\quad \left\{ (k + k')^\nu \underbrace{\text{Tr} (\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta)}_{=0} + (k + k')^\mu \underbrace{\text{Tr} (\gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta)}_{=0} \right\} + \frac{\kappa^2}{4m^2} F_2^2 k_\alpha k'_\beta (k + k')^\mu \times \\
&\quad (k + k')^\nu (4g^{\alpha\beta}) \\
&= 4 (F_1 + \kappa F_2)^2 \left[k^\mu k'^\nu - g^{\mu\nu} (k \cdot k') + k^\nu k'^\mu \right] + \frac{\kappa^2}{m^2} F_2^2 k_\alpha k'_\beta (k + k')^\mu (k + k')^\nu g^{\alpha\beta} \\
&= 4 (F_1 + \kappa F_2)^2 \left[k^\mu k'^\nu - g^{\mu\nu} (k \cdot k') + k^\nu k'^\mu \right] + \frac{\kappa^2}{m^2} F_2^2 (k \cdot k') (k + k')^\mu (k + k')^\nu. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Sekarang, tinjau *trace* II. *Trace* II diberikan oleh

$$\begin{aligned}
&\text{Tr} (\Gamma^\mu \not{k} \Gamma^\nu) \\
&= k_\alpha \text{Tr} \left[\left\{ (F_1 + \kappa F_2) \gamma^\mu - \frac{\kappa}{2m} F_2 (k + k')^\mu \right\} \gamma^\alpha \left\{ (F_1 + \kappa F_2) \gamma^\nu - \frac{\kappa}{2m} F_2 (k + k')^\nu \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k_\alpha (F_1 + \kappa F_2)^2 \underbrace{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu)}_{=0} - \frac{\kappa}{2m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) (k + k')^\nu k_\alpha \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\alpha) \\
&\quad - \frac{\kappa}{2m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) (k + k')^\mu k_\alpha \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\nu) + \frac{\kappa^2}{4m^2} F_2^2 (k + k')^\mu (k + k')^\nu k_\alpha \underbrace{\text{Tr} \gamma^\alpha}_{=0} \\
&= -\frac{2\kappa}{m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) (k + k')^\nu k_\alpha g^{\mu\alpha} - \frac{2\kappa}{m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) (k + k')^\mu k_\alpha g^{\alpha\nu} \\
&= -\frac{2\kappa}{m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) \left[(k + k')^\nu k^\mu + (k + k')^\mu k^\nu \right]. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Kemudian, tinjau *trace* III. Perhatikan bahwa karena *trace* dari perkalian matriks bersifat siklik, maka

$$\text{Tr}(\Gamma^\mu \Gamma^\nu \not{k}') = \text{Tr}(\Gamma^\nu \not{k}' \Gamma^\mu).$$

Artinya, *trace* III dapat diperoleh dengan mudah dari *trace* II dengan melakukan substitusi $\nu \longleftrightarrow \mu$ dan $k \longleftrightarrow k'$. *Trace* III diberikan oleh

$$\text{Tr}(\Gamma^\mu \Gamma^\nu \not{k}') = -\frac{2\kappa}{m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) \left[(k + k')^\mu k'^\nu + (k + k')^\nu k'^\mu \right]. \tag{3.11}$$

Terakhir, tinjau *trace* IV. *Trace* IV diberikan oleh

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}(\Gamma^\mu \Gamma^\nu) \\
&= \text{Tr} \left[\left\{ (F_1 + \kappa F_2) \gamma^\mu - \frac{\kappa}{2m} F_2 (k + k')^\mu \right\} \left\{ (F_1 + \kappa F_2) \gamma^\nu - \frac{\kappa}{2m} F_2 (k + k')^\nu \right\} \right] \\
&= (F_1 + \kappa F_2)^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) - \frac{\kappa}{2m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) (k + k')^\nu \underbrace{\text{Tr} \gamma^\mu}_{=0} \\
&\quad - \frac{\kappa}{2m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) (k + k')^\mu \underbrace{\text{Tr} \gamma^\nu}_{=0} + \frac{\kappa^2}{4m^2} F_2^2 (k + k')^\mu (k + k')^\nu \underbrace{\text{Tr} I}_{=4} \\
&= 4(F_1 + \kappa F_2)^2 g^{\mu\nu} + \frac{\kappa^2}{m^2} F_2^2 (k + k')^\mu (k + k')^\nu. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Kita sudah mendapatkan semua komponen untuk menentukan bentuk eksplisit dari $H^{\mu\nu}$. Substitusikan *trace* (3.9), (3.10), (3.11), dan (3.12) ke persamaan (3.8) untuk memperoleh

$$\begin{aligned}
&H^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2} \left[4(F_1 + \kappa F_2)^2 \left\{ k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu - g^{\mu\nu} (k \cdot k') \right\} + \frac{\kappa^2}{m^2} F_2^2 (k \cdot k') \times \right. \\
&\quad (k + k')^\mu (k + k')^\nu - m \times \frac{2\kappa}{m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) \left\{ (k + k')^\nu k^\mu + (k + k')^\mu k^\nu \right\} - \\
&\quad m \times \frac{2\kappa}{m} F_2 (F_1 + \kappa F_2) \left\{ (k + k')^\mu k'^\nu + (k + k')^\nu k'^\mu \right\} + 4m^2 (F_1 + \kappa F_2)^2 g^{\mu\nu} + \\
&\quad \left. m^2 \times \frac{\kappa^2}{m^2} F_2^2 (k + k')^\mu (k + k')^\nu \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[4 (F_1 + \kappa F_2)^2 \left\{ k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu + g^{\mu\nu} (m^2 - k \cdot k') \right\} + \frac{\kappa^2}{m^2} F_2^2 \times \right. \\
&\quad \left. (k + k')^\mu (k + k')^\nu (k \cdot k' + m^2) - 2\kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \left\{ (k + k')^\nu (k + k')^\mu + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (k + k')^\mu (k + k')^\nu \right\} \right] \\
&= 2 (F_1 + \kappa F_2)^2 \left[k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu + g^{\mu\nu} (m^2 - k \cdot k') \right] + \frac{\kappa^2}{2m^2} F_2^2 (k + k')^\mu \times \\
&\quad (k + k')^\nu (k \cdot k' + m^2) - 2\kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) (k + k')^\mu (k + k')^\nu \\
&= 2 (F_1 + \kappa F_2)^2 \left[k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu + g^{\mu\nu} (m^2 - k \cdot k') \right] + \left[\frac{\kappa^2}{2m^2} F_2^2 (k \cdot k' + m^2) - \right. \\
&\quad \left. 2\kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \right] (k + k')^\mu (k + k')^\nu \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Untuk mempersingkat penulisan, definisikan

$$X \equiv 2 (F_1 + \kappa F_2)^2 \quad \& \quad Y \equiv \frac{\kappa^2}{2m^2} F_2^2 (k \cdot k' + m^2) - 2\kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2). \tag{3.14}$$

