Univerzitet u Beogradu
Elektrotehnički fakultet

Odabrana poglavlja iz numeričke analize

Verižni razlomci i racionalne aproksimacije

Jovana Savić 2020/3423

mentor
prof. dr Branko Malešević

Glava 1

Projektni zadatak

Za dati broj x i opseg n i m, formirati niz razlomaka $\frac{p}{q}$ gde imenilac q ispunjava $n \leq q \leq m$. Brojilac p je zaokruzen na najbliži ceo broj vrednosti $x \cdot q$. Potom u prethodnom nizu razlomaka formirati:

- Racionalne aproksimacije I vrste
- Racionalne aproksimacije II vrste
- Razlomke $\frac{p}{q}$ sortirati po minimalnosti apsolutne greške $|x - \frac{p}{q}|$.

Formirati i zapisati u veriznom zapisu sve dobijene aproksimacije.

Glava 2

Racionalne aproksimacije i verižni zapis

2.1 Racionalne aproksimacije I i II vrste

Definicija 2.1.1. Racionalan broj $\frac{p}{q}$ jeste najbolja racionalna aproksimacija realnog broja α prve vrste ako i samo ako važi nejednakost:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left|\alpha - \frac{r}{s}\right| \tag{2.1}$$

za sve razlomke $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ takve da je $0 < s \leq q$.

Definicija 2.1.2. Racionalan broj $\frac{p}{q}$ jeste najbolja racionalna aproksimacija realnog broja α druge vrste ako i samo ako važi nejednakost:

$$|q\alpha - p| < |s\alpha - r| \tag{2.2}$$

za sve razlomke $\frac{r}{s} \neq \frac{p}{q}$ takve da je $0 < s \leq q$.

Svojstvo 2.1.1. Najbolja racionalna aproksimacija druge vrste jeste i najbolja racionalna aproksimacija prve vrste. Obratno ne mora da važi.

Navedeno svojstvo se lako dokazuje. Na osnovu nejednakosti $0 < s \leq q$ sledi:

$$\frac{1}{q}|q\alpha - p| < \frac{1}{s}|s\alpha - r| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \left|\alpha - \frac{r}{s}\right|$$

Da bismo dokazali drugi deo svojstva dovoljno je pokazati da postoji bar jedan razlomak koji jeste aproksimacija prve vrste, ali ne i aproksimacija druge vrste.

Primer 2.1.1. Jedna od aproksimacija prve vrste broja π je razlomak $\frac{13}{4}$. Ovo se lako pokazuje proveravanjem svih razlomaka sa manjim imeniocem. Razlomak $\frac{9}{3}$ je primer čija je greška drugog tipa manja od greške drugog tipa razlomka $\frac{13}{4}$, pa samim tim on ne može biti aproksimacija druge vrste.

2.2 Verižni zapis

U matematici, verižni razlomak je izraz oblika

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}}} \tag{2.3}$$

gde je $a_0 \in Z$ i $a_i \in N, a_i \neq 0$.
Prethodni izraz skraćeno zapisujemo:

$$x = [a_0; a_1; a_2; \ldots] \tag{2.4}$$

Navodimo teoremu čiji se dokaz može naći u [1]

Teorema 2.2.1. Za svaki realan broj α postoji odgovarajući verižni razlomak čija je vrednost jednaka α. Ako je α racionalan broj, ovaj zapis je konačan, u suprotnom je beskonačan.

U konkretnom slučaju radimo sa konačnim verižnim razlomcima koji su određeni u obliku razlomka:

$$\alpha = \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1; a_2; \ldots; a_n] \tag{2.5}$$

Posmatrajmo razlomke $\frac{p_k}{q_k} = [a_0, a_1, \ldots a_k]$ za $k \in \{0, 1, \ldots n\}$. Tada na osnovu $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ i $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$ korišćenjem rekurencija:

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2} \end{aligned} \tag{2.6}$$

koje važe za $k \geq 2$ dobijamo niz razlomaka $\frac{p_k}{q_k}$. Ove razlomke nazivamo konvergentama. Racionalne brojeve razmatrajmo kao redukovane prave razlomke.

