Savić Jovana 2020/3423

Elektrotehnički fakultet u Beogradu
Matematička statistika 13M081MAST
Prof. dr Milan Merkle
Domaći zadatak 3

Zadatak 1. a) Pročitati tekst teoreme 4.9. Zatim odgovoriti na pitanje: Ako obe slučajne promenljive X i Y imaju normalnu raspodelu i ako su nekorelisane, da li to znači da su X i Y nezavisne? Koji još uslov treba da bude ispunjen?

b) Neka je $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $Y = UX$ gde U uzima vrednosti ± 1 sa jednakim verovatnoćama i nezavisna je od X. Dokazati da Y takođe ima $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu i zatim ispitati da li su X i Y nekorelisane.

c) Pokazati na primeru događaja $|X| < 1$ i $|Y| > 2$ da X i Y nisu nezavisne slučajne promenljive.

Rešenje. **a)** Teorema 4.9. tvrdi da su promenljive X i Y nezavisne, ako vektor (X, Y) ima 2D normalnu raspodelu sa koeficijentom korelacije $\rho = 0$. Dakle, teorema ne govori o slučaju u kome su marginalne raspodele normalne, već o slučaju u kome je *zajednička* raspodela ovih promenljivih normalna.

Sa druge strane, imamo teoremu 4.8. koja tvrdi da, ukoliko je zajednička raspodela 2D normalna, tada su i marginalne raspodele normalne. Iskaz teoreme je u jednom smeru, dakle teorema *ne tvrdi* da će ako su marginalne raspodele normalne i zajednička raspodela biti normalna .

Prema tome, iz toga što su marginalne raspodele normalne, mi ne možemo da zaključimo da je i zajednička raspodela normalna, pa samim tim nema smisla primenjivati teoremu 4.9. Dakle, ove promenljive *nisu* u opštem slučaju nezavisne.

b) Funkcija raspodele za promenljivu Y je

$$\begin{aligned} P\left(Y \leq y\right) &= P\left(X \leq y\right) P\left(U = 1\right) + P\left(-X \leq y\right) P\left(U = -1\right) \\ &= \Phi(y)\frac{1}{2} + \Phi(y)\frac{1}{2} \\ &= \Phi(y) \end{aligned}$$

Prema tome, Y ima $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu.

Pošto su standardne devijacije jednake jedinici koeficijent korelacije je

$$\begin{aligned} \rho = \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\ &= \mathrm{E}(UX^2) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(UX) \\ &= \mathrm{E}(U)\mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X)\mathrm{E}(U) = 0 \end{aligned}$$

jer je $\mathrm{E}(U) = 0$. Prema tome, ove slučajne promenljive su nekorelisane.

c) Ukoliko je promenljiva X u intervalu $(-1, 1)$ tada je i Y u istom intervalu jer je $Y^2 = X^2$. Prema tome, $P(|X| < 1, |Y| > 2) = 0$. Očigledno, ovo nije proizvod verovatnoća ovih događaja pojedinačno, pa ove promenljive nisu nezavisne.

U ovom primeru smo imali dve slučajne promenljive koje *nisu* nezavisne, a obe imaju normalnu raspodelu i njihov koeficijent korelacije je nula, što je u skladu sa rezultatom koji smo dobili pod a).

□

Zadatak 2. Neka su f_1 i f_2 gustine dvodimenzionalne normalne raspodele sa varijansama 1, očekivanjima 0 i sa koeficijentima korelacije $\rho_1 \neq \rho_2$. Dokazati da je funkcija $f(x,y) = (f_1(x,y) + f_2(x,y))/2$ gustina dvodimenzionalne raspodele koja nije normalna, ali su njene marginalne gustine normalne.

Cilj ovog zadatka je da se uverimo da ako imamo dve slučajne promenljive X i Y, obe sa normalnim raspodelama, njihova raspodela ne mora biti 2D normalna.