Dengan demikian, kita bisa menulis $H^{\mu\nu}$ dalam bentuk yang lebih singkat, yaitu

$$H^{\mu\nu} = X \left[k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu + g^{\mu\nu} (m^2 - k \cdot k') \right] + Y (k + k')^\mu (k + k')^\nu. \tag{3.15}$$

3.2 Bentuk $|\mathcal{M}|^2$

Karena kita sudah memiliki bentuk eksplisit $L_{\mu\nu}$ dan $H^{\mu\nu}$, kita sudah bisa menentukan bentuk dari $|\mathcal{M}|^2$. $|\mathcal{M}|^2$ diberikan oleh

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{e^4}{q^4} \times 2 \left[p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu + g_{\mu\nu} (m_e^2 - p \cdot p') \right] \left[X \left\{ k^\mu k'^\nu + k^\nu k'^\mu + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. g^{\mu\nu} (m^2 - k \cdot k') \right\} + Y (k + k')^\mu (k + k')^\nu \right] \\
&= \frac{2e^4}{q^4} \left[X \left\{ (p \cdot k) (p' \cdot k') + (p \cdot k') (p' \cdot k) + (p \cdot p') (m^2 - k \cdot k') + \right. \right. \\
&\quad (p \cdot k') (p' \cdot k) + (p \cdot k) (p' \cdot k') + (p \cdot p') (m^2 - k \cdot k') + (k \cdot k') \times \\
&\quad \left. \left. (m_e^2 - p \cdot p') + (k \cdot k') (m_e^2 - p \cdot p') + 4 (m_e^2 - p \cdot p') (m^2 - k \cdot k') \right\} + \right. \\
&\quad \left. Y \left\{ \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] + \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (k + k')^2 (m_e^2 - p \cdot p') \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2e^4}{q^4} \left[X \left\{ 2(p \cdot k)(p' \cdot k') + 2(p \cdot k')(p' \cdot k) + 2(p \cdot p')(m^2 - k \cdot k') + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2(k \cdot k')(m_e^2 - p \cdot p') + 4(m_e^2 - p \cdot p')(m^2 - k \cdot k') \right\} + \right. \\
&\quad \left. Y \left\{ 2 \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] + (k + k')^2 (m_e^2 - p \cdot p') \right\} \right]
\end{aligned}$$

Faktorkan dua keluar dari suku pertama

$$\begin{aligned}
&= \frac{2e^4}{q^4} \left[2X \left\{ (p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + (p \cdot p')(m^2 - k \cdot k') + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (k \cdot k')(m_e^2 - p \cdot p') + 2(m_e^2 - p \cdot p')(m^2 - k \cdot k') \right\} + \right. \\
&\quad \left. Y \left\{ 2 \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] + (k + k')^2 (m_e^2 - p \cdot p') \right\} \right]
\end{aligned}$$

Faktorkan suku yang berwarna biru sehingga diperoleh $2(m_e^2 - p \cdot p') + p \cdot p'$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2e^4}{q^4} \left[2X \left\{ (p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + (2m_e^2 - p \cdot p') \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (m^2 - k \cdot k') + (k \cdot k')(m_e^2 - p \cdot p') \right\} + Y \left\{ 2 \left[p \cdot (k + k') \right] \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left[p' \cdot (k + k') \right] + (k + k')^2 (m_e^2 - p \cdot p') \right\} \right]
\end{aligned}$$

Jabarkan suku yang berwarna biru

$$\begin{aligned}
&= \frac{2e^4}{q^4} \left[2X \left\{ (p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + 2m_e^2 m^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2m_e^2 (k \cdot k') - m^2 (p \cdot p') + \cancel{(p \cdot p')(k \cdot k')} + m_e^2 (k \cdot k') - \cancel{(k \cdot k')(p \cdot p')} \right\} + \right. \\
&\quad \left. Y \left\{ 2 \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] + (k + k')^2 (m_e^2 - p \cdot p') \right\} \right] \\
&= \frac{2e^4}{q^4} \left[2X \left\{ (p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + 2m_e^2 m^2 - m_e^2 (k \cdot k') - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. m^2 (p \cdot p') \right\} + Y \left\{ 2 \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] + (k + k')^2 (m_e^2 - p \cdot p') \right\} \right] \\
&= \frac{2e^4}{q^4} \left[2X \left\{ (p \cdot k)(p' \cdot k') + (p \cdot k')(p' \cdot k) + 2m_e^2 m^2 - m_e^2 (k \cdot k') - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. m^2 (p \cdot p') \right\} + Y \left\{ 2 \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] + \left[k^2 + k'^2 + 2(k \cdot k') \right] \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. (m_e^2 - p \cdot p') \right\} \right]
\end{aligned}$$

Gunakan keadaan *on-shell* $k^2 = k'^2 = m^2$

$$= \frac{2e^4}{q^4} \left[2X \left\{ (p \cdot k) (p' \cdot k') + (p \cdot k') (p' \cdot k) + 2m_e^2 m^2 - m_e^2 (k \cdot k') - m^2 (p \cdot p') \right\} + Y \left\{ 2 \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] + \left[2m^2 + 2 (k \cdot k') \right] \times (m_e^2 - p \cdot p') \right\} \right]$$

Faktorkan dua keluar dari kedua suku

$$= \frac{4e^4}{q^4} \left[X \left\{ (p \cdot k) (p' \cdot k') + (p \cdot k') (p' \cdot k) + 2m_e^2 m^2 - m_e^2 (k \cdot k') - m^2 (p \cdot p') \right\} + Y \left\{ \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] + (m^2 + k \cdot k') (m_e^2 - p \cdot p') \right\} \right]. \quad (3.16)$$

Karena struktur proton baru bisa teramati pada energi tinggi, kita akan meninjau hamburan elektron-proton pada energi tinggi. Pada energi tinggi, kita dapat mengasumsikan⁷ bahwa $m_e \approx 0$. Untuk mendapatkan ekspresi $|\mathcal{M}|^2$ yang eksplisit, kita substitusikan kembali X dan Y dari definisi (3.14) ke persamaan (3.16) untuk memperoleh

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{4e^4}{q^4} \left[2 (F_1 + \kappa F_2)^2 \left\{ (p \cdot k) (p' \cdot k') + (p \cdot k') (p' \cdot k) - m^2 (p \cdot p') \right\} + \left\{ \frac{\kappa^2}{2m^2} F_2^2 (k \cdot k' + m^2) - 2\kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \right\} \left\{ \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] - (p \cdot p') (m^2 + k \cdot k') \right\} \right]. \quad (3.17)$$

Dengan demikian, kita peroleh bentuk eksplisit $|\mathcal{M}|^2$ dalam kerangka umum yang diberikan oleh

