

2ª Lista de Exercícios

Teoria de Grafos

✓ Grafos Eulerianos e Hamiltonianos



Prof. Cleber Pinheiro

NOME:

TURNO:

PROFESSOR: CLEBER PINHEIRO

DISCIPLINA: TEORIA DE GRAFOS

SEMESTRE:

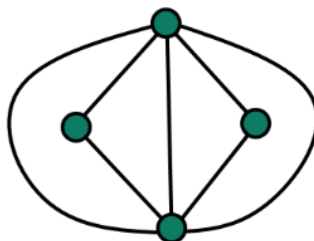
DATA:

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

2ª Lista

QUESTÃO 01

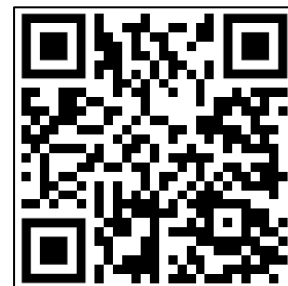
Grafos eulerianos e semi-eulerianos. Para o grafo a seguir, determine o grau de cada vértice e verifique se é um grafo euleriano/semi-euleriano.



Aula sugerida:

Caminhos e ciclos Euleriano/Hamiltoniano:

Vídeo → <https://www.youtube.com/watch?v=YWQQ-7U0PzU>



Resposta: O grafo é semi-euleriano porque os vértices superior e inferior são ambos ímpares (grau 5) e os outros dois vértices são pares (grau 2).

QUESTÃO 02

Grafos eulerianos e semi-eulerianos. Suponha que G seja um grafo com 300 vértices, cada um de grau par.

- Existe uma trilha semi-euleriana?
- Existe um circuito euleriano?

Justifique a resposta dada.

Documentário sugerido:

As Regras Secretas do Mundo Moderno: algoritmos:

Vídeo → <https://www.youtube.com/watch?v=FsxcDTqxCrw>

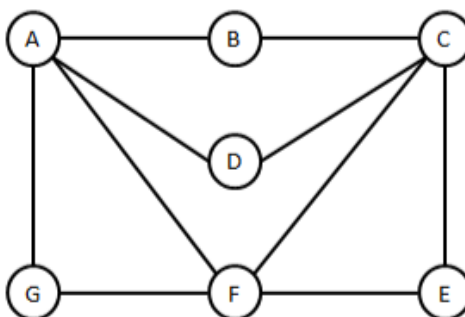


Resposta:

- A. Uma trilha semi-euleriana é uma trilha que percorre cada aresta exatamente uma vez e começa e termina em vértices diferentes. Neste problema, todos os vértices têm graus pares. Assim, o número de vezes que entramos em um vértice é igual ao número de vezes que saímos desse vértice. Portanto, não há trilha semi-euleriana, já que não existe vértices com grau ímpar.
- b) Um circuito euleriano é uma trilha euleriana fechada, onde cada aresta é percorrida exatamente uma vez. Assim, qualquer vértice deve ter grau par. Observe também que uma trilha euleriana começa e termina no mesmo vértice. No problema, todos os vértices possuem grau par. Logo, existe um circuito euleriano.

QUESTÃO 03

Grafos eulerianos e semi-eulerianos. Considere o seguinte grafo:



Especifique um circuito euleriano (especifique a resposta escrevendo os vértices separados por vírgula – exemplo: M,N,O,P,M).

Resposta:

Um circuito euleriano é um circuito que passa por todas as arestas apenas uma vez, começando e terminando no mesmo vértice. Possível solução de circuito de Euler: B,C,D,A,F,C,E,F,G,A,B .

QUESTÃO 04

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. Uma banda de rock está planejando uma turnê por diversas cidades. A tabela a seguir representa os percursos e distâncias entre as cidades em que irão atuar.

