Univerzitet u Beogradu
Elektrotehnički fakultet

Odabrana poglavlja iz numeričke analize

Miksovano trigonometrijsko polinomske nejednakosti

Jovana Savić 2020/3423

mentor
prof. dr Branko Malešević

Glava 1

Projektni zadatak

Za pogodno izabrane miksovano trigonometrijske funkcije $f : (0, c) \to R$ dokazati miksovano polinomijalno trigonometrijsku nejednakost $f(x) > 0$ nad $(0, c)$ određujući pozitivnu nanižnu polinomsku aproksimaciju $P(x) > 0$ nad $(0, c)$.

Polinom $P(x)$ izabrati korišćenjem:

- Metode direktnog poređenja
- Metode višestrukih uglova

Glava 2

Miksovano trigonometrijsko polinomske funkcije

U ovom odeljku je dat pregled teorije koja se može naći u radu [1].

Definicija 2.0.1. Pod *MTP - miksovano trigonometrijsko polinomskom funkcijom* podrazumevamo funkciju

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x \tag{2.1}$$

za $\alpha_i \in R/\{0\}$ i $p_i, q_i, r_i \in N_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ za vrednosti argumenata $x \in (0, c)$ pri čemu standardno uzimamo da je $c = \frac{\pi}{2}$.

U cilju navišnih i nanižnih polinomskih aproksimacija ovakvog tipa funkcija koristićemo Tejlorove razvoje

$$T_{2n}^{\cos,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{2.2}$$

i

$$T_{2n+1}^{\sin,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{2.3}$$

za $n \in N_0$ i $x \in (0, c)$.

Važe nejednakosti:

$$\sum_{i=0}^{2s+1} \frac{(-1)^i}{(2i)!} t^{2i} < \cos t < \sum_{i=0}^{2s} \frac{(-1)^i}{(2i)!} t^{2i} \tag{2.4}$$

i

$$\sum_{i=0}^{2r+1} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} t^{2i+1} < \sin t < \sum_{i=0}^{2r} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} t^{2i+1} \tag{2.5}$$

za $r, s \in N$, pri tom domen za t određujemo u razmatranju koje navodimo.

Za Tejlorov polinom kosinusne funkcije $T_m^{\cos,0}(t) = \sum_{i=0}^{m/2} \frac{(-1)^i}{(2i)!} t^{2i}$ parnog stepena m važi:

$$m = 4k \Rightarrow \left(\forall t \in \left[0, \sqrt{(m+3)(m+4)}\right]\right) \overline{T}_m^{\cos,0}(t) \geq \overline{T}_{m+4}^{\cos,0}(t) \geq \cos t,$$
$$m = 4k+2 \Rightarrow \left(\forall t \in \left[0, \sqrt{(m+3)(m+4)}\right]\right) \underline{T}_m^{\cos,0}(t) \leq \underline{T}_{m+4}^{\cos,0}(t) \leq \cos t.$$

Za Tejlorov polinom sinusne funkcije $T_m^{\sin,0}(t) = \sum_{i=0}^{(m-1)/2} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} t^{2i+1}$ neparnog stepena m važi:

$$m = 4k+1 \Rightarrow \left(\forall t \in \left[0, \sqrt{(m+3)(m+4)}\right]\right) \overline{T}_m^{\sin,0}(t) \geq \overline{T}_{m+4}^{\sin,0}(t) \geq \sin t,$$
$$m = 4k+3 \Rightarrow \left(\forall t \in \left[0, \sqrt{(m+3)(m+4)}\right]\right) \underline{T}_m^{\sin,0}(t) \leq \underline{T}_{m+4}^{\sin,0}(t) \leq \sin t.$$

Teorema 2.0.1. Za ma koju MTP funkciju

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x$$

postoji polinom $P(x)$ kao nanižna polinomska aproksimacija takva da važi

$$f(x) > P(x) \tag{2.6}$$

za vrednosti argumenta $x \in (0, c)$.

