Univerzitet u Beogradu
Elektrotehnički fakultet

Odabrana poglavlja iz numeričke analize

Šturmova teorema

Jovana Savić 2020/3423

mentor
prof. dr Branko Malešević

Glava 1

Projektni zadatak

Za zadati polinom $P(x)$ sa realnim koeficijentima nad segmentom $[a, b]$ odrediti:

1. Euklidovim algoritmom najveći zajednički delilac $Q(x) = \mathrm{GCD}(P(x), P'(x))$.

2. Za polinom $P(x) := P(x)/Q(x)$ upotrebom Šturmove teoreme odrediti broj nula na $[a, b]$.

3. Neka je k broj decimala na koje se zaokružuje neki realan broj. Za koeficijente polinoma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

sa realnim koeficijentima

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$$

odrediti niz naniže zaokruženih koeficijenata

$$\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$$

određenih po sledećim pravilima:

- Ako je $a_k = a_0 a_1 \ldots a_k a_{k+1} \cdots > 0$ tada $\alpha_k = a_0 a_1 \ldots a_k$
- Ako je $a_k = a_0 a_1 \ldots a_k a_{k+1} \cdots < 0$ tada $\alpha_k = a_0 a_1 \ldots a_k'$ gde je a_k' naviše zaokružena cifra (uz eventualno posledično zaokruživanje i prethodnih cifara za jedan broj naviše).

Formirati polinom

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Odrediti upotrebom Šturmove teoreme broj nula novoformiranog polinoma na segmentu $[a, b]$.

Glava 2

Šturmova teorema

2.1 Euklidov algoritam

Posmatrajmo polinome $a(x)$ i $b(x)$, pri čemu je $deg(a(x)) \geq deg(b(x))$. Potrebno je odrediti polinom koji je najveći zajednički delilac ovih polinoma $\mathrm{GCD}(a(x), b(x))$.

Polinom $a(x)$ možemo da napišemo kao:

$$a(x) = q_0(x)b(x) + r_0(x) \tag{2.1}$$

Odavde se jasno vidi da ako neki polinom deli $a(x)$ i $b(x)$ tada i ostatak $r_0(x)$ mora da bude deljiv istim tim polinomom. Izuzetak je situacija u kojoj je ovaj ostatak jednak nuli. U tom slučaju, najveći zajednički delilac je sam polinom $b(x)$.

Prema tome:

$$\mathrm{GCD}(a(x), b(x)) = \mathrm{GCD}(b(x), r_0(x)) \tag{2.2}$$

Na osnovu ovoga možemo da definišemo rekurzivni algoritam:

```
def gcd(f, g):

    if g == 0:
        return f

    q, r = div(f, g, domain='QQ')
    return my_gcd(g, b)
```

Algoritam 2.1: Euklidov algoritam

Predstavljeni algoritam je veoma jednostavan. U svakom koraku se dobija polinom čiji je stepen manji od originalnog. Prema tome, maksimalan broj koraka koji je potreban je jednak redu polinoma višeg stepena.

Iako je algoritam na prvi pogled veoma jednostavan, poređenje ostatka sa nulom je jako problematično jer je potrebna aposlutna tačnost da bi se ta nula dobila. Ako posmatramo polinome čiji su koeficijenti racionalni brojevi, tada su i delilac i ostatak takođe polinomi sa racionalnim koeficijentima. Ovo na prvi pogled ostavlja mogućnost da radimo sa apsolutnom tačnošću ukoliko brojeve predstavljamo kao razlomke. Ispostavlja se da je ovo jako nezgodno izvesti u praksi u opštem slučaju, jer i za veoma male stepene polinoma nailazimo jako brzo na razlomke koji su jako veliki. Ovo je prikazano u primeru 2.1.1.

Primer 2.1.1. Za polinome

$$a(x) = x^8 + x^6 - 3x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 2x - 5$$
$$b(x) = 3x^6 + 5x^4 - 4x^2 - 9x + 21$$

se primenom Euklidovog algoritma dobijaju redom ostaci:

$$-\frac{5}{9}x^4+\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}, \quad -\frac{117}{25}x^2-9x+\frac{441}{25}, \quad \frac{233150}{19773}x-\frac{102500}{6591}, \quad -\frac{1288744821}{543589225}$$

Za prevazilaženje ovog problema postoje modifikovani algoritmi koji se baziraju na pseudo-ostacima, kao i modularni GCD algoritam.