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[(F_1 + \kappa F_2)^2 \left\{ (p \cdot k) (p' \cdot k') + (p \cdot k') (p' \cdot k) - m^2 (p \cdot p') \right\} + \left\{ \frac{\kappa^2}{4m^2} F_2^2 (k \cdot k' + m^2) - \kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \right\} \times \left\{ \left[p \cdot (k + k') \right] \left[p' \cdot (k + k') \right] - (p \cdot p') (m^2 + k \cdot k') \right\} \right]. \quad (3.18)$$

⁷Ada dua alasan untuk hal ini, yaitu :

- Energi dan momentum elektron jauh lebih besar daripada massanya. Dengan demikian, berdasarkan rumus $E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m_e^2$, massa elektron dapat dikatakan mendekati nol ($m_e \approx 0$).
- Dibandingkan dengan proton, massa elektron jauh lebih kecil ($m_p \approx 1836 m_e$). Artinya, suku-suku yang mengandung massa elektron jadi tidak terlalu berarti dibandingkan yang mengandung massa proton. Dengan kata lain, massa elektron dapat diambil mendekati nol.

Dalam eksperimen yang dilakukan di fasilitas riset seperti CERN ataupun *Jefferson Lab*, tentu saja penampang lintang diukur dalam kerangka laboratorium. Oleh karena itu, jelas bahwa kita akan membutuhkan $|\mathcal{M}|^2$ dalam kerangka laboratorium, bukan kerangka pusat momentum ataupun kerangka lainnya. Untuk mempermudah perhitungan, kita akan meninjau *fixed-target scattering*.

Misalkan momentum-4 awal dan akhir kedua partikel diberikan oleh

$$\begin{cases} p = (E, \mathbf{p}) & , & p' = (E', \mathbf{p}') \\ k = (m, 0) & , & k' = (E'_p, \mathbf{k}') \end{cases} \quad (3.19)$$

Dengan momentum-4 yang sudah dispesifikasi di (3.19), kita tinjau setiap kontraksi antar momentum-4 yang muncul di ekspresi $|\mathcal{M}|^2$ di persamaan (3.18). Setiap kontraksi tersebut diberikan oleh

$$\begin{aligned} p \cdot k &= Em \\ p' \cdot k' &= E'E'_p - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{k}' \\ &= E' \underbrace{(E + m - E')}_{\approx m} - \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ &= E'm - |\mathbf{p}'||\mathbf{p}| \cos \theta + |\mathbf{p}'|^2 \\ &= E'm + |\mathbf{p}|^2 (1 - \cos \theta) \\ &= E'm + 2EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ p \cdot k' &= EE'_p - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}' \\ &= E \underbrace{(E + m - E')}_{\approx m} - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ &= Em - |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos \theta \\ &= Em - |\mathbf{p}|^2 (1 - \cos \theta) \\ &= Em - 2EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ p' \cdot k &= E'm \\ p \cdot p' &= EE' - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \\ &= EE' - |\mathbf{p}||\mathbf{p}'| \cos \theta \\ &= EE' (1 - \cos \theta) \\ &= 2EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ k \cdot k' &= E'_p m = (E + m - E') m \\ p \cdot (k + k') &= p \cdot k + p \cdot k' = (E + E') m - 2EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 2E'm - 2EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ p' \cdot (k + k') &= p' \cdot k + p' \cdot k' = 2E'm + 2EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right), \end{aligned}$$

dimana kita telah memanfaatkan hukum kekekalan momentum-3 dan energi

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k}' \quad \& \quad E + m = E' + E'_p. \quad (3.20)$$

Kita juga telah menggunakan asumsi bahwa hamburan yang terjadi elastik sehingga $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$. Selain itu, karena kita telah mengasumsikan $m_e \approx 0$, kita juga dapat mengatakan bahwa $|\mathbf{p}| \approx E$ dan $|\mathbf{p}'| \approx E'$. Substitusikan kembali semua kontraksi tersebut ke persamaan (3.18) untuk memperoleh

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4} \left[(F_1 + \kappa F_2)^2 \left\{ Em \left[E'm + 2EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] + \left[Em - 2EE' \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \times E'm - m^2 \left[2EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} + \left\{ \frac{\kappa^2}{4m^2} F_2^2 (Em + m^2 - \right. \\ &\quad \left. E'm + m^2) - \kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \right\} \left\{ 4E'^2 m^2 - 4E^2 E'^2 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. 2EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) (m^2 + Em + m^2 - E'm) \right\} \right] \\ &= \frac{8e^4}{q^4} \left[(F_1 + \kappa F_2)^2 \left\{ \textcolor{blue}{EE'm^2} + 2E^2 E'm \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \textcolor{blue}{EE'm^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. 2EE'^2 m \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \textcolor{blue}{2EE'm^2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\} + \left\{ \frac{\kappa^2}{4m} F_2^2 (2m + E - E') - \right. \\ &\quad \left. \kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \right\} \left\{ \textcolor{red}{4E'^2 m^2} - 4E^2 E'^2 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \textcolor{red}{4EE'm^2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. 2E^2 E'm \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 2EE'^2 m \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

Jumlahkan suku yang berwarna biru dengan yang berwarna biru dan suku yang berwarna merah dengan yang berwarna merah. Faktorkan dua keluar dari kedua suku

$$\begin{aligned} &= \frac{16e^4}{q^4} \left[(F_1 + \kappa F_2)^2 \left\{ \textcolor{blue}{EE'm^2} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + EE'm \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. (E - E') \right\} + \left\{ \frac{\kappa^2 F_2^2}{2} + \frac{\kappa^2 F_2^2}{4m} (E - E') - \kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \right\} \times \\ &\quad \left\{ \textcolor{red}{2EE'm^2} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 2E^2 E'^2 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) + EE'm \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. (E - E') \right\} \right] \end{aligned}$$

Faktorkan $EE'm^2$ keluar dari kedua suku

$$= \frac{16e^4 EE'm^2}{q^4} \left[(F_1 + \kappa F_2)^2 \left\{ \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{(E - E')}{m} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\} + \right.$$

$$\left\{ \frac{\kappa^2 F_2^2}{2} + \frac{\kappa^2 F_2^2}{4m} (E - E') - \kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \right\} \times \left\{ 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - \frac{2EE'}{m^2} \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{(E - E')}{m} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\}. \quad (3.21)$$

Kita lihat bahwa muncul fungsi $\sin^4(\theta/2)$ yang membuat perhitungan menjadi lebih sulit. Untuk menyederhanakan ekspresi $|\mathcal{M}|^2$ lebih lanjut, tinjau kembali hukum kekekalan momentum-4

$$p + k = p' + k',$$

dimana momentum-4 awal dan akhir kedua partikel diberikan di (3.19). Tinjau bentuk kuadrat dari hukum kekekalan momentum-4 untuk memperoleh

$$\begin{aligned} (p + k)^2 &= (p' + k')^2 \\ p^2 + k^2 + 2(p \cdot k) &= p'^2 + k'^2 + 2(p' \cdot k') \\ 0 + m^2 + 2Em &= 0 + m^2 + 2E'm + 4EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ Em &= E' \left\{ m + 2E \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dengan demikian, kita memperoleh hubungan antara energi awal dan akhir elektron sebagai

$$E' = \frac{mE}{m + 2E \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)}. \quad (3.23)$$