Važi implikacija koja dokazuje pozitivnost MTP funkcije:

$$(\forall x \in (0,c))\, P(x) > 0 \rightarrow (\forall x \in (0,c))\, f(x) > 0. \tag{2.7}$$

2.1 Postupci određivanja polinoma $P(x)$

2.1.1 Metoda direktnog poređenja

Za neke MTP funkcije $f(x)$ nanižnu aproksimaciju polinom $P(x)$ nad $(0, c)$ moguće je odrediti direktnim poređenjem kosinusnih i sinusnih funkcija u izrazima $\cos^{q_i} x \sin^{r_i} x$ koristeći 2.4 i 2.5.

2.1.2 Metoda višestrukih uglova

Bazira se na činjenici da za MTP funkciju svaki izraz $\cos^{q_i} x \sin^{r_i} x$ se može zameniti na sledećim izrazima:

- Za parno $q_i = n$ i parno $r_i = m$ smena je

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k+j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-1} \cos\left((n+m-2k)x\right)}{2^{n+m-1}} + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} \frac{(-1)^{m+\frac{n}{2}+j} \binom{n}{j} \binom{m}{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-j}}{2^{n+m}} \tag{2.8}$$

- Za neparno $q_i = n$ i parno $r_i = m$ smena je

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k+j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-1} \cos\left((n+m-2k)x\right)}{2^{n+m-1}} \tag{2.9}$$

- Za parno $q_i = n$ i neparno $r_i = m$ smena je

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k-\frac{1}{2}} \binom{n}{j} \binom{m}{k-1} \sin\left((n+m-2k)x\right)}{2^{n+m-1}} \tag{2.10}$$

- Za neparno $q_i = n$ i neparno $r_i = m$ smena je

$$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-1} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}+k-\frac{1}{2}} \binom{n}{j} \binom{m}{k-1} \sin\left((n+m-2k)x\right)}{2^{n+m-1}} \tag{2.11}$$

Ovim smenama se dobija zapis MTP funkcije preko višestrukih uglova u obliku

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \left(\cos^{q_i} x \sin^{r_i} x\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{p_i} \left(\sum_{k=0}^{m_i} \theta_k \mathrm{trig}_k^{(q_i,r_i)} \left((q_i - r_i - 2k)x\right) \right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

pri čemu

$$\operatorname{trig}_k^{(q_i,r_i)} = \begin{cases} \cos & r_i \text{ parno} \\ \sin & r_i \text{ neparno} \end{cases}$$

i $m_i = m_i(q_i, r_i) = \left\lceil \frac{q_i+r_i}{2} \right\rceil - 1$, dok se koeficijenti θ_k određuju na osnovu datih smena. Za $\operatorname{trig}_k^{(q_i,r_i)}$-izraze moguće je koristiti nejednakosti 2.4 i 2.5 u cilju određivanja nanižne polinomske aproksimacije $P(x)$ na $(0, c)$.

Glava 3

Implementacija u programskom jeziku Python

Implementacija je urađena u programskom jeziku Python uz pomoć `sympy` biblioteke za simbolički račun.

Ispod dajemo implementaciju funkcije koja vraća Tejlorov razvoj sinsune i kosinusne funkcije po konvenciji koja je definisana u prethodnoj glavi.

```python
def Taylor_cos(n, k=1):
    expr = cos(x)
    expr = series(expr, n=n+1).removeO()
    expr = expr.subs(x, k*x)
    return expr

def Taylor_sin(n, k=1):
    expr = sin(x)
    expr = series(expr, n=n+1).removeO()
    expr = expr.subs(x, k*x)
    return expr
```

Algoritam 3.1: Tejlorov razvoj

Funkcija `get_polynomial_approx` vraća polinom koji je odgovarajuća aproksimacija funkcije. Ideja je da se svaka kosinusna i sinusna funkcija predstavi posebnom promenljivom. Ove promenljive su date u list `sub_variables`. Osim toga imamo i listu njihovog tipa koja govori o tome da li je u pitanju sinusna ili kosinusna funkcija. Pretposlednji argument su vrednosti k za svaku od ovih funkcija respektivno. Poslednji argument su koeficijenti uz x u sinusnim i kosinusnim funkcijama.

```python
def get_polynomial_approx(f, sub_variables, fun_type, k, args):
    substitutions = {}
    for (i,var) in enumerate(sub_variables):
        if fun_type[i] == "sin":
            substitutions[var] = Taylor_sin(k[i], args[i])
        else:
            substitutions[var] = Taylor_cos(k[i], args[i])

    p = f.subs(substitutions)
    return p
```