2.2 Šturmova teorema

Teorema 2.2.1 (Šturmova teorema)**.** Neka je $P(x)$ polinom sa realnim koeficijentima koji razmatramo nad segmentom $[a, b]$ realne prave, koji na tom segmentu može imati samo jednostruke nule. Formirajmo niz polinoma $P_0, P_1, \ldots, P_r$ na sledeći način:

1. $P_0(x) = P(x)$
2. $P_1(x) = P'(x)$
3. $P_{i+1}(x) = -\mathrm{REM}(P_i(x), P_{i-1}(x))$ za $i = 1, \ldots, r-1$.

Neka je $\xi \in [a, b]$ i neka je sa $V(\xi)$ označen broj promena znakova u nizu $P_0(\xi), P_1(\xi), \ldots, P_r(\xi)$ ignorišući eventualno javljanje nule u tom nizu. Tada razlika

$$N = V(a) - V(b)$$

određuje broj nula polinoma $P(x)$ na segmentu $[a, b]$.

Primer 2.2.1. Za dati polinom $P_0(x)$ i njemu odgovarajući izvod $P_1(x) = P'(x)$ ćemo odrediti broj nula na segmentu $[-10, 10]$.

$$P_0(x) = x^4 + x^3 - x - 1, \quad P_1(x) = P'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$$

Dobijamo redom ostatke:

$$P_2(x) = \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{15}{16}, \quad P_3(x) = -32x - 64, \quad P_4(x) = -\frac{3}{16}$$

Vrednosti ovih polinoma u tačkama koje definišu segment su:

$$\begin{aligned} x = -10 \quad & \left[9009,\ -3701,\ \frac{195}{16},\ 256,\ -\frac{3}{16}\right] \\ x = 10 \quad & \left[10989,\ 4299,\ \frac{435}{16},\ -384,\ -\frac{3}{16}\right] \end{aligned}$$

Odavde je $V(a) = 3$ i $V(b) = 1$. Zaključujemo da je broj nula ovog polinoma na datom segmentu 2. Dati polinom možemo da faktorišemo kao $(x^2-1)(x^2+x+1)$ i odavde vidimo da je dobijeni rezultat tačan i da polinom ima nule u tačkama -1 i 1.

Svojstvo 2.2.1. Ukoliko polinom na segmentu $[a, b]$ ima višestruke nule, i ako a i b nisu nule tog polinoma, tada primenom Šturmove teoreme dobijamo broj različitih nula na ovom segmentu. Odnosno, ukoliko umesto polinoma $P(x)$ posmatramo polinom $R(x) = P(x)/\mathrm{GCD}(P(x), P'(x))$ vrednost $V(a) - V(b)$ se neće promeniti.

Dokaz. Da bi smo dokazali navedeno svojstvo primetimo da je $\mathrm{GCD}(P, P') = 1$ ako i samo ako polinom P nema višestruke nule. Ukoliko je $(x - x_0)$ r-tostruka nula polinoma tada se može pisati $P(x) = (x - x_0)^r q(x)$ gde $q(x)$ nije deljivo sa $(x - x_0)$. Nalaženjem izvoda dobijamo $P'(x) = (x - x_0)^r q'(x) + (x - x_0)^{r-1} q(x)$. Odavde je jasno da je $(x - x_0)$ faktor polinoma $P'(x)$ ako i samo ako je $r > 1$.

Neka je $G = \mathrm{GCD}(P(x), P'(x))$, $R(x) = P(x)/G(x)$. Dobijeni polinom ima iste nule kao polazni, ali sada više nijedna nula nije višestruka. Ukoliko su postojale višestruke nule svako njihovo ponavljanje je u polinomu $G(x)$. Niz Šturmovih polinoma je $R_0(x), R_1(x), \ldots, R_r(x)$. Pošto se $G(x)$ sastoji samo od nula polaznog polinoma koji nema nule u tačkama a i b ni $G(x)$ ne može biti nula u tim tačkama. Prema tome, ukoliko izraze iz dobijenog niza pomnožimo polinomom $G(x)$ i procenimo njihove vrednosti u tačkama a i b broj promena znakova ostaje konstantan, a dobijeni niz će odgovarati nizu koji bismo dobili polazeći od polinoma $P(x)$. $\square$

Ukoliko ne možemo da garantujemo da polinom nema nule u tačkama a i b, ali znamo da ukoliko postoje one nisu višestruke, tada Šturmova teorema daje broj nula na segmentu $(a, b]$ [1]. Razlog se naslućuje iz dokaza datog gore. Ukoliko postoje višestruke nule u ovim tačkama, izbacivanjem svih višestrukih nula prevazilazimo ovaj problem (broj različitih nula koji dobijamo je na otvorenom intervalu)[1].