Sekarang, tinjau suku $-\frac{2EE'}{m^2} \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{(E - E')}{m} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$ yang muncul di persamaan (3.21). Suku ini dapat ditulis ulang menjadi

$$\begin{aligned} & -\frac{2EE'}{m^2} \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{(E - E')}{m} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{m^2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left\{ 2EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - m(E - E') \right\} \\ &= -\frac{1}{m^2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[E' \left\{ 2E \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + m \right\} - mE \right] \\ &= -\frac{1}{m^2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \left[E' \times \frac{mE}{E'} - mE \right] \\ &= -\frac{1}{m^2} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) (mE - mE) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substitusikan kembali hasil (3.24) ke persamaan (3.21) untuk memperoleh

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{16e^4 EE' m^2}{q^4} \left[(F_1 + \kappa F_2)^2 \left\{ \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{(E - E')}{m} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{\kappa^2 F_2^2}{2} + \frac{\kappa^2 F_2^2}{4m} (E - E') - \kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \right\} \times \left\{ 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2EE'}{m^2} \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{(E - E')}{m} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\} \\
& = \frac{16e^4 EE' m^2}{q^4} \left[(F_1 + \kappa F_2)^2 \left\{ \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \frac{(E - E')}{m} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\} + \right. \\
& \left. \left\{ \frac{\kappa^2 F_2^2}{2} + \frac{\kappa^2 F_2^2}{4m} (E - E') - \kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \right\} \times \left\{ 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

Faktorkan $\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$

$$\begin{aligned}
& = \frac{16e^4 EE' m^2}{q^4} \left[(F_1 + \kappa F_2)^2 \frac{(E - E')}{m} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \right. \\
& \left. \left\{ (F_1 + \kappa F_2)^2 + \kappa^2 F_2^2 + \frac{\kappa^2 F_2^2}{2m} (E - E') - 2\kappa F_2 (F_1 + \kappa F_2) \right\} \right] \\
& = \frac{16e^4 EE' m^2}{q^4} \left[(F_1 + \kappa F_2)^2 \frac{(E - E')}{m} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \right. \\
& \left. \left\{ F_1^2 + \cancel{\kappa^2 F_2^2} + \cancel{2\kappa F_1 F_2} + \cancel{\kappa^2 F_2^2} - \cancel{2\kappa F_1 F_2} - \cancel{2\kappa^2 F_2^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\kappa^2 F_2^2}{2m} (E - E') \right\} \right] \\
& = \frac{16e^4 EE' m^2}{q^4} \left[(F_1 + \kappa F_2)^2 \frac{(E - E')}{m} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \times \right. \\
& \left. \left\{ F_1^2 + \frac{\kappa^2 (E - E')}{2m} F_2^2 \right\} \right]. \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Tinjau *momentum transfer* q . Kita dapat melihat dengan mudah bahwa q^2 diberikan oleh

$$q^2 = (p - p')^2 = p^2 + p'^2 - 2(p \cdot p') \approx -2(p \cdot p') = -4EE' \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \tag{3.26}$$

Selain itu, kita juga dapat memperoleh ekspresi lain untuk q^2 . Kita tahu bahwa

$$q^2 = (k' - k)^2 = k'^2 + k^2 - 2(k \cdot k').$$

Namun, kita juga tahu bahwa $k^2 = k'^2 = m^2$. Dengan demikian, kita bisa juga menuliskan

$$k^2 + k'^2 = q^2 + 2(k \cdot k') = q^2 + 2 \left[m^2 + (E - E') m \right] = 2m^2.$$

Agar persamaan tersebut berlaku, mudah dilihat bahwa haruslah

$$q^2 = 2m(E' - E). \tag{3.27}$$

Definisikan parameter τ sebagai

$$\tau \equiv -\frac{q^2}{4m^2} = \frac{(E - E')}{2m}. \quad (3.28)$$

Dengan mensubstitusikan (3.26) dan (3.28) ke persamaan (3.25), kita peroleh bentuk akhir $|\mathcal{M}|^2$ yang dievaluasi di kerangka laboratorium sebagai

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4 m^2}{EE' \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \left[\left\{ F_1^2 + \tau \kappa^2 F_2^2 \right\} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2\tau (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]. \quad (3.29)$$

4 Penampang Lintang Diferensial

4.1 Laju Transisi

Sebelum menghitung penampang lintang diferensial, tentu saja kita harus menentukan dulu ekspresi dari laju transisi R_{fi} karena akan dibutuhkan dalam perhitungan penampang lintang diferensial. Dalam kasus ini, laju transisi diberikan oleh

$$R_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{tV}, \quad (4.1)$$

dimana t adalah selang waktu interaksi elektron dan proton. Substitusikan amplitudo transisi T_{fi} dari persamaan (2.19) ke persamaan (4.1) untuk memperoleh

$$R_{fi} = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k') (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k')}{16V^4 EE' E_p E'_p tV} |\mathcal{M}|^2. \quad (4.2)$$

Kita lihat bahwa R_{fi} mengandung dua buah fungsi delta Dirac. Tinjau salah satunya. Dengan memanfaatkan persamaan (C.1), kita bisa menulis ulang fungsi delta Dirac tersebut sebagai

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k') &= \int d^4x e^{i(p+k-p'-k') \cdot x} \\ &= \int_{-t/2}^{t/2} dt' e^{i(E+m-E'-E'_p)t'} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{k}-\mathbf{p}'-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Berdasarkan fungsi delta Dirac yang muncul pada ekspresi T_{fi} , jelas bahwa hamburan yang berlangsung mensyaratkan bahwa momentum-4 harus kekal. Dengan kata lain, energi dan momentum-3 harus kekal. Terapkan limit kekekalan energi dan momentum-3 pada persamaan (4.3) untuk memperoleh

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + k - p' - k')$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t/2}^{t/2} \lim_{E+m \rightarrow E'+E'_p} e^{i(E+m-E'-E'_p)t} \int d^3x \lim_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'+\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t/2}^{t/2} dt \int d^3x \\
&= tV.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Dengan mensubstitusikan hasil ini ke persamaan (4.2), kita langsung peroleh bahwa laju transisi diberikan oleh

$$R_{fi} = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k')}{16V^4 E E' E_p E'_p} |\mathcal{M}|^2. \tag{4.5}$$

4.2 Perhitungan Penampang Lintang Diferensial : Formula Rosenbluth

Kita tahu bahwa **elemen penampang lintang** $d\sigma$ secara umum diberikan oleh

$$d\sigma = \frac{R_{fi}}{\Phi} d\rho. \tag{4.6}$$

dimana R_{fi} adalah laju transisi, Φ adalah fluks partikel datang, dan $\rho(E_f)$ adalah rapat keadaan akhir. Karena kita sudah memiliki ekspresi R_{fi} , kita tinggal mencari Φ dan $d\rho$ sebelum kita bisa mulai mencari bentuk dari penampang lintang diferensial untuk hamburan elektron-proton elastik.