Tada, svaki racionalni broj $\alpha = \frac{p}{q}$ možemo zapisati u obliku konačnog verižnog razlomka tako što verižne decimale određujemo pomoću Euklidovog algoritma:

$$
\begin{aligned}
p &= a_0 q + r_1 \\
q &= a_1 r_1 + r_2 \\
r_1 &= a_2 r_2 + r_3 \\
&\dots \\
r_{n-2} &= a_{n-1} r_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= a_n r_n
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

pri tom $r_n < r_{n-1} < \cdots < r_2 < r_1 < q$. Verižne decimale su jedinstveno određene i poslednja verižna decimala ne može biti 1.

U nastavku navodimo neka svojstva.

Svojstvo 2.2.1. Svaka najbolja racionalna aproksimacija prve vrste broja α je konvergenta ili neka sekundarna konvergenta tog broja.

Svojstvo 2.2.2. Svaka najbolja aproksimacija druge vrste broja α je konvergenta. Obrnuto, svaka konvergenta je najbolja racionalna aproksimacija druge vrste broja α; izuzev izolovanog slučaja $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ i $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$

U nizu najboljih aproksimacija prve vrste nalaze se sve konvergente posmatranog broja i te konvergente nazivamo verižnim aproksimacijama. U nizu najboljih aproksimacija prve vrste su i neke sekundarne konvergente posmatranog broja i sve takve sekundarne konvergente nazivamo međuverižnim aproksimacijama.

Svojstvo 2.2.3. Niz imenilaca $q_1, q_2, \dots q_n, \dots$ verižnih aproksimacija jeste strogo rastući niz brojeva. Apsolutne razlike između verižnih aproksimacija $\frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, određene sa $|\Delta_n| = |\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}| = \frac{1}{q_{n-1}q_n}$ monotono teže ka 0

Svojstvo 2.2.4. Racionalan broj jeste najbolja aproksimacija druge vrste ako i samo ako jeste verižna aproksimacija za dati realan broj.

Neka su za realan broj α određene redom verižne aproksimacije: $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-2}]$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ i $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$. Niz razlomaka oblika $\frac{p_{n-2}+j\dot{p}_{n-1}}{q_{n-2}+j\dot{q}_{n-1}}$ određuje međuverižni niz za tražene razlomke $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ i $\frac{p_n}{q_n}$

Svojstvo 2.2.5. Racionalan broj je najbolja aproksimacija prve vrste ako i samo ako jeste verižna aproksimacija ili razlomak iz međuverižnog niza za dati broj α.

Svojstvo 2.2.6. Neka su za realan broj α date dve uzastopne aproksimacije $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$ i $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Ako postoji prva međuverižna aproksimacija prve vrste $\frac{p'_n}{q'_n} = [a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, a'_n]$ sa međuverižnom cifrom $0 < a'_n < a_n$, tada su razlomci $\frac{p''_n}{q''_n} = [a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, a''_n]$ redom za $a'_n < a''_n < a_n$ sve bolje međuverižne aproksimacije prve vrste datog broja α

Glava 3

Algoritam i implementacija u programskom jeziku Python

3.1 Algoritam

Algoritam koji je iskorišćen za rešavanje ovog problema je urađen po ugledu na algoritam dat u [2]. Algoritmi slede iz definicija i svojstava koji su dati u prethodnoj glavi.

Funkcija `find_all_fractions` nalazi sve razlomke čiji su imenioci u zadatom opsegu. Ova funkcija vraća listu razlomaka i rečnik istih. Rečnik nam je potreban da bismo za svaki razlomak označili kom tipu pripada.

Algoritam 3.1: Nalaženje svih razlomaka u datom opsegu

```
def find_all_fractions(num, n, m):

    fractions = []
    fractions_map = {}

    for q in range(n, m + 1):
        p = int(mp.nint(mp.fmul(num, q)))
        fractions.append((p, q))
        fractions_map[(p, q)] = 0

    fractions.sort(key=lambda x:
        mp.fabs(mp.fsub(num, mp.fdiv(x[0], x[1]))))
    return fractions, fractions_map
```

Funkcija `verige` pronalazi sve verižne aproksimacije datog broja čiji imenilac nije veći od zadate vrednosti. One su određene nalaženjem verižnog zapisa razlomka.