Cidade de Origem	Cidade de Destino	Distância (km)
A	C	9
A	F	6
B	E	11
B	F	5
C	D	3
C	F	7
E	D	5
E	F	8

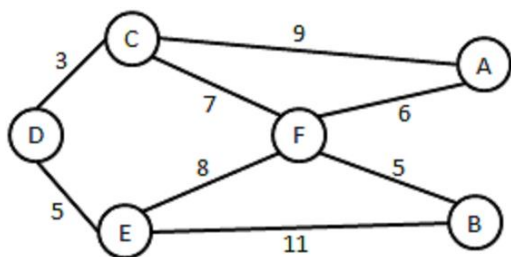
- A) Faça a representação desta turnê através de um grafo, onde os vértices representam as cidades e as arestas, as distâncias;
- B) O grafo construído possui caminhos hamiltonianos partindo da cidade “A”? Caso afirmativo, indique alguns.

Leitura sugerida:

SZWARCFITER, J. L Teoria Computacional de Grafos: os algoritmos. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018. p. 45-46.

Resposta:

A.



B. Exemplos de caminhos hamiltonianos partindo da cidade A:

A,F,B,E,D,C

A,C,F,B,E,D

A,C,D,E,F,B

A,C,D,E,F,B

QUESTÃO 05

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. Para o grafo da questão anterior, há quantos ciclos hamiltonianos, considerando como ponto de partida a cidade “A”? Indique-os, se existirem. Se houver mais de um ciclo hamiltoniano, represente aquele que se apresenta como a menor rota possível, partindo da cidade “A”.

Aula sugerida:

SOLUÇÃO DO DESAFIO: caminhos hamiltonianos:

Vídeo → <https://www.youtube.com/watch?v=68S0J2w378c>



QUESTÃO 06

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. Considerando o grafo da questão 04, determine, se existir:

A. uma trilha semi-euleriana partindo da cidade “E”;

B. um circuito euleriano.

Justifique a resposta dada.

QUESTÃO 07

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. O Certificado de Depósito Interbancário (CDI) é um tipo de um título emitido pelos bancos para transações entre as instituições financeiras no mercado interbancário. O CDI é utilizado como referência para diversas operações financeiras, especialmente em investimentos de renda fixa, servindo como um indicador para a taxa de juros praticada no mercado.

Abaixo está uma série temporal do valor percentual mensal deste título para o ano de 2.023 (considere como data para fechamento de rentabilidade o final do mês):

	jan	fev	mar	abr	mai	jun	jul	ago	set	out	nov	dez
2023	1,12%	0,92%	1,17%	0,92%	1,12%	1,07%	1,07%	1,14%	0,97%	1,00%	0,92%	0,89%

Considere um caso em que um capital é investido em tal título no dia 31 de dezembro de 2.022. A rentabilidade é mensal. Determine:

- A) o valor da taxa percentual acumulada no ano. Neste caso, tal taxa é dada por:

$$i_{ac} = (1+i_1) \times (1+i_2) \times (1+i_3) \times \dots \times (1+i_n) - 1,$$

onde i_{ac} é a taxa acumulada no período e i_k é a k -ésima taxa de acréscimo na forma decimal;

- B) um caminho hamiltoniano direcionado e ponderado contendo 13 vértices e 12 arestas, onde estes representam os meses e as taxas mensais, respectivamente (aqui, a data de referência é sempre no final do mês).

Documentário sugerido:

Explicando... Dinheiro:

trailer → <https://www.youtube.com/watch?v=sSQyPBn62AI>



Resposta: 13,0282%, aproximadamente

QUESTÃO 08

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. Considerando o grafo da questão anterior, suponha que os vértices representem o montante investido no título e as arestas sendo as taxas percentuais de rentabilidade. O capital é investido em tal título no dia 31 de dezembro de 2.022. É possível determinar um grafo **hamiltoniano** partindo do mês de janeiro (31 de janeiro). Neste caso, construa tal grafo incluindo todas as rentabilidades e explique como é possível tal construção (**dica**: de acordo com as taxas citadas anteriormente, deverá ocorrer perda de rentabilidade em algum momento para que se tenha um ciclo hamiltoniano no grafo a ser construído).

