MATEMATIČKI FAKULTET
Univerzitet u Beogradu

MODEL BANDŽI SKAKAČA

SEMINARSKI RAD

Studenti :
Gavrilo Jovanović
98/2017
Katarina Šipka
141/2016
Jovan Đorđević
164/2017

Profesor :
Dr Milan Dražić

maj 2021.

1 Uvod i motivacija

Bandži skokovi (*eng. bungee jumping*) predstavljaju zabavu za sve ljubitelje adrenalinskih aktivnosti. Bandži skakač se vezuje za trup ili noge specijalnim, gumenim konopcem i zatim izvodi skok sa visine, na primer sa mosta nad rekom. Konopac se isteže do svog maksimuma, a zatim povlači skakača na gore i proces se ponavlja sve do zaustavljanja usled otpora vazduha.

Radi bezbednosti skakača, veoma je važno da bandži oprema bude dobro konstruisana i ispravna. Mora se razmišljati unapred da tačka sa koje će skakač skočiti bude dovoljno visoko od tla ili vode, da konopac bude dovoljno izdržljiv za skakače različitih težina i o raznim drugim parametrima. Sve navedeno dovodi do toga da je pre same instalacije neophodno da model projektuje tim stručnih matematičara i fizičara.

Model obrađen u ovom radu se ne može koristiti kao realan jer je dosta uslova zanemareno ili pojednostavljeno. U svrhu vizuelne prezentacije zavisnosti nekih dveju promenljivih, u rad su uključena dva grafika koji su kodirani u jeziku *Python*.

2 Model

Modeliranje započinjemo jednačinom slobodnog pada našeg skakača, na deonici gde je konopac neistegnut.

$$m\ddot{x} = -mg$$

Ova jednačina predstavlja mehanički sistem sa *jednim stepenom slobode*, tj. položaj sistema je određen jednom koordinatom x, gde je $x \in \mathbb{R}$. Kao što se da zaključiti, u gornjoj jednačini (niti u jednoj narednoj) ne uračunavamo otpor vazduha, tj. zanemarujemo ga.
Jednačine kretanja sistema su oblika:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$$

gde je m masa skakača, a F ukupna sila koja deluje na njega. Sa l ćemo obeležavati dužinu konopca u neistegnutom stanju, a sa $l + d$ najnižu tačku do koje će se skakač spustiti.
Izabran je koordinatni sistem takav da je kretanje predstavljeno u *6 značajnih tačaka*.

- $x(t_0) = l$ - tačka na visini iz koje skakač polazi
- $x(t_1) = 0$ - tačka u kojoj je konopac razmotan do svoje dužine u neistegnutom stanju
- $x(t_2) = (-d_0)$ - ravnotežni položaj

- $x(t_3) \;=\; (-d)$ - najniža tačka do koje će se spustiti skakač
- $x(t_4) \;=\; 0$ - tačka u kojoj se vraća u položaj 0
- $x(t_5) \;=\; l$ - tačka u kojoj se vraća u početni položaj

Ravnotežni položaj u „povratku” nam nije neophodan u modelu, tako da tu tačku nismo naveli.
Sa našim izborom koordinatnog sistema, sila koja deluje na skakača je:

$$F(x,\dot{x},t) \;=\; F(x) = \begin{cases} -mg, & x \geqslant 0 \\ -mg - kx, & x < 0 \end{cases} \tag{$\heartsuit$}$$

Takođe, jedini faktor vezan za konopac koji je korišćen je koeficijent elastičnosti. Zbog toga, u jednačini kretanja ne uračunavamo linearnu gustinu istegnuća konopca, niti pretpostavku da on vibrira, već se konopac ponaša kao opruga.
Uvodimo funkciju:

$$V(x) = -\int\limits_c^x F(t)\,\mathrm{d}t, \quad c \in \mathbb{R}$$

Ona se naziva *potencijalna energija*. Biramo je tako da je $V(0) = 0$ i gde je:

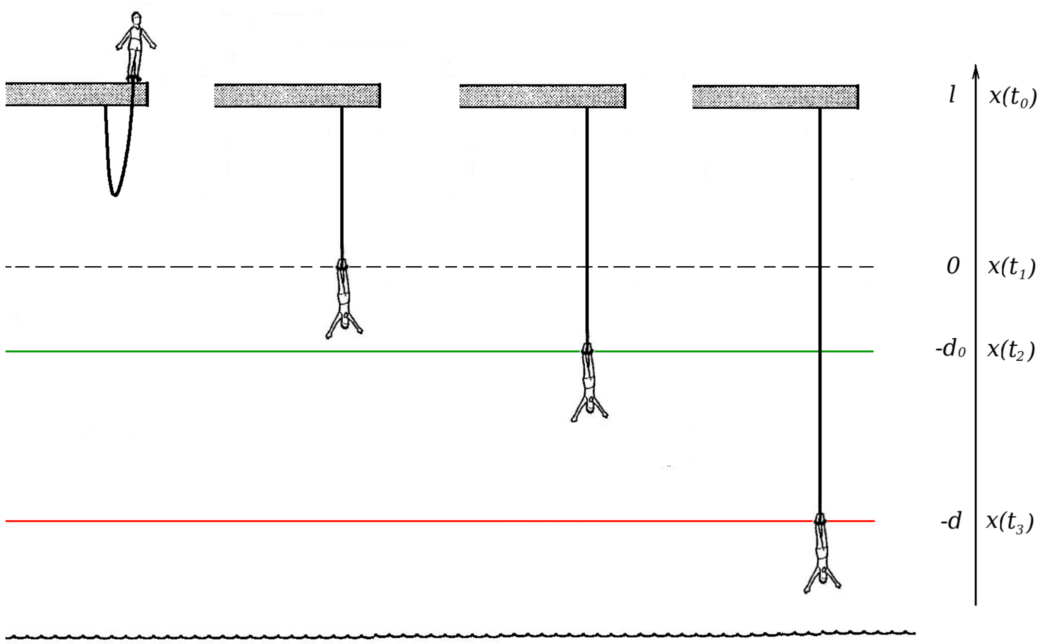
$$V(x) = \begin{cases} mgx, & x \geqslant 0 \\ mgx + \frac{1}{2}\,kx^2, & x < 0 \end{cases}$$

U sistemu se održava ukupna mehanička energija koja predstavlja *zbir kinetičke i potencijalne* u svakom položaju.

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x)$$

Podaci koje ćemo izvoditi u daljem rešavanju su:

- k - koeficijent elastičnosti konopca
- d - najveća dubina do koje se skakač spušta
- t_1 i t_3 - specifični vremenski trenuci



Slika 1: *Prikaz specijalnih položaja*

3 Rešavanje jednačina

Koeficijent elastičnosti ćemo dobiti iz ravnotežnog položaja. U toj tački ($x(t_2)$) je vrednost rezultante 0.

$$mg + kx(t_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(t_2) = -\frac{mg}{k}$$

Po uslovu zadatka važi da je $x(t_2) = -d_0$, pa je jednačina koeficijenta elastičnosti:

$$\boxed{k = \frac{mg}{d_0}} \tag{$\diamondsuit$}$$

Iskoristimo sada zakon održanja energije:

- U $x(t_0)$:

$$\left.\begin{aligned} T(x(t_0)) &= \frac{1}{2}m(\dot{x}(t_0))^2 = 0 \\ V(x(t_0)) &= V(l) = mgl \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad E = mgl$$

  Kinetička energija je u položajima $x(t_0)$ i $x(t_3)$ jednaka i pošto smo dobili jednačinu energije, možemo je iskoristiti u drugom položaju:

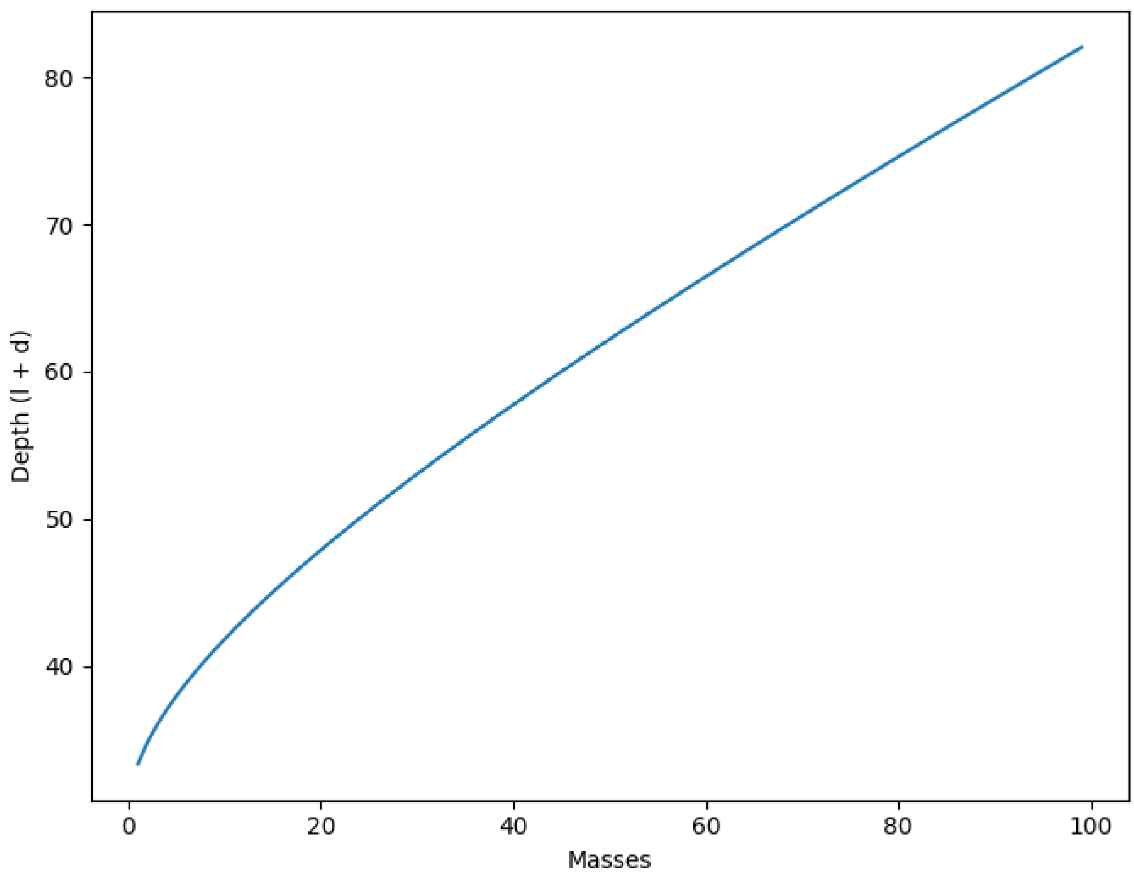
- U $x(t_3)$:

$$T(x(t_3)) = \frac{1}{2}m(\dot{x}(t_3))^2 = 0$$

$$V(x(t_3)) = V(-d) = -mgd + \frac{1}{2}\,kd^2 = mgl$$

Odavde možemo izvesti jednačinu vrednosti d. Jednačina je kvadratna i ima dva rešenja, od kojih uzimamo pozitivno:

$$\boxed{d = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2mgkl)}}{k}}$$



Slika 2: *Grafik zavisnosti najveće dubine od mase skakača*

Postupak nalaženja t_1 i t_3 je nešto složeniji. Posmatraćemo ponovo parametre u specijalnim položajima:

$\underline{x(t_0) \longrightarrow x(t_1)}$
Ovaj slučaj nam važi samo pri početnom padu, u ostalim će nam važiti druga jednačina.