Algoritam 3.2: Određivanje verižnog zapisa

```
def verige(num, denominator_limit):
    Z = num
    C = []
    P = []
    Q = []

    C.append(int(mp.floor(num)))
    Z = mp.fdiv(1, mp.frac(Z))
    C.append(int(mp.floor(Z)))

    P.append(C[0])
    P.append(C[0]*C[1] + 1)
    Q.append(1)
    Q.append(C[1])

    for k in range(2, 1000000):
        Z =  mp.fdiv(1, mp.frac(Z))
        C.append(int(mp.floor(Z)))

        if Q[-1] > denominator_limit:
            break

        P.append(C[k] * P[k-1] + P[k-2])
        Q.append(C[k] * Q[k-1] + Q[k-2])



    return C, P, Q
```

Funkcija `find_all_approx` nalazi sve verižne i međuverižne aproksimacije i rezultate beleži u rečniku razlomaka.

Algoritam 3.3: Određivanje verižnih i međuverižnih zapisa

```
def find_all_approx(num, N, M, fractions_map):

    C, P, Q = verige(num, M)


    for i in range(1, len(C)):
        m = C[i]
        a1 = P[i-1]
        b1 = Q[i-1]
        a0 = 1
        b0 = 0
        if i > 1:
            a0 = P[i-2]
            b0 = Q[i-2]

        d1 = difference(num, a1, b1)
        if b1 >= N and b1 <= M:
            fractions_map[(a1, b1)] = 2

        if b1 > M:
            break

        for j in range(1, m):
            a2 = a0 + j*a1
            b2 = b0 + j*b1

            d2 = difference(num, a2, b2)

            if d1 < d2:
                continue
            d1 = d2
            if b2 >= N and b2 <= M:
                fractions_map[(a2, b2)] = 1
            if b2 > M:
                break

    return
```

Funkcija `find_continued_fraction` se koristi da se pronađe verižni zapis razlomka.

Algoritam 3.4: Izračunavanje verižnog zapisa datog razlomka

```
def find_continued_fraction(fraction):

    (p, q) = fraction

    a0 = p // q
    r1 = p % q
    res = [a0]

    if r1 == 0:
        return res

    a1 = q // r1
    r2 = q % r1

    res.append(a1)

    while not r2 == 0:
        res.append(r1 // r2)
        r3 = r1 % r2
        r1, r2 = r2, r3

    return res
```

3.2 Bibilioteka za precizna izračunavanja

Za precizna izračunavanja se koristi `mpmath` biblioteka [3]. U pitanju je besplatna biblioteka otvorenog koda koju je razvio Fredrik Johansson i koja omogućava rad sa realnim i kompleksnim brojevima sa proizvoljnom preciznošću. Bibilioteka je samostalna i veoma efikasno izvršava računske operacije sa izabranom preciznošću, a omogućava i veliki broj veoma naprednih alata poput onih za rad sa matricama. Osim toga, u ovoj biblioteci su predefinisane i najbitnije matematičke konstante, pa su one dodate u program kao nešto što korisnik može da izabere.

Realni brojevi su ovoj biblioteci predstavljeni kao uređena četvorka (znak, mantisa, eksponent, broj bitova) gde je broj bitova broj bitova mantise. Broj je predstavljen na standardan način kao proizvod mantise i eksponenta dvojke.

Preciznost koja se koristi se podešava kao globalna promenljiva, mada je moguće definisati je i posebno za svaku konkretnu operaciju.

Glava 4

Rezultati programa

U ovoj glavi su prikazani rezultati programa za neke bitne realne matematičke konstante. Prikazani su samo redukovani razlomci. Rezultati su dati u tabelama, a verižni i međuverižni zapisi su označeni bojama. Razlomci su sortirani po minimalnosti apsolutne greške.

4.1 Rezultati programa za broj π

Razlomak	Verižni zapis	Odstupanje
22/7	[3, 7]**	-0.0012644892673496777036
157/50	[3, 7, 7]	0.00159265358979291653
135/43	[3, 7, 6]	0.0020577698688630796653
113/36	[3, 7, 5]	0.0027037647009042764523
91/29	[3, 7, 4]	0.0036616191070346637559
151/48	[3, 6, 1, 6]	-0.0042406797435403653651
129/41	[3, 6, 1, 5]	-0.0047488098248411603208
69/22	[3, 7, 3]	0.0052290172261568734768
107/34	[3, 6, 1, 4]	-0.0054661699396185703392
116/37	[3, 7, 2, 2]	0.0064575184546580288725
85/27	[3, 6, 1, 3]	-0.0065554945583552459709
148/47	[3, 6, 1, 2, 2]	-0.0073435166229729453846
47/15	[3, 7, 2]	0.0082593202564598122706
63/20	[3, 6, 1, 2]	-0.0084073464102067951842
104/33	[3, 6, 1, 1, 2]	-0.0099224979253582645811
119/38	[3, 7, 1, 1, 2]	0.010013706221371876381
145/46	[3, 6, 1, 1, 3]	-0.010581259453684932481
72/23	[3, 7, 1, 2]	0.011157870981097328666