Kita mulai dengan meninjau fluks partikel datang Φ . Untuk hamburan yang kolinear, Φ diberikan oleh [1]

$$\Phi = \frac{|\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_p|}{V^2}, \tag{4.7}$$

dimana \mathbf{v}_e adalah kecepatan elektron, \mathbf{v}_p adalah kecepatan proton, dan V adalah volume. Dalam referensi [1], telah ditunjukkan bahwa kita bisa menuliskan

$$|\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_p| = \frac{[(p \cdot k)^2 - m_e^2 m^2]^{1/2}}{E E_p} = \frac{(E^2 m^2 - m_e^2 m^2)^{1/2}}{E E_p} = \frac{m(E^2 - m_e^2)^{1/2}}{E E_p}. \tag{4.8}$$

Dengan demikian, fluks partikel datang diberikan oleh

$$\Phi = \frac{m(E^2 - m_e^2)^{1/2}}{E E_p V^2} \approx \frac{mE}{E E_p V^2} = \frac{m}{E_p V^2}. \tag{4.9}$$

Sekarang, kita tinjau $d\rho$. Karena keadaan akhir hamburan berupa elektron dengan energi E' dan proton dengan energi E'_p , jelas bahwa $d\rho$ diberikan oleh

$$d\rho = \frac{V d^3|\mathbf{p}'|}{(2\pi)^3} \frac{V d^3|\mathbf{k}'|}{(2\pi)^3}. \tag{4.10}$$

Kita sudah memiliki semua komponen yang dibutuhkan untuk menghitung penampang lintang diferensial. Substitusikan persamaan (4.5), (4.9), dan (4.10) ke persamaan (4.6) untuk memperoleh

$$\begin{aligned}
d\sigma &= R_{fi} \times \frac{1}{\Phi} \times d\rho \\
&= \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') |\mathcal{M}|^2}{16V^4 E E' \cancel{E_p} E'_p} \times \frac{\cancel{E_p} V^2}{m} \times \frac{V d^3|\mathbf{p}'|}{(2\pi)^3} \frac{V d^3|\mathbf{k}'|}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') |\mathcal{M}|^2 \cancel{V^2} d^3|\mathbf{p}'| d^3|\mathbf{k}'|}{16m \cancel{V^4} E E' E'_p} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{|\mathcal{M}|^2}{4mE} \left\{ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \frac{d^3|\mathbf{p}'|}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3|\mathbf{k}'|}{(2\pi)^3 2E'_p} \right\} \\
&= \frac{|\mathcal{M}|^2}{4mE} d\text{Lips},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

dimana $d\text{Lips}$ adalah elemen dari *Lorentz invariant phase space* [4]. Pekerjaan kita sekarang tereduksi menjadi mengintegrasikan $d\text{Lips}$ yang diberikan oleh

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \frac{d^3|\mathbf{p}'|}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3|\mathbf{k}'|}{(2\pi)^3 2E'_p}.$$

Integral $d\text{Lips}$ diberikan oleh

$$\begin{aligned}
\int d\text{Lips} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int \delta^{(4)}(p+k-p'-k') \frac{d^3|\mathbf{p}'| d^3|\mathbf{k}'|}{E' E'_p} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int \delta(E+m-E'-E'_p) \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{k}') \frac{d^3|\mathbf{p}'| d^3|\mathbf{k}'|}{E' E'_p} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int \delta(E+m-E'-E'_p) \frac{d^3|\mathbf{p}'|}{E' E'_p} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int \delta(E+m-E'-E'_p) \frac{|\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega}{E' E'_p} \\
&\approx \frac{1}{(4\pi)^2} \int \delta(E+m-E'-E'_p) \frac{E'^2 dE' d\Omega}{E' E'_p} \\
&\approx \frac{1}{(4\pi)^2 m} \int E' \delta(E+m-E'-E'_p) dE' d\Omega.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Dengan menggunakan persamaan (C.2) dan (C.3), kita bisa menulis ulang fungsi delta Dirac yang ada di persamaan (4.12) menjadi

$$\begin{aligned}
\delta(E+m-E'-E'_p) &= \delta(E'-E-m+E'_p) = \delta[E' - (E+m-E'_p)] \\
&\equiv \delta[f(E')]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\delta [E' - (E + m - E'_p)]}{\left| \frac{\partial f}{\partial E'} \right|_{E=E_0}}, \quad (4.13)$$

dimana

$$\begin{aligned} f(E') &= E' + E'_p - E - m \\ &= \sqrt{|\mathbf{k}'|^2 + m^2} + E' - E - m \\ &= \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 + m^2} + E' - E - m \\ &= \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{p}'|^2 - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') + m^2} + E' - E - m \\ &\approx \sqrt{E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta + m^2} + E' - E - m. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Jelas terlihat bahwa turunan parsial dari $f(E')$ terhadap E' diberikan oleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial E'} &= \frac{2E' - 2E \cos \theta}{2\sqrt{E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta + m^2}} + 1 \\ &\approx \frac{E(1 - \cos \theta)}{E'_p} + 1 \\ &\approx \frac{2E \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + m}{m} \\ &= \frac{E}{E'}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Substitusikan persamaan (4.13) dan (4.15) ke persamaan (4.12) untuk memperoleh

$$\begin{aligned} \int d\text{Lips} &= \frac{1}{(4\pi)^2 m} \int E' \delta(E + m - E' - E'_p) dE' d\Omega \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2 m} \int \frac{E' \delta [E' - (E + m - E'_p)]}{\frac{E}{E'}} dE' d\Omega \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2 m} \int \frac{E'^2}{E} \delta[E' - (E + m - E'_p)] dE' d\Omega \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2 m} \frac{E'^2}{E} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Kita sudah memperoleh semua komponen yang diperlukan untuk menentukan penampang lintang diferensial dari hamburan elektron-proton elastik. Substitusikan persamaan (3.29) dan (4.16) ke persamaan (4.11) untuk memperoleh