$$x(t) = l - \frac{1}{2}\,gt^2$$

$$x(t_0) = l \qquad x(t_1) = 0$$

$$l - \frac{1}{2}\,gt_1^2 = 0$$

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}}}$$

Prvi izvod (brzina) u tački t_1 je:

$$\dot{x}(t) = -gt$$

$$\boxed{\dot{x}(t_1) = -\sqrt{2gl}}$$

$\underline{x(t_1) \longrightarrow x(t_3)}$

Da bismo odredili vreme t_3, potrebno je da prvo odredimo jednačinu položaja tela ispod tačke 0. Jednačinu položaja dobijamo kao rešenje *nehomogene diferencijalne jednačine*:

$$m\ddot{x} + kx = -mg \tag{$\heartsuit$}$$

U tački d_0 je ravnotežni položaj gornje jednačine i zbog toga je jedno partikularno rešenje $x(t) = d_0 = const$ (gde je d_0 dobijeno iz jednačine ($\diamondsuit$)). Opšte rešenje nehomogene jednačine je zbir partikularnog rešenja nehomogene jednačine i opšteg rešenja homogene. Uz uslov da je $t_{početno} = t_1$, jednačina položaja je:

$$x(t) = c_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \ + \ c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) - d_0 \tag{$\star$}$$

odakle dobijamo c_0 i c_1.
Koristeći $x(t_1) = 0$ i $\dot{x}(t_1) = \sqrt{2lg}$ dobijamo:

$$x(t_1) = c_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_1\right) \ + \ c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_1\right) - d_0 \ = \ 0$$

$$\dot{x}(t_1) = c_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_1\right) \sqrt{\frac{k}{m}} \ - \ c_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_1\right) \sqrt{\frac{k}{m}} \ = \ -\sqrt{2gl}$$

Budući da nam je sve osim c_0 i c_1 poznato, lako možemo dobiti i ta dva koeficijenta, jednostavnim rešavanjem 2 jednačine sa 2 nepoznate.

$$c_0 = d_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_1\right) - \sqrt{2gl} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_1\right) \tag{†}$$

$$c_1 = d_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_1\right) + \sqrt{2gl} \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_1\right) \tag{‡}$$

Sada nas interesuje da dobijemo t_3, tj. vreme kada je skakač stigao u najdalju od početne tačke. Znamo da važi $x(t_3) = -d$ i $\dot{x}(t_3) = 0$. Koristimo ponovo jednačinu $(\star)$, ali ovog puta za t_3:

$$x(t_3) = c_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_3\right) \;+\; c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_3\right) - d_0 = -d$$

$$\dot{x}(t_3) = c_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_3\right)\sqrt{\frac{k}{m}} \;-\; c_1 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_3\right)\sqrt{\frac{k}{m}} \;=\; 0$$

Dobijamo da je vrednost t_3:

$$\boxed{t_3 = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \arctan\left(\frac{c_0}{c_1}\right) + \pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \tag{♣}$$

Tehnički, rešenje smo mogli da dobijemo i samo iz jedne, tj. prve jednačine, ali smo iskoristili pogodnost da je u drugoj sa desne strane nula. Račun je u tom slučaju veoma jednostavan, potrebno je samo podeliti sa datim kosinusom i srediti.

Ono što nismo prokomentarisali je šta se događa u slučaju kada se telo vraća ka početnoj poziciji usled sile zatezanja. Za modeliranje kretanja od $-d$ do 0 koristimo jednačinu ($\star$). Međutim, za kretanje između položaja 0 i l imamo manju modfikaciju, budući da funkcija $x(t) = l - \frac{gt^2}{2}$ važi samo u slučaju slobodnog pada i kada je $t_0 = 0$. Umesto toga, kretanje na ovoj deonici ćemo posmatrati kao problem *vertikalnog hica naviše*, uz činjenice da je $t - t_4 = 0$ i $x(t_4) = 0$. Funkcija položaja na ovom delu je:

$$x(t) = v_o\, t - \frac{gt^2}{2}$$

v_0 nam je već poznato iz zakona održanja energije i biće $\sqrt{2gl}$.