41/13	[3, 6, 2]	-0.012253500256360627674
97/31	[3, 7, 1, 3]	0.012560395525277101569
101/32	[3, 6, 2, 2]	-0.014657346410206884002
60/19	[3, 6, 3]	-0.016302083252312193906
25/8	[3, 8]	0.016592653589793115998
79/25	[3, 6, 4]	-0.018407346410207026111
53/17	[3, 8, 2]	0.02394559476626367811
19/6	[3, 6]*	-0.025074013076873402639
28/9	[3, 9]	0.030481542478681955544
35/11	[3, 5, 2]	-0.040225528228388540697
31/10	[3, 10]	0.04159265358979302718
16/5	[3, 5]*	-0.058407346410207061638
13/4	[3, 4]*	-0.108407346410206884
3/1	[3]**	0.141592653589793116

Tabela 4.1: Aproksimacije broja π za $n = 1$, $m = 50$.

4.2 Rezultati programa za broj e

Razlomak	Verižni zapis	Odstupanje
193/71	[2, 1, 2, 1, 1, 4, 2]**	-0.000028030695884417866637
106/39	[2, 1, 2, 1, 1, 5]**	0.00033311051032702820862
87/32	[2, 1, 2, 1, 1, 4]**	-0.0004681715409549092044
231/85	[2, 1, 2, 1, 1, 5, 2]	0.00063476963551556409016
242/89	[2, 1, 2, 1, 1, 3, 1, 2]	-0.00081929513646050722286
125/46	[2, 1, 2, 1, 1, 6]	0.00089052411121892660617
155/57	[2, 1, 2, 1, 1, 3, 2]	-0.0010164171549900125058
223/82	[2, 1, 2, 1, 1, 3, 3]	-0.0012303666629063236826
144/53	[2, 1, 2, 1, 1, 7]	0.0013006963835735518842
163/60	[2, 1, 2, 1, 1, 8]	0.0016151617923783057051
68/25	[2, 1, 2, 1, 1, 3]*	-0.0017181715409551046037
182/67	[2, 1, 2, 1, 1, 9]	0.0018639180112840492143
201/74	[2, 1, 2, 1, 1, 10]	0.002065612242828862577
220/81	[2, 1, 2, 1, 1, 11]	0.002232445742995636806
185/68	[2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2]	-0.0023064068350726607548
239/88	[2, 1, 2, 1, 1, 12]	0.0023727375499542624482

117/43	[2, 1, 2, 1, 1, 2, 2]	-0.0026484040990943924498
166/61	[2, 1, 2, 1, 1, 2, 3]	-0.0030296469507908874164
215/79	[2, 1, 2, 1, 1, 2, 4]	-0.0032371588827269093258
226/83	[2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 4]	-0.0046097378060152571777
177/65	[2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 3]	-0.0047950946178780817775
128/47	[2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 2]	-0.0051224268601037792337
207/76	[2, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 2]	-0.0054023820672708389168
236/87	[2, 1, 2, 2, 12]	0.0056381502981257547447
217/80	[2, 1, 2, 2, 11]	0.0057818284590451796134
79/29	[2, 1, 2, 1, 1, 1, 2]	-0.0058561025754375606311
198/73	[2, 1, 2, 2, 10]	0.0059530613357572370603
179/66	[2, 1, 2, 2, 9]	0.006160616337833157985
188/69	[2, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2]	-0.0063558527003753084728
160/59	[2, 1, 2, 2, 8]	0.0064174216793841942774
109/40	[2, 1, 2, 1, 1, 1, 3]	-0.0067181715409549980222
141/52	[2, 1, 2, 2, 7]	0.0067433669205834156912
122/45	[2, 1, 2, 2, 6]	0.0071707173479338415234
139/51	[2, 1, 2, 1, 1, 1, 4]	-0.0072083676193863688297
169/62	[2, 1, 2, 1, 1, 1, 5]	-0.0075246231538579344544
103/38	[2, 1, 2, 2, 5]	0.007755512669571196227
84/31	[2, 1, 2, 2, 4]	0.0086044091042065673491
65/24	[2, 1, 2, 2, 3]	0.0099484951257116094325
111/41	[2, 1, 2, 2, 2, 2]	0.010964755288313199344
101/37	[2, 1, 2, 1, 2, 3]	-0.011447901270684734953
71/26	[2, 1, 2, 1, 2, 2]	-0.012487402310185746757
73/27	[2, 1, 2, 2, 1, 2]	0.014578124755341370644
63/23	[2, 1, 2, 1, 5]	-0.020848606323563778631

Tabela 4.2: Aproksimacije broja e za $n = 20$, $m = 90$.