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{4mE} d\text{Lips} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi E} \times \frac{1}{(4\pi)^2 \hbar} \frac{E'^2}{E} d\Omega \times \frac{e^4 \hbar^2}{E E' \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \left[\left\{ F_1^2 + \tau \kappa^2 F_2^2 \right\} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. 2\tau (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \\
&= \frac{\left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^2}{4E^2 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \frac{E'}{E} \left[\left\{ F_1^2 + \tau \kappa^2 F_2^2 \right\} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2\tau (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] d\Omega \\
&= \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \frac{E'}{E} \left[\left\{ F_1^2 + \tau \kappa^2 F_2^2 \right\} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2\tau (F_1 + \kappa F_2)^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

dimana kita telah menggunakan definisi konstanta struktur halus (*fine-structure constant*) $\alpha = e^2/4\pi$ dalam rumus $d\sigma$ tersebut. Kita lihat bahwa ada ekspresi $(F_1 + \kappa F_2)^2$ di persamaan (4.17). Ini akan mengakibatkan munculnya suku silang $F_1 F_2$ dalam ekspresi penampang lintang diferensial. Untuk mengatasi hal ini, definisikan **faktor bentuk elektromagnetik Sachs** G_E dan G_M sebagai

$$\boxed{G_E \equiv F_1 - \tau \kappa F_2 \quad \& \quad G_M \equiv F_1 + \kappa F_2} \tag{4.18}$$

Dengan aljabar sederhana, kita dapat menyatakan F_1 dan F_2 dalam G_E dan G_M sebagai

$$F_1 = \frac{G_E + \tau G_M}{1 + \tau} \quad \& \quad F_2 = \frac{G_M - G_E}{\kappa (1 + \tau)}. \tag{4.19}$$

Dengan menggunakan G_E dan G_M , kita tulis ulang suku $F_1^2 + \tau \kappa^2 F_2^2$ yang muncul di persamaan (4.17) menjadi

$$\begin{aligned}
F_1^2 + \tau \kappa^2 F_2^2 &= \frac{(G_E + \tau G_M)^2}{(1 + \tau)^2} + \tau \frac{(G_M - G_E)^2}{(1 + \tau)^2} \\
&= \frac{G_E^2 + 2\tau G_E G_M + \tau^2 G_M^2 + \tau (G_M^2 - 2G_M G_E + G_E^2)}{(1 + \tau)^2} \\
&= \frac{(1 + \tau) G_E^2 + (1 + \tau) \tau G_M^2}{(1 + \tau)^2} \\
&= \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Dengan demikian, kita peroleh penampang lintang diferensial untuk hamburan elektron-proton elastik sebagai

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 (\theta/2)} \frac{E'}{E} \left[\left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \right) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + 2\tau G_M^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]} \tag{4.21}$$

Penampang lintang diferensial (4.21) disebut sebagai **formula Rosenbluth**.

5 Kasus Khusus

Bagaimana kita bisa yakin dengan persamaan penampang lintang diferensial yang kita peroleh? Salah satu caranya tentu saja adalah dengan meninjau berbagai kasus khusus yang mungkin dan melihat apakah penampang lintang diferensial tersebut akan tereduksi menjadi persamaan yang benar.

5.1 Limit Proton Titik : Hamburan Elektron-Muon

Misalkan kita mengambil $G_E(q^2) = 1$ dan $G_M(q^2) = 1$. Kita lihat bahwa formula Rosenbluth akan tereduksi menjadi

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E'}{E} \left[\left(\frac{1+\tau}{1+\tau} \right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\tau \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E'}{E} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\tau \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ &= \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E'}{E} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2m^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].\end{aligned}\quad (5.1)$$

Penampang lintang diferensial (5.1) tidak lain merupakan **penampang lintang diferensial untuk hamburan elektron-muon**. Hasil ini sesuai dengan penampang lintang diferensial yang diberikan di referensi [2].

Apa sebenarnya yang terjadi ketika kita mengambil $G_E = 1$ dan $G_M = 1$? Dengan mengambil nilai tersebut, kita telah **membuat proton menjadi sebuah partikel titik**. Artinya, penampang lintang diferensial (5.1) adalah penampang lintang diferensial untuk **hamburan dua partikel fundamental dengan spin 1/2**, misalnya elektron dan muon.

5.2 Limit Hamburan Non-Relativistik Tanpa Spin : Hamburan Rutherford

Jika energi berkas elektron yang digunakan sangat rendah, maka hamburan yang terjadi bersifat non-relativistik. Artinya, $E'/E \approx 1$ sehingga persamaan (5.1) menjadi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2m^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right].$$

Lebih lanjut lagi, jika kita tidak memperhitungkan spin dalam proses hamburan, maka kita peroleh

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\quad (5.2)$$

Penampang lintang diferensial (5.2) tidak lain merupakan **penampang lintang diferensial Rutherford**.

6 Struktur Elektromagnetik Proton : G_E dan G_M

Dalam proses menurunkan formula Rosenbluth, kita sudah mendefinisikan faktor bentuk elektromagnetik Sachs G_E dan G_M . Kedua faktor bentuk ini menggambarkan struktur elektromagnetik proton dan dapat diukur dalam eksperimen. Kita akan memperoleh **kecocokan yang sangat baik** apabila kita melakukan *fitting* data G_E dan G_M yang diperoleh dari eksperimen dengan fungsi

$$G_E(q^2) = \frac{G_M(q^2)}{\mu} = \left(1 - \frac{q^2}{0.71 \text{ GeV}^2}\right)^{-2}, \quad (6.1)$$

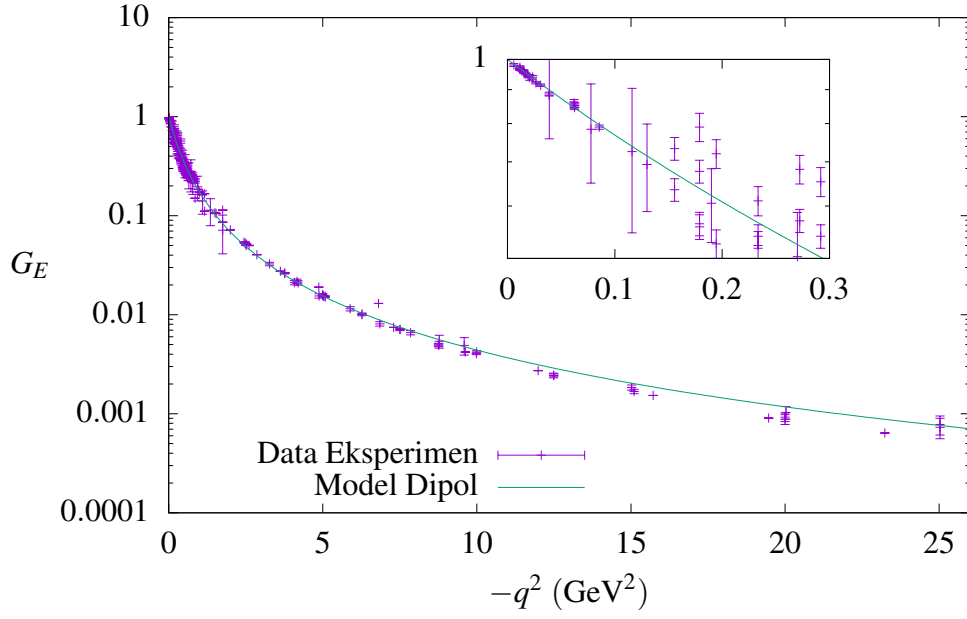
dimana $\mu = (1 + \kappa) \mu_B$ adalah **momen magnet proton**. Model (6.1) disebut **faktor bentuk dipol**. Dalam limit non-relativistik, faktor bentuk elektromagnetik dapat dipandang sebagai *fourier transform* dari **kerapatan muatan ataupun momen magnet** proton. Dalam limit relativistik, kita sebenarnya juga dapat menginterpretasikan G_E dan G_M sebagai kerapatan muatan dan momen magnet proton. Hanya saja, **ini hanya dapat kita lakukan di dalam kerangka Breit**. Apabila kita menerapkan *fourier transform* pada faktor bentuk dipol (6.1), kita akan memperoleh bahwa **proton memiliki distribusi muatan yang meluruh secara eksponensial**.

