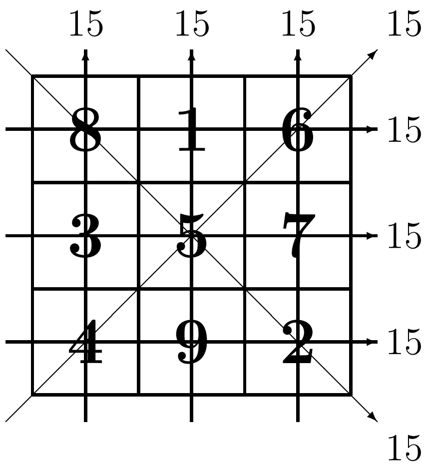
Magični kvadrati

18. 11. 2024.



Prirejeno iz virov:

- `http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html`
- `http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square`

Kazalo

1 Uvod

Definicija 1. *Magični kvadrat* reda n je nabor n^2 različnih števil, ki so razvrščena v kvadratno tabelo tako, da vedno dobimo enako vsoto, če seštejemo vsa števila poljubne vrstice, vsa števila poljubnega stolpca ali vsa števila v katerikoli od glavnih diagonal.

Primer magičnega kvadrata reda 3 je prikazan v tabeli 1.

Tabela 1: Magični kvadrat reda 3

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Definicija 2. Magični kvadrat reda n je *normalen*, če v njem nastopajo števila

$$1, 2, 3, \ldots, n^2 - 1, n^2. \tag{1}$$

Magični kvadrat v tabeli ?!? je normalen. To je tudi najmanjši netrivialen normalen magični kvadrat. Poleg normalnih magičnih kvadratov so zanimivi tudi magični kvadrati praštevil.

2 Zgodovina

2.1 Kvadrat »Lo Shu«

Kitajska literatura iz časa vsaj 2800 let pred našim štetjem govori o legendi *Lo Shu* – »zvitek reke Lo«. V antični Kitajski je prišlo do silne poplave. Ljudje so skušali rečnemu bogu narasle reke Lo ponuditi daritev, da bi pomirili njegovo jezo. Iz vode se je prikazala želva z zanimivim vzorcem na oklepu: v tabeli velikosti tri krat tri so bila predstavljena števila, tako da je bila vsota števil v katerikoli vrstici, kateremkoli stolpcu in na obeh glavnih diagonalah enaka: 15. To število je tudi enako številu dni v 24 ciklih kitajskega sončnega leta. Ta vzorec so na določen način uporabljali upravljalci reke.

2.2 Kulturna pomembnost

Magični kvadrati so fascinirali človeštvo skozi vso zgodovino. Najdemo jih v številnih kulturah, npr. v Egiptu in Indiji, vklesane v kamen ali kovino, uporabljane kot talismane za dolgo življensko dobo in v izogib boleznim.

Kubera-Kolam je talna poslikava, ki se uporablja v Indiji, in je v obliki magičnega kvadrata reda 3. Ta je v bistvu enak kot kvadrat Lo Shu, vendar je vsako število povečano za 19.
Z magičnimi kvadrati so se ukvarjali tudi najbolj znani matematiki kot na primer Euler, glej [3].

2.3 Zgodnji kvadrati reda 4

Najzgodnejši znani magični kvadrat reda 4 je bil odkrit na napisu v Khajurahu v Indiji in v Enciklopediji Bratovščine Čistosti iz enajstega ali dvanajstega stoletja. Vrh vsega gre celo za »panmagični kvadrat«. V Evropi sta morda najbolj znana naslednja magična kvadrata reda 4.
Magični kvadrat v litografiji Melancholia I (glej sliko 1 za izsek s kvadratom) Albrechta Dürerja naj bi bil najzgodnejši magični kvadrat v evropski umetnosti. Zelo podoben je kvadratu Yang Huija, ki je nastal na Kitajskem približno 250 let pred Dürerjevim časom.

Slika 1: Dürerjev magični kvadrat

Vsoto 34 je mogoče najti pri seštevanju števil v vsaki vrstici, vsakem stolpcu, na vsaki diagonali, v vsakem od štirih kvadrantov, v sredinskih štirih poljih, v štirih kotih, v štirih sosedih kotov v smeri urinega kazalca $(3+8+14+9)$, v štirih sosedih kotov v nasprotni smeri urinega kazalca $(2+5+15+12)$, v dveh naborih simetričnih parov $(2+8+9+15$ in $3+5+12+14)$, in še na nekaj drugih načinov. Števili na sredini spodnje vrstici tvorita letnico litografije: 1514.
Pasijonska fasada na katedrali Sagrada família v Barceloni (glej sliko ?? za fotografijo) vsebuje magični kvadrat reda 4.