Opišimo položaj skakača u funkciji od vremena:

- između početnog položaja i pređenog rastojanja l, u padu:

  $$x(t) = l - \frac{1}{2}\, gt^2, \quad t \in [t_0,\, t_1],$$

  gde je $t_0 = 0$, a $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$

- kada se telo nalazi u bilo kom položaju kada na njega deluje sila zatezanja:

  $$x(t) = c_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) \,+\, c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) - d_0, \quad t \in [t_1,\, t_4],$$

  gde su c_0 i c_1 dobijeni iz jednačina ($\dagger$) i ($\ddagger$), $t_4 = 2t_3 - t_1$, a t_3 dobijamo iz jednačine ($\clubsuit$)

- kada se telo vraća u početni položaj, dok na njega deluje samo sila Zemljine teže:

$$x(t) = \dot{x}(t_4) \cdot (t - t_4) - \frac{g(t - t_4)^2}{2}, \quad t \in [t_4,\ t_5],$$

  gde je $\dot{x}(t_4)$ brzina u vremenu t_4, tj. $\dot{x}(t_4) = \sqrt{2gl}$, a $t_5 = t_4 + t_1$

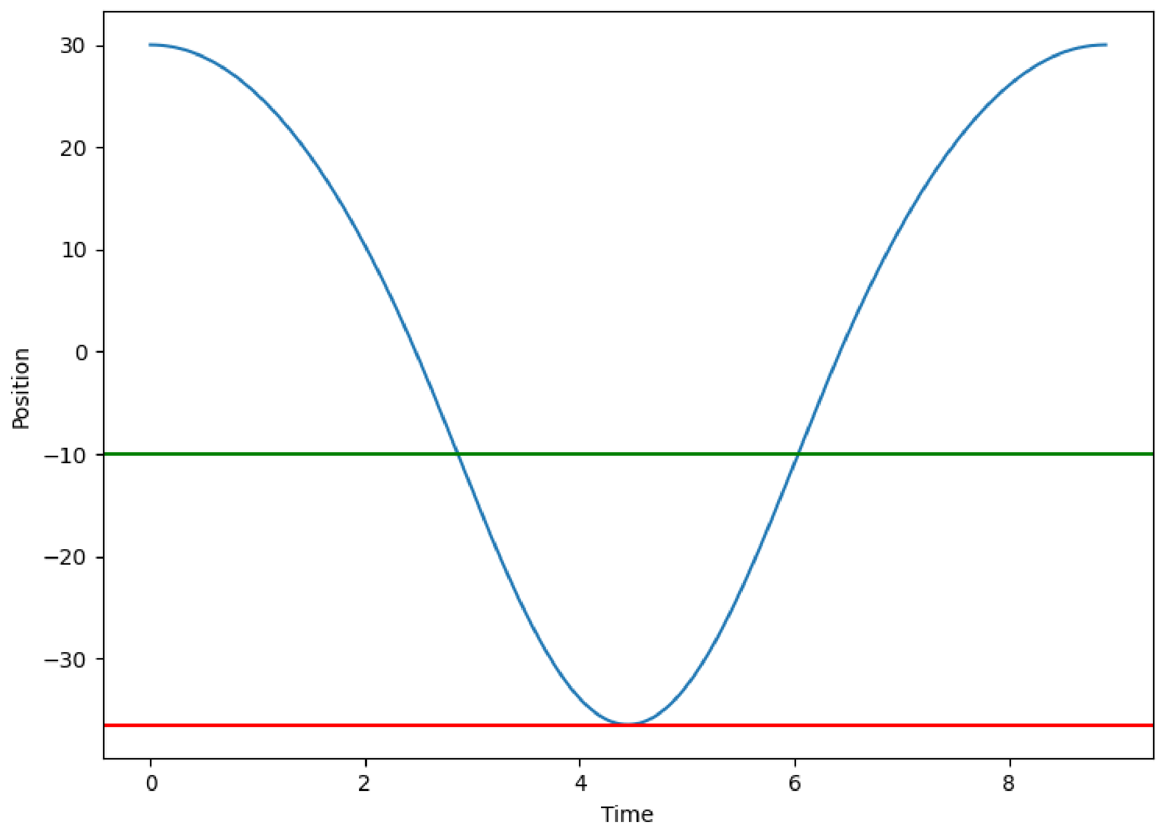
Iz datih jednačina možemo da uočimo da zamenom vrednosti za neke početne uslove (za m, l, d_0...) dobijamo da je $t_1 - t_0 = t_5 - t_4$ i $t_3 - t_1 = t_4 - t_3$. Na osnovu ovih jednakosti zaključujemo da je period:

$$T = 2(t_1 - t_0) + 2(t_3 - t_1) = 2\sqrt{\frac{2l}{g}} + 2(\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \arctan\left(\frac{c_0}{c_1}\right) + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} - \sqrt{\frac{2l}{g}})$$

gde smo c_0 i c_1 dobili iz (†) i (‡).

Sa izvedenim formulama perioda i položaja možemo prikazati kretanje grafički. Grafik prikazuje početni period, a svaki sledeći „lepimo" sa desne strane na postojeće.

Sa ovim je model u potpunosti opisan.



Slika 3: *Grafik zavisnosti položaja od vremena (samo prvi period)*

3.1 Vrednosti parametara

Vrednosti datih parametara u postavljenom zadatku su:

- $m = 60\,kg$
- $g = 9.81\,m/s^2$
- $l = 30\,m$
- $d_0 = 10\,m$

Na osnovu izvedenih jednačina i ovih vrednosti, dobijamo tražene:

- $k = 58.86$
- $d = 36.46\,m$
- $t_1 = 2.47\,s$
- $t_3 = 1.98\,s$
- $T = 8.9\,s$

4 Kodovi

U nastavku je dat prikaz kodova kojim su napravljeni grafici. Oba grafika su izrađena u istoj datoteci.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

m0 = 60
l0 = 30
d0 = 10
g = 9.81

# koeficijent elasticnosti
k = (m0 * g) / d0        # 58.86
d = (m0*g + np.sqrt( m0*m0*g*g + 2*k*m0*g*l0 )) / k
# l0 + d je max dubina za nas m0 = 60 i izracunat k

t1 = np.sqrt(2 * l0 / g)

a = np.sin(t1 * np.sqrt(k / m0))
b = np.cos(t1 * np.sqrt(k / m0))

c0 = d0 * a - np.sqrt(2 * g * l0 * m0 / k) * b
c1 = d0 * b + np.sqrt(2 * g * l0 * m0 / k) * a
```

```
t2 = np.sqrt(m0 / k) * np.arctan(c0 / c1)
   + np.pi / np.sqrt(k / m0) - t1

period = 2 * (t1 + t2)
print("Period: {}".format(period))


# grafik 1
time = np.linspace(0, period, 10000)
current_x = l0
position = [current_x]
v0 =  np.sqrt(2 * g * l0)
firstIteration = True
tmap = 0
for t in time[1 : ]:
    if current_x > 0:
        if firstIteration == True:
            current_x = l0 - (g * t * t) / 2
        else:
            current_x = v0 * (t - tmap)
                    - g * (t - tmap) * (t - tmap) / 2
    elif current_x < 0:
        firstIteration = False
        current_x = c0 * np.sin(t * np.sqrt(k / m0))
```

```
            + c1 * np.cos(t * np.sqrt(k / m0)) - d0

    if position[-1] < 0:
        tmap = t

    position.append(current_x)

plt.plot(time, position)
plt.xlabel("Time")
plt.ylabel("Position")
plt.axhline(-d0, color = "green")
# dubina kada bi bilo obeseno u stanju mirovanja
plt.axhline(-d, color = "red")
# maksimalna dubina koju dostigne
plt.show()


# grafik 2
masses = [i for i in range(1, 100)]
depth = []

for m in masses:
    d = (m*g + np.sqrt(m*m*g*g + 2*k*m*g*l0))/k
    depth.append(l0 + d)
```

```
plt.plot(masses, depth)
plt.xlabel("Masses")
plt.ylabel("Depth (l + d)")
plt.show()
```