2.3 Nejednakosti polinoma sa realnim koeficijentima

U radu [2] je dat sledeći algoritam koji omogućava dokazivanje nejednakosti sa polinomima sa realnim koeficijentima.

Neka je k broj decimala na koje se zaokružuje neki realan broj. Za koeficijente polinoma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

sa realnim koeficijentima

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$$

određujemo niz naniže zaokruženih koeficijenata

$$\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$$

određenih po sledećim pravilima:

- Ako je $a_k = a_0 a_1 \ldots a_k a_{k+1} \cdots > 0$ tada $\alpha_k = a_0 a_1 \ldots a_k$
- Ako je $a_k = a_0 a_1 \ldots a_k a_{k+1} \cdots < 0$ tada $\alpha_k = a_0 a_1 \ldots a_k'$ gde je a_k' naviše zaokružena cifra (uz eventualno posledično zaokruživanje i prethodnih cifara za jedan broj naviše).

Ako sa $P_{(k)}(x)$ označimo polinom dobijen opisanim zaokruživanjem koeficijenata imamo da je:

$$\forall (k > 0) P(x) \geq P_{(k)}(x) \tag{2.3}$$

Prema tome, ukoliko na nekom segmentu $[a, b]$ važi $P_{(k)}(x) > 0$ tada je i $P(x) > 0$ na istom segmentu.

[1] Ovaj slučaj se pojavljuje kada miksovano trigonometrijsko polinomske nejednakosti rešavamo u blizini nule.

Glava 3

Implementacija u programskom jeziku Python

Implementacija je urađena u programskom jeziku Python uz pomoć `sympy` biblioteke za simbolički račun.

Ispod dajemo implementaciju funkcije koja određuje niz Šturmovih polinoma.

```
def Sturms_remainders(p):

    p0 = p
    p1 = p.diff()

    ret = [p0, p1]

    while (degree(p0) != 1):
        q, r = div(p0, p1, domain='QQ')
        ret.append(-r)
        p0 = p1
        p1 = -r

    return ret
```

Algoritam 3.1: Određivanje niza Šturmovih polinoma

Pomoćna funkcija `sign_changes` računa broj promena znakova u prosleđenom joj nizu.

```python
def sign_changes(values):

    last_seen = None
    count = 0

    for val in values:

        if val == 0:
            continue

        if last_seen is None:
            last_seen = val < 0
            continue

        if last_seen != (val < 0):
            count += 1
            last_seen = val < 0

    return count
```

Algoritam 3.2: Određivanje broja promena znakova u nizu brojeva

Konačno, dajemo implementaciju funkcije koja određuje broj nula polinoma na datom segmentu.

```python
def number_of_zeros(polynomial, segment):

    (a, b) = segment
    p, _ = div(p, gcd(p, p.diff()))
    remainders = Sturms_remainders(p)

    Pa = [Poly(rem).eval(a) for rem in remainders[:-1]]
    Pa.append(remainders[-1])
    Pb = [Poly(rem).eval(b) for rem in remainders[:-1]]
    Pb.append(remainders[-1])

    Va = sign_changes(Pa)
    Vb = sign_changes(Pb)


    return Va - Vb
```

Algoritam 3.3: Određivanje broja različitih nula na zadatom segmentu

Glava 4

Rezultati

U ovoj glavi su predstavljeni rezultati koji se dobijaju korišćenjem date implementacije.

