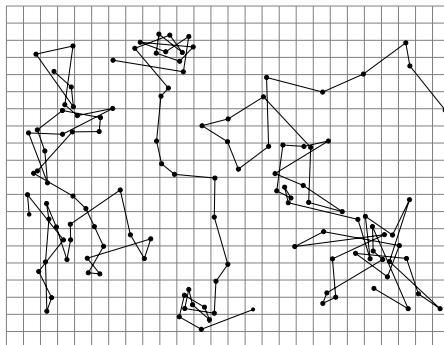


# Brownovo gibanje

Matej Rojec

Brownovo gibanje (več v [1]) je intuitivno slučajen proces, ki predstavlja naključno gibanje delcev v mediju.



Slika 1: Reprodukcijska slika iz Jean Baptiste Perrin, *Mouvement brownien et réalité moléculaire*, Ann. de Chimie et de Physique (VIII) 18, 5-114, 1909

**Definicija 1.** Standardno Brownovo gibanje  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  je slučajen proces z naslednjimi lastnostmi:

1.  $B_0 = 0$ .
2. Prirastki  $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}, \dots, B_2 - B_1, B_1 - B_0$  so neodvisne slučajne spremenljivke, za vsak  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n$ .
3. Za vsak  $t \geq 0$  in  $h > 0$  velja  $B_{t+h} - B_t \sim \mathcal{N}(0, h)$ .
4. Funkcija  $t \mapsto B_t$  je zvezna skoraj gotovo.

Preden zapišemo izrek, definirajmo še pojem časa ustavljanja.

**Definicija 2.** Slučajna spremenljivka  $\tau$  na verjetnostnem prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  z vrednostmi v  $\mathbb{R}^+$  je čas ustavljanja glede na filtracijo  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , če velja  $\forall t \in T : \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

Zdaj lahko zapišemo izrek 1.

**Izrek 1.** Naj bo  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  (standardno) Brownovo gibanje,  $\tau$  čas ustavljanja glede na  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  in naj velja  $P[\tau < \infty] > 0$ . Potem je tudi proces:

$$\hat{B} := \{B_{T+t} - B_T \mid t \geq 0\}$$

(standardno) Brownovo gibanje in neodvisen od  $\mathcal{F}_T$ .

## Literatura

- [1] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1991.