Untuk melihat kecocokan model faktor bentuk dipol (6.1) dengan data eksperimen, kita tinjau data eksperimen yang diberikan di tabel 1.

Tabel 1. Data G_E berbagai eksperimen hamburan elektron-proton elastik beserta rentang Q^2 dan referensi yang bersesuaian.

Rentang $Q^2 = -q^2$ (GeV ²)	Sumber
0.69 – 25.03	D. H. Coward, <i>et al.</i> , ref. [6]
0.389 – 3.89	K. W. Chen, <i>et al.</i> , ref. [7]
0.999 – 25.03	P. N. Kirk, <i>et al.</i> , ref. [8]
0.011 – 0.085	D. J. Drickey & L. N. Hand, ref. [9]
2.862 – 31.2	A. F. Sill, <i>et al.</i> , ref. [10]
0.0389 – 1.75	L. E. Price, <i>et al.</i> , ref. [11]
4.08 – 9.59	W. Albrecht, <i>et al.</i> , ref. [12]
0.005 – 0.03	J. J. Murphy, <i>et al.</i> , ref. [13]
0.155 – 1.167	T. Janssens, <i>et al.</i> , ref. [14]

Hasil *fitting* dari data eksperimen di tabel 1 yang diplot bersamaan dengan model faktor bentuk dipol yang diberikan oleh persamaan (6.1) dapat dilihat di gambar 4.



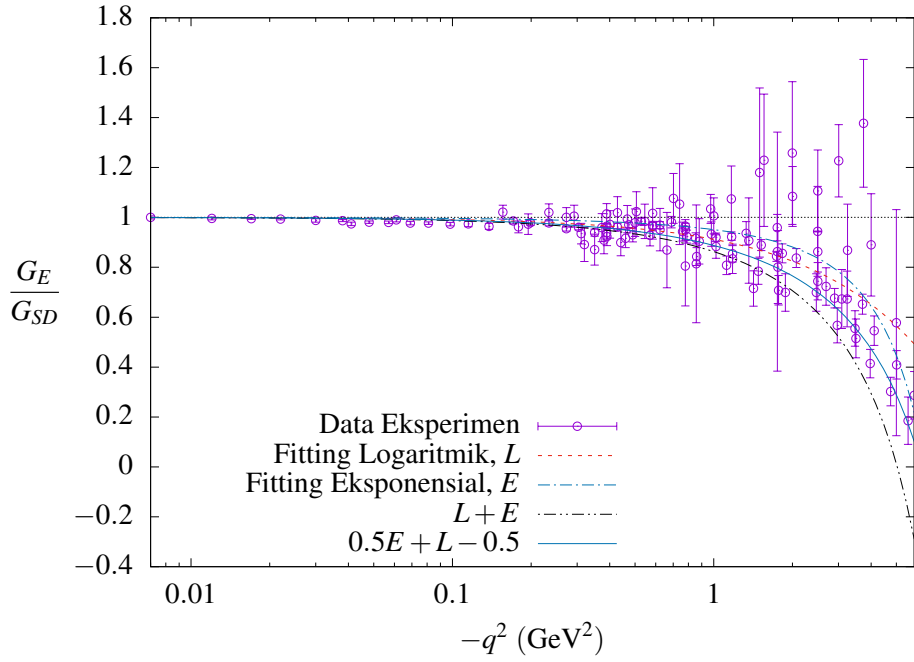
Gambar 4. Data eksperimen G_E yang diberikan di tabel 1 dibandingkan terhadap model faktor bentuk dipol yang diberikan di persamaan (6.1).

Selain melakukan *fitting* terhadap G_E , banyak juga fisikawan yang meninjau deviasi nilai G_E yang diperoleh dari eksperimen terhadap nilai G_E yang diprediksi oleh model faktor bentuk dipol, G_{SD} , misalnya melalui perbandingan G_E/G_{SD} . Data G_E/G_{SD} yang akan ditinjau diberikan di tabel 2.

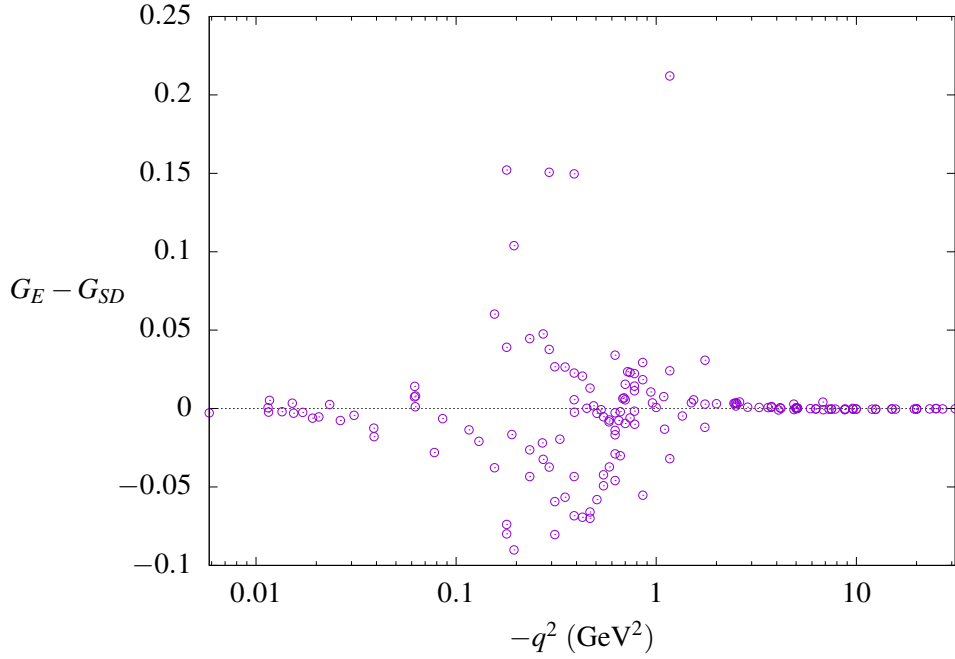
Tabel 2. Data G_E/G_{SD} yang diperoleh dari berbagai referensi beserta rentang Q^2 yang bersesuaian.