4.1 Primena Šturmove teoreme

Na segmentu $[0, 4]$ posmatramo polinom

$$\begin{aligned} P(x) = x^{11} - 10x^{10} - 21x^9 + 368x^8 + 127x^7 - 4818x^6 - 1795x^5 \\ +26188x^4 + 15816x^3 - 48416x^2 - 21040x + 33600 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Najveći zajednički delilac ovog polinoma i njegovo izvoda je:

$$G(x) = x^5 - 19x^3 - 34x^2 + 12x + 40 \tag{4.2}$$

Deljenjem dobijamo polinom:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{G(x)} = x^6 - 10x^5 - 2x^4 + 212x^3 - 263x^2 - 778x + 840 \tag{4.3}$$

Nizovi Šturmovih polinoma zaokruženi na dve decimale imaju vrednosti:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad & [840, -778, -623.89, 1087.53, 111.89, -1154.72, 335.1] \\ x = 4, \quad & [432, 126, -383, -567.5, 89.56, 696.8, 335.1] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Odavde je $V(0) = 4$ i $V(4) = 2$. Prema tome, na segmentu $[0, 4]$ imamo dve različite nule.

Dati polinom može da se faktoriše kao

$$P(x) = (x - 1)^2(x + 2)^2(x - 3)(x + 4)(x - 5)^2(x - 7).$$

Odavde je jasno da ovaj polinom zaista ima dve nule na segmentu $[0, 4]$.

Ako posmatramo segment $(1, 2)$, dobijamo $V(1) = 4$ i $V(2) = 4$, to jest, nemamo nijednu nulu.

4.2 Dokaz nejednakosti polinoma sa realnim koeficijentima

Neka je dat polinom

$$\begin{aligned} P(x) = &-\frac{\pi^3}{234}x^8 - \left(\frac{\pi}{142} + \frac{328}{432}\right)x^7 - \left(\frac{213}{121} + \frac{2\pi}{3}\right)x^6 \\ &- \left(\frac{\pi^3}{10} + \frac{1}{232}\right)x^5 - \left(\frac{4342}{2145} - \frac{\pi}{22}\right)x^3 + \left(\frac{\pi^3}{312} - \frac{\pi}{349}\right)x - \frac{\pi}{56} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dokazaćemo da na segmentu $(-1, -0.5)$ važi $P(x) > 0$. Dati polinom je u numeričkom zapisu koeficijenata sa proizvoljnom tačnošću:

$$\begin{aligned} P(x) = &-0.127597...x^8 - 0.781383...x^7 - 3.854725...x^6 \\ &-3.104938...x^5 - 1.881442...x^3 + 0.090377...x - 0.056099... \end{aligned} \tag{4.6}$$

Koeficijente zaokružujemo na dve decimale po algoritmu datom u prethodnoj glavi i dobijamo:

$$\begin{aligned} P_{(2)}(x) &= -0.13x^8 - 0.79x^7 - 3.86x^6 - 3.11x^5 - 1.89x^3 + 0.09x - 0.06 \\ &= -\frac{13}{100}x^8 + \frac{79}{100}x^7 - \frac{193}{50}x^6 - \frac{311}{100}x^5 - \frac{189}{100}x^3 + \frac{9}{100}x - \frac{3}{50} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Nizovi Šturmovih polinoma zaokruženi na dve decimale imaju vrednosti:

$$\begin{aligned} x = -1, &\quad [0.07, 8.60, -1.96, -73.37, 0.34, 346.92, -0.02, 29.01, 0.46] \\ x = -0.5, &\quad [0.16, -1.48, 0.07, 3.77, 0.02, 19.05, 0.0, 26.83, 0.46] \end{aligned} \tag{4.8}$$

Odavde je $V(-1) = 4$ i $V(0) = 4$, pa zaključujemo da je broj nula na ovom segmentu nula. Takođe imamo da je $P_{(2)}(-0.75) \approx 0.6$. Odatle sledi da je

$$\forall (x \in (-1, -0.5)) P_{(2)}(x) > 0 \tag{4.9}$$

Na osnovu $P(x) \geq P_{(2)}(x)$ nalazimo da je

$$\forall (x \in (-1, -0.5)) P(x) > 0$$

Literatura

[1] Philippe Pébay, J Maurice Rojas, and David C Thompson. Sturm's theorem with endpoints. 2017.

[2] B. J. Malešević and B. D. Banjac. One method for proving polynomial inequalities with real coefficients. In *2020 28th Telecommunications Forum (TELFOR)*, pages 1–3, 2020.