Rešenje. Imamo

$$f_i(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_i^2}}\ exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2 - 2\rho_i xy + y^2}{(1-\rho_i^2)}\right)\ ,\quad i = 1,2$$

Marginalne raspodele su normalne:

$$\begin{aligned}
f_{i,X}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_i^2}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2 - 2\rho_i xy + y^2}{(1-\rho_i^2)}\right)\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_i^2}} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\rho_i x - y)^2 + x^2(1-\rho_i^2)}{(1-\rho_i^2)}\right)\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_i^2}} exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-\rho_i x)^2}{(1-\rho_i^2)}\right)\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_i^2}} exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{(1-\rho_i^2)}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Korišćenjem jednakosti

$$\int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) = \sigma\sqrt{2\pi}$$

Nalazimo

$$f_{i,X}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

Pošto je zajednička funkcija gustine simetrična po x i y isti izraz se dobija i za $f_{i,Y}(y)$.

Marginalna funkcija gustine za novu raspodelu je:

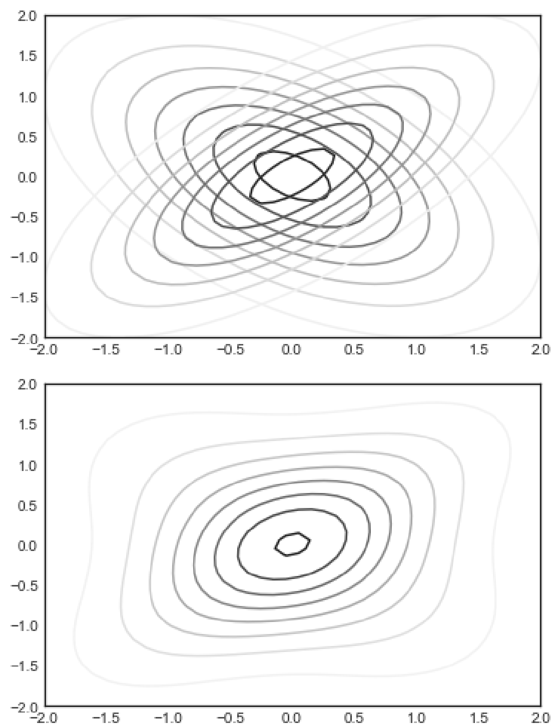
$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,y) + f_2(x,y)\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,y)\ \mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x,y)\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)
\end{aligned}$$

Isti rezultat je i za $f_Y(y)$. Prema tome, marginalne raspodele su i dalje normalne.

Iz definicije 2D normalne raspodele vidimo da skup tačaka sa istom verovatnoćom predstavlja elipsu. Centar ove elipse je u tački matematičkog očekivanja, što je u ovom slučaju nula. Manji i veći poluprečnik ove elipse su istog pravca kao i sopstveni vektori koverijacione matrice, i to, veći kao vektor kome odgovara veća sopstvena vrednost. Odnosi manjeg i većeg poluprečnika su isti kao odnosi manje i veće sopstvene vrednosti kovarijacione matrice. Prema tome, kada posmatramo konture funkcija $f_1(x,y)$ i $f_2(x,y)$ u kojima su one jednake imamo dve elipse koje su različito orijentisane i različitih veličina.

Pretpostavimo da hoćemo da odredimo oblast u kojoj je $f(x,y) \leq c$. Za normalnu raspodelu ova oblast je spoljašnja strana odgovarajuće elipse i njena granica. Za našu raspodelu ova oblast je ona za koju važi $1/2(f_1(x,y) + f_2(x,y)) \leq c$. Granica ove oblasti će biti sve one tačke za koje je $1/2(f_1(x,y) + f_2(x,y)) = c$. Ova oblast očigledno nema oblik elipse, pa samim tim dobijena funkcija ne može predstavljati normalnu raspodelu. Ovo je ilustrovano na slici 1.

□



Slika 1: Konture funkcija normalne raspodele i konture polovine njihove sume