Algoritam 3.2: Nalaženje nanižne polinomske aproksimacije

Glava 4

Rešenje

4.1 Metoda direktnog poređenja

Primer 4.1.1. Dokazaćemo pozitivnost funkcije

$$f(x) = 0.2x^2 \sin x + x \cos x - 0.1x^3 \tag{4.1}$$

za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Prvi član je pozitivan na ovom intervalu pa ćemo ga aproksimirati njegovom donjom granicom. Drugi član je na ovom intervalu takođe pozitivan, pa i za njegovu aproksimaciju uzimamo njegovu donju granicu. Dobijamo:

$$P_{k_1,k_2}(x) = 0.2x^2 T_{4k_1+3}^{\sin,0}(x) + xT_{4k+2}^{\cos,0}(x) - 0.1x^3 \tag{4.2}$$

koji razmatramo na segmentu $(0, \frac{\pi}{2})$ i za $k_1, k_2 \in N_0$. Pritom je

$$(\forall k_1, k_2 \in N_0) f(x) > P_{k_1,k_2}(x) \tag{4.3}$$

Da bismo dokazali pozitivnost funkcije $f(x)$ dovoljno je pronaći jedan par (k_1, k_2) za koji će na segmentu $(0, \frac{79}{50})$ čiji su rubovi racionalni, a sadrži segment $(0, \frac{\pi}{2})$, važiti $P_{k_1,k_2}(x) > 0$.

Za dokazivanje pozitivnosti polinoma koristimo Šturmovu teoremu. Potrebno je da polinom na datom segmentu bude pozitivan i da nema nule.

Dalje navodimo rezultate koje smo dobili. Dobri parovi su označeni plavom bojom.

1. $k_1 = 0$, $k_2 = 0$

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{x^3}{10} + \frac{x^2\left(-\frac{x^3}{6} + x\right)}{5} + x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \\ &= -\frac{x^5}{30} - \frac{2x^3}{5} + x \end{aligned}$$

2. $k_1 = 0, k_2 = 1$

$$
\begin{aligned}
P(x) &= -\frac{x^3}{10} + \frac{x^2\left(-\frac{x^3}{6} + x\right)}{5} + x\left(-\frac{x^6}{720} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1\right) \\
&= -\frac{x^7}{720} + \frac{x^5}{120} - \frac{2x^3}{5} + x
\end{aligned}
$$

3. $k_1 = 1,\ k_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
P(x) &= -\frac{x^3}{10} + \frac{x^2\left(-\frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x\right)}{5} + x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \\
&= -\frac{x^9}{25200} + \frac{x^7}{600} - \frac{x^5}{30} - \frac{2x^3}{5} + x
\end{aligned}
$$