4.3 Rezultati programa za Hinčinovu konstantu

Aleksandr Yakovlevich Khinchin je dokazao da za skoro svaki realan broj x verižne cifre a_i imaju konačnu geometrijsku sredinu koja je nezavisna od broja x. To jest, za

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \tag{4.1}$$

skoro uvek važi:

$$\lim_{n \to \infty} (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} = K_0 \tag{4.2}$$

gde je K_0 Hičinova konstanta.

$$K_0 = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)^{\log_2 r} \approx 2.6854520010\dots \tag{4.3}$$

Gore navedeni limes važi za skoro sve realne brojeve, to jest, ukoliko izaberemo slučajan realan broj, verovatnoća da njegov verižni zapis nema ovu osobinu je jednaka nuli (što ne znači da je nemoguća, na primer, broj e je izuzetak). Zanimljivo je da se ne zna da li je sama Hičinova konstanta takav izuzetak. Prvih 95 cifara u verižnom zapisu ove konstante ima geometrijsku sredinu koja je približno 2.319786.

Razlomak	Verižni zapis	Odstupanje
333/124	[2, 1, 2, 5, 1, 1, 3]**	-0.000031869902435754937642
239/89	[2, 1, 2, 5, 1, 1, 2]**	0.000058742638339825958838
427/159	[2, 1, 2, 5, 1, 1, 4]	-0.000082590129662385436404
521/194	[2, 1, 2, 5, 1, 1, 5]	-0.00011500924397189749016
384/143	[2, 1, 2, 5, 1, 1, 1, 2]	0.00013731575062081446958
529/197	[2, 1, 2, 5, 1, 1, 1, 3]	0.0001728132480471877841
94/35	[2, 1, 2, 5, 2]**	-0.00026228464897926073718
145/54	[2, 1, 2, 5, 1, 2]	0.00026681588012111845387
486/181	[2, 1, 2, 5, 1, 2, 3]	0.00036912813712941527911
513/191	[2, 1, 2, 5, 2, 5]	-0.00041187328024339109334
341/127	[2, 1, 2, 5, 1, 2, 2]	0.00041263098656596497449
419/156	[2, 1, 2, 5, 2, 4]	-0.00044543483212944323668
537/200	[2, 1, 2, 5, 1, 2, 1, 2]	0.00045200106530618455736
325/121	[2, 1, 2, 5, 2, 3]	-0.00049841215783441583653
196/73	[2, 1, 2, 5, 1, 3]	0.00052049421599109635395
231/86	[2, 1, 2, 5, 2, 2]	-0.00059451056260062529191
443/165	[2, 1, 2, 5, 1, 3, 2]	0.00060351621682119827028
247/92	[2, 1, 2, 5, 1, 4]	0.00066939236965390946921
368/137	[2, 1, 2, 5, 2, 1, 2]	-0.00067938579600745896414
505/188	[2, 1, 2, 5, 2, 1, 3]	-0.00071821170065122785786