Rentang $Q^2 = -q^2$ (GeV ²)	Sumber
0.156 – 5.000	J. Arrington, ref. [15]
0.087 – 5.85	J. Arrington, <i>et al.</i> , ref. [16]
0.005 – 9.121	J. Arrington, ref. [17]

Plot dari data G_E/G_{SD} yang diberikan di tabel 2 dapat dilihat di gambar 5.



Gambar 5. Data eksperimen G_E/G_{SD} yang diberikan di tabel 5. Data di-fit dengan fungsi logaritmik $L(q^2)$ dan eksponensial $E(q^2)$. Hasil *fitting* yang diperoleh adalah $L(q^2) = -15.7569 \ln(-0.0157124q^2 + 2.80858) + 17.2718$ dan $E(q^2) = -0.103376 \cdot 11.22843^{(-1.68447q^2 + 0.667006)} + 1.118582$.



Gambar 6. Plot selisih data faktor bentuk G_E yang diperoleh dari eksperimen dan yang diprediksi oleh model *standard dipole*, G_{SD} . Kita lihat bahwa ada struktur yang terbentuk di daerah $-q^2 \approx 0.4 \text{ GeV}^2$. Plot ini terinspirasi dari referensi [18].

Apendiks

A Persamaan-Persamaan untuk Spinor Dirac

A.1 Persamaan Dirac

$$(\not{p} - m) u(p, s) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{u}(p, s) (\not{p} - m) = 0 \quad (\text{A.2})$$

A.2 Dekomposisi Gordon

$$\bar{u}(p', s') \gamma^\mu u(p, s) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p', s') \left\{ (p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p' - p)_\nu \right\} u(p, s) \quad (\text{A.3})$$

A.3 Relasi Kelengkapan

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m \quad (\text{A.4})$$

B Identitas Matriks Dirac dan Teorema *Trace*

B.1 Identitas Matriks Dirac

$$\gamma^0 \gamma^0 = I \quad (\text{B.1})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (\text{B.3})$$

B.2 Teorema *Trace*

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \quad ; \quad A \text{ dan } B \text{ adalah matriks sembarang.} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4(a \cdot b) \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4 \left[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c) \right] \quad (\text{B.6})$$

$$\text{Tr}(\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \dots \not{a}_n) = 0 \quad ; \quad n \text{ adalah bilangan ganjil.} \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d} \dots) = a_\alpha b_\beta c_\delta d_\kappa \dots \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\kappa \dots) \quad (\text{B.8})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{B.9})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = 4(g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) \quad (\text{B.10})$$

C Persamaan-Persamaan Lain yang Berguna

$$\delta(p - p') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(p-p')t} \quad (\text{C.1})$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \ ; \ a \text{ adalah bilangan real yang tidak nol.} \quad (\text{C.2})$$

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0}} \ ; \ x_0 \text{ adalah solusi dari } f(x) = 0. \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} \gamma^0 \Gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 &= \gamma^0 \left[(F_1 + \kappa F_2) \gamma^\mu - \frac{\kappa}{2m} F_2 (k + k')^\mu \right]^\dagger \gamma^0 \\ &= (F_1 + \kappa F_2) \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 - \frac{\kappa}{2m} F_2 \gamma^0 (k + k')^{\mu\dagger} \gamma^0 \\ &= (F_1 + \kappa F_2) \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^0 - \frac{\kappa}{2m} F_2 (k + k')^\mu \gamma^0 \gamma^0 \\ &= (F_1 + \kappa F_2) \gamma^\mu - \frac{\kappa}{2m} F_2 (k + k')^\mu \\ &= \Gamma^\mu \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Daftar Pustaka

- [1] Terry Mart, *Produksi Elektromagnetik Kaon : Teori Dasar dan Formalisme*, Penerbit Duta (2023).
- [2] Francis Halzen & Alan D. Martin, *Quarks & Leptons : An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley & Sons, Inc. (1984).
- [3] Mark Thomson, *Handout 5 : Electron-Proton Elastic Scattering*, Cambridge University (2023).
- [4] Ian J.R. Aitchison & Anthony J.G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics : A Practical Introduction 4th edition*, CRC Press (2013).
- [5] Vadim Kaplunovsky, *Form Factors*, University of Texas at Austin (2020).
- [6] D. H. Coward, *et al.*, *Electron-Proton Elastic Scattering at High Momentum Transfers*, *Physical Review Letters* **20**, 292 (1968).
- [7] K. W. Chen, *et al.*, *Measurement of Proton Electromagnetic Form Factors at High Momentum Transfers*, *Physical Review* **141**, 1267 (1966).
- [8] P. N. Kirk, *et al.*, *Elastic Electron-Proton Scattering at Large Four-Momentum Transfer*, *Physical Review D* **8**, 63 (1973).
- [9] D. J. Drickey dan L. N. Hand, *Precise Neutron and Proton Form Factors at Low Momentum Transfers*, *Physical Review Letters* **9**, 521 (1962).
- [10] A. F. Sill, *et al.*, *Measurements of Elastic Electron-Proton Scattering at Large Momentum Transfer*, *Physical Review D* **48**, 29 (1993).
- [11] L. E. Price, *et al.*, *Backward-Angle Electron-Proton Elastic Scattering and Proton Electromagnetic Form Factors*, *Physical Review D* **4**, 45 (1971).
- [12] W. Albrecht, *et al.*, *Elastic Electron-Proton Scattering at Momentum Transfers up to 245 F^{-2}* , *Physical Review Letters* **17**, 1192 (1966).
- [13] J. J. Murphy, II, Y. M. Shin, dan D. M. Skopik, *Proton Form Factors from 0.15 to 0.19 fm^{-2}* , *Physical Review C* **9**, 2125 (1974).
- [14] T. Janssens, *et al.*, *Proton Form Factors from Elastic Electron-Proton Scattering*, *Physical Review* **142**, 922 (1966).
- [15] J. Arrington, *How Well Do We Know the Electromagnetic Form Factors of the Proton?*, *Physical Review C* **68**, 034325 (2003).
- [16] J. Arrington, W. Melnitchouk, dan J. A. Tjon, *Global Analysis of Proton Elastic Form Factor Data with Two-Photon Exchange Corrections*, *Physical Review C* **76**, 035205 (2007).
- [17] J. Arrington, *Extraction of Two-Photon Contributions to the Proton Form Factors*, *Physical Review C* **71**, 015202 (2005).
- [18] M. Ridwan dan T. Mart, *Note on the electromagnetic radius of proton*, arxiv:2308.14950.