4. $k_1 = 1, k_2 = 1$

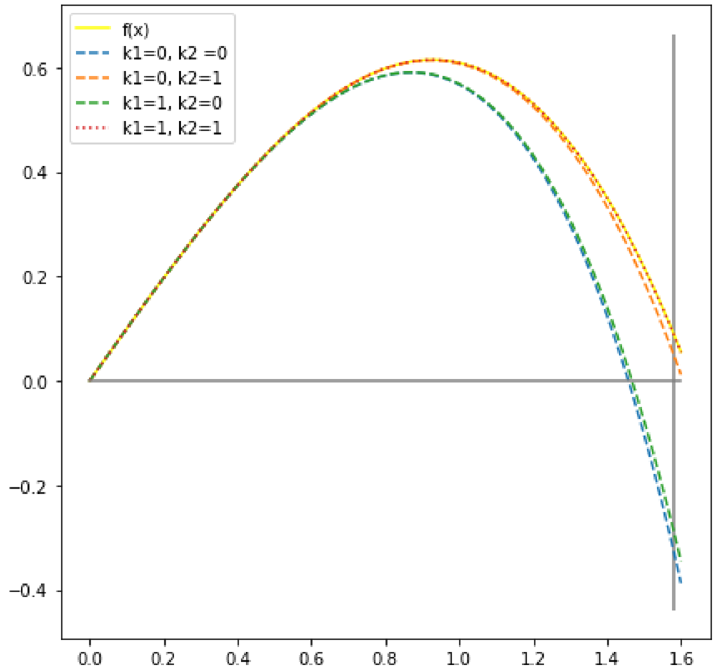
$$
\begin{aligned}
P(x) &= -\frac{x^3}{10} + \frac{x^2\left(-\frac{x^7}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x\right)}{5} + x\left(-\frac{x^6}{720} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1\right) \\
&= -\frac{x^9}{25200} + \frac{x^7}{3600} + \frac{x^5}{120} - \frac{2x^3}{5} + x
\end{aligned}
$$

```
f = Rational(2, 10)*x**2*y + x*z-Rational(1, 10)*x**3

for k1 in range(0, 2):
    for k2 in range(0, 2):
        p = get_polynomial_approx(f, [y, z],
                  ["sin", "cos"], [4*k1+3, 4*k2+2], [1, 1])
        print((p))
        print("--")
        print((p.expand()))
        print("--------")
        n = number_of_zeros(p, (0, 79/50))
        if n == 0 and Poly(p).eval(79/100) > 0:
            print("Found good pair: ", k1, k2)
```

Algoritam 4.1: Program kojim je rešen primer 4.1.1

Na slici 4.1 je prikazana funkcija i njene aproksimacije.



Slika 4.1: Funkcija i njeni nanižni polinomi iz primera 4.1.1

4.2 Metoda višestrukih uglova

Primer 4.2.1. U ovom primeru ćemo metodom višestrukih uglova dokazati da je funkcija

$$f(x) = 3x\cos x\sin^2 x + \sin x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{2}x^3 \tag{4.4}$$

pozitivna na segmentu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Koristmo sledeću transformaciju:

$$\cos x\sin^2 x = -\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{1}{4}\cos x.$$

Na osnovu ovoga nalazimo:

$$f(x) = -\frac{3}{4}x\cos(3x) + \frac{3}{4}x\cos x + \sin x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{2}x^3 \tag{4.5}$$

Koristimo poređenja:

$$\begin{aligned} \cos(3x) &< T^{\cos,0}_{4k_1+0}(3x), \\ \cos x &> T^{\cos,0}_{4k_2+2}(x), \\ \sin x &> T^{\sin,0}_{4k_3+3}(x) \end{aligned}$$

nad $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ za $k_1, k_2, k_3 \in N_0$. Na osnovu ovoga formiramo polinom

$$P_{k_1,k_2,k_3} = -\frac{3}{4}xT^{\cos,0}_{4k_1+0}(3x) + \frac{3}{4}xT^{\cos,0}_{4k_2+2}(x) + T^{\sin,0}_{4k_3+3}(x) - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{2}x^3 \quad (4.6)$$

Odgovarajuće kombinacije (k_1, k_2, k_3) nalazimo tako što nalazimo one vrednosti za koje je polinom pozitivan i nema nule na datom segmentu.

Dalje su navedeni rezultati. Odgovarajuće kombinacije su prikazane plavom bojom.

1. $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{4} + \frac{x}{4} \\ &= -\frac{x^5}{10} - \frac{x^3}{24} + x \end{aligned}$$

2. $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 1$

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{x^7}{5040} - \frac{11x^5}{120} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{4} + \frac{x}{4} \\ &= -\frac{x^7}{5040} - \frac{11x^5}{120} - \frac{x^3}{24} + x \end{aligned}$$

3. $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 0$

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x\left(-\frac{x^6}{720} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1\right)}{4} + \frac{x}{4} \\ &= -\frac{x^7}{960} - \frac{11x^5}{160} - \frac{x^3}{24} + x \end{aligned}$$

4. $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 1$

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{x^7}{5040} - \frac{11x^5}{120} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x\left(-\frac{x^6}{720} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1\right)}{4} + \frac{x}{4} \\ &= -\frac{5x^7}{4032} - \frac{29x^5}{480} - \frac{x^3}{24} + x \end{aligned}$$