298/111	[2, 1, 2, 5, 1, 5]	0.00076731638062144114087
137/51	[2, 1, 2, 5, 3]	-0.0008225087386151130886
349/130	[2, 1, 2, 5, 1, 6]	0.00083661644992183425984
400/149	[2, 1, 2, 5, 1, 7]	0.00088824267604437068258
451/168	[2, 1, 2, 5, 1, 8]	0.00092819154149692550959
454/169	[2, 1, 2, 5, 3, 3]	-0.00093853147907241307735
502/187	[2, 1, 2, 5, 1, 9]	0.00096002245568049815461
317/118	[2, 1, 2, 5, 3, 2]	-0.00098867690079540437864
497/185	[2, 1, 2, 5, 3, 1, 2]	-0.0010344854211803422572
180/67	[2, 1, 2, 5, 4]	-0.001115163113798445238
403/150	[2, 1, 2, 5, 4, 2]	-0.0012146656013602985524
51/19	[2, 1, 2, 6]**	0.0012414747495168576563
223/83	[2, 1, 2, 5, 5]	-0.0012949868865010927266
489/182	[2, 1, 2, 5, 5, 2]	-0.0013611857478803557342
266/99	[2, 1, 2, 5, 6]	-0.0014166858033806128958
309/115	[2, 1, 2, 5, 7]	-0.0015045206738242278277
518/193	[2, 1, 2, 6, 10]	0.0015141772311091372671
467/174	[2, 1, 2, 6, 9]	0.0015439550882945241028
352/131	[2, 1, 2, 5, 8]	-0.0015708996980525746778
416/155	[2, 1, 2, 6, 8]	0.001581033323370562016
395/147	[2, 1, 2, 5, 9]	-0.0016228288666666479401
365/136	[2, 1, 2, 6, 7]	0.0016284716535417409489
438/163	[2, 1, 2, 5, 10]	-0.0016645633518717062316
314/117	[2, 1, 2, 6, 6]	0.0016913173046226859242
481/179	[2, 1, 2, 5, 11]	-0.0016988369235204636709
524/195	[2, 1, 2, 5, 12]	-0.0017274861141807207332
263/98	[2, 1, 2, 6, 5]	0.0017785316775511539333
475/177	[2, 1, 2, 6, 4, 2]	0.0018361818562668830168
212/79	[2, 1, 2, 6, 4]	0.0019076972678377934756
373/139	[2, 1, 2, 6, 3, 2]	0.0019987636552341037088
534/199	[2, 1, 2, 6, 3, 3]	0.0020349156381707089736
43/16	[2, 1, 2, 5]**	-0.0020479989346937621519
161/60	[2, 1, 2, 6, 3]	0.0021186677319731117564
432/161	[2, 1, 2, 6, 2, 1, 2]	0.0022221874007097852655
271/101	[2, 1, 2, 6, 2, 2]	0.0022836842336229068451
381/142	[2, 1, 2, 6, 2, 3]	0.0023534095160102630473
508/189	[2, 1, 2, 4, 1, 11]	-0.0023786867653816656798
491/183	[2, 1, 2, 6, 2, 4]	0.002391891775688659294

465/173	[2, 1, 2, 4, 1, 10]	-0.0024092706109941630643
422/157	[2, 1, 2, 4, 1, 9]	-0.0024460881066681317009
379/141	[2, 1, 2, 4, 1, 8]	-0.0024912613460412735833
110/41	[2, 1, 2, 6, 2]	0.0025251717970133924496
336/125	[2, 1, 2, 4, 1, 7]	-0.0025479989346939291295
293/109	[2, 1, 2, 4, 1, 6]	-0.0026213934301066998955
499/186	[2, 1, 2, 6, 1, 1, 4]	0.0026563021405752174076
389/145	[2, 1, 2, 6, 1, 1, 3]	0.0026933803756512553207
250/93	[2, 1, 2, 4, 1, 5]	-0.0027200419454462831936
279/104	[2, 1, 2, 6, 1, 1, 2]	0.0027596933729987505046
457/170	[2, 1, 2, 4, 1, 4, 2]	-0.0027832930523410404078
448/167	[2, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 2]	0.0028172705263842523493
207/77	[2, 1, 2, 4, 1, 4]	-0.0028596872463819700272
169/63	[2, 1, 2, 6, 1, 2]	0.0029123185256239025875
371/138	[2, 1, 2, 4, 1, 3, 2]	-0.0029537960361429860257
397/148	[2, 1, 2, 6, 1, 2, 2]	0.0030195686328737814108
164/61	[2, 1, 2, 4, 1, 3]	-0.0030725890986280646189
228/85	[2, 1, 2, 6, 1, 3]	0.0030990598888358533713
287/107	[2, 1, 2, 6, 1, 4]	0.0032090104111004436049
285/106	[2, 1, 2, 4, 1, 2, 2]	-0.0032272442177125881813
346/129	[2, 1, 2, 6, 1, 5]	0.0032814584296474436087
406/151	[2, 1, 2, 4, 1, 2, 3]	-0.0032897207889983626217
121/45	[2, 1, 2, 4, 1, 2]	-0.0034368878235828681511
320/119	[2, 1, 2, 4, 1, 1, 1, 2]	-0.0036236291867948189349
59/22	[2, 1, 2, 7]	0.0036338192471245811532
199/74	[2, 1, 2, 4, 1, 1, 2]	-0.0037371881238827953098
277/103	[2, 1, 2, 4, 1, 1, 3]	-0.0038683872842084632282
303/113	[2, 1, 2, 7, 5]	0.0040360718617664659291
244/91	[2, 1, 2, 7, 4]	0.0041333197466251192509
78/29	[2, 1, 2, 4, 2]	-0.0042031713484869115405
185/69	[2, 1, 2, 7, 3]	0.0042925807754512490533
269/100	[2, 1, 2, 4, 2, 3]	-0.0045479989346937088612
126/47	[2, 1, 2, 7, 2]	0.0046009372355189093184
191/71	[2, 1, 2, 4, 2, 2]	-0.0046888440051162660893
193/72	[2, 1, 2, 7, 1, 2]	0.0048964455097508796655
113/42	[2, 1, 2, 4, 3]	-0.0050241894108844498135
260/97	[2, 1, 2, 7, 1, 3]	0.0050396299312858161557
67/25	[2, 1, 2, 8]	0.0054520010653060779759