Vsota števil v vrsticah, stolpcih oziroma na diagonalah je 33 – Jezusova starost v času pasijona. Strukturno je kvadrat podoben Dürerjevemu, vendar so števila v štirih poljih zmanjšana za 1. Posledica je, da sta števili 10 in 14 podvojeni in zato kvadrat ni normalen.

3 Osnovne lastnosti

Vsoto ene vrstice, enega stolpca ali ene od glavnih diagonal v magičnem kvadratu imenujemo *magična konstanta*.

Izrek 1. *Magična konstanta normalnega magičnega kvadrata reda n je enaka*

$$M_2(n) = \frac{1}{2}n(n^2 + 1) \tag{2}$$

Dokaz. V normalnem magičnem kvadratu reda n je vsota vseh nastopajočih števil (glej ?? na strani ??) enaka $1+2+3+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n^2(n^2+1)$. Ker imamo v kvadratu n vrstic z enako vsoto, je vsota števil v eni vrstici enaka številu $M_2(n)$. □

Preprost račun pokaže, da je konstanti ?? analogna konstanta $M_2(n; A, D)$ za magični kvadrat, v katerem so nameščena števila A, $A + D$, $A + 2D$, $\ldots$, $A + (n^2 - 1)D$, enaka

$$M2(n; A, D) = \frac{1}{2}n(2A + D(n^2 - 1)). \tag{3}$$

Kvadratu v tabeli ?!? ustrezata konstanti $A = 20$ in $D = 1$.

Tabela 2: Število različnih normalnih magičnih kvadratov

	točna vrednost					približek
red	1	2	3	4	5	6
število kvadratov	1	0	1	880	275305224	$(1,7745 \pm 0,0016)^{1019}$

Če vsako od števil v normalnem magičnem kvadratu reda n odštejemo od števila n^2+1, dobimo nov magični kvadrat, ki je prvotnemu *komplementaren*. Na primer, magičnemu kvadratu Lo Shu (glej tabelo ?!?) prevedimo komplementarni kvadrat, prikazan v tabeli ?!?.
Vidimo, da je dobljeni kvadrat moč dobiti iz kvadrata Lo Shu tudi z zasukom za 180 stopinj okrog središča, kvadrat iz tabele ?!? pa je mogoče dobiti iz kvadrata Lo Shu z zrcaljenjem preko sredinske vodoravne črte.
Število različnih normalnih magičnih kvadratov
Pravimo, da sta dva magična kvadrata *različna*, če enega ni mogoče dobiti iz drugega s pomočjo zasukov oziroma zrcaljenj.
Števila različnih normalnih magičnih kvadratov se nahajajo v tabeli (2).
Vse normalne magične kvadrate reda 4 je oštevilčil Frénicle de Bessy leta 1693, glej [2], in jih je moč najti v knjigi [1] iz leta 1982. Število normalnih kvadratov reda 5 je izračunal R. Schroeppel leta 1973 (glej Gardner [4]). Natančno število vseh različnih normalnih magičnih kvadratov reda 6 ni znano. Avtorja navedenega približka sta Pinn in Wieczerkowski (glej [5]), ki sta za oceno uporabila simulacijo Monte Carlo in metode statistične mehanike.

4 Primeri

V tabelah ?!?, ?!? in ?!? so prikazani magični kvadrati redov 5, 6 in 9.

Literatura

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. Games in particular. In *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, volume 2. Academic Press, London, 1982.

[2] B. F. de Bessy. *Des quarrez magiques.* De l'imprimerie Royale par Jean Anisson, Paris, 1693.

[3] L. Euler. De quadratis magicis. *Commentationes arithmeticae*, 2:593–602, 1849.

[4] M. Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 234:118–122, 1976.

[5] K. Pinn and C. Wieczerkowski. Number of magic squares from parallel tempering monte carlo. *Int. J. Mod. Phys. C*, 9:541–547, 1998.

`cite`