5. $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 0$

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{4} - \frac{3x\left(\frac{27x^4}{8} - \frac{9x^2}{2} + 1\right)}{4} + x \\ &= -\frac{421x^5}{160} + \frac{10x^3}{3} + x \end{aligned}$$

6. $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 1$

$$P(x) = -\frac{x^7}{5040} - \frac{11x^5}{120} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}{4} - \frac{3x\left(\frac{27x^4}{8} - \frac{9x^2}{2} + 1\right)}{4} + x$$
$$= -\frac{x^7}{5040} - \frac{1259x^5}{480} + \frac{10x^3}{3} + x$$

7. $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 0$

$$P(x) = -\frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x\left(\frac{27x^4}{8} - \frac{9x^2}{2} + 1\right)}{4} + \frac{3x\left(-\frac{x^6}{720} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1\right)}{4} + x$$
$$= -\frac{x^7}{960} - \frac{13x^5}{5} + \frac{10x^3}{3} + x$$

8. $k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 1$

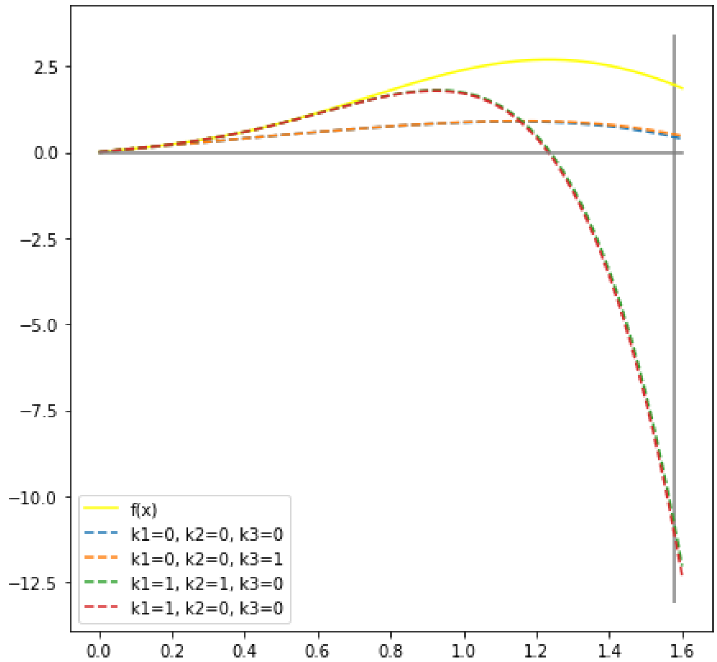
$$P(x) = -\frac{x^7}{5040} - \frac{11x^5}{120} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x\left(\frac{27x^4}{8} - \frac{9x^2}{2} + 1\right)}{4} + \frac{3x\left(-\frac{x^6}{720} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + 1\right)}{4} + x$$
$$= -\frac{5x^7}{4032} - \frac{311x^5}{120} + \frac{10x^3}{3} + x$$

```
f = -Rational(3, 4)*x*a + Rational(3, 4)*x*b+ c
- Rational(1, 10)*x**5 + Rational(1, 2)*x**3


for k1 in range(0, 2):
    for k2 in range(0, 2):
        for k3 in range(0, 2):
            p = get_polynomial_approx(f, [a, b, c],
                ["cos", "cos", "sin"], [4*k1, 4*k2+2, 4*k3+3],
                [3, 1, 1])
            print(latex(p))
            print("—")
            print(latex(p.expand()))
            print("———")
            n = number_of_zeros(p, (0, 79/50))
            if n == 0 and Poly(p).eval(79/100) > 0:
                print("Found good combination: ", k1, k2, k3)
```

Algoritam 4.2: Program kojim je rešen primer 4.2.1

Na slici 4.2 je prikazana funkcija i dve dobre aproksimacije i dve aproksimacije na osnovu kojih ne možemo da dokažemo pozitivnost funkcije.



Slika 4.2: Funkcija i njeni nanižni polinomi iz primera 4.2.1

Literatura

[1] Branko J. Malešević and Milica Makragić. A method for proving some inequalities on mixed trigonometric polynomial functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, (3):849–876, 2016.