148/55	[2, 1, 2, 4, 4]	-0.0054570898437846793172
183/68	[2, 1, 2, 4, 5]	-0.0057244695229292652527
218/81	[2, 1, 2, 4, 6]	-0.0059060236260517484652
209/78	[2, 1, 2, 8, 3]	0.0059648215781269442459
142/53	[2, 1, 2, 8, 2]	0.0062067180464384641425
35/13	[2, 1, 2, 4]*	-0.0068556912423862748085
75/28	[2, 1, 2, 9]	0.0068805724938778567434
158/59	[2, 1, 2, 9, 2]	0.0074858993703910137185
83/31	[2, 1, 2, 10]	0.0080326462265967180088
132/49	[2, 1, 2, 3, 1, 3]	-0.0084255499551018075977
91/34	[2, 1, 2, 11]	0.0089814128300123030613
97/36	[2, 1, 2, 3, 1, 2]	-0.0089924433791384039694
99/37	[2, 1, 2, 12]	0.0097763253896303581314
62/23	[2, 1, 2, 3, 2]	-0.010200172847737221105
107/40	[2, 1, 2, 13]	0.010452001065306415484
115/43	[2, 1, 2, 14]	0.011033396414143581 41
89/33	[2, 1, 2, 3, 3]	-0.011517695904390556905
27/10	[2, 1, 2, 3]*	-0.014547998934693939788
73/27	[2, 1, 2, 2, 1, 2]	-0.018251702638397482303
8/3	[2, 1, 2]**	0.018785334398639719211
46/17	[2, 1, 2, 2, 2]	-0.020430351875870389478
19/7	[2, 1, 2, 2]	-0.028833713220408174749
30/11	[2, 1, 2, 1, 2]	-0.0418207262074208 3302
21/8	[2, 1, 1, 1, 2]	0.060452001065306237848
11/4	[2, 1, 3]	-0.064547998934693762152
13/5	[2, 1, 1, 2]	0.085452001065306149 03
5/2	[2, 2]*	0.18545200106530623785
3/1	[3]**	-0.31454799893469376215

Tabela 4.3: Aproksimacije Hinčinove konstantne za $n = 1$, $m = 200$.

Glava 5

Zaključak

Opisani algoritam nalazi verižne zapise datih realnih brojeva i na osnovu njih određuje razlomke koji predstavljaju najbolje aproksimacije druge vrste. Potom, na osnovu njih određujemo i one razlomke koji su najbolje aproksimacije prve vrste (ali ne ujedno i druge).

Ovakav algoritam je jako efikasan. Neki realni brojevi kao što je ϕ ili e imaju verižni zapis koji prati određeni šablon. Ovim algoritmom za takve brojeve možemo da pronađemo najbolje racionalne aproksimacije čak i bez biblioteka za precizno izračunavanje, i u takvim situacijama ovaj algoritam ima još veći značaj.

Literatura

[1] A. Ya. Khinchin. *Continued fractions.* Dover Publications, 1997.

[2] Branko Malešević. Racionalne aproksimacije realnih brojeva i neke primene. *Nastava matematike*, XLIII(3), 1998.

[3] Fredrik Johansson et al. *mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 0.18)*, December 2013. `http://mpmath.org/`.