QUESTÃO 09

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. Considerando a questão 07, suponha um caso em que um capital é investido em tal título no dia 31 de dezembro de 2.022. A rentabilidade é mensal. Construa um grafo direcionado contendo um caminho hamiltoniano relacionado a série temporal do título, onde os vértices representam o valor do montante aplicado e as arestas sendo os percentuais de rentabilidade do CDI. Neste caso, considerando o capital inicial aplicado igual a **PV**, o montante final será:

$$FV = PV(1+i_1) \times (1+i_2) \times (1+i_3) \times \dots \times (1+i_n),$$

onde:

FV é o valor futuro/montante;

PV é o valor presente/capital (antes do acréscimos de rentabilidade);

i_k é a taxa de rentabilidade (acrécimo) na forma decimal.

QUESTÃO 10

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. Dado o preço de um bem ou serviço, o mesmo pode sofrer alterações durante o tempo. Tais modificações podem ser feitas através de acréscimos sucessivos e/ou simultâneos.

O preço de um bem/serviço com acréscimo sucessivos é dado pela expressão analítica:

$$P = P_0(1+i_1) \times (1+i_2) \times (1+i_3) \times \dots \times (1+i_n),$$

onde:

P é o preço final;

P_0 é o preço inicial (antes do acréscimo);

i_k é a k -ésima taxa de acréscimo na forma decimal.

Construa um grafo direcionado onde os vértices representam os preços do bem/serviço e as arestas sendo as taxas de acréscimos sucessivos. Neste caso, é possível construir um grafo hamiltoniano? Justifique.

Resposta: é possível construir um grafo hamiltoniano no caso em que o preço final se iguale ao preço inicial no conjunto de preços ilustrados. Para tanto, a última taxa de acréscimo deve ser, na verdade, **negativa** onde:

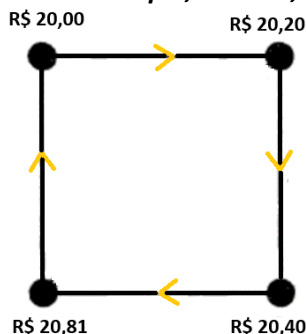
$$i'_n = 1/((1+i_1) \times (1+i_2) \times \dots \times (1+i_n)) - 1$$

Ou seja, o valor do último vértice coincide com aquele do primeiro vértice, formando um ciclo hamiltoniano.

QUESTÃO 11

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. Considere que o preço inicial de um bem seja igual a R\$ 20,00 e que o mesmo sofra três acréscimos sucessivos relativos às taxas de 1%, 1% e 2%, respectivamente. Em seguida, devido ao cenário momentâneo de deflação, a quarta taxa aplicada é negativa e igual a -3,89254%, aproximadamente. Construa um grafo cíclico onde os vértices representam os preços do bem/serviço e as arestas sendo as taxas de acréscimos (partindo do vértice que contenha o preço inicial dado). O referido grafo é hamiltoniano? Justifique.

Resposta: o grafo dado é hamiltoniano, considerando que, no ciclo, os valores de preços **NÃO** se repetem.



QUESTÃO 12

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. A cadeia de intermediários na comercialização de produtos envolve fabricantes, distribuidores, atacadistas e varejistas. Cada intermediário adiciona margem de lucro e custos operacionais, impactando o preço final no varejo. Cadeias complexas geralmente resultam em preços finais mais altos, enquanto distribuição eficiente pode contribuir para preços mais competitivos.

Faculdade de Tecnologia e Ciências Sociais Aplicadas – FATECS
Curso de Ciência da Computação

Considere um cenário hipotético para ilustrar os preços em cada etapa da cadeia de intermediários, usando como produto uma “commodity” agrícola: a maçã. Os dados abaixo mostram tal situação:

Produtor:

Custo de produção por caixa de maçãs: R\$ 10,00

Preço de venda (praticado pelo produtor) para o distribuidor/atacadista (intermediário 1): R\$ 12,00 (incluindo uma margem de lucro de R\$ 2,00)

Distribuidor/Atacadista:

Preço de compra do distribuidor/atacadista: R\$ 12,00

Preço de venda (praticado pelo distribuidor/atacadista) para o varejista (intermediário 2): R\$ 15,00 (incluindo uma margem de lucro de R\$ 3,00)

Varejista (Supermercado):

Preço de compra do varejista: R\$ 15,00

Preço de venda (praticado pelo varejista/supermercado) para o consumidor final: R\$ 20,00 (incluindo uma margem de lucro de R\$ 5,00)

Consumidor Final:

Preço de compra no supermercado: R\$ 20,00

Com base em tais informações, calcule:

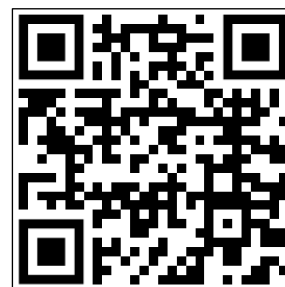
- A) a taxa unitária referente ao acréscimo de preço de venda entre o produtor e o distribuidor/atacadista;
- B) um grafo semi-hamiltoniano direcionado contendo 4 vértices e 3 arestas, onde estes representam o setor produtivo e as taxas de acréscimos (referentes aos preços de venda) as arestas, respectivamente.

Commodity: qualquer bem em estado bruto, de origem agropecuária ou de extração mineral ou vegetal, produzido em larga escala mundial e com características físicas homogêneas, destinado ao comércio externo.

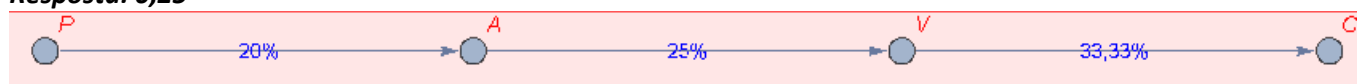
Documentário sugerido:

Rotten – Indústria de Alimentos:

trailer → https://www.youtube.com/watch?v=670tMhH_iHY

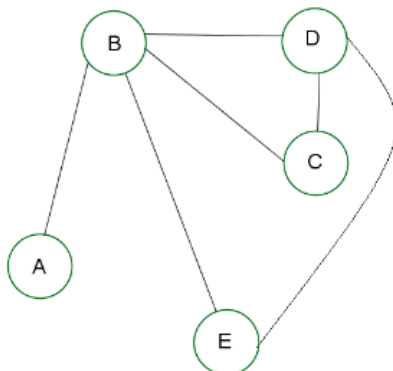


Resposta: 0,25



QUESTÃO 13

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. Para o grafo abaixo, determine um caminho semi-hamiltoniano.



Resposta: Em um caminho semi-hamiltoniano, cada vértice é visitado apenas uma vez, mas o ponto de partida não coincide com o ponto de destino no grafo. Dessa forma, um caminho semi-hamiltoniano possível é ABCDE.

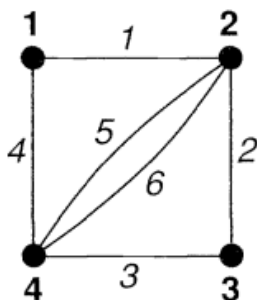
QUESTÃO 14

Grafos hamiltonianos e semi-hamiltonianos. Determine o número de ciclos hamiltonianos em grafos completos.

Resposta: $n!$

QUESTÃO 15

Matrizes de Adjacência e de Incidência. Determine as matrizes de adjacência e de incidência para o grafo a seguir:



Leitura sugerida:

NETTO, Paulo O. B. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 12-14.

Resposta:

Matriz de Adjacência:

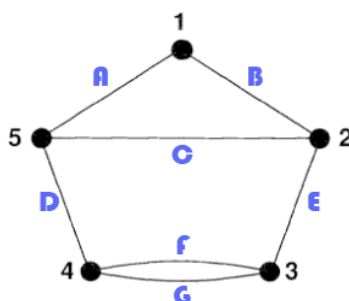
$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de Incidência:

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

QUESTÃO 16

Matrizes de Adjacência e de Incidência. Determine as matrizes de adjacência e de incidência para o grafo a seguir:



Leitura sugerida:

NETTO, Paulo O. B. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 12-14.

Resposta:

Matriz de Adjacência:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de Incidência:

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$